

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI, TIZI-OUZOU.

FACULTE: DES SCIENCES

DEPARTEMENT : MATHEMATIQUES

Memoire de Master

FILIERE : MATHEMATIQUES

SPECIALITE : Modélisation Mathématique

Présenté par:

CHALEL Afaf

Sujet:

Modèle GARCH Pré-Intégré

Devant le jury d'examen composé de :

MORSLI Mohammed	Professeur	UMMTO	Président
HAMAZ Abdelghani	MCB	UMMTO	Encadreur
KHELLAS Fazia	Professeur	UMMTO	Examinatrice

Table des matières

Introduction générale	1
1 Modèle GARCH et GARCH Intégré	4
1.1 Introduction	4
1.2 Modèles ARCH-GARCH	5
1.3 Etude de la stationnarité	6
1.3.1 Stationnarité forte d'un GARCH	7
1.3.2 Stationnarité faible d'un GARCH	9
1.4 Modèle IGARCH	12
1.4.1 Modèle ARMA et ARIMA	12
1.4.2 Stationnarité forte d'un IGARCH	14
1.5 Conclusion	18
2 Modèle GARCH Pré-Intégré	19
2.1 Introduction	19
2.2 Préliminaires	20
2.3 Comportement asymptotique du GARCH(1,1) pré-intégré : cas $\gamma < 0$. . .	28
2.4 Comportement asymptotique du GARCH(1,1) pré-intégré : cas $\gamma = 0$. . .	39
2.5 Comportement asymptotique du GARCH(1,1) pré-intégré : cas $\gamma > 0$. . .	43
2.6 Conclusion	49
3 Étude numérique	51
3.1 Simulation et estimation.	52
Conclusion générale	60
Bibliographie	60

Introduction générale

L'étude des séries temporelles, particulièrement en finance, s'est trouvée confrontée à de nombreux problèmes, notamment ceux qui concernent la non-stationnarité et le caractère leptokurtique de la distribution des données observées. Plusieurs modèles ont été élaborés pour tenter de répondre à l'un ou l'autre de ces problèmes. C'est cependant la modélisation du processus ARCH (AutoRegressive Conditonnai Heteroskedasticity), proposé par Engle en 1982 et leur extension GARCH (ARCH généralisés) due à Bollerslev (1986) qui a ouvert une nouvelle voie particulièrement riche et fructueuse. Outre l'intérêt de l'expression de la kurtosis qui reflète plus fidèlement que les modèles classiques, celle qui est constatée sur presque toutes les séries financières, un tel modèle intègre le caractère hétéroscédastique des processus à travers la variance conditionnelle. Une telle spécification permet de prendre en compte d'une façon élégante le fait que pour la plupart des séries financières la variabilité présente dépend du passé de façon plus ou moins importante. Il est ainsi possible de faire une description puis une prévision dynamique de la moyenne et de la volatilité d'une série. Cette idée a été reprise et étendue à des formulations de plus en plus raffinées.

L'objectif principal de ce mémoire est de développer une théorie asymptotique pour une classe très importante de ces modèles, dit GARCH pré-intégrés. Un tel modèle se caractérise par le fait que la somme α et β dans les modèles GARCH, en particulier GARCH(1,1), défini par:

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

est proche de l'unité (proche de 1). Plus précisément, nous nous intéressons à l'étude des solutions du modèle GARCH(1,1) pour lequel α est proche de 0 et β est proche de 1.

Nous montrons que le comportement asymptotique d'un tel modèle dépend du signe de $\gamma = \alpha + \beta - 1$. Pour réaliser cela, nous imposons des hypothèses sous lesquelles les solutions de ce modèle présentent des oscillations croissantes. Où il sera question de montrer que ces

oscillations croissantes se comportent approximativement comme une fonction puissance si $\gamma \leq 0$ est exponentielle si $\gamma > 0$.

Ce mémoire est organisé comme suit: le premier chapitre sera consacré à l'étude de la stationnarité des modèles GARCH et IGARCH en caractérisant d'une façon précise les conditions nécessaires et/ou suffisante de la faible et forte stationnarité. Le second chapitre fera l'objet de l'étude du comportement asymptotique des solutions du modèle GARCH pré-intégré. Il sera question de donner l'ordre de convergences des solutions d'un tel modèle. Quant au troisième chapitre, il sera consacré à l'étude du S&P 500 et de simulations intensives en utilisant le langage de programmation *R*.

Chapitre 1

Modèle GARCH et GARCH Intégré

Tout au long de ce mémoire nous noterons (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probablisé, sur lequel nous considérerons une suite de variables aléatoires réelles $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Une telle suite est appelée série temporelle et constitue un exemple de processus stochastique à temps discret.

1.1 Introduction

La modélisation des séries financières se révèle être un problème complexe. Cette complexité tient surtout à l'existence de régularité statistique commune à un très grand nombre de séries financières, de ce fait, celles-ci sont difficiles à reproduire à partir des modèles stochastiques.

Les processus ARCH (AutoRegressive Conditonnai Heteroskedasticity), proposé par Engle en 1982 et leur extensions GARCH (ARCH généralisés) proposé par Bollerslev (1986) représente une bonne approximation pour la modélisation de ces séries. Ces modèles économétriques se présentent sous la forme multiplicative $\epsilon_t = \sigma_t \eta_t$, où la variable aléatoire σ_t appelée volatilité (variance conditionnelle) est parfaitement connue à une date t comme fonction affine des valeurs passées du carré de la série (ϵ_t^2). Cette spécification particulière se révèle très fructueuse, car elle permet une étude complète des propriétés des solutions.

L'objectif de ce chapitre, est, en premier temps de mettre en exergue les définitions des modèles GARCH. L'accent sera mis sur les conditions de leur stationnarité au sens fort et au sens faible. Ensuite la seconde partie du chapitre sera consacrée à l'étude des modèles GARCH intégrés notés IGARCH où il sera question de montrer que sous certaines conditions imposées sur la loi des η_t , ces derniers sont fortement stationnaires mais ils ne sont pas faiblement stationnaires

1.2 Modèles ARCH-GARCH

Nous donnons une première définition d'un processus GARCH fondé sur les deux premiers moments conditionnels de ϵ_t .

Définition 1.1 (Modèle GARCH faible). On dit que $\{\epsilon_t\}$ est un processus GARCH(p, q) semi-fort (faible) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) $\mathbf{E}(\epsilon_t/\epsilon_{t-1}) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
- (ii) Il existe des constantes ω , α_i , $i = 1, \dots, q$ et β_j , $j = 1, \dots, p$ telles que

$$\sigma_t^2 = \mathbf{V}(\epsilon_t/\epsilon_{t-1}) = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-1}^2 \quad t \in \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

où p et q sont des entiers.

Remarque 1.1. L'équation 2.27 peut être écrite de manière symbolique sous la forme plus compacte

$$\sigma_t^2 = \alpha(B)\epsilon_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2 \quad t \in \mathbb{Z}$$

où B est l'opérateur retard ($B^i \epsilon_t^2 = \epsilon_{t-i}^2$, et $B^i \sigma_t^2 = \sigma_{t-i}^2$ pour tout entier i), α et β sont les polynômes de degré q et p :

$$\alpha(B) = \sum_{i=1}^q \alpha_i B^i, \quad \beta(B) = \sum_{j=1}^p \beta_j B^j.$$

Si $\beta(z) = 0$ on a

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-1}^2$$

et le processus est appelé *ARCH*(q).

La définition 1.1 ne fournit pas directement de processus la vérifiant. La définition plus restrictive suivante permettra d'obtenir explicitement des processus solutions.

Définition 1.2 (Modèle GARCH fort). $\{\epsilon_t\}$ est un processus GARCH(p, q) au sens fort s'il vérifie

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-1}^2 \end{cases} \quad (1.2)$$

où $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$, et $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$

et $\{\eta_t\}$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* (indépendante identiquement distribuée), avec

$\mathbf{E}(\eta_t) = 0$ et $\mathbf{E}(\eta_t^2) = 1$.

En remplaçant ϵ_{t-i} par $\sigma_{t-i}\eta_{t-i}$ dans l'équation 1.2 on obtient :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma_{t-i}^2 \eta_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-1}^2$$

que l'on peut écrire

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r a(\eta_{t-i}) \sigma_{t-i}^2.$$

Où $r = \max(p, q)$ et $a(z) = \alpha z^2 + \beta$ $i = 1, \dots, r$. Cette représentation montre que dans le cas d'un GARCH fort, le processus de volatilité vérifie une équation autorégressive, mais avec coefficients aléatoires.

Cependant il est clair qu'un processus GARCH fort tel que σ_t^2 est mesurable par rapport à la tribu $\sigma\{\epsilon_u, u < t\}$ est un processus GARCH au sens de la définition 1.1. La réciproque n'est cependant pas vraie.

Dans la section qui suit, nous allons chercher sous quelles conditions il existe des processus stationnaires au sens strict et au sens faible vérifiant les définitions 1.1 et/ou 1.2. On s'intéresse plus particulièrement aux solutions non anticipatives du modèle 1.2, c'est-à-dire aux processus $\{\epsilon_t\}$ tel que ϵ_t soit une fonction mesurable des variables η_{t-s} , $s \geq 0$.

1.3 Etude de la stationnarité

La stationnarité joue un rôle majeur en séries temporelles car elle remplace de manière naturelle l'hypothèse d'observations **iid** en statistique standard.

Avant de donner les conditions de stationnarité des modèles GARCH, rappelons les définitions de la stationnarité forte et de la stationnarité faible.

Définition 1.3 (Stationnarité forte). Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit strictement stationnaire, ou fortement stationnaire, ou stationnaire au premier ordre si, quel que soit le n-uplet du temps $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, tel que $t_i \in \mathbb{Z}$ et pour tout temps $h \in \mathbb{Z}$ avec $t_i + h \in \mathbb{Z}, \forall i, i = 1, \dots, n$, la suite $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ a la même loi que la suite $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.

Cependant cette notion est rarement vérifiée, alors que la notion suivante peut sembler moins exigeante car elle n'impose de contraintes qu'aux deux premiers moments des variables $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Définition 1.4 (Stationnarité faible). Un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit stationnaire

au second ordre, ou stationnaire au sens faible, ou stationnaire d'ordre deux si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbf{E}(X_t^2) < \infty$,
- (ii) $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbf{E}(X_t) = m$, indépendant de t ,
- (iii) $\forall (t, h) \in \mathbb{Z}^2, cov(X_t, X_{t+h}) = \mathbf{E}[(X_{t+h} - m)(X_t - m)] = \gamma_X(h)$, indépendant de t .

La première condition $\mathbf{E}(X_t^2) < \infty$ garantit tout simplement l'existence (ou la convergence) des moments d'ordre deux. La seconde condition $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbf{E}(X_t) = m$ porte sur les moments d'ordre un, et signifie tout simplement que les variables aléatoires $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ doivent avoir la même espérance quelle que soit la date t . Autrement dit, l'espérance du processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ doit être indépendante du temps. Enfin, la troisième condition, $\gamma_X(h)$ indépendant de t , porte sur les moments d'ordre deux résumés par la fonction d'autocovariance. Cette condition implique que ces moments doivent être indépendants de la date considérée, et ne doivent dépendre uniquement que de l'ordre des retards. Autrement dit la fonction d'autocovariance du processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ doit être indépendante du temps. En résumé, un processus est stationnaire au second ordre si l'ensemble de ses moments sont indépendants du temps. Par conséquent, il convient de noter que la stationnarité implique que la variance $\gamma(0)$ du processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est constante au cours du temps.

Remarque 1.2. La stationnarité forte implique les deux dernières conditions de la stationnarité faible. Autrement dit, la stationnarité forte implique la stationnarité faible si le moment d'ordre deux est fini.

1.3.1 Stationnarité forte d'un GARCH

Nous examinons d'abord le cas du modèle GARCH(1,1) qui peut se traiter avec des techniques élémentaires.

GARCH(1,1)

Dans le cas où $p=q=1$ dans le modèle 1.2 on obtient le modèle *GARCH*(1,1) fort défini par :

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{cases} \quad (1.3)$$

Théorème 1.1 (Nelson 1990: stationnarité forte d'un GARCH(1,1)). *si*

$$\gamma = \mathbf{E}(\log(\alpha \eta_t^2 + \beta)) < 0$$

la série

$$h_t = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a(\eta_{t-1}) + \cdots + a(\eta_{t-i}) \right\} \omega$$

converge presque sûrement **P.S**, et le processus $\{\epsilon_t\}$ défini par $\epsilon_t = \sqrt{h_t}\eta_t$ est l'unique solution strictement stationnaire du modèle (1.3). Cette solution est non anticipative et ergodique.

Si $\gamma \geq 0$ et $\omega > 0$ il n'existe pas de solution strictement stationnaire.

Remarque 1.3. 1. Les coefficients $\gamma = \mathbf{E}(\log(\alpha\eta_t^2 + \beta))$ existent toujours dans $[-\infty, +\infty)$. En effet

$$\gamma = \mathbf{E}(\log(\alpha\eta_t^2 + \beta)) < \mathbf{E}(\alpha\eta_t^2 + \beta) < \alpha + \beta < +\infty.$$

2. La condition $\gamma < 0$ implique que $\beta < 1$.

Par absurde supposons que $\beta \geq 1$ donc :

$$\mathbf{E}(\log(\alpha\eta_t^2 + \beta)) = \mathbf{E}(\log[\beta(\frac{\alpha}{\beta}\eta_t^2 + 1)]) = \mathbf{E}(\log(\beta) - \log((\frac{\alpha}{\beta}\eta_t^2 + 1))) > 0$$

D'où la contradiction.

3. Si $\alpha + \beta < 1$ alors $\gamma < 0$. En effet par application de l'inégalité de Jensen

$$\mathbf{E}(\log(\alpha\eta_t^2 + \beta)) \leq \log(\mathbf{E}(\alpha\eta_t^2 + \beta)) = \log(\alpha + \beta) < 0.$$

4. Si la condition de la stationnarité stricte du GARCH(1,1) est vérifiée pour α et β alors elle est également satisfaite pour une paire (α_1, β_1) avec $\alpha_1 \leq \alpha$ et $\beta_1 \leq \beta$. En effet

$$(\mathbf{E}(\log(\alpha_1\eta_t^2 + \beta_1))) \leq \mathbf{E}(\log(\alpha\eta_t^2 + \beta)) < 0.$$

On a également, la stationnarité stricte d'un GARCH(1,1) implique celle du ARCH(1) modèle obtenu en annulant β . En effet

$$\mathbf{E}(\log(\alpha\eta_t^2)) \leq \mathbf{E}(\log(\alpha\eta_t^2 + \beta)) < 0.$$

Théorème 1.2 (Bougerol et Picard, 1992: Stationnarité forte d'un GARCH(p,q)).

Le modèle GARCH (p, q) a une solution strictement stationnaire ssi

$$\gamma(A) < 0$$

où $\gamma(A)$ est le plus grand exposant de Lyapov de la suite de matrices $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ où

$$A_t = \begin{pmatrix} \alpha_1 \eta_t^2 & . & . & . & \alpha_q \eta_t^2 & \beta_1 \eta_t^2 & . & . & . & \beta_p \eta_t^2 \\ 1 & & & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & & 0 & 0 & . & & & & . \\ . & . & . & . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & . & . & & & & . \\ 0 & & & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ \alpha_1 & . & . & . & \alpha_q & \beta_1 & . & . & . & \beta_p \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 & & & & 0 & 0 \\ . & & & & . & 0 & . & & & 0 & . \\ . & & & & . & . & . & & & . & . \\ . & & & & . & . & . & & & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lorsqu'elle existe la solution stationnaire est unique, anticipative et ergodique.

1.3.2 Stationnarité faible d'un GARCH

Les théorèmes suivant donnent des conditions nécessaires et suffisantes de stationnarité au second-ordre.

Théorème 1.3 (stationnarité faible d'un GARCH(1,1)). *Supposons $\omega \geq 0$*

- *Le modèle GARCH(1,1) a une solution stationnaire au second-ordre non anticipative et ergodique ssi*

$$\alpha + \beta < 1$$

De plus, le processus solution $\{\epsilon_t\}$ est un bruit blanc et il n'existe pas d'autre solution stationnaire au second-ordre et non anticipative.

