

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE et POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



**MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE EN VUE DE L'OBTENTION
Du
DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES**

**Specialité
Recherche Opérationnelle**

**Option :
Méthode Et Modèles De Décision**

**Thème
L'Optimisation Des Plannings De La Gestion Des Formations
Du Personnel Navigant Commercial "Hotesses Et Stewards"
Cas (Air Algérie)**

**Présenté par
BACHIR SAFIA
TAIB TASSADIT**

Devant le jury composé de :
Mr Aidene mohand Professeur UMMTO President
Mme Goumeziane Lynda M.Assistante A UMMTO Examinatrice
Mr Chebbah Med M. Assistant A UMMTO Rapporteur

Remerciements

Nous remercions avant tout ALLAH le tout puissant de nous avoir donné la force et le courage de réaliser ce travail.

Nous tenons à remercier notre promoteur, Mr CHEBBAH, qui nous a encadrés pendant notre processus, et nous tenons à lui exprimer notre profonde reconnaissance pour son très bon encadrement, sa patience, sa gentillesse, sa disponibilité, nous la remercions vivement pour le temps qu'il a consacré à notre mémoire, sa confiance, de nous proposer un thème très intéressant.

Nos remerciements vont également aux étudiants de master RO, pour leur grand soutien, leur implication et leurs aides très fréquentes.

Sans oublier d'exprimer notre reconnaissance et gratitude à tous nos enseignants durant notre cursus au département Mathématiques.

Nous tenons à remercier très sincèrement l'ensemble des membres du jury qui nous font le grand honneur d'avoir accepté de juger notre travail.

Dédicace

Je tiens très respectueusement à dédier ce modeste travail

A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi

A mes frères et soeurs "Lynda et warda" et ma belle soeur Saliha et ses deux fils mimo et lilo.

A toute ma famille.

A mes amis intimes :djamal-din ,karima ,meriem ,Abdou, Lounis

A tous mes enseignants.

B.Safia

Dédicace

Je rends grâce à dieu de m'avoir donné le courage et la volonté ainsi que la conscience d'avoir pu terminer mes études.

Je dédie ce modeste travail :
A mes très chère parents pour toutes leurs tendresses et pour leurs nombreux sacrifices que Dieu les gardes.

A mes très chère frères et soeurs.

A tout ma famille.

A Tous mes amis (e).

A tout ceux qui me sont chers dont je n'ai pas cité les noms.

A tous les enseignants du département mathématiques.

A toute la promotion Master 2 recherche opérationnelle 2015/2016.

T.Tassadit

Table des matières

Table des figures	3
Introduction	4
1 présentation de la compagnie Air Algérie	6
1.1 Introduction	6
1.2 Creation -historique de la compagnie Air Algérie	6
1.3 Ressources de la compagnie [1]	8
1.3.1 Moyen humains	8
1.3.2 Moyen matériels	8
1.4 Réseaux [1]	8
1.4.1 Réseau international	9
1.4.2 Réseau national (Domestique)	9
1.5 Structuration et Organisation de la compagnie	10
1.5.1 Organigramme de la compagnie	10
1.6 La Direction Générale [1]	10
1.6.1 Mission	10
1.6.2 Attribution	11
1.7 Organisation de la Direction des Opérations Aériennes (DOA)[9]	11
1.7.1 Mission	11
1.7.2 Attribution	11
1.7.3 Présentation de la direction des opérations Aériennes	12
2 Terminologie et positionnement du problème	14
2.1 Terminologie [1]	14
2.1.1 le personnel navigant	14
2.1.2 Instructeur	15
2.1.3 La formation du Personnel Navigant commercial	15
2.2 Problématique	18
3 La Méthodologie De Résolution	20
3.1 Introduction [3]	20
3.2 Définition opérationnelle de la planification [4]	20
3.3 Définition de la planification dans le contexte aéronautique [4]	20
3.4 Modèles de résolution pour les problèmes de planification [8]	21
3.4.1 Problème d'affectation[5]	21
3.4.2 problème d'affectation simple [14]	21
3.4.3 Problème d'affectation généralisé	22
3.4.4 Affectation quadratique	22

3.4.5	Affectation en parallèle	23
3.4.6	Affectation multi-objectif	24
4	Méthode de résolution	25
4.1	Construction du modèle :	25
4.2	Formulation Mathématique :	26
5	Méthode de résolution	31
5.1	Introduction	31
5.2	introduction à la programmation linéaire :[5]	31
5.3	Méthode du simplexe [10]	32
5.4	Méthode duale du simplexe [10]	34
5.5	Méthode de Branch and Bound [11]	35
5.6	La Méthode de Balas [11]	38
5.7	La méthode de GOMORY	41
5.8	Programmation multi-objectif :[12]	42
5.8.1	Concepts de base :	43
5.8.2	Définitions :	43
5.8.3	Méthode du simplexe multi-critère :[13]	46
5.9	Méthodes muti-objectif linéaire en nombre entiers :[13]	49
5.9.1	Formulation du problème :	50
5.9.2	Définitions et théorèmes :	50
5.9.3	Méthode D'Abbas et Moulai :[2]	50
6	Logiciel LINGO et Applications	54
6.1	Introduction :	54
6.2	Présentation du logiciel LINGO :	54
6.2.1	Interface de logiciel :	55
6.3	Exemple d'application :	59
6.3.1	Programmation des modèles sur LINGO	60
6.4	Présentation des résultats :	66
6.5	Conclusion :	70
	Conclusion	71
	Bibliographie	72

Table des figures

1.1	<i>tableau de la flotte d’Air Algérie</i>	8
1.2	<i>Afrique</i>	9
1.3	<i>Amérique</i>	10
1.4	<i>Asie</i>	10
1.5	<i>Réseau national de la compagnie Air Algérie</i>	11
1.6	<i>Organigramme de la compagnie Air Algérie</i>	12
1.7	<i>Organigramme de la direction des opérations Aériennes</i>	13
5.1	<i>Branchement avec la Méthode de Branch and bound</i>	37
5.2	<i>Branching</i>	38
5.3	<i>Branchement avec Balas</i>	40
5.4	<i>Représentation l’espace des décisions et l’espace des objectifs correspon- dant où $n = 2$.</i>	43
5.5	<i>Point Nadir et point Idéal</i>	45
5.6	<i>Tableau</i>	46
6.1	<i>Licence du logiciel</i>	56
6.2	<i>La barre des menus du logiciel</i>	56
6.3	<i>La barre des outils du logiciel</i>	57
6.4	<i>Application du modèle 1 sur LINGO.</i>	60
6.5	<i>Résultats du modèle 1 sur LINGO.</i>	61
6.6	<i>Suite des résultats du modèle 1 sur LINGO</i>	62
6.7	<i>Résultats du modèle 2 sur LINGO</i>	63
6.8	<i>Suite des résultats du modèle 2 sur LINGO.</i>	64
6.9	<i>Suite des résultats du modèle 2 sur LINGO</i>	65
6.10	<i>Résultats du premier modèle.</i>	66
6.11	<i>Suite des résultats du premier modèle</i>	66
6.12	<i>Suite des résultats du premier modèle.</i>	67
6.13	<i>Résultats du premier modèle avec objectif coût.</i>	67
6.14	<i>Suite des résultats du premier modèle avec objectif coût.</i>	68
6.15	<i>Suite des résultats du premier modèle avec objectif coût.</i>	68
6.16	<i>Résultats du deuxième modèle.</i>	69
6.17	<i>Suite des résultats du deuxième modèle</i>	69
6.18	<i>Suite des résultats du deuxième modèle</i>	70

INTRODUCTION

La recherche operationnelle peut être vu comme appel à des methodes et techniques mathématiques pour résoudre des problèmes complexes rencontrés dans la direction et la gestion de grands et petits systèmes. De ce fait, beaucoup d'entreprises s'interessent à cette discipline, dont le but est d'aider les directions à déterminer une politique de gestion de manière scientifique et rationnelle.

Le thème abordé dans notre étude se situe au niveau de l'optimisation, le nerf de la recherche opérationnelle. En effet, l'optimisation est devenue une discipline incontournable du monde moderne dans lequel nous vivons, tout en étant sujet à une compétition internationale excessive et croissante. Dès lors, il devient nécessaire, voir vital pour les entreprises comme Air Algérie, de maximiser ou de minimiser toute sorte de fonctions auxquelles elle fait face.

La formation du Personnel Navigant(commercial et technique) a toujours été une des principales préoccupations des compagnies aériennes, car la plupart des accidents dans le passé auraient pu être évités si les pilotes ou (stewards,hôteses) avaient une bonne formations, dans le cas où n'importe quelle perturbation inattendue survient, les pilotes ou (stewards,hôteses) doivent savoir agir. Ils doivent être préparés à n'importe quel surgissement inhabituel, la situation est parfois très dangereuses.

Parmi les contraintes auxquelles sont soumis les projets actuels il semble que les plus importantes concernent la planification des formations du Personnel Navigant. Celle-ci est toutefois, la plus difficile à maîtriser du point de vue de la sécurité et la sûreté des opérations aériennes, qui représentent la première priorité d'Air Algérie. Elles constituent les éléments essentiels de la politique menée par l'entreprise pour assurer la satisfaction de sa clientèle.

La planification de la formation périodique du Personnels Navigants Commerciaux, vise à l'optimisation de l'utilisation de cette ressource de manière à couvrir les besoins exprimés par la charge du travail, tout en respectant un ensemble de contraintes bien précis. L'objectif de notre travail est de mettre en oeuvre l'optimisation pour répondre au besoin de la compagnie en termes d'élaborer une planifacation des formations commerciales.

Nous nous focaliserons dans ce mémoire sur le problème de planification des formations du personnel navigant commercial. Ce mémoire sera scindé en six chapitre présentés comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la présentation de la compagnie Air Algérie et particulièrement à la branche d'accueil "DOA" et d'autre part la discription du fonctionnement actuel de l'entreprise. Le deuxième chapitre contient la terminologie et la introduction de la problématique de notre étude.

Le troisième chapitre introduit la méthodologie de resolution, et le quatrième chapitre est réservé à l'approche de la modélisation où on expose le modèle mathématique du problème posé. Le cinquième chapitre sera orienté sur la discussion des méthodes de résolution . Et finalement le dernier chapitre sera consacré à la partie implémentation du logiciel LINGO et la résolution des problématiques par exemples numériques et présentation des résultats obtenus.

