

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
**Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou**  
Faculté des sciences



## MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme de Master**

**En : Mathématiques**

**Option : Probabilités et Statistique**

**Par : Lounnas Rabea**

**Sujet :**

**La notion de copule et ses applications**

Dérigé par Monsieur :

**BERKOUN YUCEF** Professeur à l'UMMTO

Déposé le /03/10/2021,

# *Remerciements*

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire le Professeur BERKOUN Youcef, pour le temps qu'il m'a consacré durant la rédaction de ce mémoire. Je le remercie infiniment de m'avoir encadrée, aidée, et conseillée.

J'adresse mes sincères remerciements à Mr MAMOU Mohamed et à Mme Belkacem Cherifa pour m'avoir fait l'honneur d'évaluer ce travail.

Je tiens aussi à remercier tout le corps professoral de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, en particulier l'équipe de formation du "Master Probabilités et Statistiques"

Mr FELLAG Hocine et Mlle ATIL Lynda, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et leurs grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation de bonne qualité.

J'adresse mes plus sincères remerciements à ma chère famille : ma mère, mon père, mes sœurs, mes frères, mes enfants et mon mari.

Enfin j'adresse mes remerciements à tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

A tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

# *Dédicace*

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents , mes frères, mes soeurs et à mes enfants.

---

## *Table des Matières*

---

Remerciements	I
Dédicace	II
Table des matières	III
Liste des Tableaux	VI
Liste des Figures	VII
Introduction générale	1
<b>1 Les copules multidimensionnelles</b>	<b>3</b>
1.1 Rappels et notations . . . . .	3
1.1.1 Fonction de répartition . . . . .	3
1.1.2 Lois marginales . . . . .	4
1.1.3 Quantile . . . . .	4
1.1.4 Définition d'un pavé . . . . .	5
1.1.5 Volume d'un pavé . . . . .	5
1.1.6 Fonction $d$ -croissante . . . . .	5
1.2 Les copules multidimensionnelles . . . . .	5
1.3 Densité de la copule multivariée . . . . .	6
1.4 Propriétés des copules multidimensionnelles . . . . .	8
1.5 Copule de survie . . . . .	10
1.6 Classes de Fréchet . . . . .	10
1.7 Comonotonicité . . . . .	13
1.8 Mesures de dépendance . . . . .	14
1.8.1 Coefficient de corrélation linéaire de Pearson . . . . .	14
1.8.2 Tau de Kendall et rho de Spearman . . . . .	15
1.8.3 Notion de concordance . . . . .	16

1.8.4	le tau de Kendall . . . . .	19
1.8.5	le rho de Spearman . . . . .	20
1.8.6	Dépendance de queue . . . . .	23
1.9	Les copules usuelles . . . . .	24
1.9.1	Copule d'indépendance . . . . .	25
1.9.2	Les copules elliptiques . . . . .	26
1.9.2.1	Copules Gaussiennes . . . . .	27
1.9.2.2	Copules de Student . . . . .	29
1.9.3	Copules Archimédiennes . . . . .	32
1.9.4	Copules Archimédiennes bivariées avec un seul paramètre . . . . .	34
1.9.4.1	Famille de Gumbel-Hougaard (1960) . . . . .	34
1.9.4.2	Copule de Clayton (1978) . . . . .	36
1.9.4.3	Copule de Frank (1979) . . . . .	37
1.9.5	Copules archimédiennes multivariées avec un seul paramètre . . . . .	39
1.9.5.1	Copule de Gumbel . . . . .	40
1.9.5.2	Copule de Frank . . . . .	40
1.9.5.3	Copule de Clayton . . . . .	41
1.9.6	Copule d'ordre partiel . . . . .	41
1.9.7	Copule des valeurs extrêmes . . . . .	41
1.9.7.1	Propriété de convexité . . . . .	42
1.9.7.2	Restriction de copules . . . . .	42
1.9.8	Parties absolument continues et singulières d'une copule . . . . .	42
1.9.8.1	Exemple de copule sans partie singulière . . . . .	43
1.9.8.2	Exemple de copule sans partie absolument continue . . . . .	43
1.9.8.3	Exemple de copule avec partie absolument continue et partie singulière . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Estimations des paramètres d'une copule</b> . . . . .	<b>45</b>
2.1	Fonction de répartition empirique . . . . .	45
2.2	Estimation non paramétrique . . . . .	46
2.2.1	Copule empirique . . . . .	46
2.2.2	Procédure de GENEST et RIVEST . . . . .	47
2.2.3	Estimation par la méthode des noyaux . . . . .	47
2.3	Estimation paramétrique . . . . .	50
2.3.1	La méthode des moments . . . . .	50
2.3.2	Méthode du maximum de vraisemblance (MLE) . . . . .	51
2.3.3	Méthode de fonction d'inférence sur les marginales (IFM) . . . . .	53
2.4	Méthode semi-paramétrique . . . . .	54

2.5	Choix de la meilleure copule . . . . .	55
2.6	Simulation des copules . . . . .	56
2.6.1	La méthode des distributions . . . . .	56
2.6.2	La méthode des distributions conditionnelles . . . . .	56
2.6.3	Les méthodes analytiques . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Mesures de risque</b>	<b>59</b>
3.1	Mesure de risque . . . . .	59
3.2	Mesure de risque cohérente . . . . .	60
3.3	Principales mesures de risque . . . . .	60
3.3.1	La Value at Risk (VaR) . . . . .	60
3.3.2	La Tail-Value-at-Risk . . . . .	62
3.4	Exemple d'application . . . . .	63
	<b>Bibliographie</b>	<b>74</b>

---

## *Liste des tableaux*

---

1.1	Tau de Kendall de Quelques copules . . . . .	20
1.2	Calcul de Rho de Spearman empirique . . . . .	23
3.1	Les résultats des paramètres estimés et les AIC pour les marginales t des ETF. .	70
3.2	Le AIC pour chaque copule ajustée . . . . .	70
3.3	Calcul de la VaR et l'ES . . . . .	70

---

## *Table des figures*

---

1.1	Copule de borne inférieure de Fréchet <b>W</b> . . . . .	12
1.2	Copule de borne supérieure de Fréchet <b>M</b> . . . . .	12
1.3	Copule de Fréchet . . . . .	13
1.4	Copule d'indépendance . . . . .	25
1.5	Contour plot de la copule d'indépendance . . . . .	25
1.6	Copule Gaussienne . . . . .	28
1.7	Contour plot de la copule gaussienne de paramètre $\rho = 0.5$ . . . . .	29
1.8	La densité de la copule Gaussienne . . . . .	29
1.9	Copule de Student . . . . .	31
1.10	Contour plot de la copule de student avec $\rho = 0.5$ et $\mu=8$ . . . . .	31
1.11	la densité de t-copule . . . . .	31
1.12	Copule d'indépendance . . . . .	34
1.13	Copule de Gumbel . . . . .	35
1.14	Copule de Clayton . . . . .	36
1.15	Copule de Frank . . . . .	38
1.16	Comparaison de quelques copules usuelles . . . . .	39
3.1	Représentation graphique des prix . . . . .	63
3.2	Rendements des ETF au cours des 500 derniers jours . . . . .	64
3.3	Corrélation entre les variables . . . . .	65
3.4	Distributions t ajustées . . . . .	66
3.5	La corrélation entre les distributions uniformes . . . . .	67
3.6	Comparaison entre la simulation et l'ajustement . . . . .	67

---

## *Introduction générale*

---

Le concept de copule a été introduit par Sklar [1] pour résoudre un problème de probabilité énoncé par Maurice Fréchet relatif aux espaces métriques aléatoires. Pendant plusieurs années après leur introduction, les copules ont été très peu utilisées en statistique et les exemples d'application ne sont pourtant pas légion. On peut toutefois citer :

- Les travaux de Kimeldorf et Sampson sur la dépendance [42]
- Les recherches de Paul Deheuvels (fin des années 70) [50].

Il a fallu attendre la fin des années dix neuf cent quatre vingt, pour que celles-ci fassent l'objet d'études approfondies, surtout avec l'article de Genest et Mackey (the joy of copulas) [7]. Ces trois dernières décennies, la théorie des copules a connu un essor considérable surtout avec les applications en finance et en actuariat pour la gestion des risques multiples.

Dans la théorie des copules, la dépendance entre variables aléatoires est parfaitement décrite par leur distribution jointe. Cependant, nous pouvons distinguer les comportements des distributions marginales de la structure de dépendance. La copule est l'outil permettant d'extraire la structure de dépendance d'une distribution jointe et ainsi de séparer dépendance et comportement marginal. En isolant cette structure de dépendance, il est alors possible de déterminer une loi multivariée originale car composée de distributions marginales différentes. Un exemple simple est la structure de dépendance générée par une copule gaussienne dont la distribution jointe est gaussienne mais avec des distributions marginales différentes.

Les mesures de dépendance classiques telles le coefficient de corrélation de Pearson, le tau de kendall, le rho de spearman bien que facilement interprétables, ne permettent pas de détecter toutefois les formes de dépendance. Le coefficient de corrélation de Pearson mesure la dépendance linéaire entre deux variables aléatoires. C'est un coefficient qui n'est pas défini si les variables aléatoires n'admettent pas de moment d'ordre deux (ex : loi de Cauchy) ou qu'elles soient à variance infinie. Pour l'étude d'une dépendance non linéaire, les deux autres coefficients sont beaucoup plus adaptés puisqu'ils ne dépendent que du rang de chaque observation par opposition au coefficient de corrélation qui utilise les réalisations de variables aléatoires. De plus, ces derniers sont invariants par toute transformation croissante. Au lieu de résumer la structure

de dépendance par un seul nombre, on peut utiliser un modèle qui reflète une connaissance plus détaillée de la structure de dépendance.

Le passage à ce nouveau concept comporte deux avantages principaux à savoir :

- Isoler les liens d'interdépendance entre variables aléatoires, indépendamment de leur comportement individuel.
- La construction de modèles avec des choix désirés de lois marginales et de structure de dépendance. Ce qui permet de s'affranchir des hypothèses Gaussiennes.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on donnera les généralités sur le concept de copules, leurs propriétés fondamentales ainsi que les principaux théorèmes plus précisément le théorème de Sklar qui est la clef de voûte de toute cette théorie. Les mesures de dépendance et la partie simulation qui décrite à la fin de ce chapitre. Le second chapitre est dédié à l'estimation des paramètres d'une copule. Les trois grandes méthodes d'estimation paramétrique, non-paramétrique et semi-paramétrique sont abordées. Le dernier chapitre est consacré aux principales mesures de risque utilisées en finance et en actuariat avec un exemple pratique de calcul de la Value at Risk et de l'Expected Shortfall.

# Chapitre 1

---

## Les copules multidimensionnelles

---

### 1.1 Rappels et notations

Soient  $(\Omega, A, P)$  un espace de probabilité et  $X$  une variable aléatoire réelle.

#### 1.1.1 Fonction de répartition

1. On appelle fonction de répartition  $F$  de  $X$ , la fonction définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longrightarrow F(x) = P\{X \leq x\} \end{aligned}$$

$F$  possède les propriétés suivantes :

- \*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \lim_{n \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- \*  $F$  non-décroissante
- \*  $F$  est continue à droite
- \* La fonction de densité de  $X$  est définie par

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

en tout point de continuité  $x$  de  $f$

2. Dans le cas multidimensionnel, notons  $X = (X_1, \dots, X_n)'$  un vecteur aléatoire, la fonction de répartition  $F$  de  $X$  est donnée par

$$F(X) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x_i)\right)$$

De même, on a aussi les propriétés suivantes :

- \*  $\lim_{x_j \rightarrow -\infty} F(X) = 0, \forall j$
- \*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(X) = 1,$
- \*  $\frac{\partial^n F(X_1, \dots, X_n)}{\partial x_1, \dots, \partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n)$

### 1.1.2 Lois marginales

On appelle lois marginales, les lois des variables aléatoires  $X_i$   $i = 1, \dots, d$  notées  $F_{X_i}$  définies par

$$F_{X_i}(x_i) = \lim_{x_j \rightarrow +\infty} F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_d), \quad j = 1, \dots, d \quad i \neq j$$

On rappelle que les variables aléatoires  $X_i$  sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R} : F(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d F_{X_i}(x_i)$$

où  $F$  est la fonction de répartition de  $X_1, \dots, X_d$

### 1.1.3 Quantile

**Définition .** Soit  $X$  une variable aléatoire de répartition  $F$ , On appelle quantile d'ordre  $p$  de  $X$ , le nombre  $\xi_p$  défini par

$$\xi_p = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\} = \overleftarrow{F}(p),$$

où  $\overleftarrow{F}$  désigne l'inverse généralisé définie par :

$$\overleftarrow{F}(t) = \inf\{x : F(x) \geq t\}.$$

#### Remarque

- \* Pour  $p = 1/2$  on obtient la médiane,
- \* Pour  $p = 1/4$  on obtient le premier quartile,
- \* Pour  $p = 3/4$  on obtient le troisième quartile.
- \* Si  $F$  est strictement croissante et continue, alors  $\xi_p$  est l'unique nombre réel tel que :

$$F(\xi_p) = p \Rightarrow \xi_p = \overleftarrow{F}(p).$$

**Théorème .** Soit  $F$  une fonction de répartition et  $\overleftarrow{F}$  son inverse généralisée, alors

1.  $\overleftarrow{F}$  est non-décroissante et continue à gauche.
2.  $\overleftarrow{F}(F(x)) \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .
3.  $F(\overleftarrow{F}(t)) \geq t \quad \forall t \in ]0, 1[$ .
4.  $F(x) \geq t$  ssi  $x \geq \overleftarrow{F}(t)$ .

**Lemme 1.** Soit  $X$  une variable aléatoire de répartition  $F$  continue, alors

$$F(X) \stackrel{d}{=} U[0, 1]$$

c'est-à-dire :

$$U = \overleftarrow{F}(X)$$

### 1.1.4 Définition d'un pavé

Soit un vecteur aléatoire  $X = (x_1, \dots, x_d) \in \overline{\mathbb{R}}^d$ ; soient  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d)$  et  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_d)$  avec  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  si  $a_k \leq b_k$  pour tout  $k = 1, \dots, d$ .

Un pavé de dimension  $d$  noté par  $B := [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  est de la forme :

$$B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d], \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$$

où  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overline{\mathbb{R}}$

Les sommets d'un pavé  $B$  sont les points de l'ensemble

$$\{\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_d) : c_i \in [a_i, b_i], \quad 1 \leq i \leq d\}.$$

### 1.1.5 Volume d'un pavé

Soient  $S_1, \dots, S_d$  des parties mesurables non vides de  $\overline{\mathbb{R}}$  et  $H$  une fonction  $d$ -dimensionnelle dont le domaine de définition est  $DomH = S_1 \times \dots \times S_d$ .

Soit  $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  un  $d$ -pavé dont les sommets sont dans  $DomH$ , le  $H$ -volume de  $B$  est alors défini par :

$$V_H(B) := \sum_{\mathbf{c} \in B} sign(\mathbf{c})H(\mathbf{c})$$

où la somme s'effectue sur tous les sommets  $\mathbf{c}$  de  $B$  et le  $sign(\mathbf{c})$  est donné par :

$$sign(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1 & c_k = a_k \text{ pour un nombre pair de } k \\ -1 & c_k = a_k \text{ pour un nombre impair de } k \end{cases}$$

### 1.1.6 Fonction $d$ -croissante

**Définition .** Une fonction réelle  $d$ -dimensionnelle  $H$  est dite  $d$ -croissante, si  $V_H(B) \geq 0$  pour tout  $d$ -pavé  $B$  dont les sommets sont dans  $DomH$ .

Toute fonction de répartition multivariée est donc  $d$ -croissante, et en particulier, les marginales sont non- $d$ -croissantes.

## 1.2 Les copules multidimensionnelles

**Définition .** Une fonction copule  $d$ -dimensionnelle  $C$  (ou fonction copule d'ordre  $d$ ) est une fonction définie sur  $[0, 1]^d$  à valeurs dans  $[0, 1]$  vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d \quad C(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_d) = 0$

- $\forall (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d \quad C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$

- $C$  est  $d$ -croissante, c'est-à-dire, pour tout  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$  et  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$  dans  $[0, 1]^d$  tels que  $u_i \leq v_i$ , pour  $i = 1, \dots, d$ , on a :

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{\sum_{j=1}^d i_j} \times C(x_{1i_1}, \dots, x_{di_d}) \geq 0$$

où  $x_{1j} = u_j$   $x_{2j} = v_j$  et ce  $\forall j \in \{1, \dots, d\}$ .

En particulier, dans le cas bivarié,  $C$  est définie sur le carré unité  $[0, 1]^2$  avec les propriétés suivantes :

- \*  $C(0, v) = C(u, 0) = 0 \quad \forall (u, v) \in [0, 1]^2$
- \*  $C(1, v) = v$  et  $C(u, 1) = u \quad \forall (u, v) \in [0, 1]^2$
- \*  $C(u', v') - C(u, v') - C(u', v) + C(u, v) \geq 0$ ,  $\forall u \leq u'$  et  $v \leq v'$

### Remarque

- \* Une copule est uniformément continue sur son domaine de définition.
- \* Il découle de la définition (3) que chaque marginale  $k$ -dimensionnelle d'une copule  $d$ -dimensionnelle est elle-même une  $k$ -copule, avec  $2 \leq k \leq d$ ; Il existe exactement  $\binom{n}{k}$  copules marginales  $k$ -dimensionnelles de la copule  $C$ .

## 1.3 Densité de la copule multivariée

La densité  $c$  associée à la copule  $C$  est définie par

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(\mathbf{u})}{\partial u_1 \dots \partial u_d}$$

Si la fonction de répartition multivariée  $F$  est absolument continue, alors en utilisant le théorème de Sklar [1], nous pouvons exprimer la densité d'un vecteur aléatoire  $X_1, \dots, X_d$  en fonction de la densité de sa copule et de ses fonctions de répartition marginales  $F_1, \dots, F_d$  par :

$$f(x_1, \dots, x_d) = c\left(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\right) \prod_{i=1}^d f_i(x_i) \quad (1.1)$$

À partir de cette relation, nous obtenons l'expression suivante de la densité  $c$

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{\prod_{i=1}^d f_i(F_i^{-1}(u_i))}$$

Ce résultat est important pour l'estimation des paramètres de la loi de probabilité d'un vecteur aléatoire  $(X_1, \dots, X_d)$  par la méthode du maximum de vraisemblance; Notons que la  $d$ -croissance de la copule  $C$  correspond à la positivité de la densité

$$c(\mathbf{u}) = \frac{\partial^d C(\mathbf{u})}{\partial u_1 \dots \partial u_d} \geq 0 .$$

**Définition .** Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires indépendantes sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Notons  $F$  la fonction de répartition de  $X$  et supposons que  $V$  est de distribution uniforme sur  $[0, 1]$ .

Définissons la fonction de répartition modifiée  $F(\cdot, \lambda)$ , pour  $c \in \mathbb{I} = [0, 1]$  et  $x \in \mathbb{R}$ , par

$$F(x, c) = l^- F(x) + c(F(x) - l^- F(x))$$

où  $l^- F(x) = \lim_{\substack{s \rightarrow x \\ s < x}} F(s)$ .

On définit la transformée généralisée de la distribution  $F$  de  $X$  par  $U = F(X, V)$ .

Il est clair que si  $F$  est continue, alors  $F(x, c) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Théorème .** Soit  $U = F(X, V)$ , alors  $U$  est de distribution uniforme sur  $[0, 1]$  et  $X = F^{(-1)}(U)$  presque sûrement.

**Démonstration**

Soit  $q_\alpha = \sup\{t : F(t) < \alpha\}$  pour  $0 < \alpha < 1$ ,  
alors  $F(X, V) \leq \alpha$  ssi  $(X, V)$  appartient à l'ensemble  $\{(t, c) : P(X < t) + cP(X = t) \leq \alpha\}$ .

Supposons que  $\beta = P(X = q_\alpha) > 0$  et posons  $q = P(X < q_\alpha)$ , alors

$$\{(t, c) : P(X < t) + cP(X = t) \leq \alpha\} = \{X < q_\alpha\} \cup \{X = q_\alpha, q + V\beta \leq \alpha\}$$

On obtient que

$$P(U \leq \alpha) = P(F(X, V) \leq \alpha) = q + \beta P(V \leq \frac{\alpha - q}{\beta}) = q + \beta \frac{\alpha - q}{\beta} = \alpha$$

Si  $\beta = 0$ , alors  $P(F(X, V) \leq \alpha) = P(X < q_\alpha) = P(X \leq q_\alpha) = \alpha$ .

En vertu de la définition de  $U$ , on a

$$l^-F(X) \leq U \leq F(X).$$

$\forall t \in ]l^-F(x), F(x)[$ , on a

$$F^{(-1)}(t) = x$$

En utilisant le fait que  $l^-F(X) \leq U \leq F(X)$ , on a  $F^{(-1)}(U) = X$  presque sûrement.

Nous allons utiliser le théorème ci-dessus pour démontrer le théorème de Sklar.

**Théorème . (Théorème de Sklar)[1]**

Soit  $F$  une fonction de répartition  $d$ -dimensionnelle de fonctions marginales  $F_1, F_2, \dots, F_d$ . alors  
Il existe une  $d$ -copule  $C$  telle que :

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \overline{\mathbb{R}}^d$$

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)), \tag{1.2}$$

**Démonstration**

Soit  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  un vecteur aléatoire de distribution conjointe  $F$  et notons  $V$  une variable aléatoire indépendante de  $X$  de distribution uniforme sur  $[0, 1]$ .

Considérons la transformation  $U_j = F_j(X_j, V), j = 1, 2, \dots, d$ .

En vertu du théorème précédent la variable aléatoire  $U_j$  est de distribution uniforme sur  $[0, 1]$  et  $X_j = F_j^{(-1)}(U_j), j = 1, 2, \dots, d$ , presque sûrement.

Notons  $C$  la fonction de répartition de  $U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$  alors

$$F(\mathbf{x}) = P\left(\bigcap_{j=1}^d \{X_j \leq x_j\}\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^d \{F_j^{(-1)}(U_j) \leq x_j\}\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^d \{U_j \leq F_j(x_j)\}\right) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

Ce qui signifie que  $C$  est la copule associée à  $F$ .

### Remarque

Si les fonctions  $F_1, F_2, \dots, F_d$  sont toutes continues, alors  $C$  est unique; sinon la copule  $C$  est déterminée d'une manière unique sur  $(\text{Im}F_1 \times \text{Im}F_2 \times \dots \times \text{Im}F_d)$ .

**Réciproquement** Etant données des fonctions de distributions univariées  $F_1, F_2, \dots, F_n$  et une fonction  $d$ -copule  $C$ , on peut construire un vecteur aléatoire  $(u_1, \dots, u_d)$  sur un espace de probabilité  $(\Omega, A, P)$  de telle sorte que les  $F_i$  soient les fonctions de répartition des  $X_i$  et la fonction de répartition du vecteur  $(u_1, \dots, u_d)$  est donnée par :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d))$$

De ce résultat, on déduit que nous pouvons associer une copule à chaque fonction de répartition multidimensionnelle. Nous pouvons donc décomposer une fonction de répartition multivariée en deux parties : d'une part les fonctions de répartition marginales et d'autre part la copule qui mesure la dépendance entre les variables aléatoires. Ce théorème est la clé de voute de toute la théorie des copules.