- *Si $\alpha + \beta \geq 1$ alors il n'existe pas de solutions GARCH(1,1) non anticipative et stationnaire au second-ordre.*

Preuve. *Si $\{\epsilon_t\}$ est un processus GARCH(1,1), au sens de la définition 1.1, stationnaire au second-ordre et non anticipatif, on a*

$$\mathbf{E}(\epsilon_t^2) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\epsilon_t^2 / \epsilon_u \quad u < t)) = \mathbf{E}(\sigma_t^2) = \omega + (\alpha + \beta)\mathbf{E}(\epsilon_t^2).$$

Soit

$$(1 - \alpha - \beta)\mathbf{E}(\epsilon_t^2) = \omega$$

Il faut donc $\alpha + \beta < 1$. On obtient de plus $\mathbf{E}(\epsilon_t^2) > 0$.

Inversement, supposons $\alpha + \beta < 1$. D'après la 3 éme point de la "Remarque 1.3"

précédente, la condition de stationnarité stricte est vérifiée. Il suffit donc de montrer que la solution strictement stationnaire définie par $\epsilon_t = \sqrt{h_t}\sigma_t$ admet une variance finie. La variable h_t étant une limite croissante de variables aléatoires positives, d'après le théorème de Beppo Levi, on peut intervertir espérance et somme infinie et écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\epsilon_t^2) = \mathbf{E}(h_t) &= \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}(a(\eta_{t-1}) \dots a(\eta_{t-i})) \right] \omega \\ &= \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}(a(\eta_{t-1}))^i \right] \omega \\ &= \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha + \beta)^i \right] \omega \\ &= \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)} < \infty. \end{aligned}$$

Cela suffit à prouver la stationnarité au second-ordre de la solution. De plus cette solution est un bruit blanc car :

$$\mathbf{E}(\epsilon_t) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\epsilon_t/\epsilon_u \quad u < t)) = 0$$

et pour tout $h > 0$,

$$\text{cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-h}) = \mathbf{E}(\epsilon_{t-h} \mathbf{E}(\epsilon_t/\epsilon_u \quad u < t)) = 0.$$

Reste à montrer l'unicité de cette solution.

Soit $\tilde{\epsilon}_t = \sqrt{\tilde{h}_t}\sigma_t$ une autre solution stationnaire au second-ordre, non anticipative. En remarquant que

$$h_t(N) = \omega + a(\eta_{t-1})h_{t-1}(N-1)$$

on trouve

$$|h_t - \tilde{h}_t| = a(\eta_{t-1}) \dots a(\eta_{t-i}) |h_{t-i-1} - \tilde{h}_{t-i-1}|.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|h_t - \tilde{h}_t|) &= \mathbf{E}(a(\eta_{t-1}) \dots a(\eta_{t-i})) \mathbf{E}(|h_{t-i-1} - \tilde{h}_{t-i-1}|) \\ &= (\alpha + \beta)^i \mathbf{E}(|h_{t-i-1} - \tilde{h}_{t-i-1}|). \end{aligned}$$

Notons que la seconde égalité résulte du caractère non anticipatif des solutions, hypothèse qui n'était pas nécessaire pour établir l'exactance de la solution strictement stationnaire.

L'espérance de $|h_{t-i-1} - \tilde{h}_{t-i-1}|$ étant bornée par $\mathbf{E}(|h_{t-i-1}|) + \mathbf{E}(|\tilde{h}_{t-i-1}|)$, quantité finie et indépendante de i par stationnarité, et comme $(\alpha + \beta)^i$ tendant vers 0 quand $i \rightarrow \infty$, on conclut $\mathbf{E}(|h_t - \tilde{h}_t|) = 0$ donc $h_t = \tilde{h}_t$, **P.S.**, pour tout t .

Théorème 1.4 (Bollerslev, 1986: stationnarité faible d'un GARCH(p,q)). *Si il existe un processus GARCH(p,q), au sens de la Définition 1.1, stationnaire au second-ordre et non anticipatif, et si $\omega > 0$, alors*

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 \quad (1.4)$$

Inversement, si 1.4 est vérifiée, l'unique solution strictement stationnaire du modèle 1.2 est un bruit blanc (donc stationnaire au second-ordre). Il n'existe pas d'autre solutions stationnaires au second-ordre. Autrement dit, Le modèle GARCH(p,q) a une solution stationnaire au second-ordre non anticipative ssi 1.4 est vérifiée.

Si

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j > 1$$

il n'existe pas de solution GARCH(p,q) non anticipative et stationnaire au second-ordre.

Remarque 1.4. 1. Sous les conditions du théorème, l'unique solution stationnaire du modèle 1.2 est un bruit blanc de variance

$$\mathbf{V}(\epsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \right)}.$$

En effet

$$\mathbf{V}(\epsilon_t) = \mathbf{E}(\epsilon_t^2) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\epsilon_t^2 / \epsilon_u \quad u < t)) = \mathbf{E}(\sigma_t^2)$$

et comme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\epsilon_t^2) &= \mathbf{E}\left(\omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-1}^2\right) \\ &= \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \mathbf{E}(\epsilon_{t-1}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j \mathbf{E}(\sigma_{t-1}^2) \\ &= \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \mathbf{E}(\epsilon_t^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j \mathbf{E}(\epsilon_t^2) \\ &= \frac{\omega}{1 - \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \right)} \end{aligned}$$

alors

$$\mathbf{V}(\epsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \right)}$$

2. Les conditions des Théorèmes 1.2 et 1.4, étant nécessaires et suffisantes, on a forcément

$$\left[\sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 \right] \Rightarrow \gamma(A)$$

puisque la solution stationnaire au second ordre du Théorème 1.4 l'est également strictement .

Lorsque $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$ ou $\alpha + \beta = 1$ dans le cas d'un GARCH(1,1) on parlera du processus *GARCH* intégré note *IGARCH* que nous introduisons dans la section qui suit.

1.4 Modèle IGARCH

Ce modèle a été introduit par Engred et Bollerslev en (1986), il est défini par le modèle 1.2 mais avec la condition en plus $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1 = 1$.

Afin de bien illustrer la notion du GARCH intégré, nous allons nous appuyer sur les définitions des modèles ARMA, ARIMA(ARMA intégré), et des processus intégrés .

1.4.1 Modèle ARMA et ARIMA

Définition 1.5 (ARMA). Un processus stationnaire $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ admet une représentation *ARMA*(p,q) suivante, où p et q sont des entiers:

$$X_t - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} = \epsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i} \Leftrightarrow \Phi(L)X_t = \Theta(L)\epsilon_t$$

s'il satisfait les conditions suivantes :

- (i) $\phi_p \neq 0, \theta_q \neq 0$.
- (ii) Les polynômes Φ et Θ ont toutes leurs racines de module strictement supérieur à 1.
- (iii) Φ et Θ n'ont pas de racines communes.
- (iv) ϵ_t est un bruit blanc, de variance $\sigma^2 \neq 0$.

Définition 1.6 (ARIMA). Un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ suit un modèle ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) d'ordre (p,d,q) si elle suit un modèle ARMA d'ordre $(p+d,q)$:

$$\Psi(L)X_t = \Theta(L)\epsilon_t$$

où la valeur $L = 1$ est racine d'ordre d du polynôme $\Psi(L)$. On modélise alors la série sous la forme:

$$\begin{aligned}\Phi(L)(1-L)^d X_t &= \Theta(L)\epsilon_t \\ \Phi(L)\nabla^d X_t &= \Theta(L)\epsilon_t\end{aligned}$$

où le polynôme $\Phi(L)$ est de degré p et le polynôme $\Theta(L)$ est de degré q . On écrit que le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ suit un processus ARIMA (p,d,q) .

On peut remarquer que le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ suivant un processus ARIMA n'est pas stationnaire puisqu'il faut lui appliquer l'opérateur de différenciation pour avoir un bruit blanc le générant.

Définition 1.7 (Processus intégré). Un processus non stationnaire $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, est caractérisé par une non stationnarité stochastique, ou encore le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est DS (Difference stationary) si le processus des différences $U_t = X_t - X_{t-1}$ est stationnaire. On parle aussi de processus intégré d'ordre 1. On note $X_t \sim I(1)$.

De manière générale, on dit que le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus intégré d'ordre d , avec d le degré d'intégration, si le processus des différences $U_t = X_t - X_{t-1} - \dots - X_{t-d}$ est stationnaire. On note $X_t \sim I(d)$.

Les réalisations d'un tel processus ressemble à une marche aléatoire.

L'innovation du processus $\{\epsilon_t^2\}$ est par définition la variable $\nu_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$. En remplaçant, dans l'équation (1.1), les variables σ_{t-j} par $\gamma_{t-j}^2 - \nu_{t-j}$ on obtient la représentation

$$\epsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) \epsilon_{t-i}^2 + \nu_t + \sum_{j=1}^p \beta_j \nu_{t-j} \quad (1.5)$$

où $r = \max(p,q)$, avec $\alpha_i = 0$ (resp. $\beta_j = 0$) si $i > q$ (resp. $j > p$). On retrouve ainsi dans cette équation la structure linéaire des modèles ARMA permettant par exemple un calcul très simple des prévisions linéaires. Sous des hypothèses supplémentaires (impliquant la stationnarité de ϵ_t^2), on peut affirmer que si $\{\epsilon_t\}$ est un GARCH (p, q) , $\{\epsilon_t^2\}$ est un processus ARMA (r, p) .

Cependant, cette dénomination (GARCH intégré) est justifiée par l'existence d'une racine

unité dans la partie autorégressive de la représentation 1.5 et fait référence aux modèles ARMA intégrés, ou ARIMA. Or, cette analogie peut être trompeuse : il n'existe pas de solution stationnaire (stricte ou au second-ordre) d'un modèle ARIMA, tandis qu'il existe une solution strictement stationnaire d'un modèle IGARCH sous des conditions très générales. On montre, en effet, à travers les théorèmes qui suivent que si la loi des η_t admet une densité de support non borné, le modèle IGARCH admet une unique solution strictement stationnaire, dans ce cas cette solution admet une variance infinie d'après ce qui précède.

1.4.2 Stationnarité forte d'un IGARCH

Il est bien connu que la forte stationnarité n'implique pas toujours la faible stationnarité, l'implication est vraie si le moment d'ordre deux est fini. De ce fait un processus *IGARCH* est fortement stationnaire mais il n'est pas faiblement stationnaire en raison de la non existence du moment d'ordre deux. En effet

si $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$ on obtient

$$\mathbf{V}(\epsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \right)} = \frac{\omega}{1 - 1} = \frac{\omega}{0} = \infty.$$

Dans ce qui suit, nous présentons les conditions d'existence d'une solution fortement stationnaire d'un modèle IGARCH.

Théorème 1.5 (Stationnarité stricte d'un IGARCH(1,1)). *Si $P(\eta_t^2 = 1) < 1$ alors le modèle IGARCH(1,1) admet une unique solution strictement stationnaire.*

Preuve. Rappelons que dans le cas $p = q = 1$ la matrice $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ peut être remplacée par $a(\eta_t) = \alpha\eta_t^2 + \beta$ par conséquent

$$\gamma = E(\log(a(\eta_t))) \leq \log(E(a(\eta_t))) = \log(E(\alpha + \beta)) = \log(1) = 0$$

et donc $\gamma \leq 0$. Le cas $\gamma = 0$ implique que $a(\eta_t)$ est **P.S** constant, et comme $E(a(\eta_t)) = 1$ alors cette constante peut être égale à 1 ainsi $\eta_t^2 = 1$, **P,S** contradiction avec l'hypothèse $P(\eta_t^2 = 1) < 1$

et donc $\gamma \neq 0$ ce qui implique que $\gamma < 0$.

Cette propriété s'étend au cas général (cas d'un IGARCH(p,q)) avec des conditions légèrement plus restrictives sur la loi de η_t .

Théorème 1.6. *Supposons que la distribution de (η_t) est à un support non borné et n'a*

pas de fonction de masse au point 0 (la distribution de $\{\eta_t\}$ n'admet pas de dérivée au point 0). Le modèle IGARCH(p,q) admet une unique solution strictement stationnaire.

Avant de commencer la démonstration du théorème, on énonce le corollaire suivant

Corollaire 1.1. Soit $\gamma(A)$ le plus grand exposant de Lyapouov de la suite de matrices $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ alors d'après un résultat de Kesten et Spitzer (1984, (1.4)), on a toujours :

$$\gamma(A) \leq \log(\rho(\mathbf{E}(A_t))).$$

Preuve. Montrons tout d'abord que le rayon spectral $\rho(A)$ de la matrice $A = \mathbf{E}(A_t)$ (le plus grand module de ses valeurs propres) est égal à 1. En effet

$$A = \mathbf{E}(A_t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots & \dots & \alpha_q & \beta_1 & \dots & \dots & \beta_p \\ 1 & & & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & & & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & & & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \dots & \dots & \dots & \alpha_q & \beta_1 & \dots & \dots & \beta_p \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots & 0 & \dots & & 0 \\ \dots & & & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & & & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & & & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$(\lambda I_{p+q} - A) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots & \dots & -\alpha_q & -\beta_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -\beta_p \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & \dots & 0 & \dots & & & & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -\alpha_q & \lambda - \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \dots & \beta_p \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \dots & 0 & -1 & \lambda & \dots & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \dots \\ \dots & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \dots \\ \dots & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \det(\lambda I_{p+q} - A) &= \lambda^q \begin{vmatrix} \lambda - \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \dots & \dots & \beta_p \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & & \dots & & & \\ \cdot & & & & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
 &+ (-1)^q(-\lambda) \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & & \dots & & & \\ \cdot & & & & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & \dots & -1 & \lambda \\ 1 - \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_q \end{vmatrix} (\lambda)^{p-1} \\
 &= \lambda^q \begin{vmatrix} \lambda - \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \dots & \dots & \beta_p \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & & \dots & & & \\ \cdot & & & & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
 &+ (-1)^{q+1}(-1)^{q+1}\lambda^p \begin{vmatrix} 1 - \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_q \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & & \dots & & & \\ \cdot & & & & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^q(\lambda^p - \lambda^{p-1}\beta_1 - \dots - \lambda\delta_{p-1} - \delta_p) \\
 &+ \lambda^p(\lambda^q - (\alpha_1 + 1)\lambda^{q-1}\alpha_1 - \lambda^{q-2}\alpha_2 - \dots - \lambda\alpha_{q-1} - \alpha_q) \\
 &= \lambda^{p+q}(1 - \sum_{j=1}^p \beta_j \lambda^j) + \lambda^{p+q}(1 - (\alpha_1 + \lambda)\lambda^{-1} - \sum_{i=2}^q \alpha_i \lambda^i) \\
 &= \lambda^{p+q}(1 - \sum_{j=1}^p \beta_j \lambda^j + 1 - \alpha_1 \delta^{-1} - 1 - \sum_{i=2}^q \alpha_i \lambda^i) \\
 &= \lambda^{p+q}(1 - \sum_{j=1}^p \beta_j \lambda^j - \sum_{i=1}^q \alpha_i \lambda^i)
 \end{aligned}$$

Dans le cas où $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$ et $\lambda = 1$ on a $\det(\lambda I_{p+q} - A) = 0$ et donc $\lambda = 1$ est une racine du polynôme caractéristique de la matrice A ($\lambda = 1$ est une valeur propre de la matrice A), ce qui donne : $\rho(A) \geq 1$.

D'autre part en supposant que λ est une valeur propre complexe de module supérieur strictement à 1, en utilisant l'inégalité

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

on trouve

$$\begin{aligned} |\det(\lambda I_{p+q} - A)| &= |\lambda^{p+q}(1 - \sum_{j=1}^p \beta_j \lambda^j - \sum_{i=1}^q \alpha_i \lambda^i)| \\ &= |\lambda^{p+q} - \lambda^{p+q}(\sum_{j=1}^p \beta_j \lambda^j - \sum_{i=1}^q \alpha_i \lambda^i)| \\ &\geq |\lambda^{p+q}| - |\lambda^{p+q}(\sum_{j=1}^p \beta_j \lambda^j - \sum_{i=1}^q \alpha_i \lambda^i)| \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) \quad \text{où } r = \max(p, q) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi $|\det(\lambda I_{p+q} - A)| \geq 0$ pour $|\lambda| > 1$ et donc on a nécessairement $\rho(A) \leq 1$.

Finalement $\rho(A) \geq 1$ et $\rho(A) \leq 1$ ce qui implique que $\rho(A) = 1$.

D'après le corollaire on conclut

$$\begin{aligned} \gamma(A) &\leq \log(\rho(\mathbf{E}(A_t))) \\ &\leq \log(1) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Reste à montrer que sous les conditions imposées sur les fonctions de répartition des η_t (ils sont à support non borné et ils n'admettent pas de fonction de masse au point 0) l'inégalité est stricte (voir Bougerol et Picard, 1992b, Corollary 2.2).