Et nous terminons notre travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

présentation de la compagnie Air Algérie

1.1 Introduction

Air Algérie est la principale compagnie aérienne algérienne. Son activité principale est le transport de passagers, de fret ainsi que la maintenance et l'entretien des avions. Pour plus d'informations approfondies, nous allons nous intéresser de plus près à son historique, sa mission ainsi que son réseau.

1.2 Creation -historique de la compagnie Air Algérie

La compagnie Air Algérie a été créée en 15 mars 1947 sous le nom de Compagnie Générale de Transport (CGT), Air Algérie couvrait uniquement le réseau France pour des raisons historiques connues. Le 18 Février 1963, la compagnie Générale des transports Aériens (CGTA) passe sous tutelle du ministère des transports et devient compagnie nationale avec 51% du capital social Algérien les 49% restants étaient détenus par Air France.

En 1970, l'état porte sa participation au capital d'Air Algérie à 83% avec le rachat des actions détenues par les sociétés étrangères autres qu'Air France. En 1973, l'état décide d'intégrer à Air Algérie la société de travail Aérien (STA). Le 15 décembre 1974, l'état porte sa participation à 100%, en rachetant les 17% encore détenus par Air France. Le 17 Février 1975, la compagnie Air Algérie a absorbé les activités de STA, avec la promulgation de l'ordonnance N 75-39, de 17 Février 1979, portant statut d'entreprise sociale, Air Algérie est devenue société nationale de transport et travail Aérien. Elle est chargée dans le cadre du plan national de développement économique et social, d'assurer les services Aériens de transport public réguliers ou non réguliers, nationaux ou internationaux de personne, de marchandises, postes et de travail Aérien.

En 1983 la compagnie a été restructurée en deux compagnies :

- Air Algérie pour le réseau international.*
- Inter Air service pour le réseau national.*

Après dix mois de fonctionnement, Inter Air service disparaissait, ce qui a conduit à une nouvelle organisation interne d'Air Algérie en trois entités autonomes (natio-

nale, internationale, Aérogare) sous l'autorité d'une direction générale unique. Depuis 1983, Air Algérie a subi 7 restructurations organiques. Cette intensité de modification organique témoigne d'une instabilité qui n'a favorisé ni une vision stratégique ni une continuité d'action. Le 17 Février 1997, la compagnie Air Algérie est passée du statut " société nationale de transport et de travail Aérien (Air Algérie) "au statut " société par action ".

- 1998 C'était la libération du transport Aérien.
- 2007 Ouverture de la ligne directe Alger...Montréal.
- 2009 Ouverture de la ligne directe Alger...Pékin.
- 2009 Appel d'offres international d'achat de onze avion (sept moyen-courrier famille Airbus A320 ou Boeing 737, quatre régionaux à turbo propulsion type Bombardier DASH ou ATR) pour une valeur de 111 millions de dollars (accord de l'état Algérienne).
- 2010 l'Organisation européenne de l'aviation civile menace Air Algérie de l'inscrire sur une liste noire si elle ne conforme pas aux règles de sécurité européenne.
- 2012 Air Algérie est concernée par la taxe carbone imposée par l'union européenne applicable à partir de janvier 2012.

1.3 Ressources de la compagnie [1]

1.3.1 Moyen humains

S'élevant à 1650 employés en 1970, l'effectif aujourd'hui a atteint 9402 personnes réparties comme suit :

- Personnels au sol 8139.
- Personnels navigants techniques (PNT) 576 dont 200 commandants de bord, 256 pilotes et 120 mécaniciens navigants.
- Personnel navigants commerciales (PNC) 256 hôtesses et 431 stewards.

1.3.2 Moyen matériels

En janvier 2013 la flotte d'Air Algérie comprend 45 avions de différents types suivants dont l'âge moyen est 10.3 ans :

Appareils	En service	Commandes	Passagers					Notes
			F	C	Y+	Y	Total	
Airbus A330-200	8	—	18	40	—	211	269	JV JW JX JY JZ
				18	14	219	251	JA JB JC
ATR 72-500	12	—	—	—	—	66	66	UI UJ UK UL UM UN UO UP UQ US VQ VR
ATR 72-600	3	—	—	—	—			
Boeing 737-600	5	—	—	16	—	85	101	JQ JR JS JT JU
Boeing 737-700C	—	2	TBA					
Boeing 737-800	19	7	—	24	—	120	144	JO JP KA KB KC
				16	—	132	148	KD KE KF KG KH KI KJ
				48	—	114	162	JJ JK JL JM JN KK KL
				—	—	162	162	
Boeing 767-300	3	—	24	32	—	197	253	JG JH JI
			—	24	—	229		
Cargo								
Lockheed L-100-30T	1	—	NC					
Total	51	8						

FIGURE 1.1 – tableau de la flotte d'Air Algérie

1.4 Réseaux [1]

Le réseau couvert par Air Algérie est de 96400 km, plus de 3000 000 de passagers et près de 20 000 tonnes de fret sont transportés chaque année par la compagnie. En Avril 2013, Air Algérie dessert 29 Aéroports domestiques et 43 destinations internationales dans 28 pays en Afrique du Nord, Afrique de l'Ouest, Europe, Asie, Maghreb et Moyen-Orient et en Amérique du Nord.

1.4.1 Réseau international

Le réseau international regroupe les relations reliant les villes Algériennes avec celles du reste du monde. Il représente 55.15% du trafic passagers total. Il est divisé en 6 réseaux permettant la liaison entre les grandes villes de l'Algérie et les différents pays du monde.

	<u>Ville</u>	<u>Aéroport</u>	<u>Appareil</u>	<u>Fréquence</u>	<u>Remarque</u>
 <u>Burkina Faso</u>	<u>Ouagadougou</u>	<u>Aéroport international de Ouagadougou</u>			
 <u>Côte d'Ivoire</u>	<u>Abidjan</u>	<u>Aéroport d'Abidjan</u>			
 <u>Égypte</u>	<u>Le Caire</u>	<u>Aéroport international du Caire</u>			
 <u>Libye</u>	<u>Tripoli</u>	<u>Aéroport international de Tripoli</u>			Suspendue
 <u>Mali</u>	<u>Bamako</u>	<u>Aéroport international de Bamako-Sénou</u>			
 <u>Mauritanie</u>	<u>Nouakchott</u>	<u>Aéroport international de Nouakchott</u>			
 <u>Maroc</u>	<u>Casablanca</u>	<u>Aéroport Mohammed V de Casablanca</u>			
 <u>Niger</u>	<u>Niamey</u>	<u>Aéroport Niamey</u>			
 <u>Sénégal</u>	<u>Dakar</u>	<u>Aéroport international de Dakar-Léopold Sédar Senghor</u>			
 <u>Tunisie</u>	<u>Tunis</u>	<u>Aéroport international de Tunis-Carthage</u>			

FIGURE 1.2 – Afrique

1.4.2 Réseau national (Domestique)

Le réseau national ou bien domestique regroupe les villes d'Algérie entre elles, son trafic passager représente 44.85% du trafic passagers total. Il est divisé en trois zones : Nord/Nord, Nord/Sud, Sud/Sud.

<u>Pays</u>	<u>Ville</u>	<u>Aéroport</u>	<u>Appareil</u>	<u>Fréquence</u>	<u>Remarque</u>
 <u>Canada</u>	<u>Montréal</u>	<u>Aéroport international Pierre-Elliott-Trudeau de Montréal</u>	<u>Airbus A330</u>		

FIGURE 1.3 – Amérique

<u>Pays</u>	<u>Ville</u>	<u>Aéroport</u>	<u>Appareil</u>	<u>Fréquence</u>	<u>Remarque</u>
 <u>Chine</u>	<u>Pékin</u>	<u>Aéroport international de Pékin</u>	<u>Airbus A330</u>		
 <u>Chine</u>	<u>Canton</u>	<u>Aéroport international de Canton Baiyun</u>	<u>Airbus A330</u>	1 vol/semaine	À partir du 30/10/2016

FIGURE 1.4 – Asie

1.5 Structuration et Organisation de la compagnie

La compagnie Air Algérie a mis en place une nouvelle politique de filiation comprenant quatre filiales principales : l'international, le domestique, le catering et la filiale technique. L'organisation de la compagnie est reposée sur trois fonctions commerciales, technique et exploitation.

1.5.1 Organigramme de la compagnie

1.6 La Direction Générale [1]

1.6.1 Mission

La direction générale en sa qualité de responsabilité de la compagnie a le devoir de s'assurer que toutes les opérations Aériennes et les activités associées peuvent être financées et effectuées conformément aux critères requise par l'autorité Aéronautique et aux éventuels critères additionnels requise par la compagnie. Elle est de sa responsabilité de parcourir les moyens et les ressources nécessaires pour permettre aux personnels d'effectuer les taches pour assurer la sécurité et la sureté des vols et la navigation des Aéronefs. Comme elle maintien des liens directs avec toutes les structures de la compagnie.

Alger	Annaba	Adrar	Bejaia	Bordj Badji Mokhthar	Biskra	Bechar
Constantine	Djanet	El Kolea	El Oued	Ghardaïa	Jijel	Hassi Messaoud
In Amenas	In Salah	In Guezzam	Mascara	Ouargla	Oran	Tébessa
Timimoune	Tamanrasset	Touggourt	Tiaret	Tindouf	Tlemcen	Illizi

FIGURE 1.5 – Réseau national de la compagnie Air Algérie

1.6.2 Attribution

La compagnie Air Algérie est une entreprise de prestation des services dans le domaine du transport Aérien de passagers et de fret, elle a pour taches d'assurer :

- L'exploitation des lignes Aériennes nationales et internationales en vue de garantir le transport des personnes, bagages, marchandise et courrier.
- La participation à toutes les opérations de maintenance des équipements et des Aéronefs.

1.7 Organisation de la Direction des Opérations Aériennes (DOA)[9]

1.7.1 Mission

La direction des opérations Aériennes est chargée de réaliser les vols tels que définis par le programme d'exploitation de la compagnie, en se basant sur trois facteurs essentiels : la sécurité des vols, la ponctualité et l'économie. Elle coordonne et contrôle la bonne exécution des vols en fournissant un personnel de conduite et un personnel navigant compétents et bien formés. Cette direction gère deux types de personnels :

- Personnel Navigant Technique qui s'occupe de la conduite des Aéronefs.
- Personnel Navigant Commercial dont la tâche est d'assurer la prestation à bord.

