

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI**  
**DE TIZI OUZOU**



**Faculté du Génie de la Construction**

**Département de Génie Civil**

**MEMOIRE**  
**Pour obtenir le grade de**  
**MASTER EN GENIE CIVIL**

**Discipline : Structures**  
**Présentée et soutenue publiquement par**  
**SEBBAK Fazia**  
**Le 11/11/2019**

***LE THEME***

***SIMULATION NUMERIQUE DU***  
***COMPORTEMENT NON LINEAIRE***  
***DES STRUCTURES EN BETON DE***  
***FIBRE***

**Directeur du mémoire : MERAKEB Seddik**

**Jury**

.....

.....

# Dédicace :

---

Je dédie ce modeste travail à :

- Mes chers parents
- Mes frères, mes sœurs
- Tous mes amis

# Remerciement

---

J'adresse mes remerciements les plus respectueux à Monsieur MERAKEB Seddik de m'avoir proposé ce sujet de mémoire, de l'intention qu'il a porté à mon travail et des moments précieux de discussion qu'il m'a réservées, je le remercie pour sa grande disponibilité durant tout mon travail.

Et mes très vifs remerciements à tous ceux qui ont contribués de près ou de loin à l'élaboration de ce travail de mémoire.

## RESUME

Dans le cadre de cette étude on s'intéresse au développement d'un nouvel outil permettant la simulation numérique du comportement non linéaire des structures en béton de fibre.

Pour cela, nous nous sommes intéressés au comportement des poutres moyennant un modèle basé sur les théories de Bernoulli et Timochenko. Cette simulation est réalisée à l'aide d'un code écrit en langage Fortran sur CASTEM qui est un logiciel de calcul des structures par élément fini.

Enfin, plusieurs exemples extraits de la littérature ont été testés. La comparaison des résultats obtenus avec des résultats expérimentaux, est très satisfaisante.

### Mots clés

Simulation non-linéaire, section plane, élément fini poutre, béton de fibre.

## **TABLE DES MATIERES**

<b>INTRODUCTION GENERALE.....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I : SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	
I-1) Introduction.....	2
I-2) Définition.....	2
I-3) Historique .....	2
I-4) Le rôle des fibres.....	4
I-5) Composition du béton de fibres .....	6
I-6) Mise en œuvre du béton renforcé de fibres .....	7
I-7) Différents types des fibres .....	8
I-8) Caractéristiques et propriétés des fibres.....	11
I-9) Domaines d'utilisation du béton renforcé de fibres .....	11
I-10) Influence des fibres noyées dans le béton.....	13
I-11) Propriétés physiques et mécaniques des bétons de fibres.....	15
I-12) Conclusion .....	21
<b>CHAPITRE II : LOI DU COMPORTEMENT</b>	
II-1) Introduction.....	22
II-2) Modélisation du comportement du béton de fibres en compression.....	22
II-3) Modélisation du comportement du béton de fibres en traction.....	25
II-4) Conclusion.....	36

## **TABLE DES MATIERES**

### **CHAPITRE III : ETUDE D'UNE SECTION**

III-1) Introduction.....	37
III-2) Hypothèses de calcul.....	37
III-3) Calcul pratique de la matrice de rigidité de la section.....	41
III-4) Méthode de résolution non linéaire.....	42
III-5) Organigramme de calcul.....	45

### **CHAPITRE IV : FORMULATION D'UN ELEMENT POUTRE**

IV-1) Introduction.....	46
IV-2) Théorie de Bernoulli.....	46
IV-3) Théorie de Timoshenko.....	60
IV-4) Modélisation numérique sur cast3m.....	65
IV-5) Conclusion.....	69

### **CHAPITRE V : APPLICATION ET VALIDATION**

V-1) Introduction .....	70
V-2) Exemple de validation.....	70
V-3) Confrontation des résultats.....	71
V-4) Conclusion.....	77

<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>78</b>
----------------------------------	-----------

## LISTE DES FIGURES

Figure I-1 : Béton sans fibres sollicité en traction.....	5
Figure I-2 : Béton avec fibres sollicité en traction.....	5
Figure I-3- Encadrement d'un granulat.....	6
Figure I-4 : Les caractéristiques principales des fibres.....	11
Figure I-5: Effets des fibres sur l'affaissement du béton au cône d'Abrams.....	13
Figure I-6 : Distribution de la contrainte de cisaillement à la surface d'une fibre droite LIM et al.....	14
Figure I-7 : Diagramme contrainte – déformation des essais en compression avec asservissement, ZHAN.....	15
Figure I-8 : Courbe charge-déplacement diamétrale par fendage en fonction du pourcentage de fibres, NANNI.....	17
Figure I-9 : Courbe charge-déplacement diamétral par fendage pour différents matériaux, ZHAN.....	18
Figure I-10 : Evolution de la résistance en flexion du béton de fibres et du béton témoin en fonction du temps (éprouvettes conservées dans l'eau ou dans différentes solutions de Na2 SO4), NEMERGEER.....	20
Figure II-1 : Diagramme contrainte - déformation du béton en compression simple,SARGIN.....	23
Figure II-2: Diagramme contrainte - déformation en compression, ABSI et NAAMAN.....	24
Figure II-3: Comportement du béton de fibres en traction, MAZARS.....	26
Figure II-4: Comportement du béton de fibres en traction.....	26
Figure II-5: Diagramme contraintes-déformations simplifié du béton de fibres.....	27
Figure II-6: Comportement du béton de fibres en traction.....	29

## LISTE DES FIGURES

Figure II-7 : Orientation bidimensionnelle des fibres.....	30
Figure II-8: Relation contrainte-déformation, ZHAN.....	31
Figure II-9 : Courbe effort –ouverture de fissure.....	33
Figure II-10 : Relation effort –ouverture de fissure.....	34
Figure II-11 : Loi de comportement en traction du béton armé de fibres d’acier.....	36
Figure III-1: Discrétisation de la section et diagrammes des contraintes et déformations..	37
Figure III.2:comportement contrainte-déformation en présentant le module de sécant.....	39
Figure III.3 : Discrétisation de la section en tranches horizontales .....	41
Figure III.4 : Schéma de résolution pour le calcul $M-\phi$ ( $N=$ constant).....	42
Figure IV.1 : définition de la cinématique de la poutre en termes des 3 fonctions de déplacements $u_0(x)$ , $w(x)$ , $\theta(x)$ .....	48
Figure IV-2 : représentation du chargement agissant sur la poutre et de la section transversale de la poutre.....	50
Figure IV-3: Élément fini à 2 nœuds et 6 DDL.....	52
Figure IV-4 : discrétisation de la section transversale en couche trapézoïdale.....	56
Figure IV-5 – Cinématique de la poutre, théorie de Timoshenko.....	60
Figure IV-6 : Élément fini poutre à 2 nœuds.....	61
Figure IV-7 : Un élément fini poutre e soumis à un chargement vertical distribué $p(x)$ ....	64
Figure IV-8 : Organigramme de calcul adapté de la procédure PASAPAS de Cast3m.....	68
Figure V-1 : représentation de la poutre expérimentée.....	70
Figure V-2 : courbe courbure-moment de la section $S/G =0,8$ et $W=0.4\%$ .....	71
Figure V-3 : courbe charge-flèche de la poutre $S/G =0,8$ et $W=0\%$ .....	72

## **LISTE DES FIGURES**

Figure V-4 : courbe charge-flèche de la poutre $S/G = 0,8$ et $W=0.6\%$ .....	73
Figure V-5 : courbe charge-flèche de la poutre $S/G = 0,8$ et $W=0.8\%$ .....	74
Figure V- 6 : courbe charge-flèche de la poutre $S/G = 1$ et $W=0\%$ .....	75
Figure V- 7 : courbe charge-flèche de la poutre $S/G = 1$ et $W=0.6\%$ .....	76
Figure V- 8 : courbe charge-flèche de la poutre $S/G = 1$ et $W=0.8\%$ .....	77

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.I : Les différents types des fibres .....	8
Tableau 1-2 : Quelques domaines d'utilisation du béton de fibres.....	12
Tableau V-1 : Les caractéristiques des matériaux utilisés .....	70
Tableau V.2 : comparaison des résultats expérimentaux-numériques S/G =0,8 et W=0%.....	72
Tableau V.3 : comparaison des résultats expérimentaux-numériques S/G =0,8 et W=0.6%.....	73
Tableau V.4 : comparaison des résultats expérimentaux-numériques S/G =0,8 et W=0.8%.....	74
Tableau V.5 : comparaison des résultats expérimentaux-numériques S/G =1 et W=0% ...	75
Tableau V.6 : comparaison des résultats expérimentaux-numériques S/G=1 et W=0.6% .	76
Tableau V.7 : comparaison des résultats expérimentaux-numériques S/G=1 et W=0.8% .	77

# INTRODUCTION GENERALE

### INTRODUCTION GENERALE

Le béton est le matériau le plus utilisé dans les structures en génie civil, il présente une très bonne résistance à la compression, mais il est fragile, résiste mal à la traction.

L'association acier-béton « béton armé » permet de développer ce matériaux et lui confère ces qualités (simple formulation ; la facilité de mise en œuvre et une bonne résistance), mais reste toujours 'un matériau hétérogène et son comportement est fragile en traction.

L'amélioration de la résistance à la traction du béton et avoir un matériau qui présente un comportement plus homogène ; l'addition d'une quantité de fibres rend cette innovation très intéressante (le béton de fibre).

L'objectif souhaité est de montrer l'intérêt d'utilisation de béton de fibres dans différents domaines, où les propriétés de ce composite sont bien exploitées. A cette présente étude on s'intéresse à la simulation numérique du comportement de ce composite.

Actuellement, peu de modèles numériques permettent de caractériser le comportement de béton de fibres. Chacun d'entre eux a été déterminé à l'issue des résultats expérimentaux. Ils sont généralement dotés des coefficients dont la détermination soulève souvent des difficultés. De plus aucun modèle n'est considéré comme général.

Le présent travail est développé comme suit :

**Chapitre I** : une synthèse bibliographique .des généralités sur le béton de fibre.

**Chapitre II** : Les différents modèles de la loi du comportement du béton de fibre.

**Chapitre III** : présente l'étude d'une section en flexion composée en présentant les hypothèses de calcul, les relations entre efforts-déformations pour une section et un accroissement de  $\Delta N$  et  $\Delta M$ , et ensuite la méthode de résolution dans le cas non linéaire.

**Chapitre IV** : formulation d'un élément poutre basant sur les deux théories (BRENOULLI et TIMOSHENKO)

**Chapitre V** : dans ce chapitre on s'intéresse à la simulation numérique et sa confrontation a des résultats expérimentaux.

Dans le dernier chapitre, on titre **la conclusion générale** des résultats obtenus à l'issue de la présente étude.

## **Chapitre I**

# **SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE**

**I-1) INTRODUCTION**

L'apparition des bétons de fibre date des années 1910, par la suite les industriels producteurs des fibres ont développé des géométries et des types de fibre plus préformantes. Actuellement les fibres utilisées pour le béton sont les fibres de verre, les fibres synthétiques et les plus utilisées sont les fibres métalliques.

L'ajout des fibres au béton notamment les fibres métalliques, confère à celui-ci les propriétés de ductilité, de dureté et une résistance aux chocs plus performantes, un meilleur comportement après fissuration en traction, en flexion et au cisaillement, comparé à un béton non fibré. Toutes ces propriétés ont permis à ce nouveau matériau de s'imposer dans divers domaines d'utilisation [9].

**I-2) DEFINITION**

Le béton de fibre est un béton conventionnel auquel on ajoute des fibres à la différence des armatures traditionnelles. Les fibres sont réparties dans la masse du béton, elles ne sont pas recommandées pour remplacer les armatures exigées par les codes et les normes de la construction elles ont un rôle principal d'assurer le contrôle de la fissuration. les propriétés du béton de fibre dépendent de la qualité de la matrice du béton courant et les caractéristiques des fibres (la nature, la forme géométrique et les dimensions, l'élanement et la teneur en volume de fibre).

**I-3) HISTORIQUE**

L'idée de renforcer le béton avec des éléments courts en acier de type fibres n'est pas récente, elle date depuis l'antiquité. D'après le chercheur Exode [1,2], les Egyptiens ont utilisé les pailles pour renforcer la brique de boue. Il y a aussi une certitude que les fibres d'amiante ont été utilisées dans le renforcement des poteries en argile en Finlande, il y a de cela 5000 ans [1]. Dans d'autres sources [2,3], il a été indiqué que les pailles ont été utilisées pour renforcer les briques, tandis que les poils d'animaux et les fibres d'amiante ont été introduits pour renforcer le plâtre et la pâte de ciment Portland. On peut noter aussi la réalisation au milieu du XV<sup>ème</sup> siècle d'alliages métalliques avec des fibres de carbone.

M. BRAUN et d'autres chercheurs [4], ont rapporté que la paille a été rajoutée dans des matériaux de construction tels que le mortier, le plâtre ...etc.

JOSEPH LAMBOT [2] en établissant en 1847 un brevet, suggère l'ajout de fils continus ou de treillis métalliques pour créer un nouveau matériau qui peut être, à son avis, une solution face aux problèmes de fissuration des bétons. Ces développements sont à l'origine de la technologie actuelle du béton armé. Ce concept conduit toutefois à un matériau anisotrope dans lequel les armatures continues qui ne travaillent que dans une direction privilégiée, et sont relativement inefficaces face aux fissures microstructurales.

Vingt sept ans après, l'américain A. BERNARD [2] est parvenu en Californie (U.S.A), à créer une pierre artificielle par l'ajout de granulats en fer recuit dans un mélange de béton. Ensuite, en 1899, un processus de fabrication d'éléments composites à base de ciment et d'amiante a été mis au point par LHATSHELS.

Pour améliorer la résistance du béton, une série d'essais a été faite par J. PORTER en 1910, [5], qui a conclu que la présence des fibres courtes dans le béton augmente sa résistance à l'écrasement et à la traction. Par la suite une série de brevets ont été établis par J. GRAHAM (1910), WEAKLY (1912), FICKLEY (1914).

En 1963, deux articles ont été publiés par ROMUALDI et BATSON [7,8], le premier, sous le titre, « The mechanics of crack arrest in concrete », le deuxième s'intitule « Behavior of reinforced concrete beams with closely spaced reinforced ». Dans ces deux articles, une analyse théorique des résultats donnés par les brevets de Battelle Development corporation a été validée avec des données expérimentales obtenues à partir de l'essai de flexion. Par la suite, les recherches sur les bétons de fibres ont connu un réel développement grâce aux travaux de ROMUALDI, BATSON et MANDEL et d'autres. Dans ces travaux, qu'on peut qualifier comme des essais pilotes en déformation, les chercheurs sont arrivés à mettre en évidence les propriétés nouvelles de ce composite. Ils ont décrit les mécanismes de propagation et d'arrêt d'une fissure au sein d'une matrice fragile.

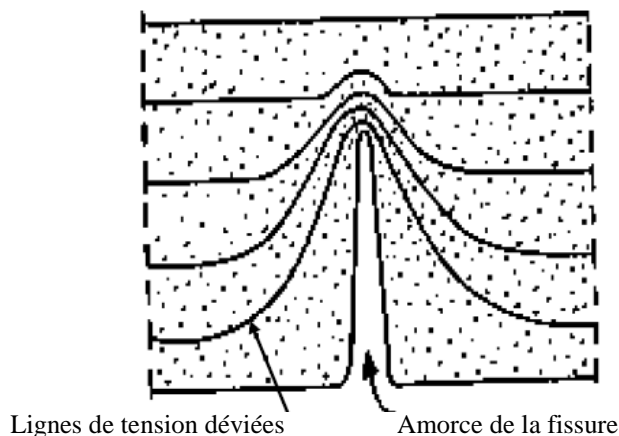
La fin des années soixante a connu la participation d'un grand nombre de chercheurs afin d'orienter les axes de recherche vers l'application, avec toute la fiabilité du béton de fibres dans les domaines de construction. Les travaux se multiplient et une multitude de types de fibres a été introduite dans le commerce comme étant de nouvelles applications. Le plus grand progrès dans ce domaine a commencé dans les années soixante dix avec l'incorporation des fibres d'acier dans l'industrie réfractaire.

A partir de l'année 1970, il s'est produit une sorte de réveil dans le domaine de la technologie des bétons renforcés de fibres. L'amélioration de certaines propriétés spécifiques des bétons renforcés de fibres a permis leur utilisation de façon permanente dans des applications industrielles. Mais aujourd'hui, avec le développement des moyens expérimentaux, l'utilisation de ce type de matériaux s'est orientée vers les structures présentant des phénomènes de fissuration avec des bétons traditionnels.

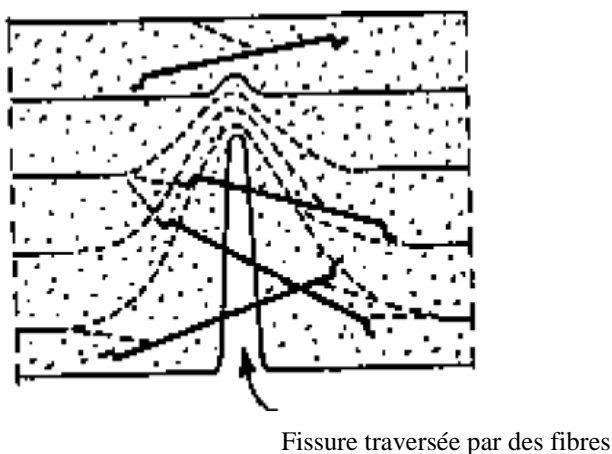
Le premier article dans ce concept peut être attribué à LANKARD et SHEETS [6]. Dans cet article, ces auteurs confirment que l'ajout de 1% à 2% de fibres au béton réfractaire donne une amélioration significative à sa résistance, sa ténacité et sa durabilité.

#### **I-4) LE ROLE DES FIBRES**

Le rôle principal des fibres est de mieux contrôler la fissuration du béton en état de service en limitant l'ouverture des fissures et de transformer le comportement fragile du béton en un comportement ductile. Le béton présente toujours des microfissures dues à différentes causes telles que le retrait, les contraintes thermiques, les contraintes appliquées au jeune âge, ...etc. Lorsqu'un béton fissuré est soumis à une traction, les lignes de tension s'infléchissent (Fig. 1-1) et les tensions aux extrémités de la fissure augmentent [10]. Cette inflexion est due au fait que la charge ne peut pas être transmise par la fissure. Pour un béton sans fibres sollicité en traction, sa faible résistance à la traction est vite atteinte, voire dépassée. Une fissure apparaît alors et se propage librement conduisant ainsi à une rupture fragile. Dans le cas d'un béton avec fibres, sollicité en traction, une partie de l'effort est reprise par les fibres pontant les fissures (Fig. 1-2) ; cela empêche la rupture fragile du matériau car la propagation des fissures nécessiterait une plus grande énergie. En effet, comme la longueur maximale d'une microfissure est de l'ordre de la dimension du plus gros granulat [11] et la longueur moyenne d'une fibre est plus grande que la dimension du granulat, chaque microfissure se propageant dans la matrice peut être pontée par une ou plusieurs fibres. Ainsi, les microfissures ne peuvent s'agrandir que par l'allongement élastique ou plastique des fibres, l'effritement de la matrice au voisinage de la fibre, le glissement des fibres ou la rupture des fibres. Ces fibres sollicitées à la traction et au cisaillement absorbent une partie de l'énergie nécessaire à la propagation des fissures et évitent une propagation incontrôlée de la fissuration du béton. Il faudrait alors davantage d'énergie donc d'effort pour propager cette fissuration. L'efficacité des fibres est d'autant plus grande que la quantité de fibre est importante et leur longueur d'ancrage est grande.



**Figure I-1 : Béton sans fibres sollicité en traction.**

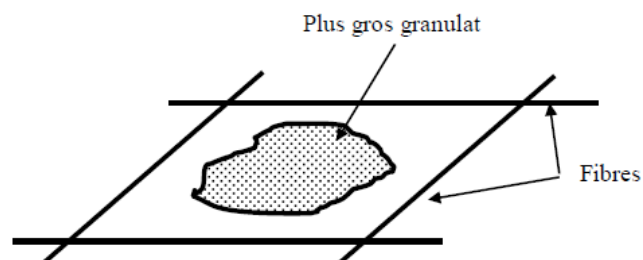


**Figure I-2 : Béton avec fibres sollicité en traction.**

Une multitude de constructions a été réalisée avec ce matériau cimentaire modifié. La fabrication d'une large quantité de dallages industriels a été réalisée avec des dosages en fibres de 20 à 60 kg/m<sup>3</sup>. Contrairement au béton conventionnel, les fibres permettent le transfert de forces à travers de larges ouvertures de fissures et impliquent ainsi un comportement ductile. Du fait des capacités portantes non négligeables, l'idée d'un remplacement quasi-complet de l'armature traditionnelle a été lancée. Alors que des chercheurs ([12], [13]) ont principalement visé un béton armé conventionnel conjointement avec des fibres métalliques, d'autres [14], [15] et [16], [17] ont présenté des recherches basées uniquement sur un renforcement à l'aide de fibres métalliques. Pour les essais avec un renforcement mixte (barres en acier et fibres), un accroissement de la résistance au poinçonnement a été noté. Néanmoins pour les essais avec des fibres comme seul renforcement, certains résultats ont été jugés positifs et une telle armature est devenue envisageable.

**I-5) COMPOSITION DU BETON DE FIBRES**

La composition du béton de fibres est différente de celle du béton armé. L'ouvrabilité et l'homogénéité du béton de fibres dépendent de trois facteurs principaux qui sont la géométrie des fibres, la granulométrie de la matrice et le volume de fibres dans le composite. Pour avoir un renforcement efficace de la matrice, les fibres doivent être suffisamment longues pour s'opposer à l'ouverture des fissures inter granulaires, cette longueur doit représenter trois fois la dimension du plus gros granulat [18]. Aussi, pour couvrir efficacement les deux lèvres des fissures, il faut que les fibres soient munies d'un système d'accrochage qui leur assure un ancrage solide dans la matrice. Cependant, il faut noter que l'augmentation de la longueur des fibres et la présence de systèmes d'ancrage spécifiques diminuent l'ouvrabilité du béton [19]. Les difficultés liées à l'élancement peuvent, néanmoins être surmontées par l'utilisation de fibres accolées. Les fibres d'élancement supérieur ou égal à 100, accolées en plaquettes de 25 à 50, peuvent être introduites sans danger de formation de pelotes [10]. La granulométrie du béton est étroitement liée à la dimension des fibres. Les dimensions des granulats doivent être telles qu'un nombre réduit de fibres suffise à les encadrer (Fig. 1-3) [20]. Pour que les granulats soient bien encadrés par les fibres il est nécessaire d'avoir une matrice riche en éléments fins. Une composition granulaire appropriée s'avère donc nécessaire pour le béton armé de fibres afin d'obtenir une distribution uniforme des fibres dans le béton et parer à la formation des pelotes de fibres. La granulométrie influe beaucoup sur la maniabilité du béton, la présence de gros granulats crée des frictions entre les particules ce qui a tendance à réduire l'ouvrabilité. De plus, les fibres incorporées au mélange interfèrent avec les gros granulats et se trouvent de ce fait limitées dans leurs possibilités de mouvement ce qui affecte aussi la maniabilité. Les fibres s'accommodent mieux de bétons relativement fins dont le diamètre maximum des grains est de l'ordre du quart de la longueur de la fibre, les bétons de sable se prêtent particulièrement bien à l'inclusion de fibres.



*Figure I-3- Encadrement d'un granulat.*

Concernant la teneur en fibres, il a été montré [21] que la teneur maximale dans la matrice est limitée par le pourcentage de gros granulats car les fibres doivent être bien enrobées. Une forte teneur en fibre entraîne une diminution rapide de l'ouvrabilité du béton du fait que l'incorporation des fibres se traduit par une augmentation de la surface spécifique dans le mélange. Cette augmentation de surface tend, par absorption d'eau, à sécher le mélange, ce qui engendre une perte de compacité et d'ouvrabilité. Pour augmenter l'ouvrabilité du béton de fibres on ajoute en général des plastifiants dans le mélange. La quantité de plastifiant à ajouter dépend de son efficacité [22]. Il faut, dans ce cas là, un ajustement de la composition des granulats pour que l'adjuvant atteigne son maximum d'efficacité. La teneur en fibre est fixée par une relation empirique dite « limite de faisabilité » :

$$V_f \cdot L/D < 3$$

Avec :

- $V_f = V_f \% \cdot 100$  : fraction volumique des fibres
- $L/D$  : élancement des fibres.

Le dosage limite couramment utilisé pour les bétons de fibres métalliques est de l'ordre de 2% [23].

#### **I-6) MISE EN ŒUVRE DU BETON RENFORCE DE FIBRES**

Lors de la mise en œuvre du béton de fibres, le dosage en fibres ne peut pas dépasser certaines limites car au delà, le gâchage et la mise en œuvre deviennent impossibles. Compte tenu des rôles opposés dévolus aux paramètres fondamentaux des fibres (dosage en volume, forme et rapport longueur sur le diamètre) sur l'ouvrabilité et la mise en œuvre, et sur l'efficacité mécanique après durcissement, on doit se limiter à une gamme de pourcentages qui ne donne qu'une efficacité mécanique réduite mais qui permet une mise en œuvre acceptable [24].

**I-7) DIFFERENTS TYPES DES FIBRES**

Une fibre est un composant filiforme (rapport longueur/diamètre est très élevé: 25 à 1500), de faible longueur (5 à 60 mm), d'origine minérale, métallique ou organique comme le montre le tableau suivant :

<b><u>Fibres naturelles</u></b>		<b><u>Fibres artificielles</u></b>	
<b><i>Origine végétale</i></b>	<b><i>Origine animale</i></b>	<b><i>Origine organique</i></b>	<b><i>Origine minérales</i></b>
Lin Chanvre Celluloses Sisal coir	Laine Soie Poil	Polypropylène Polyamides Polyesters	Fibres métalliques : acier, fonte Fibres en carbone Fibres en céramique Fibres en verre

**Tableau I-1 : Les différents types des fibres**

**I-7-1) Fibres naturelle*****a) Fibres végétales***

On peut citer le Sisal (fibres extraites de l'agave) et le coir (fibres de Coco). Ils ont été utilisés sur les chantiers expérimentaux dans certains pays en voie de développement et dans les panneaux de construction (fibres de bois). Le Sisal est très résistant mais putrescible, par contre le coir est imputrescible.

***b) Fibres animale***

Les fibres animales sont composées principalement de protéines. La kératine constitue les poils (dont les laines en tout genre) et les plumes. La soie est une sécrétion de fibroïne produite par le ver à soie, chenille d'un papillon du genre bombyx et les araignées. La laine et les plumes sont des très bons isolants pour la construction.