Cette partie de la démonstration na pas pu être faite car on a pas pu accéder à ce livre.

1.5 Conclusion

Grâce à leurs caractéristiques notamment celles qui concernent la variance conditionnelle, les modèles GARCH constituent une bonne approximation pour la modélisation des séries financières. L'étude de la stationnarité de ces modèles a fait l'objet de ce premier chapitre. Où on a pu constater que sous la condition $\gamma(A) < 0$ où $\gamma(A)$ est le plus grand exposant de Lyapounov de la suite de matrices $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ définie précédemment, le modèle GARCH(p,q) est strictement stationnaire. Cette dernière condition peut être simplifiée par la condition $\gamma = \mathbf{E}(\log(\alpha\eta_t^2 + \beta)) < 0$ dans le cas d'un GARCH (1,1). Cependant la condition $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$ ($\alpha + \beta < 1$ dans le cas d'un GARCH(1,1)) donne une condition nécessaire et suffisante pour la stationnarité au second-ordre d'un GARCH et une condition suffisante et non nécessaire pour la stationnarité stricte. Lorsque $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j > 1$ le modèle GARCH est non stationnaire.

Le cas où $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$ correspond au modèle GARCH intégré (IGARCH) ce dernier est strictement stationnaire mais il n'est pas faiblement stationnaire en raison de la non existence du moment d'ordre deux.

Le cas où cette somme n'est pas forcément égale à 1 mais très proche de 1. Le modèle GARCH est dit pré-intégré, l'étude des solutions d'un tel modèle sera établie dans le chapitre qui suit (nous considérons le cas particulier d'un GARCH(1,1) pré-intégré).

Chapitre 2

Modèle GARCH Pré-Intégré

2.1 Introduction

A travers le premier chapitre nous avons traité les modèles GARCH ainsi que les modèles GARCH intégrés, en mettant l'accent sur les conditions de leurs stationnarité au sens fort et au sens faible. Dans ce chapitre on s'intéresse aux modèles GARCH pré-intégrés, et ce, en traitant le cas particulier d'un GARCH (1,1) pré-intégré. Ces modèles se caractérisent par le fait que la somme $\alpha + \beta$ dans le modèle CARCH(1,1) est très proche de 1. L'objectif est d'étudier le comportement asymptotique des solutions de ce modèle.

L'étude d'un tel modèle est motivée par le fait bien établi que pour la plus part des séries chronologiques des rendements sur les actifs spéculatifs la somme $\alpha + \beta$ est très proche de 1. Cependant le principe de cette étude est de permettre à la fois à α et à β d'être des fonctions de la taille de l'échantillon n , en supposant $|\gamma| = n^{-q}$ pour un certain $\frac{1}{2} < q < 1$, et plus la taille de l'échantillon n est grande plus γ se rapproche de 0 ($\alpha + \beta$ approche l'unité). En ce qui concerne l'objectif de cette étude. C'est de montrer que le comportement asymptotique des solutions de ce modèle dépend du signe de γ .

Dans ce chapitre, il sera tout d'abord question de démontrer une formule de récurrence de la variance conditionnelle σ_t^2 des modèles GARCH(1,1) pré-intégré. Comme le comportement asymptotique des solutions ϵ_t de ce modèle peut être déduit à partir de celui de σ_t^2 (car $\sigma_t^2 = \epsilon_t \eta_t$) celle-ci sera utilisée par la suite pour démontrer les résultats principaux concernant le comportement asymptotique des solutions ϵ_t et qui montrent que sous l'hypothèse précédemment donnée les solutions trouvées de ce modèle exhibent des oscillations en croissance. Ces dernières varient, approximativement, comme une fonction polynômiale

si $\gamma \leq 0$ et exponentiellement si $\gamma > 0$.

2.2 Préliminaires

Rappelons que le modèle GARCH(1,1) est donné par

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, et $\{\eta_t\}$ est une suite de variables aléatoires **i.i.d**, avec $\mathbf{E}(\eta_t) = 0$ et $\mathbf{E}(\eta_t^2) = 1$.

notre objectif est d'étudier le comportement asymptotique des solutions de ce modèle dans le cas particulier où la somme $\alpha + \beta$ est très proche de 1 (modèle GARCH(1,1) pré-intégré). Plus précisément, on s'intéresse au cas où α s'approche de 0 et β s'approche de 1. Pour cela nous supposons tout au long de ce chapitre que $\alpha_n = \alpha$ et $\beta_n = \beta$ et que

$$\begin{aligned} \alpha_n &\rightarrow 0 & n &\rightarrow \infty \\ \beta_n &\rightarrow 1 & n &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

où n représente la taille de l'échantillon.

Nous allons montrer que le comportement de σ_t^2 (le comportement de ϵ_t peut être facilement déduit à partir de celui de σ_t^2) dépend essentiellement du signe de

$$\gamma = \gamma_n = \alpha + \beta - 1. \quad (2.2)$$

le comportement de σ_t^2 et ϵ_t sera étudié pour :

$$t = [nk] \quad \text{pour un } k \text{ fixé } 0 < k \leq 1. \quad (2.3)$$

Pour décrire ce comportement il sera nécessaire de supposer $|\gamma| = n^{-q}$ pour un certain $\frac{1}{2} < q < 1$. $\gamma = n^{-q}$ dans le cas où $\gamma > 0$ et $\gamma = -n^{-q}$ si $\gamma < 0$.

Plus la taille de l'échantillon, n et grand plus γ se rapproche de 0.

les hypothèses suivantes seront imposées tout au long de ce chapitre

$$n^{1/2}\gamma \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

$$n\alpha \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

$$n^{1/2}\alpha \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Il sera aussi nécessaire de supposer :

$$\mathbf{E}(\eta_0^2) = 1 \quad (2.7)$$

$$\mathbf{E}(\eta_0^4) < \infty \quad (2.8)$$

Afin de décrire le comportement de σ_t^2 (variance conditionnelle du modèle GARCH(1,1)), nous donnons deux formules de récurrence de celle-ci. La première est facilement obtenue à partir de la représentation 1.3. Et elle est valable pour tout modèle GARCH(1,1) quelle que soit la valeur de α et β tandis que la seconde est valable juste pour le modèle GARCH(1,1) pré-intégré que nous étudions.

En utilisant la représentation 1.3 on obtient facilement la formule de récurrence de σ_t^2 suivante :

$$\sigma_t^2 = \sigma_0 \prod_{i=1}^t (\beta + \alpha \eta_{t-i}^2) + \omega \left[1 + \sum_{j=1}^{t-1} \prod_{i=1}^j (\beta + \alpha \eta_{t-i}^2) \right] \quad (2.9)$$

en effet

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ &= \omega + \alpha (\sigma_{t-1}^2 \eta_{t-1}^2) + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ &= \omega + (\beta + \alpha \eta_{t-1}^2) \sigma_{t-1}^2 \\ &= \omega + (\beta + \alpha \eta_{t-1}^2) (\omega + (\beta + \alpha \eta_{t-2}^2) \sigma_{t-2}^2) \\ &= \omega + \omega (\beta + \alpha \eta_{t-1}^2) + (\beta + \alpha \eta_{t-1}^2) (\beta + \alpha \eta_{t-2}^2) \sigma_{t-2}^2 \\ &= \omega + \omega (\beta + \alpha \eta_{t-1}^2) + (\beta + \alpha \eta_{t-1}^2) (\beta + \alpha \eta_{t-2}^2) (\omega + (\beta + \alpha \eta_{t-3}^2) \sigma_{t-3}^2) \\ &= \omega + \omega (\beta + \alpha \eta_{t-1}^2) + \omega (\beta + \alpha \eta_{t-1}^2) (\beta + \alpha \eta_{t-2}^2) + (\beta + \alpha \eta_{t-1}^2) (\beta + \alpha \eta_{t-2}^2) (\beta + \alpha \eta_{t-3}^2) \sigma_{t-3}^2 \\ &\vdots \\ &= \sigma_0 (\beta + \alpha \eta_{t-1}^2) \dots (\beta + \alpha \eta_0^2) \\ &\quad + \omega [1 + (\beta + \alpha \eta_{t-1}^2) + (\beta + \alpha \eta_{t-1}^2) (\beta + \alpha \eta_{t-2}^2) + \dots + (\beta + \alpha \eta_{t-1}^2) \dots (\beta + \alpha \eta_0^2)] \\ &= \sigma_0 \prod_{i=1}^t (\beta + \alpha \eta_{t-i}^2) + \omega \left[1 + \sum_{j=1}^{t-1} \prod_{i=1}^j (\beta + \alpha \eta_{t-i}^2) \right]. \end{aligned}$$

Nous donnons dans la proposition qui suit une autre formule de récurrence pour σ_t^2 . Contrairement à la précédente, cette formule basée sur la convergence et la bornitude en probabilité et valable uniquement dans le cas d'un GARCH(1,1) pré-intégré que nous étudions.

Elle sera utilisée par la suite pour décrire le comportement des solutions ϵ_t .

Proposition. *Si les hypothèses 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 et 2.8 sont vérifiées, on a*

$$\sigma_t^2 = \sigma_0^2 e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 \right) + \omega \left[1 + \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} + R_{tj}^2 \right) (1 + R_{tj}^3) \right] \quad (2.10)$$

où ξ est une nouvelle variable aléatoire définie par :

$$\xi_j = \eta_j^2 - 1$$

et $R_t^1, R_{tj}^2, R_{tj}^3$ vérifie les conditions de bornitude en probabilité suivantes :

$$|R_t^1| = O_p(t(\alpha^2 + \gamma^2)) \quad (2.11)$$

$$\max_{1 \leq j \leq t} |R_{tj}^2| = O_p(t\alpha^2) \quad (2.12)$$

$$\max_{1 \leq j \leq t} \frac{1}{j \log \log j} |R_{tj}^2| = O_p(\alpha^2) \quad (2.13)$$

$$\max_{1 \leq j \leq t} \frac{1}{j} |R_{tj}^3| = O_p(\alpha^2 + \gamma^2) \quad (2.14)$$

Pour démontrer ce résultat on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses 2.3, 2.4, 2.6, 2.7 et 2.8, on a*

$$\max_{1 \leq i < t} |\beta + \alpha \eta_{t-i}^2 - 1| = o_p(1).$$

Preuve (Lemme). *On remarque que*

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i < t} |\beta + \alpha \eta_{t-i}^2 - 1| &= \max_{1 \leq i < t} |\beta + \alpha \eta_{t-i}^2 - 1 + \alpha - \alpha| \\ &= \max_{1 \leq i < t} |\alpha + \beta - 1 + \alpha \eta_{t-i}^2 - \alpha| \\ &= \max_{1 \leq i < t} |\gamma + \alpha \eta_{t-i}^2 - 1| \\ &\leq |\gamma| + \alpha \max_{1 \leq i < t} |\eta_{t-i}^2 - 1| \\ &= |\gamma| + \alpha \max_{1 \leq j < t-1} |\eta_j^2 - 1|. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse 2.3 on a $t = [nk]$ pour un k fixé $0 < k \leq 1$. Ce qui est équivalent à $nk - 1 < t \leq nk$.

Donc $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow \infty$.

D'autre part, les hypothèses 2.3, 2.8, nous assurons:

$$\max_{1 \leq j < t-1} |\eta_j^2 - 1| = O(k^{1/2})$$

qui est équivalent à l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$\max_{1 \leq j < t-1} |\eta_j^2 - 1| \leq Mt^{1/2}.$$

On multiplie par α on obtient

$$\alpha \max_{1 \leq j < t-1} |\eta_j^2 - 1| \leq \alpha Mt^{1/2} \leq \alpha M(nk)^{1/2} = Mt^{1/2} \alpha n^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

(D'après l'hypothèse 2.6)

Finalement

$$\alpha \max_{1 \leq j < t-1} |\eta_j^2 - 1| \xrightarrow{p.s} 0.$$

Comme $|\gamma| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ alors :

$$|\gamma| + \alpha \max_{1 \leq j < t-1} |\eta_j^2 - 1| \xrightarrow{p.s} 0$$

ce qui implique

$$\max_{1 \leq i < t} |\beta + \alpha \eta_{t-i}^2 - 1| \xrightarrow{p.s} 0$$

(Suite majorée par une suite qui tend vers zéro).

Etant donné que la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité on conclut :

$$\max_{1 \leq i < t} |\beta + \alpha \eta_{t-i}^2 - 1| = o_p(1)$$

Preuve (Proposition). La preuve de la proposition est composée de 3 étapes

Etape 1

Considérons la séquence suivante des événements $\{A_n\}$

$$A_n = \left\{ \max_{1 \leq i < t} |\beta + \alpha \eta_{t-i}^2 - 1| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

D'après le lemme 2.1

$$\max_{1 \leq i < t} |\beta + \alpha \eta_{t-i}^2 - 1| \xrightarrow{Pro} 0.$$

Ce qui signifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 1.$$

Le développement de Taylor donne

$$|\log(1+x) - x| \leq 2x^2 \quad \text{Si } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

On applique ce développement à la séquence $\{A_n\}$, on obtient, pour $x = \beta + \alpha\eta_{t-i}^2 - 1 = \gamma + \alpha\xi_{t-i} - 1 + x = \beta + \alpha\eta_{t-i}^2$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq i \leq j} \log(\beta + \alpha\eta_{t-i}^2) - \sum_{1 \leq i \leq j} (\gamma + \alpha\xi_{t-i}) \right| &\leq 2 \sum_{1 \leq i \leq j} (\gamma + \alpha\xi_{t-i})^2 \\ &\leq 2 \sum_{1 \leq i \leq j} 2\gamma^2 + 2\alpha^2\xi_{t-i}^2 \quad ((a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2) \\ &= 4\gamma^2 j + 4\alpha^2 \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i}^2 \\ &\leq 4j(\gamma^2 + \alpha^2 \max_{1 \leq i \leq j} \frac{1}{j} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i}^2). \end{aligned}$$

La loi des grands nombres et l'hypothèse 2.8 nous assurent que

$$\max_{1 \leq i \leq t} \frac{1}{j} (\xi_{t-1}^2 + \dots + \xi_{t-j}^2) = \max_{1 \leq i \leq t} \frac{1}{j} (\xi_1^2 + \dots + \xi_j^2) = O_p(1).$$

Notons que

$$\log(1+x) - x > 0 \text{ si } e^x < 1+x$$

donc ce cas

$$\sum_{1 \leq i \leq j} \log(\beta + \alpha\eta_{t-i}^2) = \sum_{1 \leq i \leq j} (\gamma + \alpha\xi_{t-i}) + \varphi_{tj}$$

où φ_{tj} vérifie la condition

$$\max_{1 \leq i \leq t} \frac{1}{j} \varphi_{tj} = O_p(\alpha^2 + \gamma^2).$$

D'où

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i \leq j} (\beta + \alpha\eta_{t-i}^2) &= \exp \left[\sum_{1 \leq i \leq j} \log(\beta + \alpha\eta_{t-i}^2) \right] \\ &= \exp \left[\sum_{1 \leq i \leq j} \gamma + \alpha\xi_{t-i} + \varphi_{tj} \right] \\ &= e^{\gamma j} \exp \left(\alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) \exp(+\varphi_{tj}) \\ &= e^{\gamma j} \exp \left(\alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) (1 + R_{tj}^3). \end{aligned}$$

où $R_{t_j}^3$ vérifie l'hypothèse 2.17.