### Corollaire 1. *Théorème d'inversion de Sklar*[1]

Soient  $C, F$  et  $F_1, F_2, \dots, F_d$  les fonctions définies dans le théorème précédent, supposons que  $F_1, F_2, \dots, F_d$  sont continues, alors

$$C(u_1, \dots, u_d) = \mathbf{F}(\overleftarrow{F}_1, \overleftarrow{F}_2, \dots, \overleftarrow{F}_d)$$

où  $\overleftarrow{F}_1, \overleftarrow{F}_2, \dots, \overleftarrow{F}_d$  désignent les inverses généralisés de  $F_1, F_2, \dots, F_d$  respectivement.

## 1.4 Propriétés des copules multidimensionnelles

### a) Invariance

Soit  $(X_1, \dots, X_d)$  un vecteur aléatoire continu, de fonction de répartition  $F$  associée à une copule  $C$  et  $(T_1, \dots, T_d)$  une suite de fonctions strictement croissantes, alors la fonction de répartition conjointe du vecteur aléatoire  $(T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))$  est aussi associée à la même copule  $C$ .

La copule est ainsi invariante par toute transformation strictement croissante de variables aléatoires.

### Démonstration

Notons par  $F_i$  et  $G_i$  les fonctions de répartition univariées, respectives, des variables aléatoires  $X_i$  et  $T_i(X_i)$ . Soient  $C$  et  $C_T$  les copules associées respectivement aux vecteurs aléatoires  $X$  et  $T_X$ .

Comme les transformations  $T_i$  sont croissantes, alors pour tout  $x_i \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $i = 1, \dots, d$

On a :

$$G_i(x_i) = \mathbb{P}(T_i(X_i) \leq x_i) = \mathbb{P}(X_i \leq T_i^{-1}(x_i)) = F_i(T_i^{-1}(x_i))$$

Nous avons, pour tout  $u = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$ ,

$$\begin{aligned}
 C(u_1, \dots, u_d) &= \mathbb{P}\left(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), \dots, X_d \leq F_d^{-1}(u_d)\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(T_1(X_1) \leq T_1(F_1^{-1}(u_1)), \dots, T_d(X_d) \leq T_d(F_d^{-1}(u_d))\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(T_1(X_1) \leq T_1(F_1^{-1}(u_1)), \dots, T_d(X_d) \leq T_d(F_d^{-1}(u_d))\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(T_1(X_1) \leq G_1^{-1}(u_1), \dots, T_d(X_d) \leq G_d^{-1}(u_d)\right) \\
 &= C_T(u_1, \dots, u_d).
 \end{aligned}$$

Donc  $C = C_T$  sur  $[0, 1]^d$ .

### b) Continuité uniforme

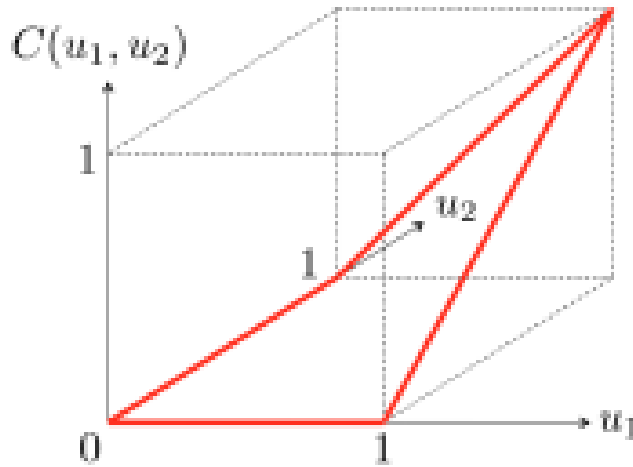
$\forall (u, v) \in [0, 1]^d$ , alors

$$|C(u) - C(v)| \leq \sum_{i=1}^d |u_i - v_i|$$

### Démonstration

l'inégalité précédente montre que les fonctions copules sont lipchitziennes.

(Dans le cas  $n = 2$ ) L'inégalité du triangle nous donne :



$$|C(u_1, u_2) - C(v_1, v_2)| \leq |C(u_1, u_2) - C(u_1, v_2)| + |C(u_1, v_2) - C(v_1, v_2)|$$

Supposons que  $u_2 \leq v_2$ , alors (3) nous donne :

$$C(1, v_2) - C(1, u_2) - C(u_1, v_2) + C(u_1, u_2) \geq 0$$

$$C(u_1, v_2) - C(u_1, u_2) \leq v_2 - u_2$$

Dans le cas  $u_2 \geq v_2$  nous avons :  $C(u_1, u_2) - C(u_1, v_2) \leq u_2 - v_2$

$$\text{Donc } |C(u_1, u_2) - C(u_1, v_2)| \leq |u_2 - v_2|$$

De même on obtient,  $|C(u_1, v_2) - C(v_1, v_2)| \leq |u_1 - v_1|$ .

### c) Existence des dérivées partielles

Soit  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  une copule, les dérivées partielles de  $C$  existent presque sûrement pour

tout  $i = 1, \dots, d$  et pour tout  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$ , on a :

$$0 \leq \frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial u_i} \leq 1.$$

## 1.5 Copule de survie

**Définition .** Soient  $X_1, \dots, X_d$  des variables aléatoires représentant la durée de vie d'individus où d'objets dans une certaine population.

La probabilité que l'individu vive ou survive au delà du temps  $x$  est définie par :

$$\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$$

où  $F$  désigne la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .

Dans le cas multivarié, la fonction de survie de  $\mathbf{X}$  est définie par

$$\bar{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 \geq x_1, \dots, X_d \geq x_d)$$

Notons  $\bar{F}_i(x_i) = \mathbb{P}(X_i \geq x_i)$ ,  $i = 1, \dots, d$ ; on peut écrire la fonction de survie conjointe  $\bar{F}$  en fonction d'une copule  $\tilde{C}$  et de ses marginales, et nous obtenons

$$\bar{F}(\mathbf{x}) = \tilde{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_d(x_d)), \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^d,$$

La copule  $\tilde{C}$  est appelée copule de survie.

### Remarque

1- La copule  $\tilde{C}$  peut s'écrire en fonction de la copule  $C$  de la façon suivante

$$\tilde{C}(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^d \left[ (-1)^i \sum_{\mathbf{w}(\mathbf{u}) \in Z(d-i, d, 1)} C(1 - \mathbf{w}) \right] \text{ pour tout } \mathbf{u} \in [0, 1]^d,$$

où  $Z(d - i, d, 1)$  est l'ensemble de  $\binom{d}{i}$  vecteurs possibles de  $(d - i)$  composantes égales à 1,  $i = u_i$ , et

$$1 - \mathbf{w} = (1 - w_1, \dots, 1 - w_d).$$

2- En particulier, pour le cas bivarié nous obtenons

$$\tilde{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - u_2).$$

## 1.6 Classes de Fréchet

Soient  $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$  des fonctions de répartition univariées fixées (pas nécessairement identiques).

**Définition .** On définit la classe de Fréchet [36]  $\Gamma(F_{X_1}, \dots, F_{X_n})$  par l'ensemble de toutes les fonctions de répartition multivariées ayant pour marginales  $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$

On peut montrer que toute fonction de répartition  $F_{X_1, \dots, X_n}$  appartenant à la classe de Fréchet  $\Gamma(F_{X_1}, \dots, F_{X_n})$  est comprise entre deux bornes dites les bornes de Fréchet. On a recours à la proposition suivante pour montrer ce résultat.

**Proposition 1.** Soient deux événements  $A$  et  $B$  on a :

$$\max(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1; 0) \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A); \mathbb{P}(B))$$

**Démonstration**

Ce résultat est élémentaire en probabilité; D'une part, on sait que :

$\mathbb{P}(A \cap B)$  doit nécessairement satisfaire les inégalités suivantes :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$$

et

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$$

Ce qui implique que

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A); \mathbb{P}(B))$$

On sait que :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$$

Étant donné que  $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$  et  $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$  alors,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \max(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1; 0)$$

**Les Bornes de Fréchet-Hoeffding**

On va montrer que toute copule  $d$ -dimensionnelle est comprise entre deux bornes.[36]

$F_1, \dots, F_d$  est telle que pour tout  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\max\{0, F_1(x_1) + \dots + F_d(x_d) - d + 1\} \leq F(\mathbf{x}) \leq \min\{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\}$$

**Proposition 2.** Soient les fonctions  $W, M : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  définies respectivement par

$W(u_1, \dots, u_d) = \max(0, u_1 + \dots + u_d - d + 1)$  et  $M(u_1, \dots, u_d) = \min\{u_1, \dots, u_d\}$ .

Pour toute copule  $C$ , on a :

$$W\{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\} \leq C\{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\} \leq M\{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\}$$

$W$  ( respectivement  $M$ ) est dite borne inférieur de Fréchet-Hoeffding ( respectivement borne supérieure).

**Démonstration**

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_d) &= \mathbb{P}\{U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d\} \\ &\leq \mathbb{P}\{U_i \leq u_i\} = u_i \text{ pour chaque } i \end{aligned}$$

$$C(u_1, \dots, u_d) \leq \min(u_1, \dots, u_d)$$

Pour l'autre inégalité :

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_d) &= \mathbb{P}\{U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d\} \\ &= 1 - \mathbb{P}\{U_1 \geq u_1 + \dots + U_d \geq u_d\} \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^d \mathbb{P}\{U_i > u_i\} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^d 1 - \{U_i \leq u_i\} \\ &= \sum_{i=1}^d u_i - d + 1 \end{aligned}$$

### Remarque

En posant  $u_1 = F_1(x_1)$ ,  $u_d = F_d(x_d)$ , on peut affirmer que toute copule  $C$  est telle que pour tout  $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$

$$W(u_1, \dots, u_d) = \left(\sum_{i=1}^d u_i - d + 1\right)^+ \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq M(u_1, \dots, u_d) = \min(u_1, \dots, u_d)$$

où  $W = (\sum_{i=1}^d u_i - d + 1)^+$ .  $W$  est une fonction copule si et seulement si  $n = 2$ . D'autre part :

$$C(u_1, \dots, u_d) \geq 0$$

Donc

$$C(u_1, \dots, u_d) \geq \left(\sum_{i=1}^d u_i - d + 1\right)^+$$

Quand  $n = 2$ ,  $C(u, v) = (u+v-1)^+$  est la fonction de distribution de  $(U, 1-U)$  avec  $U = F_1(X_1)$

Quand  $n \geq 2$ ,  $W([\frac{1}{2}, 1]^n) = 1 - \frac{d}{2} < 0$

Donc  $W$  ne peut pas être la fonction de répartition d'une copule. Notons que  $M$  est une copule, alors que  $W$  ne l'est pas.

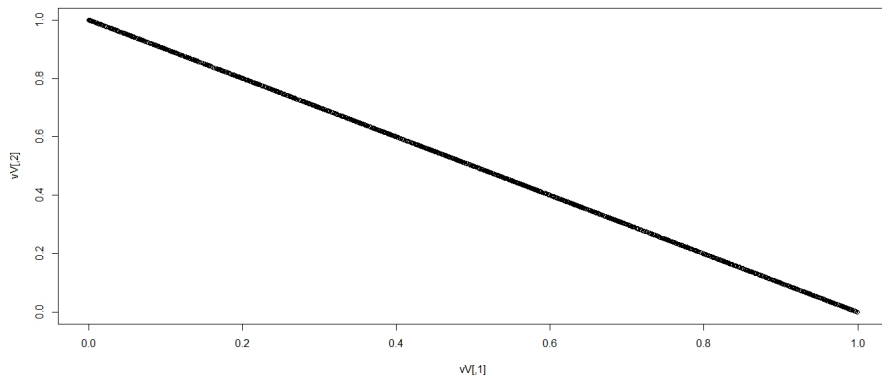


FIGURE 1.1 – Copule de borne inférieure de Fréchet **W**

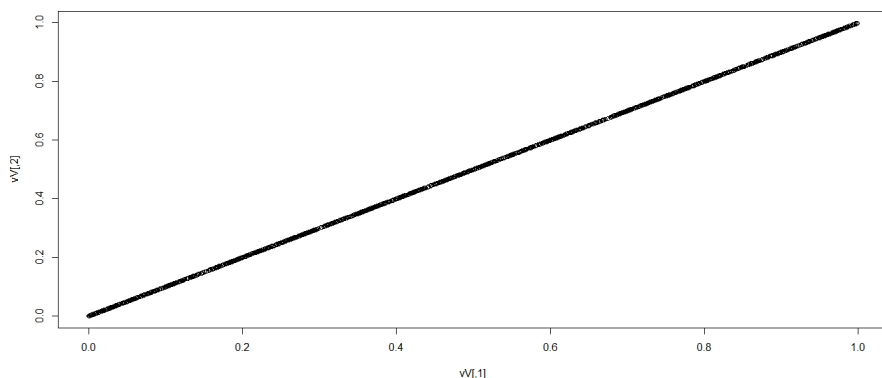


FIGURE 1.2 – Copule de borne supérieure de Fréchet **M**

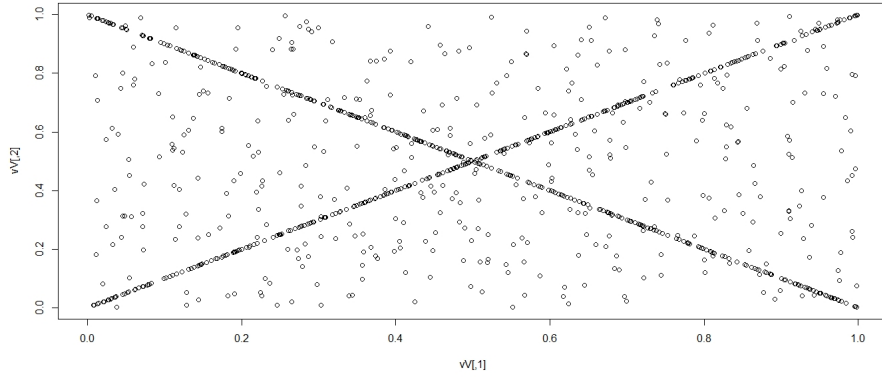


FIGURE 1.3 – Copule de Fréchet

## 1.7 Comonotonicité

Un cas particulier de relation de dépendance est la comonotonicité qui, depuis la fin des années 1990 est fréquemment utilisée en actuariat.

**Définition .** Un vecteur aléatoire  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_d)$  est comonotonique si et seulement si il existe une variable aléatoire  $Z$  et des fonctions non-décroissantes  $\Phi_1, \dots, \Phi_d$  telles que :

$$(X_1, \dots, X_d) \stackrel{d}{=} (\Phi_1(Z), \dots, \Phi_d(Z)).$$

Par exemple, on définit un vecteur aléatoire  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_d)$  où les composantes sont données par :

$$X_i = F_{X_i}^{-1}(U)$$

Pour  $i = 1, \dots, d$ , et en vertu de la définition (6), les composantes de  $\underline{X}$  sont dites comonotones. La proposition suivante fait le lien entre un vecteur aléatoire  $\underline{X}$  dont les composantes sont comonotones et la borne supérieure de Fréchet.

**Proposition 3.** Le vecteur aléatoire  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_d)$  a des composantes comonotones si et seulement si sa fonction de répartition conjointe est la borne supérieure de Fréchet  $F^+$ .

### Démonstration

On a :

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_d) &= \mathbb{P}\left(F_{X_1}^{-1}(U) \leq x_1, \dots, F_{X_d}^{-1}(U) \leq x_d\right) \\ &= \mathbb{P}\left(U \leq F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(U \leq \min\left(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)\right)\right) \\ &= F_{\underline{X}}^+(x), \end{aligned}$$

La relation de comonotonicité correspond à la dépendance positive parfaite : toutes les composantes du vecteur dépendent d'une seule variable aléatoire. On a aussi le résultat suivant dans le contexte de variables aléatoires continues.

**Proposition 4.** Soit un vecteur de variables aléatoires continues  $\underline{X}$  de marginales  $F_{X_1}, \dots, F_{X_d}$ , alors les composantes de  $\underline{X}$  sont comonotones si et seulement si :

$$X_i = F_{X_i}^{-1}\left(F_{X_j}(X_j)\right),$$

pour  $i, j \in 1, \dots, d$  avec  $i \neq j$ .

### Démonstration

Sans perte de généralité, on fixe  $i = 1$  ; Si les composantes sont comonotones, en utilisant le théorème (3), on a

$$X_i = F_{X_i}^{-1}(U) = F_{X_i}^{-1}(F_{X_1}(X_1))$$

pour  $i = 1, \dots, d$ .

L'implication inverse se démontre de façon similaire.

## 1.8 Mesures de dépendance

Il existe de nombreuses approches pour décrire et mesurer la dépendance entre les variables aléatoires conjointement distribuées. Souvent, on utilise le coefficient de corrélation linéaire de Pearson défini dans la section suivante.[28]

### 1.8.1 Coefficient de corrélation linéaire de Pearson

**Définition .** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de variances finies ; le coefficient de corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$  est donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Où  $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X, Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$  est la covariance entre  $X$  et  $Y$ .

Il s'agit d'un coefficient de corrélation linéaire permettant de mesurer seulement la dépendance linéaire. Il peut être utilisé pour certaines distributions de variables aléatoires comme la loi Normale. Pour d'autres distributions, le coefficient de corrélation linéaire offre une interprétation limitée.

On peut trouver une discussion détaillée dans Embrechts [30] , Lindskog [45] , et McNeil [48] pour les limites du coefficient de corrélation comme mesure de dépendance.

Une corrélation nulle n'est pas toujours équivalente à l'indépendance. Par exemple, considérons  $X \sim N(0, 1)$  et  $Y = X^2$ , alors

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X.X^2) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) = 0$$

Donc  $\rho(X, Y) = 0$ , bien que  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires liées, elles ont une corrélation nulle.

La corrélation linéaire est invariante par transformation linéaire, mais pas pour toutes les transformations croissantes, par exemple  $\log(X)$  et  $\log(Y)$  ont une corrélation différente de celle entre  $X$  et  $Y$ .

Supposons que nous avons un échantillon  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ , la version empirique du coefficient de corrélation de Pearson est donnée par :

$$\rho_n(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)S_x S_y},$$

où  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont les moyennes des échantillons de  $X$  et de  $Y$ ,  $S_x$  et  $S_y$  sont les écarts-types de l'échantillon de  $X$  et de  $Y$  tels que :

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

et

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

La corrélation de Pearson peut être exprimée en fonction des copules comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 5.** *Si  $C$  désigne la copule des variables  $X$  et  $Y$ , la corrélation de Pearson  $\rho(X, Y)$  a pour expression :*

$$\rho(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dF_1^{-1}(u) dF_2^{-1}(v)$$

### Démonstration

En effet ;

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [H(x, y) - F(x)G(y)] dx dy \end{aligned}$$

où  $H$  est la distribution jointe de  $X$  et  $Y$ . On applique le changement de variable suivant :  $u = F(x)$  et  $v = G(y)$  et on démontre le résultat de la proposition.

On remarque que la copule ne permet pas de déduire le coefficient de corrélation. En effet, les distributions marginales sont nécessaires.

## 1.8.2 Tau de Kendall et rho de Spearman

Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont deux mesures de concordance bien connues en statistique [40]. Elles donnent une mesure de la corrélation entre les rangs des observations, à la différence du coefficient de corrélation linéaire qui mesure la corrélation entre les valeurs des observations. Elles offrent par ailleurs l'avantage de s'exprimer simplement en fonction de la copule associée au couple de variables aléatoires. Ces notions figurent dans plusieurs travaux comme Cadoux et al [15], Embrechts et al [30], Demarta et McNeil [23] et Lindskog et al [45]. Pour introduire le tau de Kendall et le rho de Spearman, on considère d'abord la notion de concordance présentée dans la définition suivante.

### 1.8.3 Notion de concordance

La notion de concordance/discordance est essentielle à la compréhension de la définition de ces mesures.

**Définition .** Une paire  $(X, Y)$  de variables aléatoires est concordante si une grande valeur de  $X$  est souvent associée à une grande valeur de  $Y$ , et si une petite valeur de  $X$  a de fortes chances d'être liée à une petite valeur de  $Y$ .

En termes mathématiques, la nature des paires  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  est dite :

1. **Concordantes** si  $:(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0 \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 < y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 > y_2)$
2. **Discordantes** si  $:(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0 \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 > y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 < y_2)$

Plus généralement soit  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  un échantillon de  $n$  observations d'un couple  $(X, Y)$ ; il existe  $C_n^2$  paire de distributions de couples  $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$  qui sont soit concordantes, soit discordantes.

#### La mesure de concordance

**Définition .** Une mesure numérique d'association  $k$  entre deux variables aléatoires continues  $X_1$  et  $X_2$ , de copule  $C$ , est une mesure de concordance si elle satisfait les propriétés suivantes :

1.  $-1 \leq k_{X, -X} \leq k_C \leq k_{X, X} = 1$ ,
2.  $k_{X_1, X_2} = k_{X_2, X_1}$ ,
3. Si  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, alors  $k_{X_1, X_2} = 0$ ,
4.  $k_{-X_1, X_2} = k_{X_1, -X_2} = -k_{X_1, X_2}$
5. Si  $C_1, C_2$  sont deux copules telles que  $C_1 < C_2$  alors on a :  $k_{C_1} \leq k_{C_2}$ ,
6. Si  $(X_{1,m}, X_{2,m})$  est une suite de variables aléatoires continues de copule  $C_m$  et si  $C_m$  converge vers  $C$  alors :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} k_{C_m} = k_C$$

**Définition .** On appelle mesure de concordance et de discordance entre les couples aléatoires  $(X_1, Y_1)$  et  $(X_2, Y_2)$ , la quantité notée  $Q$  définie par

$$Q = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

Il s'agit de la différence entre les probabilités de concordance et de discordance entre ces deux couples.

**Théorème .** [31] Soient  $(X_1, Y_1)$  et  $(X_2, Y_2)$  deux vecteurs aléatoires indépendants continus de fonctions de répartition conjointes respectives  $H_1$  et  $H_2$ .

Soient  $F$  et  $G$  les marginales associées, respectivement, à  $X_1, X_2$  et à  $Y_1, Y_2$ .

Notons  $C_1$  et  $C_2$  les copules associées respectivement à  $H_1$  et à  $H_2$  données par

$$H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y)) \quad \text{et} \quad H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$$

Si  $(X_1, Y_1)$  et  $(X_2, Y_2)$  ont les mêmes marges, alors

$$Q := Q(C_1, C_2) = 4 \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1$$

## Démonstration

Puisque toutes les variables aléatoires sont continues, alors

$$\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\} = 1 - \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) \geq 0\},$$

et donc

$$Q = 2\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) \geq 0\} - 1$$

Étudions le premier terme

$$\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} = \mathbb{P}\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\} + \mathbb{P}\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\}$$

Par intégration de ces quantités

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\} &= \mathbb{P}\{X_2 < X_1, Y_2 < Y_1\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\{X_2 < x, Y_2 < y\} dH_1(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\{X_2 < x, Y_2 < y\} dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)) \end{aligned}$$

Par changement de variables

$$u = F(x) \quad \text{et} \quad v = G(y)$$

On obtient

$$\mathbb{P}\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\} = \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

De façon similaire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\} &= \mathbb{P}\{X_2 > X_1, Y_2 > Y_1\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\{X_2 > x, Y_2 > y\} dH_1(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \{1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))\} dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int_{[0,1]^2} \{1 - u - v + C_2(u, v)\} dC_1(u, v) \end{aligned}$$

où  $U$  et  $V$  sont des variables aléatoires uniformes; or  $E(U) = E(V) = 1/2$  et par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \\ &= \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= 2\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - 1 \\ &= 2(\mathbb{P}\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\} + \mathbb{P}\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\}) \\ &= 2\left(\int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) + \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)\right) - 1 \\ &= 4 \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1 \end{aligned}$$

$$Q = 4 \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1$$

**Corollaire 2.** Soient  $C_1, C_2$  deux copules, et  $Q$  une mesure de concordance et de discordance, alors

1)  $Q$  est symétrique :

$$Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$$

2)  $Q$  est non-décroissante dans chaque argument :

si  $C_1 < C'_1$  et  $C_2 < C'_2$  pour tous  $(u, v) \in [0, 1]^2$ , alors

$$Q(C_1, C_2) \leq Q(C'_1, C'_2)$$

3) On peut remplacer la copule  $C$  par la copule de survie  $\hat{C}$  dans  $Q$ ,

$$Q(C_1, C_2) = Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$$

**Exemple 1.** On calcule  $Q$  pour les copules  $M$  "copule de borne supérieure de Fréchet",  $W$  "copule de borne inférieure de Fréchet" et  $\Pi$  "copule d'Indépendance".