**I-7-2) Fibres artificielles*****a) Fibres minérales***

- **Fibres d'amiante**

Ces fibres sont considérées comme les renforcements les plus anciens des matrices cimentaires et aussi pour la confection de tissus résistants aux feux. Elles sont en fait, des bâchettes de micro- fibres extrêmement fines, difficilement fusibles (vers 1500°C) et ont

l'avantage d'être inattaquables par les ciments. Elles possèdent une excellente tenue au feu, une bonne résistance à la traction et un module d'élasticité élevé. Elles sont aussi plus résistantes aux agressions chimiques et aux microorganismes, ainsi que leur résistance électrique élevée. Les fibres d'amiante sont utilisées dans les applications suivantes: voiles, tuyaux, panneaux, matériaux d'isolation thermique et protection contre le feu, tuyaux d'égout, plaques de toitures plates et ondulées, revêtements des murs [25].

- **Fibres de verre**

Ces fibres sont fabriquées à partir de verre fondu qui passe dans une filière, chauffé par effet Joule, qui comporte 50 à 800 trous d'un diamètre de l'ordre de 10 à 100µm. Elles sont disponibles dans le commerce sous forme de bobines (découpage à la demande) ou sous forme de morceaux prédécoupés de 3, 6, 12, et 50 mm de long. Ils sont regroupés en trois types : La fibre de verre classique (silice, soude, chaux), la fibre de verre au zirconium et la fibre de verre au borosilicate. Ces fibres sont généralement caractérisées par les propriétés suivantes : Bonne adhérence avec la matrice ; Disponibilité sous toutes les formes (coupées, continues ...) ; Bonne résistance à l'humidité et à la corrosion ; Conductivité thermique relativement faible [25].

- **Fibres de carbone**

Le carbone est très dispendieux ce qui le rend beaucoup moins populaire que le verre moins disponible sur le marché, les fibres de carbone sont cependant reconnues comme étant les fibres les plus performantes. Les types de fibres de carbone sont classés selon leurs propriétés mécaniques. Ces propriétés dépendent des cycles de pyrolyse ainsi que de la nature du précurseur. On distingue deux types de fibres divisés en quatre grandes classes de fibres. - les types hauts modules soient les classes UHM (Ultra Haut Module) et HM (Haut Module), - les types hautes résistances soient les classes THR ou VHS (Très haute résistance ou very high strength) et HR ou HS (haute résistance ou high strength). Les fibres de carbone sont très fragiles ce qui rend l'opération de malaxage du béton de ces fibres très difficile. Pour cela, elles sont ajoutées par la suite au béton par projection. Par ailleurs, le béton de ces fibres présente des caractéristiques de durabilité très intéressantes [26].

- **Fibres Métallique**

Ce type de fibres, qui regroupe les fibres d'acier et les fibres de fonte amorphe, a été et reste encore l'objet de recherches très importantes dans le monde. Il existe sur le marché, une panoplie de fibres métalliques d'acier,

Voici quelques types de fibres : - fibres ondulées-crantées-torsadées-droites ; - fils, rubans ; - fibres à extrémités aplaties, à crochets, à têtes coniques, etc. [27].

Les fibres d'acier restent parmi les fibres les plus utilisées dans le renforcement des bétons et les mortiers. En effet, ces fibres présentent une bonne résistance à la traction et un module d'élasticité très élevé [28].

*b) Fibres organique*

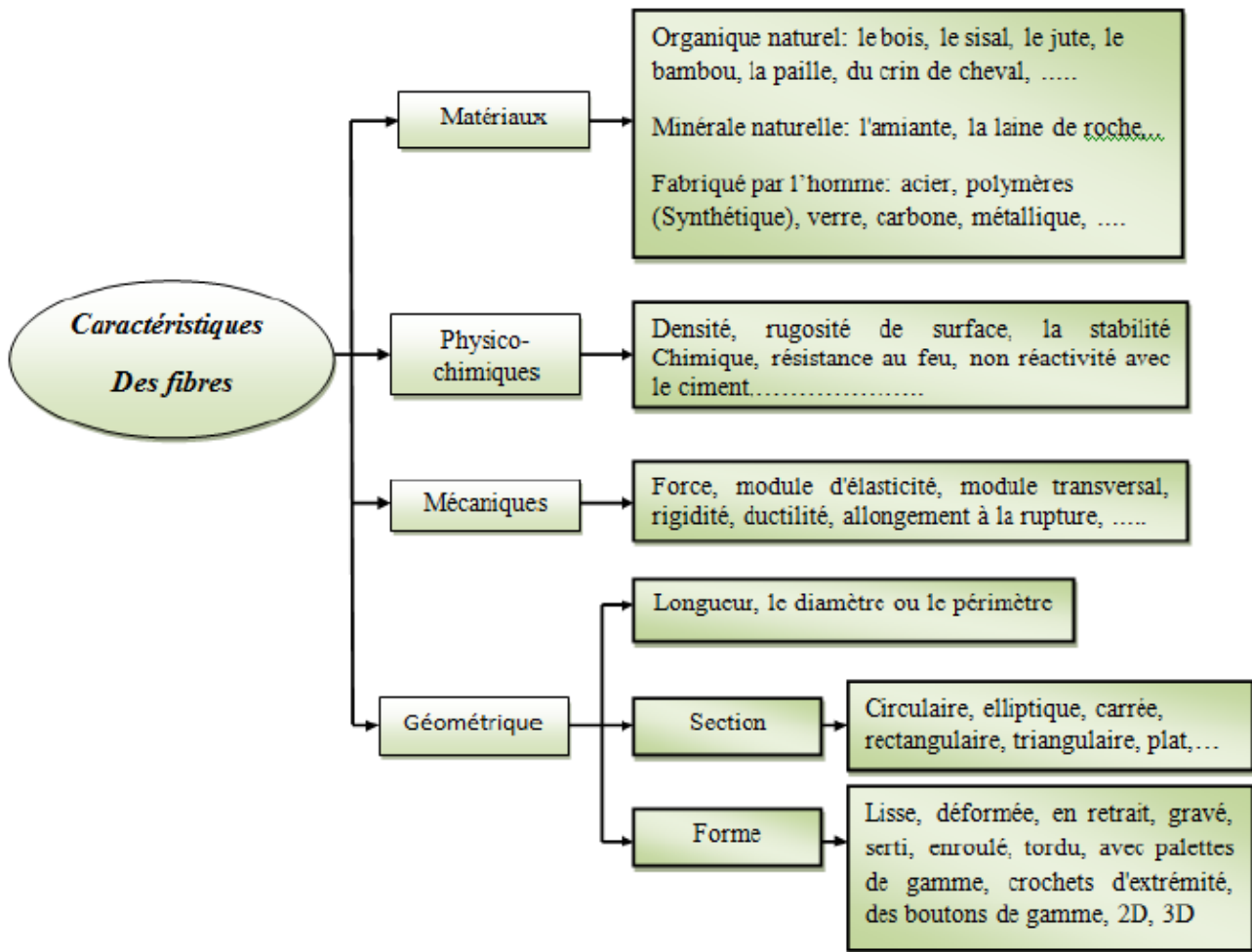
- **Les fibres de polymères**

Sont d'origine plastique, on distingue trois familles principales de ces fibres à savoir [26]

- **Le polyamide** : Qui représente la famille la plus importante des plastiques par leur tonnage. Le PA résiste mal aux acides minéraux.
- **Le polychlorure** : De vinyle (PVC), est une matière thermoplastique obtenue par polymérisation du chlorure de vinyle. Le PVC résiste bien aux acides et aux alcalis.
- **Le polypropylène (PP)** : est un thermoplastique formé de chaîne linéaire constitué de motifs propylènes dans le cas d'un homopolymère et d'une altération contrôlée de motifs propylène et éthylène dans les copolymères. Le PP résiste bien aux alcalis et aux acides. Le module de Young de ces fibres est de même ordre de grandeur que celui du béton. L'adhérence fibre-béton est généralement faible, du fait qu'il n'y a aucune liaison chimique possible entre les fibres et la matrice, ce qui limite la reprise des efforts par les fibres à l'interface fibre-matrice après la fissuration de la matrice. Par contre, il faut noter l'excellente résistance de ces fibres (PVC, PP) vis-à-vis aux acides, aux sels et alcalins du béton [26]. De ce fait, de récentes études menées sur des bétons renforcés par ce type de fibres ont montrés que ce matériau composite présentait des propriétés mécaniques comparables à celle d'un béton renforcé par des fibres de verre [26].

**I-8) CARACTERISTIQUES ET PROPRIETES DES FIBRES**

Les fibres discontinues utilisées dans le béton peuvent être caractérisées de différentes manières comme le montre la figure (I.4) [29]



*Figure I-4 : Les caractéristiques principales des fibres [29]*

**I-9) DOMAINES D'UTILISATION DU BETON RENFORCE DE FIBRES**

Depuis que le béton de fibres a été conçu, de nombreux travaux ont montré que l'insertion de fibres d'acier dans une matrice de béton permet d'augmenter les caractéristiques mécaniques, comme la résistance à la compression ou la résistance à la flexion, du composite résultant. Cependant, ce type de béton n'est pas considéré comme un substitut aux bétons traditionnels, mais comme un matériau nouveau qui devient intéressant pour la conception de structures performantes. Avec de faibles dosages en fibres d'acier (1% en volume) les bétons de fibres obtenus présentent des performances intéressantes (bonne maniabilité, bonnes caractéristiques mécaniques). De plus, leur coût est relativement bas au regard de certaines applications spécifiques.

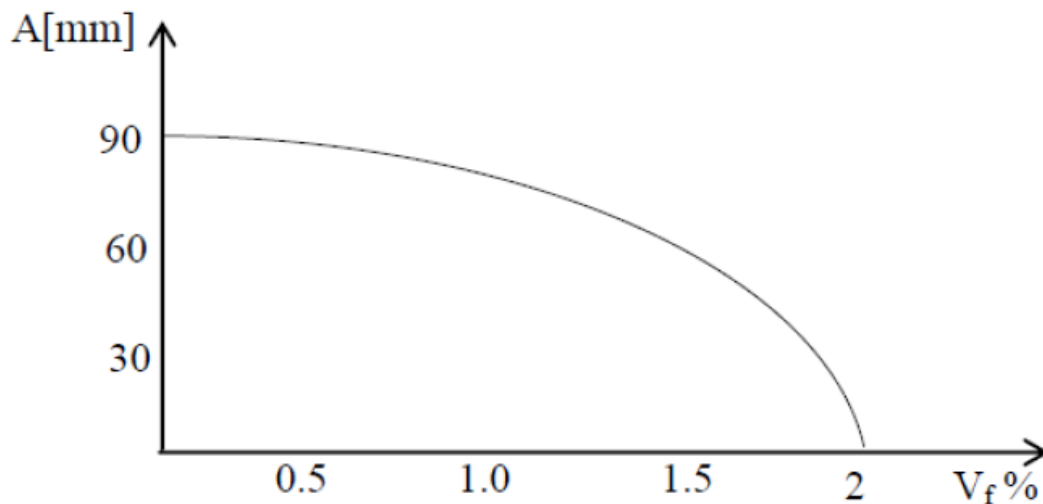
Dans le tableau (I-2) ci-dessous, on indique quelques domaines d'utilisation du béton de fibres.

**Tableau I-2 : Quelques domaines d'utilisation du béton de fibres [30].**

<i>Applications</i>	<i>Intérêt apporté par l'adjonction des fibres dans le béton</i>
Canalisation et coque minces faiblement sollicitées.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Amélioration de la tenue des pièces au jeune âge.</li> <li>- Modification des variations dimensionnelles, lutte contre les fissurations.</li> </ul>
Dallage, chaussées en béton, dallages manufacturés, et tous les éléments structuraux soumis à la flexion.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Diminution de 40% de l'ouverture des fissures,</li> <li>- Augmentation de la rigidité après fissuration,</li> <li>- Augmentation de la résistance au cisaillement,</li> <li>- Augmentation de la résistance à l'usure.</li> </ul>
Eléments structuraux soumis à la compression (poteaux, pieux, fondations...etc.)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Amélioration de la charge ultime,</li> <li>- Pas de rupture catastrophique.</li> </ul>
Structures soumises à des sollicitations pulsionnelles exemple, pistes d'aéroports	<ul style="list-style-type: none"> <li>- L'énergie absorbée est plus importante,</li> <li>- La durée de choc est augmentée,</li> <li>- La loi de comportement du matériau est fortement modifiée.</li> </ul>
Réparation des revêtements routiers, tabliers de ponts.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Amélioration de la résistance aux chocs,</li> <li>- Amélioration de la déformation.</li> </ul>
Parties exposées aux fortes variations de température et même aux hautes températures.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Remplacement avec succès du revêtement réfractaire,</li> <li>- Diminution du coût de réparation des éléments réfractaires</li> </ul>
Stabilisation des parois rocheuses, les talus, les tunnels, les galeries souterraines.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Evite le travail de fixation des grillages ordinairement employés,</li> <li>- Diminution du coût de réparation de stabilisation des parois rocheuses et les talus.</li> </ul>
Fabrication des pieux, revêtement ignifuges isolants (constructions navales). Panneaux de revêtement de façade...etc.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Augmentation de la résistance aux chocs,</li> <li>- Augmentation de la résistance à l'usure,</li> <li>- Augmentation de la durabilité de revêtement.</li> </ul>

**I-10) INFLUENCE DES FIBRES NOYÉES DANS LE BETON****I-10-1) Influence du pourcentage des fibres**

Les fibres noyées dans le béton jouent le rôle d'armature, contrôlent sa fissuration et lui confèrent une grande ténacité. Néanmoins l'ouvrabilité du mélange diminue avec la croissance de la teneur en fibres (figure I-5).



*Figure I-5: Effets des fibres sur l'affaissement du béton au cône d'Abrams [31].*

**I-10-2) Influence de l'orientation des fibres**

Une fibre orientée parallèlement à la direction d'application des contraintes et perpendiculairement à la direction de propagation des fissures joue l'effet le plus important, par contre une fibre perpendiculaire à celle-ci n'a aucun effet.

D'après EDINGTON et HANNANT [32], la vibration du béton de fibres favorise une orientation bidimensionnelle des fibres, dans un plan horizontal, ce qui rend le matériau plus performant si cette orientation coïncide avec la direction des contraintes majeures. DEHOUSSE et al [33] ont montré que l'utilisation de la table vibrante provoque une orientation préférentielle des fibres, perpendiculairement au sens de la vibration.

**I-10-3) Distribution des fibres**

Lors des applications industrielles, il convient de contrôler la distribution réelle des fibres dans le composite. On examine le nombre de fibres dans une section et on le compare au pourcentage théorique des fibres pour s'assurer de l'homogénéité de la distribution des fibres. Il est alors indispensable de connaître le nombre de fibres correspondant au pourcentage théorique des fibres que l'on donne au mélange.

Selon une analyse théorique, SOROUSHIAN [34] propose une formule pour le calcul du nombre de fibres dans une section par unité de surface.

$$N = a \cdot w / A_f$$

a : facteur d'orientation des fibres,

w : pourcentage en volume des fibres,

$A_f$  : surface de la section d'une fibre.

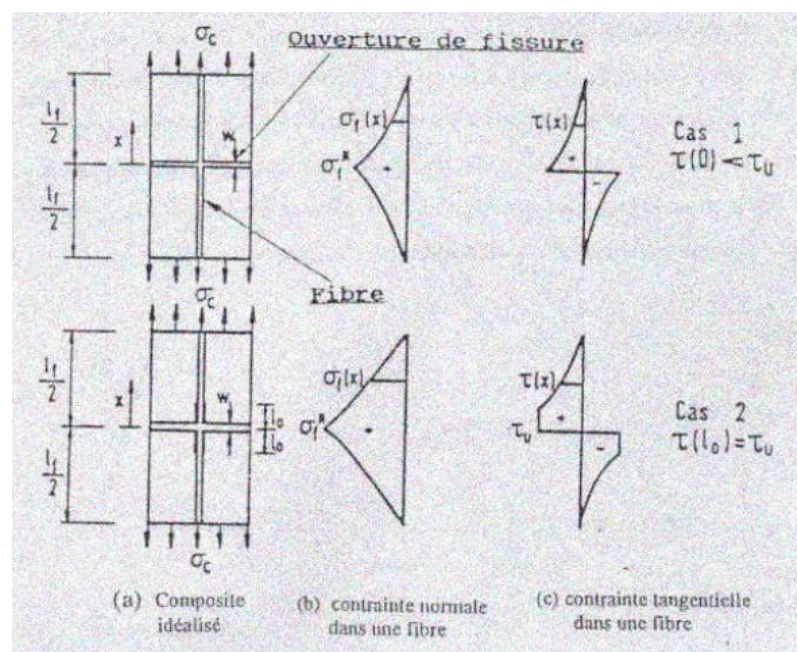
#### **I-10-4) Influence de l'adhérence fibre-matrice de béton**

L'adhérence fibre-matrice de béton est un facteur très important vis-à-vis de l'efficacité des fibres dans le béton.

D'après BARTOS [35], elle est assurée par trois types de liaisons:

- une liaison élastique, collage entre fibres et matrice par les liants,
- une liaison due au frottement,
- une liaison due à l'ancrage mécanique dans le cas des fibres non rectilignes (crochets, ondulations ...).

Pour quantifier cette adhérence, l'essai d'arrachement des fibres est fréquemment utilisé. Cette résistance notée  $\tau_u$  correspond à la contrainte maximale de cisaillement qui se développe à la surface de la fibre lors de l'arrachement de celle-ci (figure I-6), LIM et al [36].



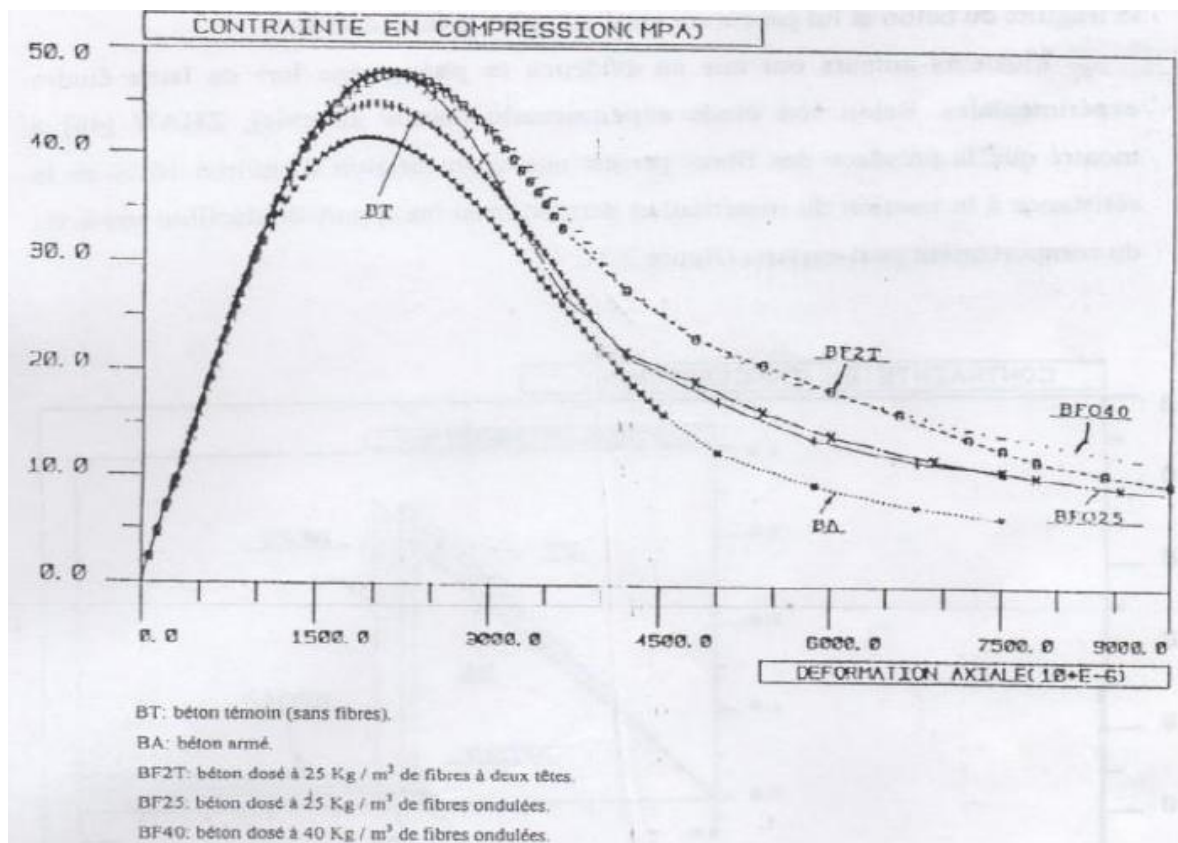
**Figure I-6 : Distribution de la contrainte de cisaillement à la surface d'une fibre droite LIM et al [36].**

Le même auteur remarque que la contrainte d'adhérence  $\tau_u$  pour une fibre droite varie entre 2 et 3 MPa, par contre celle dans le cas d'une fibre à crochets aux extrémités elle peut atteindre 6 à 7 MPa.

### **I-11) PROPRIETES PHYSIQUES ET MECANIQUES DES BETONS DE FIBRES**

#### **I-11-1) Résistance à la compression**

Plusieurs études théoriques et expérimentales ont montré que la présence des fibres dans le béton influe peu sur sa résistance à la compression. L'ajout des fibres métalliques augmente la résistance à la compression du composite d'environ 20% ZHAN [37]. Selon SERNA ROSS [38], la résistance ultime et le module d'élasticité du béton de fibres diffèrent peu de la résistance ultime et du module d'élasticité de la matrice de béton. Néanmoins, la présence des fibres dans le béton augmente la déformation à la rupture et confère ainsi une plus grande ductilité au composite.



**Figure I-7 : Diagramme contrainte – déformation des essais en compression avec asservissement, ZHAN [37].**

**I-11-2) Résistance à la traction**

Comme la matrice de béton a un caractère fragile et une faible résistance à la traction, le comportement mécanique en traction est conditionné par la fissuration du béton.

La présence des fibres dans le béton joue un rôle important dans le en traction du composite. En effet, les fibres interviennent à deux échelles:

- à l'échelle du matériau en "cousant" les microfissures, elles retardent la localisation de la fissuration. Cette action peut provoquer une augmentation de la résistance à la traction, cette augmentation dépend de la teneur en fibres et de leur orientation dans la masse de béton.

- à l'échelle de la structure, en retenant les deux blocs de béton fissuré grâce à leur ancrage des deux côtés de la fissure. Les fibres permettent d'atténuer la fragilité du béton et lui procurent ainsi une plus grande ductilité.

**I-11-3) Résistance à la traction par flexion**

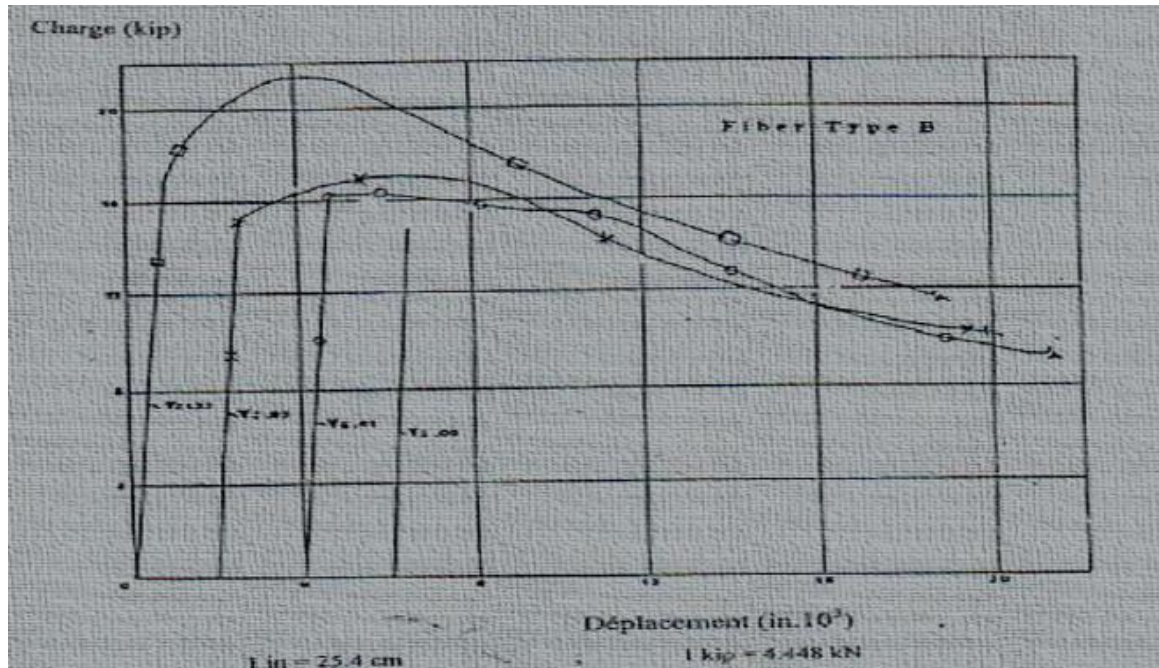
Le comportement du béton en flexion est conditionné par la fissuration de la zone tendue.

Pour cela, la présence des fibres peut jouer un rôle de stabilisateur après rupture de la matrice du béton. En effet, alors que le béton sans fibres se désagrège rapidement après fissuration, les bétons de fibres d'acier continuent à reprendre des efforts même après que la charge maximale soit atteinte.

De nombreuses études ont montré une nette amélioration de la résistance à la traction par flexion. Pour SWAMY et al [21] la résistance à la traction par flexion des bétons de fibres est 2 à 6 fois plus grande que celle des bétons sans fibres, alors que pour ZHAN [37] elle n'augmente que de 40 à 50 %. MAMILLAN et al [39] ont constaté que seules les fibres à crochets (DRAMIX) avec un pourcentage de 1% peuvent augmenter de façon significative la résistance ultime à la traction par flexion.