Finalement on obtient

$$\prod_{1 \leq i \leq j} (\beta + \alpha \eta_{t-i}^2) = e^{\gamma_j} \exp \left(\alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) (1 + R_{t_j}^3). \quad (2.15)$$

Etape 2

Considérons la séquence d'événements

$$B_n \left\{ = \max_{1 \leq i \leq t} \left| \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \eta_{t-i}^2 - 1 \right| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

D'après le lemme 2.1

$$\max_{1 \leq i \leq t} \left| \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \eta_{t-i}^2 - 1 \right| = o_p(1).$$

D'où B_n vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 1.$$

Le développement de Taylor donne

$$|\exp(x) - (1 + x)| \leq \frac{\sqrt{e}x^2}{2} \quad \text{Pour } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

On applique ce développement à la séquence d'événements B_n , on obtient pour $x = \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i}$

$$\begin{aligned} \left| \exp \left(\alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) - \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) \right| &\leq \frac{\sqrt{e}}{2} \left(\alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right)^2 \\ &\leq \frac{\sqrt{e}}{2} \max_{1 \leq j \leq t} \left(\alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right)^2 \\ &\leq \frac{M\sqrt{e}}{2} t\alpha^2. \end{aligned}$$

En effet, étant donné que

$$\max_{1 \leq j \leq t} \left| \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right| = O_p(t^{1/2})$$

alors

$$\max_{1 \leq j \leq t} \left| \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right| = O_p(\alpha t^{1/2})$$

et

$$\max_{1 \leq j \leq t} \left(\alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right)^2 = O_p(t\alpha^2).$$

Comme $\exp(x) - (1+x) > 0$ Pour $|x| \leq \frac{1}{2}$ alors

$$\exp \left(\alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) - \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) > \frac{M\sqrt{e}}{2} t\alpha^2.$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\exp \left(\alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) = \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) + R_{tj}^2 \quad (2.16)$$

où R_{tj}^2 vérifie

$$\max_{1 \leq j \leq t} |R_{tj}^2| = O_p(t\alpha^2).$$

D'autre part la loi du logarithme itéré nous donne

$$\max_{1 \leq j \leq t} \frac{1}{j \log \log j} \left(\alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right)^2 = O_p(\alpha^2).$$

En remplaçant 2.18 dans 2.15 on obtient finalement

$$\prod_{1 \leq i \leq j} (\beta + \alpha \eta_{t-i}^2) = e^{\gamma j} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) + R_{tj}^2 (1 + R_{tj}^3) \quad (2.17)$$

où R_{tj}^2 vérifie les hypothèses 2.15, 2.16.

Etape 3

Pour conclure la démonstration on a à démontrer

$$\prod_{1 \leq i \leq t} (\beta + \alpha \eta_{t-i}^2) = e^{t\gamma} \exp \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq t} \xi_{t-i} + R_t^1 \right)$$

où R_t^1 vérifie la condition 2.14.

D'après 2.17

$$\prod_{1 \leq i \leq t} (\beta + \alpha \eta_{t-i}^2) = e^{t\gamma} \exp \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq t} \xi_{t-i} + R_{tj}^2 \right) (1 + R_{tj}^3).$$

Ce qui donne

$$\prod_{1 \leq i \leq t} (\beta + \alpha \eta_{t-i}^2) = e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq t} \xi_{t-i} + O_p(t\alpha^2) \right) (1 + O_p(k(\alpha^2 + \gamma^2)))$$

où

$$\left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq t} \xi_{t-i} + O_p(t\alpha^2)\right)(1 + O_p(k(\alpha^2 + \gamma^2))) = 1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq t} \xi_{t-i} + O_p(t(\alpha^2 + \gamma^2)).$$

Comme

$$\max_{1 \leq j \leq t} |R_{tj}^3| = O_p(\max_{1 \leq j \leq t} |\eta_{tj}|) = O_p(t(\alpha^2 + \gamma^2)) = o_p(1)$$

alors

$$\left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq t} \xi_{t-i} + O_p(t\alpha^2)\right)(1 + O_p(k(\alpha^2 + \gamma^2))) = 1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq t} \xi_{t-i} + R_t^1.$$

Avec R_t^1 vérifie la condition 2.14.

Finalement

$$\prod_{1 \leq i \leq t} (\beta + \alpha \eta_{t-i}^2) = e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq t} \xi_{t-i} + R_t^1\right) \quad (2.18)$$

En remplaçant les formules 2.10 et 2.18 dans la formule 2.9 on obtient la formule de la proposition.

Pour la suite des résultats de ce chapitre nous allons utiliser cette dernière formule de récurrence de σ_t^2 d'un GARCH(1,1) pré-intégré pour décrire le comportement asymptotique des vecteurs $[\sigma_{[nk_m]}^2, m = 1, 2, \dots, N]$ et $[\epsilon_{[nk_m]}, m = 1, 2, \dots, N]$, où N est un entier fixe, et

$$0 < k_1 < k_2 < \dots < k_N \leq 1 \quad (\text{d'après l'hypothèse 2.2}).$$

Et comme on l'a déjà mentionné auparavant on va montrer que le comportement de ces vecteurs dépend du signe de γ .

Ceci dit l'objectif des trois prochaines sections est de décrire le comportement de ces vecteurs dans chacun de ces trois cas ($\gamma < 0$, $\gamma = 0$ et $\gamma > 0$). Pour réaliser cela nous allons donner deux théorèmes pour chacun de ces trois cas, les premières seront des outils à utiliser pour démontrer les seconds, qui représentent les résultats principaux du chapitre, qui décrivent le comportement asymptotique des solutions $\epsilon_{[nk_m]}$ et qui montre que :

cas $\gamma < 0$	$\epsilon_{[nk_m]}/(\omega \gamma ^{-1})^{1/2} \xrightarrow{d} \eta_t$	Théorème 2.2
cas $\gamma = 0$	$\epsilon_{[nk_m]}/(\omega[nk_m])^{1/2} \xrightarrow{d} \eta_t$	Théorème 2.4
cas $\gamma > 0$	$\epsilon_{[nk_m]}(\omega^{-1}\gamma)^{-1/2} e^{[nk_m]\gamma/2} \xrightarrow{d} \eta_t$	Théorème 2.6

La preuve de ces théorèmes sera établie à travers plusieurs lemmes qui seront démontrés au fur et à mesure. Notons que ces derniers résultats nécessitent la présence des hypothèses supplémentaires suivantes :

$$n|\gamma| \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

$$\alpha n^{1/2} \log \log n \rightarrow 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} \rightarrow 0 \quad (2.21)$$

$$\mathbf{E}|\eta|^{4+\delta} < \infty \quad \text{Pour certains } \delta > 0 \quad (2.22)$$

2.3 Comportement asymptotique du GARCH(1,1) pré-intégré : cas $\gamma < 0$

Théorème 2.1. *Supposons que $\gamma < 0$ et que les hypothèses 2.4, 2.5, 2.7, 2.19, 2.20, 2.21, et 2.22 sont vérifiées, alors les variables aléatoires*

$$\frac{\sqrt{2|\gamma|^3}}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}(\xi_0^2)}} \left[\frac{\sigma_{[nk_m]}^2}{\omega} - \sum_{1 \leq j \leq [nt_m]-1} e^{j\gamma} \right] \quad 1 \leq N \leq m$$

sont i.i.d et suivent une loi normale centrée et réduite.

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.1, les variables aléatoires*

$$\left(\frac{|\gamma|}{\omega} \right)^{1/2} \epsilon_{[nk_m]} \quad 1 \leq N \leq m$$

sont asymptotiquement indépendantes et de même loi que η_0 .

Preuve (Théorème 2.1 et 2.2). *Tout au long de cette démonstration nous supposons que $\gamma = \gamma_n < 0$ et que $n|\gamma| \rightarrow \infty$.*

Avant de commencer la preuve de ces théorèmes on commencera par démontrer un lemme qui nous sera utile pour la suite de la démonstration.

Lemme 2.2. *Pour tout $\nu \geq 0$*

$$\sum_{1 \leq j \leq t} j^\nu e^{j\gamma} \sim \frac{1}{|\gamma|^{\nu+1}} \Gamma(\nu + 1).$$

Preuve. Considérons la fonction $f(x) = x^\nu e^{\gamma x}$. Sa dérivée est $f'(x) = x^\nu e^{\gamma x} (\frac{\nu}{x} + \gamma)$, $f'(x) = 0 \implies x = -\frac{\nu}{\gamma}$. Comme $\gamma < 0$ alors $x = \frac{\nu}{|\gamma|}$.
Donc $x^\nu e^{\gamma x}$ est croissante sur l'intervalle $[0, \frac{\nu}{|\gamma|}]$, et décroissante sur l'intervalle $[\frac{\nu}{|\gamma|}, \infty)$ ($x \in [0, \infty)$ $\gamma < 0$ $\nu \geq 0$). Ce qui donne que

$$\int_0^{\frac{\nu}{|\gamma|}-1} x^\nu e^{\gamma x} dx \leq \sum_{1 \leq j \leq \frac{\nu}{|\gamma|}} j^\nu e^{j\gamma} \leq \int_1^{\frac{\nu}{|\gamma|}+1} x^\nu e^{\gamma x} dx.$$

D'où

$$\sum_{1 \leq j \leq \frac{\nu}{|\gamma|}} j^\nu e^{j\gamma} \sim \int_0^{\frac{\nu}{|\gamma|}} x^\nu e^{\gamma x} dx. \quad (2.23)$$

en posant le changement de variable $y = -\gamma x$ ou $y = |\gamma|x$ (car $\gamma < 0$). On aura : $dy = |\gamma|dx$ ie $dx = \frac{1}{|\gamma|}dy$

en remplaçant dans 2.23

$$\sum_{1 \leq j \leq \frac{\nu}{|\gamma|}} j^\nu e^{j\gamma} \sim \int_0^\nu \left(\frac{y}{|\gamma|}\right)^\nu e^{-y} \frac{1}{|\gamma|} dy.$$

Autrement dit

$$\sum_{1 \leq j \leq \frac{\nu}{|\gamma|}} j^\nu e^{j\gamma} \sim \frac{1}{|\gamma|^{\nu+1}} \int_0^\nu y^\nu e^{-y} dy.$$

Un raisonnement similaire donne

$$\sum_{\frac{\nu}{|\gamma|} \leq j \leq t} j^\nu e^{j\gamma} \sim \frac{1}{|\gamma|^{\nu+1}} \int_\nu^\infty y^\nu e^{-y} dy.$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq t} j^\nu e^{j\gamma} &= \sum_{1 \leq j \leq \frac{\nu}{|\gamma|}} j^\nu e^{j\gamma} + \sum_{\frac{\nu}{|\gamma|} \leq j \leq t} j^\nu e^{j\gamma} \\ &= \frac{1}{|\gamma|^{\nu+1}} \int_0^\nu y^\nu e^{-y} dy + \frac{1}{|\gamma|^{\nu+1}} \int_\nu^\infty y^\nu e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{|\gamma|^{\nu+1}} \int_0^\infty y^\nu e^{-y} dy. \end{aligned}$$

Finalement

$$\sum_{1 \leq j \leq t} j^\nu e^{j\gamma} \sim \frac{1}{|\gamma|^{\nu+1}} \Gamma(\nu + 1).$$

ce qui conclut la preuve du lemme.

Retournons maintenant à la preuve des théorèmes.

Pour $t = [nk], 0 < k \leq 1$ en utilisant 2.10, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sigma_t^2 &= \sigma_0^2 e^{k\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 \right) + \omega \left[1 + \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} + R_{tj}^2 \right) (1 + R_{tj}^3) \right] \\
 &= \sigma_0^2 e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 \right) \\
 &+ \omega \left[1 + \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{t\gamma} + \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} R_{tj}^3 \right) \left(1 + R_{tj}^3 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) \right] \\
 &= \sigma_0^2 e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 \right) \\
 &+ \omega \left[1 + \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} R_{tj}^3 \left(1 + R_{tj}^3 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) \right. \\
 &\left. + \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} R_{tj}^2 + \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) \right] \\
 \sigma_t^2 &= \sigma_0^2 e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 \right) \\
 &+ \omega \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \left(1 + R_{tj}^3 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) R_{tj}^3 \\
 &+ \omega \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} R_{tj}^2 \\
 &+ \omega \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) \\
 \sigma_t^2 &= \omega + \sigma_{t,1}^2 + \sigma_{t,2}^2 + \sigma_{t,3}^2 + \sigma_{t,4}^2.
 \end{aligned}$$

Le fait que $\frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} \rightarrow 0$, implique que le terme ω dans le théorème 1.1 est négligeable.

On montre maintenant à travers les trois lemmes suivants que les termes $\sigma_{t,1}^2$, $\sigma_{t,2}^2$, $\sigma_{t,3}^2$ sont aussi négligeables. Cela revient à montrer que :

$$\frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} (\sigma_{t,1}^2 + \sigma_{t,2}^2 + \sigma_{t,3}^2) = o_p(1).$$

Lemme 2.3. Si les hypothèses 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 sont vérifiées, on a alors

$$\frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} \left| e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 \right) \right| = o_p(1).$$

où R_t^1 vérifie l'hypothèse 2.10.

Preuve. D'après les hypothèses (2.10)

$$|R_t^1| = O_p(t(\alpha^2 + \gamma^2))$$

et au fait que

$$\alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} = O_p(\alpha t^{1/2})$$

on a

$$\alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 = O_p(\alpha t^{1/2}) + O_p(t(\alpha^2 + \gamma^2)) = o_p(1) + o_p(1) = o_p(1).$$

D'autre part

$$\frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} e^{t\gamma} = o(1)t|\gamma|e^{t\gamma} = o(1).$$

Car $\gamma < 0$, et $t|\gamma| = [nk]|\gamma| \rightarrow \infty$

Finalement

$$\frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} \left| e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 \right) \right| = o_p(1).$$

Lemme 2.4. Si les hypothèses 2.3, 2.6, 2.7, et 2.21, sont vérifiées, on a alors

$$\frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} \left| \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-j} + R_{tj}^2 \right) + R_{tj}^3 \right| = o_p(1)$$

où R_{tj}^2 vérifie la condition 2.11, et R_{tj}^3 vérifie la condition 2.13.

Preuve. On a déjà vu que

$$\max_{1 \leq j \leq t} \sum_{1 \leq i \leq j} \left| \xi_{t-i} \right| = O_p(t^{1/2}).$$

Et d'après les hypothèses 2.11 nous avons

$$\max_{1 \leq j \leq t} \left| \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} + R_{tj}^2 \right| = O_p(\alpha t^{1/2}) + O_p(\alpha^2 t) = o_p(1) + o_p(1) = o_p(1).$$

les hypothèses , 2.6, 2.19, 2.21, 2.13, et le lemme 2.2 nous permet de conclure

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} \left| \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-j} + R_{tj}^2 \right) + R_{tj}^3 \right| \right| \\
&= O_p(1) \frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} (\alpha^2 + \gamma^2) \sum_{1 \leq j \leq t-1} j e^{j\gamma} \\
&= O_p(1) \frac{\alpha}{n^{1/2} |\gamma|} (\alpha^2 + \gamma^2) \frac{1}{|\gamma|} \\
&= O_p(1) \left(\frac{\alpha}{|\gamma|^{1/2}} + \frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} \right) \\
&= O_p(1) \left(\frac{\alpha n^{1/2}}{(|\gamma|n)^{1/2}} + \frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} \right) \\
&= O_p(1) (o_p(1) + o_p(1)) \\
&= O_p(1) o_p(1) \\
&= o_p(1).
\end{aligned}$$

Lemme 2.5. Si les hypothèses 2.3, et 2.20 sont vérifiées, on a alors

$$\frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} \sum_{1 \leq j \leq t-1} |R_{tj}^2| e^{j\gamma} = o_p(1)$$

où R_{tj}^2 vérifie la condition 2.12.

Preuve. D'après les hypothèses 2.12, 2.19, 2.20 et le lemme 2.2 nous avons

$$\begin{aligned}
& \frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} \sum_{1 \leq j \leq t-1} |R_{tj}^2| e^{j\gamma} \\
&= O_p(1) \frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} \alpha^2 \sum_{1 \leq j \leq t-1} j \log \log j e^{j\gamma} \\
&= O_p(1) |\gamma|^{3/2} \alpha (\log \log t) |\gamma|^{-2} \\
&= o_p(1) \alpha n^{1/2} (\log \log n) = o_p(1).
\end{aligned}$$

Avant de formuler notre prochain lemme, nous avons besoin d'introduire une nouvelle notation. Pour $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_N$. On définit $t(m) = [nt_m]$, $1 \leq m \leq N$

Ce lemme ne sera pas utilisé de manière directe pour démontrer les théorèmes 2.1 et 2.2 mais il sera utilisé pour démontrer le lemme qui le suit.

Lemme 2.6. Supposons que $\mathbf{E}|\eta_0|^{4+\delta} < \infty$ pour certains $\delta > 0$ et que les hypothèses 2.4 et 2.7 sont vérifiées, on a alors

$$(2|\gamma|)^{1/2} [\tau_1, \tau_2, \dots; \tau_N] \xrightarrow{d} (\mathbf{E}(\xi_9^2))^{1/2} [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N]$$

où

$$\tau_m = \sum_{1 \leq i \leq t(m)-1} e^{i\gamma} \xi_{t(m)-i} \quad 1 \leq m \leq N$$

et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ sont des variables aléatoires normales standards indépendantes.