La DOA est responsable auprès de la direction générale du développement et de l'exécution de la politique des opérations Aériennes. Ses fonctions, tâches et responsabilités sont les suivants :

1. Réaliser le programme d'exploitation de la compagnie en matière de conduite des avions dans des conditions de sécurité et de la qualité de service.
2. Valider tous les standards et pratiques des opérations Aériennes, et s'assurer de leurs conformités aux règlements nationaux et internationaux.
3. Etablir et mettre à jour la liste des personnels navigants.

1.7.2 Attribution

- Veiller au maintien des conditions d'exploitation des vols conformément à la réglementation de l'aviation civile.

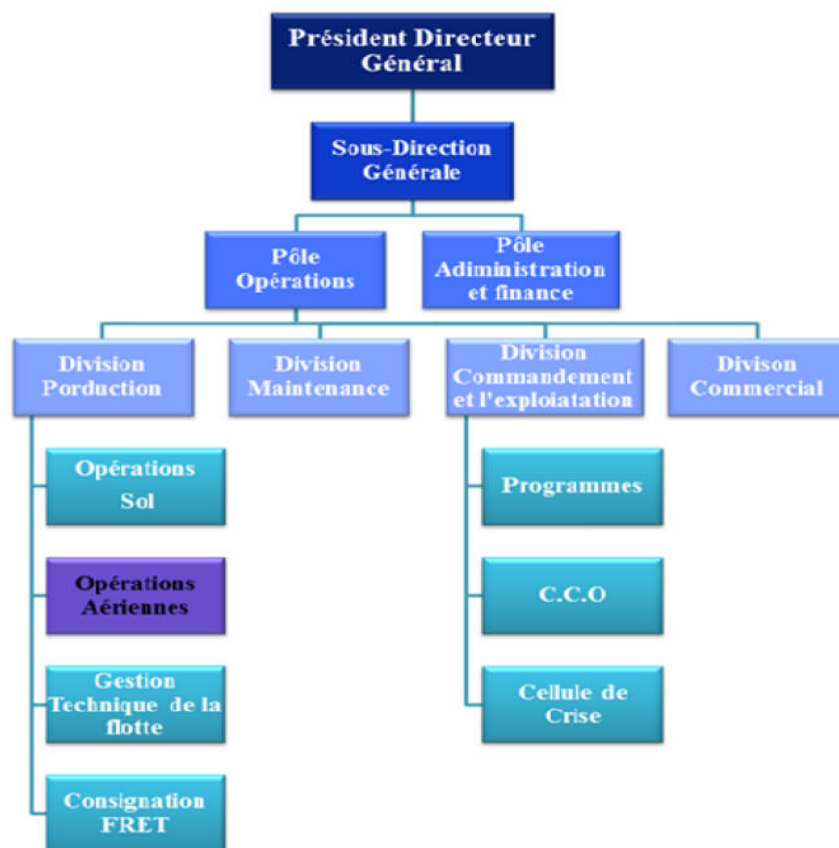


FIGURE 1.6 – Organigramme de la compagnie Air Algérie

- Développer l'activité opération Aériennes, les procédures et techniques de vols qui ont pour objectif principal : la sécurité, l'économie, l'efficacité et l'utilisation rationnelle des équipages et des avions. Veiller à la gestion et au suivi de carrière du Personnel Navigant.
- Assurer la liaison et la coordination avec les autres services de la compagnie.

1.7.3 Présentation de la direction des opérations Aériennes

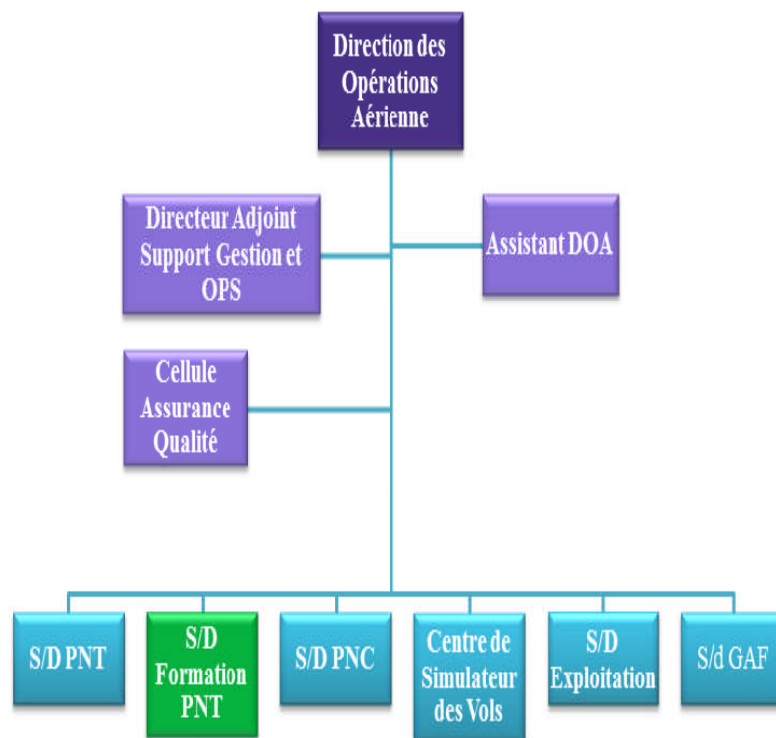


FIGURE 1.7 – Organigramme de la direction des opérations Aériennes

Chapitre 2

Terminologie et positionnement du problème

2.1 Terminologie [1]

2.1.1 le personnel navigant

Dans l'aviation civile, le personnel navigant (PN) est nécessaire pour la manoeuvre de l'avion, la sécurité du système et au bien être des passagers, ce dernier est constitué d'un personnel navigant technique (PNT) : commandant de bord (CBD) et officier pilote de ligne (OPL), et d'un personnel navigant de cabine (PNC) : hôtesse et steward.

1. Le personnel Navigant Technique(PNT) :

Sont qualifiés de Personnel Navigant Technique les membres de l'équipage d'un engin aérien qui interviennent dans la préparation technique et le suivi .

Le CBD est chargé d'assurer l'exécution de la mission dans l'ordre de la sécurité. En plus de l'activité de pilotage, l'équipage est sous ses ordres. Le copilote ou officier pilote de ligne est le second de l'équipage dans l'ordre hiérarchique, il assure les fonctions de pilotage et de navigation après avoir préparé le vol et vérifié l'avion.

2. Le Personnel Navigant Commercial :

A chaque vol, le PNC accueille les passagers à bord de l'avion, les aide à s'installer, leur explique les consignes de sécurité et veille à ce qu'elles soit bien respectées. Pendant le trajet, il s'occupe du confort des passagers et de leur sécurité, ainsi que de la sûreté à bord (lutte contre les interventions illicites). Le Changement de fonction et l'ascension au milieu aéronautique se fait en fonction de l'expérience accumulé par le PNC durant sa carrière ainsi que son sérieux, sa qualité de travail et sa performance. Les exigences pour le passage par les différentes fonctions d'un PNC sont les suivantes :

- 1. Chef de cabine principal INSTRUCTEUR appelé CCPI on le trouve sur gros porteurs (par exemple, les Boeing 747).*
- 2. Chef cabine principal, appelé CCP (on le trouve sur long courrier) par exemple sur les machines (Airbus A330, Boeing B767).*

3. Chef de cabine, appelé CC (on le trouve sur moyen-courrier et sur long-courrier) sous la responsabilité d'un CCP, par exemple (A330, NG).
4. Chef-steward et chef-hôtesse.
5. Stewards et hôtesse (possession du CSS et réussir les examens de qualifications).

2.1.2 Instructeur

Les instructeurs sont des personnel navigant, qui ont passé avec succès l'examen limitations et performances humaines (HPL) ; Ils sont chargés de l'éducation des modules est de simulateur de vol.

2.1.3 La formation du Personnel Navigant commercial

Parcours d'un PNC

1. formation AB-INITIO

Un ABINITIO est un postulant recruté sans expérience aéronautique préalable. Il lui faut d'abord répondre aux critères de recrutement : Niveau d'étude (deux ans de préparation après le bac) et éventuelles concours, aptitude médicale d'admission. Ensuite passer le filtre de la sélection de la personnalité, opérée sur la base de plusieurs approches : Le programme de formation initiale (AB-INITIO) comprend la théorie et la pratique.

Les épreuves de l'examen sont organisées par la DGAC. Une redevance doit être payée à la DGAC (Direction Générale de l'Aviation Civile), pour passer les épreuves (70 euro pour l'épreuve théorique et 280 euro pour l'épreuve pratique en 2010). L'épreuve théorique dure 1h30 et se présente sous la forme d'un QCM de 60 questions. La possession du [certificat de sécurité et du sauvetage CSS](#) comprend :

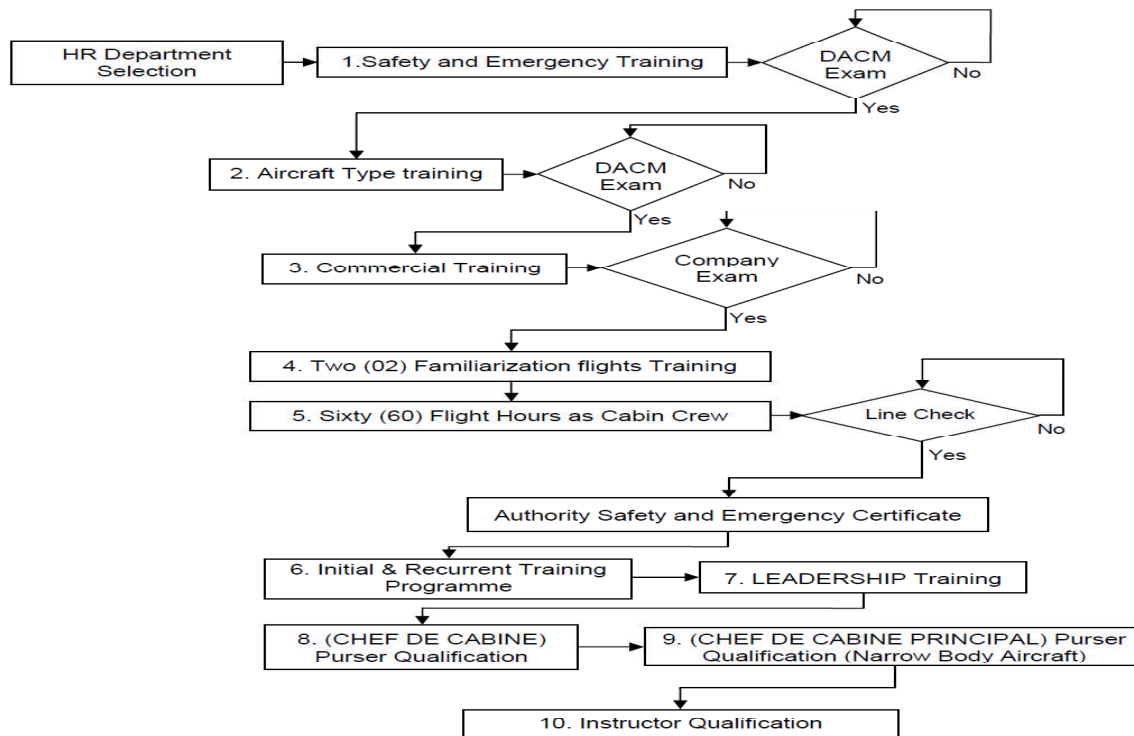
1^o .Formation théorique(sécurité,secourisme, sauvetage) .