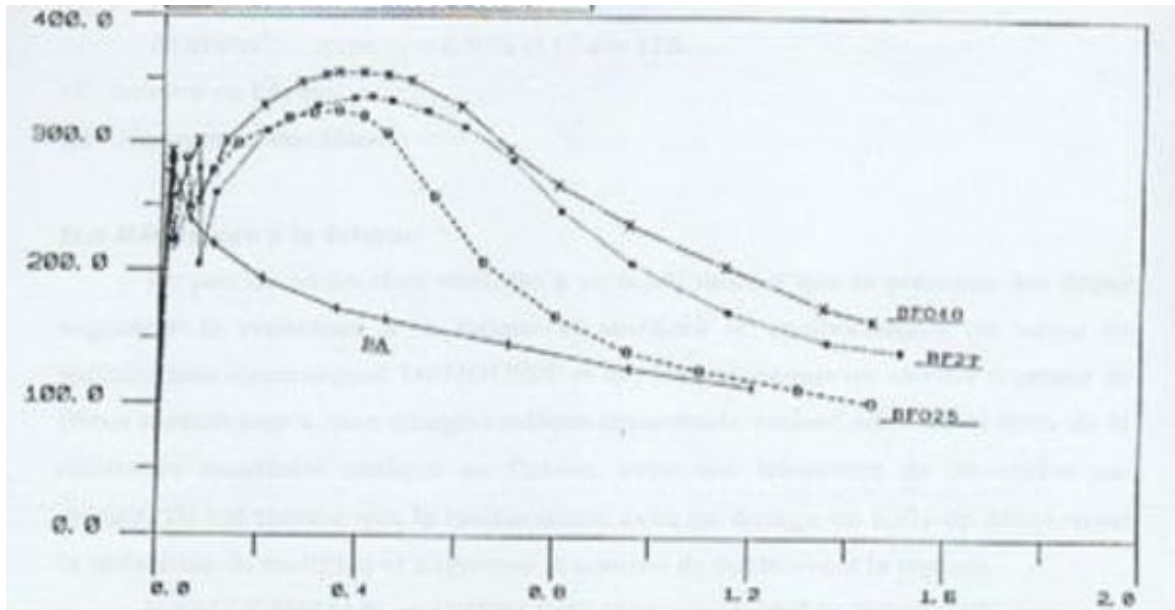
**I-11-4) Résistance à la traction par fendage**

L'essai de fendage (appelé essai brésilien) est une méthode pour déterminer la résistance à la traction. Il s'agit d'écraser une éprouvette cylindrique, placée horizontalement entre les deux plateaux d'une presse. NANNI [40], par des essais de fendage, montre le comportement du composite en fonction du pourcentage en fibre (figure I-8) ; les fibres utilisées sont des fibres à crochets aux extrémités.



**Figure I-8 : Courbe charge-déplacement diamétrale par fendage en fonction du pourcentage de fibres, NANNI [40].**

Le même auteur remarque qu'avec un pourcentage de fibres relativement élevé ( $>0.8\%$ ) l'effort continue d'augmenter après la première fissure du matériau. ZHAN [37], par des essais de fendage non asservis, remarque une augmentation d'environ 34% de la résistance à la traction. L'augmentation de la quantité de ciment joue un rôle peu important concernant la résistance à la traction du béton (une augmentation de 8% au lieu de 30% en flexion). Avec des essais asservis, le même auteur montre que la présence des fibres permet au composite d'avoir une bonne ductilité et augmente la charge maximale dans le domaine post fissuration (figure I-9).



*Figure I-9 : Courbe charge-déplacement diamétral par fendage pour différents matériaux, ZHAN [37].*

D'après le même auteur, pour les essais non asservis, la résistance à la traction est, déterminée à partir de la formule suivante :

$$F_b = 2.P / \pi.\phi .L \text{ (KN/m}^2\text{)}$$

Avec :

P : charge maximale (KN)

$\phi$  : diamètre (160 mm)

L : longueur (320 mm)

#### **I-11-5) Résistance aux chocs**

Le caractère ductile des bétons de fibres leur procure une amélioration de leur résistance aux chocs. En effet dans le cas des chocs, les matériaux subissent des contraintes de traction. Or, la présence des fibres améliore cette résistance, elle permet alors une augmentation de sa résistance aux chocs. C.D.JOHNSTON [41] a effectué des essais où il a constaté l'augmentation de la résistance aux chocs avec l'augmentation de la teneur en fibres. H. KRENCHER [42] a trouvé pour un béton, qui sans fibres avait une résistance aux chocs de 2.9 KN / m<sup>2</sup>, devient après addition des fibres :

20 kN/m<sup>2</sup> avec  $V_f = 0.2 \%$  et  $l/d = 85$

30 kN/m<sup>2</sup> avec  $V_f = 0.9 \%$  et  $l/d = 170$

$V_f$  : teneur en fibres

$l/d$  : élancement des fibres

**I-11-6) Résistance à la fatigue**

Le peu de recherches réalisées à ce sujet, montre que la présence des fibres augmente la résistance à la fatigue et améliore le comportement du béton en sollicitations dynamiques. DEHOUSSE et al [33] ont soumis un mortier renforcé de fibres métalliques à une charge cyclique sinusoïdale variant entre 25 et 60% de la résistance maximale statique en flexion, avec une fréquence de 30 cycles par minute. Ils ont montré que le renforcement avec un dosage de 1,5% de fibres triple la résistance du matériau et augmente le nombre de cycle avant la rupture. RAMAKRISHAN et OBERLING [43], ont étudié le même phénomène de fatigue en flexion des poutres à une fréquence de 20 HZ et une contrainte maximale de 70 à 80% de la résistance en flexion. Ils ont remarqué que les fibres augmentent les caractéristiques de fatigue de façon considérable. Après deux millions de cycles, certains bétons ont encore une endurance de l'ordre de 90%.

**I-11-7) Résistance à l'abrasion**

D'après T. CUYKENS et al [44], les fibres en acier n'ont pas beaucoup d'influence en cas d'érosion uniquement superficielle. Quand l'érosion va de pair avec des sollicitations dues aux chocs et à l'écaillage du béton, les fibres peuvent augmenter fortement la durée de vie du béton en freinant la propagation des microfissures.

**I-11-8) Résistance au cisaillement**

Selon EL HACHEM [45], JINDAL [46] et VALADE [47], la présence des fibres dans le béton augmente sa résistance au cisaillement. Ils ont montré aussi que la résistance au cisaillement augmente avec l'accroissement, jusqu'à 1%, de la teneur en fibres.

NARAYANAN et al [48] lors d'essais sur des poutres armées traditionnellement (2 à 3% d'armatures), renforcées par des fibres métalliques, ont noté que :

- la résistance au cisaillement des bétons de fibres dépend de la géométrie, de la forme et du pourcentage de fibres. Ces paramètres peuvent être caractérisés par un facteur des fibres 'F' défini par la relation suivante :

$$F = V_f \cdot D_f \cdot l / d$$

Avec :

-  $V_f$  : pourcentage des fibres,

-  $D_f$  : facteur de l'efficacité de l'adhérence fibre matrice,

-  $l / d$  : élancement de la fibre.

- l'augmentation du facteur F permet d'améliorer la ductilité du comportement du béton au cisaillement,

- l'augmentation du pourcentage de fibres peut changer le mode de rupture au cisaillement en un mode de rupture à la flexion.

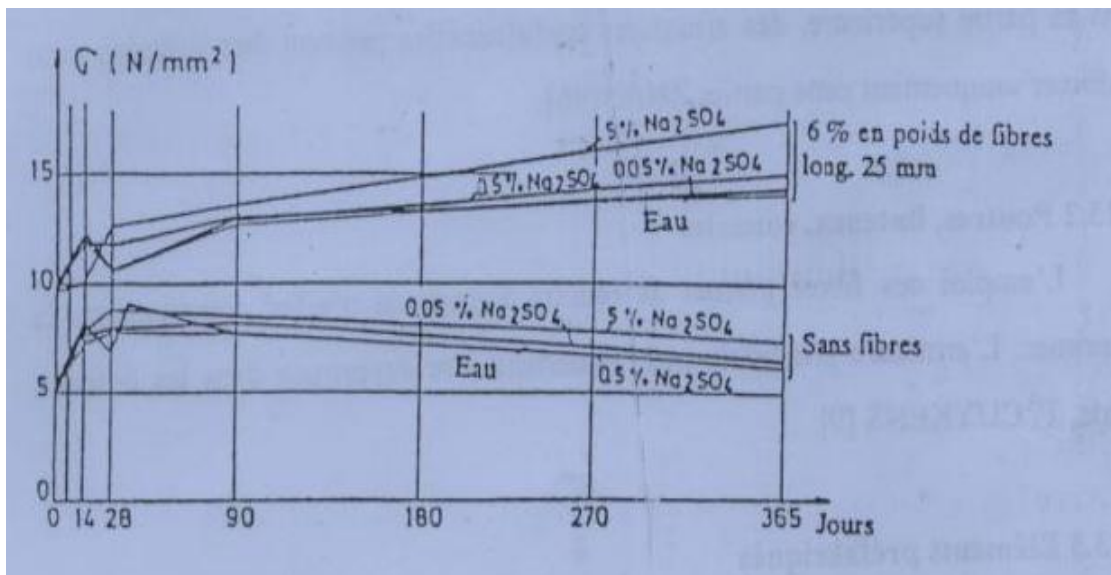
La rupture par cisaillement peut intervenir aussi dans le cas d'une poutre soumise à la flexion si le rapport  $a/d$  est compris entre 3 et 7 ROBERTS [49]

( $a$  : distance entre le point d'application de la charge et l'appui,  $d$  : hauteur efficace de la poutre).

#### **I-11-9) Perméabilité et résistance à la corrosion du béton de fibres**

La perméabilité est la propriété hydrodynamique d'un matériau poreux, elle est liée directement à la protection des fibres noyées dans le béton et influence la tenue à long terme des bétons de fibres.

Concernant les fibres en acier dans le béton, des examens faits sur le béton de fibres d'acier, dans divers milieux favorisant la corrosion, ont montré que ce dernier présente un bon comportement contre les risques de corrosion, les fibres superficielles rouillent rapidement, mais la discontinuité du renforcement empêche la propagation de la corrosion. Si des éventuelles taches de rouille sont gênantes, on peut imprégner la surface du béton avec des matières plastiques, ou la recouvrir d'une couche appropriée (béton projeté par exemple). L'expérience de NEMERGEER [50], basée sur l'observation de l'évolution de la résistance du béton de fibres et du même béton sans fibres dans une solution agressive est un bon exemple représentatif de ces résultats (figure I-10).



**Figure I-10 : Evolution de la résistance en flexion du béton de fibres et du béton témoin en fonction du temps (échantillons conservés dans l'eau ou dans différentes solutions de  $Na_2SO_4$ ), NEMERGEER [50].**

**I-11-10) Résistance aux chocs thermiques**

D'après T. CUYKENS [44], l'adjonction des fibres d'acier étirées à des bétons réfractaires soumis à des températures élevées et surtout à des chocs thermiques peut prolonger sensiblement la durée de vie de ces bétons. On utilise actuellement pour ces applications des fibres en acier inoxydable, à des pourcentages allant de 0.5 à 1.5 %, ces fibres ne perdent leurs propriétés qu'à des températures très élevées.

**I-11-11) Comportement vis-à-vis du retrait**

La présence des fibres permet de freiner les mouvements du squelette dû à l'évaporation de l'eau ou à l'évolution de la microporosité. Le retrait du béton de fibres est alors moins important que celui du même béton sans fibres. Les essais de retrait réalisés par EL HACHEM [45], SWAMY et BAHIA [51] et VALADE [47] sur un béton renforcé par des fibres montrent que la présence de ces dernières entraîne la diminution du retrait. De plus, la réduction du retrait augmente avec l'augmentation de la teneur en fibres. En ce qui concerne le retrait gêné, EL HACHEM [45] remarque que la présence des fibres permet d'augmenter de 28% la contrainte de rupture due au retrait par rapport au béton témoin (sans fibres).

**I-11-12) Comportement vis à vis du fluage**

La présence des fibres de fonte dans le béton a peu d'influence sur le fluage du béton [45], [32]. Par contre, BALAGURU et al [52] ont observé que la présence des fibres augmente le fluage du béton.

**I-12) CONCLUSION**

Grâce à leurs propriétés mécaniques, les fibres permettent de mieux mobiliser la résistance intrinsèque du béton, et lui apporte une certaine ductilité au comportement post-rupture et améliore légèrement les caractéristiques mécaniques du composite telles que la résistance à la traction, la résistance à la compression, la résistance au cisaillement, la résistance à la fatigue et la résistance aux chocs. La présence des fibres réduit le retrait du béton mais n'influe pas de façon significative sur la porosité et la perméabilité du composite.

Les avantages du composite permettent de réaliser des pièces minces de grandes dimensions et d'offrir au concepteur une plus grande liberté architecturale. et elles confèrent aux bétons de nombreux atouts ; la maîtrise de la fissuration, une facilité et rapidité de mise en œuvre, un renforcement multidirectionnel et homogène, un remplacement partiel ou total des armatures traditionnelles.

## **Chapitre II**

# **LOIS DE COMPORTEMENT**

**I-1) INTRODUCTION**

Le comportement des structures en béton de fibre /armé est linéaire sous faible chargement de courte durée. Dans ce cas il y a proportionnalité entre les contraintes et les déformations ou encore entre les charges et les déplacements.

En général, à ce comportement linéaire, succède une phase post-élastique non linéaire dû en particulier aux lois de comportement des matériaux constitutifs.

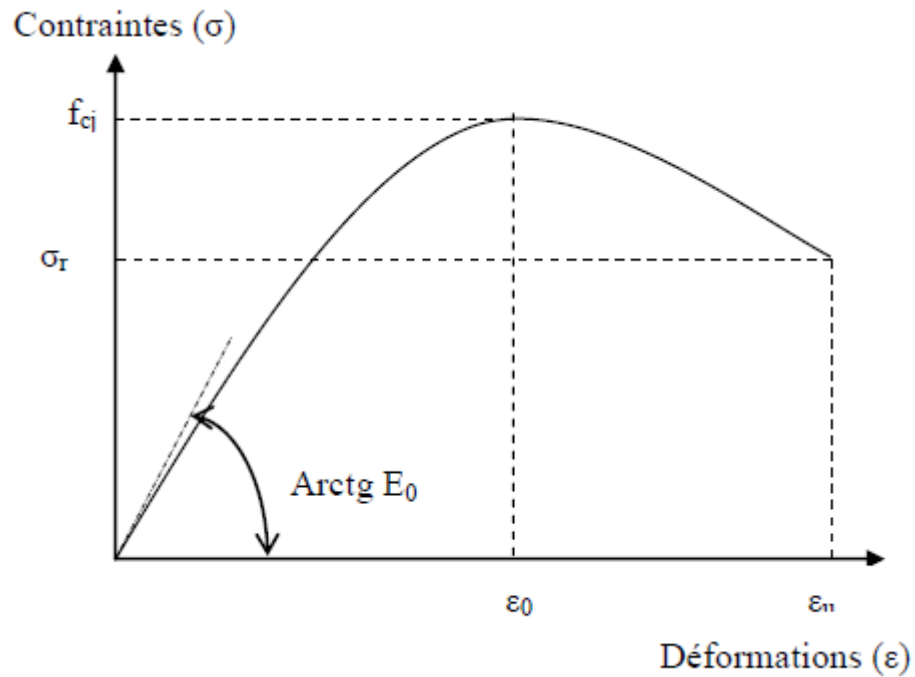
Dans ce présent chapitre, on s'intéresse aux différentes lois de comportement du béton de fibre.

**I-2) MODELISATION DU COMPORTEMENT DU BETON DE FIBRES EN COMPRESSION**

Le comportement du béton sans fibres en compression est caractérisé par une phase élastique suivie d'une phase de microfissuration conduisant rapidement à la rupture fragile du matériau. L'ajout de fibres modifie légèrement ce comportement. Dans la partie ascendante, le comportement du béton de fibres en compression est similaire à celui du béton sans fibres, par contre dans la partie descendante la pente est moins raide que dans le cas du béton seul. Il existe peu de modèles décrivant le comportement dans ce domaine pour les bétons de fibres. Nous citerons les modèles qui sont couramment utilisés pour exprimer la loi de comportement de ce type de matériau.

**II-2-1) Modèle de SARGIN**

Le modèle de SARGIN est essentiellement utilisé dans le calcul des structures en béton armé et précontraint. Il présente l'avantage de la facilité de détermination de ses paramètres par des essais en laboratoire. En faisant varier le paramètre  $R_c$ , il est possible d'étendre ce modèle au béton de fibres. La variation de  $R_c$  permet de rendre compte de l'apport des fibres en ductilité. En effet, l'augmentation de  $R_c$  permet d'adoucir la pente descendante de la courbe contrainte - déformation, ce qui correspond à une certaine ductilité du matériau.



**Figure II-1 : Diagramme contrainte - déformation du béton en compression simple, SARGIN [53].**

Ce modèle est décrit par l'expression suivante :

$$\sigma = f_{cj} \frac{R_b \cdot \epsilon_r + (R_c - 1) \epsilon_r^2}{1 + (R_b - 2) \epsilon_r + R_c \cdot \epsilon_r}$$

Avec:

- $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$
- $R_b = E_0 \epsilon_0 / f_{cj}$
- $f_{cj}$ : résistance à la compression du composite à j jour d'âge
- $E_0$ : module élastique à l'origine du composite
- $\epsilon_0$ : déformation correspondant au pic des contraintes
- $R_c = R_b - 1$ : bétons normaux,  $R_c = 0$ : bétons légers
- $\epsilon_u$ : déformation de rupture
- $\sigma_r$ : contrainte de rupture

**II-2-2) Modèle de FANELLA et NAAMAN [54]**

Ce modèle présente l'avantage de mieux représenter le comportement du composite dans la branche descendante par rapport à celui de SARGIN. Néanmoins, il présente de grandes difficultés pour le calcul des coefficients a, b, c et d, dans la mesure où cela nécessite la connaissance des diagrammes ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) complets. L'établissement des diagrammes ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) exige un grand soin lors de la réalisation des essais. Aussi, son utilisation manque de souplesse et peut conduire à des difficultés concernant la recherche du point d'inflexion. Ce modèle est décrit par l'expression suivante :

$$\sigma = (a\varepsilon + b\varepsilon^2) / (1 + c\varepsilon + d\varepsilon^2)$$

Où a, b, c et d sont des coefficients déterminés à partir des conditions aux limites.

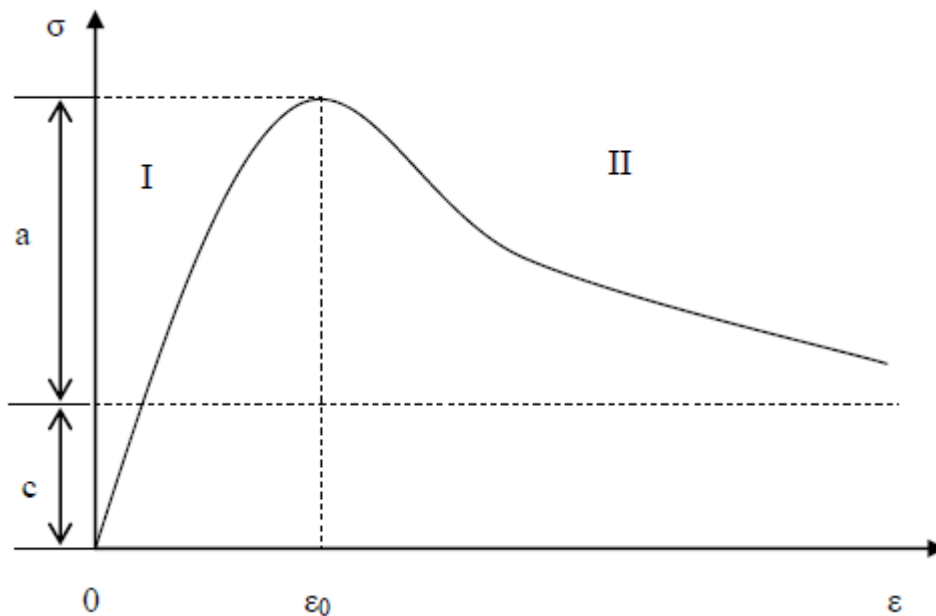
**II-2-3) Modèle d'ABSI et NAAMAN**

Ce modèle décrit la branche descendante (branche II) relative à l'apparition de micro fissure. Son expression est de la forme:

$$\sigma = ae^{-b(\varepsilon-\varepsilon_0)^m} + c$$

a, b, c, m : coefficients positifs ( $m > 1$ ) déterminés par les conditions aux limites.

$\varepsilon_0$ : déformation correspondant à la contrainte maximale  $\sigma_0$ .



**Figure II-2: Diagramme contrainte - déformation en compression, ABSI et NAAMAN [55].**

Nous pouvons noter que ce modèle présente les mêmes avantages et inconvénients que celui de FANELLA et NAAMAN [54].

### **II-3) MODELISATION DU COMPORTEMENT DU BETON DE FIBRES EN TRACTION**

La présence des fibres modifie le comportement du béton en traction. Cette modification intervient surtout dans la phase post-fissuration où les fibres se mobilisent pour reprendre les contraintes libérées par les fissures. La rupture qui en résulte est donc ductile. Pour caractériser cette modification, peu de modèles sont actuellement proposés. Nous citerons dans cette étude les modèles proposés pour le calcul des sections en béton de fibres soumises à des chargements uni axiaux

#### **II-3-1) Modèle de MAZARS**

Ce modèle a été développé pour décrire le comportement du béton armé de fibres à partir de la théorie de l'endommagement MAZARS [56]. Cette théorie a été construite initialement pour modéliser le comportement vis à vis du fluage des métaux. MAZARS décrit le comportement non linéaire du béton de fibres en introduisant dans la relation contrainte – déformation élastique un facteur d'endommagement  $D$ . La loi de comportement s'écrit sous la forme :

$$\sigma = E_0 \cdot \varepsilon \quad \text{Pour } \varepsilon < \varepsilon_0$$

$$\sigma = E_0 \cdot (1 - D) \varepsilon \quad \text{Pour } \varepsilon > \varepsilon_0$$

Avec :

$$D = 1 - \frac{A_t}{e^{B_t(\varepsilon - \varepsilon_0)}} - \frac{\varepsilon_0(1 - A_t)}{\varepsilon}$$

Où :

- $D$ : facteur d'endommagement compris entre 0 et 1
- $E_0$  : module élastique du béton à l'origine
- $\varepsilon_0$ : déformation correspondant à la contrainte maximale de traction
- $A_t, B_t$ : coefficients positifs

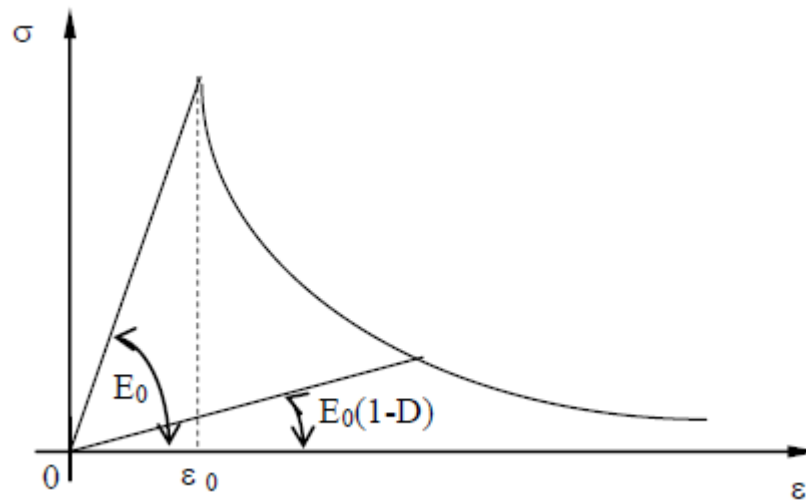
Selon les recommandations de l'auteur, il faut déterminer les paramètres  $A_t, B_t$  et  $\varepsilon_0$  par des essais de flexion.

D'après des essais en flexion réalisés sur des éléments en béton de fibres à crochets, VINCENT [57] a obtenu les valeurs suivantes:

$$5,5 \cdot 10^{-5} < \varepsilon_0 < 8,9 \cdot 10^{-5}, \text{ en moyenne } \varepsilon_0 = 7,4 \cdot 10^{-5}$$

$$0,196 < A_t < 0,676, \text{ en moyenne } A_t = 0,434$$

$$5000 < B_t < 10135, \text{ en moyenne } B_t = 7205$$

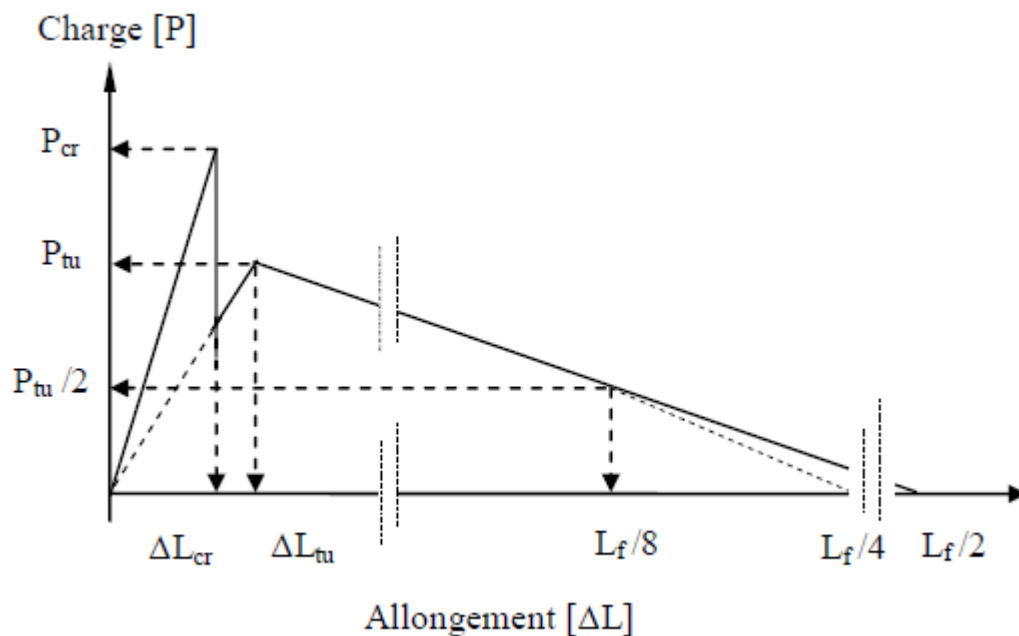


**Figure II-3: Comportement du béton de fibres en traction, MAZARS [56].**

L'inconvénient majeur de ce modèle réside dans la difficulté de déterminer les paramètres  $A_t$ ,  $B_t$  et  $\epsilon_0$  par des essais de flexion.