Le support de  $M$  est la diagonale  $u = v$  dans  $[0, 1]^2$ ; Soit  $g$  une fonction intégrable, est telle que

$$\int_0^1 \int_0^1 g(u, v) dM(u, v) = \int_0^1 g(u, u) du$$

Alors

$$Q(M, M) = 4 \int_0^1 \int_0^1 \min(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u du - 1 = 1$$

$$Q(M, \Pi) = 4 \int_0^1 \int_0^1 uv dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u^2 du - 1 = \frac{1}{3}$$

$$Q(M, W) = 4 \int_0^1 \int_0^1 \max(u + v - 1, 0) dM(u, v) - 1 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 (2u - 1) du - 1 = 0$$

De la même façon, du fait que le support de  $W$  est la diagonale  $v = 1 - u$ , alors

$$\int_0^1 \int_0^1 g(u, v) dW(u, v) = \int_0^1 g(u, 1 - u) du$$

Donc

$$Q(M, \Pi) = 4 \int_0^1 \int_0^1 uv dW(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u(1 - u) du - 1 = \frac{-1}{3}$$

et

$$Q(M, W) = 4 \int_0^1 \int_0^1 \max(u + v - 1, 0) dW(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 0 du - 1 = -1$$

Du fait aussi que  $d\Pi(u, v) = dudv$ , alors

$$Q(\Pi, \Pi) = 4 \int_0^1 \int_0^1 uv d\Pi(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 \int_0^1 uv dudv - 1 = 0$$

### Remarque

Soit  $C$  une copule quelconque, nous avons toujours

$$Q(C, M) \in [0, 1], Q(C, W) \in [-1, 0] \text{ et } Q(C, \Pi) \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

## 1.8.4 le tau de Kendall

**Définition .** Soient  $(X_1, Y_1)$  et  $(X_2, Y_2)$  deux vecteurs aléatoires continus indépendants et identiquement distribués de fonction de répartition conjointe  $F$ . Le tau de Kendall [40] du vecteur aléatoire  $(X, Y)$  noté  $\tau(X, Y)$  est défini par :

$$\tau(X, Y) = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

Le tau de Kendall n'est autre que la différence entre la probabilité de concordance et celle de discordance qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Le tau de Kendall est symétrique, c'est-à-dire :  $\tau(X_1, X_2) = \tau(X_2, X_1)$ ,
2.  $-1 \leq \tau \leq +1$ ,
3. Si  $X$  et  $Y$  sont comonotones alors  $\tau = 1$  ( concordance parfaite),
4. Si  $X$  et  $Y$  sont antimonotones alors  $\tau = -1$  ( discordance parfaite),
5. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $\tau = 0$ ,
6. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions strictement croissantes, alors  $\tau(\alpha(X), \beta(Y)) = \tau(X, Y)$ ,
7. Lorsque  $\tau = 0$  les variables  $X$  et  $Y$  ne sont pas forcément indépendantes.

Le tau de Kendall peut être déduit à partir de la copule, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 6.** Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire continu de fonction copule  $C$ . Le tau de Kendall  $\tau(X, Y)$  a pour expression

$$\begin{aligned} \tau(X, Y) &= Q(C, C) \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) c(u, v) du dv - 1 \\ &= 4\mathbb{E}(C(U, V)) - 1, \end{aligned}$$

### Démonstration

On note  $U = F_X(X)$ ,  $U' = F_X(X')$ ,  $V = F_Y(Y)$ ,  $V' = F_Y(Y')$  dont les lois sont uniformes sur  $[0, 1]$ . On a

$$\begin{aligned} \tau(X, Y) &= \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') \geq 0\} - \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') < 0\} \\ &= 2\mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') \geq 0\} - 1 \\ &= 2\mathbb{P}\{(X - X') \geq 0, (Y - Y') \geq 0\} + 2\mathbb{P}\{(X - X') < 0, (Y - Y') < 0\} - 1 \\ &= 4\mathbb{P}\{X \geq X', Y \geq Y'\} - 1 \\ &= 4\mathbb{P}\{F_X(X) \geq F_X(X'), F_Y(Y) \geq F_Y(Y')\} - 1 \\ &= 4\mathbb{P}\{U \geq U', V \geq V'\} - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^u \int_0^1 \int_0^v c(u, v) c(u', v') du dv du' dv' - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) c(u, v) du dv - 1 \\ &= 4\mathbb{E}(C(U, V)) - 1 \end{aligned}$$

TABLE 1.1 – Tau de Kendall de Quelques copules

Copule	Tau de Kendall
Normale	$2\pi^{-1}\arcsin(\rho)$
Gumbel	$\frac{(\theta-1)}{\theta}$
Frank	$\frac{-3}{\theta} + \frac{4D_k(\theta)}{\theta}$
Clayton	$\frac{\theta}{(\theta+2)}$

**Exemple 2.** Nous présentons dans le tableau suivant le tau de Kendall de quelques copules : où  $D_k(\theta) = \int_0^\theta \frac{x}{\theta} \times \frac{1}{e^x-1} dx$  est la fonction de Debye

### Tau de Kendall empirique

**Définition .** Soit un échantillon de taille  $n$  de données bivariées  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ . Définissons les nombres  $c$  et  $d$  comme étant respectivement les nombres de paires concordantes et discordantes dans l'échantillon. On définit la version empirique du tau de Kendall [40] par

$$\tau_n = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{C_2^n}$$

avec  $C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!}$

**Exemple 3.** En reprenant l'exemple précédent, on trouve que

$$\tau_n = \frac{3 - 3}{3 + 3} = \frac{0}{C_2^4} = 0$$

### Remarque

Un estimateur empirique du tau de Kendall est donné par

$$\hat{\tau}_n(X, Y) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \text{sign}\{(x_j - x_i)(y_j - y_i)\}$$

La fonction  $\text{sign}\{(x_j - x_i)(y_j - y_i)\}$  égale à 1 si  $(x_j - x_i)(y_j - y_i)$  est positif, égale à  $-1$  si  $(x_j - x_i)(y_j - y_i)$  est négatif et égale à 0 si  $(x_j - x_i)(y_j - y_i)$  est nul. L'autre mesure de

concordance, qui est très utilisée en pratique, est le rho de Spearman.

Nous donnons dans ce qui suit, sa définition et quelques propriétés.

### 1.8.5 le rhô de Spearman

**Définition .** Soient  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  et  $(X_3, Y_3)$  des couples indépendants du vecteur aléatoire  $(X, Y)$ . Le coefficient de corrélation de Spearman [56], noté  $\rho_s$  est défini par

$$\rho_s = 3(\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0])$$

On peut exprimer le rho de Spearman en fonction du coefficient de corrélation entre deux variables uniformes. La proposition suivante montre ce résultat.

**Proposition 7.** Le rho de Spearman de deux variables  $X$  et  $Y$  est égal au coefficient de corrélation entre les variables  $F(X)$  et  $F(Y)$ .

$$\rho_s(X, Y) = \rho(F(X), F(Y)).$$

### Démonstration

D'après Schweizer et Wolff [1981] on a

$$\begin{aligned}\rho_s(X, Y) &= 12 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [H(x, y) - F(x)G(y)] dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(F(X))\text{Var}(F(Y))}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [H(x, y) - F(x)G(y)] dx dy\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

On peut aussi écrire le rho de Spearman en fonction de la copule comme le montre la proposition suivante

**Proposition 8.** *Si  $C$  désigne la copule des variables  $X$  et  $Y$ , le rho de Spearman  $\rho_s(X, Y)$  a pour expression*

$$\begin{aligned}\rho_s(X, Y) &= 3Q(C, \Pi) \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 u.v \, dC(u, v) - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) \, dudv - 3\end{aligned}$$

### Démonstration

Soient  $U = F_X(X)$  et  $V = F_Y(Y)$  deux variables aléatoires de la loi uniforme sur  $[0, 1]$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U) &= \mathbb{E}(V) = \int_0^1 u \, du = \frac{1}{2} \\ \text{Var}(U) &= \text{Var}(V) = \int_0^1 u^2 \, du - \left( \int_0^1 u \, du \right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ \rho_s(X, Y) &= \frac{E(UV) - E(U)E(V)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(V)}}\end{aligned}$$

On sait que  $\int_0^1 \int_0^1 uv \, dC(u, v)$  représente l'espérance de  $(U, V)$ , alors

$$\begin{aligned}\rho_s(X, Y) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv \, dC(U, V) - 3 \\ &= 12E(UV) - 3 \\ &= \frac{E(UV) - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} \\ &= \frac{E(UV) - E(U)E(V)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(V)}}\end{aligned}$$

D' une part, en utilisant la définition (11), on trouve

$$\begin{aligned}\rho_s(X, Y) &= \rho(F(X), F(Y)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(F(X))\text{Var}(F(Y))}} \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}\rho_s(X, Y) &= \rho(U, V) \\ &= \frac{\text{Cov}(u, V)}{\sigma_U \sigma_V} \\ &= 12 \text{Cov}(U, V) \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3.\end{aligned}$$

### Remarque

Puisque le rho de Spearman est défini en fonction d'une copule paramétrique  $C$ , nous notons  $\rho_s(X, Y)$  par  $\rho_\theta$  :

**Exemple 4.** a) Soit  $C_\theta$  une copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern, de paramètre  $\theta \in [-1, 1]$ , alors

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v),$$

donc

$$\int_0^1 \int_0^1 C_\theta(u, v) dudv = \frac{1}{4} + \frac{\theta}{36}$$

Le rho de Spearman est donc

$$\rho_\theta = \frac{\theta}{3}$$

b) Soit  $C_{\alpha, \beta}$  la copule de Marchall Olkin, de paramètres  $\alpha > 0$  et  $\beta < 1$  définie par

$$C_{\alpha, \beta} = \begin{cases} u^{1-\alpha}v & \text{et } u^\alpha \geq v^\beta \\ uv^{1-\beta} & \text{et } u^\alpha \leq v^\beta \end{cases}$$

Alors

$$\int_0^1 \int_0^1 C_{\alpha, \beta}(u, v) dudv = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha + \beta}{2\alpha - \alpha\beta + 2\beta} \right)$$

Le rho de Spearman est alors égal à

$$\rho_{\alpha, \beta} = \frac{3\alpha\beta}{2\alpha - \alpha\beta + 2\beta}$$

c) Si  $(X, Y)$  est un couple aléatoire Gaussien de corrélation  $R$ , alors

$$\rho_R = \frac{6}{\pi} \arcsin \left( \frac{R}{2} \right)$$

Les propriétés du  $\rho_s$  sont les suivantes :

1.  $\rho_s$  existe toujours

2.  $-1 \leq \rho_s \leq +1$
3. Si  $X$  et  $Y$  sont comonotones, alors  $\rho_s = 1$
4. Si  $X$  et  $Y$  sont antimonotones, alors  $\rho_s = -1$
5. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\rho_s = 0$
6. Il est invariant sous des transformations non linéaires strictement croissantes, c'est-à-dire :  
si  $a$  et  $b$  sont deux fonctions strictement croissantes, alors :  
 $\rho_s(a(x), b(y)) = \rho_s(x, y)$ .

### Rho de Spearman empirique

Soit un échantillon de taille  $n$  de données bivariées  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ .

La version empirique du rho de Spearman [56] est définie par :

$$\rho_n = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n R_i S_i - 3 \left( \frac{n+1}{n-1} \right)$$

Où  $R_i$  est le rang de  $X_i$  parmi les  $X_1, \dots, X_n$  et  $S_i$  le rang de  $Y_i$  parmi les  $Y_1, \dots, Y_n$ .

**Exemple 5.** On calcule  $\rho_n$  à partir de l'exemple précédent

Donc

TABLE 1.2 – Calcul de Rho de Spearman empirique

$R_i$	3	1	2	4
$S_i$	1	2	3	4

$$\rho_n = \frac{12}{4(16-1)} \sum_{i=1}^4 R_i S_i - 3 \left( \frac{5}{3} \right) = 0.2.$$

### 1.8.6 Dépendance de queue

Le concept de dépendance de queue [31] fournit une description de la dépendance au niveau des queues de distributions qui est utile pour étudier la survenance simultanée de valeurs extrêmes. C'est une mesure locale contrairement au tau de Kendall et au rho de Spearman qui mesurent la dépendance sur l'ensemble de la distribution.

**Définition .** Le coefficient de dépendance de queue inférieure "lower tail dependence coefficient" entre deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , de fonctions de répartition respectives  $F_X$  et  $F_Y$  est défini par la limite (si elle existe) :

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(X < F_X^{-1}(\alpha) | Y < F_Y^{-1}(\alpha)).$$

De même, le coefficient de dépendance de queue supérieure "upper tail dependence coefficient" est défini par la limite (si elle existe) :

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(X > F_X^{-1}(\alpha) | Y > F_Y^{-1}(\alpha))$$

On dit que  $X$  et  $Y$  sont asymptotiquement dépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution si  $\lambda_U \in ]0, 1]$ . Si  $\lambda_U = 0$  on dit que  $X$  et  $Y$  sont asymptotiquement indépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution.

La proposition suivante donne l'expression de  $\lambda_U$  et  $\lambda_L$  en fonction de la copule  $C$  de  $(X, Y)$ .

**Proposition 9.** Soient deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  de copule  $C(X, Y)$ , alors :

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}$$

et

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}.$$

**Démonstration** En effet, par définition on a :

$$\begin{aligned} \lambda_L(X, Y) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(X < F_X^{-1}(\alpha) | Y < F_Y^{-1}(\alpha)) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X < F_X^{-1}(\alpha), y < F_Y^{-1}(\alpha))}{\mathbb{P}(Y < F_Y^{-1}(\alpha))} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{C(\alpha, \alpha)}{\alpha} \end{aligned}$$

De même on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lambda_U(X, Y) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(X > F_X^{-1}(\alpha) | Y > F_Y^{-1}(\alpha)) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{\mathbb{P}(X > F_X^{-1}(\alpha), y > F_Y^{-1}(\alpha))}{\mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(\alpha))} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(\alpha) \text{ ou } y \leq F_Y^{-1}(\alpha))}{1 - \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(\alpha))} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(\alpha) + y \leq F_Y^{-1}(\alpha)) - \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(\alpha) \text{ et } Y \leq F_Y^{-1}(\alpha))}{1 - \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(\alpha))} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - (\alpha + \alpha - C(\alpha, \alpha))}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

**Exemple 6.** Pour la copule  $M$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + \min(u, u)}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + u}{1 - u} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\min(u, u)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{u}{u} \\ &= 1 \end{aligned}$$

## 1.9 Les copules usuelles

Comme nous l'avons mentionné auparavant, le théorème de Sklar nous permet de construire des fonctions de répartition multivariées à partir des marges données.

Nous présentons dans cette partie les principaux types de copules fréquemment utilisées dans la pratique, ainsi que leurs propriétés.

### 1.9.1 Copule d'indépendance

Il est bien connu que les composantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  sont indépendantes si et seulement si

$$F_X(x_1, \dots, x_d) = F_1(x_1) \times \dots \times F_d(x_d)$$

Nous définissons donc la copule d'indépendance notée par

$$\Pi^d(\mathbf{u}) = u_1 \times \dots \times u_d.$$

Où  $u_i = F_i(x_i)$

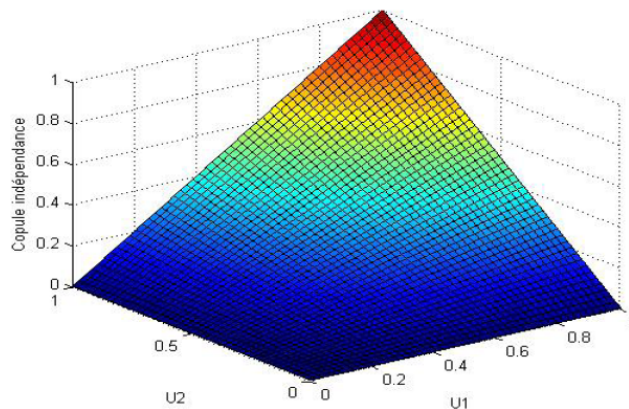


FIGURE 1.4 – Copule d'indépendance

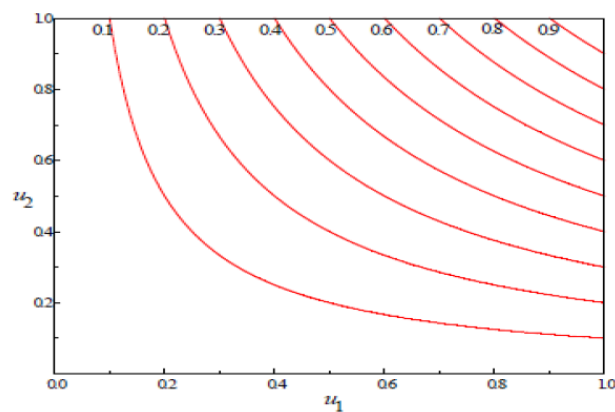


FIGURE 1.5 – Contour plot de la copule d'indépendance

On peut montrer qu'elle vérifie bien les axiomes de la définition, comme on peut aussi utiliser la caractérisation suivante :

**Proposition 10.** *Une fonction  $C$  définie sur  $[0, 1]^d$  est une fonction copule si et seulement si elle est la restriction à  $[0, 1]^d$  de la fonction de répartition d'un vecteur aléatoire  $(U_1, \dots, U_d)$  où les  $U_i$  sont uniformément distribuées sur  $[0, 1]$ .*

### Démonstration

$\Leftarrow$ ) La fonction de répartition du vecteur aléatoire  $(U_1, \dots, U_d)$  notée  $C$  s'écrit de façon unique à l'aide d'une copule  $\tilde{C}$  :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \tilde{C}(F_1(u_1), \dots, F_d(u_d)) \text{ pour tout } (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d.$$

Comme  $F_1(u_1) = u_1$ ,  $C = \tilde{C}$  donc  $C$  est une copule.

$\Rightarrow$ ) C'est la dernière partie du théorème de Sklar avec  $C$  et des  $F_i(x_i) = x_i$ .

**Proposition 11.** *Soit  $(X_1, \dots, X_d)$  un vecteur aléatoire continu de copule  $C$ .*

*Si  $f_1, \dots, f_d$  sont des fonctions strictement croissantes définies sur le supports de  $X_1, \dots, X_d$  respectivement, alors  $C$  est aussi la copule du vecteur aléatoire continue  $(f_1(X_1), \dots, f_d(X_d))$ .*

## 1.9.2 Les copules elliptiques

Les copules elliptiques sont définies à partir des lois elliptiques. Dans ce qui suit, nous donnons quelques définitions de la distribution elliptique ainsi que deux exemples classiques de cette famille de copules : la copule Gaussienne et la copule de Student.

**Définition .** *Un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  est de distribution elliptique s'il admet la représentation suivante :*

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{U}$$

où :

- $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbf{R}^d$
- $\mathbf{U}$  est un vecteur aléatoire uniforme sur la sphère unité de  $\mathbf{R}^d$
- $\mathbf{R}$  est un vecteur aléatoire indépendant de  $\mathbf{U}$
- $\mathbf{A}$  est une matrice de dimension  $d \times d$  telle que  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$  est non singulière.

**Définition .** *Soit  $M_d(\mathbf{R})$  l'ensemble des matrices carrées réelles de taille  $d^2$ . Une loi continue est dite elliptique de paramètre de position  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbf{R}^d$  et de matrice symétrique définie positive  $\boldsymbol{\Sigma} \in M_d(\mathbf{R})$  si sa densité  $f$  peut s'écrire pour tout  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$  :*

$$f(x) = (\det \boldsymbol{\Sigma})^{-\frac{1}{2}} g((x - \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(x - \boldsymbol{\mu})')$$

où l'on désigne par  $z'$  la transposée de  $z$  et  $g$  est une fonction à valeurs positives vérifiant  $\int_{\mathbf{R}^d} g(xx') dx = 1$ .

On note  $\xi(\mu, \Sigma, g)$  cette famille de lois (dites elliptiques car les courbes de niveaux de la densité sont en général des ellipses).

La loi est dite sphérique si

$$\Sigma = kI_d$$

où  $k > 0$  et  $I_d$  est la matrice unité de  $M_d(\mathbb{R})$

Les lois elliptiques associées à la même fonction  $g$  font partie de la même famille elliptique, dans laquelle on distingue le représentant standard (centré réduit) pour lequel  $\mu = 0$  et  $\Sigma = I_d$ . On appellera par la suite la matrice  $\Sigma$  la "matrice de corrélation".

La loi d'un vecteur gaussien est un exemple classique de loi elliptique, associé au choix de

$$g(y) = (2\pi)^{-d/2} \mathbf{exp}(-y/2)$$

Ces lois possèdent comme les vecteurs gaussiens, des propriétés algébriques intéressantes ; la propriété la plus importante réside dans le fait que les lois elliptiques forment une classe stable par la transformation affine.

Les copules elliptiques sont définies à partir des familles de lois elliptiques ; une copule est dite elliptique si elle est la copule d'une loi elliptique. On en considère ici deux cas particuliers, la copule gaussienne et la copule de Student.

### 1.9.2.1 Copules Gaussiennes

Soit  $\Phi_R$  la distribution normale standard multivariée de matrice de corrélation  $R$  ; La copule gaussienne est alors définie de la façon suivante

$$C_R^{Gau}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$$

où

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \rho_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{d1} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i)}\sqrt{Var(X_j)}}$$

et

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

est la fonction de répartition de la loi normale  $N(0, 1)$  et  $\Phi^{-1}(t)$  sa fonction quantile, vérifiant

$$\Phi(\Phi^{-1}(t)) = t \quad \text{pour } 0 < t < 1.$$

À partir de la définition de la copule gaussienne, on peut facilement déterminer la densité correspondante en utilisant la représentation canonique :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^t R^{-1} x\right) = c_R^{Ga}(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_d)) \times \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right)\right)$$

Où  $|R|$  est le déterminant de  $R$ . On déduit que

$$c_R^{Ga}(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_d)) = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{d/2}|R|^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}x^t R^{-1}x)}{\prod_{i=1}^d \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x_i^2) \right)}$$

En posant  $u_i = \Phi(x_i)$ , alors  $x_i = \Phi^{-1}(u_i)$ . La densité peut être réécrite comme suit

$$c_R^{Ga}(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_d)) = \frac{1}{|R|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^t (R^{-1} - I)\xi\right)$$

Où  $\xi = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))^t$ , avec  $I$  est la matrice identité de dimension  $(d \times d)$ .