2^o .Formation pratique(Epreuve de natation, utilisation des extincteurs, utilisation des balises de détresse, utilisation des bouteilles d'oxygènes et masques à oxygènes, pratique de secourisme : extraction d'un passager de son siège, soixante heures de vols obligatoires en stagiaires).

L'objectif du programme de formation est de former des PNC afin d'acquérir un niveau de compétences requis pour leur permettre d'obtenir un certificat de **SECURITE et de SAUVETAGE (CSS)**, délivré par la DACM " direction de l'aviation civile et de la météorologie ", et par la suite, pour accomplir les missions et attributions afin de fournir, durant la production des vols, les prestations commerciales à bord, selon les procédures de sécurité, sûreté et confort des passagers de la compagnie.

Processus de formation (recrutement)

Avant d'effectuer les tâches du PNC, un élève doit avoir suivi des cours de formation agréés par l'autorité et doit avoir acquis une expérience comme stagiaire et une évaluation de compétences de l'entreprise. Le logigramme ci-après, explicite le processus d'affectation d'un PNC au terme de sa formation.



Formation de PNC récurrente (PNC avec expérience) :[1]

Le programme de formation doit être approuvé par l'Autorité, et tous les éléments de la formation initiale sont effectués par des personnes qualifiées.

La formation décrit les instructions sur les procédures au cours des différentes phases dans des situations d'urgence, la communication et la gestion interpersonnelle d'un vol. Le programme est réparti sur plusieurs cours dans des matières spécifiques. Le stagiaire effectuera une mission de formation en fonction de la formation initiale de type d'aéronef. La formation initiale est organisée avec les parties suivantes comme :

1. La formation de sécurité et d'urgence.
2. Formation à l'aviation de base.
3. Formation de premiers soins.
4. Formation GRM " gestion des ressources de l'équipage ".
5. Formation de SMS " SYSTEM MANAGMENT SECURITY ".
6. Formation DGR " DANGEROUS GOODS ".
7. Formation d'endoctrinement de base.
8. Formation de type d'aéronef et formation de vol.
9. Formation commerciale.

Formation périodiques :

L'organisation de l'aviation civile internationale OACI est une organisation internationale qui dépend des nations unies dont le rôle est de participer à l'élaboration des normes qui permettent la standardisation du transport aérien international. Afin d'être conforme aux normes et aux recommandations de l'OACI, AIR ALGERIE suit de très près les formations périodiques de ses PNC.

Les membres de personnel navigant commercial sont appelés à suivre des formations et des contrôles périodiques au type d'avion sur lequel l'équipage est autorisé à exercer.

Ces formations périodiques sont dirigées par " la sous direction formation PNC".

formation au sol

1. **textbf Gestion des ressources de l'équipage (GRM) :** Des recherches ont conclu que la cause principale de la majorité des accidents d'aviation a été une erreur humaine, et que les principaux problèmes ont été des échecs de la communication entre les membres d'équipage. La formation GRM inclut des cours de gestion de la charge de travail, de la fatigue, et du stress, mais aussi des exercices pratiques comprenant des discussions en groupe, et des analyses d'accidents visant à cerner les problèmes de communication et mettant en évidence des manques d'information ou des carences en gestion d'équipage. La formation s'étend d'une façon optimale sur trois jours, mais une durée de deux jours est acceptable pour couvrir tous les exercices. La période de validité de la formation GRM est de trois ans.
2. **Transports des marchandises dangereuses (DGR) :** Les compagnies aériennes se sont aperçues que, de plus en plus, des articles et matières ayant des propriétés dangereuses (physico-chimique (toxicité, réactivité...)) doivent être transportées par voie aérienne, et que si leur transport n'est pas réglementaire, y aura des risques néfaste sur l'homme, les biens et l'environnement.
Puisque le transport de marchandises dangereuses par avion comporte des risques sur les passagers, les membres d'équipage de conduite ainsi les populations survolées, le Personnel Navigant commercial d'Air Algérie doit effectuer une formation théorique, qui comporte les procédures de secours en cas d'incidents, propres à chaque type de marchandises transportées dont leur nature et état sont connus par le personnel de conduite avant chaque décollage. Ce programme est conforme aux normes internationales très précises de l'IATA(Association International De Transport Aérien), ainsi qu'aux règles relatives au transport de matières dangereuses de l'OACI(Organisation De l'Aviation Civile International). La période de validité d'une formation de transport de marchandises dangereuses est de deux ans.
3. **Equipements de secours et sécurité (E & S) :** Air Algérie assure à chaque membre de l'équipage de conduite, une formation et un contrôle de l'emplacement et de l'utilisation de tout équipement de secours et de sécurité transporté. Les opérations de tous les types d'équipements de survie, et de lutte contre les incendies, l'utilisation des canots de sauvetage, seront appliquées. Chaque année, l'utilisation du gilet de sauvetage, des équipements de secours et de leurs emplacements, et les procédures de sécurités doivent être revus. La période de validité d'un contrôle d'équipement de secours et de sécurité est de trois ans.
4. **Sureté :** Cette formation est introduite dans les manuels des PNC, après l'augmentation spectaculaire des actes criminels (passagers indisciplinés, présence de pirates de l'air, bagage non identifié) qui mettent en danger la sécurité de l'aviation civile. Cette formation consiste à connaître les mesures et les comportements à prendre en cas de présence d'un bagage non identifié ou d'un passager indiscipliné à bord de l'avion en mettant l'accent sur la communication verbale et les techniques de neutralisation. La plus grande menace qui guette l'aviation civile

est le détournement d'avions, c'est pour cela, la formation aborde les différents niveaux de menaces et le rôle de l'équipage quand ils sont contraint à faire face aux différentes situations qui sont de natures à compromettre la sécurité du transport aérien et apprendre à survivre à toutes ces expériences. La période de validité de la formation sûreté est de trois ans.

La validité des formations récurrente :

Training	Validity	Duration
Safety And Emergency Safety Policy and associated procedures Standard Operating Procedures Emergency procedures Emergency equipment	24 months	1 day
Practical training	36 months	4 hours
DGR	24 months	1 day
CRM	24 months	1 day
Security	36 months	1 day
First Aid	36 months	1 day/year
Remain qualified training	12 months	2 days
Commercial Cabin Crew Training	24 months	1 day
Quality Training	36 months	2 hours
SMS training	36 months	4 hours
Line evaluation per aircraft type	12 months	/

2.2 Problématique

Le transport aérien rencontre certains problèmes de planification d'une complexité majeure qui subsistent jusqu'au jour d'aujourd'hui, c'est pour cela la que planification est d'une importance capitale pour les compagnies aériennes. Cette démarche est un outil de gestion dont l'objectif est d'obtenir des programmes permettant d'organiser le travail afin de satisfaire les besoins et résoudre les soucis.

La compagnie aérienne envisage de maximiser ses bénéfices grâce à une bonne exploitation de son personnel navigant, en assurant leurs opérationnalités qui requiert : la bonne santé, la bonne formation technique , théorique, qui doivent être mise à jour périodiquement.

La compagnie Air Algérie effectue de nombreux vol par jour. Chaque vol nécessite du personnel navigant technique (PNT)"pilote, commandant de bord et copilote" et du personnel navigant commercial(stewards, hôtesse). Le personnel navigant commercial s'occupe de la sécurité des passagers embarqués(obligations sécuritaires, assistance à personne) et assure le service commercial à bord des avions (service hôtelier, restauration).

La sous direction formation PNC est la responsable désignée auprès de l'autorité pour la formation des PNC. En effet, chaque membre de l'équipage doit subir un certain nombre de formations périodique.

La sous direction formation PNC est chargée d'établir les programmes de formations des PNC au sol et en vol. Elle fixe aussi les niveaux de compétences requises à l'embauche, elle s'assure que les membres de l'équipage sont suffisamment formés pour exécuter les fonctions qui leur sont assignées et identifiés.

Le plus grand souci pour une compagnie aérienne reste l'efficacité de la planification de la formation du PNC de façon à *minimiser le nombre de PNC non opérationnels*.

Les différentes formations sont caractérisées par les spécificités suivantes :

1. Une durée.
2. Un lieu.
3. Un coût.
4. Une logistique de support aux personnels.

Chacune de ces formations a une période de validité (une date d'effet et une date d'expiration). La gestion de ces qualifications par la structure responsable de la formation des PNC (La sous direction formation PNC), consiste à organiser les différents stage aux profits des PNC pour maintenir en cours de validité leur certificats (CSS), tout en permettant une disponibilité maximale du personnel pour réaliser le programme commercial de la compagnie.

Air Algérie opte pour programmer les formations, d'une façon mensuelle et de manière naturelle, c'est-à-dire que chaque PNC est programmé pour passer sa formation quand sa période de validité arrive à terme au cours du mois.

Pour les formations au sol, elles sont généralement effectuées dans le pays, chaque mois, une estimation du nombre de séances possibles est faite en fonction du nombre de PNC susceptible à être programmés, tout en sachant que le nombre de PNC dans chaque groupe est limité à 15 PNC pour des raisons de confort et surtout d'assimilation.