Preuve. Notons que pour tout réel $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N$ nous avons :

$$\begin{aligned} \chi_1 \tau_1 + \chi_2 \tau_2 + \dots + \chi_N \tau_N &= \sum_{1 \leq i \leq t(1)-1} \chi_1 e^{i\gamma} \xi_{t(1)-i} + \sum_{1 \leq i \leq t(2)-1} \chi_1 e^{i\gamma} \xi_{t(2)-i} \\ &+ \dots + \sum_{1 \leq i \leq t(N)-1} \chi_1 e^{i\gamma} \xi_{t(N)-i} \\ &= \chi_1 (e^{1\gamma} \xi_{t(1)-1} + e^{2\gamma} \xi_{t(1)-2} + \dots + e^{(t(1)-1)\gamma} \xi_1) \\ &+ \chi_2 (e^{1\gamma} \xi_{t(2)-1} + e^{2\gamma} \xi_{t(2)-2} + \dots + e^{(t(2)-1)\gamma} \xi_1) \\ &\vdots \\ &+ \chi_N (e^{1\gamma} \xi_{t(N)-1} + e^{2\gamma} \xi_{t(N)-2} + \dots + e^{(t(N)-1)\gamma} \xi_1) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq t(1)-1} (\chi_1 e^{(t(1)-i)\gamma} + \chi_2 e^{(t(2)-i)\gamma} + \dots + \chi_N e^{(t(N)-i)\gamma}) \xi_i \\ &+ \sum_{t(1) \leq i \leq t(2)-1} (\chi_2 e^{(t(2)-i)\gamma} + \chi_3 e^{(t(3)-i)\gamma} + \dots + \chi_N e^{(t(N)-i)\gamma}) \xi_i \\ &\vdots \\ &+ \sum_{t(N-1) \leq i \leq t(N)-1} \chi_N e^{(t(N)-i)\gamma} \\ &= S_1 + S_2 + \dots + S_N. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_1^2) &= \mathbf{E}([\sum_{1 \leq i \leq t(1)-1} (\chi_1 e^{(t(1)-i)\gamma} + \chi_2 e^{(t(2)-i)\gamma} + \dots + \chi_N e^{(t(N)-i)\gamma}) \xi_i]^2) \\ &= \mathbf{E}(\sum_{1 \leq i \leq t(1)-1} (\chi_1 e^{(t(1)-i)\gamma} + \chi_2 e^{(t(2)-i)\gamma} + \dots + \chi_N e^{(t(N)-i)\gamma})^2 \xi_i^2) \\ &= \mathbf{E}(\xi_0^2 \sum_{1 \leq j \leq N} \chi_j \sum_{1 \leq i \leq t(1)-1} e^{2(t(j)-i)\gamma}) + \mathbf{E}((\xi_0^2 \sum_{1 \leq j \neq l \leq N} \chi_j \chi_l \sum_{1 \leq i \leq t(1)-1} e^{(t(j)-t(l)-2i)\gamma}). \end{aligned}$$

D'autre part on a d'après le lemme 2.2

$$\sum_{1 \leq i \leq t(1)-1} e^{2(t(1)-i)\gamma} = \sum_{1 \leq i \leq t(1)-1} e^{2(i)\gamma} \sim \frac{1}{2\gamma}.$$

Pour $2 \leq j \leq N$

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq t(1)-1} e^{2(t(j)-i)\gamma} &= e^{2(t(j)-t(1))\gamma} \sum_{1 \leq i \leq t(1)-1} e^{2(t(1)-i)\gamma} \\ &\sim \frac{1}{2\gamma} e^{2(t(j)-t(1))\gamma} \\ &= o\left(\frac{1}{|\gamma|}\right) \quad t(j) - t(1) < 0 \quad \forall 2 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

De manière similaire

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq t(1)-1} e^{(t(j)-t(l)-2i)\gamma} &= e^{(t(j)-t(1))\gamma} e^{(t(l)-t(1))\gamma} \sum_{1 \leq i \leq t(1)-1} e^{2(t(1)-i)\gamma} \\ &\sim \frac{1}{2\gamma} e^{(t(j)-t(1))\gamma} e^{(t(l)-t(1))\gamma} \\ &= o\left(\frac{1}{|\gamma|}\right). \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\mathbf{E}(S_1^2) = \chi_1^2 \mathbf{E}(\xi_0^2) \frac{1}{2|\gamma|} + o\left(\frac{1}{|\gamma|}\right).$$

De même pour $2 \leq j \leq N$

$$\mathbf{E}(S_j^2) = \chi_j^2 \mathbf{E}(\xi_0^2) \frac{1}{2|\gamma|} + o\left(\frac{1}{|\gamma|}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(\chi_1\tau_1 + \chi_2\tau_2 + \cdots + \chi_N\tau_N) \\ &= \mathbf{E}(S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_N^2) \\ &= \mathbf{E}(S_1^2) + \mathbf{E}(S_2^2) + \cdots + \mathbf{E}(S_N^2) \\ &= (\chi_1^2 + \chi_2^2 + \cdots + \chi_N^2) \mathbf{E}(\xi_0^2) \frac{1}{2|\gamma|} + o\left(\frac{1}{|\gamma|}\right). \end{aligned}$$

D'autre part on remarque

$$\chi_1\tau_1 + \chi_2\tau_2 + \cdots + \chi_N\tau_N = \sum_{1 \leq i \leq t(N)-1} c_i \xi_i$$

pour un certain $c_i \quad 1 \leq i \leq t(N) - 1$

Le théorème central limite (T.C.L) nous donne

$$(2|\gamma|)^{1/2} (\chi_1\tau_1 + \chi_2\tau_2 + \cdots + \chi_N\tau_N) \xrightarrow{d} (\mathbf{E}(\xi_0^2))^{1/2} (\chi_1^2 + \chi_2^2 + \cdots + \chi_N^2) \mu$$

ce qui est équivalent

$$(2|\gamma|)^{1/2}[\tau_1, \tau_2, \dots; \tau_N] \xrightarrow{d} (\mathbf{E}(\xi_9^2))^{1/2}[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N]$$

où μ est une loi normale centrée réduite. Afin de se mettre dans les conditions du théorème (T.C.L) li nous reste à choisir un δ aussi petit que $\mathbf{E}(|\xi_0|^{2+\delta}) < \infty$, pour cela il suffit de vérifier que pour tout $\delta > 0$

$$\frac{\left(\sum_{1 \leq i \leq t(N)-1} |c_i|^{2+\delta} \mathbf{E}(\xi_i)^{2+\delta} \right)^{1/2+\delta}}{\left(\sum_{1 \leq i \leq t(N)-1} c_i^2 \mathbf{E}(\xi_i)^2 \right)^{1/2}} = O\left(\left(\frac{1}{|\gamma|} \right)^{1/2+\delta-1/2} \right) = o(1).$$

De ce qui précède on remarque que le dénominateur se comporte comme $(\frac{1}{|\gamma|})^{1/2}$. d'autre part pour $1 \leq i \leq t(N) - 1$ l'inégalité de Jensen nous donne

$$\begin{aligned} |c_i|^{2+\delta} &= |\chi_1 e^{(t(1)-i)\gamma} + \chi_2 e^{(t(2)-i)\gamma} + \dots + \chi_N e^{(t(N)-i)\gamma}|^{2+\delta} \\ &\leq C_1(N) [|\chi_1|^{2+\delta} e^{(t(1)-i)(2+\delta)\gamma} + |\chi_2|^{2+\delta} e^{(t(2)-i)(2+\delta)\gamma} + \dots + |\chi_N|^{2+\delta} e^{(t(N)-i)(2+\delta)\gamma}] \end{aligned}$$

d'où

$$|c_i|^{2+\delta} = C_1(N) |\chi_1|^{2+\delta} \frac{1}{(2+\delta)|\gamma|} + o\left(\frac{1}{|\gamma|} \right) \leq C_2(N) \frac{1}{|\gamma|}$$

ce ci conclut la preuve du lemme.

Dans ce qui suit on donne un autre lemme qui va être utilisé pour démontrer le comportement asymptotique des vecteurs $[\epsilon_{[n_{km}], m = 1, 2, \dots, N}]$ dans le cas où $\gamma < 0$ pour le démontrer on utilisera le résultat précédemment donné (lemme 2.6)

Lemme 2.7. Supposons que $\mathbf{E}|\eta_0|^{4+\delta} < \infty$ pour certains $\delta > 0$ et que les hypothèses 2.4, et 2.7 sont vérifiées on a alors

$$(2|\gamma|)^{1/2}[\tau_1^*, \tau_2^*, \dots; \tau_N^*] \xrightarrow{d} (\mathbf{E}(\xi_9^2))^{1/2}[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N]$$

où

$$\tau_m^* = \sum_{1 \leq j \leq t(m)-1} e^{j\gamma} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t(m)-i} \quad 1 \leq m \leq N$$

et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ sont des variables aléatoires normales standards indépendantes.

Preuve. D'après le lemme précédant, il suffit de vérifier que, pour chaque m

$$|\gamma|^{3/2} \tau_m^* - |\gamma|^{1/2} \tau_m = o_p(1).$$

Pour alléger l'ensemble de notation, on fixe m et on note $t = t(m)$.

Par transposition

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) \\
 &= e^{1\gamma} \xi_{t-1} + e^{2\gamma} (\xi_{t-1} + \xi_{t-2}) + \cdots + e^{(t-1)\gamma} (\xi_{t-1} + \xi_{t-2} + \cdots + \xi_1) \\
 &= (e^{1\gamma} + e^{2\gamma} + \cdots + e^{(t-1)\gamma}) \xi_1 + (e^{2\gamma} + e^{3\gamma} + \cdots + e^{(t-1)\gamma}) \xi_2 + \cdots + e^{(t-1)\gamma} \xi_{t-1} \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq t-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \right) \xi_{t-i}.
 \end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que

$$\mathbf{E} \left[|\gamma|^{3/2} \sum_{1 \leq i \leq t-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \right) \xi_{t-i} - |\gamma|^{1/2} \sum_{1 \leq i \leq t(m)-1} e^{i\gamma} \xi_{t-i} \right]^2 = o_p(1).$$

Autrement dit

$$|\gamma|^3 \mathbf{E} \left[\sum_{1 \leq i \leq t-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \right) \xi_{t-i} - |\gamma|^{-1} \sum_{1 \leq i \leq t(m)-1} e^{i\gamma} \xi_{t-i} \right]^2 = o_p(1).$$

Notons que

$$\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} = \frac{e^{t\gamma} - e^{i\gamma}}{e^\gamma - 1},$$

et

$$\frac{1}{e^\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma} + O(1).$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} - |\gamma|^{-1} e^{i\gamma} &= \frac{e^{t\gamma} - e^{i\gamma}}{e^\gamma - 1} - |\gamma|^{-1} e^{i\gamma} \\
 &= \frac{1}{e^\gamma - 1} (e^{t\gamma} - e^{i\gamma}) - |\gamma|^{-1} e^{i\gamma} \\
 &= (\gamma^{-1} + O(1)) (e^{t\gamma} - e^{i\gamma}) - |\gamma|^{-1} e^{i\gamma} \\
 &= e^{t\gamma} (\gamma^{-1} + O(1)) + e^{i\gamma} O(1).
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} - |\gamma|^{-1} e^{i\gamma} \right)^2 = O(|\gamma|^{-1}).$$

D'autre part on remarque que

$$\sum_{1 \leq i \leq t-1} \xi_i = \sum_{1 \leq i \leq t-1} \xi_{t-i}.$$

Et par l'indépendance des ξ_i on obtient

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E} \left[\sum_{1 \leq i \leq t-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \right) \xi_{t-i} - |\gamma|^{-1} \sum_{1 \leq i \leq t-1} e^{i\gamma} \xi_{t-i} \right]^2 \\
 &= \mathbf{E} \left[\sum_{1 \leq i \leq t-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \right) \xi_i - |\gamma|^{-1} \sum_{1 \leq i \leq t-1} e^{i\gamma} \xi_i \right]^2 \\
 &= \mathbf{E} \left[\xi_i^2 \sum_{1 \leq i \leq t-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \right) - |\gamma|^{-1} |e^{i\gamma}| \right]^2 \\
 &= \mathbf{E} \left[\xi_0^2 \sum_{1 \leq i \leq t-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \right) - |\gamma|^{-1} |e^{i\gamma}| \right]^2 \\
 &= \mathbf{E}(\xi_0^2 O(|\gamma|^{-1})).
 \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
 & |\gamma|^3 \mathbf{E} \left[\sum_{1 \leq i \leq t-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \right) \xi_{t-i} - |\gamma|^{-1} \sum_{1 \leq i \leq t-1} e^{i\gamma} \xi_{t(m)-i} \right]^2 \\
 &= |\gamma|^3 \mathbf{E}(\xi_0^2 \sum_{1 \leq i \leq t-1} O(|\gamma|^{-1})) = |\gamma|^3 t O(|\gamma|^{-1}) \mathbf{E}(\xi_0^2) = o_p(1).
 \end{aligned}$$

Car $t\gamma^2 \rightarrow 0$

ceci conclut la preuve du lemme.

Retournons maintenant à la preuve des théorèmes 2.1 et 2.2.

Comme les termes $\omega, \sigma_{t,1}^2, \sigma_{t,2}^2, \sigma_{t,3}^2$ sont négligeables alors:

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t,4}^2 + o_p(1) = \omega \sum_{1 \leq j \leq [nk_m]-1} e^{j\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) + o_p(1)$$

ce qui est équivalent

$$\frac{\sigma_{[nk_m]}^2}{\omega} - \omega \sum_{1 \leq j \leq [nk_m]-1} e^{j\gamma} = \alpha \sum_{1 \leq j \leq [nk_m]-1} e^{j\gamma} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i}$$

d'où

$$\frac{\sqrt{2|\gamma|^3}}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}(\xi_0^2)}} \left[\frac{\sigma_{[nk_m]}^2}{\omega} - \sum_{1 \leq j \leq [nk_m]-1} e^{j\gamma} \right] = \frac{\sqrt{2|\gamma|^3}}{\sqrt{\mathbf{E}(\xi_0^2)}} \sum_{1 \leq j \leq [nk_m]-1} e^{j\gamma} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i}.$$

Et d'après le lemme 2.7, les variables aléatoires

$$\frac{\sqrt{2|\gamma|^3}}{\sqrt{\mathbf{E}(\xi_0^2)}} \sum_{1 \leq j \leq [nk_m]-1} e^{j\gamma} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i}$$

sont **i.i.d** et suivent une loi normale centrée et réduite (standard), alors les variables

$$\frac{\sqrt{2|\gamma|^3}}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}(\xi_0^2)}} \left[\frac{\sigma_{[nk_m]}^2}{\omega} - \sum_{1 \leq j \leq [nt_m]-1} e^{j\gamma} \right]$$

suivent aussi une loi normale centrée et réduite. Ceci conclut la preuve du théorème 2.1. La preuve du théorème 2.2 peut être déduite à partir de celle du théorème 2.1, en effet: D'après le lemme 2.2

$$\sum_{1 \leq j \leq [nt_m]-1} e^{j\gamma} \sim |\gamma|^{-1}$$

et d'autre part le lemme 2.7 et le théorème 2.1 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{|\gamma| \sigma_{[nt_m]-1}^2}{\omega} - 1 &= |\gamma| \sum_{1 \leq j \leq [nk_m]-1} e^{j\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) - 1 \\ &= |\gamma| (|\gamma|^{-1} - \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i}) - 1 \\ &= |\gamma| \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \\ &= |\gamma| \alpha O_p \left(\frac{1}{|\gamma|^{3/2}} \right) \\ &= O_p \left(\frac{\alpha}{|\gamma|^{1/2}} \right) \\ &= O_p \left(\frac{n^{1/2} \alpha}{n |\gamma|^{1/2}} \right) = o_p(1). \end{aligned}$$

Car $\frac{n^{1/2} \alpha}{n |\gamma|^{1/2}} \rightarrow 0$, en raison des hypothèses 2.6 et 2.19.