Dans le cas bivarié, on note  $\rho_{12}$  défini précédemment par  $\rho$ , nous obtenons donc

$$c_\rho^{Ga}(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\rho\xi_1\xi_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2}\right)$$

Nous en déduisons que

$$C_\rho^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{u_1} \int_{-\infty}^{u_2} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\rho\xi_1\xi_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2}\right) ds dt$$

Avec  $\xi_1 = \Phi^{-1}(s)$  et  $\xi_2 = \Phi^{-1}(t)$ .

Si nous utilisons la décomposition canonique d'une distribution bivariée, une autre expression de  $C_\rho^{Ga}$  est

$$C_\rho^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{s^2 + 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt$$

Aussi, on a 1.  $C_\rho^{Ga}(u_1, u_2) \rightarrow W(u_1, u_2)$  quand  $\rho \rightarrow -1$

2.  $C_\rho^{Ga}(u_1, u_2) \rightarrow M(u_1, u_2)$  quand  $\rho \rightarrow 1$

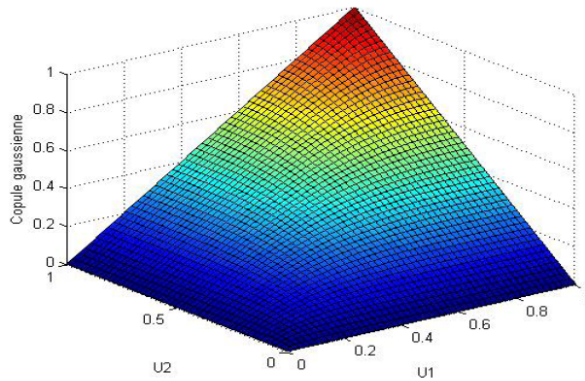


FIGURE 1.6 – Copule Gaussienne

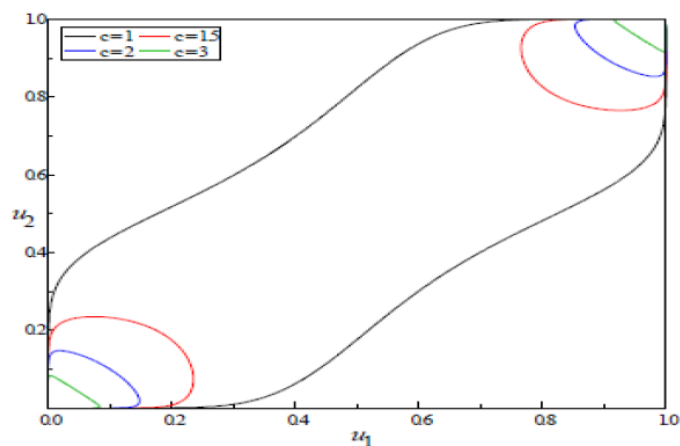


FIGURE 1.7 – Contour plot de la copule gaussienne de paramètre  $\rho = 0.5$

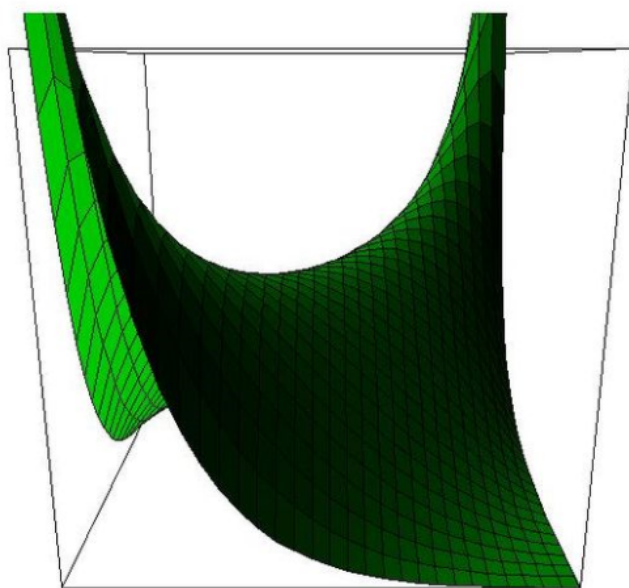


FIGURE 1.8 – La densité de la copule Gaussienne

### 1.9.2.2 Copules de Student

Comme pour la copule gaussienne, la copule  $t$  (ou la copule de Student) est la fonction de dépendance associée à la distribution de Student multidimensionnelle.

Soit  $t_{R,\nu}$  la distribution de Student multivariée standard à  $\nu$  degrés de liberté et de matrice de corrélation  $R$  définie par

$$t_{R,\nu} = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\nu\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(1 + \frac{Y^t R^{-1} Y}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} dy_1 \dots dy_d$$

La copule de Student est alors paramétrée par la matrice de corrélation  $R$  et le degré de liberté  $\nu$ ; elle est définie comme suit

$$\begin{aligned}
C_{R,\nu}(u_1, \dots, u_d) &= t_{R,\nu}(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_d)), \\
&= \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\nu\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(1 + \frac{Y^t R^{-1} Y}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} dx_1 \dots dx_d
\end{aligned}$$

Où

$$t_\nu(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{\Gamma(\nu+2)\sqrt{\nu\pi}} \left(1 + \frac{s^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} ds$$

est la fonction de répartition univariée de Student et  $t_\nu^{-1}$  est son inverse généralisée. La densité de  $C_{R,\nu}^\nu$  est donnée par

$$c_{R,\nu}(u_1, \dots, u_d) = |R|^{-1} \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}\right)^d \left(\frac{(1 + \frac{1}{\nu}\xi^t R^{-1} \xi)^{-\frac{\nu+d}{2}}}{\prod_{i=1}^d (1 + \frac{\xi_i^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}}\right)$$

Où  $\xi_i = t_\nu^{-1}(u_i)$ .

Dans le cas bivarié, la copule de Student est paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire  $\rho$  et le degré de liberté  $\nu$ , nous en déduisons les expressions de la copule et de la densité suivantes

$$C_{\rho,\nu}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} ds dt,$$

Donc

$$c_{\rho,\nu}(u_1, u_2) = \rho^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2}) \left(1 + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\rho\xi_1\xi_2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})^2 \prod_{i=1}^2 (1 + \frac{\xi_i^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}}$$

Où  $\xi_1 = t_\nu^{-1}(u_1)$  et  $\xi_2 = t_\nu^{-1}(u_2)$

Notons que si le degré de liberté  $\nu \rightarrow \infty$ , alors la copule de Student converge vers la copule gaussienne.

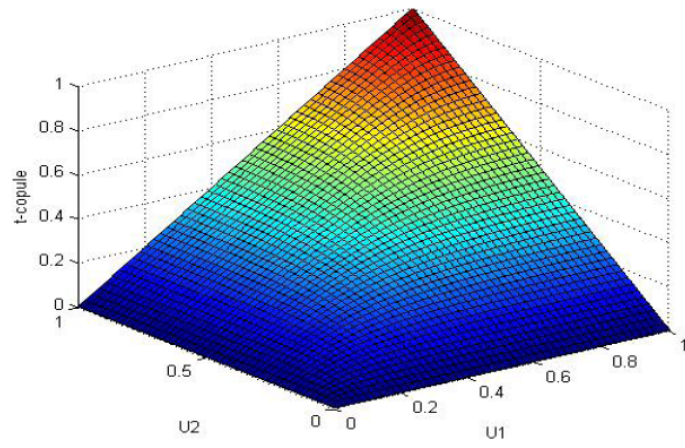


FIGURE 1.9 – Copule de Student

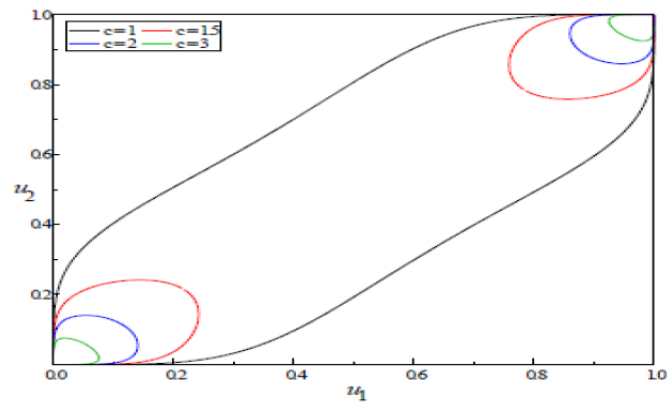


FIGURE 1.10 – Contour plot de la copule de student avec  $\rho = 0.5$  et  $\mu=8$ .

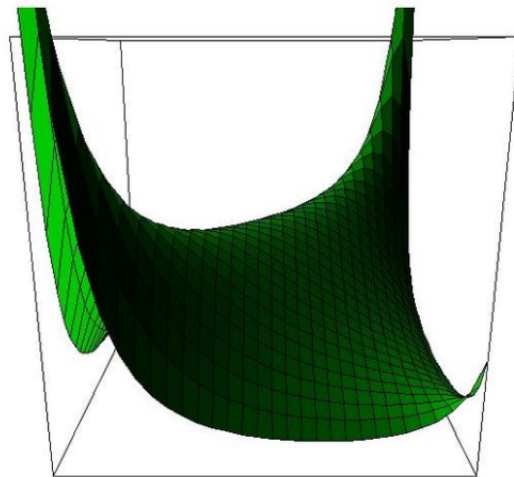


FIGURE 1.11 – la densité de t-copule

### 1.9.3 Copules Archimédiennes

Cette famille de copules a été ainsi nommée par Ling [46]; La modélisation statistique à l'aide de copules Archimédiennes a fait l'objet de nombreux travaux, et ce, depuis les résultats de Genest et MacKay [8] et joue un rôle important. D'une part, elles permettent de construire une grande variété de familles de copules et donc, de représenter une grande variété de structures de dépendance. D'autres part, les copules ainsi générées ont des formes analytiques fermées et sont faciles à simuler. En effet, contrairement aux copules gaussiennes et aux copules de Student, les copules archimédiennes ont le grand avantage de décrire des structures de dépendance très diverses dont notamment les dépendances dites asymétriques où les coefficients de queue inférieure et de queue supérieure diffèrent. Pour plus d'éléments sur cette famille de copules le lecteur peut se référer à l'excellent ouvrage de Nelsen [51].

Plusieurs raisons justifient l'utilisation de ce type de copules entre autres :

- Grande variété de familles paramétriques.
- Les propriétés particulières et intéressantes que cette classe possède.
- La facilité avec laquelle peuvent être construites et simulées.
- La grande variété des différentes structures de dépendance.

La définition suivante décrit la forme générale des copules Archimédiennes.

**Définition .** Une fonction  $\varphi$  strictement décroissante, continue, convexe et définie sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, \infty]$ , telle que  $\varphi(1) = 0$ , alors  $\varphi$  est dite générateur.

Son pseudo-inverse  $\varphi^{[-1]}$  est donnée par

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

#### Remarque

Si  $\varphi(0) = \infty$ , alors le générateur est dit strict et on peut remplacer le pseudo-inverse  $\varphi^{[-1]}$  par l'inverse ordinaire  $\varphi^{-1}$ .

**Théorème .** [51] Soit  $\Lambda$  une loi portée sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\phi$  sa transformée de Laplace

$$\phi(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \Lambda(dx)$$

$\phi$  est strictement décroissante et

$$\begin{cases} \phi(0) = 1 \\ \phi(+\infty) = 0; \end{cases}$$

alors

$$C^A(u_1, \dots, u_d) = \phi(\phi^{-1}(u_1) + \dots + \phi^{-1}(u_d))$$

est une fonction copule.

#### Démonstration

On va construire un vecteur aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$  admettant  $C^A$  pour copule. On part d'une variable aléatoire  $Y$  de loi  $\Lambda$  puis conditionnellement à  $Y$  on construit  $d$  variables aléatoires

indépendantes de fonction de répartition  $\mathbb{P}\{X_i \leq x/Y\} = e^{-Y\phi^{-1}(x)}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d\} &= \mathbb{E}[\mathbb{P}\{X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d/Y\}] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^d e^{-Y\phi^{-1}(x_i)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-Y\sum_{i=1}^d \phi^{-1}(x_i)}\right] \\ &= \phi(\phi^{-1}(x_1) + \dots + \phi^{-1}(x_d))\end{aligned}$$

D'autre part, les  $X_i$  étant de lois uniformes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_i \leq x\} &= \mathbb{E}[\mathbb{P}\{X_i \leq x/Y\}] \\ &= \mathbb{E}[e^{-Y\phi^{-1}(x)}] \\ &= \phi\phi^{-1}(x) = x\end{aligned}$$

On voit bien que la transformée de Laplace est un générateur.

**Théorème . [14]** Soit  $\varphi$  un générateur et  $\varphi^{[-1]}$  son pseudo-inverse, alors la copule archimédienne bivariable est définie par

$$C^A(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}\left(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)\right)$$

La copule archimédienne bivariable a les propriétés suivantes :

1. Symétrique, i.e :

$$C^A(u_1, u_2) = C^A(u_2, u_1)$$

2. Associative, i.e :

$$C^A(C^A(u_1, u_2), u_3) = C^A(u_1, C^A(u_2, u_3))$$

3. Sa densité est donnée par

$$C^A(u_1, u_2) = \frac{\varphi''(C^A(u_1, u_2))\varphi'(u_1)\varphi'(u_2)}{[\varphi'(C^A(u_1, u_2))]}$$

### Remarque

1. La copule d'indépendance  $\prod(u_1, u_2)$  est une copule Archimédienne dont le générateur est  $\varphi(t) = -\ln(t)$ .

Son pseudo-inverse est  $\varphi^{-1}(t) = \exp(-t)$  ; En effet :

$$\begin{aligned}C^A(u_1, u_2) &= \exp[-(\ln(u_1)) + (-\ln(u_2))] \\ &= u_1 \times u_2 \\ &= \prod(u_1, u_2)\end{aligned}$$

2. la copule  $W(u_1, u_2)$  est aussi une copule archimédienne dont le générateur est :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - t, & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

et son pseudo-inverse est  $\varphi^{-1}(t) = \max(1 - t, 0)$

$$\begin{aligned}C^A(u_1, u_2) &= \max(u_1 + u_2 - 1, 0) \\ &= W(u_1, u_2)\end{aligned}$$

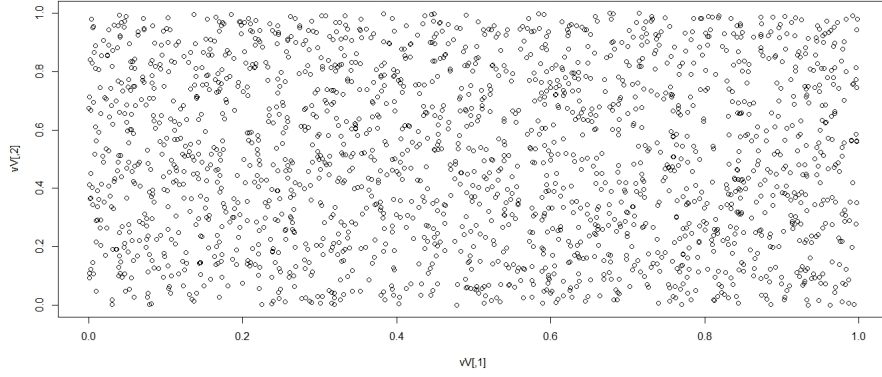


FIGURE 1.12 – Copule d'indépendance

Dans la suite de cette section, nous présentons les trois familles de copules Archimédiennes les plus utilisées en pratique. Cela concerne la copule de Gumbel, la copule de Clayton et celle de Frank.

### 1.9.4 Copules Archimédiennes bivariées avec un seul paramètre

Dans cette section, nous présentons quelques exemples de copules archimédiennes bivariées avec un seul paramètre dit paramètre de dépendance.

#### 1.9.4.1 Famille de Gumbel-Hougaard (1960)

**Définition .** La copule de Gumbel [44] appartient à la famille des copules Archimédiennes, elle est plus adéquate aux données qui représentent une forte dépendance à droite et une faible à gauche. Elle est définie par

$$C^{Gu}(u_1, u_2; \theta) = \exp(-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}),$$

avec  $\theta > 1$  et  $u \in ]0, 1]$  et son générateur donné par :

$$\varphi(u) = (-\ln(u))^\theta$$

En utilisant la règle de l'Hôpital, nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + u^{2^{1/\theta}}}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{-2 + 2^{1/\theta} u^{2^{1/\theta} - 1}}{-1} \\ &= 2 - 2^{1/\theta} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u^{2^{1/\theta}}}{u} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La copule de Gumbel possède donc une dépendance de queue supérieure mais pas de dépendance de queue inférieure. Le tau de Kendall de la copule de Gumbel s'écrit :

$$\begin{aligned}\tau_\theta &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left( \left[ \frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} dt \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\theta}.\end{aligned}$$

### Remarque

Les cas limites sont :

1- Si  $\theta \rightarrow 1$ , on obtient la copule d'indépendance  $\Pi$  ; l'indépendance des marginales est obtenue quand  $\theta$  tend vers 1.

2- Si  $\theta \rightarrow +\infty$ , on obtient la copule de borne supérieure de Fréchet-Hoffding  $M$ , donc la structure de dépendance approche son maximum quand  $\theta$  croit vers  $+\infty$ .

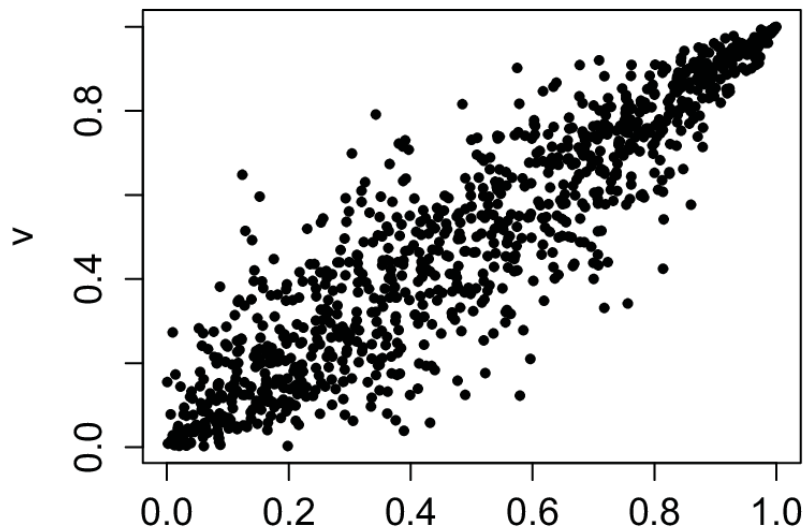


FIGURE 1.13 – Copule de Gumbel

### 1.9.4.2 Copule de Clayton (1978)

Cette copule a été introduite par Clayton [21] et étudiée par Oakes [49], nommée aussi copule de Cook-Johnson ou de Kimeldorf-Sampson, c'est une copule archimédienne dont le générateur est défini, pour  $\theta > 0$  et pour  $u \in ]0, 1]$ , par :

$$\varphi_\theta(u) = \frac{1}{\theta}(u^{-\theta} - 1),$$

La copule de Clayton bidimensionnelle s'écrit donc sous la forme

$$C^{Cl}(u_1, u_2; \theta) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$$

de paramètre de dépendance

$$\theta \in [-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$$

et de pseudo-inverse

$$\varphi_\theta^{-1}(u) = (u + 1)^{-1/\theta}$$

Cette copule est différentiable et sa densité est donnée par :

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2; \theta) &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{\partial C(u_1, u_2; \theta)}{\partial u_1} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left[ \frac{-1}{\theta} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} (-\theta u_1^{-\theta-1}) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left[ (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1-\theta}{\theta}} (u_1^{-\theta-1}) \right] \\ &= \frac{-\theta - 1}{\theta} \left[ (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1-\theta}{\theta}-1} (-\theta u_2^{-\theta-1}) (u_1^{-\theta-1}) \right] \\ &= (\theta + 1)(u_1 u_2)^{-\theta-1} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2}. \end{aligned}$$

La copule de Clayton présente une dépendance asymptotique à gauche (sur les petites valeurs) ce qui n'est pas le cas de la copule gaussienne.

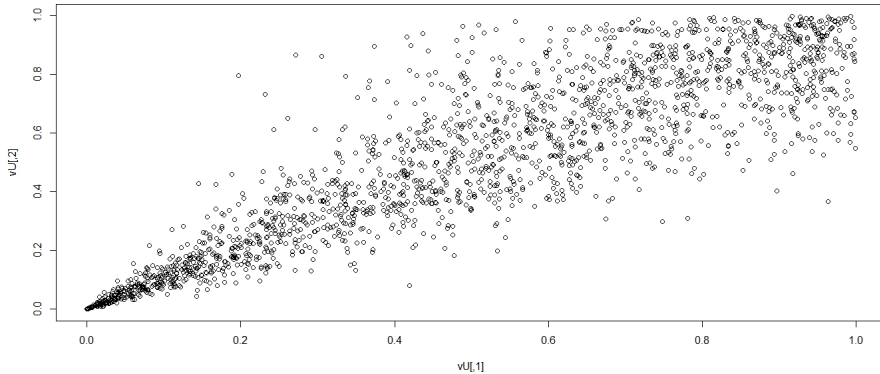


FIGURE 1.14 – Copule de Clayton

En utilisant la règle de l'Hôpital, nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + (2u^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{-2 + 2(2u^{-\theta} - 1)^{(-1/\theta)-1} u^{-\theta-1}}{-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(2u^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} (2 - u^\theta)^{-1/\theta} \\ &= 2^{-1/\theta}\end{aligned}$$

La copule de Clayton possède donc une dépendance de queue inférieure mais pas de dépendance de queue supérieure.

D'après la formule :

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt,$$

où  $C$  est une copule Archimédienne générée par  $\varphi$  (voir l'ouvrage de Nelsen [51]), nous pouvons calculer le tau de Kendall pour la copule de Clayton.

On a :

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta}$$

Donc

$$\begin{aligned}\tau_\theta &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left( \frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\theta}{\theta+2}.\end{aligned}$$

### Remarque

1.  $C^{Cl} \rightarrow \Pi$  quand  $\theta \rightarrow 0$
2.  $C^{Cl} \rightarrow W$  quand  $\theta \rightarrow -1$
3.  $C^{Cl} \rightarrow M$  quand  $\theta \rightarrow +\infty$ .