Enfin les plannings des formations PNC qui sont programmés au niveau de centre de formation PNC sont envoyés à la sous-direction Exploitation, précisément à la direction des programmes qui établit son programme de vols pour le mois suivant, à partir de ces plannings et l'activité et le besoin de la période. A cette étape, les plannings de formations PNC programmés sont validés.

Avec cette méthode, la compagnie se heurte à quelques problèmes, comme l'indisponibilité des créneaux proposés par les centre de formations, qui est dû à la réservation tardive de ces derniers, ce qui engendre un autre problème de taille qui est, le nombre important de PNC ayant au moins une formation expirée, provoquant des écarts pour la compagnie et des annulations de vols dans les pires des cas.

Et comme déjà souligné , notre problème est l'optimisation des plannings de formation pour les PNC.

Chapitre 3

La Méthodologie De Résolution

3.1 Introduction [3]

La planification en général, fait partie des nombreux défis auxquels la recherche opérationnelle tente d'apporter des solutions , de nombreuses méthodes de résolution peuvent être employées, on peut retrouver les problèmes de planification dans beaucoup de domaine comme la planification des horaires d'équipes de travail en industrie, la planification des présentations dans les conférences , la planification des horaires de cours dans le milieu académique, la planification des formations du personnel du naviguant commercial dans les compagnies aériennes. . .

3.2 Définition opérationnelle de la planification [4]

Pour le planificateur professionnel, la planification est un processus global qui vise à affecter les ressources humaines pour chaque intervalle de temps sur un horizon donné, de telle sorte que les besoins par intervalle soient couverts et que les différentes contraintes soient satisfaites.

3.3 Définition de la planification dans le contexte aéronautique [4]

Dans un contexte aéronautique, la charge du travail est constituée des tâches à réaliser en vol et au sol, tâches qui sont déterminées dans la plupart du temps par le programme des vols.

Suivant le type du travail à effectuer, le personnel se divise en deux catégories ; le personnel au sol et le personnel naviguant.

Dans notre cas la planification est essentiellement un outil de gestion qui doit permettre aux responsables de prendre des décisions sur une base plus rationnelle. Donc la planification est un processus d'aide à la décision qui vise à organiser des activités humaines (principalement des formations) dans le temps et à optimiser l'utilisation des ressources (les formateurs), de façon à couvrir les contraintes en respectant les conditions avec un objectif défini qui résulte un planning.

3.4 Modèles de résolution pour les problèmes de planification [8]

La création de planning relève de nombreux problèmes d'optimisation nous proposons un bref passage en revue de problème d'optimisation combinatoire qui émerge dans différents stades de la planification : le problème d'affectation.

3.4.1 Problème d'affectation[5]

Le problème de d'affectation est l'un des problèmes d'optimisation combinatoire fondamentaux dans la branche d'optimisation ou de recherche opérationnelle en mathématique. Le problème d'affectation consiste à trouver des liens entre les éléments de deux ensembles distincts, de manière à minimiser un cout et respecter des contraintes d'unicité de lien.

Le problème d'affectation peut se formuler comme un programme linéaire en nombres entiers, tel que la programmation linéaire en nombres entiers est un domaine très riche de la programmation mathématique. Les recherches dans ce domaine sont nombreuses et on fait leurs premières apparitions en 1958.

Un problème de programmation linéaire en nombre entiers (PLNE) est un programme linéaire, sous contraintes linéaires, ou les variables sont contraintes d'être entières.

3.4.2 problème d'affectation simple [14]

soit un ensemble de m opérations qui doivent être exécuté par n ressources, $n \geq m$

Chaque couple (opération $i = 1..m$, ressource $j = 1..n$) a un coût associé c_{ij} , qui représente la dépense associée à la réalisation de l'opération i par la ressource j , en supposant que chaque opération doit être exécuter une seule fois et que chaque ressources est utilisée au plus par une seule opération, le problème peut être modélisée de la manière suivante :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'opération } i \text{ est affecté à la ressource } j , \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.1)$$

On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \forall i \in 1, \dots, m \quad (01) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, \forall j \in 1, \dots, n \quad (02) \\ \text{Min } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad . \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Les conditions de ce problème se retrouvent dans de nombreuses applications mettant en jeu des problèmes d'allocation de ressources, elles sont généralement appelées "contraintes d'affectation".

Ce problème en théorie des graphes peut se ramener à "un problème de couplage dans un graphe biparti".

Des algorithmes simples et efficaces existent pour résoudre ce problème en particulier la "méthode Hongroise" proposée par Kuhn en 1955, est un algorithme dual qui s'appuie sur une modélisation du problème d'affectation sous forme d'un programme linéaire.

3.4.3 Problème d'affectation généralisé

Dans un cadre plus général, où par exemple les ressources sont agrégées, la contrainte (02), appelé contrainte de capacité, n'est plus suffisante pour décrire l'utilisation des ressources.

Dans ce cas, une ressource j est caractérisée par sa capacité S_j et chaque opération i nécessite la quantité de ressource r_{ij} si elle utilise la ressource j la contrainte (02) devient :

$$\sum_{i=1}^m r_{ij}^k x_{ij} \leq S_j^k, \forall k \in 1, \dots, k \quad (3.3)$$

Dans la formation du problème, l'indice k traduit l'existence fréquente de plusieurs contraintes de capacité généralement liées à l'utilisation de ressources annexes ou complémentaires par rapport aux ressources de base. Le problème d'affectation simple ayant des contraintes de capacité exprimées par (02) devient un problème d'affectation généralisé.

Le modèle mathématique de l'affectation généralisée :

$$Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \text{Min}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in J} x_{ij} = 1, \forall i \in I \\ \sum_{i \in I} v_{ij} x_{ij} \leq a_j, \forall j \in J \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J \end{array} \right. \quad (3.4)$$

3.4.4 Affectation quadratique

modèle mathématique

$$Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in I} \sum_{l \in J} c_{ijkl} x_{ij} x_{kl} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \text{Min}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in J} x_{ij} = 1, \forall i \in I, \\ \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \forall j \in J, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J \end{array} \right. \quad (3.5)$$

3.4.5 Affectation en parallèle

Si on pose c_{ij} rendement de la personne (i) si elle est affectée à la tâche (j) . Dans le cas de tâches en parallèles, le modèle est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow Max, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \forall j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Affectation en série

L'exécution des tâches est très influencée par l'éléments de faible rendement P_{min} qu'il faudra identifier et de suite maximiser son rendement, cela se traduit comme le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Min_i(\sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}) = P_{min} \longrightarrow Max, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \forall j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Il existe des méthodes pour résoudre ce type de problème (max/min) . Mais à ce

niveau, pour plus de compréhension ; on reformule le problème de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{min} \longrightarrow Max, \\ \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \geq P_{min} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \forall j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \end{array} \right. \quad (3.8)$$

3.4.6 Affectation multi-objectif

Modèle mathématique :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow Min, \\ \dot{Z} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} \longrightarrow Max, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \forall j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Chapitre 4

Méthode de résolution

Introduction :

Etant une étape primordiale dans la résolution des problèmes rencontrés dans la pratique, la modélisation permet d'obtenir une représentation simplifiée et exhaustive et une vision globale et claire de tous les acteurs intervenant dans le système étudié. Ainsi cette construction doit passer par les étapes suivantes :

- 1. Identification des différents paramètres du problème.*
- 2. Identification des variables de décision : en se posant la question " que veut apprendre le décideur par la résolution de ce problème ? "*
- 3. Etablissement des contraintes.*
- 4. Formulation des fonctions objectives.*

4.1 Construction du modèle :

Notre étude se charge de mettre en œuvre un outil d'optimisation permettant d'élaborer un planning optimal des différentes formations des PNC. Le planning comprend l'organisation des emplois du temps des différentes formations des PNC, qui suit un ordre bien précis par cause de priorité tout en tenant compte des différentes contraintes suivantes :

- Dans le cas d'un empêchement d'un instructeur, ce dernier se fait remplacer par un collègue déjà présent au niveau d'aéroport.*
- La nécessité de l'exactitude des jours de formation communiqués aux PNC.*
- Le PNC doit accomplir ces formations chaque semaine . "Et doit réussir ses tests avoir au moins 70 % car un échec d'examen d'un PNC peut conduire à la sanction du PNC et cela l'empêche d'effectuer sa mission de vol"(Cette dernière remarque ne concerne pas notre étude).*
- La compagnie d'Air Algérie a défini des espaces de formation pratique et des espaces pour les formations théoriques (dispose de trois salles de cours dont chacune doit avoir au maximum 15 PNC).*
- L'agent de planning aérien doit alerter les PNC pour faire leur formation, car chaque qualification a une validité limitée dans le temps et si le PNC ne renouvelle pas ses validités il ne sera pas apte à faire ses fonctions dans un avion.*
- Nous avons constaté que ce travail manuel pose énormément de problèmes aux régulateurs pour l'élaboration des plannings de formation des PNC, car :*
- La validité de chaque qualification est limitée dans le temps.*

- Le nombre aléatoire de personnel navigant mensuel affecté à la formation par la direction des programmes de vols
- Le nombre d'instructeur est limité car ils doivent accomplir leurs missions au vol et aussi au sol pour faire les formations aux PNC convoqués à valider leurs qualifications.
- Le nombre de salle de cours aussi limité. (Car la répartition n'est pas en général optimale).
- Aucune optimisation dans la gestion des plannings.
- La détermination des plannings de formation des PNC n'est pas basée sur des critères scientifiques et par suite ne tient pas compte des coûts de l'opération.

4.2 Formulation Mathématique :

Définition des paramètres :

- p : nombre d'instructeurs indexé par i , $p=33$.
- c : nombre de classes disponibles indexé par j , $c=3$.
- t : nombre de créneau par jour. $T=5$.
- d : nombre de jour considéré .
- k : représente un créneau.