Finalement

$$\left(\frac{|\gamma|}{\omega} \right)^{1/2} \epsilon_{[nk_m]} = \eta_{[nt_m]} \left(\frac{|\gamma| \sigma_{[nt_m]}^2}{\omega} \right)^{1/2} = \eta_{[nt_m]} \left(\frac{|\gamma| \sigma_{[nt_m]}^2}{\omega} - 1 + 1 \right)^{1/2} \eta_{[nt_m]} (o_p(1) + 1).$$

D'où

$$\left(\frac{|\gamma|}{\omega} \right)^{1/2} \epsilon_{[nk_m]} \xrightarrow{Pr} \eta_{[nt_m]}.$$

Comme la convergence en probabilité implique la convergence en distribution on peut conclure

$$\left(\frac{|\gamma|}{\omega} \right)^{1/2} \epsilon_{[nk_m]} \xrightarrow{d} \eta_{[nt_m]-1}.$$

Ceci conclut la preuve du théorème.

A présent nous allons traiter le second cas. Le cas $\gamma = 0$ ($\alpha + \beta = 1$).

2.4 Comportement asymptotique du GARCH(1,1) pré-intégré : cas $\gamma = 0$

Théorème 2.3. *Supposons que $\gamma < 0$, et que les hypothèses 2.5, 2.6, 2.7, et 2.22 sont vérifiées, alors :*

$$\frac{1}{n^{1/2}\alpha} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}(\xi_0^2)}} \left[\frac{\sigma_{nk_m}^2}{\omega} - [nk_m], m = 1, 2, \dots, N \right] \xrightarrow{d} [\zeta_m, m = 1, 2, \dots, N].$$

où $[\zeta_m, m = 1, 2, \dots, N]$ est un vecteur gaussien de N Variables de moyenne nulle et covariance

$$\text{cov}(\zeta_i, \zeta_j) = \mathbf{E}(\zeta_i, \zeta_j) = \frac{1}{3} [\min(k_i, k_j)]^3.$$

Théorème 2.4. *Sous les hypothèses du théorème 2.3, les variables aléatoires*

$$\left(\frac{1}{\omega [nk_m]} \right)^{1/2} \epsilon_{[nk_m]} \quad 1 \leq N \leq m$$

sont asymptotiquement indépendantes et de même loi que η_0 .

Preuve (Preuve du théorème 2.3 et 2.4). *Tout au long de cette démonstration nous supposons que $\gamma = 0$.*

En utilisant 2.23, nous écrivons pour $t = [nk]$, $0 < k \leq 1$ et $\gamma = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \sigma_0^2 \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 \right) \\ &+ \omega \sum_{1 \leq j \leq t-1} \left(1 + R_{tj}^3 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) R_{tj}^3 \\ &+ \omega \sum_{1 \leq j \leq t-1} R_{tj}^2 \\ &+ \omega \sum_{1 \leq j \leq t-1} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sigma_{t.1}^2 + \sigma_{t.2}^2 + \sigma_{t.3}^2 + \sigma_{t.4}^2. \end{aligned}$$

A partir de l'hypothèse, 2.5 $n^{1/2}n\alpha \rightarrow \infty$, autrement dit $\frac{1}{n^{3/2}\alpha} \rightarrow 0$, ceci implique que le terme ω dans le théorème 1.3 est négligeable.

On montre maintenant à travers les trois lemmes suivants que les termes $\sigma_{t.1}^2$, $\sigma_{t.2}^2$ et $\sigma_{t.3}^2$ sont aussi négligeables, ie, on montre que

$$\frac{1}{n^{3/2}\alpha} (\sigma_{t.1}^2 + \sigma_{t.2}^2 + \sigma_{t.3}^2) = o_p(1).$$

Lemme 2.8. *Si les hypothèses 2.3, 2.5, 2.6, 2.7 et 2.8 sont vérifiées, on a alors*

$$\frac{1}{n^{3/2}\alpha} \left| 1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 \right| = o_p(1)$$

Où R_t^1 vérifie la condition 2.10.

Preuve. *D'après les hypothèses (2.10)*

$$|R_t^1| = O_p(t(\alpha^2 + \gamma^2))$$

et le fait que

$$\alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} = O_p(\alpha t^{1/2})$$

on aura

$$\alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 = O_p(\alpha t^{1/2}) + O_p(t(\alpha^2 + \gamma^2)) = o_p(1) + o_p(1) = o_p(1).$$

D'autre part

$$\frac{1}{n^{3/2}\alpha} = o_p(1)$$

alors

$$\frac{1}{n^{3/2}\alpha} \left| 1 + 1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 \right| = o_p(1) \cdot o_p(1) = o_p(1)$$

où R_t^1 vérifie la condition 2.10.

Lemme 2.9. *Si les hypothèses 2.3, 2.6 et 2.7 sont vérifiées, on a alors*

$$\frac{1}{n^{3/2}\alpha} \left| \sum_{1 \leq j \leq t-1} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_{tj}^2 \right) + R_{tj}^3 \right| = o_p(1).$$

où R_{tj}^2 vérifie la condition 2.11, et R_{tj}^3 vérifie la condition 2.13.

Preuve. *Nous avons déjà vu que*

$$\max_{1 \leq j \leq t} \sum_{1 \leq i \leq j} \left| \xi_{t-i} \right| = O_p(t^{1/2}).$$

Donc d'après les hypothèses 2.10 nous avons

$$\max_{1 \leq j \leq t} \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \left| \xi_{t-i} + R_{tj}^2 \right| = O_p(\alpha t^{1/2}) + O_p(\alpha t) = o_p(1) + o_p(1) = o_p(1).$$

les hypothèses 2.11, 2.13 2.4 2.5, 2.6, 2.19, 2.21 et le lemme 1.2 entraînent :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{n^{3/2}\alpha} \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_{tj}^2 \right) + R_{tj}^3 \right| \\
&= O_p(1) \frac{1}{n^{3/2}\alpha} (\alpha^2 + \beta^2) \sum_{1 \leq j \leq t-1} j e^{j\gamma} \\
&= O_p(1) \frac{1}{n^{3/2}\alpha} (\alpha^2 + \beta^2) \frac{1}{|\gamma|} \\
&= O_p(1) \left(\frac{\alpha}{n^{1/2}|\gamma|} + \frac{|\gamma|}{n^{1/2}\alpha} \right) \\
&= O_p(1) \left(\frac{n^{1/2}\alpha}{n|\gamma|} + \frac{n^{1/2}|\gamma|}{n\alpha} \right) \\
&= O_p(1) (o_p(1) + o_p(1)) \\
&= O_p(1) o_p(1) \\
&= o_p(1)
\end{aligned}$$

où R_{tj}^2 vérifie la condition 2.11 ,et R_{tj}^3 vérifie la condition 2.13.

Lemme 2.10. Si les hypothèses 2.3 et 2.6 sont vérifiées, on a alors

$$\frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} \sum_{1 \leq j \leq t-1} |R_{tj}^2| = o_p(1)$$

où R_{tj}^2 vérifie la condition 2.11.

Preuve. D'après les hypothèses 2.11, 2.3, 2.6 nous avons

$$\sum_{1 \leq j \leq t-1} |R_{tj}^2| = o_p(1)$$

et

$$\frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} = o_p(1)$$

d'où

$$\frac{|\gamma|^{3/2}}{\alpha} \sum_{1 \leq j \leq t-1} |R_{tj}^2| = o_p(1) \cdot o_p(1) = o_p(1)$$

où R_{tj}^2 vérifie la condition 2.11.

Comme ω , $\sigma_{t,1}^2$, $\sigma_{t,2}^2$ et $\sigma_{t,3}^2$ sont négligeables, alors :

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t,4}^2 = \omega \sum_{1 \leq j \leq t-1} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) + o_p(1).$$

Autrement dit

$$\frac{1}{n^{1/2}\alpha} \left(\frac{\sigma_t^2}{\omega} - t \right) = \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{1 \leq j \leq t-1} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} + o_p(1).$$

Pour trouver la loi de cette quantité le lemme qui suit sera nécessaire.

Lemme 2.11. *Si les hypothèses 2.7 et 2.22 Sont vérifiées, on a alors*

$$\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{1 \leq j \leq nk-1} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \xrightarrow{d} \mathbf{E}(\xi_0^2)^{1/2} \int_0^k x dW(x) \quad \text{sur } D[0,1]$$

ou $\{W(x), 0 \leq x < \infty\}$ est un processus de Wiener.

(Le rappel sur les processus de Wiener se fera au niveau de l'annexe.)

Preuve. Notons que

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq t-i} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} &= \sum_{1 \leq i \leq t-i} (t-i) \xi_{t-i} \\ &= \int_0^{t-i} x d \left(\sum_{1 \leq j \leq x} \xi_j \right) \\ &= (t-i) \sum_{1 \leq j \leq t-i} \xi_j \\ &= \int_0^{t-i} \left(\sum_{1 \leq j \leq dx} \xi_j \right). \end{aligned}$$

Par 2.8 et le rapprochement de Major et Tusnady, il existe un processus de Wiener W^* tel que

$$\sum_{1 \leq j \leq x} -\mathbf{E}(\xi_0^2)^{1/2} w^*(x) = o(x^{1/2+\delta}) \quad p.s$$

d'où

$$n^{-3/2} \sup_{0 \leq k \leq 1} \left| \int_0^{nk-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq x} -\mathbf{E}(\xi_0^2)^{1/2} w^*(x) \right) dx \right| = O_p(1) n^{-3/2} n^{1+1/(2+\delta)} = o_p(1)$$

et

$$n^{-3/2} \sup_{0 \leq k \leq 1} \left| (nk-1) \left(\sum_{1 \leq j \leq x} -\mathbf{E}(\xi_0^2)^{1/2} w^*(x) \right) dx \right| = o_p(1)$$

Dans les deux dernières formules, nous pouvons remplacer clairement $nk-1$ par nk . Pour compléter la preuve, il suffit donc de constater que, par la transformation à l'échelle du processus de Wiener,

$$\left\{ n^{-3/2} \left(nk W^*(nk) - \int_0^{nk} W^*(x) dx \right), 0 \leq k \leq 1 \right\} \xrightarrow{d} \left\{ t w(t) - \int_0^t W(x) dx, 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

une integration par partie nous permet d'obtenir la relation entre la loi de $W(\cdot)$ et $W^*(\cdot)$. un remplacement simple nous donne la formule du lemme.

D'après le lemme 2.11 on peut écrire

$$\left[\frac{1}{n^{1/2}\alpha} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}(\xi_0^2)}} \left(\frac{\sigma_{nk_m}^2}{\omega} \right) - [nk_m], 0 < t < 1 \right] = \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}(\xi_0^2)}} \sum_{1 \leq j \leq t-1} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \xrightarrow{d} \int_0^t x dW(x).$$

On observe également que

$$\left[\int_0^K x dW(x) \int_0^s x dW(x) \right] = \int_0^{\min(k,s)} x^2 dx = \frac{1}{3} [\min(k,s)]^3.$$

Ce qui conclut la preuve du théorème 2.3

(notons que $\int_0^K x dW(x) = \zeta_k$ définie précédemment)

La preuve du théorème 2.4 peut être déduite à partir de celle du théorème 2.3. En effet, d'après le théorème 2.3

$$\left(\frac{1}{\omega[nk_m]} \right) \sigma_{[nk_m]}^2 \xrightarrow{D} \frac{\zeta_m}{[ntm]} n \alpha^{1/2} \sqrt{\mathbf{E}(\xi_0^2)} + 1,$$

et d'après l'hypothèse 2.6

$$\left(\frac{1}{\omega[nk_m]} \right) \sigma_{[nk_m]}^2 \xrightarrow{d} 1,$$

d'où

$$\left(\frac{1}{\omega[nk_m]} \right)^{1/2} \epsilon_{[nk_m]} = \left(\frac{1}{\omega[nk_m]} \right)^{1/2} \sigma_{[nk_m]} \eta_{[nk_m]} \xrightarrow{d} \eta_{[nk_m]}$$

ce qui conclut la preuve du théorème.

Enfin nous terminons cette étude par traiter le troisième et dernier cas $\gamma > 0$.

2.5 Comportement asymptotique du GARCH(1,1) pré-intégré : cas $\gamma > 0$

Dans ce cas, nous avons aussi besoin d'hypothèses 2.19 et 2.20, mais l'hypothèse 2.21 est renforcée par

$$\frac{\gamma}{\alpha} = O(1) \tag{2.24}$$

Théorème 2.5. *Supposons que $\gamma < 0$ et que les hypothèses 2.5, 2.7, 2.8, 2.19, 2.20 et 2.24 sont vérifiées, alors le vecteur*

$$\left[\frac{1}{(\mathbf{E}(\xi_0^2))^{1/2}} \frac{\gamma e^{-[nk_m]\gamma}}{\alpha [nk_m]^{1/2}} \left(\frac{\sigma_{nk_m}^2}{\omega} - \sum_{1 \leq j \leq [nk_m]-1} e^{j\gamma} \right), m = 1, 2, \dots, N \right]$$

converge en distribution vers le vecteur $[W(t_m), m = 1, 2, \dots, N]$. Où $W(\cdot)$ est un processus de Wiener.

Théorème 2.6. *Sous les hypothèses du théorème 2.5, les variables aléatoires*

$$\left(\frac{|\gamma|}{\omega}\right)^{1/2} e^{-[nk_m]\gamma/2} \epsilon_{[nk_m]} \quad 1 \leq N \leq m$$

Sont asymptotiquement indépendantes et de même loi que η_0 .

Preuve (Preuve du théorème 2.5 et 2.6). *Tout au long de cette démonstration nous supposons que $\gamma > 0$ et que $n\gamma \rightarrow \infty$.*

Les hypothèses du théorème 2.5 impliquent que toutes les hypothèses 2.4, 2.5, 2.6 et 2.8 sont vérifiées. En particulier, l'hypothèse 2.4 est impliquée par 2.20 et 2.22.

Comme $\frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \rightarrow 0$ alors le terme ω dans le théorème 2.4 est négligeable.

Nous utilisons à nouveau la décomposition 2.24 pour montrer que

$$\frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} (\sigma_{t.1}^2 + \sigma_{t.2}^2 + \sigma_{t.3}^2) = o_p(1).$$

Cette dernière formule sera démontrée à travers les 3 lemmes suivants.

Lemme 2.12. *Si les hypothèses 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 et 2.24 sont vérifiées, on a alors*

$$\frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \left| e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 \right) \right| = o_p(1)$$

où R_{tj}^2 vérifie la condition 2.10.

Preuve. *d'après les hypothèses du lemme*

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \left| e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_t^1 \right) \right| \\ &= O_p(1) \frac{1}{\alpha} \frac{1}{t^{1/2}} (1 + \alpha t^{1/2} + t(\alpha^2 + \gamma^2)) \\ &= O_p(1) \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \gamma + \gamma(\alpha t^{1/2}) + \frac{(\gamma t^{1/2})^3}{t\alpha} \right) \\ &= O_p(1) o_p(1) = o_p(1). \end{aligned}$$

Lemme 2.13. *Si les hypothèses 2.3, 2.4, 2.6, 2.7, 2.8 et 2.24 sont vérifiées, on a alors*

$$\frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \left| \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_{tj}^2 \right) R_{tj}^3 \right| = o_p(1)$$

où R_{tj}^2 vérifie la condition 2.11, et R_{tj}^3 vérifie la condition 2.13.

Preuve. D'après les hypothèses du lemme

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_{tj}^2 \right) R_{tj}^3 \right| \\ &= O_p(1) \frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \sum_{1 \leq j \leq t-1} j e^{j\gamma} (\alpha^2 + \gamma^2). \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \sum_{1 \leq j \leq t-1} j e^{j\gamma} (\alpha^2 + \gamma^2) \\ &\leq \frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} j t \left(\frac{e^{t\gamma} - e^\gamma}{e^\gamma - 1} \right) (\alpha^2 + \gamma^2). \end{aligned}$$

Comme pour tout $\gamma > 0$

$$\frac{e^{t\gamma} - e^\gamma}{e^\gamma - 1} < \frac{e^{t\gamma}}{\gamma} \quad (2.25)$$

alors

$$\begin{aligned} U_n &\leq \frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} j t \frac{e^{t\gamma}}{\gamma} (\alpha^2 + \gamma^2) \\ &= t^{1/2} \alpha + \frac{t^{1/2} \gamma^2}{\alpha} \\ &= t^{1/2} \alpha + (t^{1/2} \gamma) \frac{\gamma}{\alpha} = o(1). \end{aligned}$$

Finalement

$$\left| \frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{t\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq j \leq t} \xi_{t-j} + R_{tj}^2 \right) R_{tj}^3 \right| = o_p(1).$$

Lemme 2.14. Si les hypothèses 2.3, 2.8 et 2.20 sont vérifiées, on a alors

$$\frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \sum_{1 \leq j \leq t-1} |R_{tj}^2| e^{j\gamma} = o_p(1)$$

où R_{tj}^2 vérifie la condition 1.10.