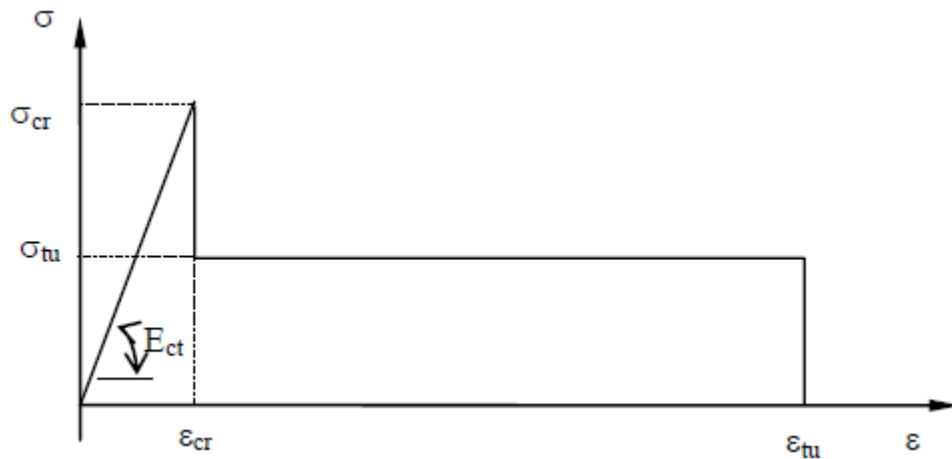
### II-3-2) Modèle de LIM

Ce modèle est construit pour décrire le comportement d'un élément en béton armé de fibres. Il exprime la charge  $P$  en fonction de l'allongement  $\Delta L$  de l'élément.



**Figure II-4: Comportement du béton de fibres en traction [36].**

Les paramètres de ce modèle peuvent être déterminés à partir des propriétés du béton et des fibres. En revanche, leur détermination reste relativement complexe. Ainsi, l'auteur propose un diagramme contraintes - déformations simplifié.



**Figure II-5: Diagramme contraintes-déformations simplifié du béton de fibres [36].**

$E_{ct}$ : module élastique du composite,

$$E_{ct} = E_b V_b + 0.14 \Gamma_1 E_f V_f$$

$\sigma_{tu}$ : résistance résiduelle,

$$\sigma_{tu} = \Gamma_1 \Gamma_0 V_f L_f \tau_u / (2.r)$$

$f_{ct}$ : résistance à la traction du composite,

$$f_{ct} = E_{ct} \varepsilon_{cr}$$

$\varepsilon_{tu}$ : déformation ultime,

$$\varepsilon_{tu} = L_f / 16 L$$

$V_b$  : pourcentage en volume du béton,

$V_f$ : pourcentage en volume des fibres,

$E_f$ : module élastique des fibres,

$\Gamma_1$ : rapport entre la contrainte moyenne développée dans une fibre et la contrainte maximale,

$L_f$ : longueur des fibres,

$\Gamma_0$ : facteur d'orientation ( $\Gamma_0 = 0.405$ , pour une orientation aléatoire supposée des fibres),

$\varepsilon_{cr}$ : déformation à la rupture du composite,

$$\varepsilon_{cr} = \varepsilon_{bt} + \Gamma_1 \Gamma_0 V_f (\varepsilon_{ft} - \varepsilon_{bt})$$

$\varepsilon_{ft}$ : déformation au seuil élastique des fibres,

$\varepsilon_{bt}$ : déformation à la rupture du béton en traction,

$\tau_u$ : résistance d'adhérence fibres-matrice de béton,

$r$ : rapport entre la surface de la fibre et son périmètre,

$L$ : longueur de référence. Dans le cas de la flexion c'est l'espacement moyen entre deux fissures voisines.

Ce modèle présente l'avantage de prédire le comportement du composite à partir des propriétés du béton et des fibres. Cependant, Il ne peut décrire le comportement du composite dans le cas des forts dosages en fibres.

### II-3-3) Modèle de BOUAFIA

Pour décrire le comportement des bétons de fibres en traction, Y. BOUAFIA a proposé un modèle basé sur les hypothèses suivantes :

- les fibres sont dispersées dans le béton de façon aléatoire ou plutôt uniforme,  
Avant fissuration :

- le comportement est élastique linéaire, les fibres retardent la microfissuration ;  
- l'adhérence entre les fibres et le béton est parfaite,

Après fissuration :

- le comportement est élastique non linéaire ;  
- la rupture survient par arrachement des fibres ;  
- la contrainte de cisaillement à la surface des fibres atteint la résistance maximale  $\tau_u$  tout au long de la fibre.

Ce modèle se présente sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = E_0 \varepsilon & \varepsilon < \varepsilon_{ct} \\ \sigma = f_t \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^2}{2(\varepsilon_u - \varepsilon_{ct})^2} & \varepsilon_{ct} > \varepsilon \text{ et } V_f < V_{fc} \quad \text{courbe 1} \\ \sigma = f_t - At \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{ct})^2}{2(\varepsilon_{tu} - \varepsilon_{ct})} & \varepsilon_{ct} > \varepsilon \text{ et } V_f < V_{fc} \quad \text{courbe 2} \end{array} \right.$$

Avec :

- $E_0$ : module élastique du composite,
- $\varepsilon_{tu}$ : déformation correspondant à la contrainte maximale,
- $\varepsilon_{ct}$ : déformation à la fissuration du béton,
- $\varepsilon_u$ : déformation ultime ( $\varepsilon_u = 0.5$ ),
- $f_t$ : résistance de traction à la fissuration du composite,
- $f_{tu}$ : résistance maximale,
- $V_f$  : pourcentage en volume des fibres,

-  $V_{fc}$ : pourcentage volumique critique des fibres séparant les diagrammes contrainte déformation en deux familles,

-  $A_t$ : paramètre du modèle:  $A_t = 2 \frac{(f_{tu} - f_t)}{(\varepsilon_{tu} - \varepsilon_{ct})}$

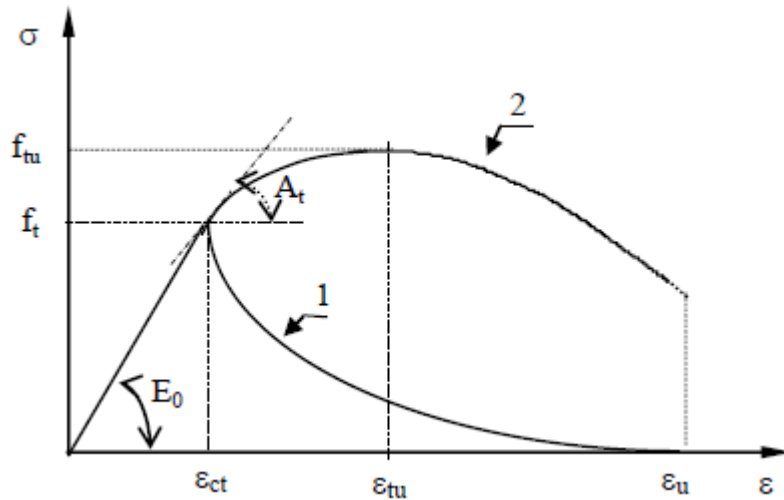


Figure II-6: Comportement du béton de fibres en traction [58].

L'auteur classe le comportement du béton de fibres en deux familles. Dans la première famille, l'effort repris par les fibres après fissuration du béton est inférieur à l'effort maximum repris par le béton seul. Ainsi, après fissuration du béton l'effort décroît (courbe 1).

Pour la seconde famille, au contraire, l'effort repris par les fibres après fissuration est supérieur à l'effort maximum repris par le béton seul. Après fissuration du béton, l'effort croît (courbe 2) jusqu'à un maximum correspondant à la mobilisation maximale de l'adhérence des fibres dans le béton.

Cette classification dépend essentiellement de la teneur en fibres. Un pourcentage volumique critique des fibres qui séparent les diagrammes contrainte déformation en deux familles est défini, ce pourcentage est donné par :

$$V_{fc} = \frac{f_{tb}}{\Gamma_0(l_f \tau_u / \phi - n f_{tb})}$$

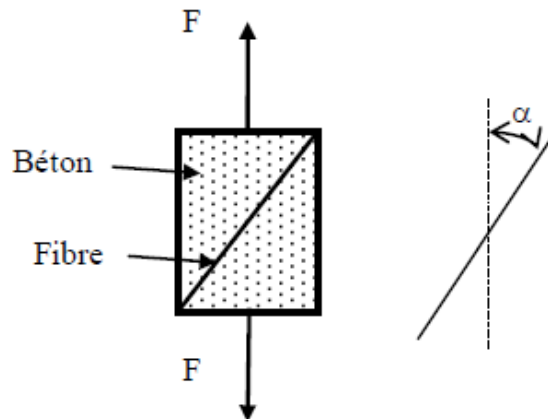
Avec :

- $f_{tb}$ : résistance à la traction du béton,
- $\Gamma_0$ : facteur d'orientation,
- $l_f$ : longueur des fibres,
- $\phi$ : diamètre des fibres,
- $\tau_u$ : adhérence ultime fibre-matrice béton,

-  $n$ : coefficient d'équivalence acier-béton ( $n = E_a / E_b$ ).

Le facteur d'orientation des fibres est défini par l'auteur en admettant une orientation bidimensionnelle. Pour une orientation tridimensionnelle, ce facteur prend la valeur 0.405 [34].

$$\Gamma_0 = (\cos \alpha)_{moyen} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha = 0.637$$



*Figure II-7 : Orientation bidimensionnelle des fibres [58].*

On peut noter que ce modèle présente l'avantage de prédire le comportement du composite à partir, seulement, des propriétés des fibres et du béton. Cependant, cette modélisation présente un grand inconvénient en ce sens qu'elle impose des hypothèses de calcul idéalistes (indépendance entre les propriétés d'adhérence et la teneur en fibres, non rupture des fibres après la fissuration du béton) alors que de manière générale, le facteur d'orientation et les propriétés d'adhérence peuvent être très variables suivant les conditions de réalisation du béton.

**II-3-4) Modèle de ZHAN**

ZHAN [37] propose deux modèles de comportement post – fissuration en traction.

**Modèle 1** : modèle élastoplastique réduit

$$\begin{cases} \sigma = f_{tu} & \text{pour } \varepsilon_t < \varepsilon < \varepsilon_{tu} \\ \sigma = 0 & \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_{tu} \end{cases}$$

Où :

- $f_{tu}$  : résistance résiduelle de traction
- $\varepsilon_{tu}$  : déformation ultime ( $\varepsilon_{tu} = 10^{-2}$ )

**Modèle 2** : modèle élastoplastique radouci

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\alpha \varepsilon_r + 100}{\alpha \varepsilon_r^3 + 100} f_t + \frac{(\varepsilon_r - 1)^\beta}{(\varepsilon_r - 1)^\beta + 10^4} f_{tu} & \text{pour } \varepsilon_t < \varepsilon < \varepsilon_{tu} \\ \sigma = 0 & \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_t \end{cases}$$

Avec :

- $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_t$
- $\alpha$  et  $\beta$ : coefficients constants du modèle

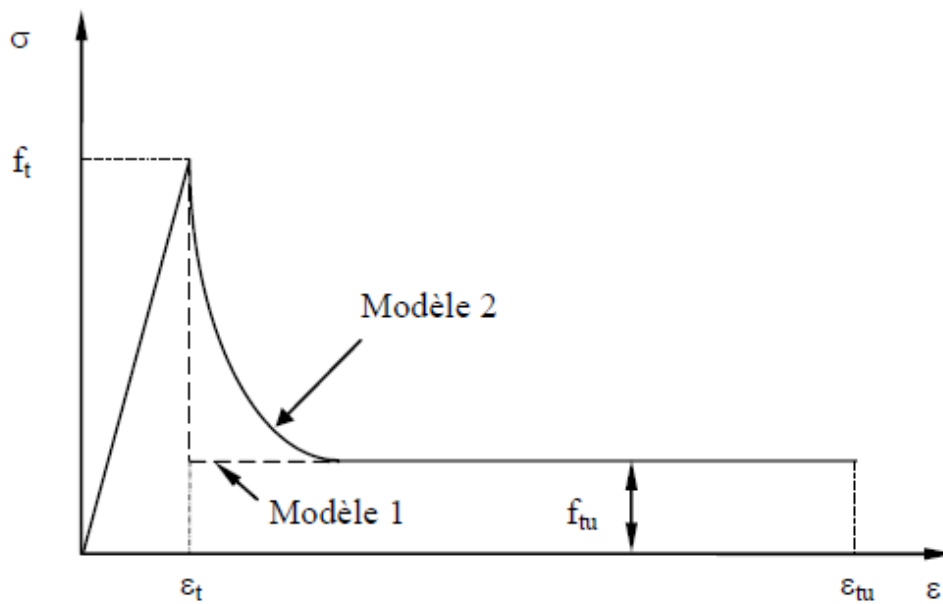


Figure II-8: Relation contrainte-déformation, ZHAN [37].

Les paramètres du modèle sont déterminés par des essais de traction ou par calcul. La résistance à la rupture par traction peut être calculée par la relation expérimentale suivante:

$$f_t = 0.6f_{ft}$$

Avec

$f_{ft}$  : résistance de traction par flexion.

La résistance résiduelle peut être, quant à elle, calculée à l'aide de la formule proposée par LIM.

$$F_{tu} = \Gamma_0 V_f (l_f / \phi_f) \tau_u$$

Avec :

- $\Gamma_0$  : facteur d'orientation des fibres
- $V_f$  : pourcentage en volume des fibres
- $l_f$  : longueur des fibres
- $\phi_f$  : diamètre des fibres
- $\tau_u$  : adhérence ultime fibre - matrice

Ces deux modèles ont été confrontés aux résultats expérimentaux sur des pieux en vraie grandeur pour des dosages en fibres relativement faibles. Les résultats obtenus dans ce cas sont satisfaisants. Néanmoins, la difficulté que présente ce modèle réside dans l'ajustement des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  qui ne sont pas fixés. De plus, il ne tient pas compte de la perte d'adhérence due au glissement des fibres pour les grandes déformations. Ce qui peut conduire à une nette différence avec le comportement réel dans le cas de dosages importants en fibres.

### **II-3-5) Modèle de BOUAFIA, KACHI et FOURE**

Une loi effort – ouverture de fissure tenant compte de la géométrie et de la résistance des fibres, de la répartition et de l'orientation des fibres, de l'adhérence des fibres à la matrice et de la teneur en fibres a été proposée par les auteurs en 1998 [59]. Ce modèle s'écrit :

$$\begin{cases} F = BE_{ct}\varepsilon & \text{si } w = 0 \\ F = BE_{uc} - B[\sigma_{uc} - (f_{ft} - f_{bt})] \frac{(w - w_u)^6}{w_u^6} & \text{si } 0 \leq w \leq w_u \\ F = B\sigma_{uc} \left[ 1 - \frac{(w - w_u)^6}{(w_r - w_u)^6} \right] & \text{si } w_u \leq w \leq w_r \end{cases}$$

Où :

- B : aire de la section de l'éprouvette,

- $E_{ct}$  : module initial du composite en traction,
- $\sigma_{uc}$  : contrainte maximale fictive du composite à l'état ultime,
- $\varepsilon$  : déformation,
- $f_{bt}$  : résistance du béton à la traction,
- $f_{ft}$  : résistance du composite à la traction,
- $w$  : ouverture des fissures,
- $w_u$  : ouverture ultime des fissures,
- $w_r$  : ouverture des fissures à la rupture totale du composite.

La représentation graphique de cette loi est illustrée sur la figure ci-dessous (Fig II-9)

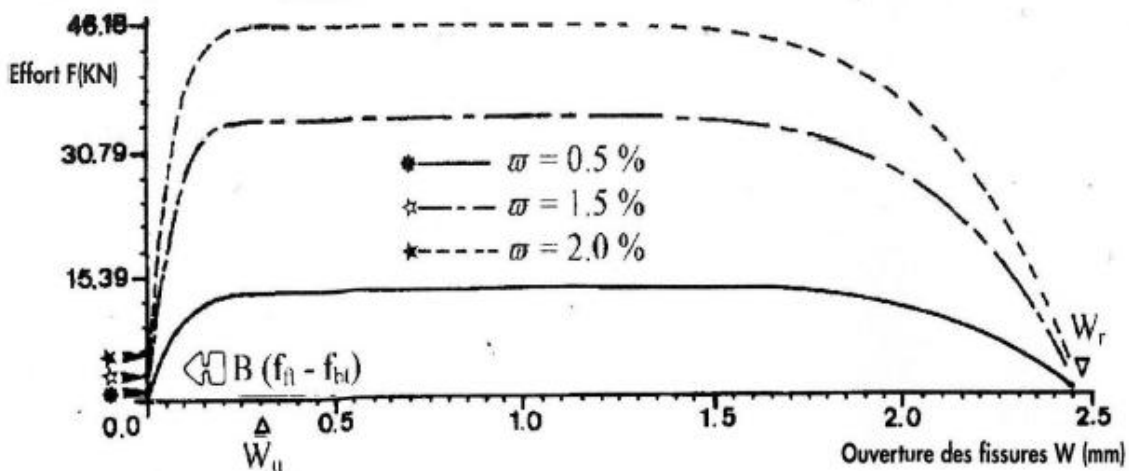


Figure II-9 : Courbe effort – ouverture de fissure [60].

Avant fissuration, le comportement est linéaire. La contrainte moyenne dans le composite et le module élastique du composite s'écrivent :

$$\sigma = f_{bt}(1 + nw_{eff})$$

$$E_{ct} = E_{b0}(1 + n\theta_0 w)$$

Avec :

- $E_{b0}$ : module initial du béton en compression,
- $n$  : coefficient d'équivalence acier-béton,
- $\theta_0$  : facteur d'orientation des fibres,
- $\omega$  : pourcentage en volume des fibres,
- $\omega_{eff}$  : pourcentage effectif des fibres.

Après fissuration, le comportement est élastique non linéaire. La rupture intervient soit par arrachement soit par rupture des fibres.

Quand il y'a arrachement des fibres, la contrainte fictive maximale à l'état ultime du composite et l'ouverture des fissures s'écrivent :

$$\sigma_{uc} = w\theta_0 \frac{l_f}{\emptyset} \tau_u$$

$$w_r = 1,2l_f(\varepsilon_{rf} - \varepsilon_{ft})$$

Quand il y'a rupture des fibres, la contrainte à la rupture dans la fibre et l'ouverture des fissures s'écrivent :

$$\sigma_{uc} = \frac{l_f \tau_u}{\emptyset}$$

$$w_r = l_f(\varepsilon_{rf} - \varepsilon_{ft})$$

Avec :

$\varepsilon_{rf}$  : déformation de rupture d'une fibre,

$\varepsilon_{ft}$  : déformation de fissuration du béton,

$\emptyset$  : diamètre d'une fibre,

$\tau_u$  : contrainte d'adhérence fibre-matrice béton.

Lors de la confrontation des résultats obtenus par calculs à ceux issus des essais, une divergence entre ces résultats est apparue. En effet, au début de la fissuration, les auteurs ont constaté que la chute de l'effort dans le composite après l'apparition des fissures est moins brutale que celle décrite par le modèle. Cela est lié au non prise en compte de la contribution du béton tendu dans la reprise des efforts après fissuration. En tenant compte de l'évolution de la contrainte, après fissuration, dans le béton tendu, il a été proposé [60] la relation suivante :

$$\begin{cases} F = BE_{ct}\varepsilon & \text{si } w = 0 \\ F = BE_{uc} - B[\sigma_{uc} - (f_{ft} - f_{bt})] \frac{(w - w_u)^6}{w_u^6} & \text{si } 0 \leq w \leq w_u \\ F = B\sigma_{uc} \left[ 1 - \frac{(w - w_u)^6}{(w_r - w_u)^6} \right] & \text{si } w_u \leq w \leq w_r \end{cases}$$

Dont la représentation graphique est donnée ci-dessous (Fig. II-10).

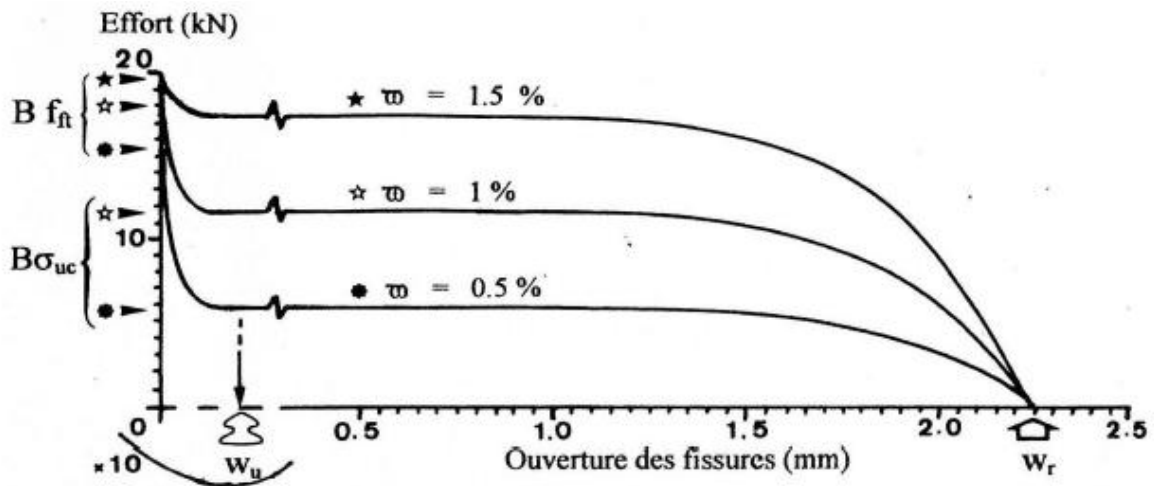


Figure II-10 : Relation effort –ouverture de fissure [60].

Pour exprimer cette relation force-ouverture de fissure par une relation contrainte déformation ils ont utilisé la notion de référence  $l_r$ . Cette longueur délimite la zone, autour de la fissure, perturbée par la localisation de la déformation résultant de l'ouverture de la fissure principale. Elle est liée à la hauteur de la section  $h$  de la poutre par la relation :

$$l_r = \beta h$$

Avec

$\beta$  : constante du modèle.

La déformation ultime correspondant à la mobilisation de la totalité de l'adhérence est donnée par :

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{ft} + \frac{w_u}{l_r} = \varepsilon_{ft} + \frac{\tau_u l_f^2}{3E_f \phi \beta h}$$

Et la déformation à la rupture du composite correspondant à l'arrachement des fibres s'écrit:

$$\varepsilon_{rt} = \varepsilon_{ft} + \frac{w_r}{l_r} = \varepsilon_{ft} + \frac{\tau_u l_f^2}{3E_f \phi \beta h} + \frac{l_f}{4\beta h}$$

Pour limiter le risque de corrosion des fibres, cette déformation est limitée à la déformation de rupture des fibres :

$$\varepsilon_{rt} = \varepsilon_{ft}$$

Et l'ouverture des fissures, à la rupture totale du composite, s'écrit :

$$w_r = l_r (\varepsilon_{rf} - \varepsilon_{ft})$$

La relation force - ouverture de fissure transformée en une relation contrainte déformation s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = E_{ct}\varepsilon & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ft} \\ \sigma = \sigma_{uc} - [(\sigma_{uc} - f_{ft})] \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{ft} - \varepsilon_u)} & \text{si } \varepsilon_{ft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ \sigma = \sigma_{uc} \left[ 1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_u)^6} \right] & \text{si } \varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{rt} \end{array} \right.$$

Et sa représentation graphique est donnée sur la figure suivante :

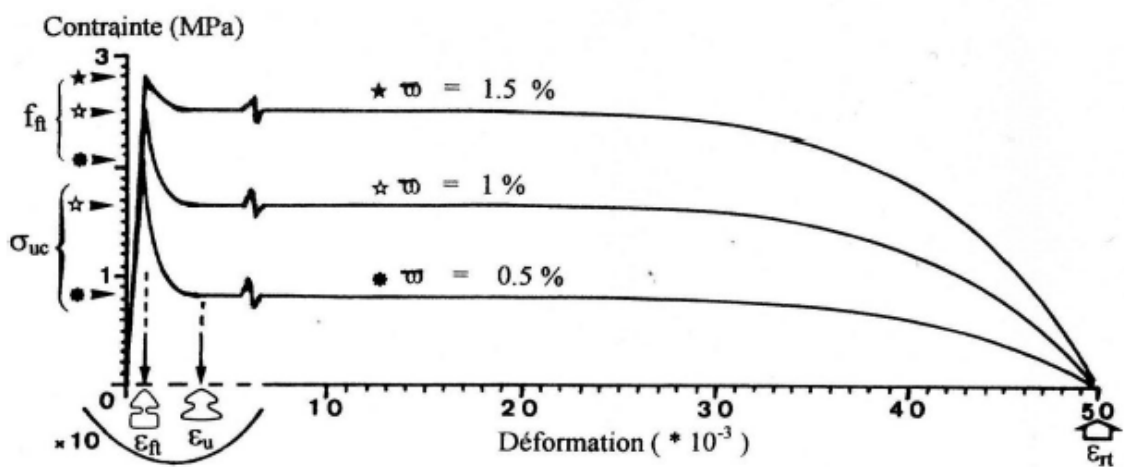


Figure II-11 : Loi de comportement en traction du béton armé de fibres d'acier [60].

## CONCLUSION

La modélisation du comportement du béton de fibres est généralement établie à partir de résultats expérimentaux. Hormis les modèles de ZHAN [37] et BOUAFIA, FOURE et KACHI [59, 60] aucun modèle, parmi ceux cités, n'a été validé par des essais en vraie grandeur. Tous ces modèles, établis pour des fibres droites, sont basés sur l'hypothèse que la rupture du composite n'intervient que par arrachement des fibres. Le cas de la rupture du composite suite à la rupture des fibres ne présente pas d'intérêt pour le béton de fibres. Le modèle de BOUAFIA [59, 60] contrairement aux autres modèles qui ne s'intéressent qu'aux bétons à faibles teneurs en fibres, distingue entre les bétons à faibles et forts pourcentages en fibres.

**Chapitre III**  
**ETUDE D'UNE SECTION**

**III-1) INTRODUCTION**

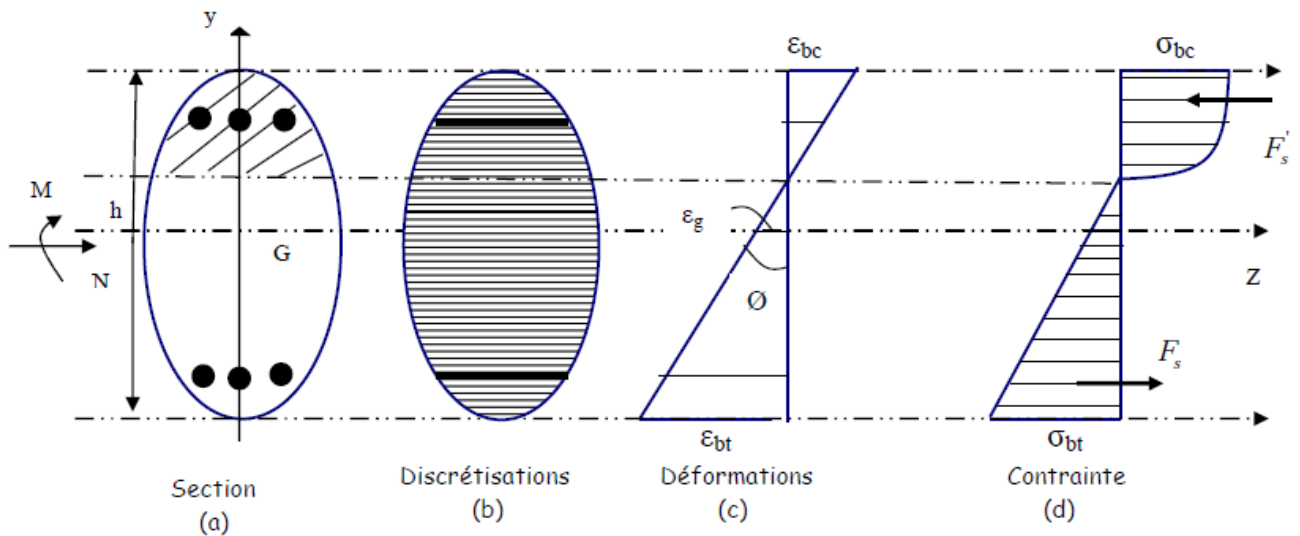
Sous des sollicitations proches des sollicitations ultimes, une section en béton de fibres se plastifie et se fissure. Le calcul en élasticité linéaire ne permet pas d'évaluer le comportement réel de la section. On est alors amené à faire une étude en élasticité non linéaire. Cette question a fait l'objet de plusieurs études dont on peut citer [58], [22] et [61].