Définitions des variables :

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si l'instructeur } i \text{ donne un cours à la classe } j \text{ pendant le créneau horaire } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si une prestation (coût) est donné pour l'instructeur } i \text{ à la classe } j \text{ au creneau } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

y_{ijk} : signifie que l'instructeur (remplaçant) i est disponible à la classe j dans le creneau k . (Concernant le créneau d'intervention).

$$y_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{ijk} = 0 \\ 0 & \text{si } x_{ijk} = 1 \end{cases}$$

$$x_{ijks} = \begin{cases} 1 & \text{si l'instructeur } i \text{ donne un cours à la classe } j \text{ pendant le créneau horaire } k \text{ dans la salle } s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

NBC_{ij} le nombre de cours que l'instructeur i doit dispenser à la classe j

La fonction objective : L'objectif du problème dans un premier temps est de trouver un planning de formation des PNC respectant les contraintes. On peut se donner comme objectif de minimiser le nombre de trous dans le planning. Pour cela il faut placer de préférence les cours dans les créneaux 9h45 à 11h15 et de 12h30 à 14h et de 14h15 à 15h45. En effet si ces créneaux ne sont pas occupés mais que ceux de 8h à 9h30 et de 16h à 17h 30 le sont, il y aura des heures creuses dans la journée. Nous devons donc pénaliser au maximum les cours placés dans les créneaux de début et de fin de journée. D'où la fonction objectif .

$$\text{Min} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \sum_{l=0}^{d-1} (x_{i,j,l*t+1} + x_{i,j,l*t+t})$$

Définition des contraintes :

$$\forall i = 1..p, j = 1..c : \sum_{k=1}^{d*t} x_{ijk} = NBC_{ij}$$

Cette contrainte indique que les cours donnés par chaque instructeur i à chaque classe j doivent être planifiés.

$\forall j = 1..c, k = 1..d * t : \sum_{i=1}^p x_{ijk} \leq 1$. Cette contrainte spécifie qu'une classe ne peut pas suivre plus d'un cours en même temps.

$$\forall i = 1..p, k = 1..d * t : \sum_{j=1}^c x_{ijk} \leq 1.$$

Cette contrainte indique qu'un instructeur ne peut donner qu'un seul cours à la fois.

$$\forall i = 1..p, j = 1..c, l = 1..d : \sum_{k=(l-1)t+1}^{l*t} x_{ijk} \leq 1.$$

Cette contrainte impose que plusieurs cours d'une même matière ne peuvent avoir lieu le même jour.

La contrainte $x_{7,1,24} = 1$ indique que les formations de vol donné par l'instructeur 7 se font tous les mercredis après midi pour la classe 1 (créneau 24).

La contrainte $x_{4,2,16} = 1$ indique que les formations de GRM donné par l'instructeur 4 se font tous les mardis après midi pour la classe 2 (créneau 16).

Pour $i = 4, \forall j = 1..3, k = 16..20 : x_{4jk} = 0$.

Cette contrainte interdit les formations en commercial pour les trois classes le mardi pour l'instructeur 8 (créneau 16-20).

$$\forall i = 1..8, j = 1..3, k = 29..30 : x_{ijk} = 0.$$

Cette contrainte interdit les formations pour les trois classes (créneau 29-30).

$$\text{Pour } i = 2, \forall j = 1..3, k = 1..5 : x_{2jk} = 0$$

Cette contrainte interdit les cours d'aviation de base de l'instructeur 2 le samedi (créneau 1 à 5) pour les trois classes.

$$\forall i = 1..p, j = 1..c, k = 1..d * t : x_{ijk} \in \{0, 1\}.$$

Cette contrainte spécifie que les variables sont booléennes.

Modèle mathématique 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Min} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \sum_{l=0}^{d-1} (x_{i,j,l*t+1} + x_{i,j,l*t+t}) \\
 \forall i = 1..p, j = 1..c : \sum_{k=1}^{d*t} x_{ijk} = NBC_{ij} \\
 \forall j = 1..c, k = 1..d * t : \sum_{i=1}^p x_{ijk} \leq 1 \\
 \forall i = 1..p, k = 1..d * t : \sum_{j=1}^c x_{ijk} \leq 1 \\
 \forall i = 1..p, j = 1..c, l = 1..d : \sum_{k=(l-1)t+1}^{l*t} x_{ijk} \leq 1 \\
 x_{7,1,24} = 1 \\
 x_{4,2,16} = 1 \\
 \text{Pour } i = 4, \forall j = 1..3, k = 16..20 : x_{4jk} = 0. \\
 \forall i = 1..8, j = 1..3, k = 29..30 : x_{ijk} = 0. \\
 \text{Pour } i = 2, \forall j = 1..3, k = 1..5 : x_{2jk} = 0 \\
 \forall i = 1..p, j = 1..c, k = 1..d * t : x_{ijk} \in \{0, 1\}
 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Modèle 2 :Modèle multi-objectif

Dans ce modèle notre objectif est minimiser le nombre de trous dans le planning. D'où la fonction objectif(1) :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \sum_{l=0}^{d-1} (x_{i,j,l*t+1} + x_{i,j,l*t+t})$$

Et aussi minimiser les coûts de formation des PNC, d'où la fonction objectif (2) :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \sum_{k=1}^{d*t} (x_{i,j,k} * p_{i,j,k})$$

D'où on a le modèle mathématique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Min} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \sum_{l=0}^{d-1} (x_{i,j,l*t+1} + x_{i,j,l*t+t}) \\
 \text{Min} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \sum_{k=1}^{d*t} (x_{i,j,k} * p_{i,j,k}) \\
 \forall i = 1..p, j = 1..c : \sum_{k=1}^{d*t} x_{ijk} = NBC_{ij} \\
 \forall j = 1..c, k = 1..d * t : \sum_{i=1}^p x_{ijk} \leq 1 \\
 \forall i = 1..p, k = 1..d * t : \sum_{j=1}^c x_{ijk} \leq 1 \\
 \forall i = 1..p, j = 1..c, l = 1..d : \sum_{k=(l-1)t+1}^{l*t} x_{ijk} \leq 1 \\
 x_{7,1,24} = 1 \\
 x_{4,2,16} = 1 \\
 \text{Pour } i = 4, \forall j = 1..3, k = 16..20 : x_{ijk} = 0. \\
 \forall i = 1..8, j = 1..3, k = 29..30 : x_{ijk} = 0. \\
 \text{Pour } i = 2, \forall j = 1..3, k = 1..5 : x_{ijk} = 0 \\
 \forall i = 1..p, j = 1..c, k = 1..d * t : x_{ijk} \in \{0, 1\}
 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Modèle 3 :Modèle de remplacement des instructeur :

Après la résolution du mmodèle 1 mono-objectif, on a obtenu un planning. Et dans le but de rendre ce planning plus performant On utilise ce modèle pour remplacer les instructeur qui ne sont pas disponible en cas d'un empechement dans les créneaux d'intervention

$$x_{ijk} + y_{ijk} = 1 \quad \forall i=1..p, j=1..c, k=1..d*t$$

Modèle 4 :Modèle multicritère avec fonction quadratique :

Laprsencedesinstructeurdanslesmmecrneauxengendredescots.

$$2(x_{7,1,24} * x_{4,2,24}) + 3(x_{8,3,12} * x_{1,1,12})$$

Le modèle est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Min} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \sum_{l=0}^{d-1} (x_{i,j,l*t+1} + x_{i,j,l*t+t}) + 2(x_{7,1,24} * x_{4,2,24}) + 3(x_{8,3,12} * x_{1,1,12}) \\
\text{Min} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \sum_{k=1}^{d*t} (x_{i,j,k} * p_{i,j,k}) + 2(x_{7,1,24} * x_{4,2,24}) + 3(x_{8,3,12} * x_{1,1,12}) \\
\forall i = 1..p, j = 1..c : \sum_{k=1}^{d*t} x_{ijk} = NBC_{ij} \\
\forall j = 1..c, k = 1..d * t : \sum_{i=1}^p x_{ijk} \leq 1 \\
\forall i = 1..p, k = 1..d * t : \sum_{j=1}^c x_{ijk} \leq 1 \\
\forall i = 1..p, j = 1..c, l = 1..d : \sum_{k=(l-1)t+1}^{l*t} x_{ijk} \leq 1 \\
x_{7,1,24} = 1 \\
x_{4,2,16} = 1 \\
\text{Pour } i = 4, \forall j = 1..3, k = 16..20 : x_{4jk} = 0. \\
\forall i = 1..8, j = 1..3, k = 29..30 : x_{ijk} = 0. \\
\text{Pour } i = 2, \forall j = 1..3, k = 1..5 : x_{2jk} = 0 \\
\forall i = 1..p, j = 1..c, k = 1..d * t : x_{ijk} \in \{0, 1\}
\end{array} \right. \quad (4.7)$$

Modèle 5 : Modèle Générale

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Min} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{s=1}^S (x_{i,j,l*t+1,s} + x_{i,j,l*t+t,s}) \\
\forall i = 1..p, j = 1..c : \sum_{k=1}^{d*t} \sum_{s=1}^S x_{ijks} = NBC_{ij} \\
\forall j = 1..c, k = 1..d * t, s = 1..S : \sum_{i=1}^p x_{ijks} \leq 1 \\
\forall i = 1..p, k = 1..d * t, \forall s = 1..S : \sum_{j=1}^c x_{ijks} \leq 1 \\
\forall i = 1..p, j = 1..c, l = 1..d, \forall s = 1..S : \sum_{k=(l-1)t+1}^{l*t} x_{ijks} \leq 1 \\
\forall i = 1..p, j = 1..c, k = 1..d * t : \sum_{s=1}^S x_{ijks} \leq 1 \\
x_{7,1,24,1} = 1 \\
x_{4,2,16,2} = 1 \\
\text{Pour } i = 4, \forall j = 1..3, k = 16..20, \forall s = 1..S : x_{4jks} = 0. \\
\forall i = 1..8, j = 1..3, k = 29..30, \forall s = 1..S : x_{ijks} = 0. \\
\text{Pour } i = 2, \forall j = 1..3, k = 1..5, \forall s = 1..S : x_{2jks} = 0 \\
\forall i = 1..p, j = 1..c, k = 1..d * t, s = 1..S : x_{ijks} \in \{0, 1\}
\end{array} \right. \quad (4.8)$$

Chapitre 5

Méthode de résolution

5.1 Introduction

Les méthodes exactes sont utilisées dans la recherche opérationnelle afin de trouver la solution ou les solutions optimales pour les problèmes d'optimisation , dans notre chapitre les programmes linéaires sont des programmes à variables mixtes (en nombre entiers). Parmi les méthodes exactes de résolution des problèmes d'optimisation qui s'appliquent à nos problèmes nous citons :

- Méthode du simplexe.
- M-méthode.
- Méthode duale du simplexe.
- Méthode de Branch and Bound.
- Méthode de Balas .
- Méthode du simplexe multi-critère .
- Méthode multi-critère Abbas et Moulai .