### 1.9.4.3 Copule de Frank (1979)

Cette copule est apparue dans les travaux de Frank [33] et a été étudiée par Genest [9]. La copule de Frank de paramètre de dépendance  $\theta \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  est donnée par :

$$C^{Fr}(u_1, u_2; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(\exp(-\theta u_1) - 1)(\exp(-\theta u_2) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right)$$

où le générateur est

$$\varphi(u) = -\ln \left( \frac{\exp(-\theta u) - 1}{\exp(-\theta) - 1} \right)$$

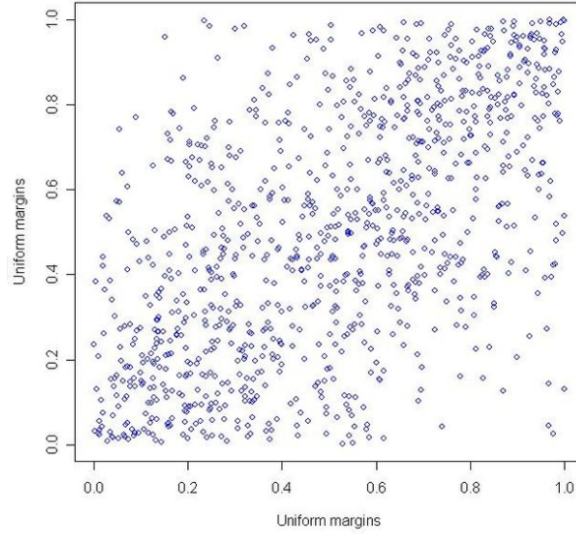


FIGURE 1.15 – Copule de Frank

La densité de la copule de Frank est égale à :

$$\begin{aligned}
 c(u_1, u_2; \theta) &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{\partial C(u_1, u_2; \theta)}{\partial u_1} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left[ \frac{-1}{\theta} \left( \frac{-\theta \exp^{-\theta u_1} (\exp^{-\theta u_2} - 1)}{(\exp^{-\theta} - 1) + (\exp^{-\theta u_1} - 1)(\exp^{-\theta u_2} - 1)} \right) \right] \\
 &= \frac{\theta(1 - \exp^{-\theta}) \exp^{-\theta(u_1 + u_2)}}{[(1 - \exp^{-\theta}) - (\exp^{-\theta u_1} - 1)(\exp^{-\theta u_2} - 1)]^2}
 \end{aligned}$$

Le tau de Kendall correspondant à la copule de Frank est donné par la formule suivante (voir [9]) :

$$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta}(1 - D_1(\theta)),$$

où  $D_k(x)$  est la fonction de Debye donnée par :

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{\exp^t - 1} dt, \quad \forall k \geq 0.$$

La copule de Frank ne possède pas de dépendance dans les extrêmes.

### Remarque

On peut vérifier que :

1.  $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} C^{Fr} = W$ ,
2.  $\lim_{\theta \rightarrow -0} C^{Fr} = \Pi$ ,
3.  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} C^{Fr} = M$ .

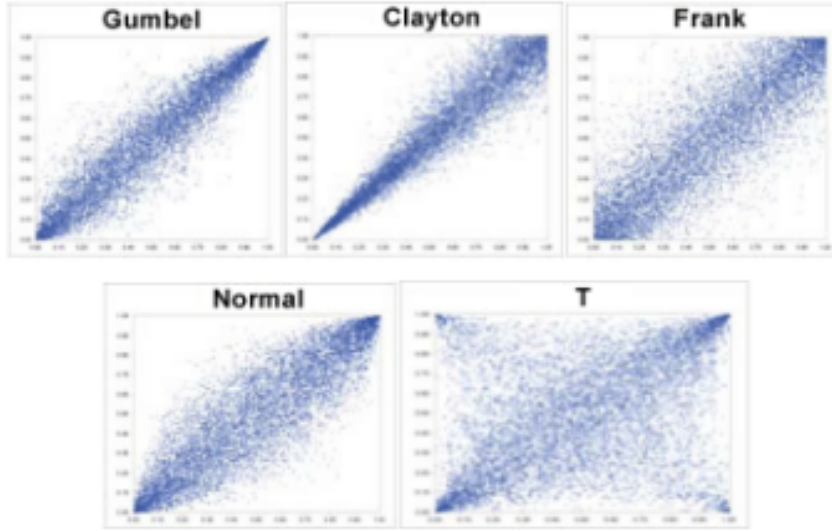


FIGURE 1.16 – Comparaison de quelques copules usuelles

### 1.9.5 Copules archimédiennes multivariées avec un seul paramètre

Maintenant on va s'intéresser à la construction de copules Archimédiennes de dimension  $d$ . Rappelons qu'on a écrit la copule produit sous la forme

$$\begin{aligned}\Pi(u_1, u_2) &= u_1 u_2 \\ &= \exp[-((-\ln(u_1)) + (-\ln(u_2)))]\end{aligned}$$

L'extension à la dimension  $d$ , nous donne

$$\begin{aligned}\Pi^d(\mathbf{u}) &= u_1 \times \dots \times u_d \\ &= \exp[-((-\ln(u_1)) + \dots + (-\ln(u_d)))]\end{aligned}$$

avec  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ .

Cette formulation peut être généralisée pour toute copule  $C$  et toute fonction  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$  par :

$$C(\mathbf{u}) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d))$$

Où  $\varphi^{[-1]}$  est le pseudo-inverse défini précédemment.

Cette dernière équation ne définit pas une copule pour n'importe quelle fonction  $\varphi$ , par exemple, en prenant  $\varphi(u) = 1 - u$ , on trouve  $C = W$  qui n'est pas une copule pour  $d \geq 3$ .

Des propriétés supplémentaires devront donc être imposées à  $\varphi$  et  $\varphi^{-1}$  et ce en utilisant la notion de fonction complètement monotone donnée par la définition suivante :

**Définition . "Widder 1941"[57]** Une fonction  $g$  est dite complètement monotone sur un intervalle  $J$  si elle est continue sur  $J$  et admet des dérivées de tout ordre qui alternent en signe sur  $J$ , de telle sorte que :

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0, \quad \forall t \in J, \quad k = 0, 2, \dots$$

Le théorème de Kimberling [41], énoncé ci-dessous, donne une condition nécessaire et suffisante sur la fonction  $\varphi$  pour qu'elle engendre une copule archimédienne pour toute dimension  $d \geq 2$ .

**Théorème . [41]** Soit  $\varphi$  une fonction continue strictement décroissante, définie sur  $I = [0, 1]$  à valeurs dans  $[0, \infty)$ , telle que  $\varphi(0) = \infty$  et  $\varphi(1) = 0$ . Alors, pour  $d \geq 2$ ,  $C$  définie par (1.11) est une copule si et seulement si  $\varphi^{-1}$  est complètement monotone sur  $[0, \infty)$ .

### Remarque

\*Si l'inverse  $\varphi^{-1}$  d'un générateur strict  $\varphi$  d'une copule Archimédienne  $C$  est complètement monotone, alors  $C > \Pi$ .

\*Les copules Archimédiennes peuvent être également définies via un conditionnement par une variable aléatoire.

\*Une source importante de générateurs de copules Archimédiennes est l'inversion de la transformée de Laplace. Il est donc simple de construire des copules Archimédiennes de dimension  $d$ .

Dans ce qui suit, on donne quelques exemples.

#### 1.9.5.1 Copule de Gumbel

Le générateur est donné par

$$\varphi(t) = (-\ln(t))^\theta$$

donc

$$\varphi^{-1}(t) = \exp(t^{-1/\theta})$$

Il est complètement monotone si  $\theta > 1$ , la copule de Gumbel multivariée est

$$C^{Gu}(\mathbf{u}) = \exp\left\{-\left(\sum_{i=1}^d (-\ln(u_i))^\theta\right)^{1/\theta}\right\}, \quad \theta > 1$$

#### 1.9.5.2 Copule de Frank

Le générateur est donné par

$$\varphi(t) = -\ln\left(\frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1}\right)$$

et

$$\varphi^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta} \ln(1 + \exp(t)(\exp(-\theta) - 1))$$

qui est complètement monotone si  $\theta > 0$ . La copule de Frank multivariée est définie par

$$C^{Fr} = -\frac{1}{\theta} \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^d (\exp(-\theta u_i) - 1)}{(\exp(-\theta) - 1)^{d-1}}\right)$$

### 1.9.5.3 Copule de Clayton

Soit  $\varphi(t) = t^{-\theta-1}$ , l'inverse  $\varphi^{-1}(t) = (t+1)^{-1/\theta}$  est complètement monotone si  $\theta > 0$   
 La copule de Clayton de dimension  $d$  est donnée par :

$$C^{Cl} = \left( \sum_{i=1}^d u_i^{-\theta} - d + 1 \right)^{-1/\theta}, \quad \theta > 0$$

Dans le cas où  $\theta = 0$ , on obtient la copule d'indépendance.

### 1.9.6 Copule d'ordre partiel

On peut définir un ordre partiel sur les copules par :

$C < C'$  si  $C(u_1, \dots, u_d) < C'(u_1, \dots, u_d)$  pour tout  $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$ .

La copule de comonotonicité est donc la borne supérieure des copules pour cette relation d'ordre.

La fonction  $W$  est la borne inférieure. En effet on peut montrer que :

Pour tout  $(u_1, \dots, u_d) = \mathbf{u} \in [0, 1]^d$ , il existe une copule  $C$  dépendante de  $u$  telle que  $C(u) = W(u)$  en ce point.

Il existe des familles de copules totalement ordonnées pour cet ordre.

Par exemple, en dimension 2,

$$C_p^{Ga} < C_{p'}^{Ga} \quad \forall p < p'.$$

### 1.9.7 Copule des valeurs extrêmes

**Définition .** [2] Une fonction copule  $C$  est dite extrême si pour tout  $r > 0$

$$C(u_1, \dots, u_d) = C(u_1^{\frac{1}{r}}, \dots, u_d^{\frac{1}{r}})$$

La famille de Gumbel-Hougaard

$$C_\theta(u_1, \dots, u_d) = \exp(-(\sum_{i=1}^d (-\log u_i)^\theta)^{\frac{1}{\theta}})$$

Pour  $\theta > 0$ ,  $C_\theta$  est une copule Archimédienne. La raison pour qu'on appelle copule extrême une telle fonction est la suivante : prenons une famille indépendante de vecteurs  $(X_1^{(k)}, \dots, X_d^{(k)})$  pour  $k = 1, \dots, p$ .

Ces vecteurs ont même loi caractérisée par des marginales  $F_1, \dots, F_d$  et une copule  $C$  ; Intéressons nous au vecteur des marginales maximales :

$$(M_1, \dots, M_d) = (\max_{1 \leq k \leq p} X_1^k, \dots, \max_{1 \leq k \leq p} X_d^k)$$

La loi de  $M_i$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{M_i \leq m\} &= \mathbb{P}\{\max_{1 \leq k \leq p} X_i^k \leq m\} \\ &= \mathbb{P}\{\max_{1 \leq k \leq p} X_i^k \leq m \text{ pour } 1 \leq k \leq p\} \\ &= \mathbb{P}\{\max_{1 \leq k \leq p} X_i^k \leq m^p\} \\ &= F_i(m)^p \end{aligned}$$

Donc  $F_{M_i}(x) = F_i(x)^p$

Une copule du vecteur  $(M_1, \dots, M_d)$  satisfait :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{M_1 \leq m_1, \dots, M_d \leq m_d\} &= \mathbb{P}\{X_i^k \leq m_i \text{ pour } 1 \leq k \leq p, 1 \leq i \leq d\} \\ &= \mathbb{P}\{X_i^k \leq m_i \text{ pour } 1 \leq i \leq d\}^p \\ &= C(F_1(m_1), \dots, F_d(m_d))^p \\ &= C(F_1(m_1)^{\frac{1}{p}}, \dots, F_d(m_d)^{\frac{1}{p}})^p \end{aligned}$$

Ainsi donc, la copule des vecteurs maximaux est  $C(u_1^{\frac{1}{p}}, \dots, u_d^{\frac{1}{p}})^p$ .

S'il existe une copule  $C'(u_1, \dots, u_d)$  telle que  $\lim_{p \rightarrow \infty} C(u_1^{\frac{1}{p}}, \dots, u_d^{\frac{1}{p}})^p = C'(u_1, \dots, u_d)$ , alors c'est une copule extrême.

### 1.9.7.1 Propriété de convexité

Soient  $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, p$  avec  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$  et  $C_1, \dots, C_p$  des fonctions copules, alors

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i C_i = 1$$

est une fonction copule.

Plus généralement si  $(C_\theta)_{\theta \in \Theta}$  est une famille de copule et  $\Lambda$  est une mesure de probabilité sur  $\Theta$ , alors  $\int_{\Theta} C_\theta \Lambda(d\theta)$  est une copule.

### 1.9.7.2 Restriction de copules

Soit  $C(u_1, \dots, u_d)$  une copule d'ordre  $d$ .

Soit  $2 \leq k \leq d$  et  $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, d\}$ ,  $k$  indices distincts alors  $C(u_{i_1}, \dots, u_{i_k})$  est une copule d'ordre  $k$ .

En revanche, on ne connaît pas de méthode générale pour construire des copules d'ordre plus élevé à partir des copules d'ordre inférieur.

En général, si  $C_1, C_2$  et  $C_3$  sont des copules d'ordre 2, alors  $C_1(u, C_2(v, w)), C_1(C_2(u, v))$  et  $C_3(w, C_2(u, v))$  ne sont pas des copules.

## 1.9.8 Parties absolument continues et singulières d'une copule

Toute mesure de probabilité sur  $[0, 1]^d$ , une fonction copule peut être décomposée en somme d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]^d$  et d'une mesure singulière portée par un ensemble de mesure nulle.

De plus, la partie absolument continue peut s'écrire comme intégrale de la dérivée de Radon-Nikodym qui est notée :

$$\frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}$$

c'est-à-dire :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_0^{u_1} \dots \int_0^{u_d} \frac{\partial^d C(t_1, \dots, t_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d} dt_1 \dots dt_d + S(u_1, \dots, u_d)$$

où  $S$  est la fonction de répartition de la mesure singulière, cette mesure singulière n'a pas d'atomes puisque  $C$  n'en a pas et donc  $S$  est continue.

La fonction  $C$  est telle que  $\frac{\partial^d C}{\partial u_1 \dots \partial u_d}$  existe sur  $[0, 1]^d$ ,  $y$  est intégrable et  $S \equiv 0$ . Cette dérivée (classique) et la densité de Radon-Nikodym sont égales.

Dans ce cas, la définition de la fonction copule se simplifie en :

1.  $C(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_d) = 0$
2.  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$
3.  $\frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d} \geq 0$  sur  $[0, 1]^d$

### 1.9.8.1 Exemple de copule sans partie singulière

$$\Pi(u_1 \dots u_d) = u_1 \times \dots \times u_d$$

### 1.9.8.2 Exemple de copule sans partie absolument continue

$$M(u_1 \dots u_d) = \min(u_1, \dots, u_d)$$

La mesure de cette copule est portée par  $\Delta = \{u_1 = u_2 = \dots = u_d\}$  qui est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]^d$ . D'autre part  $\frac{\partial^d}{\partial u_1 \dots \partial u_d} M = 0$  excepté sur  $\{u_d = u_{M-1}\}$  où la dérivée n'existe pas.

### 1.9.8.3 Exemple de copule avec partie absolument continue et partie singulière

$$\theta \Pi + (1 - \theta)M \text{ avec } 0 < \theta < 1$$

**Proposition 12.** Soit  $C$  une fonction copule, alors pour tout  $i$   $\frac{\partial C}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_d)$  existe presque partout et

$$\frac{\partial C}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_d) = \mathbb{P}\{U_1 \leq u_1, \dots, U_{i-1} \leq u_{i-1}, U_{i+1} \leq u_{i+1}, \dots, U_d \leq u_d / U_i \leq u_i, \}$$

presque partout et  $(U_1, \dots, U_d)$  a pour loi  $C$ .

Sous l'hypothèse que  $C$  est telle que  $\frac{\partial^p C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_p}}$  existe partout et est intégrable sur  $[0, 1]^d$ , alors :

$$\frac{\partial^p C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_p}} = \mathbb{P}\{U_j \leq u_j \text{ pour } j \in \{i_1, \dots, i_p\} / U_{i_k} = u_{i_k} \text{ pour } k \in \{1, \dots, p\}\}$$

**Démonstration**

(1)  $u_i \mapsto C(u_1, \dots, u_d)$  est Lipschitzienne, donc absolument continue sur  $[0, 1]$  et dérivable presque partout.

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_0^{u_i} \frac{\partial C}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_{i-1}, t, u_{i+1}, \dots, u_d) dt$$

Soit

$$\mathbb{E}\{1_{\{U_1 \leq u_1\}} 1_{\{U_2 \leq u_2\}} \dots 1_{\{U_d \leq u_d\}}\} = \mathbb{E}\{1_{\{U_i \leq u_i\}} \frac{\partial C}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_{i-1}, U_i, u_{i+1}, \dots, u_d)\}$$

Ce qui est la définition de l'espérance conditionnelle.

(2) L'hypothèse de dérivabilité partout et l'intégrabilité permet aussi d'écrire

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_0^{u_{i_1}} \dots \int_0^{u_{i_p}} \frac{\partial^p C(u)}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_p}} dt_{i_1} \dots dt_{i_p}$$

Ce qui est aussi équivalent à la définition de l'espérance conditionnelle.

## Chapitre 2

---

### Estimations des paramètres d'une copule

---

L'estimation en statistique est une opération qui permet d'estimer la valeur inconnue d'un paramètre  $\theta$  du modèle statistique  $(\Omega^n, P_\theta, \theta \in \Theta)$  à partir d'un échantillon observé  $(X_1, \dots, X_n)$ .  $\Theta$  étant l'espace des paramètres.

Il existe beaucoup de méthodes d'estimation telles la méthode du maximum de vraisemblance (méthode classique), la méthode des moments, les méthodes bayésiennes, etc. Comme les copules sont des fonctions de répartition paramétriques, alors on a besoin d'estimer ces paramètres. Dans ce chapitre, on va donner un aperçu des méthodes d'estimation des paramètres d'une copule. Il convient d'abord d'introduire la notion de copule empirique.

### 2.1 Fonction de répartition empirique

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un échantillon de taille  $n$  d'une variable aléatoire  $X$  de loi  $F$ . La fonction de répartition empirique est donc définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i < x)$$

$F_n$  conduit à un estimateur non-paramétrique naturel d'une copule.

**2.1.0.0.1 Propriétés asymptotiques** 1)  $F_n$  est un estimateur sans biais

$$E(F_n(x)) = F(x)$$

2) Par la loi forte des grands nombres

$$F_n(x) \xrightarrow{p.s} F(x)$$

3)  $F_n$  est asymptotiquement normale de variance  $F(x)(1 - F(x))$

$$\sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \longrightarrow N(0, F(x)(1 - F(x)))$$

4)  $F_n$  est un estimateur uniformément consistant de  $F$ , c'est-à-dire

$$\|F_n - F\|_\infty \xrightarrow{p.s} 0.$$

## 2.2 Estimation non paramétrique

### 2.2.1 Copule empirique

La notion de copule empirique a été introduite pour la première fois par Deheuvels [50] et est connue sous le nom "Fonction de dépendance empirique".

**Définition .** Soit  $\{(x_t^1, \dots, x_t^d)\}_{t=1}^T$  un échantillon d'un vecteur aléatoire  $X$  de dimension  $d$ ; la fonction de répartition empirique est définie par :

$$F_d(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbb{I}_{(X_i^1 < x^1, \dots, X_i^d < x^d)},$$

où  $\mathbb{I}$  est la fonction indicatrice.

#### a-Cas de copules bivariées

**Définition .** Soit  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$  un échantillon de taille  $n$  d'un couple de variables aléatoires. La copule empirique est la fonction  $\hat{C}$  définie par

$$\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{\text{Nombre des paires } (x, y) \text{ dans l'échantillon tels que } x \leq x_{(i)} \text{ et } y \leq y_{(j)}}{n}$$

où  $x_{(i)}$  et  $y_{(j)}$  représentent les statistiques d'ordre associées à l'échantillon.

La fonction densité empirique de la copule  $C$  notée  $\hat{c}$  est donnée par :

$$\hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } (x_i, y_j) \text{ est un élément de l'échantillon;} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Elle est parfois appelée "fréquence empirique de la copule"; il existe une relation entre  $\hat{C}$  et  $\hat{c}$  donnée par :

$$\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j \hat{c}\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right),$$

et

$$\hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \hat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}\right) - \hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n}\right) + \hat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right)$$

#### b- Généralisation au cas de copules multivariées

En dimension  $T$ , si  $\{(x_t^1, \dots, x_t^n)\}_{t=1}^T$  est un échantillon de taille  $n$ , la copule empirique  $\hat{C}$  est définie de façon analogue au cas bivarié par :

$$\hat{C}\left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T}\right) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } (x_t^1 \leq x_{(t_1)}^1, \dots, x_t^n \leq x_{(t_n)}^n); \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le résultat suivant donne une utilisation des copules empiriques pour estimer les mesures de dépendance à savoir le  $\rho$  de Spearman et le  $\tau$  de Kendall.

**Théorème .** [51] Soient  $\hat{C}$  et  $\hat{c}$  la copule empirique et sa fonction de densité respectivement de l'échantillon  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ . Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont estimés par les formules suivantes :

$$\hat{\tau} = \frac{2n}{n-1} \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{q=1}^{j-1} \left( \hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \hat{c}\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) - \hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{q}{n}\right) \hat{c}\left(\frac{p}{n}, \frac{j}{n}\right) \right) \quad (2.1)$$

$$\hat{\rho} = \left( \frac{12}{n^2-1} \right) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \frac{ij}{n^2} \right) \quad (2.2)$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir Nelsen [14] ou Deheubels [50].

## 2.2.2 Procédure de GENEST et RIVEST

La méthode suivante a été proposée par Christian Genest et Louis-Paul Rivest [11], pour sélectionner une copule appartenant à la famille Archimédienne. Cette méthodologie se base directement sur le générateur de la copule.

Soient  $X$  un vecteur aléatoire de dimension  $n$ , de copule  $C$  associée au générateur  $\varphi$  et  $K$  la fonction définie par :

$$K(u) = \mathbb{P}\{C(u, v) \leq u\}. \quad (2.3)$$

Nous pouvons calculer pour une copule Archimédienne la quantité suivante :

$$K(u) = u - \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)} \quad (2.4)$$

Un estimateur non-paramétrique de  $K$  est alors donné par :

$$\hat{K}(u) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{I}_{\{v_t \leq u\}}, \quad (2.5)$$

où

$$v_t = \frac{1}{T-1} \sum_{j=1}^T \mathbb{I}_{\{x_j^1 < x_t^1, x_j^2 < x_t^2\}}. \quad (2.6)$$

Il existe une relation entre le taux de Kendall et la fonction  $K$  donnée dans la remarque suivante :

### Remarque

La fonction  $K$  est liée au tau de Kendall par :

$$\tau = 4 \int_0^1 (1 - K(u)) du - 1$$

## 2.2.3 Estimation par la méthode des noyaux

Des estimateurs de la copule peuvent être obtenus en employant une approche basée sur les noyaux.

Considérons un vecteur aléatoire  $X$  de dimension  $n$  de fonction de répartition  $F$ ; Soit  $C$  la copule associée et de fonctions marginales  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  telles que :

$$F(X_1, \dots, X_n) = C(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n)).$$

Soit l'échantillon  $\{x_1^t, \dots, x_n^t\}_{t=1}^T$ .

Pour construire notre estimateur, on doit introduire des noyaux, c'est-à-dire, des fonctions  $k_i$  intégrables définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  tels que :

$$\int_{\mathbb{R}} k_i(x) dx = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

Soit le noyau  $n$ -dimensionnel

$$k(x) = \prod_{i=1}^n k_i(x_i)$$

de fonction de répartition

$$K(x) = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^x k_i(x_i) = \prod_{i=1}^n K_i(x_i)$$

Pour la simplicité, nous choisissons de travailler ici avec des produits de noyaux univariés. Nous pouvons cependant prolonger facilement nos résultats aux noyaux plus généraux, c'est-à-dire :

$$k(x, h) = \prod_{i=1}^n k_i\left(\frac{x_i}{h_i}\right)$$

et

$$K(x, h) = \prod_{i=1}^n K_i\left(\frac{x_i}{h_i}\right)$$

Où  $h$  est une matrice diagonale, avec des éléments  $h_i$ ;  $i = 1, \dots, n$  et un déterminant  $|h|$  dit fenêtre de lissage.