**III-2) HYPOTHESES DE CALCUL**

On s'intéresse au calcul et à la modélisation du comportement d'une section en béton armé de fibre, soumise à la flexion composée.

On admet les hypothèses de calcul suivantes:

- Flexion plane d'une section à plan moyen, chargée dans son plan et symétrique par rapport à l'axe GY passant par son centre géométrique.
- Conservation de la section plane après déformation.
- Absence de glissement relatif entre le béton et l'acier.
- L'influence de l'effort tranchant est négligée.



**Figure III.1: Discretisation de la section et diagrammes des contraintes et déformations.**

Avec :

$\sigma_{bc}$  : Contrainte de la fibre de béton la plus comprimée,

$\sigma_{bt}$  : Contrainte de la fibre de béton la plus tendue,

$\varepsilon_{bc}$  : Déformation de la fibre de béton la plus comprimée,

$\epsilon_{bt}$  : Déformation de la fibre de béton la plus tendue,

$\epsilon_y$  : Déformation d'une fibre située à une hauteur  $y$ , à partir du centre de gravité de la section.

On considère une section en béton armé de fibre, en équilibre sous un moment fléchissant  $M$  et un effort normal  $N$  agissant au centre géométrique  $G$  de la section.

En tenant compte des hypothèses de calcul, les déformations dans cette section sont définies à l'aide de deux paramètres : la déformation longitudinale  $\epsilon_g$  au niveau du centre géométrique  $G$  de la section et la courbure  $\phi$ .

La déformation longitudinale  $\epsilon(y)$ , d'une fibre horizontale située à l'ordonnée  $y$  par rapport à l'axe  $Gz$  est donnée par

$$\epsilon = \epsilon(y) = \epsilon_G + \phi \cdot y \dots\dots\dots (3-1)$$

La contrainte normale au niveau de la fibre considérée est donnée par :

$$\sigma(y) = f(\epsilon(y)) \dots\dots\dots (3-2)$$

La fonction  $f(\epsilon)$  est définie par la loi de comportement  $\sigma-\epsilon$  du matériau constituant la fibre considérée.

Les efforts équilibrés par la section sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_s \sigma(y) ds \\ M &= \int_s \sigma(y) \cdot y ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-3)$$

D'où

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_s E_s \epsilon(y) ds \\ M &= \int_s E_s \epsilon(y) \cdot y ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-4)$$

Où  $E_s$  désigne le module sécant, il est fonction de  $\varepsilon(y)$  (Figure III.2),

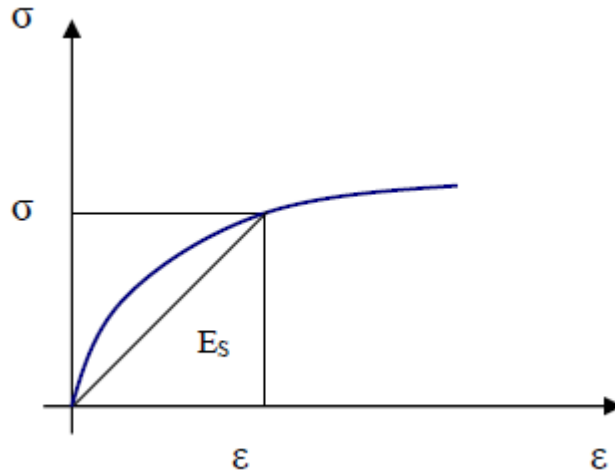


Figure III.2: comportement contrainte-déformation en présentant le module de sécant.

En tenant compte de (3-1) on obtient:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_s E_s (\varepsilon_G + \phi \cdot y) ds \\ M &= \int_s E_s (\varepsilon_G + \phi \cdot y) y ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-5)$$

Ou encore :

$$\left. \begin{aligned} N &= \left( \int_s E_s \cdot ds \right) \cdot \varepsilon_G + \left( \int_s E_s \cdot y \cdot ds \right) \phi \\ M &= \left( \int_s E_s \cdot y \cdot ds \right) \cdot \varepsilon_G + \left( \int_s E_s \cdot y^2 \cdot ds \right) \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-6)$$

En posant :

$$\left. \begin{aligned} EA &= \int_s E_s \cdot ds : \text{Rigidité à l'effort normal (rigidité de membrane),} \\ ES &= \int_s E_s \cdot y \cdot ds : \text{Rigidité due au couplage flexion - effort normal} \\ EI &= \int_s E_s \cdot y^2 \cdot ds : \text{Rigidité à la flexion.} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-7)$$

La relation entre les efforts et les déformations dans la section s'écrit alors :

$$\left. \begin{aligned} N &= EA \cdot \varepsilon_G + ES \cdot \phi \\ M &= ES \cdot \varepsilon_G + EI \cdot \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-8)$$

Ou encore, sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & ES \\ ES & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_G \\ \phi \end{Bmatrix} = [K_S] \begin{Bmatrix} \varepsilon_G \\ \phi \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-9)$$

[K<sub>S</sub>] est la matrice de rigidité sécante de la section,

Inversement, la relation (9) s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \phi \end{Bmatrix} = [K^{-1}] \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-10)$$

Avec :

$$[K^{-1}] = \frac{1}{\det[K_S]} \begin{bmatrix} EI & -ES \\ -ES & EA \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3-11)$$

La matrice [K<sub>S</sub>] est inversible si  $\det [K_S] = EA.EI - ES .ES \neq 0$

Dans le cas d'un comportement élastique linéaire, le module E<sub>s</sub> est indépendant de ε (y) et pour une section homogène, les rigidités données par (3.7) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} EA &= E_S \int_S ds = E_S . A \\ ES &= E_S \int_S y . ds = E_S . S \\ EI &= E_S \int_S y^2 . ds = E_S . I \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-12)$$

Où :

$$A = \int_S ds : \text{Aire de la section}$$

$$S = \int_S y . ds : \text{Moment statique de la section /Gz}$$

$$I = \int_S y^2 . ds : \text{Moment d'inertie de la section /Gz}$$

Dans ce cas, connaissant les efforts N et M, il est possible de calculer les déformations ε<sub>g</sub> et φ par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \phi \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_S (AI-S^2)} \begin{bmatrix} 1 & -S \\ -S & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-13)$$

Dans le cas d'un comportement non linéaire, le module sécant dépend de ε<sub>g</sub>. La détermination des déformations à partir des efforts n'est pas directe. Elle s'effectue par un calcul itératif non linéaire.

**III-3) CALCUL PRATIQUE DE LA MATRICE DE RIGIDITE DE LA SECTION**

Les composantes de la matrice de rigidité [Ks] sont déterminées en effectuant une discrétisation de la section (figure III.3) ceci en tenant compte du béton et des armatures d'acier. L'expression (7) est alors donnée par :

$$EA = \sum_{i=1}^{nb} E_{bi} \Delta S_i + \sum_{j=1}^{na} E_{aj} A_j$$

$$ES = \sum_{i=1}^{nb} E_{bi} \cdot y_{bi} \cdot \Delta S_i + \sum_{j=1}^{na} E_{aj} \cdot y_{aj} A_j \dots\dots\dots (3-14)$$

$$ES = \sum_{i=1}^{nb} E_{bi} \cdot y_{bi}^2 \cdot \Delta S_i + \sum_{j=1}^{na} E_{aj} \cdot y_{aj} A_j$$

nb : nombre de tranches horizontales dans la section du béton

na : nombre de lits d'aciers

E<sub>bi</sub> : module d'élasticité sécant du béton au niveau de la tranche i

E<sub>aj</sub> : module d'élasticité sécant de l'acier du lit j

A<sub>j</sub> : aire du lit d'acier i

y<sub>aj</sub> : ordonnée du lit d'acier j/Gz

ΔS<sub>i</sub> : aire de la tranche i du béton

Cette aire est donnée par :

$$\Delta S_i = b(y_{bi}) \cdot \Delta h_i$$

y<sub>bi</sub> : ordonnée au niveau du milieu de la tranche de béton i/Gz

b(y<sub>bi</sub>) : largeur de la tranche de béton i

Δh<sub>i</sub> : hauteur de la tranche de béton i

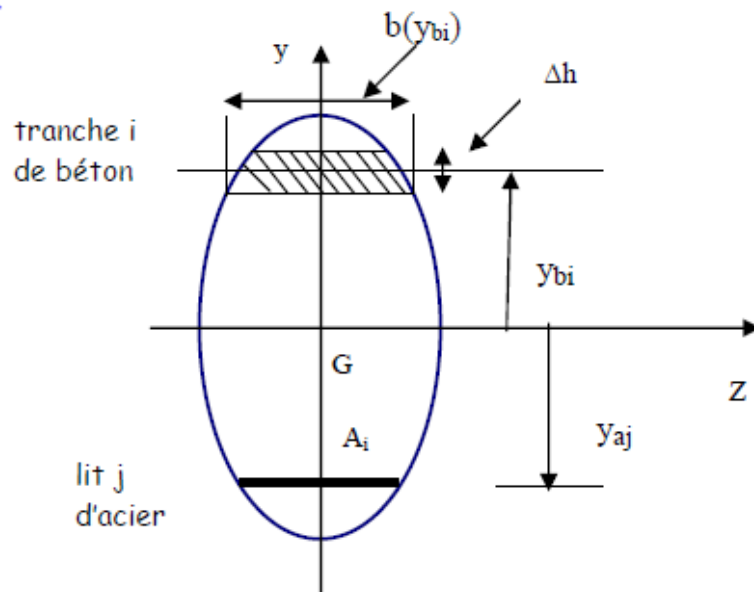


Figure III.3 : Discrétisation de la section en tranches horizontales.

**III-4) METHODE DE RESOLUTION NON LINEAIRE**

En élasticité non linéaire, on peut calculer les efforts (N, M) développés dans la section pour des déformations ( $\varepsilon_g, \phi$ ) données.

Le calcul inverse, c'est-à-dire la détermination des déformations à partir des efforts n'est pas possible par une méthode directe. On doit, dans ce cas, utiliser une méthode de calcul itérative [62].

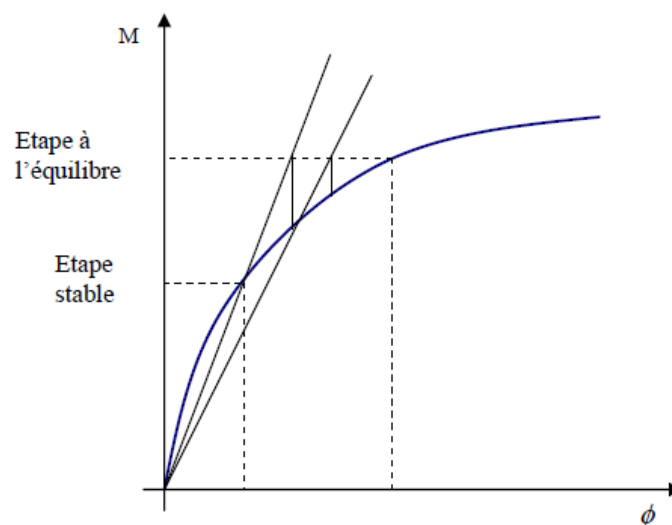
Initialement, on considère l'état d'équilibre de la section sous de faibles valeurs des efforts N et M. On démarre, alors, les calculs en considérant un comportement élastique linéaire. Dans ce cas, les déformations ( $\varepsilon_g, \phi$ ) correspondantes sont données par l'expression (3.13).

Sous un incrément ( $\Delta N, \Delta M$ ) des efforts, l'accroissement des déformations ( $\Delta \varepsilon_g, \Delta \phi$ ) dans la section est recherché par la méthode des substitutions successives utilisant les matrices de rigidité sécantes [62].

L'incrément des efforts peut se faire de trois façons :

- Incrément de moment fléchissant avec un effort normal constant ( $\Delta N = 0$ ).
- Incrément de l'effort normal avec un moment fléchissant constant ( $\Delta M = 0$ ).
- Incrément, au même temps, de l'effort normal et du moment fléchissant telle que  $e = \Delta N / \Delta M$  soit constant.

La figure (III.4) présente le schéma de résolution pour l'obtention de la courbe moment-courbure ( $M-\phi$ ) lorsque la section subit une incrément de moment fléchissant avec un effort normal constant.



**Figure III.4 : Schéma de résolution pour le calcul  $M-\phi$  ( $N= \text{constant}$ ).**

La méthode de résolution non linéaire s'effectue selon l'algorithme suivant :

1- soit l'étape stable  $j-1$ , correspondant aux efforts  $\langle N, M \rangle^{j-1}$  et les déformations  $\langle \varepsilon_g, \phi \rangle^{j-1}$ .

2- Incrémentation des efforts :

$$a- \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}^j = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}^{j-1} + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}$$

b- On démarre le compteur des itérations  $i=1$

3- Evaluation de la section matrice de rigidité sécante de la section en fonction de la section de l'étape précédente  $j-1$

$$[K_s]^i = [K_s(\varepsilon_g, \phi)^{i-1}]$$

4- Résolution du système d'équilibre

$$[K_s]^i \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_i \\ \Delta \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}^i$$

5- Cumul des déformations

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \phi \end{Bmatrix}^{i-1} + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \phi \end{Bmatrix}$$

6- Calcul des efforts équilibrés par la section :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \phi \end{Bmatrix}^i \rightarrow \begin{Bmatrix} N_R \\ M_R \end{Bmatrix}^i$$

7- Test de convergence sur les efforts non équilibrés :

$$N_R^i - N^j \leq \text{Précision}$$

$$M_R^i - M^j \leq \text{Précision}$$

7.1- Si convergence, l'étape  $j$  actuelle est stable (équilibrée) ; passer à l'incrément de charge suivante :  $j \rightarrow j+1$  et revenir à l'étape (2).

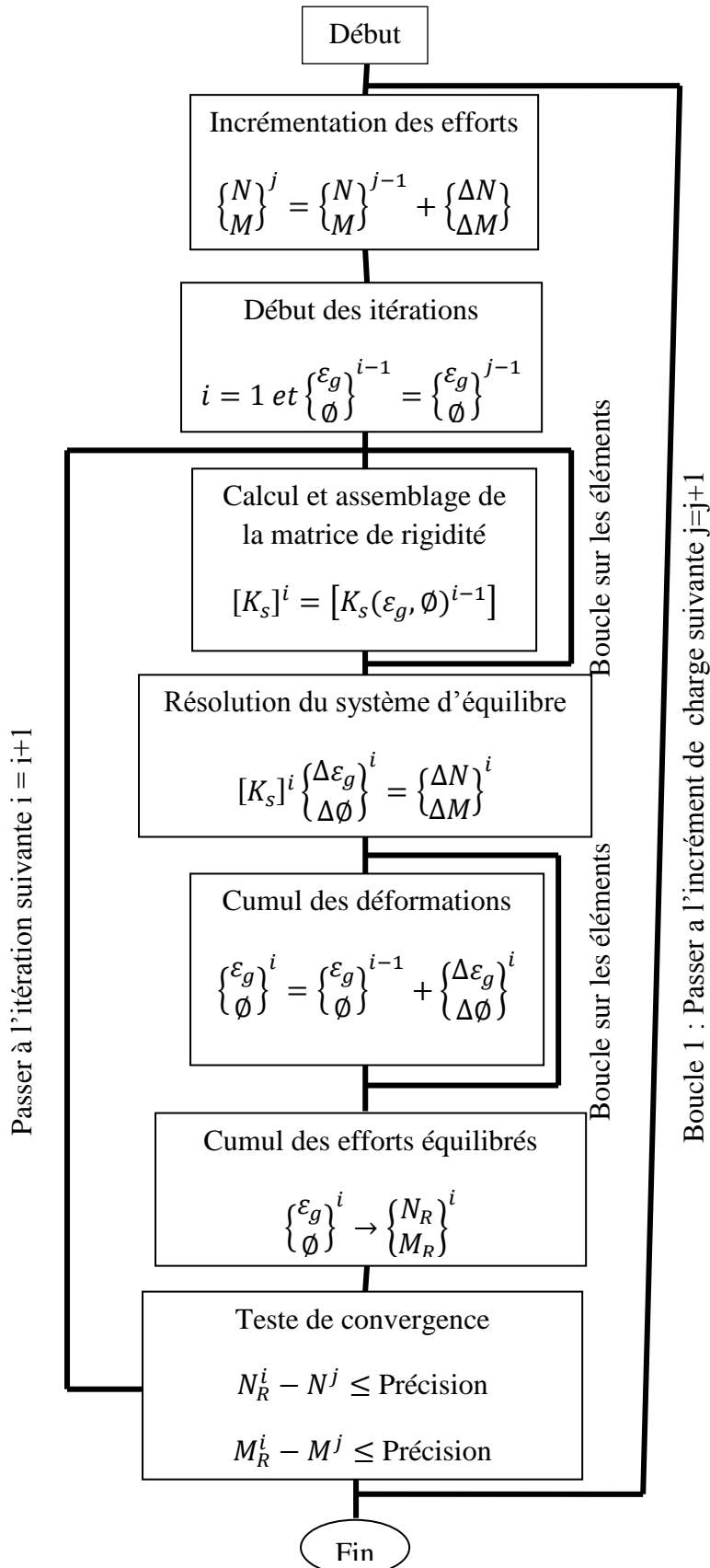
7.2- Sinon, passer à l'itération suivante :  $i \rightarrow i+1$  et revenir à l'étape (3).

7.3- Si au bout d'un certain nombre d'itérations fixé auparavant, la convergence n'est pas obtenue, la section ne peut être équilibrée et le calcul est arrêté.

8) obtention des courbe  $M-\phi$  :

Dans le cas du comportement instantané, on incrémente les valeurs du moment fléchissant (N étant constant). La suite des points ( $M-\phi$ ) correspondant aux étapes convergentes constitue la courbe moment\_courbure de la section étudiée.

III-5) Organigramme de calcul [63]



Organigramme de calcul

## **Chapitre IV**

# **FORMULATION D'UN'ELEMENT POUTRE**

**IV-1) INTRODUCTION**

La théorie des poutres est une simplification de la théorie de l'élasticité. Un élément poutre est un élément structural dont une des dimensions est bien plus grande devant les deux autres. Afin de simplifier les équations, différentes hypothèses cinématiques sont adoptées ; on peut distinguer la théorie de Bernoulli qui considère qu'une section plane reste plane et normale à la ligne moyenne, la théorie de Timoshenko qui considère qu'une section plane reste plane et des théories d'ordre supérieur qui considèrent qu'une section plane peut se voiler. Les éléments finis poutres sont formulés en déplacements ou en forces.

**IV-2) THEORIE DE BERNOULLI**

Les origines de cette théorie datent de XVIII siècle. C'est la première théorie traitant les poutres en considérant que la section plane reste plane et perpendiculaire à la ligne moyenne après déformation. Autrement dit, la rotation généralisée de la section  $\theta_z$  vaut la dérivée du déplacement généralisé transversal  $v_y$  par rapport à  $x$ . Le champ de déformations obtenu est :

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u'_x - y\theta'_z(x) \quad (4.1)$$

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = U'_y(x) - \theta_z(x) = 0 \quad (4.2)$$

Une des conséquences de l'hypothèse cinématique de la théorie de Bernoulli est donc que les déformations de cisaillement sont nulles. Par conséquent, les contraintes de cisaillement ne peuvent pas être prises en compte. Ceci limite le domaine de l'utilisation de la théorie Bernoulli aux poutres élancées. En effet, dans le cas des poutres courtes l'effet de cisaillement est important et ne peut pas être négligé.

En se basant sur la méthode des éléments finis. On présente, dans ce qui suit, une formulation détaillée d'un élément poutre mince.

**IV-2-1) Hypothèses**

On s'intéresse à un élément poutre plan orienté selon l'axe longitudinal  $x$  et dont les dimensions dans le plan  $yz$  normal à  $x$  sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinal  $x$ .

On se base sur les hypothèses suivantes :

- a) L'axe longitudinal de la poutre est droit.
- b) la section droite est symétrique par rapport au plan xz.
- c) Les chargements agissant sur la poutre sont appliqués dans le plan xz.
- d) La poutre se déforme selon le plan de symétrie xz (en membrane, flexion et en cisaillement).
- e) La poutre plane transmet des efforts normaux  $N_x(x)$  suivant x, les efforts tranchants  $T_z(x)$  suivant z et des moments fléchissant  $M_y(x)$  autour de l'axe local y orthogonal au plan xz.
- f) Les sections planes et droites avant déformation restent planes et orthogonal a à la fibre neutre après déformation. Les déformations d'efforts tranchant sont négligées.
- g) Les déplacements et les déformations du second ordre sont négligés (relation linéaire entre déformation et déplacements).

#### IV-2-2) Cinématique

Considérons un tronçon de poutre de la **figure IV.1** avant et après déformation. Soit le point  $M_{(x,z)}$  sur la configuration non déformée, Après déformation le point  $M_{(x,z)}$  subit un déplacement axial  $u_{(x,z)}$  selon x et un déplacement transversal  $w_{(x,z)}$  selon z tels que [64]

$$u_{(x,z)} = u_0(x) + z \times \theta(x) \quad (4.3)$$

$$w_{(x,z)} = w(x) \quad (4.4)$$

Ou :  $u_0(x)$  : Le déplacement axial au niveau de l'axe de référence de la poutre.

$\theta(x)$  : La rotation de la normal de la section transversal d'abscisse x.

$$\text{Tel que: } \theta(x) = -\frac{dw}{dx} + \gamma \quad (4.5)$$

Ou :

$\gamma$  : La rotation due au cisaillement transversal.

Dans le cadre de l'hypothèse de Navier-Bernoulli, les déformations dues à l'effort tranchant (ou cisaillement sont négligées, d'où  $\gamma=0$ ).

$$D'o\grave{u} : \theta(x) = -\frac{dw}{dx} + \gamma \quad (4.6)$$

La relation (4.3) devient :

$$u_{(x,z)} = u_0 - z \frac{dw(x)}{dx} \quad (4.7)$$

La relation (4.7) exprime l'hypoth\ese de Navier-Bernoulli, valable dans le cas des poutres minces.

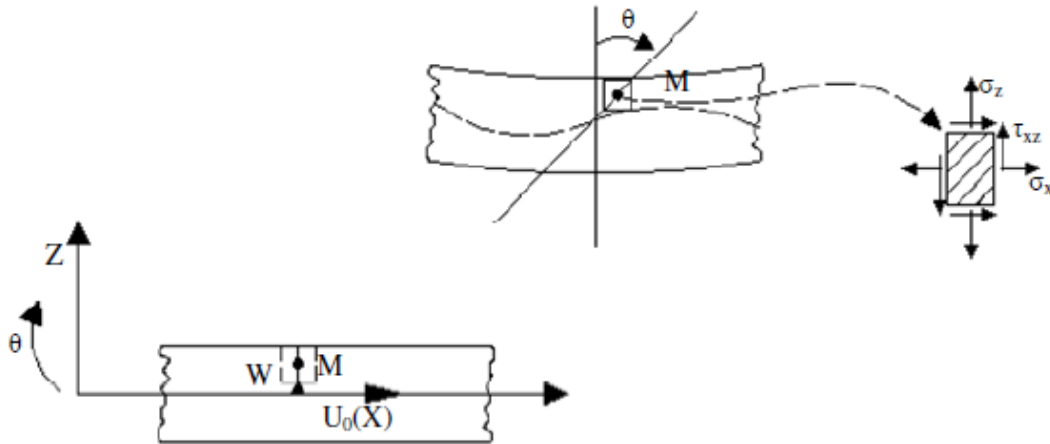


Figure IV-1 : d\efinition de la cin\ematique de la poutre en termes des 3 fonctions de d\epacements  $u_0(x)$ ,  $w(x)$ ,  $\theta(x)$

#### IV-2-3) Relation contrainte-d\eformation

Si on consid\ere un \eetat plan de contrainte au point  $M_{(x,z)}$  alors : dans l'hypoth\ese d'un comportement \elastique lin\eaire et isotrope :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Avec : E : module de Young.

$\nu$  : Coefficient de poisson.

Dans le cas des poutres, on consid\ere un \eetat de contrainte uni axial, alors

$$\sigma_z = 0 \quad (4.9)$$

D'apr\es les relations (4.8) et (4.9), on obtient

$$\epsilon_z = -\nu \epsilon_x \quad (4.10)$$

En remplaçant (4.10) dans (4.8) on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E \varepsilon_x \\ \tau_{xz} &= G \gamma_{xz}\end{aligned}\quad (4.11)$$

$$\text{Avec } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

#### **IV-2-4) Relation déformations –déplacements :**

Selon l'hypothèse précédente, la relation déformations-déplacements est linéaire :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,z)}{\partial x}\quad (4.12)$$

En tenant compte de la relation (3), on obtient

$$\varepsilon_x \frac{du_0(x)}{dx}\quad (4.13)$$

Ou encore :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + z\varnothing\quad (4.14)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \varepsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} \\ \varnothing = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} \end{cases}\quad (4.15)$$

Avec :  $\varepsilon_{0x}$  = déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence.