5.2 introduction à la programmation linéaire :[5]

Tout problème de programmation linéaire peut se former de la manière suivante : Trouver les valeurs des variables $x = (x_j, j = (1, .., n))$ qui maximisent ou minimisent la fonction linéaire suivantes :

$Z = (x_1, x_2, ..., x_j) = c_1x_1 + c_2x_2 + + c_jx_j + ... + c_nx_n = \sum_{j \in (1, .., n)} c_jx_j \rightarrow \max(\min)$
sous les contraintes suivantes :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0, j \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

où $c_j, j \in \{1, \dots, n\}$ représente les couts des différents produits les coefficients c_j et $a_{ij} (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$ sont supposés être des nombres réels, en plus on considère que l'entier m est inférieur ou égal à n , tous les nombres $b_i (i = 1, \dots, m)$ sont tous positifs ou nuls et le rang du système (2) est inférieur ou égal à m .

définition 1 :

- La fonction Z est appelée la fonction objective.
- Les contraintes (2) sont appelées les contraintes principales.
- Les contraintes (3) sont dites contraintes directes.

Remarque 1 :

Si l'objectif consiste à minimiser une fonction linéaire : $Z = Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$ Alors on maximisera la fonction linéaire opposée : $\bar{Z} = -Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_jx_j - \dots - c_nx_n$

5.3 Méthode du simplexe [10]

La méthode du simplexe est une méthode itérative. Elle démarre d'un point extrême (sommet de départ) et passe au sommet voisin, et ceci constitue une itération de l'algorithme du simplexe. Pour cela, on doit définir le point extrême de départ et le test d'arrêt. Soit le problème standard de programmation linéaire suivant :

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{Max} \quad (1)$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ (3) ici on suppose $b_1, b_2, \dots, b_m \geq 0$, et $\text{leRang} A = m \leq n$. Le problème (1)-(3) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\{ c'x \rightarrow \text{Max}; Ax = b; x \geq 0 \} \quad (5.3)$$

où $A = A(I, J)$ est la matrice des conditions, $a_j = A(I, j)$ les colonnes de A , $c' = c'(J)$ vecteur des couts, $b = b(I)$ le vecteur des contraintes (second membre), $x = x(J) = (x_j, j \in J)$ le vecteur des variables, $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$ les ensembles d'indices des lignes et des colonnes de sa matrice A .

Problème standard et solution de base :

Définition 1 :

Tout vecteur x vérifiant les contraintes (2) et (3) est appelé solution réalisable (admissible) du problème (1)-(3).

Définition 2 :

Une solution réalisable x° est optimale si $c'x^\circ = \text{Max}(c'x)$, pour tout solution réalisable x .

Définition 3 :

Une solution réalisable x est dite de base si $(n-m)$ des composantes sont nulles, et aux autres $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$ correspondent m vecteurs $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}$ de la matrice de condition A linéairement indépendants. L'ensemble $J_B = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ est appelé ensemble des indices de base.

$J_H = J \setminus J_B$ ensemble des indices hors base.

Autrement :

La solution réalisable $x = x_{(J)}$ est solution de base si $x_H = x_{(J_H)} = 0$, $\det A_B \neq 0$, ou $A_B = A(I, J_B); x_{(J_B)} \geq 0$

La matrice A_B est appelée matrice de base, $x_{(J_B)}$ les composantes de base, $x_{(J_H)}$ les composants hors base,.

Définition 4 :

Une solution de base réalisable x est dite non dégénérée si $x_j > 0, j \in J_B$.

L'accroissement de la fonctionnelle de la fonction objective Z est égale à :

$\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = c'\bar{x} - c'x = c'\Delta x$; Construisons le m -vecteur $y = y(I)$ vecteur des potentiels : $y' = c'_B A_B^{-1}$ et vecteur $\Delta = \Delta(J) = (\Delta_j, j \in J)$, est dit vecteur des estimations :

$$\{ \Delta' = y' A - c'; \Delta_j = y' a_j - c_j, \quad j \in J \} \quad (5.4)$$

Critère d'optimalité : [10]

Soit $\{x, A_B\}$ une solution réalisable de base de départ. L'inégalité $\Delta_H = \Delta(J_H) \geq 0$ est suffisante et dans le cas de la non dégénérescence elle est nécessaire pour l'optimalité de $\{x, A_B\}$.

Algorithme du simplexe : [10]

Soit $\{x, A_B\}$ une solution réalisable de base de départ et supposons que le critère d'optimalité $\Delta_j \geq 0, j \in J_H$ n'est pas vérifié.

Choisissons l'indice $j_0 \in J_H / \Delta_{j_0} = \min(\Delta_j < 0, j \in J_H)$.

Le but de l'itération est de faire rentrer cet indice j_0 dans la base. Donc il faut trouver un indice $j_1 \in J_B$, qui sortira de la base. Et ceci constitue l'itération, qui procède au passage de la solution de base (point extrême) $\{x, A_B\}$ à la solution $\{\bar{x}, \bar{A}_B\}$ et tel que $Z(\bar{x}) \geq Z(x)$.

La nouvelle solution de base $\bar{x}$ sera trouvée de la manière suivante :

$\bar{x} = x + \Theta l$, où l est la direction du changement de x et Θ le pas le long de cette direction.

Construisons la direction l de la manière suivante :

Sur J_H , posons :

$$l_j = \begin{cases} 0, & j \in J_H \setminus j_0 \\ 1, & j = j_0 \end{cases}$$

Sur J_B : $\bar{x}$ doit être réalisable, donc elle doit vérifier $A\bar{x} = b$ et comme $Ax = b$ donc $\Theta Al = 0$, c'est à dire $Al = 0$.

De cette dernière relation on obtient :

$$l_B = l(J_B) = -A_B^{-1} A_H l_H$$

De là $\bar{x}_H = x_H + \Theta l_H = \Theta l_H \geq 0$ et $\bar{x}_B = x_B + \Theta l_B \Rightarrow \bar{x}_j = x_j - \Theta A_B^{-1} a_{j_0}$

Si les composantes du vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$, alors $\bar{x}_j \geq 0, \forall \Theta \geq 0$, donc on peut prendre $\Theta = \infty$ et on aura une solution infinie ;

Parmi les composantes du vecteur $A_B^{-1} a_{j_0}$, ils existent celles qui sont positives.

Pour avoir $\bar{x}_B \geq 0$, il faut prendre un pas maximal Θ° :

$\Theta^\circ = \min \Theta_j, (j \in J_B) \Theta_j = \min \{ \frac{x_j}{x_{jj_0}} / x_{jj_0} > 0, j \in J_B \} = \Theta_{j_1}, j_1 \in J_B$, où $x_{j_0 j}$ est la j^{me} composante de $A_B^{-1} a_{j_0}$

La nouvelle base sera :

$$\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1 \text{ et } \bar{A}_B = (A_B \setminus a_{j_0}) \cup a_{j_1}$$

5.4 Méthode duale du simplexe [10]

Etant donné le problème primal de programmation linéaire :

$$(P) \begin{cases} c'x \rightarrow \text{Max} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

et son dual :

$$(D) \begin{cases} b'y \rightarrow \text{Min}, \\ A'y \geq c, \\ y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

Définition 1 :

De l'ensemble J , choisissons un sous ensemble $J_B \subset J$, $|J_B| = m$ et soit $A_B = A(I, J_B)$ une sous matrice inversible de A .

En utilisant la matrice A_B , on construit le vecteur y :

$$y' = c'_B A_B^{-1} \quad (1)$$

Le vecteur y est dit le plan dual basique et A_B la matrice de base si : $A'_H y \geq c_H$ (2)

Où $A_H = A(I, J_H)$, $J_H = J \setminus J_B$.

Définition 2 :

Un plan dual basique y est dit non dégénéré si $A'_H y > c_H$.

En utilisant un plan dual basique de départ y , on construit les vecteurs suivants :

$$\delta(J) = A'y - c, x(J) = (x(J_B), x(J_H)), x(J_B) = x_B = A_B^{-1}b, x(J_H) = x_H = 0$$

appelés Coplan et pseudo plan respectivement du problème (P).

Remarque 1 :

Par construction $\delta(J_B) = 0$ et $\delta(J_H) \geq 0$.

Si y est un plan dual basique alors δ et x sont dits basiques.

Critère d'optimalité :

L'inégalité $x_B \geq 0$ (3), est suffisante pour l'optimalité du plan dual basique y , du problème (D), et elle est nécessaire dans le cas où y est non dégénérée.

Le pseudo plan basique correspondant, vérifiant (3) est une solution optimale du problème primal (P).

Algorithme dual du simplexe :[10]

Considérons un plan dual basique y avec sa matrice de base A_B .

En utilisant A_B , on calcule le pseudo plan $x = (x_B = A_B^{-1}b, x_H = 0)$.

Si $x_B \geq 0$ alors x est optimale pour le problème (P), et y optimal du dual (D) sinon, on calcule $x_{j_0} = \min(x_j, j \in J_B)$, de la l'indice j_0 doit sortir de la base et la colonne a_{j_0} doit sortir de A_B , c'est à dire, on change de base ($A_B \rightarrow \bar{A}_B$).

Le changement de base entraîne le changement du plan dual y ($y \rightarrow \bar{y}$) qui entraîne aussi le changement du coplan δ ($\delta \rightarrow \bar{\delta}$).

Ce changement de coplan se fera de la manière suivante :

$\bar{\delta} = \delta + \Delta\delta$, où

$$\Delta\delta_j = \begin{cases} \delta, j = j_0, \\ 0, j \in J_B \setminus j_0; \end{cases}$$

où δ est le pas dual positif ou nul.

$\Delta\delta_j = \delta x_{j_0 j}$, $j \in J_H$, où $x_{j_0 j}$ est la j^{me} composante du vecteur $A_B^{-1}a_j$.

Pour que $\bar{\delta}$ soit un coplan, il faut avoir un pas maximal δ° :

$$\delta^\circ = \min \left\{ \frac{-\delta_j}{x_{j_0 j}} \right\}_{(x_{j_0 j} < 0, j \in J_H)} = \frac{-\delta_{j_1}}{x_{j_0 j_1}}$$

La nouvelle base sera $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1$, et $\bar{A}_B = A(I, \bar{J}_B)$, la nouvelle itération débutera avec $\bar{x} = (\bar{x}_B = \bar{A}_B^{-1}b, \bar{x}_H = 0)$.