Les fenêtres de lissage individuelles  $h_i$  sont des fonctions de  $T$  telles que :

$$h_i \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad T \longrightarrow \infty$$

Les estimateurs à noyau des densités marginales des  $X_t^i$  au points  $x_i$  sont donnés par :

$$\hat{f}_i(x_i) = \frac{1}{Th_i} \sum_{t=1}^T k_i\left(\frac{x_i - X_t^i}{h_i}\right), \quad (2.7)$$

L'estimateur de la fonction de densité conjointe de  $X_t$  au point  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est donné par :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{T|h|} \sum_{t=1}^T \prod_{i=1}^n k\left(x - X_t; h\right). \quad (2.8)$$

Par conséquent, un estimateur de la fonction de répartition conjointe de  $X_t^i$  est donné par :

$$\hat{F}_i(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \hat{f}_i(y) dy, \quad (2.9)$$

et un estimateur de la fonction de répartition de  $X_t$  au point  $x = (x_1, \dots, x_n)$  par :

$$\hat{F}(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \hat{f}(y) dy. \quad (2.10)$$

Si on définit le noyau gaussien :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (2.11)$$

les estimateurs à noyau de  $F_i(x)$  et  $F(x)$  sont alors

$$\hat{F}_i(x_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Phi\left(\frac{x_i - X_i^t}{h_i}\right) \quad (2.12)$$

et

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \prod_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x_i - X_i^t}{h_i}\right) \quad (2.13)$$

où

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt \quad (2.14)$$

Dans la pratique, on choisit d'habitude  $h_i = \hat{\sigma}_i(4/3T)^{1/5}$ , où  $\sigma_i$  est l'écart-type de l'échantillon  $\{x_1^t, \dots, x_n^t\}_{t=1}^T$ .

Définissons  $\hat{q}$  le vecteur où la  $i^{ime}$  composante est le  $u_i$ -quantile de  $\hat{F}_i$ ,

$$\hat{q}_i = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{x : \hat{F}_i \geq u_i\}, \quad u_i \in [0, 1]. \quad (2.15)$$

L'estimateur à noyau de la copule  $C$  est simplement donné par :

$$\hat{C}(u_1, \dots, u_n) = \hat{F}(\hat{q}) \quad (2.16)$$

Sous des conditions de régularité, l'estimateur à noyau est asymptotiquement Gaussien. On peut montrer que

$$\left(T \prod_{i=1}^n h_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{C}(u) - C(u)\right) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, C(u)) \quad (2.17)$$

Après construction de l'estimateur à noyau, on peut le différencier par rapport à  $u_i$ . Il est ainsi facile d'obtenir un estimateur de la dérivée partielle de la copule par rapport à une (ou plus) variable, par exemple l'estimateur à noyau de la dérivée partielle du premier ordre de la copule  $C$  par rapport à  $u_i$  est donné par :

$$\frac{\partial \hat{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i} = \frac{\partial_i \hat{F}(\hat{q}(\mathbf{u}))}{\hat{f}_i(\hat{q}_i(u_i))} \quad (2.18)$$

avec  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  et  $\hat{f}_i$  est l'estimateur à noyau de la densité marginale de  $X_i$ ,

$$\hat{f}_i(x_i) = \frac{1}{Th_i} \sum_{t=1}^T \varphi\left(\frac{x_i - x_i^t}{h_i}\right), \quad (2.19)$$

et  $\partial_i \hat{F}$  est la dérivée partielle de  $\hat{F}$  par rapport à la  $i^{ime}$  variable. De la même manière, sous les conditions de régularité, on peut montrer que :

$$\left(T \prod_{i=1}^n h_i\right)^{1/2} \left(\frac{\partial \hat{C}(\mathbf{u})}{\partial u_i} - \frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial u_i}\right) \rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\hat{f}_i(q_i(u_i))} \frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial u_i}\right) \quad (2.20)$$

En appliquant le même genre d'arguments, on peut estimer les dérivées partielles d'ordre supérieur de la copule  $C$ , on aura

$$\frac{\partial \hat{C}(\mathbf{u})}{\partial u_{i_1}, \dots, \partial u_{i_k}} = \frac{\partial_{i_1, \dots, i_k} \hat{F}(\hat{q}(\mathbf{u}))}{\hat{f}_{i_1}(\hat{q}_{i_1}(u_{i_1})) \dots \hat{f}_{i_k}(\hat{q}_{i_k}(u_{i_k}))} \quad (2.21)$$

où tous les  $i_j$  sont supposés différents et  $k \leq n$ ; si  $k = n$ ; on obtient l'estimateur à noyau de la densité de la copule  $C$  défini par :

$$\hat{c}(\mathbf{u}) = \frac{\hat{f}(\hat{q}(\mathbf{u}))}{\hat{f}_1(\hat{q}_1(u_1)) \dots \hat{f}_n(\hat{q}_n(u_n))}, \quad (2.22)$$

où  $\hat{f}$  est l'estimateur à noyau de la densité conjointe de  $\mathbf{X}$  tel que  $\mathbf{X} = \{x_1^t, \dots, x_n^t\}_{t=1}^T$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{T \prod_i h_i} \sum_{i=1}^T \prod_{i=1}^n \varphi\left(\frac{x_i - X_i^t}{h_i}\right) \quad (2.23)$$

## 2.3 Estimation paramétrique

Lorsqu'il s'agit d'une estimation paramétrique d'une copule, on impose un modèle paramétrique pour la copule et pour les distributions marginales. Pour estimer ces paramètres, il existe différentes méthodes. Dans cette section, on présente la méthode des moments, la méthode maximum de vraisemblance (MLE), la méthode fonction d'inférence pour les marges (IFM) et la méthode maximum de vraisemblance canonique (CNL).

Dans toute la suite, considérons l'échantillon  $\{x_1^t, \dots, x_n^t\}_{t=1}^T$  de fonction de répartition multivariée  $F(x; \theta)$ , de copule  $C$  et de lois marginales  $F(x_i^t, \alpha_i)$

### 2.3.1 La méthode des moments

Cette méthode consiste à estimer les paramètres  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$  des lois marginales et le paramètre  $\alpha$  de la copule par la méthode des moments, c'est-à-dire : estimer les moments par leurs estimateurs empiriques ; ce qui revient à :

1. Résoudre le système à  $n$  équations à  $n$  inconnues

$$\begin{cases} \bar{X}_t = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ S_t^2 = g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \mu_{3,t} = h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{cases} \quad (2.24)$$

où  $n$  désigne la dimension de  $\alpha$ .

$f, g$  et  $h$  sont les expressions des moments (ordinaires) d'ordre 1, 2 et 3 en fonction des paramètres  $\alpha_i$ . Répéter cette étape pour toutes les marginales.

2. Inverser le tau de Kendall ou le rho de Spearman pour obtenir le paramètre  $\alpha$  de la copule.

**Exemple 7.** Pour la copule de Gumbel de paramètre  $\theta$ , on a

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$$

Nous en déduisons que :

$$\theta = \frac{1}{1 - \tau}$$

Si nous avons une estimation  $\hat{\tau}$  du tau de Kendall, nous pouvons obtenir une estimation du paramètre de la copule en posant :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{1 - \hat{\tau}}$$

Dans le cas général, l'estimateur non paramétrique du tau de Kendall est donné par :

$$\hat{\tau} = \frac{c - d}{c + d}$$

où  $c$  et  $d$  sont respectivement le nombre de paires disjointes concordantes et discordantes.

### Remarque

Pour les copules elliptiques, nous avons une relation entre la matrice de corrélation  $\Sigma$  et le tau de Kendall comme suit :

$$\Sigma = (\rho_{ij})_{i,j}$$

Avec

$$\rho_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2}, \tau\right)$$

Et

$$\tau = (\tau_{ij})_{i,j}$$

En ce qui concerne les copules Archimédiennes, nous avons :

- Copule de Clayton

$$\alpha = \frac{2\tau}{1 - \tau}$$

- Copule de Gumbel

$$\alpha = \frac{1}{1 - \tau}$$

## 2.3.2 Méthode du maximum de vraisemblance (MLE)

La méthode maximum de vraisemblance (MLE) [6] consiste à estimer simultanément les paramètres de la copule et les paramètres des fonctions de distribution marginales en utilisant la méthode maximum de vraisemblance.

Soit  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  un vecteur aléatoire avec des fonctions de répartition marginales univariées  $F_j(x_j, \alpha_j)$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Soit  $C$  une copule appartenant à une famille paramétrique  $C = C_\theta, \theta \in \Theta$

D'après le théorème de Sklar la fonction de répartition de  $X$  est donnée par :

$$F(x_1, \dots, x_d) = C\{F_1(x_1, \alpha_1), \dots, F_d(x_d, \alpha_d), \theta\}$$

avec une densité

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_d; \alpha_1, \dots, \alpha_d, \theta) &= \frac{\partial^d C\{F_1(x_1, \alpha_1), \dots, F_d(x_d, \alpha_d); \theta\}}{\partial x_1 \alpha_1 \dots \partial x_d \alpha_d} \\ &= c\{F_1(x_1; \alpha_1), \dots, F_d(x_d, \alpha_d); \theta\} \prod_{j=1}^d f_j(x_j; \alpha_j) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} c(u_1, \dots, u_d) &= \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1, \dots, \partial u_d} \\ &= \frac{\partial^d F\{F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)\}}{\partial u_1 \partial u_2, \dots, \partial u_d} \times \frac{1}{[f_1(F_1^{-1}(u_1)), \dots, f_d(F_d^{-1}(u_d))]}, \end{aligned}$$

Pour un échantillon d'observations  $\{x_1^t, \dots, x_d^t\}_{t=1}^T$  et un vecteur des paramètres  $\delta = (\alpha_1, \dots, \alpha_d; \theta)^T \in \mathbb{R}^{t+1}$ , la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L(\delta; x_1, \dots, x_T) = \prod_{t=1}^T f(x_1^t, \dots, x_d^t; \alpha_1, \dots, \alpha_d, \theta)$$

La fonction log-vraisemblance est donc :  $l(\delta; x_1, \dots, x_T) = \sum_{t=1}^T \ln f(x_1^t, \dots, x_d^t)$  :

$$l(\delta; x_1, \dots, x_T) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \alpha_1), \dots, F_d(x_d^t; \alpha_d); \theta) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^d \ln f_j(x_j^t; \alpha_j). \quad (2.25)$$

On peut décomposer  $l(\delta; x_1, \dots, x_T)$  en deux equations :

$$l(\delta; x_1, \dots, x_T) = \underbrace{L_C}_{\text{dependance}} + \underbrace{\sum_{i=1}^d L_i}_{\text{marginales}} \quad (2.26)$$

où

$$L_C = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \theta), \dots, F_n(x_n^t; \theta))$$

qui est la contribution de la structure de dépendance des données représentées par la copule  $C$  et

$$L_i = \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_i^t; \theta), \quad i = 1, 2, \dots, d$$

est l'estimation de la copule de la log-vraisemblance.

Notons que  $\sum_{i=1}^d L_i$  est exactement le log-vraisemblance de l'échantillon sous l'hypothèse d'indépendance.

Supposons que la copule  $C$  appartient à une famille de copules indexée par un paramètre vectoriel  $\theta : C = C(u_1, u_2, \dots, u_d, \theta)$  et que les marges  $F_i$  et les densités univariées correspondantes  $f_i$  sont indexées par des paramètres (vecteurs)  $\alpha_i$  :

$$F_i = F_i(x_i; \alpha_i), \quad f_i = f_i(x_i; \alpha_i).$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance MLE,  $(\hat{\alpha}_1^{\text{MLE}}, \hat{\alpha}_2^{\text{MLE}}, \dots, \hat{\alpha}_d^{\text{MLE}}, \hat{\theta}_d)$

des paramètres du modèle  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d, \hat{\theta})$  correspond à la maximisation simultanée de la log-vraisemblance  $L$  dans (2.26) est donc :

$$\begin{aligned} &(\hat{\alpha}_1^{\text{MLE}}, \hat{\alpha}_2^{\text{MLE}}, \dots, \hat{\alpha}_d^{\text{MLE}}, \hat{\theta}_d^{\text{MLE}}) \\ &= \arg \max_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d, \theta} L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d, \theta) \\ &= \arg \max_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d, \theta} L_C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d, \theta) + \sum_{i=1}^d L_i(\alpha_i) \\ &= \arg \max_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d, \theta} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \alpha_1), F_2(x_2^t; \alpha_2), \dots, F_d(x_d^t; \alpha_d); \theta) + \sum_{i=1}^d \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_i^t; \alpha_i). \end{aligned}$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance de  $\delta$  est donné par :

$$\hat{\delta}^{\text{MLE}} = \arg \max L(x, \delta). \quad (2.27)$$

On peut montrer sous des conditions de régularité que l'estimateur  $\hat{\delta}^{\text{MLE}}$  existe, qu'il est consistant, asymptotiquement efficace et vérifie la propriété de normalité asymptotique. L'estimateur  $\hat{\delta}^{\text{MLE}} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_d; \hat{\theta})^T$  donné par la résolution de :

$$\left( \frac{\partial l}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial l}{\partial \alpha_d}; \frac{\partial l}{\partial \theta} \right) = 0$$

vérifie

$$\sqrt{T}(\hat{\delta}^{\text{MLE}} - \delta_0) \rightarrow \mathcal{N}(0, \mathfrak{F}^{-1}(\delta_0))$$

où  $\mathfrak{F}(\delta_0)$  est l'information de Fisher et  $\delta_0$  est la vraie valeur de  $\delta$

Le problème avec cette méthode est qu'elle peut engendrer des temps de calcul très longs dans le cas d'une grande dimension car elle nécessite d'estimer conjointement les paramètres des lois marginales et les paramètres de la structure de dépendance.

De plus, l'estimation de la copule est sensible à une éventuelle erreur d'estimation des marginales car elles interviennent dans le calcul de la log-vraisemblance.

**Exemple 8. "Copule Gaussienne multivariée"** Soit la fonction de distribution de la copule Gaussienne multivariée  $C_R^{\text{Gau}}$  définie comme suit :

$$C_R^{\text{Gau}}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$$

où  $R$  est sa matrice de corrélation, sa fonction de densité est donnée par :

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{1}{|R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi'(R^{-1} - I)\xi\right)$$

avec  $\xi = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))^t$ .

Soit l'échantillon  $\{x_1^t, \dots, x_n^t\}_{t=1}^T$ , la fonction log-vraisemblance est donnée par :

$$L_\delta = -\frac{T}{2} \ln |R| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \xi_t'(R^{-1} - I)\xi_t$$

où  $\delta$  est l'ensemble de tous les paramètres et  $\xi_t = \Phi(\Phi^{-1}(u_1^t), \dots, \Phi^{-1}(u_d^t))$ . L'estimateur du maximum de vraisemblance de  $R$  est donné par :

$$\hat{R}^{\text{MLE}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi_t' \xi_t$$

### 2.3.3 Méthode de fonction d'inférence sur les marginales (IFM)

La méthode fonction d'inférence pour les marges (IFM) consiste à estimer d'abord les paramètres des marginales ensuite les paramètres de la copule en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

La méthode de l'inférence sur les marginales a été proposée par Joe [38]. Elle repose sur le fait que la représentation en copule permet de séparer les paramètres spécifiques des distributions

marginales de ceux de la structure de dépendance. la fonction log-vraisemblance peut s'écrire de la manière suivante :

$$l(\delta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t, \alpha_1), \dots, F_d(x_d^t, \alpha_d); \theta) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^d \ln f_i(x_i^t; \delta)$$

où  $\delta = (\alpha_1, \dots, \alpha_d; \theta)$  le vecteur des paramètres contient les paramètres  $\alpha_i$  de chaque marginale et les paramètres  $\theta$  de la copule.

L'estimation s'effectue en deux étapes :

1. On estime les paramètres les lois marginales

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i &= \arg \max l_i(\alpha_i) \\ &= \arg \max \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_i^t; \alpha_t) \end{aligned}$$

2. On estime  $\theta$  en tenant compte des estimateurs précédents par la maximisation de la fonction suivante :

$$l(\theta, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_d) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t, \hat{\alpha}_1), \dots, F_d(x_d^t, \hat{\alpha}_d); \theta)$$

Le paramètre de dépendance estimé  $\hat{\theta}$  est donné par :

$$\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_d; \hat{\delta})^T$$

obtenu en résolvant :

$$\left( \frac{\partial l}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial l}{\partial \alpha_d}; \frac{\partial l}{\partial \delta} \right) = 0$$

Joe (1997)[26] a montré que l'estimateur *IFM* vérifie également sous les conditions de régularité la propriété de la normalité asymptotique :

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0) \rightarrow \mathcal{N}(0, \mathcal{G}(\theta_0))$$

où  $\mathcal{G}(\theta_0)$  est la matrice de l'information de Gdambe voir [Cherubini, C et al,[27].] avec

$$\mathcal{G}(\theta_0) = D^{-1} M (D^{-1})'$$

et

$$D = E \left[ \frac{\partial g(\theta)}{\partial g(\theta')} \right]$$

## 2.4 Méthode semi-paramétrique

### La méthode de maximum de vraisemblance canonique (CML)

La méthode CML "canonical maximum likelihood" (Bouyè et al.[4], est voisine de la méthode IFM à la différence qu'elle ne nécessite pas d'avoir recours à l'estimation des marginales. Pour cela, les observations de l'échantillon  $\{x_1^t, \dots, x_n^t\}_{t=1}^T$  sont transformées en variables aléatoires uniformes  $\{u_1^t, \dots, u_d^t\}$  et on estime ensuite les paramètres de la copule. Cette méthode se déroule comme suit :

1. Estimer d'abord les marginales en utilisant les distributions empiriques :

$$\hat{F}_{X_i} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{I}_{X_i \leq x}$$

où  $\mathbb{I}_{X_i \leq x}$  est la fonction indicatrice.

2. Estimer la copule paramétrique par la méthode MLE

$$\hat{\alpha} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c\left(\hat{F}_1(x_1^t), \dots, \hat{F}_d(x_d^t); \alpha\right)$$

Cette méthode génère des temps de calcul limités et elle procède à une estimation paramétrique de la copule indépendamment de la forme paramétrique des lois arginales.

### Comparaison des méthodes d'estimation

La méthode du maximum de vraisemblance est généralement privilégiée par rapport aux autres méthodes du fait que les paramètres des distributions marginales et de la copule peuvent être estimés simultanément. Cherubini et al (2004), ont montré qu'il est beaucoup plus simple d'obtenir les estimateurs par la méthode IFM que par la méthode du maximum de vraisemblance. Ils ont suggéré de prendre initialement comme valeurs estimées des paramètres, les valeurs données par la méthode IFM pour dérouler la méthode basée sur le MV. Fermanian et al(2004), ont montré que les estimateurs obtenus par la méthode CML sont très proches des estimateurs obtenus par le MV. Par contre, pour les grands échantillons, le biais des estimateurs est plus important pour estimateurs obtenus par le maximum de vraisemblance que pour ceux obtenus par la méthode CML.

## 2.5 Choix de la meilleure copule

Le choix de la meilleure copule est une étape très importante. Il existe une panoplie de méthodes de choix de la meilleure copule. Dans cette section, on présente celle qui s'implémente dans le package "copula" sous R. Pour plus de détails voir Cadoux et Loiseau [28] et bien d'autres documents traitant de la théorie des copules. Le test de validation du choix de la meilleure copule sous R est basé sur un processus empirique défini comme suit :

$$K_n(u) = \sqrt{n}\{C_d(u) - C_{\theta_n}(u)\}, \quad u \in [0, 1]^d \quad (2.28)$$

Où  $C_n$  est la copule empirique et  $C_{\theta_n}$  est un estimateur de la copule  $C$ .  
La statistique du test est définie par :

$$S_n = \int K_{n(u)}^2 dC_n(u) = \sum_{i=1}^n \left(C_n(\hat{U}_i) - C_{\theta_n}(\hat{U}_i)\right)^2 \quad (2.29)$$

Une  $p$ -value approximative de  $S_n$  peut être obtenue à partir d'une procédure basée sur la méthode bootstrap paramétrique.

Cette procédure se déroule comme suit :

-Calculer à partir des pseudo-observations  $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$  et estimer  $\theta$  à partir de  $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$  au moyen d'un estimateur basé sur les rangs.

-Calculer la statistique de test  $S_n$  définie en (2.29)

-Pour un nombre assez élevé  $N$ , répéter les étapes suivantes pour chaque  $k = 1, \dots, N$  :

a-Générer un échantillon aléatoire  $X_1^{(k)}, \dots, X_n^{(k)}$  à partir d'une copule et calculer les pseudo-observations  $\hat{U}_1^{(k)}, \dots, \hat{U}_n^{(k)}$  associées.

b-Soit :

$$C_n^{(k)}(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\hat{U}_i^{(k)} \leq u}, \quad u \in [0, 1]^d$$

calculer un estimateur  $\theta_n^{(k)}$  de  $\theta$  à partir de  $\hat{U}_1^{(k)}, \dots, \hat{U}_n^{(k)}$  en utilisant le même estimateur basé sur les rangs comme dans l'étape 1.

c-Calculer une réalisation indépendante approximative de  $S_n$  par :

$$S_n^{(k)} = \sum_{i=1}^n \left( C_n^{(k)}(\hat{U}_i^{(k)}) - C_{\theta_n^{(k)}}(\hat{U}_i^{(k)}) \right)^2$$

d-Une  $p$ -value approximative pour le test est donnée par :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}_{S_n^{(k)} \geq S_n}$$

Cette procédure est implantée sous  $R$  via le package `copula` à partir de la commande `"gofCopula"`.

## 2.6 Simulation des copules

Les copules fournissent un cadre d'analyse bien adapté à la construction des distributions conjointes possédant une structure de dépendance donnée.

En effet, soit  $X = (X_1, \dots, X_d)$  un vecteur gaussien centré de matrice de variance-covariance fixée ; on peut remplacer les lois marginales gaussiennes par d'autres lois (par exemple pour tenir compte d'un caractère leptokurtique des observations) tout en conservant la même structure de dépendance.

Pour simuler des réalisations d'un vecteur  $X = (X_1, \dots, X_d)$  dont la distribution est

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

On simule un vecteur aléatoire  $U = (U_1, \dots, U_d)$  dont la fonction de distribution est la copule  $C$ . Diverses méthodes existent, mais nous allons présenter que trois méthodes pour obtenir des nombres aléatoires de  $C$ . Parfois, les marginales  $(F_1, \dots, F_d)$  ne sont pas connues analytiquement, nous utilisons alors la méthode dite "des quantiles empiriques".

### 2.6.1 La méthode des distributions

En utilisant la transformation

$$X = (F_1^{-1}(U_1), \dots, F_d^{-1}(U_d))$$

On obtient

$$F(U_1, \dots, U_d) = C(F_1^{-1}(U_1), \dots, F_d^{-1}(U_d)).$$

Pour simuler  $U = (U_1, \dots, U_d)$ , nous pouvons simuler le vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_d)$  de fonction de distribution  $F$  et appliquer la transformation  $U = (F_1(X_1), \dots, F_n(X_n))$ .