$\varnothing$  = courbure

IV-2-5) Principe des travaux virtuels (P.T.V) :

On considère une poutre mince droite de longueur l, ayant une section transversale de hauteur h et de largeur b(z) variant avec la hauteur (voir figure IV.2). On suppose que la poutre est soumise à un chargement réparti transversal fz et longitudinal fx

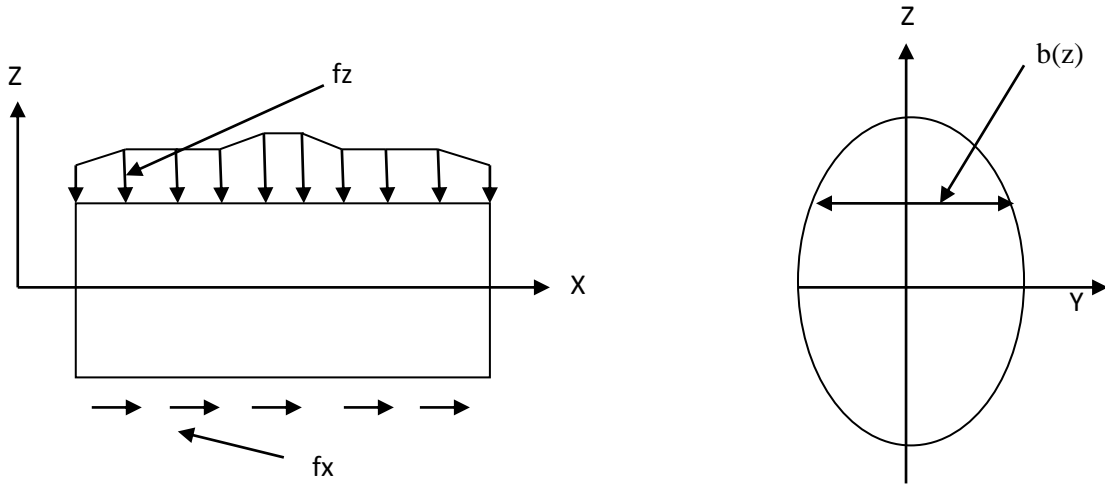


Figure IV-2 : représentation du chargement agissant sur la poutre et de la section transversale de la poutre

D'après le principe des travaux virtuels (P.T.V), pour toute variation des déplacements et déformations virtuels  $\delta\hat{u}, \delta\hat{w}, \delta\hat{\varepsilon}$ , le travail des efforts intérieurs est égal au travail des efforts extérieurs :

$$\partial W_{int}^{\hat{}} = \partial W_{ext}^{\hat{}} \tag{4.16}$$

Ce qui donne l'expression :

$$\int_v \langle \delta\varepsilon_x \rangle \{ \sigma \} dv = \int_0^l \delta\hat{w} f_z dx + \int_0^l \delta\hat{u} f_x dx \quad \forall \delta\hat{\varepsilon}, \delta\hat{w} \text{ et } \delta\hat{u}$$

$$\int_0^l \int_s \delta\hat{\varepsilon}_x \cdot \sigma_x ds dx - \int_0^l \delta\hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta\hat{u} f_x dx = 0$$

Or  $\delta\varepsilon_x = \delta\hat{\varepsilon}_{x0} + z\delta\hat{\varphi}$  d'après (4.16)

$$\int_0^l \int_s (\delta\hat{\varepsilon}_{x0} + z\delta\hat{\varphi}) \cdot \sigma_x ds dx - \int_0^l \delta\hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta\hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^l \int_s (\delta \hat{\varepsilon}_{x0} \sigma_x + \delta \hat{\varphi} \cdot \sigma_x \cdot z) ds dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^l \left[ \delta \hat{\varepsilon}_x \int_s \sigma_x dx + \delta \hat{\varphi} \int_s \sigma_x z ds \right] dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0 \quad (4.17)$$

**IV-2-6) Relation entre efforts et déformation [41] :**

L'effort normal dans la section transversale d'abscisse x est :

$$N = N(x) = \int_s \sigma_x ds$$

$$= \int_s E \varepsilon_x ds$$

$$= \int_s E (\varepsilon_{0X} + z\varphi) ds$$

$$= \int_s E \varepsilon_{0X} ds + \varphi \int_s E z ds$$

$$= \varepsilon_{0X} \int_s E ds + \varphi \int_s E z ds$$

On pose :  $\overline{EA} = \int_s E \cdot ds =$  rigidité à l'effort normal (de membrane)

$$\overline{ES} = \int_s E \cdot z \cdot ds = \text{rigidité du au couplage effort normal + flexion}$$

L'expression de l'effort normal s'écrit comme suit :

$$N = \overline{EA} \cdot \varepsilon_{0X} + \overline{ES} \cdot \varphi \quad (4.18)$$

De même, le moment fléchissant dans la section transversale d'abscisse x, par rapport à l'axe de référence est [64] :

$$M = \int_s \sigma_x \cdot z ds$$

$$= \int_s E \varepsilon_x \cdot z ds$$

$$= \int_s E (\varepsilon_{0X} + z\varphi) z ds$$

$$= \varepsilon_{0X} \int_s E z ds + \varphi \int_s E \cdot z^2 \cdot ds$$

On pose :  $\overline{EI} = \int_s E \cdot z^2 \cdot ds =$  rigidité à la flexion

$$\overline{ES} = \int_s E \cdot z \cdot ds = \text{rigidité du au couplage effort normal + flexion}$$

L'expression de moment fléchissant devient :

$$M = \overline{ES} \cdot \varepsilon_{0X} + \overline{EI} \cdot \varphi \quad (4.19)$$

Ainsi, dans la section transversale d'abscisse x, la relation entre les efforts et les déformations est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

En tenant compte des relations (4.18) et (4.19), la relation (4.17) peut se réécrire sous la forme

$$\int_0^l [\delta \hat{\varepsilon}_{0x} \cdot N + \delta \hat{\phi} \cdot M] dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

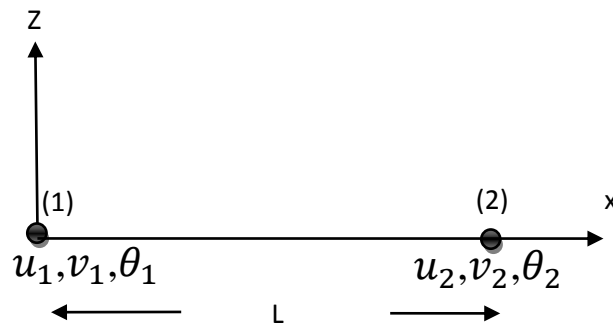
$$\int_0^l \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \delta \hat{\phi} \rangle \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^l \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \delta \hat{\phi} \rangle \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \phi \end{Bmatrix} dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0 \quad \forall \delta \hat{\varepsilon}_{0x}; \forall \delta \hat{\phi} \dots (4.21)$$

**IV-2-7) Modélisation par élément finis et calcul de la matrice de rigidité**

Pour la discrétisation des déplacements, on utilise un élément finis à deux nœuds. Chaque nœud est caractérisé par deux déplacements et une rotation qui constituent les degrés de liberté de l'élément (soit 6 DDL). Ces déplacements sont représentés par un vecteur de dimension 6x1 de la manière suivante :

$$\{U\}^T = \{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2\}$$



*Figure IV-3: Elément fini à 2 nœuds et 6 DDL*

Le déplacement longitudinal  $u_0(x)$ , au niveau de l'axe de référence, est approximé par des fonctions d'interpolations de type Lagrange de degré 1 dans la base polynomiale.

$$u_0(x) = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 \quad (4.22)$$

Avec  $u_1, u_2$  les valeurs du déplacement longitudinal aux nœuds 1 et 2 respectivement.

Avec 
$$\begin{cases} N_1 = (1 - \frac{x}{l}) \\ N_2 = \frac{x}{l} \end{cases}$$

On posant :  $\xi = \frac{x}{l}$  l'expression du déplacement devient :

$$u_0(x) = (1 - \xi) \cdot u_1 + \xi \cdot u_2 \tag{4.23}$$

Pour le déplacement transversal  $w(x)$ , on utilise des fonctions d'interpolation de type Hermite de degré 3 dans la base polynomiale :

$$w(x) = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 \theta_3 + N_4 \theta_4 \tag{4.24}$$

Les fonctions d'interpolations sont données par :

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_2 &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_3 &= l\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \\ N_4 &= l\left[-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \end{aligned} \tag{4.25}$$

Ou

$$\begin{cases} N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_2 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_3 = l[\xi - 2\xi^2 + \xi^3] \\ N_4 = l[-\xi^2 + \xi^3] \end{cases} \tag{4.26}$$

Avec  $w_1, w_2$ : Les valeurs de déplacement transversal respectivement aux nœuds 1 et 2

$\theta_1, \theta_2$  : Les valeurs de la rotation respectivement aux nœuds 1 et 2.

L'expression de  $w(x)$  devient :

$$W(x) = [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3]w_1 + [3\xi^2 - 2\xi^3]w_2 + l[\xi - 2\xi^2 + \xi^3]\theta_1 + l[-\xi^2 + \xi^3]\theta_2 \tag{4.27}$$

La déformation longitudinal au niveau de l'axe de référence de l'élément poutre est donnée par :

$$\epsilon_{0X} = \frac{du_0(x)}{dx} = \frac{-1}{l} \cdot u_1 + \frac{1}{l} \cdot u_2$$

La rotation  $\theta(x)$  est donnée par :

$$\theta(x) = -\frac{dw(x)}{dx} = \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3}\right)w_1 + l\left(\frac{-1}{l} + \frac{4x}{l^2} - \frac{3x^2}{l^3}\right)\theta_1 + \left(-\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}\right)w_2 + l\left(\frac{2x}{l^2} - \frac{3x^2}{l^3}\right)\theta_2$$

La courbure  $\emptyset$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\emptyset = \frac{-d^2 w(x)}{dx^2} = \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) w_1 + \left(\frac{4}{l^2} - \frac{6x}{l^3}\right) \theta_1 + \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right) w_2 + \left(\frac{2}{l^2} - \frac{6x}{l^3}\right) \theta_2$$

On déduit que :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \emptyset \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{4}{l^2} - \frac{6x}{l^3}\right) & 0 & \left(\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{2}{l^2} - \frac{6x}{l^3}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\text{Ce qui s'écrit sous la forme matricielle : } \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \emptyset \end{Bmatrix} = [B] \cdot \{u_n\} \quad (4.29)$$

A partir de l'expression (4.21) du P.T.V, on obtient :

$$\int_0^l \langle \delta \hat{u} \rangle^t [B] \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{u_n\} dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_x dx = 0 \quad (4.30)$$

Avec:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{4}{l^2} - \frac{6x}{l^3}\right) & 0 & \left(\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{2}{l^2} - \frac{6x}{l^3}\right) \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

On déduit l'expression de la matrice de rigidité élémentaire  $[k]_e$  [18] :

$$[k]_e = \int_0^l [B]^t \cdot [D] \cdot [B] dx \quad (4.32)$$

Le calcul de la matrice de rigidité élémentaire donne :

$$[k]_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ \text{symétrie} & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Avec :

$$k_{11} = \frac{1}{l^2} \int_0^l \overline{EA}(x) dx$$

$$k_{12} = -\frac{6}{l^3} \int_0^l \overline{ES}(x) dx + \frac{12}{l^4} \int_0^l \overline{ES}(x) \cdot x \cdot dx$$

$$k_{13} = -\frac{4}{l^2} \int_0^l \overline{ES}(x) dx + \frac{6}{l^3} \int_0^l \overline{ES}(x) \cdot x \cdot dx$$

$$k_{14} = -k_{11}$$

$$k_{15} = -k_{12}$$

$$k_{16} = -\frac{2}{l^2} \int_0^l \overline{ES}(x) dx + \frac{6}{l^3} \int_0^l \overline{ES}(x) \cdot x \cdot dx$$

$$k_{22} = -\frac{36}{l^4} \int_0^l \overline{ES}(x) dx - \frac{144}{l^5} \int_0^l \overline{ES}(x) \cdot x \cdot dx + \frac{144}{l^6} \int_0^l \overline{ES}(x) \cdot x^2 \cdot dx$$

$$k_{23} = \frac{24}{l^3} \int_0^l \overline{EI}(x) dx - \frac{84}{l^4} \int_0^l \overline{EI}(x) \cdot x \cdot dx + \frac{72}{l^5} \int_0^l \overline{EI}(x) \cdot x^2 \cdot dx$$

$$k_{24} = -k_{12}$$

$$k_{25} = -k_{22}$$

$$k_{26} = \frac{12}{l^3} \int_0^l \overline{EI}(x) dx - \frac{60}{l^4} \int_0^l \overline{EI}(x) \cdot x \cdot dx + \frac{72}{l^5} \int_0^l \overline{EI}(x) \cdot x^2 \cdot dx$$

$$k_{33} = \frac{16}{l^2} \int_0^l \overline{EI}(x) dx - \frac{48}{l^3} \int_0^l \overline{EI}(x) \cdot x \cdot dx + \frac{36}{l^4} \int_0^l \overline{EI}(x) \cdot x^2 \cdot dx$$

$$k_{34} = -k_{13}$$

$$k_{35} = -k_{23}$$

$$k_{36} = \frac{8}{l^2} \int_0^l \overline{EI}(x) dx - \frac{36}{l^3} \int_0^l \overline{EI}(x) \cdot x \cdot dx + \frac{36}{l^4} \int_0^l \overline{EI}(x) \cdot x^2 \cdot dx$$

$$k_{44} = k_{11}$$

$$k_{45} = k_{12}$$

$$k_{46} = -k_{16}$$

$$k_{55} = k_{22}$$

$$k_{56} = k_{26}$$

$$k_{66} = \frac{4}{l^2} \int_0^l \overline{EI}(x) dx - \frac{24}{l^3} \int_0^l \overline{EI}(x) \cdot x \cdot dx + \frac{36}{l^4} \int_0^l \overline{EI}(x) \cdot x^2 \cdot dx$$

**Remarque :** Les composantes de la matrice de rigidité élémentaire  $[k]_e$  sont évaluées en utilisant une intégration numérique

#### IV-2-8) Discrétisation de la section transversale

Pour la discrétisation de la section transversale, on adopte l'approche multicouches qui signifie la subdivision de la section totale en un nombre fini des couches horizontales, pour permettre d'évaluer l'état de contrainte –déformation et de déterminer la matrice de rigidité et des efforts dans la section droite et dans l'élément poutre dans sa totalité.

Les quantités EA, ES et EI sont évaluées en divisant la section transversale en un certain nombre de trapèze. Chaque trapèze est subdivisé en un certain nombre de couches horizontales de module  $E_j$ ,

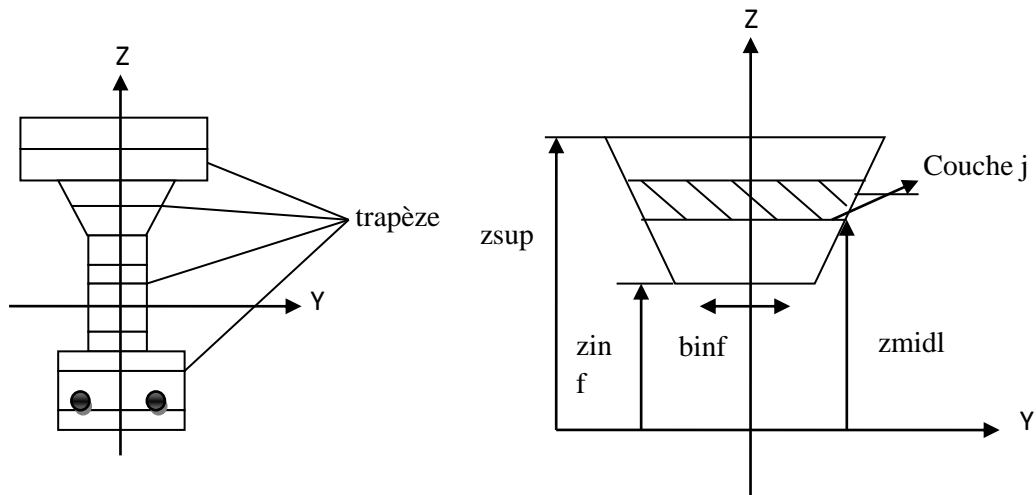
D'épaisseur  $h_j$  et de largeur  $b_j$  et qui seront comptées de bas en haut (voir figure ci-dessous)

Soit  $n_c$  le nombre total de couches horizontales. Les expressions des différentes rigidités s'écrivent comme suit [64] :

$$\begin{aligned} \overline{EA} &= \int_s E ds = \sum_{j=1}^{n_c} E_j, b_j, h_j \\ \overline{ES} &= \int_s E \cdot z ds = \sum_{j=1}^{n_c} E_j, b_j, h_j, z_j \\ \overline{EI} &= \int_s E \cdot z^2 ds = \sum_{j=1}^{n_c} E_j, b_j, h_j, z_j^2 \end{aligned} \tag{4.34}$$

$z_j$ : Ordonnée du milieu de la couche j / à l'axe de référence.

$b_j$ : Largeur du milieu de la couche j.



a. Section transversale

b. couche Trapézoïdale

**Figure IV-4 : discrétisation de la section transversale en couche trapézoïdale**

Sachant que chaque trapèze est caractérisé par :

$b_{inf}$  = largeur inférieure de trapèze.

$b_{sup}$  = largeur supérieure de trapèze.

$z_{inf}$  = position inférieure par rapport à l'axe de référence.

$z_{sup}$  = position supérieure par rapport à l'axe de référence.

Pour chaque couche, on considère la déformation au milieu de la couche.

La position de la couche en cours par rapport à l'axe de référence.

$$Z_{midl}=Z_{inf}+h_{layr} (j-0.5) \quad (4.35)$$

Ou :  $h_{layr}$  est l'épaisseur de la couche j.

$$\varepsilon_x=\varepsilon_{0x}+z\varnothing \text{ d'après (3.10).}$$

La largeur au niveau du milieu de la couche est :

$$b_{layr} = b_{inf} + (b_{sup}-b_{inf}) \frac{h_{layr}}{h_{trap}} (j-0.5) \quad (4.36)$$

Ou  $h_{trap}$  est la hauteur du trapèze en cours ( $i_{trap}$ ).

**IV-2-9) Evaluation du vecteur des forces résiduelles {R}, pour chaque élément :**

D'après la relation (4.30) du P.T.V, on a :

$$\int_0^l \delta[\hat{\varepsilon}_{0x} \int_s \sigma_x ds + \delta\hat{\varnothing} \int_s \sigma_x \cdot z ds ] dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0 \quad (4.37)$$

Qui peut s'écrire encore sous la forme :

$$\int_0^l \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \delta \hat{\varnothing} \rangle \left\{ \int_s \sigma_x ds \right. \left. \int_s \sigma_x \cdot z ds \right\} dx - \int_0^l \langle \delta \hat{u}, \delta \hat{w} \rangle \left\{ \begin{matrix} f_x \\ f_z \end{matrix} \right\} dx = 0 \quad (4.38).$$

Or  $\begin{Bmatrix} \delta \hat{\varepsilon}_{0x} \\ \delta \hat{\varnothing} \end{Bmatrix} = [B] \{ \hat{u}_n \}$  d'après (4.33). Où [B] est donné par la relation (4.34).

$\{ \hat{u}_n \}$ : Vecteur des déplacements nodaux.

$$\begin{Bmatrix} \delta \hat{u} \\ \delta \hat{w} \end{Bmatrix} = [N] \{ \hat{u}_n \}$$

Avec [N]: matrice des fonctions d'interpolation (de forme)

En posant :

$$\int_s \sigma_x ds = N(x) \text{ Effort normal à l'abscisse x de l'élément.}$$

$$\int_s \sigma_x \cdot z ds = M(x) \text{ Moment fléchissant à l'abscisse x de l'élément.}$$

L'expression devient :

$$\int_0^l \langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx - \int_0^l \langle \delta \hat{u}_n \rangle [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx = 0$$

Ce qui donne :

$$\int_0^l \langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx = \int_0^l \langle \delta \hat{u}_n \rangle [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx \quad \forall \delta \hat{u}_n \quad (4.39)$$

Ou:

$$\int_0^l [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx - \int_0^l [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx = 0 \quad (4.40)$$

Ou plus simplement :

$$\{p\}^e - \{f\}^e = 0 \quad (4.41)$$

Avec :

$\{p\}^e$ : Vecteur des forces nodales résultant des efforts intérieurs

$\{f\}^e$ : Vecteur des forces nodales résultant des efforts réparties appliqués à l'élément en cours

**Remarque :** Dans le cas non linéaire, les efforts intérieurs dépendent de la solution  $\{u_n\}^e$ , à chaque étape de résolution, il reste des forces résiduelles qu'il faut équilibrer à l'étape suivante :

$$\{p\}^e - \{f\}^e = \{\psi\}^e \neq 0$$

Le processus de calcul non linéaire consiste à rechercher la solution  $\{u_n\}$  qui rend les forces résiduelles aussi proches que possible de zéro.

**IV-2-10) Evaluation de  $\{p\}$  pour chaque élément :**

$$\{p\}^e = \int_0^l [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx \quad (4.42)$$

$$\{p\}^e = \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 \\ 0 & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) \\ 0 & \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) \\ \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & \left(-\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) \\ 0 & \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^3}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx \quad (4.43)$$

$$\{p\}^e = \begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \int_0^L \begin{Bmatrix} \frac{-1}{l} N(x) \\ \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) M(x) \\ \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) M(x) \\ \frac{1}{l} N(x) \\ \left(-\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) M(x) \\ \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^3}\right) M(x) \end{Bmatrix} .dx \quad (4.43')$$

$$\{f\}^e = \int_0^l \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_5 \\ 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} .dx \quad (4.44)$$

Avec :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l}$$

$$N_2 = 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$N_3 = 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$N_4 = \frac{x}{l}$$

$$N_5 = l \left[ \frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$$

$$N_6 = l \left[ -\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$$

$$\{f\}^e = \int_0^l \begin{Bmatrix} N_1 f_x \\ N_2 f_z \\ N_3 f_z \\ N_4 f_z \\ N_5 f_z \\ N_6 f_z \end{Bmatrix} .dx \quad (4.45)$$

**IV-3) THEORIE DE TIMOSHENKO**

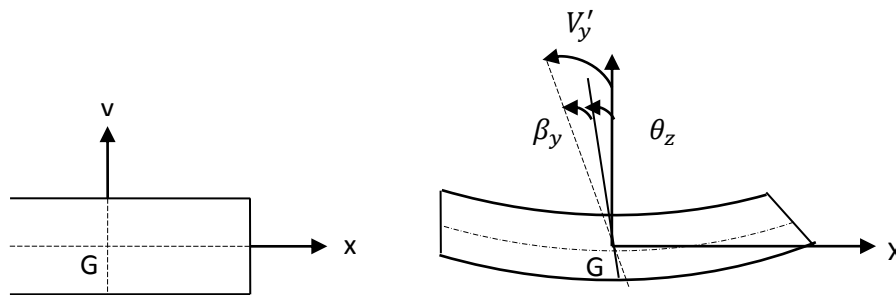
**IV-3-1) Introduction**

La théorie de Timoshenko considère que les sections planes reste planes après la déformation (pas nécessairement perpendiculaires à l'axe moyen), Cette théorie introduit donc une liberté de rotation à la section, appelé angle de distorsion, qui permet de calculer la déformation de cisaillement.

**IV-3-2) Cinématique**

Le champ des déformations s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x,y) &= \frac{\partial U_x}{\partial x} = U'_x(x) - y\theta'_x(x) \\ \gamma_{xy}(x,y) &= \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} = U'_y(x) - \theta_x(x) = \beta_y \neq 0 \end{aligned} \tag{4.46}$$



*Figure IV-5 – Cinématique de la poutre, théorie de Timoshenko*

**IV-3-4) Formulations d'éléments finis poutre Timoshenko.**

La formulation éléments finis adoptée ici est une formulation en déplacements. On considère une structure poutre linéique de longueur L discrétisée en n éléments finis poutres de longueur  $L_e$  composées (au minimum) de 2 nœuds i et j. Chaque nœud possède trois degrés de liberté : un déplacement axial  $U_x$ , un déplacement transversal  $V_y$  et une rotation  $\theta_z$ . Les déplacements aux nœuds des éléments sont les inconnues du problème.

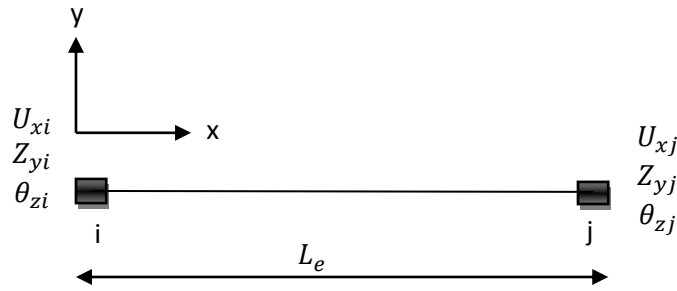


Figure IV-6 : Élément fini poutre à 2 nœuds

**IV-3-6) Principe des travaux virtuels (P.T.V)**

Les déplacements virtuels forment des variations des déplacements réels cinématiquement admissibles (i.e. nulles où les conditions aux limites sont appliquées). Dans la suite, les déplacements virtuels sont interpolés par le biais des mêmes fonctions de forme que les déplacements réels (méthode de Galerkin). Ainsi, les déformations virtuelles peuvent se déduire simplement des déplacements virtuels aux nœuds. Le travail virtuel pour une structure poutre Timoshenko de longueur L s'écrit

$$\int_0^L \int_S (\delta \epsilon_x + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) dS dx - w_{externe} = 0 \tag{4.47}$$

Avec  $\delta \epsilon_x$  et  $\delta \gamma_{xy}$  les déformations virtuelles calculées à partir des déplacements virtuels et  $w_{externe}$  le travail des actions mécaniques extérieures. En combinant (4.46) et (4.47) on obtient :

$$\int_0^L \int_S (\delta(U'_x - y\theta'_z) \sigma_x + (\delta(U'_y - \theta_z) \tau_{xy}) dS dx \tag{4.48}$$

Avec  $\delta U_x$  le déplacement axial virtuel,  $\delta V_y$  le déplacement transversal virtuel et  $\delta \theta_z$  la rotation virtuelle. Par ailleurs, les définitions suivantes sont adoptées pour les forces généralisées :

$$\left. \begin{aligned} \text{Effort normal : } F_x &= \int_S \sigma_x ds \\ \text{Effort tranchant : } F_y &= \int_S \tau_{xy} ds \\ \text{Moment de flexion : } M_z &= - \int_S y \sigma_x ds \end{aligned} \right\} \tag{4.49}$$

En introduisant (4.49) dans (4.48), on a :

$$\int_0^L \left( F_x \frac{d}{dx} \delta U_x + F_y \frac{d}{dx} \delta V_y + M_z \frac{d}{dx} \delta \theta_z \right) dx - w_{external} = 0 \tag{4.50}$$

Avec  $\beta_y$  l'angle de distorsion moyen de la section

$$\beta_y = \frac{dV_y}{dx} - \theta_z = U'_y - \theta_z \quad (4.51)$$

### IV-3-7) Matrices de rigidité

La loi de comportement (élasticité linéaire) prend la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_f & 0 \\ 0 & kG_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Par ailleurs, les expressions (4-49) donnent :

$$\begin{aligned} F_x &= \int_S \sigma_x ds = \int_S E_f \varepsilon_x ds = \int_S E_f \left( \frac{dU_x}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} \right) ds = \int_S E_f ds U'_x - \int_S E_f y ds \theta'_z \\ F_y &= \int_S \tau_{xy} ds = \int_S kG_f \gamma_{xy} ds = \int_S kG_f (\beta_y) ds = \int_S kG_f ds \beta_y \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$M_z = - \int_S y \sigma_x ds = - \int_S y E_f \varepsilon_x ds = - \int_S y E_f \left( \frac{dU_x}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} \right) ds = - \int_S E_f y ds U'_x + \int_S E_f y^2 ds \theta'_z$$

Par conséquent, le vecteur des forces généralisées  $F_S$  a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_S E_f ds & 0 & - \int_S E_f y ds \\ 0 & \int_S kG_f ds & 0 \\ - \int_S E_f y ds & 0 & \int_S E_f y^2 ds \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} = K_S \cdot \begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Avec  $U'_x, \beta_y, \theta'_z$  les déformations généralisées et  $K_S$  la matrice représentant la rigidité de la section, indépendante de la position de l'axe neutre [Guedes et al., 1994]. Enfin, en considérant (4.50) et (4.54), le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\int_0^l \delta [U'_x \quad \beta_y \quad \theta'_z] K_S [U'_x \quad \beta_y \quad \theta'_z]^T dx - w_{external} = 0 \quad (4.55)$$

Le vecteur des déplacements généralisés est donné par :

$$\begin{bmatrix} U_x \\ V_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u & N_2^u & N_3^u & N_4^u & N_5^u & N_6^u \\ N_1^v & N_2^v & N_3^v & N_4^v & N_5^v & N_6^v \\ N_1^\theta & N_2^\theta & N_3^\theta & N_4^\theta & N_5^\theta & N_6^\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Où  $d_e$  est le vecteur contenant les déplacements nodaux de l'élément e et N la matrice des fonctions de forme dépendant de x (u pour les déplacements et  $\theta$  pour les rotations). Les déformations généralisées sont calculées comme :

$$\begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_x \\ U'_y - \theta'_z \\ \theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^\varepsilon & B_2^\varepsilon & B_3^\varepsilon & B_4^\varepsilon & B_5^\varepsilon & B_6^\varepsilon \\ B_1^\gamma & B_2^\gamma & B_3^\gamma & B_4^\gamma & B_5^\gamma & B_6^\gamma \\ B_1^K & B_2^K & B_3^K & B_4^K & B_5^K & B_6^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^\varepsilon \\ B^\gamma \\ B^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Avec B la matrice contenant les dérivées par rapport à x des fonctions de forme N ( $\varepsilon$  pour le axial,  $\gamma$  pour le cisaillement et K pour les rotations).