Preuve. D'après les hypothèses du lemme

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \sum_{1 \leq j \leq t-1} |R_{tj}^2| e^{j\gamma} \\ &= O_p(1) \frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} j \log \log j. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} j \log \log j \\ &\leq \frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} t \log \log t \left(\frac{e^{t\gamma} - e^\gamma}{e^\gamma - 1} \right) \alpha^2 \end{aligned}$$

d'après 2.25, 2.20 et le fait que $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow \infty$ on obtient

$$\begin{aligned} V_n &\leq \frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} t \log \log t \frac{e^{t\gamma}}{\gamma} \alpha^2 \\ &= \alpha t^{1/2} \log \log t = o(1). \end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \sum_{1 \leq j \leq t-1} |R_{tj}^2| e^{j\gamma} = o_p(1)$$

ce qui conclut la preuve du lemme .

Pour la suite de la démonstration des théorèmes on aura aussi besoin du résultat suivant.

Lemme 2.15. *Si les hypothèses 2.3, 2.7 et 2.8 sont vérifiées, on a alors*

$$\frac{\gamma^2}{t} e^{-2t\gamma} \mathbf{E} \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} - \frac{e^{t\gamma}}{\gamma} \sum_{1 \leq i \leq t-1} \xi_i \right)^2 \rightarrow 0.$$

Preuve. Notons que

$$\left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right) = \sum_{1 \leq i \leq t-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \right) \xi_{t-i}$$

et

$$\sum_{1 \leq i \leq t-1} \xi_i = \sum_{1 \leq i \leq t-1} \xi_{t-i}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} - \frac{e^{t\gamma}}{\gamma} \sum_{1 \leq i \leq t-1} \xi_i \right)^2 \\
&= \mathbf{E} \left(\sum_{1 \leq i \leq t-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \right) \xi_i - \frac{e^{t\gamma}}{\gamma} \sum_{1 \leq j \leq t-1} \xi_i \right)^2 \\
&= \mathbf{E} \left(\xi_i \sum_{1 \leq i \leq j} \left(\sum_{1 \leq i \leq t-1} e^{j\gamma} - \frac{e^{t\gamma}}{\gamma} \right) \right)^2 \\
&= \mathbf{E} \left(\xi_0^2 \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} \left(\frac{e^{t\gamma} - e^{i\gamma}}{e^\gamma - 1} - \frac{e^{t\gamma}}{\gamma} \right)^2 \right) \right).
\end{aligned}$$

D'autre part on a d'après l'expression de Taylor

$$\left| \frac{e^{t\gamma} - e^{i\gamma}}{e^\gamma - 1} - \frac{e^{t\gamma}}{\gamma} \right| \leq C_1 \left(\frac{e^{i\gamma}}{\gamma} + e^{t\gamma} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \sum_{1 \leq j \leq t-1} \left(\frac{e^{t\gamma} - e^{i\gamma}}{e^\gamma - 1} - \frac{e^{t\gamma}}{\gamma} \right)^2 \\
&\leq C_1^2 \left[\sum_{1 \leq j \leq t-1} \left(\frac{e^{i\gamma}}{\gamma} + e^{t\gamma} \right)^2 \right] \\
&= C_1^2 \left[\left(te^{t\gamma} + \sum_{1 \leq j \leq t-1} \frac{e^{i\gamma}}{\gamma} \right)^2 \right] \\
&\leq 2C_1^2 \left[\sum_{1 \leq j \leq t-1} \frac{e^{2i\gamma}}{\gamma^2} + te^{2t\gamma} \right] \\
&= O(1) \left[\frac{1}{\gamma^2} \frac{e^{2t\gamma} - e^{2\gamma}}{e^{2\gamma} - 1} + te^{2t\gamma} \right] \\
&= O(1) \left[\frac{1}{\gamma^2} e^{2t\gamma} + te^{2t\gamma} \right].
\end{aligned}$$

En remplaçant, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \frac{\gamma^2}{t} e^{-2t\gamma} \mathbf{E} \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} - \frac{e^{t\gamma}}{\gamma} \sum_{1 \leq i \leq t-1} \xi_i \right)^2 \\
 &= \frac{\gamma^2}{t} e^{-2t\gamma} \mathbf{E} \left(\xi_0^2 \left(\sum_{1 \leq j \leq t-1} \left(\frac{e^{t\gamma} - e^{j\gamma}}{e^\gamma - 1} - \frac{e^{t\gamma}}{\gamma} \right)^2 \right) \right) \\
 &= \frac{\gamma^2}{t} e^{-2t\gamma} \mathbf{E} \xi_0^2 O(1) \left[\frac{1}{\gamma^2} e^{2t\gamma} + t e^{2t\gamma} \right] \\
 &= \frac{\gamma^2}{t} e^{-2t\gamma} \left(\mathbf{E}(\xi_0^2) O(1) \left[\frac{1}{\gamma^2} e^{2t\gamma} + t e^{2t\gamma} \right] \right) \\
 &= O(1) \mathbf{E}(\xi_0^2) \left(\frac{1}{t\gamma} + \gamma^2 \right) = o(1)
 \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du lemme.

Retournons maintenant à la preuve des théorèmes.

A travers les lemmes 2.12, 2.13, 2.14 nous avons

$$\frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} (\sigma_{t,1}^2 + \sigma_{t,2}^2 + \sigma_{t,3}^2) = o_p(1).$$

Comme le terme ω est négligeable on conclut

$$\sigma_t = \sigma_{t,4}^2 = \omega \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \left(1 + \alpha \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} \right).$$

Ceci est équivalent à

$$\frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \left[\frac{\sigma_t^2}{\omega} - \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \right] = \frac{\gamma e^{-t\gamma}}{t^{1/2}} \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \sum_{1 \leq i \leq j} \xi_{t-i} + o_p(1).$$

D'après le lemme 2.15 cette dernière relation est équivalente à

$$\frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \left[\frac{\sigma_t^2}{\omega} - \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \right] = t^{-1/2} \sum_{1 \leq i \leq t-1} \xi_i + o_p(1)$$

D'où

$$\frac{\gamma e^{-t\gamma}}{\alpha t^{1/2}} \left[\frac{\sigma_t^2}{\omega} - \sum_{1 \leq j \leq t-1} e^{j\gamma} \right] = t^{-1/2} \sum_{1 \leq i \leq t-1} \xi_i.$$

Par le théorème de Donsker [voir, par exemple, le théorème 14.1 Billingsley (1999)], nous concluons que les distributions de dimensions finies du processus

$$\left[\frac{1}{(\mathbf{E}(\xi_0^2))^{1/2}} \frac{\gamma e^{-[nk_m]\gamma}}{\alpha [nk_m]^{1/2}} \left(\frac{\sigma_{nk_m}^2}{\omega} - \sum_{1 \leq j \leq [nk_m]-1} e^{j\gamma} \right), 0 < t < 1 \right] = ([nk]\mathbf{E}(\xi_0^2))^{-1/2} \sum_{1 \leq i \leq t-1} \xi_i$$

convergent vers les distributions de dimensions finies du processus de Wiener $[W(t), 0 < t < 1]$. Ceci conclut la preuve du théorème 2.5. le Théorème 2.6 se démontre facilement à partir du précédent. en effet, pour tout $0 < t < 1$,

$$(\omega^{-1}\gamma)^{1/2}e^{-[nk]\gamma/2}\epsilon_{[nk]} = (\omega^{-1}\gamma e^{-[nk]\gamma}\sigma_{[nk]}^2)^{1/2}\eta_{nk}. \quad (2.26)$$

L'hypothèse $\alpha[nk]^{1/2} \rightarrow 0$ et le théorème 2.5 nous permet d'écrire

$$\gamma e^{-[nk]\gamma} \left(\omega^{-1}\sigma_{nk}^2 - \sum_{1 \leq j \leq [nk]-1} e^{j\gamma} \right) = o_p(1). \quad (2.27)$$

D'autre par une vérification directe montre que

$$\gamma e^{-[nk]\gamma} \left(\sum_{1 \leq j \leq [nk]-1} e^{j\gamma} - \gamma^{-1}e^{[nk]\gamma} \right) = o(1). \quad (2.28)$$

A partir des relations 2.27 et 2.28 nous pouvons conclure :

$$\omega^{-1}\gamma e^{-[nk]\gamma}\sigma_{[nk]}^2 \xrightarrow{Pr} 1.$$

en remplaçant dans 2.26 on obtient

$$\omega^{-1}\gamma)^{1/2}e^{-[nk]\gamma/2}\epsilon_{[nk]} \xrightarrow{Pr} \eta_{[nk]}.$$

Comme la convergence en probabilité implique la convergence en distribution on conclut: pour $0 < K < 1$

$$\omega^{-1}\gamma)^{1/2}e^{-[nk]\gamma/2}\epsilon_{[nk]} \xrightarrow{d} \eta_{[nk]}$$

autrement dit pour $1 \leq m \leq N$

$$\omega^{-1}\gamma)^{1/2}e^{-[nk_m]\gamma/2}\epsilon_{[nk_m]} \xrightarrow{d} \eta_t$$

ce qui conclut la preuve du théorème.

2.6 Conclusion

A travers ce chapitre nous avons étudié le comportement asymptotique des solutions du modèle GARCH(1,1) pré-intégré, où nous avons montré à travers les théorèmes précédents que ce comportement dépend essentiellement du signe de $\gamma = \alpha + \beta - 1$.

Afin de réaliser cette étude nous avons été amenés à poser $|\gamma| = n^{-q}$, où n est la taille de l'échantillon et $\frac{1}{2} < q < 1$.

Clairement les trois cas étudiés permettent d'affirmer :

$$\begin{array}{lll} \text{cas } \gamma < 0 & \epsilon_{[nk_m]}/(\omega|\gamma|^{-1})^{1/2} \xrightarrow{d} \eta_t & \text{Théorème 2.2} \\ \text{cas } \gamma = 0 & \epsilon_{[nk_m]}/(\omega[nk_m])^{1/2} \xrightarrow{d} \eta_t & \text{Théorème 2.4} \\ \text{cas } \gamma > 0 & \epsilon_{[nk_m]}(\omega^{-1}\gamma)^{-1/2}e^{[nk_m]\gamma/2} \xrightarrow{d} \eta_t & \text{Théorème 2.6} \end{array}$$

En définissant $\epsilon_n \propto f(n)$ pour signifier que $\epsilon_n/f(n)$ Converge faiblement (en distribution) vers la distribution des innovations η_t , et en posant $\gamma = -n^{-q}$ dans le cas où $\gamma < 0$ et $\gamma = n^{-q}$ lorsque $\gamma > 0$ les resultats établis dans ce chapitre peuvent être réécrits comme suit :

$$\begin{array}{lll} \text{si } \gamma < 0 & \epsilon_n \propto \omega^{1/2}n^{q/2} & \text{théorème 2.2} \\ \text{si } \gamma = 0 & \epsilon_n \propto \omega^{1/2}n^{1/2} & \text{théorème 2.4} \\ \text{si } \gamma > 0 & \epsilon_n \propto \omega^{1/2}e^{n/2}n^{q/2} & \text{théorème 2.6} \end{array}$$

Ceci indique clairement que les solutions du GARCH(1,1) pré-intégré présentent des oscillations en croissance augmentant avec la taille de l'échantillon n à des vitesses différentes dépendantes du signe de γ . Ces oscillations en croissance se comportent comme une bonne approximation d'une fonction puissance si $\gamma \leq 0$ est exponentielle si $\gamma > 0$.

Chapitre 3

Étude numérique

Nous concluons cette étude par une brève discussion portant sur les résultats des articles étudiés. C'est une étude numérique basée sur les données réelles utilisées par les auteurs Mickosh et Starica (2002) et Berkes et al (2004) et quelques simulations en utilisant le langage de programmation R. Rappelons au passage que R est un logiciel de calcul scientifique interactif libre qui possède une large collection d'outils statistiques et graphiques. Plusieurs sites sont consacrés à ce logiciel, en particulier le site <http://www.r-project.org/> offre une description exhaustive sur le langage R et fournit les liens indispensables pour les différents téléchargements, accéder aux différentes bibliothèques. Des versions compilées de R sont disponibles pour Linux, Windows et Mac OS X.

Mickosh et Starica [(2002), Section 3.2] ont clarifié la signification de " l'effet IGARCH ". A base de 9550 données du rendement journaliers de l'indice S&P (données à partir du milieu des années 50 jusqu'au début des années 1990). Ils estiment les modèles GARCH(1,1) dans les intervalles $I_k = [1,1500 + 100.k]$. En notant les α_k et β_k les estimations basées sur les données de l'intervalle I_K , ils représentent graphiquement les sommes $\alpha_k + \beta_k$ en fonction de k . Ils constatent que ; plus k augmente plus la somme $\alpha_k + \beta_k$ se rapproche de 1. Cette constatation accompagnée par d'autres arguments leur a permis d'affirmer que les modèles IGARCH ne sont pas appropriés pour modéliser le S&P. " L'accumulation de la non stationnarité" a entraîné, fallacieusement, cette modélisation. Aussi, ils affirment que, le cas de petit échantillon, les valeurs de γ ne sont pas proches de 0. Cette même étude a été reprise par Berkes et al (2005) mais en utilisant plus de données récentes. A partir de leurs travaux de modélisation, il ressort que les valeurs de α et γ sont, effectivement, proches de 0. Il est, cependant, moins évident que γ tend vers 0 avec n comme le prétendent Mickosh et Starica (2002). Tout en gardant à l'esprit que l'étude de Mickosh et Starica (2002) est plus complète, les résultats de Berkes et al (2004) se prêtent à l'interprétation suivante :

Puisque l'objectif initial était d'étudier les propriétés asymptotiques de modèle GARCH pré intégré et de souligner les implications des hypothèses faites, les auteurs ont conclu, en raison d'absence des oscillations en croissance, que les données modélisées n'obéissent pas à un modèle GARCH pré intégré.

3.1 Simulation et estimation.

A présent, nous allons reprendre l'idée de Mickosh et Starica (2002) afin d'illustrer numériquement les affirmations de ces auteurs. Nous avons choisi de travailler sur le S&P 500, et ce, en raison du fait que ces données se modélisent par un GARCH(1,1). Ceci nous évite de traiter l'étape d'identification qui consiste à tester l'existence de l'effet GARCH. Toutefois, rappelons qu'en pratique, pour pouvoir affirmer que les données se modélisent par un GARCH, une des méthodes consiste à travailler sur le carré des données, car, si les ϵ_t^2 suivent un ARMA(1,1) alors les ϵ_t suivent un GRACH (Voir Christian Francq [2010]).

En se référant aux travaux des auteurs suscités, et en se basant sur des échantillons de tailles plus importantes (à partir de 1000 données) nous allons modéliser via la commande `GarchFit` les données du SP500 afin de confirmer le bien fondé des articles étudiés.

La simulation des GARCH se fait à l'aide de `garchSim()` de `fGarch`. Ce package fait partie de `Rmetrics`, cf. `Wuertz et Rmetrics Foundation(2010)`, environnement parallèle à `S+FinMetrics` dont `Zivot et Wang (2006)` constitue un guide. Le modèle à simuler est défini par `garchSpec()`; il doit être donné sous forme de liste, les noms des composantes de la liste indiquant le type de modèle. Par `extended=TRUE`, on conserve en plus de la série simulée, η_t et h_t .