### 2.6.2 La méthode des distributions conditionnelles

#### A. cas bivarié

Soit  $U = (U_1, U_2)$  un vecteur aléatoire de fonction de distribution  $C$ . Nous savons que :

$$\mathbb{P}[U_1 \leq u_1] = u_1$$

et

$$\mathbb{P}[U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1] = C_{2|1}(u_1, u_2)$$

Comme  $C(U_1, 1)$  et  $C_{2|1}(u_1, U_2)$  sont deux variables aléatoires uniformes, nous obtenons l'algorithme suivant :

1. Simuler deux variables aléatoires uniformes  $v_1$  et  $v_2$ ,
2. Prendre  $u_1$  égal à  $v_1$ ,
3. Soit  $C(u_2, u_1) = C_{2|1}(u_1, u_2)$ ,
4. Prendre  $u_2$  égal à  $C^{-1}(v_2, u_1)$ .

Cet algorithme est suggéré par Genest et MacKay [8]. Il est utilisé par Genest [14] pour simuler la copule de Frank.

**Exemple :** Nous rappelons que la fonction copule de Frank est donnée par :

$$C(u_1, u_2; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$$

Nous en déduisons que

$$C_{2|1}(u_1, u_2; \theta) = \frac{(e^{-\theta u_2} - 1)e^{-\theta u_1}}{(e^{-\theta} - 1) + (e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}$$

Nous obtenons finalement

$$C^{-1}(u_1, u_2) = \{u_2 : C_{2|1}(u_1, u_2; \theta) = u\} = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{u(e^{-\theta} - 1)}{u + (1 - u)e^{-\theta u_1}} \right)$$

La méthode bivariée s'étend sans difficultés au cas multivarié.(sur le plan mathématique).

## B. Cas multivarié

Prenons par exemple le cas **trivarié**. Nous avons l'algorithme suivant :

1. Simuler trois variables aléatoires uniformes  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ ,
2. Prendre  $u_1$  égal à  $v_1$ ,
3. Soit  $C(u_2, u_1) = C_{2|1}(u_1, u_2, 1)$  prendre  $u_2 = C^{-1}(v_2, u_1)$ ,
4. Soit  $C(u_3; u_1, u_2) = C_{3|1,2}(u_1, u_2, u_3)$  Prendre  $u_3 = C^{-1}(v_3; u_1, u_2)$ .

Il existe plusieurs algorithmes pour simuler les copules Archimédiennes. Genest et MacKay [8] prônent l'idée de simuler la distribution conjointe du vecteur aléatoire  $X$  en procédant par des simulations récursives des distributions conditionnelles de  $X_j$  sachant  $X_j$ .

1. Générer un nombre aléatoire uniformément distribué  $U_1$ .
2. Poser  $X_1 = F_1^{-1}(U_1)$
3. Pour  $j = 2, \dots, d$ , on calcule récursivement :

$$U_j = F_j(X_j | x_1, \dots, x_{j-1}) = \frac{\varphi^{-1(j-1)}[c_{j-1} + \varphi(F_j(x_j))]}{\varphi^{-1(j-1)}(c_{j-1})}$$

- où  $c_j = \varphi(F_1(x_1)) + \dots + \varphi(F_j(x_j))$  et  $\varphi^{-1(j)}$  est la  $j^{\text{ème}}$  dérivée de la fonction inverse de la  $\varphi$ ,
4. Poser  $X_j = F_j^{-1}(U_j)$ .

### 2.6.3 Les méthodes analytiques

Dans ce paragraphe, la simulation est spécifique à chaque copule ou à un type de copules.

**Exemple 1 :** Pour simuler la copule de Clayton (pour  $\theta > 0$ ), nous pouvons employer l'algorithme donné par Devroye [26] :

1. Simuler deux variables aléatoires exponentielles standards  $x_1$  et  $x_2$ .
2. Simuler une variable aléatoire  $x$  de fonction de distribution  $\Gamma(1, \theta)$ .
3. Prendre  $u_1 = (1 + x_1/x)^{-\theta}$  et  $u_2 = (1 + x_2/x)^{-\theta}$ .

**Exemple 2 :** Pour simuler des vecteurs aléatoires  $X$  ayant une copule Gaussienne de dimension  $n$ , on propose l'algorithme suivant :

1. Générer  $Z$ , une réalisation de la loi normale multivariée de moyenne  $0_{n \times 1}$  et de variance  $\Sigma_{n \times n}$  avec,  $\Sigma_{ii} = 1$  et  $\Sigma_{ij} = r$ .
2. Utiliser la décomposition  $\Sigma = A^t A$ .
3. Générer  $Y_1, \dots, Y_n$  une suite de  $n$  variables aléatoires indépendants et identiquement distribués de loi normale standard.
4. Calculer  $X = (X_1, \dots, X_n)^t = AY$  de  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^t$ .
5. Poser  $U_i = \Phi(X_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  avec  $\Phi$  est la fonction de distribution normale standard.

**Exemple 3 :** Afin de simuler des vecteurs aléatoires  $X$  ayant une copule de Student de dimension  $n$  à  $\nu$  degrés de liberté, on propose l'algorithme suivant :

1. Générer  $Z$ , une réalisation de la loi normale multivariée de moyenne  $0_{n \times 1}$  et de variance  $\Sigma_{n \times n}$  avec,  $\Sigma_{ii} = 1$  et  $\Sigma_{ij} = r$ ,
2. Générer  $V \sim \mathcal{X}_\nu^2$ ,
3. Dédire  $W = \nu/V$ ,
4. Poser  $T = \sqrt{W}Z$ .
5. Soit  $t_\nu$  la distribution de Student multivariée avec  $\nu$  degrés de liberté, de fonction de répartition marginale  $F_T$ . Soit  $T_j$  le  $j^{\text{ème}}$  élément de  $T$ . On calcule la variable aléatoire  $U_j$  :

$$U_j = F_T(T_j)$$

6. Calculer  $X_j = F_j^{-1}(U_j)$ , où  $F_j$  est la fonction de répartition de  $X_j$ .

## Chapitre 3

---

### Mesures de risque

---

La gestion des risques est devenue une priorité pour beaucoup d'entreprises, dont les banques, les assureurs qui sont exposés à des fluctuations de prix comme les risques de taux d'intérêt, de rendements boursiers, de taux de change, etc. L'identification des facteurs de risques et la mise en oeuvre de leur gestion efficace se sont affirmées comme des préoccupations centrales pour l'entreprise, qui cherche à préserver son capital financier.

Depuis vingt ans, on assiste à un développement technique du "risk management" et les modèles pour mesurer les risques sont de plus en plus sophistiqués. Le management des risques est la discipline qui s'attache à identifier et à traiter avec méthode les risques auxquels s'expose l'entreprise, quelles que soient la nature ou l'origine de ces risques.

Dans ce qui suit, on donnera la définition d'une mesure de risque, les propriétés associées qui peuvent être recherchées pour évaluer un risque, et on présentera les principales mesures de risque.

#### 3.1 Mesure de risque

**Définition .** Soit  $(\Omega, \mathbf{A}, P)$  un espace de probabilité et  $\mathcal{X}$  l'espace des variables aléatoires définies de  $\Omega$  dans  $\overline{\mathbf{R}}$ .

On appelle mesure de risque associée à un risque  $X$  une fonction  $\rho$  définie par

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{X} &\longrightarrow \overline{\mathbf{R}} \\ X &\longmapsto \rho(X) \end{aligned}$$

En particulier, cette définition nous permet d'établir que lorsqu'ils existent, l'espérance, la variance ou l'écart-type sont des mesures de risque. Si l'on se place du point de vue de l'investisseur financier, le risque consiste dans l'évaluation des probabilités des gains et des pertes financières au niveau micro-économique. Un placement est incertain. Le succès d'un projet industriel n'est pas garanti. L'octroi d'un crédit dépend de l'évaluation des chances de remboursements futurs. La logique financière est, sous ce point de vue, une logique temporelle : on cherche à préserver ou faire fructifier une certaine valeur.

Une mesure de risque doit pouvoir vérifier un certain nombre de propriétés élémentaires. A ce jour, il n'existe pas de consensus dans la littérature actuarielle sur les propriétés que doit nécessairement respecter une mesure de risque. Nous rappelons ci-après le corps des propriétés pouvant s'appliquer aux mesures de risque utilisées pour estimer le besoin en capital.

Si un grand nombre d'applications répondent à la définition de mesure de risque, pour être jugée « satisfaisante » il est souvent exigé d'une mesure de risque d'avoir certaines propriétés dont les plus fréquentes sont rappelées infra.

### **Propriété . 1) Invariance par translation**

Une mesure de risque  $\rho$  est dite invariante par translation si :

$$\rho(X + C) = \rho(X) - C, \forall C$$

Si on ajoute (respectivement on retranche) un montant certain  $C$  au résultat d'un centre de profit, le besoin en capital décroît (respectivement augmente) du même montant.

### **2) Sous-additivité**

Une mesure de risque  $\rho$  est dite sous-additive si :

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

La fusion de deux centres de profit ne crée pas de risque supplémentaire. Au contraire, la diversification tend à réduire le risque global. Cette propriété permet ainsi une gestion décentralisée du besoin en capital dans les différents centres de profit sans courir le risque d'un besoin global supérieur à la somme des besoins individuels de chacun des centres. Si cette propriété n'était pas respectée, une société ne respectant pas un certain niveau requis de capital pourrait être incitée à se scinder artificiellement en deux entités afin de réduire son besoin en capital.

### **3) Homogénéité positive**

Une mesure de risque  $\rho$  vérifie l'homogénéité positive si :

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

De même qu'une fusion ne crée pas de risque supplémentaire, une fusion sans diversification ne réduit pas le besoin global en capital.

### **4) Monotonie**

Une mesure de risque  $\rho$  est dite monotone si :

$$\text{si } X \leq Y \text{ alors } \rho(X) \leq \rho(Y)$$

## **3.2 Mesure de risque cohérente**

Azner et al [3] ont établi des critères pour définir une bonne mesure de risque : c'est la notion de mesure cohérente.

Une mesure de risque est dite cohérente si elle vérifie les propriétés 1,2,3 et 4 précédentes.

## **3.3 Principales mesures de risque**

### **3.3.1 La Value at Risk (VaR)**

La notion de Value-at-Risk ou valeur ajustée au risque s'est originellement développée dans les milieux financiers avant d'être largement reprise dans l'actuariat. Utilisée pour la première

fois dans les années 1980 par la banque Bankers Trust sur les marchés financiers Américains la notion de value at risk a été démocratisée par la banque JP Morgan dans les années 1990 grâce à son système de Risk Metrics. La Value-at-Risk (VaR) de niveau  $\alpha$  associée au risque  $X$  est donnée par :

$$VaR(X, \alpha) = \text{Inf}\{x : P(X \leq x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha) = Q_X(\alpha)$$

On notera que la VaR désigne la fonction quantile de la loi de  $X$ . Cette mesure de risque a le mérite de reposer sur un concept simple et facilement explicable :  $VaR(X, \alpha)$  est le montant qui permettra de couvrir le montant de sinistres engendré par le risque  $X$  avec une probabilité  $\alpha$ . En autres termes, elle indique la perte potentielle maximale que pourra subir un portefeuille à un horizon de temps donné avec une probabilité donnée. Ce concept est directement lié à celui de probabilité de ruine.

**Remarque** La VaR est invariante par translation et homogène ; ces deux propriétés découle du lemme suivant :

**Lemme 2.** *Soit  $g$  une fonction continue et croissante, alors (on se place dans le cas simple où  $F$  est continue)*

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(p))$$

Du fait que la fonction  $g$  est croissante on a :

$$\begin{aligned} F_{g(X)}^{-1}(p) = \alpha &\Leftrightarrow P(g(X) \leq \alpha) = p = P(X \leq g^{-1}(\alpha)) \\ P(X \leq g^{-1}(\alpha)) = p &\Leftrightarrow g^{-1}(\alpha) = F_X^{-1}(p) \Leftrightarrow \alpha = g(F_X^{-1}(p)) \end{aligned}$$

Donc

$$VaR_{g(X)}(\alpha) = F_{g(X)}^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(p)) = g(VaR(X, \alpha))$$

Ceci entraîne l'invariance par translation et l'homogeneite.

La VaR présente plusieurs avantages : tout d'abord, c'est un indicateur synthétique qui donne une évaluation du risque d'un portefeuille quels que soient les actifs qui le composent. Le fait de disposer d'un indicateur synthétique unique permet également les comparaisons entre portefeuilles. C'est aussi un indicateur facile à interpréter bien que la méthode de calcul soit très complexe.

Les mesures traditionnelles du risque comme la déviation standard et le degré de sensibilité ne donnent pas une perception de l'ampleur des pertes possibles mais simplement une information sur le pourcentage de la déviation du prix ou du rendement de l'actif par rapport à sa moyenne. Les inconvénients majeurs de la VaR sont :

La VaR n'est pas une mesure sous-additive. Si un portefeuille est composé de 2 sousportefeuilles A et B, alors la VaR du portefeuille total est inférieure à la somme des VaR des portefeuilles qui le compose. Cette inégalité est notamment expliquée par la prise en compte de la diversification. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de même loi de Pareto donnée par

$$P(X > t) = P(Y > t) = \frac{1}{1+t}, t \geq 0$$

On a :

$$VaR(X, \alpha) = VaR(Y, \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} - 1$$

$$P(X + Y \leq t) = 1 - \frac{2}{2+t} + 2 \frac{\text{Log}(1+t)}{(2+t)^2}$$

Or

$$P(X + Y \leq 2\text{Var}(X, \alpha)) = \alpha - \frac{(1-\alpha)^2}{2} \log\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) < \alpha$$

Ce qui donne

$$\text{VaR}(X, \alpha) + \text{Var}(Y, \alpha) \leq \text{VaR}(X + Y, \alpha)$$

Un des inconvénients de la VaR est qu'elle ne prend pas en compte les risques au-delà de ce quantile et qu'elle n'est pas subadditive.

Pour remédier à ces défauts de la VaR, d'autres mesures ont été proposées. Nous en présentons trois, dont l'idée commune est de quantifier le risque lorsque la VaR est dépassée.

### 3.3.2 La Tail-Value-at-Risk

La Tail-Value-at-Risk notée  $TVaR(X, \alpha)$  est définie par :

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}(X, t) dt$$

la Tail-VaR est la moyenne des VaR de niveau supérieur à  $\alpha$ . Notons que la TVaR est plus grande que la VaR correspondante.

### 3.4 Exemple d'application

Dans ce travail, on explore les copules en créant un modèle avec quatre fonds qui suivent les indices de marché pour les actions, les obligations, le dollar et les matières premières. on utilise ensuite le modèle pour générer des valeurs simulées et tester la performance d'un modèle de portefeuille en utilisant les rendements réels et les rendements simulés pour calculer la value at risque (VaR) et l'expected shortfall (ES)

Nous allons utiliser des copules pour modéliser le comportement de quatre fonds ETF : IVV, qui suit le S et P 500 ; TLT, qui suit les bons du Trésor à long terme ; UUP, qui suit le dollar américain indice de change ; et le DBC, qui suit les matières premières.

Dans cet exemple, nous allons utiliser le langage **R** pour l'informatique statistique pour l'ajustement d'une gaussienne et d'une t-copule aux rendements logarithmiques des ETF décrits dans l'introduction. Avec la copule et les marginales, on utilise le modèle pour déterminer la Value at Risk (VaR) et l'Expected shortfall (ES) d'un investissement.

Comme d'habitude, nous commençons par lire le fichier.

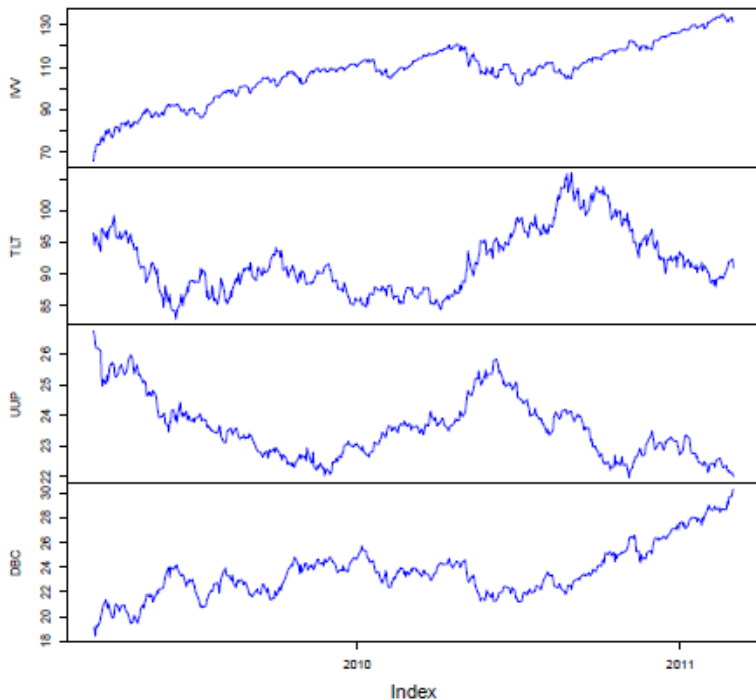


FIGURE 3.1 – Représentation graphique des prix

On observe des relations entre IVV et DBC (stocks et matières premières) et les relations entre TLT et UUP (dollar et bons du Trésor).

Nous calculons ensuite les retours de log. La figure 4.2 est le graphique des rendements.

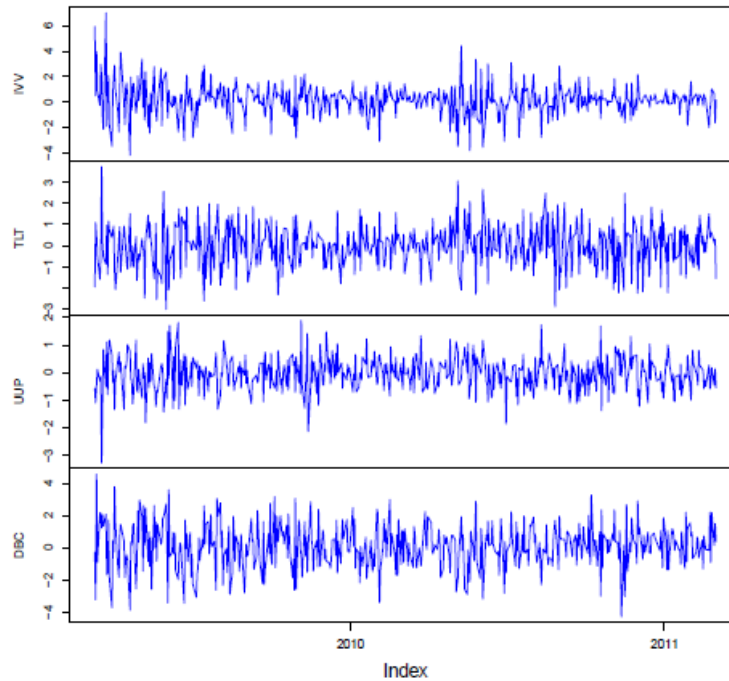


FIGURE 3.2 – Rendements des ETF au cours des 500 derniers jours

```
#Lire les ETF dans un objet zoo
oetf <- read.zoo("ETF.csv", header = TRUE, sep = ",")
#Prendre les 501 derniers jours
T <- length(oetf[,1])
etf <- oetf[(T-500):T,]

# Tracer les graphes des prix
if (plotting)
{
pdf("prix.pdf")
plot(etf, main="Prix de certains ETF selectionn s au cours des 500
derniers jours", col=4)
dev.off()
}
```

```
# Calculer les retours de log
letf <- lag(etf, -1)
retf <- merge( (log(etf) - log(letf) ) * 100 )
```

Nous effectuons ensuite un tracé de paires de graphes pour déterminer si les résultats sont corrélés ou non et comme prévu, il y a une très forte corrélation entre IVV et DBC, comme par exemple dans la figure 4.3.

Nous obtenons ensuite les paramètres pour les marginales, en attribuant une distribution  $t$  à chaque variable en utilisant "fitdistr". Les résultats sont dans le tableau 4.1.

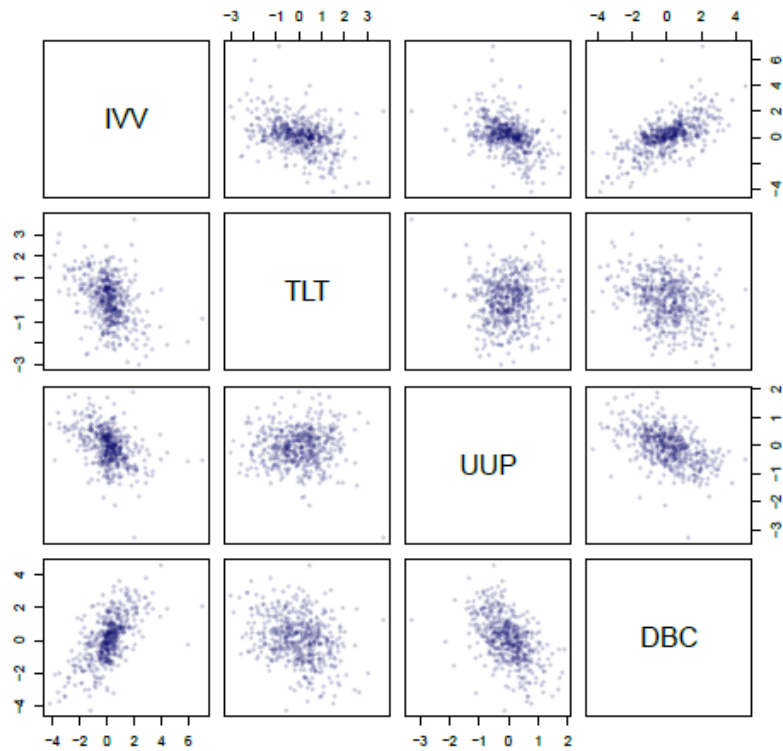


FIGURE 3.3 – Corrélation entre les variables

```
# adapter les distributions
params <- apply (retf, 2, fitdistr, "t")
## Obtenez la matrice r sultante ,
# Pour chaque membre de la liste (chaque membre est un ETF)
# Appliquer la fonction AIC au premier lment (valeur)
# du quatri me lment (loglik) de la liste des param tres
aic <- AIC(sapply (sapply(params,"[", 4), "[", 1), 3)

# Maintenant, prendre les membres 1, 2 et 3 (m, s et df)
# du premier lment (estimation) de la liste des param tres
p <- sapply (sapply(params,"[", 1), "[", c(1,2,3))
```

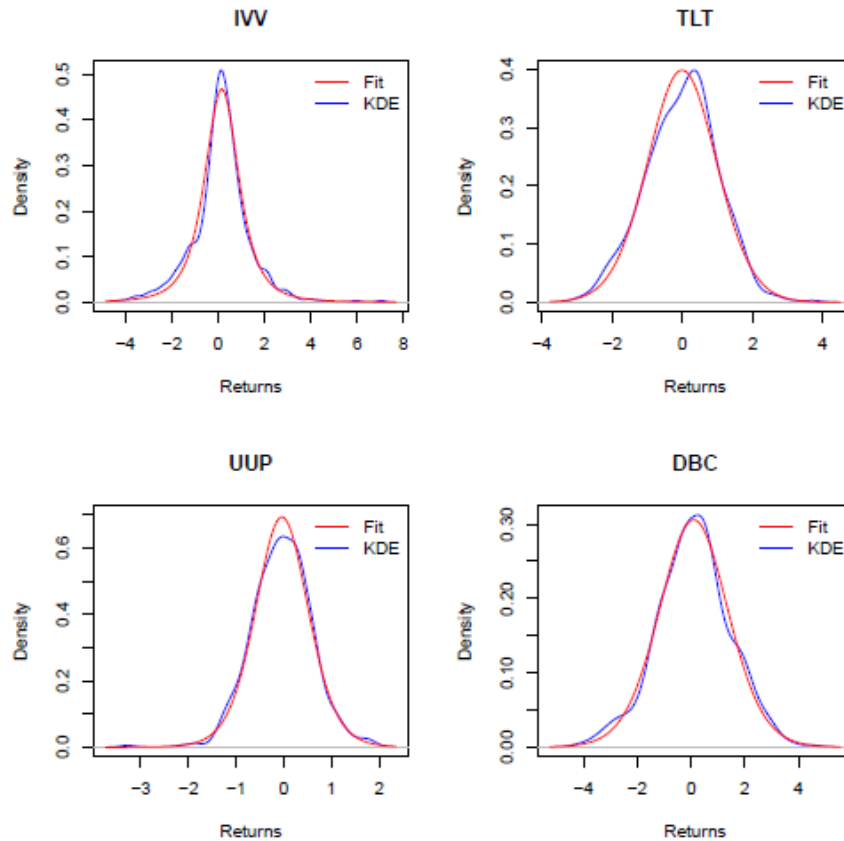


FIGURE 3.4 – Distributions t ajustées

```
a <- t(rbind(aic,p))
rownames(a) <- names(params)
```

Le graphe 4.4 est une comparaison entre la distribution ajustée et le graphe des données réelles. Une fois connues les distributions marginales, nous devons trouver la copule associée à notre modèle. Commençons par utiliser la transformation de probabilité et obtenir chacun des  $F_{Y_1}(Y_1), \dots, F_{Y_d}(Y_d)$ , dont nous savons qu'ils sont uniformes  $(0, 1)$ . Cela se fait par le code ci-dessous :

```
# Maintenant, nous avons besoin des distributions uniformes
uIVV <- pct(retf$IVV, a[1,2], a[1,3], a[1,4])
uTLT <- pct(retf$TLT, a[2,2], a[2,3], a[2,4])
uUUP <- pct(retf$UUP, a[3,2], a[3,3], a[3,4])
uDBC <- pct(retf$DBC, a[4,2], a[4,3], a[4,4])
uret <- cbind(uIVV, uTLT, uUUP, uDBC)\
```

Avec les distributions uniformes, nous pouvons voir quel type de copules paramétriques s'ajuste le mieux. On va ajuster une copule gaussienne et une t-copule "Copule de Student", calculer leur AIC (critère d'information d'Akaike) et voir lequel a fourni le meilleur ajustement.