L'introduction de (4.57) dans le principe des travaux virtuels (4.55) donne les expressions de la matrice de rigidité  $K_e$  de l'élément e :

$$K_e = \int_0^{le} B^T K_s B dx \quad (4.58)$$

L'assemblage donne la matrice de rigidité totale de la structure poutre :

$$K_{tot} = A_{e=1}^n \int_0^{le} B^T K_s B dx \quad (4.59)$$

#### IV-3-8) Vecteurs de forces

Comme mentionné précédemment, le vecteur des forces généralisées  $F_s$  de la section a la forme suivante :

$$F_s = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = K_s \cdot \int_0^{le} B^T K_s B dx \quad (4.60)$$

Avec  $U'_x, \beta_y, \theta'_z$  les déformations généralisées et  $K_s$  la matrice représentant la rigidité de la section (voir (4.54)).

Le vecteur des forces internes de l'élément est :

$$F_{int,e} = \int_0^{le} B^T F_s dx \quad (4.61)$$

Après assemblage on obtient le vecteur total des forces internes, pour toute la structure poutre :

$$F_{int,tot} = A_{e=1}^n \int_0^{L_e} B^T F_s dx \quad (4.62)$$

Pour un chargement externe transversal distribué  $p(x)$  (figure IV-7), le vecteur des forces externes est évalué en utilisant également le principe des travaux virtuels.

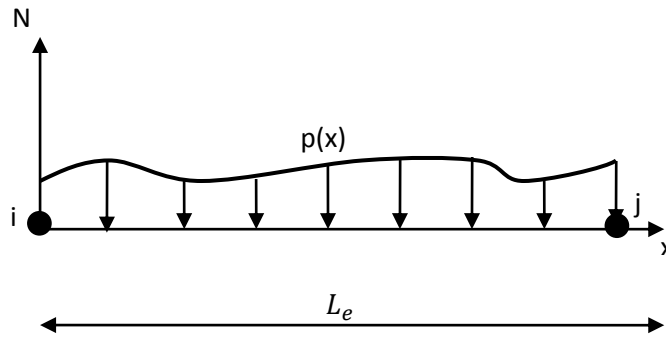


Figure IV-7 : Un élément fini poutre  $e$  soumis à un chargement vertical distribué  $p(x)$

Le travail externe virtuel (4.55) pour un seul élément  $e$  prend la forme suivante :

$$w_{external,e} = \int_0^{L_e} \delta V_y(x) p(x) dx = \int_0^{L_e} \delta (N^v d_e)^T p(x) dx = \delta d_e^t \int_0^{L_e} N^{vT} p(x) dx = \delta d_e^t F_{ext,e} \quad (4.63)$$

Avec

$$N^{vT} = [N_1^v \quad N_2^v \quad N_3^v \quad N_4^v \quad N_5^v \quad N_6^v]$$

Le vecteur des forces externes de l'élément devient :

$$f_{ext,e} = \int_0^{L_e} N^{vT} p(x) dx = \int_0^{L_e} [N_1^v \quad N_2^v \quad N_3^v \quad N_4^v \quad N_5^v \quad N_6^v]^T p(x) dx \quad (4.64)$$

**IV-4) MODELISATION NUMERIQUE SUR CAST3M**

CASTEM est un logiciel de simulation numérique utilisé en mécanique des structures et développé par le département de modélisation des systèmes et structures (DMT), du commissariat français à l'Énergie atomique et aux énergies alternatives (CEA). Il est mis à la disposition gracieusement pour l'enseignement et la recherche. Il utilise la méthode des éléments finis pour résoudre différents types de problèmes scientifiques.

***Étapes de calcul sur CASTEM***

Nous allons présenter dans ce paragraphe les étapes générales de calcul d'une structure de poutre par éléments finis.

**1. Choix des options générales de calcul**

**OPTIDIME2ELEM** SEG2 ;

Le calcul s'effectue en dimension deux avec des éléments finis de type segmentaire à deux nœuds.

**2. Définition de la géométrie de la structure et du maillage**

Notre poutre est modélisée par une ligne moyenne définie par deux extrémités. Il y a lieu de définir d'abord les coordonnées des points ensuite les segments.

Définition de points :

**A1 = 0.0 0.0 ;**

**B1 = 420.0 0.0 ;**

Définition des segments :

**POUTRE1 = DROI A1 B1 DINI 10 DFIN 10 ;**

**POUTRE1** est un objet maillage défini par les points **A1** et **B1** avec une densité d'éléments égale à 10 mm/élément (dimension moyenne des éléments).

### 3. Définition d'un modèle de structure

**MODPOUT1 = MODE POUTRE1 MECANIQUE ELASTIQUE SECTION  
PLASTIQUE SECTION TIMO ;**

Le modèle est une poutre de Timochenko en calcul non linéaire.

### 4. Définition des caractéristiques matérielles de la poutre

**MATPOUT1 = MATE MODPOUT1 MODS MSBA MATS CSBA;**

**MSBA** est le modèle de section précédemment définis.

**CSBA** contient toutes les caractéristiques matérielles d'une section en béton armé.

### 5. Définition des conditions aux limites

**RGDT1 = BLOQ UX UY A1 ;**

**RGDT2 = BLOQ UY B1;**

Les objets rigidités **RGDT1** et **RGDT2** représentent des appuis simple et double.

### 6. Définition de chargement

**CHAR1 = FORC FY (0.0 (-10 000.0) q1;**

**CHAR2 = FORC FY (0.0 (-10 000.0) q2;**

Les objets **CHAR1** et **CHAR2** sont des objets chargement type force concentrée appliquée aux point **q1** et **q2** déjà définis sur le maillage **POUTRE1**.

Il faut en plus définir un programme de chargement pour un calcul incrémental.

**CHARGE0 = CHAR MECA (CHAR1 ET CHAR2) MEVOL0 ;**

**CHARGE0** est un objet chargement avec programme d'évolution définie par **MEVOL0**.

### 7. Remplissage d'une table de donnée

**TABINOUT = TABLE ;**

TABINOUT. 'MODELE' =**MODPOUT1** ;

TABINOUT. 'CARACTERISTIQUES' = **MATPOUT1** ;

TABINOUT. 'BLOCAGES\_MECANIQUES' = **RGDT1** ET **RGDT2**

TABINOUT. 'CHARGEMENT' = **CHARGE0** ;

TABINOUT. 'TEMPS\_CALCULES' = **TempsCalc** ;

**TempsCalc** est un objet contenant les pseudo-temps de calcul.

### **8. appel de la procédure de calcul non linéaire**

**PASAPAS** TABINOUT ;

### **9. Sauvegarde des résultats**

**OPTI SAUV** result poutre ;

**SAUV**TABINOUT ;

La commande **SAUV** sauvegarde les résultats du calcul dans un fichier dont le nom est **result poutre** en vue d'une visualisation par un autre fichier programme.

Par ailleurs, l'organigramme de la procédure **PASAPAS** est détaillé sur la figure suivante :

### **10 Traitement des résultats**

**REST** TABINOUT.

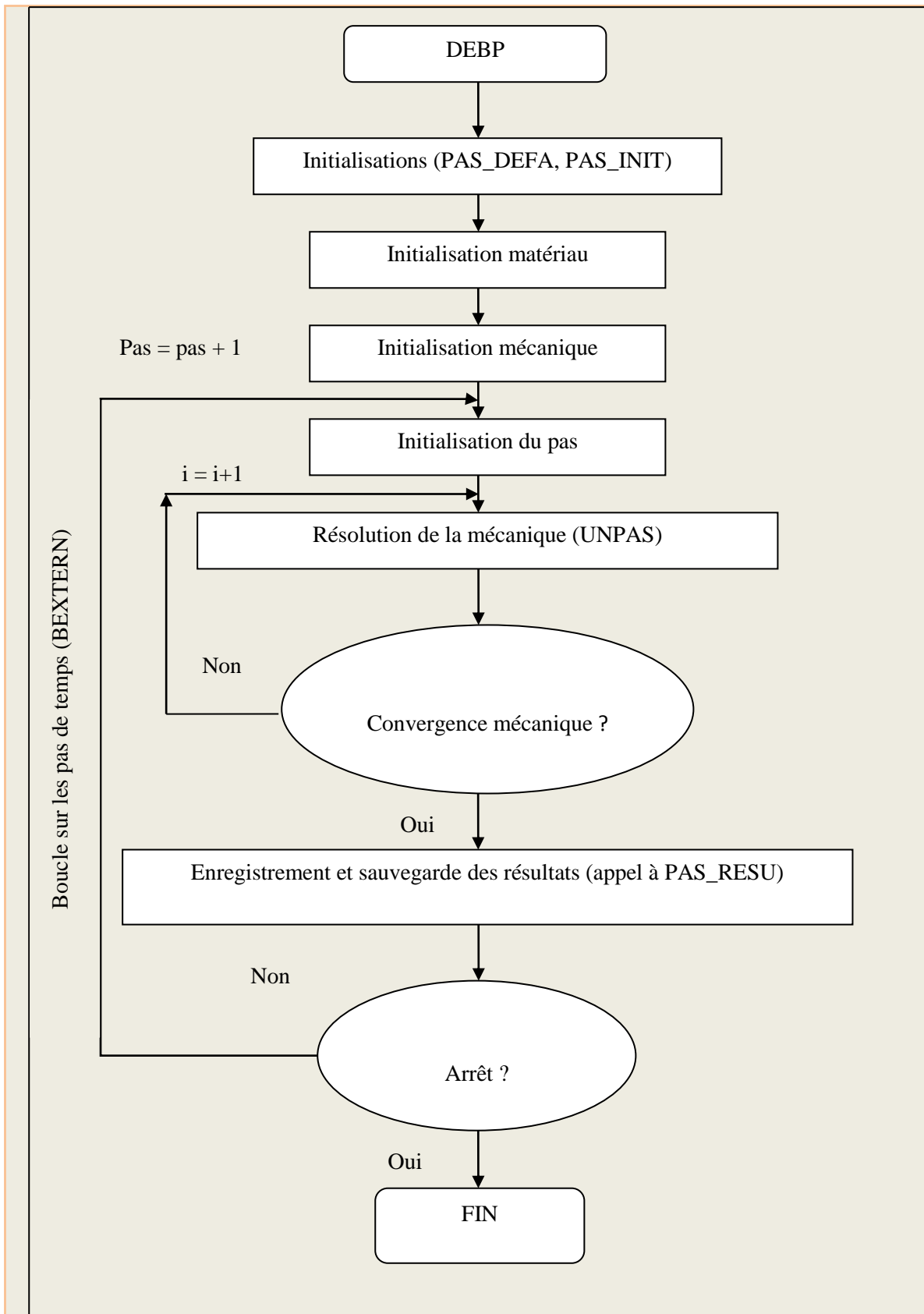


Figure IV-8 : Organigramme de calcul adapté de la procédure PASAPAS de CASTEM

**IV-5) CONCLUSION**

Les modèles « classiques » E.F. sont des outils puissants pour la simulation du comportement non linéaire des structures, leur application peut s'avérer peu pratique à cause d'un temps de calcul prohibitif ou de la taille mémoire nécessaire à la réalisation de ce calcul. Par contre, une modélisation de type élément fini poutre, possède les avantages des hypothèses simplificatrices d'une cinématique de type poutre de Bernoulli ou Timochenko tout en offrant une solution pratique et efficace pour une analyse non linéaire d'éléments de structures composites tels que ceux que l'on peut rencontrer par exemple en béton armé, béton de fibre. De plus, cette modélisation est relativement robuste et peu coûteuse en temps de calcul du fait de l'utilisation de modèles de comportement non linéaires.

# **Chapitre V**

## **APPLICATION ET VALIDATION**

**V-1) INTRODUCTION**

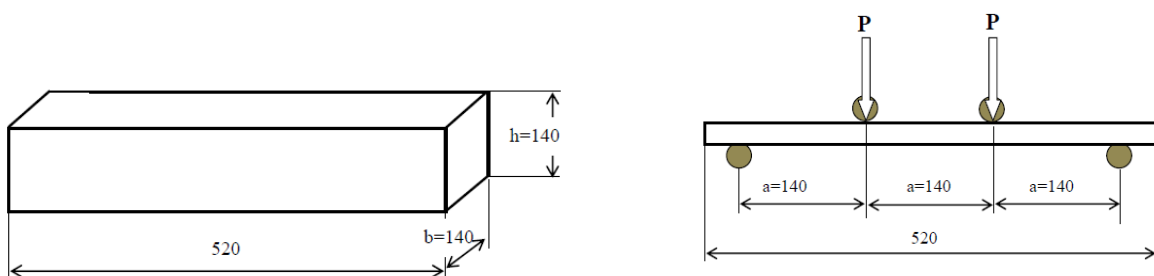
Dans ce chapitre nous allons présenter quelques exemples qui ont fait l'objet d'études expérimentales et théoriques tirées dans la littérature. Les résultats expérimentaux ont été confrontés aux résultats numériques donnés par le programme CASTEM2000.

**V-2) EXEMPLE DE VALIDATION**

Il s'agit des essais DJEBALI pour la caractérisation du comportement mécanique du béton de fibres [65]. Les caractéristiques du composite et des fibres utilisées sont présentées dans le tableau suivant :

Essai	Les propriétés du composite				Les propriétés des fibres		
	$f_{cj}$ (MPa)	$f_{tj}$ (MPa)	$E_{bo}$ (MPa)	$\epsilon_0$	$\Phi$ (mm)	$l_f$ (mm)	W (%)
S/G = 0.8	23.5	2.24	30934	2.1	/	/	0.0
	27.73	2.44	31262	2.7	1.95	50	0.4
	22.1	2.1	29305	2.8	1.95	50	0.6
	19.25	1.9	29016	2.9	1.95	50	0.8
S/G = 1	25.32	2.29	32830	2.8	/	/	0.0
	27.32	2.4	33091	2.8	1.95	50	0.4
	24.21	2.25	30756	3.1	1.95	50	0.6
	19.2	1.9	29536	3.1	1.95	50	0.8

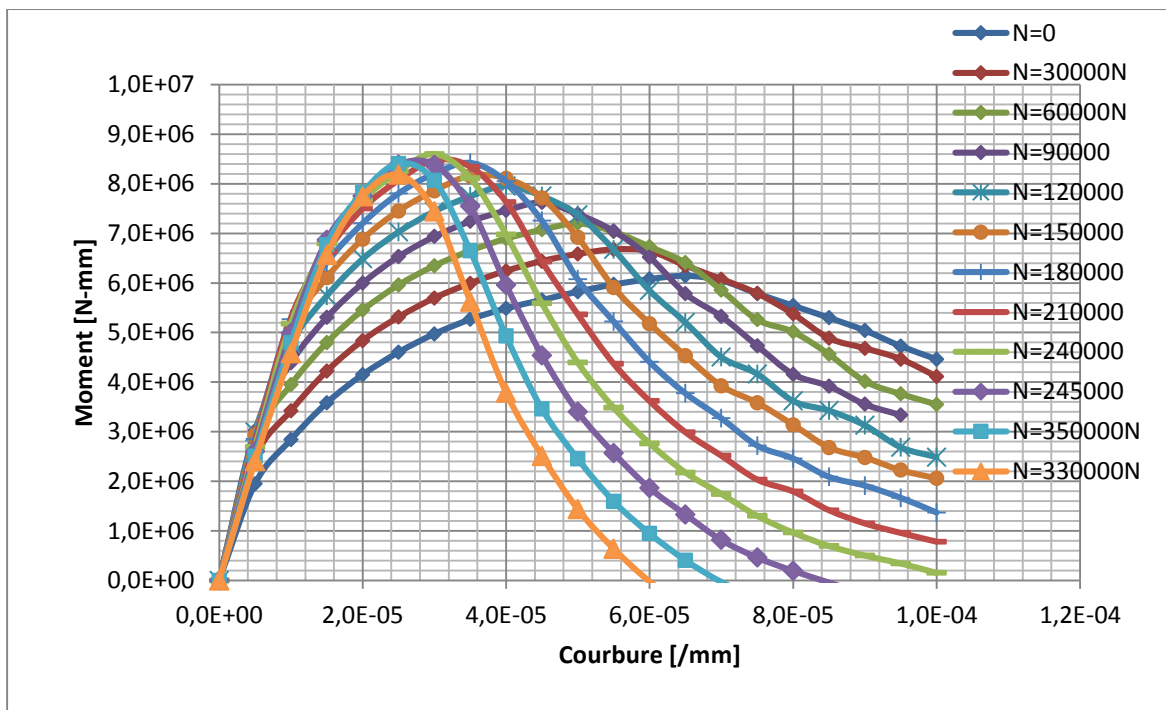
**Tableau V-1 : Les caractéristiques des matériaux utilisés**



**Figure V-1 : représentation de la poutre expérimentée**

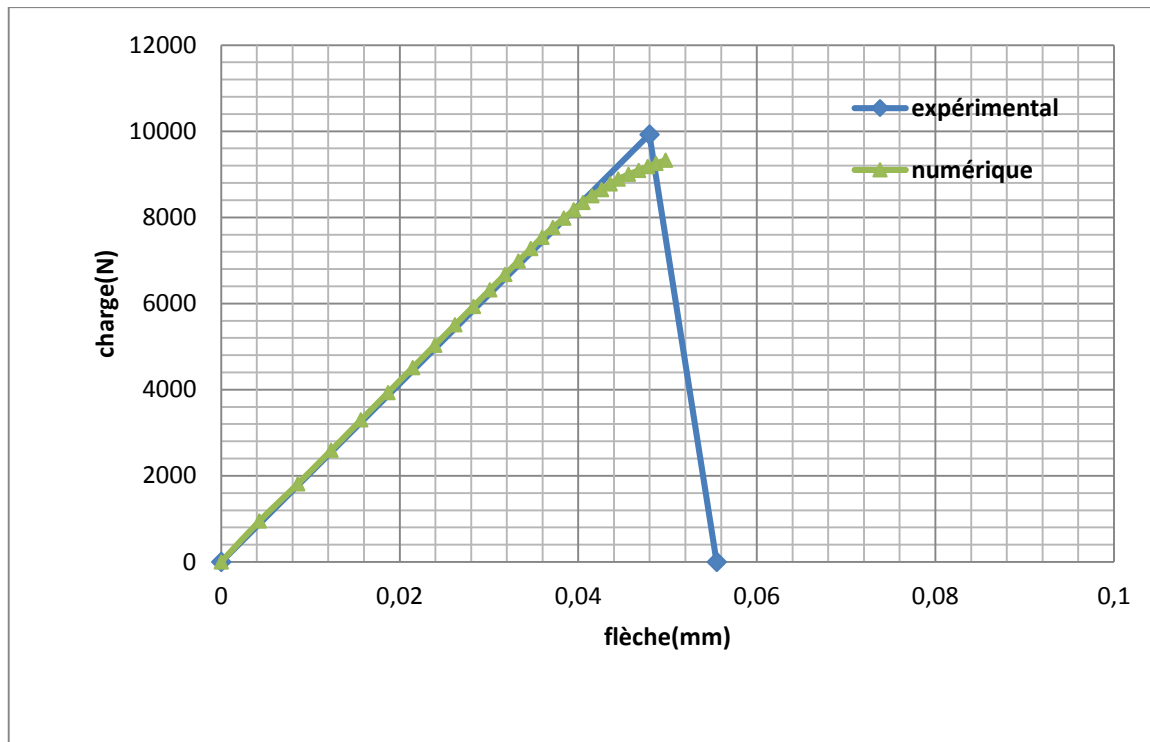
**V-3) CONFRONTATION DES RESULTATS**

La simulation numérique est représentée aux résultats expérimentaux dans les figures suivantes :



**Figure V-2 : courbe courbure-moment de la section S/G =0,8 et W=0,4%**

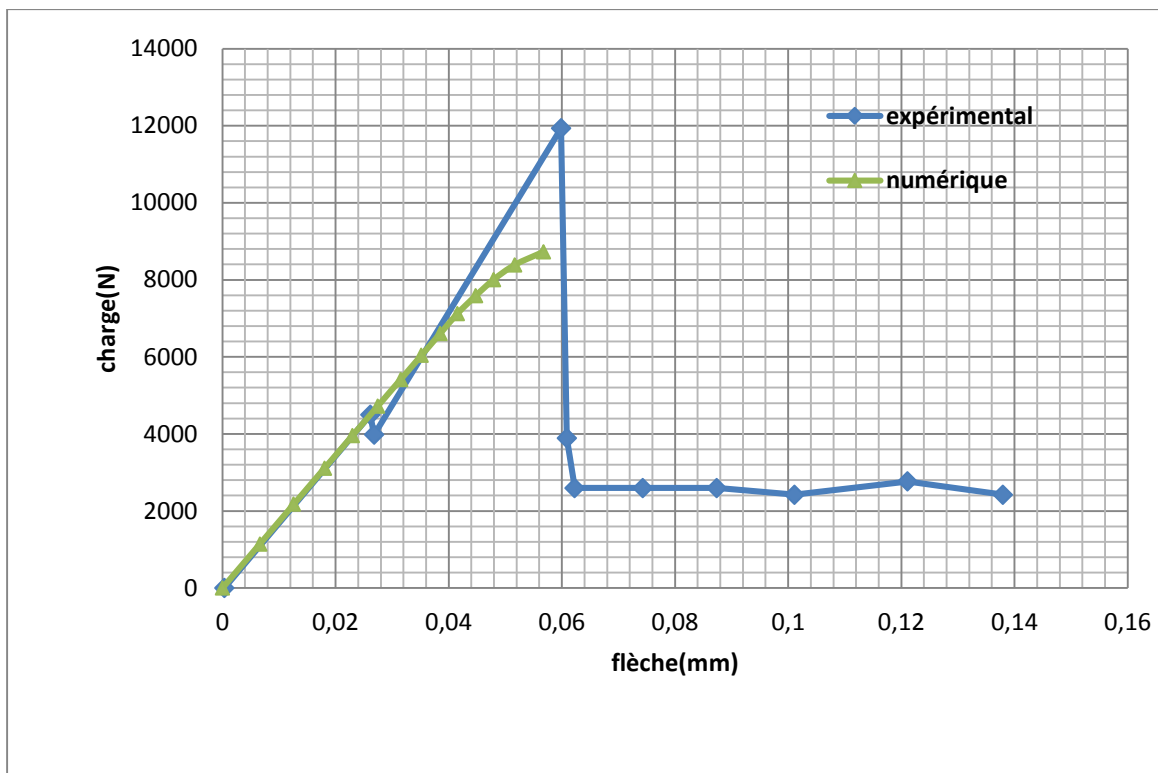
Les courbes de la figure V-1 montre le moment résistant de la section pour chaque valeur de l'effort normal. Le pic de résistance augmente avec l'effort normal, mais la courbure correspondant au pic diminue, ce qui veut dire que le comportement de la section devient de plus en plus de type fragile. L'effort normal correspondant à l'optimum de résistance est d'environ 240kN avec un moment de  $8.3 \times 10^3$  kN-m.