La commande permettant de simuler le GARCH(1,1) pré-intégré vérifiant

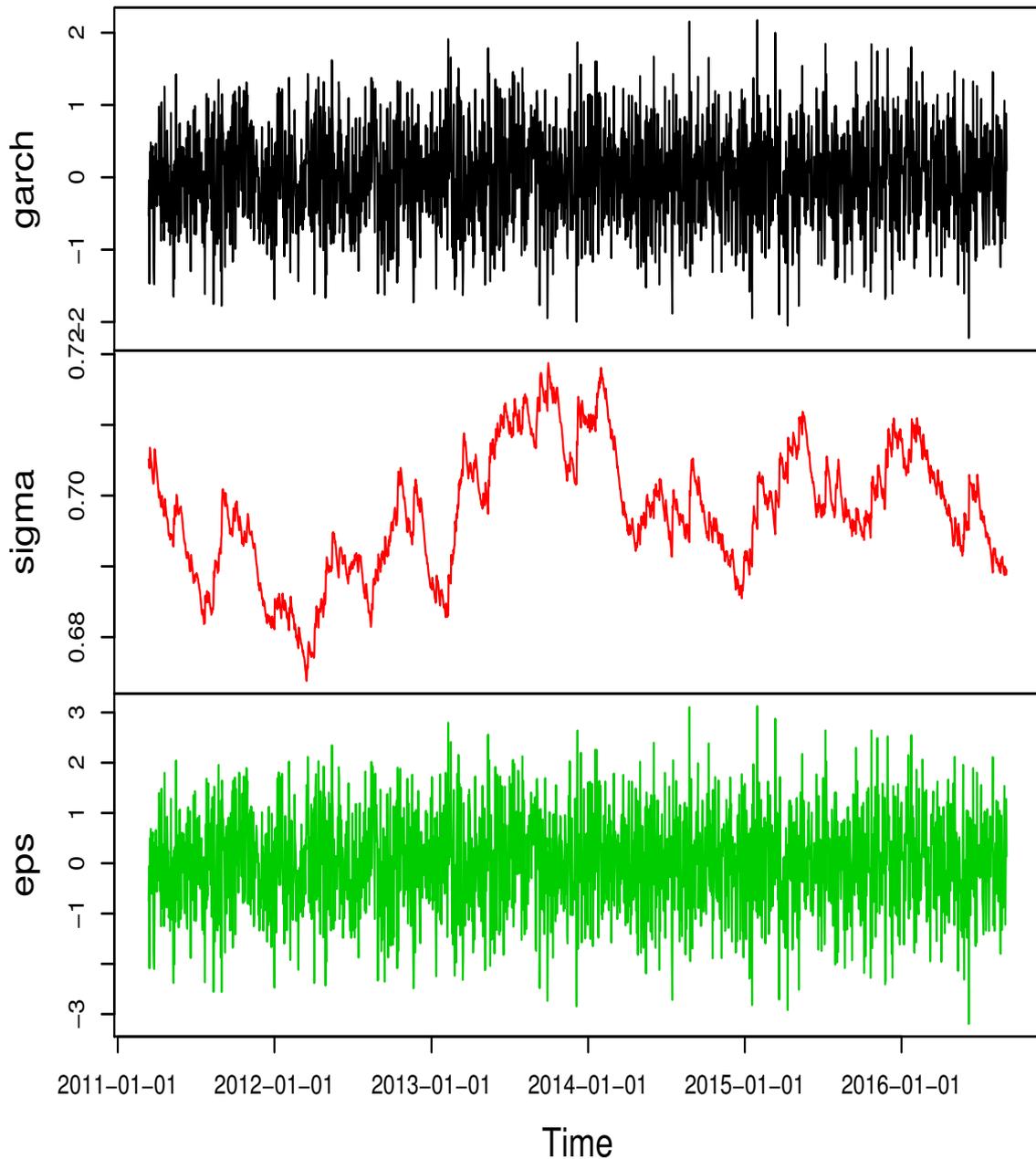
$$\begin{cases} \epsilon_t &= \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 &= 0.1 + 0.5\epsilon_t^2 + 0.3\sigma^2 \end{cases}$$

est

```
require(fGarch)
spec.1=garchSpec(model=list(mu=0,omega=0.001,alpha=0.0024219,beta=0.995589),rseed=39)
archsim.1=garchSim(extended=TRUE,spec.1,n =2000,n.start=100)
head(archsim.1,2)
```

La représentation graphique d'un tel modèle est :

Représentation graphique d'un GARH pré-intégré



Le tableau ci-dessous représente les diverses valeurs du GARCH(1,1) estimées de α et β ,

accompagnées de la valeur de γ , et ce, pour chaque n .

Il est possible d'estimer le modèle à l'aide de `garchFit()` de `fGarch`. Rappelons que, par défaut, la méthode d'estimation utilisée par le package est la méthode du maximum de vraisemblance. Il est bien entendu possible d'utiliser d'autres méthodes d'estimation. Nous citons, par exemple, les moindres carrées ordinaires.

```
mod1=garchFit(~garch(1,1),data=SP200a,trace=FALSE,include.mean=TRUE)
summary(mod1)
```

N	α_n	β_n	γ_n
1000	0.02215	0.88963	0.088220
1200	0.01563	0.91870	0.07500
1400	0.010467	0.919130	0.023800
1600	0.004975	0.923224	0.071801
1800	0.002652	0.941063	0.056285

Ce qui a été communément retenu par Berkes et al 2004 et Mickosh et Starica (2002), est confirmé par notre modélisation, les valeurs estimées de α et γ sont proches de 0. Contrairement à Berkes et al (2004), nous affirmons que, les données utilisées, permettent d'affirmer la même conclusion que Mickosh et Starica (2002), à savoir, plus les valeurs de n augmentent plus β γ se rapprochent de 1.

Conclusion générale

Ce mémoire est centré sur l'étude de quelques types de modèles GARCH. Nous avons traité les modèles GARCH, GARCH intégré et GARCH pré-intégré.

L'étude de la stationnarité a été intensivement relatée au niveau du chapitre 1 où nous avons mis en évidence les diverse conditions nécessaires et/ou suffisantes assurant la faible et la forte stationnarité.

Le second chapitre a fait l'objet de l'étude asymptotique des solutions du GARCH(1,1) pré-intégré. Nous avons vu que les solutions présentent des oscillations croissantes à des vitesses différentes dépendantes du signe de γ .

Quant au troisième et dernier chapitre, une étude sur les données récentes de l'indice S & P500 a été présentée. Nous avons repris l'idée de Mikosch et Starica (2002), et Istvan Berkes, Lajos Horvath et Piotr Kokoszka (2004), et nous l'avons appliqué pour affirmer le comportement de γ .

Ce travail est loin d'être achevé, nous envisageons de généraliser ces travaux au cas d GARCH(p,q) pré-intégré, qui correspond au cas où la somme des paramètres de ce dernier est très voisine de 1.

Annexe

Nous présentons dans cette section des outils probabilistes qui ont été utilisés pour les démonstrations des résultats du chapitre 2.

Dans ce qui suit $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité. **Convergence et bornitude en probabilité**

Définition 3.1 (Convergence en probabilité vers zéro). On dit que $\{X_n\}$, converge en probabilité vers zéro, et on écrit $X_n = o_p(1)$ ou $X_n \xrightarrow{Pr} 0$ si pour tout $\epsilon > 0$

$$P(|X_n| > \epsilon) \rightarrow 0 \quad \text{Quand } n \rightarrow \infty.$$

Définition 3.2 (Bornitude en probabilité). On dit que $\{X_n\}$ est borné en probabilité, et on écrit $X_n = O_p(1)$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta(\epsilon) \in (0, \infty)$ tel que

$$P(|X_n| > \delta(\epsilon)) < \epsilon \quad \text{Pour tout } n.$$

La relation entre ces deux concepts est clarifiée par la propriété suivante, à savoir. $X_n = o_p(1)$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une séquence, $\delta_n(\epsilon) \downarrow 0$ tel que

$$P(|X_n| > \delta_n(\epsilon)) < \epsilon \quad \text{Pour toute } n.$$

Définition 3.3 (Convergence en probabilité vers une variable aléatoire). 1. On dit que la suite $\{X_n\}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire X , et on écrit, $X_n \xrightarrow{Pr} X$ si et seulement si

$$X_n - X = o_p(1).$$

2. $X_n = o_p(a_n)$ si et seulement si $a_n^{-1}X_n = o_p(1)$.
3. $X_n = O_p(a_n)$ si et seulement si $a_n^{-1}X_n = O_p(1)$.

Si nous supprimons les indices p dans les définitions précédentes nous récupérons les définitions habituelles de petit o ($X_n = o(1)$ si $X_n \rightarrow 0$) et grand o ($X_n = O(1)$ si $\{X_n\}$ est borné), pour les séquences non-aléatoires. De ce fait, la plupart des règles régissant sur $o(\cdot)$ et $O(\cdot)$ portent aussi sur $o_p(\cdot)$ et $O_p(\cdot)$. En particulier, nous avons les résultats suivants :

Proposition 3.1. *Si $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité et $a_n > 0, b_n > 0, n = 1, 2, \dots$, alors*

1. *Si $X_n = o_p(a_n)$ et $Y_n = o_p(b_n)$, nous avons*

$$X_n Y_n = o_p(a_n b_n),$$

$$X_n + Y_n = o_p(\max(a_n, b_n)),$$

$$|X_n|^r = o_p(a_n^r) \quad \text{Pour } r > 0.$$

2. *Si $X_n = o_p(a_n)$ et $Y_n = O_p(b_n)$, nous avons*

$$X_n Y_n = o_p(a_n b_n).$$

3. *La première propriété reste valable si o_p , est remplacée partout par O_p .*

Remarque 3.1. En supposant que $\{X_n\}$ est une séquence de vecteurs aléatoires, toutes définies sur le même espace de probabilité, et de telle sorte que X_n , à k composantes $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nk}, n = 1, 2, \dots$, les définitions 3.1 et 3.3 s'étendent d'une manière naturelle à des séquences de vecteurs aléatoires

Définition 3.4 (convergence en probabilité d'un vecteur aléatoire). 1. X_n converge en probabilité vers le vecteur aléatoire X , et on écrit, $X_n \xrightarrow{Pr} X$ si et seulement si

$$X_n - X = o_p(1).$$

2. $X_n = o_p(a_n)$ si et seulement si $X_{nj} = o_p(1), j = 1, \dots, k$.

3. $X_n = O_p(a_n)$ si et seulement si $X_{nj} = O_p(1), j = 1, \dots, k$.

La convergence en probabilité de $\{X_n\}$ vers X peut aussi être caractérisée en fonction de la distance euclidienne $|X_n - X| = [\sum_{j=1}^k (X_{nj} - X_j)^2]^{1/2}$.

Proposition 3.2. 1. $X_n - X = o_p(1)$ si et seulement si $|X_n - X| = o_p(1)$.

2. Si $X_n - Y_n \xrightarrow{Pr} 0$ et $Y_n \xrightarrow{Pr} Y$ alors $X_n \xrightarrow{Pr} Y$.

3. Si $\{X_n\}$ est une séquence de vecteurs aléatoires de dimensions k telles que $X_n \xrightarrow{Pr} X$ et si $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application continue, alors $g(X_n) \xrightarrow{Pr} g(X)$.

Développement de Taylor en probabilité Si g est continue en a et $X_n = a + o_p(1)$, alors la dernière proposition nous permet d'écrire $g(X_n) = g(a) + o_p(1)$.

Si nous renforçons les hypothèses sur g en mentionnant l'existence de produits dérivés,

il est alors possible de calculer de manière probabiliste des développements de Taylor de fonctions non aléatoires au voisinage d'un point donné a .

Proposition 3.3. *Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires telles que $X_n = a + O_p(r_n)$, où $a \in \mathbb{R}$ et $0 < r_n \rightarrow \infty$. Si g est une fonction n fois dérivée au point a alors*

$$g(X_n) = \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(a)}{j!} (X_n - a)^j + o_p(r_n^s),$$

où $g^{(j)}$ est la j^{eme} dérivée de g , et $g^{(0)} = g$.

Convergence en distribution, et presque sur

Définition 3.5 (convergence en distribution (en Loi)). On dit que $\{X_n\}$ converge en distribution (en Loi) vers la variable aléatoire X si la fonction de répartition $F_n(t)$ de X_n converge vers $F(t)$, celle de X en tout point t où F est continue (c'est à dire en tout points t tels que $P(X = t) = 0$). On note la convergence en distribution :

$$X_n \xrightarrow{d} X$$

Remarque 3.2. Si X est une variable à densité (de fonction de répartition continue), il n'y a plus d'hypothèse restrictive à faire sur les points de continuité.

Proposition 3.4. *Si $X_n \xrightarrow{d} X$ et $Y_n \xrightarrow{d} 0$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X$.*

Proposition 3.5. *$X_n \xrightarrow{d} X$ si et seulement si pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[f(X_n)] = \mathbf{E}[f(X)].$$

Définition 3.6 (convergence presque sure). Une suite $\{X_n\}$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers X si

$$P(\omega \in \Omega / \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = x(\omega)) = 1.$$

Et On note $X_n \xrightarrow{P.S} X$.

Propriété 3.1. 1. Convergence presque sure \Rightarrow convergence en probabilité \Rightarrow convergence en distribution

2. Soit C une constante alors : $X_n \xrightarrow{d} C \Rightarrow X_n \xrightarrow{Pr} C$.

Définition 3.7 (Autorégressivité). On dira que le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ suit un modèle autorégressif d'ordre p ($AR(p)$) s'il existe un bruit blanc centré réduit $(0, \sigma^2)$, noté $\{\epsilon_t\}$, tel que $\{\epsilon_t\}$ soit indépendant de X_0, \dots, X_{t-1} et des constantes a_1, \dots, a_p et σ tels que pour $t \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$X_t - \mu = a_1(X_{t-1} - \mu) + a_2(X_{t-2} - \mu) + \dots + a_p(X_{t-p} - \mu) + \sigma \epsilon_t$$

Définition 3.8 (Hétéroscédasticité). En statistique, on parle d'hétéroscédasticité lorsque les variances des variables examinées sont différentes. Cette notion est composée du préfixe hétéro- (" autre "), et de skedasê (" dissipation"). Une collection de variables aléatoires est hétéroscédastique, s'il y a des sous-populations qui ont des variabilités différentes des autres. La notion d'hétéroscédasticité s'oppose à celle d'homoscédasticité, qui correspond au cas où la variance de l'erreur des variables est constante. Tandis que dans le cas d'homoscédasticité, nous avons $Var(\epsilon_i) = \sigma^2 \quad \forall i$ nous avons désormais $var(\epsilon_i) = \sigma_i^2$, et $var(\epsilon_j) = \sigma_j^2$, où σ_i^2 peut être différent de σ_j^2 , pour $i \neq j$.

Proposition 3.6 (Inégalité de Jensen). Soit f une fonction convexe sur un intervalle réel I et X une variable aléatoire à valeurs dans I , dont l'espérance $\mathbf{E}(X)$ existe. Alors,

$$f(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}[f(X)].$$

Définition 3.9 (Mouvement brownien (Processus de Wiener)). On appelle Mouvement brownien ou processus de Wiener standard (m,b,s) un processus gaussien particulier noté $\{B_t\}_{t \geq 0}$ à trajectoire continue telle que

1. $B_0 = 0$.
2. $B_{t+1} - B_t$ sont indépendants de $\sigma(B_u, u < t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}^+$.
3. $B_t \sim \mathcal{N}(0,t) \quad \forall t \in \mathbf{R}^+$.

Définition 3.10 (Ergodicité). Une suite stationnaire $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dite ergodique si elle vérifie la loi forte des grands nombres.

Théorème 3.1 (La loi du logarithme itéré). La loi du logarithme itéré est un résultat de convergence presque sûre de la limite supérieure et de la limite inférieure d'une moyenne de variables aléatoires réelles. Bien qu'elle établisse une divergence, puisque les deux limites ne sont pas égales, la loi du logarithme itéré peut être considérée comme un résultat intermédiaire entre la loi des grands nombres et le théorème central limite.

Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles **i.i.d.**, possédant un moment d'ordre 2 fini. En notant μ leur espérance, σ leur écart-type supposé non nul et en posant

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

nous avons les deux égalités suivantes :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma \sqrt{2 \log \log n}} = 1, \quad \text{presque sûrement,}$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma \sqrt{2 \log \log n}} = -1, \quad \text{presque sûrement,}$$

Bibliographie

- [1] Christophe Hurlin, (2006-2007), *Modèles ARCH - GARCH Applications à la VaR*, Université d'Orléans.
- [2] C.Francq, J.Zakoian, (2010) *GARCH MODELS*, Ed.Wiley.
- [3] C.Francq, J.Zakoian, (2009) *Modèles GARCH et à volatilité stochastique*, Université de Lille.
- [4] Istvan Berkes, et al. (2005) *NEAR-INTEGRATED GARCH SEQUENCES1*, The Annals of Applied Probability, 890–913.
- [5] Hervé ALEXANDRE - Marie-Claude PICHERY, (2002) *LES MODELES DE CLASSE ARC*, INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES.
- [6] Jean-Christophe Breton, (2009) *Probabilités*.
- [7] Peter J. Brockwell Richard A. Davis, (2006) *Time Series: Theory and Methods* , Springer Science, Business Media.