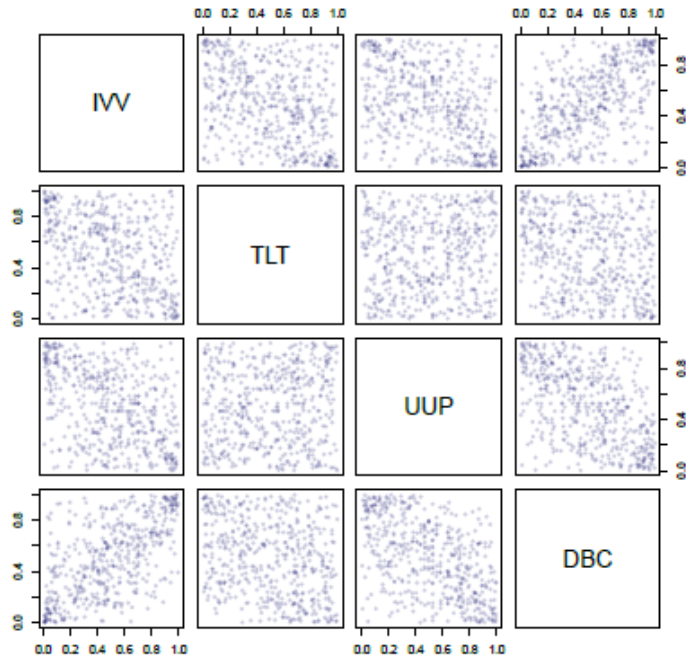


FIGURE 3.5 – La corrélation entre les distributions uniformes

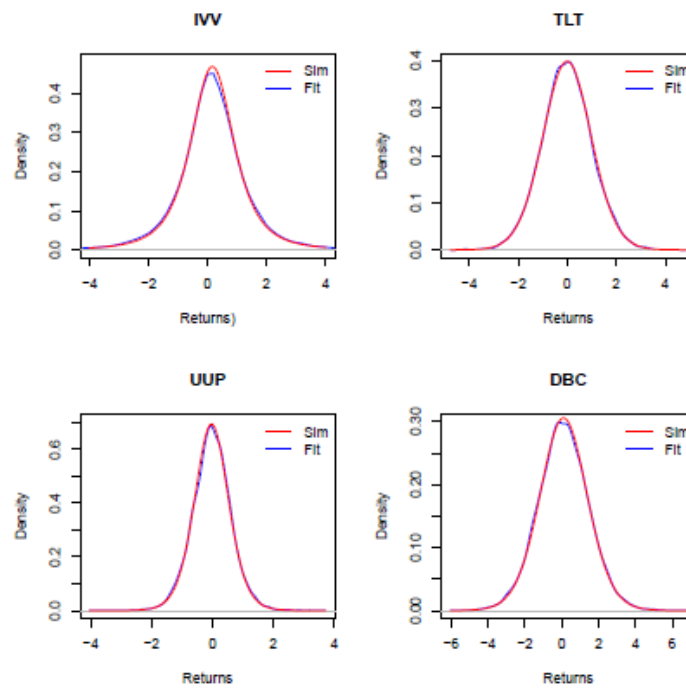


FIGURE 3.6 – Comparaison entre la simulation et l'ajustement

En comparant les deux ajustements, comme le montre le tableau 4.2, nous observons que la t-copule est la meilleure; nous allons donc créer un modèle basé sur les paramètres de notre t-copule. Nous utilisons ensuite le modèle pour générer 10000 observations. Une comparaison graphique entre notre modèle simulé et le modèle ajusté peut être observer sur la figure 4.6 - la simulation est très proche du modèle ajusté.

```

# Ajuster une copule gaussienne
param.cor <- cor(retf)[upper.tri(cor(retf))]
param.cor.start <- rep(mean(param.cor), 6)

ncop <- normalCopula(param=param.cor, dim = 4, dispstr="un")
fit.gaussian <- fitCopula(ncop, uret, method="ml",
start= param.cor.start, optim.control=list(maxit=2000))

# Enregistrer l'AIC de l'ajustement
fit.gaussian.aic = AIC(fit.gaussian@loglik,
\length(fit.gaussian@estimate))

# Ajuster la t-copule
param.df <- mean(a[,4])
tcop <- tCopula(param=param.cor, dim = 4, dispstr="un")
fit.t <- fitCopula(tcop, uret, method="ml",
start=c(fit.gaussian@estimate[1:6], param.df), optim.control=list(maxit=2000))

# Enregistrer l'AIC de l'ajustement
fit.t.aic = AIC(fit.t@loglik,
length(fit.t@estimate))

```

```

cop.best <- tCopula(param=fit.t@estimate[1:6], df=fit.t@estimate[7], dim=4,
dispstr="un")
cop.dist <- mvdc(copula=cop.best, margins = c("ct","ct","ct","ct"),
paramMargins = list(
list(m = a[1,2], s = a[1,3], df = a[1,4]),
list(m = a[2,2], s = a[2,3], df = a[2,4]),
list(m = a[3,2], s = a[3,3], df = a[3,4]),
list(m = a[4,2], s = a[4,3], df = a[4,4])))
set.seed(1)
sim <- rmvdc(cop.dist, 10000)

```

Maintenant que nous avons les observations simulées, nous allons calculer la value at risque (VaR) et l'Expected Shortfall (ES), en utilisant une méthode paramétrique.

Nous allons supposer un portefeuille (choisi arbitrairement) qui investit 30% dans les actions et 70% dans les obligations. Pour calculer les rendements  $R_p$  du portefeuille  $w$ , nous utilisons simplement l'algèbre matricielle pour multiplier les  $R_s$  simulés par les poids, comme dans  $R_p = R_s \times w$ . En modélisant les

La mise en œuvre de l'application des formules en  $R$  est donnée ci-dessous. Notez que dans le code, La VaR et l'ES ont été arrondies au millier le plus proche. Les résultats sont dans le tableau (4.3).

```

# Calculer la VaR et l'ES pour les valeurs simul es
alpha <- 0.05
S <- 1e6
w <- c(0.30,0.15,0.35,0.20)

ret.sim <- as.numeric(sim %*% w)
fitt <- fitdistr(ret.sim, "t")
param <- fitt$estimate

m <- param[1]
df <- param[3]
lambda <- param[2]
var.sim <- -S * ( m + lambda * qt(alpha, df=df))
var.sim.ans <- round (var.sim / 1000) * 1000

es1 <- dt (qt(alpha,df=df),df=df)/(alpha)
es2 <- (df + qt(alpha,df=df)^2) / (df - 1)
es3 <- -m+lambda*es1*es2
ES.sim = S*es3
ES.sim.ans <- round (ES.sim / 1000) * 1000

```

Notre tâche finale est de calculer l'ES et la VaR non-paramétriques, donnés par les formules :

$$\widehat{VaR}_{np}(\alpha) = -S \times \hat{q}(\alpha) \quad (3.1)$$

$$\widehat{ES}_{np}(\alpha) = -S \times \frac{\sum_{i=1} n R_i I(R_i < \hat{q}(\alpha))}{\sum_{i=1} n I(R_i < \hat{q}(\alpha))} \quad (3.2)$$

Où :

$S$  : taille du poste

$\hat{q}(\alpha)$  : quantile de retours d'échantillons

$R_i$  : retour d'échantillon

L'implémentation **R** est donnée ci-dessous :

```

# Calculer la VaR et l'ES pour les valeurs r elles\\
ret.t <- as.numeric(retf %*% w) / 100
q <- quantile(ret.t, alpha)
var.t <- -S*q
ievar <- (ret.t < q)
ES.t <- -S * sum(ret.t * ievar) / sum (ievar)

```

Les résultats sont présentés dans le tableau (4.3).

TABLE 3.1 – Les résultats des paramètres estimés et les AIC pour les marginales  $t$  des ETF.

ETF	AIC	$\nu$	$\mu$	$\nu$
IVV	1570.59	0.16	0.78	2.70
TLT	1452.05	-0.01	0.99	25.79
UUP	947.10	-0.04	0.56	10.09
DBC	1733.16	0.10	1.28	17.57

Le tableau (4.1), représente les résultats des paramètres estimés et les AIC pour les marginales  $t$  des ETF.

Le AIC pour chaque copule ajustée est donnée dans le tableau (4.2),

TABLE 3.2 – Le AIC pour chaque copule ajustée

Copule	AIC
Copule Gaussienne	-559.34
t-copule	-520.38

La VaR et L'ES sont dans le tableau (4.3)

TABLE 3.3 – Calcul de la VaR et l'ES

	VaR	ES
Paramétrique	7113.14	11020.71
Non-paramétrique	7068.17	10056.79

Cet exemple a montré comment estimer les marginaux et les copules, et comment appliquer les copules pour créer un modèle qui prendra en considération la dépendance entre les variables. Il a également montré comment calculer la Value at Risk (VaR) et l'Expected Shortfall (ES).

## Conclusion

Dans ce mémoire, on a donné un aperçu sur la théorie des copules pour modéliser la dépendance entre les variables aléatoires. Les propriétés fondamentales ainsi que les théorèmes importants ont été considérés. Les principales familles de copules ont été étudiées. Les différentes méthodes d'estimation des paramètres d'une copule, ainsi que les techniques de simulation d'une copule ont été discutées. Sur un exemple pratique, on a montré l'utilisation des copules pour estimer un risque financier à savoir la Value at Risk et l'Expected shortfall.

Il serait intéressant :

- d'élargir ce travail à d'autres types de copules : les copules Archimédiennes hiérarchiques dynamiques ou non et les copules en vignes (vine copulas) du fait de leur grande utilisation dans les domaines de la finance et de l'actuariat.
- d'étudier l'impact du choix de la copule sur l'estimation de la VaR ou de l'Expected Shortfall.

---

## *Annexe*

---

```
# Programme du simulation de la copule d'indépendance
C<-function(u1, u2) u1*u2
nsim <- 2000
vV <- matrix(runif(2*nsim), nsim, 2, byrow=T)
plot(vV)
```

```
# Programme du simulation de la borne supérieure de la copule de Frechet
C<-function(u1, u2) min(u1, u2)
vV<-matrix(runif(nsim), nsim, 2)
plot(vV)
```

```
# Programme du simulation de la borne inférieure de la copule de Frechet
C<-function(u1, u2) max(u1+u2-1, 0)
vV<-matrix(runif(nsim), nsim, 2)
vV[,2]<-1-vV[,1]
plot(vV)
```

```

# Programme du simulation de la copule de Frechet
C<-function(u1, u2, alph, bet) (u1*u2)*(1-alph-bet)+
alph*min(u1, u2)+bet*max(u1+u2-1, 0)
alphabet<-c(.3, .3, 1-.3-.3)
vSup<-matrix(runif(nsim), nsim, 2)
vInf<-matrix(runif(nsim), nsim, 2)
vInf[,2]<-1-vInf[,1]
vInd<-matrix(runif(2*nsim), nsim, 2, byrow=T)
fb<-sample(c(1, 2, 3), 1000, replace=TRUE, prob=alphabet)
vV<-matrix(numeric(), nsim, 2)
for(i in 1:nsim){
  if (fb[i]==1)
    vV[i,]<-vInf[i,]
  else if (fb[i]==2)
    vV[i,]<-vSup[i,]
  else vV[i,]<-vInd[i,]
}
plot(vV)

```

```

# Programme du simulation de la copule de Clayton
C<-function(u1, u2, alph) (u1**(-alph)+u2**(-alph)-1)**-(1/alph)
alph<-5
vV<-matrix(runif(nsim*3), nsim, 3, byrow=T)
vTheta<-qgamma(vV[,1], 1/alph, 1)
vY<-sapply(1:2, function(t) qexp(vV[,t+1], vTheta))
vU<-(1+vY)**(-1/alph)
plot(vU)

```

```

# Programme du simulation de la copule de Frank
alph<-10
vV<-matrix(runif(nsim*2), nsim, 2)
vU<-cbind(vV[,1], -1/alph*log(1+vV[,2]*(exp(-alph)-1)
)/(exp(-alph*vV[,1])*(1-vV[,2])+vV[,2])))
plot(vU)

```

```

# Programme du simulation de la copule Normale
alph<-0.8
vV<-MASS::mvrnorm(nsim, c(0, 0), matrix(c(1, alph, alph, 1), 2))
vU<-sapply(1:2, function(t) pnorm(vV[,t], 0, 1))
plot(vU)

```

---

## *Bibliographie*

---

- [1] A.Sklar. (1959), *Fonction de répartition à n dimensions et leurs marges*. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris 8 :229-231. 8
- [2] Abdous, B., K. Ghoudi et A. Khoudraji. (1998), *Non-parametric estimation of the limit dependence function of multivariate extremes*, *Extremes*, 3 :245-268. 41
- [3] Azner, P.H et al (1996), *Coherent measures of risk*, *Math.Finance* 9,(3) : 203-2028. 60
- [4] Bouyè et al (2000), *Copulas for finance-a reading guide ans some applications*, Financial econometrics research guide City University Business School London.
- [5] BEZAT, Antoine. NIKEGHBALI, Ashkan. (2000), *La théorie des extrêmes et la gestion des risques de marché*, Groupe de Travail ENSAE.
- [6] Barbara Choros, Rustam Ibragimov and Elena Permiakova, *Copula Estimation* 51
- [7] C.Genest and J. MacKay. (1986b), *The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform marginals*. *The American Statistician*, 40 :280-285. 1
- [8] C.Genest and J. MacKay .(1986a), *Copules Archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données*. *La Revue Canadienne de statistique*, 14 :145-159. 57
- [9] C.Genest (1987), *Frank's family of bivariate distributions*. *Biometrika*, 74, 549-555. 38
- [10] C. Genest et Rivest, L. (1993), *Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas*, *Journal of the American Statistical Association*, 88 :1034-1043.
- [11] C.Genest and L. P. Rivest. (1993), *Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas*. *Journal of the American Statistical Association*, 88 :1034-1043.
- [12] C.Genest, Ghoudi.K Rivest L.-p. (1995), *A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions*, *Biometrika*, 82 :543-552 .
- [13] C.Genest et B.J.M. Werker. (2002), *Conditions for the asymptotic semiparametric efficiency of an omnibus estimator of dependence paramters in copula models*, in C.M. Cuadras and J.A. Rodr íguez Lallena (Eds.) :103-112. Springer, New York.
- [14] C.Genest et Al. (1987), *Frank's family of bivariate distributions*, *Biometrika* 14 :549-555.

- [15] Cadoux, F. et al. (2006), *Génération de coupes en optimisation combinatoire*. Université Josef Fourier, Grenoble. 15
- [16] Cadoux, D., et Loiseau, J. (2004), *Copules et dépendance : application pratique à la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non vie*. Institut des Actuaire, Paris.
- [17] Cherubini, C. Luciano, U. (2001), *Value at Risk trade-off and capital allocation with copulas*, Economic Notes 30(2) :235-256.
- [18] Cherubini, U et al (2004), *copula methods in finance*, John Wiley and sons Ltd
- [19] Cherubini, U et Al (2000), *Copula methods in finance*, Wiley, New-York.
- [20] Chen, S. Xi. Huang, T-M. (2007), *Nonparametric estimation of copula functions for dependence modelling*, Canad. J. Statist. 35 :265-282.
- [21] Clayton, D.G. (1978), *A model for association in bivariate life tables and its application*, Biometrika, 65(1), 141-151. 36
- [22] Cook, R. D. et Johnson, M. E. (1981), *A family of distributions for modelling nonelliptically symmetric multivariate data*. Journal of the Royal Statistical Society, 43(2) :210-218.
- [23] Demarta, *The copula and related copulas*, International Statistical review V73, issue 1, 11-129.
- [24] Drouet-Mari, D. Kotz, S. (2001), *Correlation and dependence*, World Scientific Publishing Company Inc.
- [25] Denuit, M. Dhaene, J. Goovaerts, M. Kaas, R. (2005), *Actuarial Theory for Dependent Risks Measures*, Wiley , England.
- [26] Devroye, Luc (1986), *Nonuniform random variate generation*, Springer, New-York. 58
- [27] Demarta, et Mc Neil (2004), *The copula and related copulas*, International Statistical review V73, issue 1, 11-129. 54
- [28] Embrechts, P. Lindskog, F. McNeil, A. (2001), *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, Department of Mathematics, ETHZ CH-8092 Zürich. Switzerland. 55
- [29] Embrechts, P., Hoing, A., et Juri, A. (2003), *Using copulae to bound the value-at-risk for functions of dependent risks*. Finance and Stochastics, 7(2) : 145-167.
- [30] Embrechts et al. (2002), *Correlation and dependances : Application pratique à la détermination du besoins en fonds propres d'un assureur non vie*, Institut des Actuariats, Paris. 15
- [31] Embrechts, P., McNeil, A., STRAUMANN, D. (1999) *Correlation and dependence in risk management. Properties and pitfalls*, ETH Zürich, Working paper. 23
- [32] Fermanian, J.D. and O. Scaillet. (2002), *Non-parametric estimation of copulas for time series*, Journal of Risk 5 :25-54.
- [33] Frank, J. Härdle, W-K. Hafner, C-M. (2008), *Statistics of Financial Markets*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg .

- [34] Fermanian, J.D et al (2004), *Some statistical pitfalls in copula modeling for financial applications*, Université de Geneve.
- [35] HÅardle,W. K. Okhrinz, O. Okhri, Y. (2008), *Modeling Dependencies in Finance using Copulae*. SFB 649 discussion paper 2008,043, Humboldt University, Berlin, Germany.
- [36] Hoeffding, W. (1940), *Masstabinvariante korrelationstheorie*. Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin, 5 :181-233. 11
- [37] Jaworski, P. Durante, F. Härdle, W., Rychlik, (2010), *T.Copula Theory and Its Applications*. Proceedings of the Workshop held in Warsaw 25-26 September 2009, Lecture Notes in Statistics, ISBN 978-3-642-12464-8.
- [38] Joe, H. and Xu, J. (1996), *The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models*. Dept. of Statistics University of British Columbia, Tech. Rept. 166. 53
- [39] Joe.H, (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman and Hall, London.
- [40] Kendall, M.G. (1938), *A new measure of rank correlation*. Biometrika. 30(1-2), 81-93. 20
- [41] Kimberling, C.H (1974), *A Probabilistic interpretation of complete comonotonicity*, Aequationes Math, 10, 152-154 . 40
- [42] Kimeldorf et Sampson (1975), *One parameter families of bivariate distribution with fixed marginals* . Com.Stat 4,293-301. 1
- [43] Li, H. (2006), *Tail Dependence of Multivariate Pareto Distributions*. Technical Report , Washington State University, U.S.A.
- [44] Li, B., Genton, M. G. (2013). *Non-parametric identification of copula structures*. Journal of the American Statistical Association, 108(502), 666-675. 34
- [45] Lindskog.F et al (2003), *Kendall's tau for elliptical distributions*, Springer. 15
- [46] Ling, C (1965), *Representation of associative functions*, Publ. Math. Debrecen ,2, 89-212. 32
- [47] MERCIER, Grégoire. *Modélisation des lois multidimensionnelles par la théorie des copules*.
- [48] McNeil, A., Neslehová, J.(2009), *Multivariate archimedean copulas, d-monotone functions and .1-norm symmetric distributions*. The Annals of Statistics 37(5B) :3059-3097.
- [49] Oakes,D (1982), *A model for association in bivariate survival data*, J.R. Stat.Soc, SerB, 44(3), 414-422. 36
- [50] P. Deheuvels .(1979), *La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non-paramétrique d'indépendance*. Académie Royale de Belgique-Bulletin de la Classe des Sciences, 65(5) :274-292. 47
- [51] R. B. Nelson. (2006), *An Introduction to Copulas*. Springer Series in Statistics, USA. 47

- [52] Salvadori, G., DeMichele, C., Kottegoda, N.T. Rosso, R. (2007), *Extremes in Nature, An Approach Using Copulas*, Water Science and Technology Library, vol. 56. Springer, Dordrecht (NL) .
- [53] Shao, Q. (2004), *Notes on maximum likelihood estimation for the three- parameter Burr XII distribution*. Computational Statistics Data Analysis 45 :675.687.
- [54] Schweizer, B. (1991), *Thirty years of copulas. In Advances in probability distributions with given marginals (Rome, 1990)*, volume 67 of Math. Appl., pages 13-50. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht. .
- [55] Schweizer, B. et Sklar, A. (1983), *Probabilistic metric spaces*. North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics. North-Holland Publishing Co. New York.
- [56] Spearman, C. (1904), *General Intelligence," Objectively Determined and Measured S T O R*, The American Journal of Psychology, 15 :201-293. [23](#)
- [57] Widder, D.V (1941), *The Laplace transform*, Princeton Mathematical series, 6 PPX, 406.365, Princeton University. [40](#)