**Figure V-3 : courbe charge-flèche de la poutre S/G =0,8 et W=0%**

	Charge max (N)	Fleche max (mm)	$\frac{P_{exp}}{P_{num}}$	$\frac{f_{exp}}{f_{num}}$
<b>Expérimentales</b>	10 000	0.35	1.02 Ecart de 2 %	0.875 Ecart de 12.5%
<b>Numériques</b>	9 800	0.4		

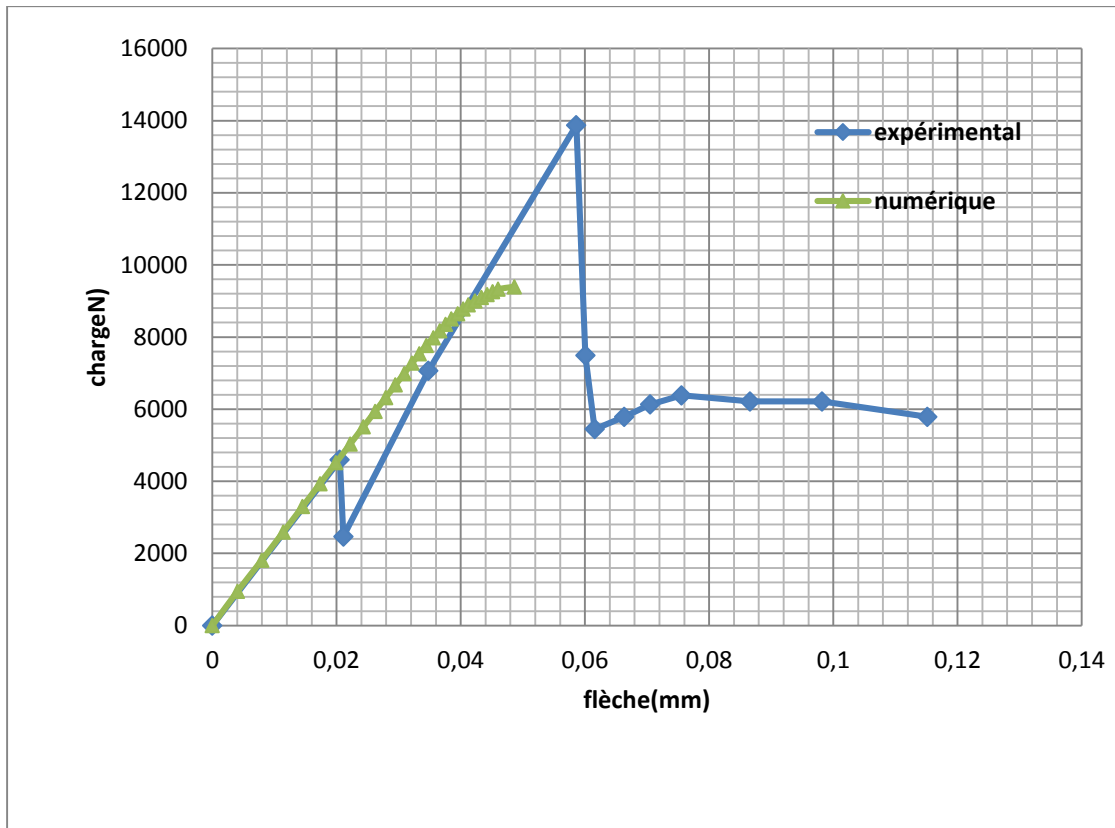
**Tableau V.2 : comparaison des résultats expérimentaux-numériques S/G =0,8 et W=0%**



**Figure V- 4: courbe charge-flèche de la poutre S/G =0,8 et W=0.6%**

	Charge max (N)	Fleche max (mm)	$\frac{P_{exp}}{P_{nu}}$	$\frac{f_{exp}}{f_{nu}}$
<b>Expérimentales</b>	12 000	0.32	1.02	1.02
<b>Numériques</b>	9 000	0.45	Ecart de 25%	Ecart de 29%

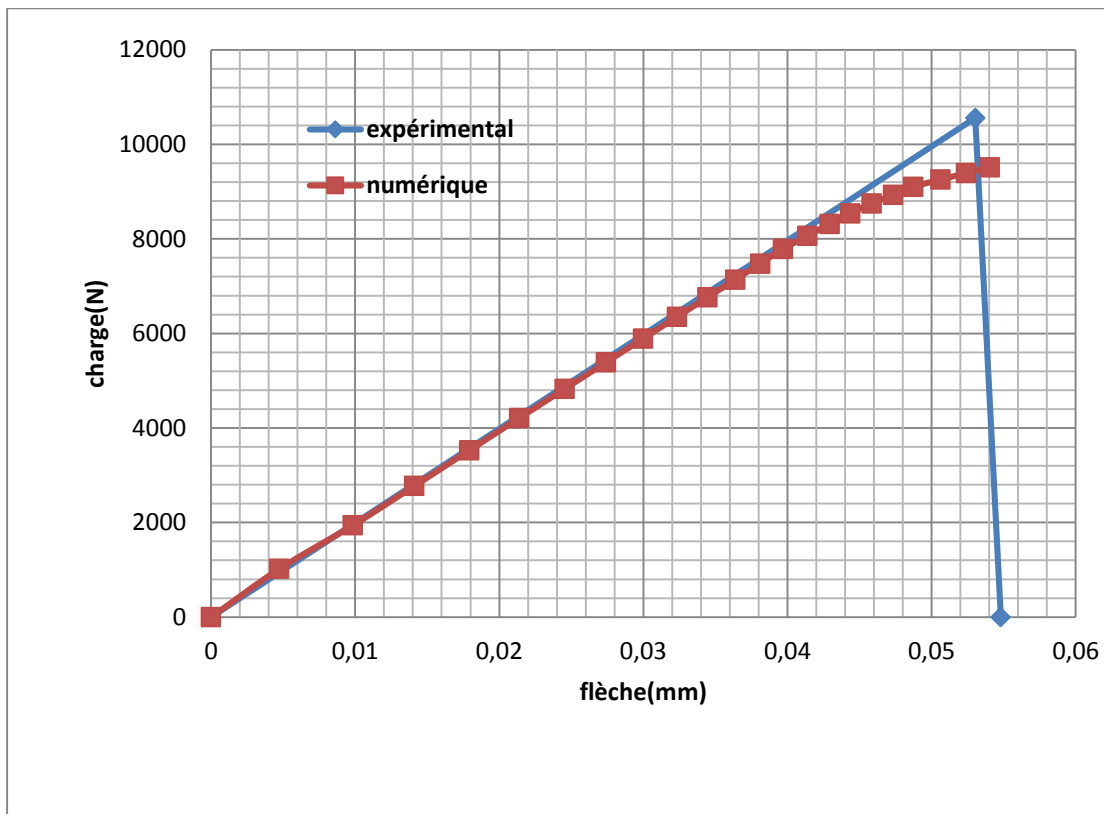
**Tableau V.3 : comparaison des résultats expérimentaux-numériques S/G =0,8 et W=0.6%**



**Figure V-5 : courbe charge-flèche de la poutre S/G =0,8 et W=0.8%**

	Charge max (N)	Fleche max (mm)	$\frac{P_{exp}}{P_{nu}}$	$\frac{f_{exp}}{f_{nu}}$
<b>Expérimentales</b>	14 000	0.36	1.02	1.02
<b>Numériques</b>	9 800	0.40	Ecart de 30%	Ecart de 10%

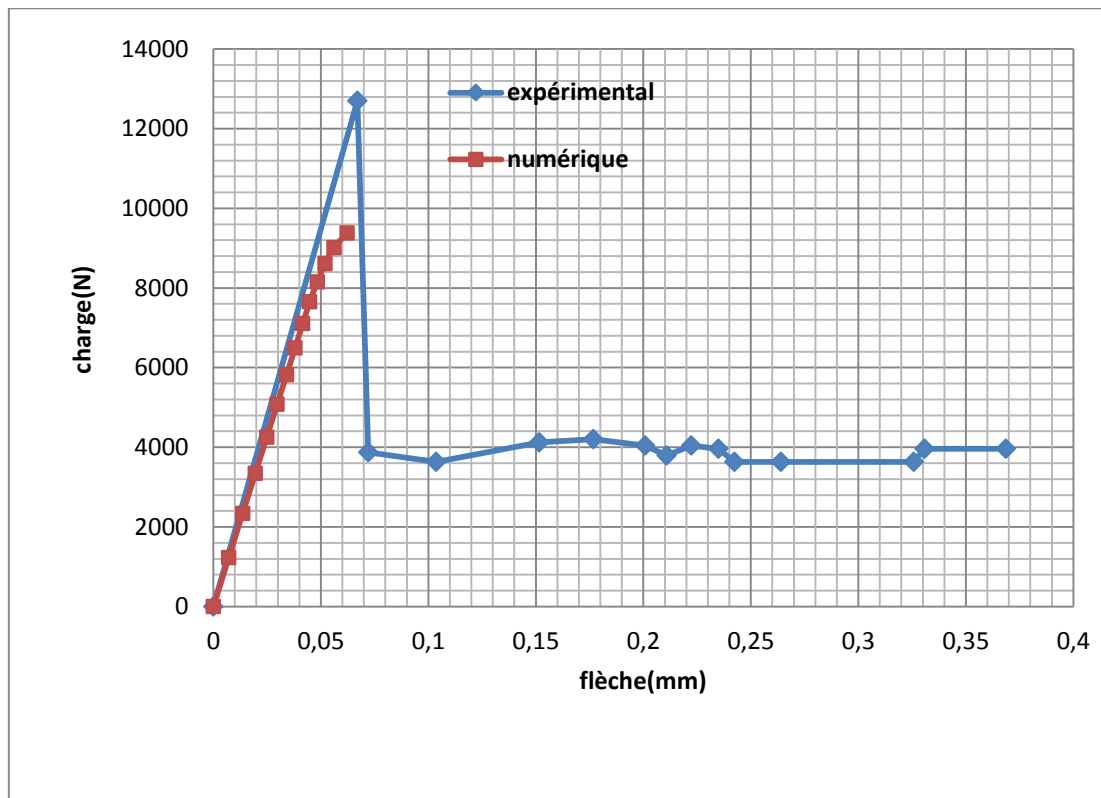
**Tableau V.4 : comparaison des résultats expérimentaux-numériques S/G =0,8 et W=0.8%**



**Figure V- 6 : courbe charge-flèche de la poutre S/G =1 et W=0%**

	Charge max (N)	Fleche max (mm)	$\frac{P_{exp}}{P_{nu}}$	$\frac{f_{exp}}{f_{nu}}$
<b>Expérimentales</b>	10 700	0.3	1.09	0.55
<b>Numériques</b>	9 800	0.54	Ecart de 8.41%	Ecart de 44.4%

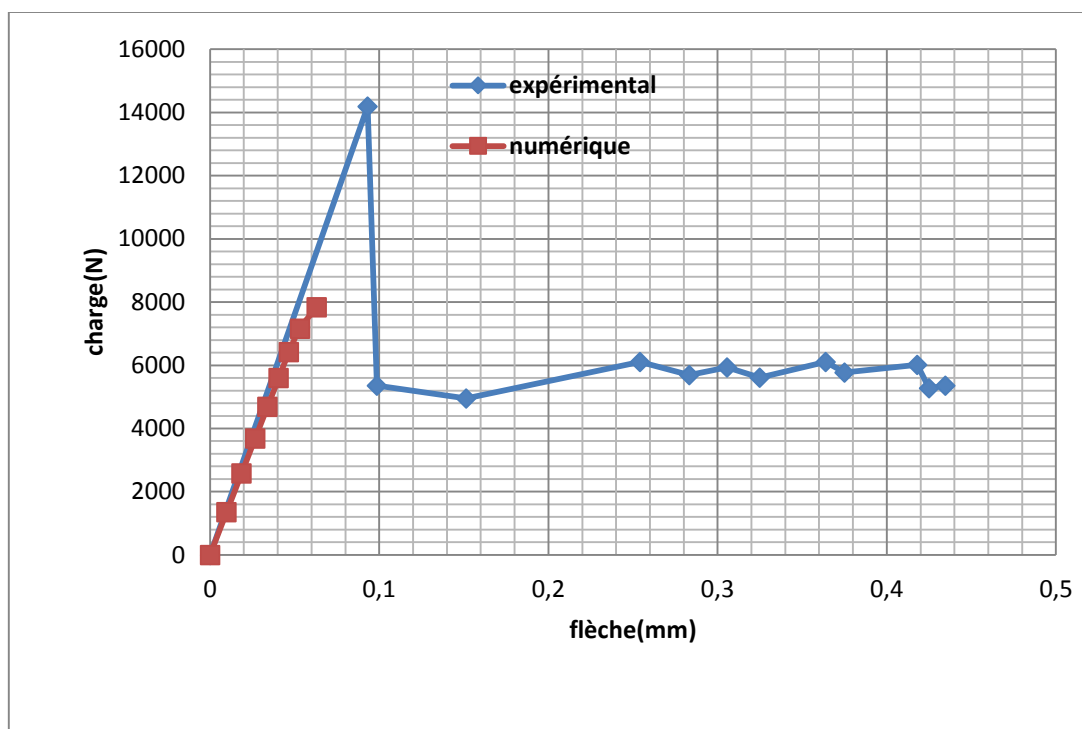
**Tableau V.5 : comparaison des résultats expérimentaux-numériques S/G =1 et W=0%**



**Figure V- 7 : courbe charge-flèche de la poutre S/G =1 et W=0.6%**

	Charge max (N)	Fleche max (mm)	$\frac{P_{exp}}{P_{nu}}$	$\frac{f_{exp}}{f_{nu}}$
<b>Expérimentales</b>	12 900	0.27	1.30	0.5
<b>Numériques</b>	9 900	0.54	Ecart de 23.25%	Ecart de 50%

**Tableau V.6 : comparaison des résultats expérimentaux-numériques S/G =1 et W=0.6%**



**Figure V- 8 : courbe charge-flèche de la poutre S/G =1 et W=0.8%**

	Charge max (N)	Fleche max (mm)	$\frac{P_{exp}}{P_{nu}}$	$\frac{f_{exp}}{f_{nu}}$
<b>Expérimentales</b>	14 230	0.34	1.78	0.48
<b>Numériques</b>	8 000	0.6	Ecart de 43.78%	Ecart de 43.33%

**Tableau V.7 : comparaison des résultats expérimentaux-numériques S/G =1 et W=0.8%**

**V-4) CONCLUSION**

La confrontation des résultats numériques avec des résultats expérimentaux effectuée pour plusieurs exemples montre l’aptitude du logiciel à simuler le comportement du béton de fibre et également les ossatures planes constitués de poutre et poteau.

Le modèle utilisé n’est pas capable de simuler une chute de la résistance à la flexion.

# CONCLUSION GENERALE

### CONCLUSION

Ce travail a consisté à l'étude et la simulation du comportement non linéaire des ossatures planes (poutres, poteau...ext) en béton de fibre. Dans ce cadre deux hypothèses ont été développées celle de BERNOULLI et TIMOSHENKO. La discrétisation par la méthode des éléments finis a abouti, ensuite l'élaboration d'un outil de calcul permettant la simulation du comportement non linéaire du béton de fibre.

La simulation du comportement des poutres en béton fibré, montre une augmentation de la résistance à la flexion par rapport à celui du béton témoin (non fibré). Cette augmentation est le résultat de la présence des fibres dans la partie tendue de la section qui permettent ainsi au béton de travailler davantage en traction, La flèche au droit du chargement augmente, selon la teneur en fibres et le rapport S/G.

Le béton de fibre présente des caractéristiques mécaniques lui permettant une utilisation industrielle dans le domaine de la construction et des travaux publics, l'évolution de la réponse de ce matériau à des sollicitations de traction le rend particulièrement intéressante.

Selon la simulation les structures en béton de fibre présente une ductilité importante et donc un comportement moins fragile.

En perspective, nous proposons de simuler le comportement du béton de fibre jusqu'à la rupture.

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1]: P.K. MEHTA, " Concrete: structure, properties, and materials ", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986, 450p.
- [2] : E.N. ANTOINE, Fibre reinforced for concrete, Concrete International design and Construction, Michigan,1985, Vol 7, N° 3, pp.21-25.
- [3] : ACI COMMITTEE, State of the art report on fibre reinforced concrete, American Concrete Institute. , Philadelphia, 1984, pp.140-146.
- [4] : M. BRAUN & A. MAJDIC , Reinforcing castables with stainless steel fibres Intercera, 1980, Vol 129, pp.113-118..
- [5] : H.F. PORTER, Preparation of concrete from selection of materials to final disposition. American Concrete Institute. 1910, Vol. 6, 296p.
- [6] : D.R. LANKARD & H.D. SHEETS ; Use of steel wire fibres in refractory castables . Am. Cer. Soc, 1971, Vol. 63, No.7.
- [7] : Pascal Casanova. Bétons renforcées de fibres métalliques : Ecole nationale de Ponts et chaussées, Paris, 1995.
- [8] : SACI. R ; Prise en compte de l'orientation des fibres dans une poutre continue à matrice de béton , mémoire de magistère, Université Mohamed Boudiaf M'sila, 2004.
- [9] : paradis f (2004) « analyse du comportement structural d'un composite mince en béton « du canoe de beton » » université de Laval Québec p8-9.
- [10] : PAILLIERE, A.M. (1993), « Le béton de fibres métalliques état actuel des connaissances », Annales de l'ITBTP N°515, 1993.
- [11] : ROSSI, P. ; HARROUCHE, N. ; LEMAOU, F. (1989), "Comportement mécaniques des bétons armé de fibres métalliques utilisés dans les structures en béton armé et précontraint", Annales de L'ITBTP, N° 479, 1989.
- [12]: ALEXANDER S.D.B., SIMMONDS S.H.,(1992), «Punching shear tests of concrete slab-column joints containing fiber reinforcement», *ACI Structural Journal*, vol. 89, 1992, p. 425-432.
- [13]: HARAJLI M.H., MAALOUF D., KHATIB H., (1995), «Effect on the punching shear strength of slab-column connections», *Cement & Concrete Composites* 1995; 17:161-170.
- [14]: GOSSLA U., (1999), Tragverhalten und Sicherheit betonstahlbewehrter Stahlfaserbetonteile – Theorie und Anwendung, Thèse de doctorat, Technische Universität Braunschweig, 1999.
- [15]: GOSSLA U., (2006), «Flachdecken aus Stahlfaserbeton», *Betonund Stahlbetonbau*, vol. 101, 2006, p. 94-102.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [16]: FALKNER H., KUBAT B., DROESE S., (1994), «Durchstanzversuche an Platten aus Stahlfaserbeton». *Bautechnik*, vol. 71,1994, p. 460-467.
- [17]: FALKNER H.,(2007), «Steel fibre and polymere concrete – basics, model code 2007 and applications». *Evoluzione nella sperimentazione per le costruzione*, April 2007, Cyprus, pp.381-400.
- [18] : BERNIER, G. (1988) « Composition, rhéologie, mise en oeuvre et composition du béton de fibres métalliques » C.R. journées ENS CACHAN MRES 22-25 nov.1988, Composite cement fibre ; 19p
- [19]: HUGHES, B.P.; FATTUHI, N.I., (1976), «The workability of steel reinforced concrete» GB. MAGAZINE of concrete research, vol. 28 N°96 pp 157-161. 1976.
- [20]: DEHOUSSE, N. (1975) «Fiber reinforced cement and concrete» RILEM SYMPOSIUM, GB. The construction press L.T.D. ed. Adam Neuilly 1975.
- [21] : SWAMY, R.N., MANGAT, P.S., (1975), « Fiber reinforced concret » Matériaux constructions, RILEM – mai- juin 1975 N°45.
- [22] : KACHI, M.S. (1997) « Calcul non linéaire jusqu'a rupture, d une section en béton armée de fibres métalliques », Thèse de magister, université M. MAMMERI de Tizi-Ouzou, fév. 1997.
- [23] : BERNIER, G. (1991) « Caractérisation et contrôle des bétons renforcés de fibres », Annales de l'ITBTP N°494, 1991
- [24] : ABSI, E. (1994) « Béton de fibres, synthèse des études et recherches réalisées au CEBTP », Annales de l'ITBTP N°520, 1994.
- [25] : LAFARGE ; Le béton et la démarche HQE.
- [26] : AIT AMEUR, Contribution à l'étude expérimentale des bétons renforcés de fibres d'acier locales. Mémoire de magister, U Tiaret, 1998.
- [27] : BOUZEROURA .M. Etude du comportement du béton de fibres ondulées. Proposition d'une relation simplifiée contrainte-déformation, Magistère en génie civil, Université de Tizi-Ouzou, 2003.
- [28]: BLEDZKI, A. K and GASSAN. J., Composites reinforced with cellulose based fibers ,ELSEVIER, Progress in polymer science, volume 24, pp.221-274, 1999.
- [29]: ACI COMMITTEE, State of the art report on fibre reinforced concrete, American Concrete Institute. , Philadelphia, 1984, pp.140-146.
- [30] : CHERGUI, N.,(2010), Caractérisation en statique du comportement en traction directe du béton armé de fibres en copeaux, Mémoire de magister en génie civil, Université M. MAMMERI de TIZI – OUZOU, 2010.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [31]: JEJCIC, O.; ZANGHLLINE, F., (1977), Mortier et ciment armé de fibres : une étude bibliographique, Annales de l'I.T.B.T.P., Suppl. n°347, Série matériaux 51, pp. 46-87, 1977.
- [32]: EDINGTON, J. HANNANT, (1972) Steel fiber reinforced of compacting by vibration, mat. et const, 5, n°25, janvier - février 1972.
- [33]: DEHOUSSE, N. ; LEJEUNE, A. ; KUYKENS, T., (1974) Les mortiers et bétons renforcés de fibres d'acier, Bruxelles, C.S.T.C. Revue n°2, 1974.
- [34]: SOROSHIAN, P.; LEE, C.D., (1990), Distribution and orientation of fibers in steel fiber reinforced concrete. ACI Materials journal, n°87, M44, Vol87 n°5, p433-439, Sept-Oct 1990.
- [35]: BARTOS, P., (1981) Review paper: Bond in fiber reinforced cements and concretes, International journal of cement composite and lightweight concrete, 1981, vol.3 n°3, p.1-18.
- [36]: LIM, T.Y., PARAMASIVAM, P., MANSUR, M.A., LEE, S.L., (1987) Analytical model for tensile behavior of steel fiber concrete, Journal of American concrete institute, materials, 1987, vol. 84, n°4, p.286-298.
- [37]: ZHAN, Z. (1991), « Contribution au dimensionnement des pieux en béton de fibre » Thèse de doctorat, université d'Orléans, 1991.
- [38] : SERNA ROSS, (1984), Etude de la contribution des fibres métalliques à l'amélioration du comportement du béton au cisaillement. Thèse de doctorat de l'ENPC, 1984.
- [39] : MAMILLAN, M.; MINARD, J. (1987), Béton de fibres d'acier, Recherche n°91-1015, CEBTP, octobre 1987.
- [40]: NANNI A. Splitting tension test for fiber reinforced concret .ACI Journal, n°85-M 27, pp229-233, July-August 1988.
- [41]: JONSTON, C.D., (1980), Properties steel fiber reinforced mortar and concrete, proceeding of the symposium on fibrous held. In London, 1980.
- [42]: KRENCHER, H. (1987) Fiber reinforced brittle matrix materials, A.C.I. International symposium, sp 44. 3 USA 1987.
- [43]: RAMAKRISHAN, V. OBERLING, G., TATNAL, P.C., (1987), Flexural fatigue strength of steel fiber reinforced concrete. Rapport de recherché 1987.
- [44] : CUYKENS T., VANSTERMANS J., (1977) "Bétons de fibres en acier », Extrait de C.S.T.C. Revue N°3, Septembre 1977.
- [45] : ELHACHEM, M.,( 1990) Etude de l'influence de la fibre de fonte sur le fluage et le retrait du béton. Thèse de docteur de l'E.C.P. février 1990.
- [46]: JINDAL, R.L., (1981), Shear and moment capacities of steel fiber reinforced concrete beams, USA, AM Concr. Inst, SP81.1, 1981.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [47] : VALADE, TH. (1987), Comportement des bétons armés de fibres métalliques. Mémoire de recherche développement, ENS de CACHAN, Déc. 1987.
- [48]: NARAYANAN, R., DARWISH, Y.S. (1987), Use of steel fiber as shear reinforcement. ACI structural journal, n°84, s23, pp 216-227, May-June 1987.
- [49]: ROBERTS, T.M.; NL,HO, (1982), Shear failure of deep fiber reinforced concrete beam, GB; Inst. J. of cem., lightweight concr, Vol.4, n°3, pp145-152, 1982.
- [50]: NEMEGEER, D. DRAMIX, fibres d'acier pour le renforcement du béton. C.E.R.I.L., stage n°6, Fév.1991.
- [51]: SWAMY, R.N., BAHIA, H.M. (1985), The effectiveness of steel fiber as shear reinforcement. USA. Concr. Inst. Des. Const., vol.7, n°3,1985.
- [52]: BALAGURU, P.; RAMAKRISHAN, V., (1988) Properties of fiber reinforced concrete: workability behaviour under long – term loading and air-void characteristics. ACI materials journal, pp 189-196, may-June 1988.
- [53]: SARGIN, M., (1968), Stress-strain relationship for concrete and the analysis of structural concrete sections. PhD thesis presented to the University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, March 1968, 334p.
- [54]: FANELLA, D.A.; NAAMAN, A.E.,( 1985) Stress-strain properties of fiber reinforced mortar in compression. Journal of the American concrete institute, vol. 79, n°4, July-august 1985.
- [55] : ABSI, E., NAAMAN, A.E., (1986) Modèle rhéologique pour les bétons de fibres. 3ème symposium international, Sheffield, 1986.
- [56]: MAZARS, J., (1988), Nouveau concept dans la modélisation des comportements du béton composite. Application au calcul des structures. Annales de l'I.T.B.T.P. n°41, série béton. 1988.
- [57] : VINCENT, M., (1990), Développement des bétons renforcés de fibres pour les fondations profondes. Thèse présentée à l'école des mines de Paris, Déc. 1990.
- [58] : BOUAFIA, Y., (1987) Simulation numérique du comportement moyen jusqu'à rupture d'une zone de poutre. Application au béton armé, béton précontraint et /ou béton de fibres. Mémoire de DEA, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1987.
- [59] : BOUAFIA, Y.; FOURE, B.; KACHI, M .S. (1998), "Relation effort- ouverture des fissures dans le cas du béton armé de fibres d'acier", Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, n°2, avril 1998.
- [60] : BOUAFIA, Y., KACHI, M .S., FOURE, B., (2002), "Relation contrainte- déformation en traction du béton armé de fibres d'acier", Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, n°3, juin 2002.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[61]. KACHI. M.S., Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres à précontrainte extérieure, Thèse de doctorat d'état, Université Mouloud MAMMERY de Tizi-Ouzou, novembre 2006.

[62] FILIPPOU.F.C, KWAK .H.G, (1990), « Finite element analysis of reinforced concrete structures, Under monotonic loads. », Rapport n° , Department of civil engineering, university California, p71.

[63] : OUBRAHAM Chahrazade (2012) Simulation du comportement instantané et diffère d'une zone fléchiée en béton arme ; Thèse de magister, université M. MAMMERY de Tizi-Ouzou, Jan. 2012.

[64] : MEZIANE Roufida (2008) ; modélisation et simulation du comportement non linéaire des structure planes en béton arme et béton de fibre par des éléments finis poutres. Thèse de magister ; université M. MAMMERY de Tizi-Ouzou, 12/2008.

[65] : DJEBALI Saïd (2013) ; Caractérisation des éléments de structures en béton de fibres métalliques ; Thèse de doctorat université M. MAMMERY de Tizi-Ouzou, 06/2013.