5.5 Méthode de Branch and Bound [11]

La méthode de Branch and Bound est utilisé pour résoudre par exemple les problèmes de programmation linéaire entier et mixte. Le principe de cette méthode est

le branching (Séparation) et puis les évaluations. On procèdera à la séparation des solutions réalisable en sous ensembles de solutions réalisables. On éliminera dans la recherche les branches non réalisables (pas de solution réalisable). Pour l'exploitation des branches on adopte les techniques suivantes :

- Explorer les branches qui pourraient vraisemblablement contenir la solution optimale.
- Ajouter à l'exploration une branche et ses descendant lorsqu'on peut évaluer une branche pouvant contenir la solution optimale.
- Théorie de la méthode de Branch and Bound dans le cas de programmation linéaire :

(avec des contraintes d'intégrité, maximisation)

On adoptera la terminologie suivante : On appelle PLVM programme linéaire aux variables mixtes. On associe au PLVM un programme linéaire sans contraintes d'intégrité.

1. On résout le programme linéaire et on obtient à la fin la solution optimale et un Z_{BS} (la valeur de la fonction à l'optimal). BS : Borne supérieure.
2. On considère la solution optimale du programme linéaire la plus proche et réalisable on obtient avec cette nouvelle solution la valeur Z_{BI} Pour la fonction objectif. BI : Borne inférieure .

$$\text{ou } Z_{BI} \leq Z_{opt} \leq Z_{BS}$$

Présentation de l'algorithme " Branch and Bound " : Les méthodes de «Branch and Bound» sont essentiellement constituées des trois éléments principaux suivants :

- **Procédure de séparation :**

Cette procédure déterminera, à chaque fois qu'il sera nécessaire de séparer un sous ensemble de solutions. Le nombre de sous ensembles créés n'est pas nécessairement identique à chaque séparation, il peut dépendre du résultat de l'analyse du sous problème parent.

- **Procédure d'évaluation :**

Cette procédure consiste à analyser un sous problème : pour l'essentiel, cette analyse vise à évaluer la valeur optimale de la fonction objectif du sous problème, plus précisément à déterminer une borne supérieur de cette valeur

- **Procédure de cheminement :**

Cette procédure indique quels sous ensemble analyser et dans quel ordre. Bien évidemment, il est souhaitable d'examiner le moins de sous ensembles possibles : certains d'entre eux pourront ne pas être séparés car, par exemple, leur analyse mettra en évidence qu'ils ne contiennent pas de solutions meilleures que celles déjà trouvées.

Un tel sous ensemble ou le sommet correspondant de l'arborescence est alors sondé ou bien encore que cette branche de l'arborescence est élaguée. C'est parce que certains sous ensembles de solutions ne devront pas être examinés explicite-

ment que les méthodes Branch and Bound sont appelées méthodes d'énumération implicite. Lorsqu'un sommet de l'arborescence est sondé, il conviendra de remonter dans l'arborescence vers un autre sommet situé à un niveau supérieur ou égale dans l'arborescence.

Exemple :(Résoudre avec la méthode de BRANCH AND BOUND)

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \min \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + 3x_5 \leq -2 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 \leq -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ x_j \in \{0, 1\}; \quad j \in \{1, \dots, 5\} \end{array} \right. \quad (5.9)$$

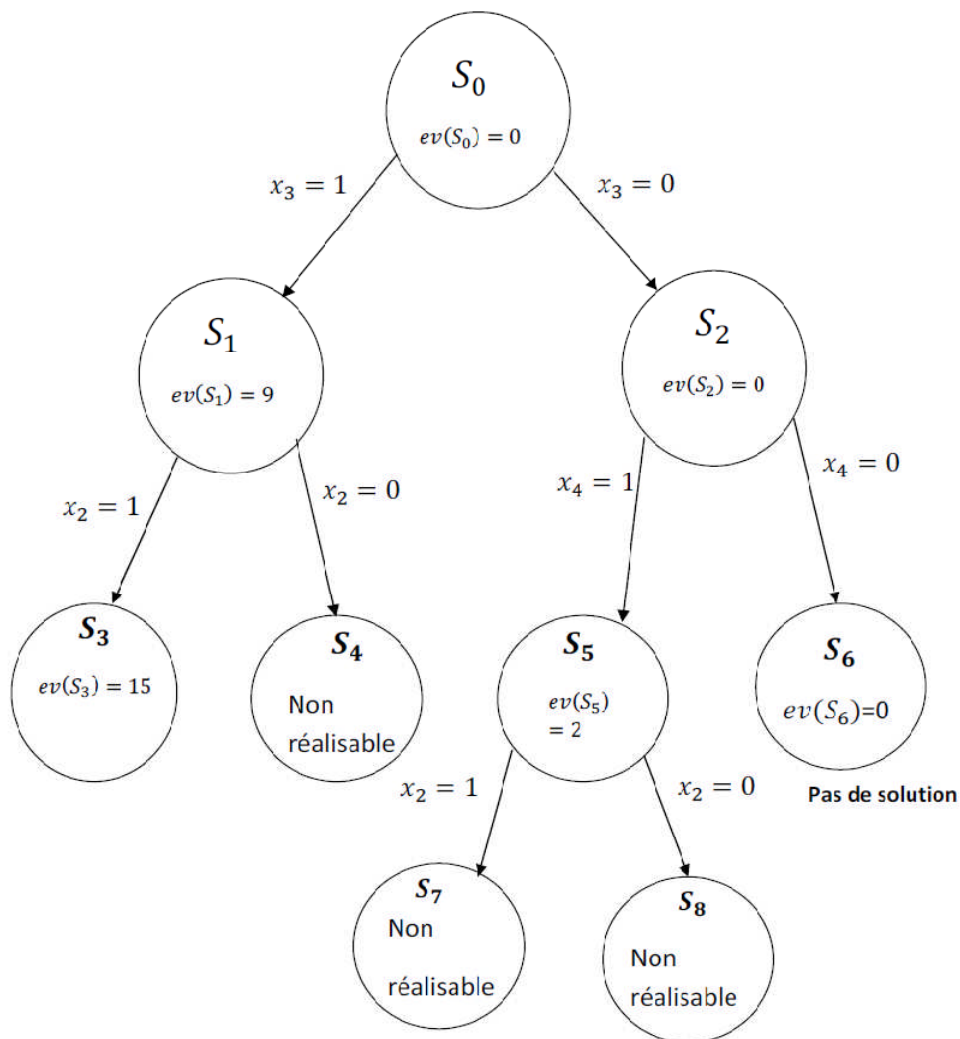


FIGURE 5.1 – Branchement avec la Méthode de Branch and bound

Conclusion :

Avec la méthode de Branch and Bound (Algorithmme) on trouve :

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0 \\ x_2^* &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_3^* &= 1 \\x_4^* &= 0 \\x_5^* &= 0\end{aligned}$$

est solution optimale et $Z(x^*) = 15$.

5.6 La Méthode de Balas [11]

La méthode de Balas est une méthode arborescente, comme toute autre technique arborescente (Branch and Bound). Cette méthode peut être classée dans la classe des problèmes NP-difficile.

Noeuds de séparation (branching) :

Chaque noeud de (sommet) S_t correspond à une solution partielle. Ce noeud correspond à deux sous ensembles d'indices pour les variables.

Soient :

1. $F(t)$ Les sous ensembles d'indices fixés à 0 ou à 1 pour les variables au niveau du noeuds S_t
2. $F(t) \Rightarrow F_0(t)$ indice de variables fixé à 0 .
3. $F(t) \Rightarrow F_1(t)$ indice de variables fixé à 1 .
4. $L(t)$ Les sous ensembles d'indices de variables non fixés (libres).

Pour faire le branching on choisira donc une variable telle $j \in L(t)$, à ce moment on aura deux files dans la figure 5.2 suivante :

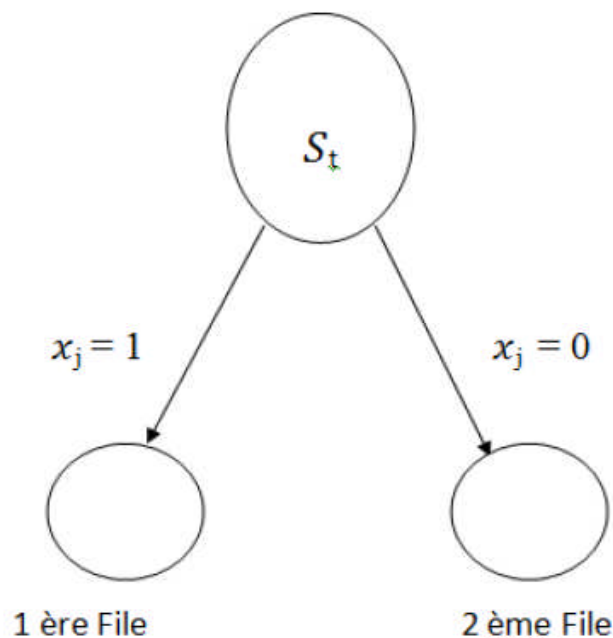


FIGURE 5.2 – Branching

Remarque 1 :

Le problème posé c'est comment choisir sur le quel on fera le branching (séparation).

Pour cela écrivons le problème sur n'importe quelle noeud (sommet) S_t .

$$\begin{aligned} Z_t &= \sum_{j \in L(t)} C_j x_j + \sum_{j \in F_1(t)} C_j \rightarrow \text{Min} \\ \sum_{j \in L(t)} a_{ij} x_j &\leq b_i - \sum_{j \in F_1(t)} a_{ij} = S_i \\ i &= \{1, 2, \dots, m\} \end{aligned}$$

Nous appelons l'évaluation $(S_t) = \sum_{j \in F_1(t)} C_j$ valeurs meilleur pour ce noeud S_t (est un noeud quelconque de l'arborescence).

Les tests sur les noeuds (les sommets S_t) :

Après création d'un noeud S_t et son évaluation il faut faire les tests suivants :

1. On abandonne un noeud si l'évaluation S_t est supérieur ou égale a $Z_{trouves}$ valeur de la solution provisoire trouvé.
2. x solution obtenu en posant $x_j = 0$ et $j \in L(t)$ est solution réalisable pour $PL_{(0;1)}$ avec $S_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ alors le noeud est terminal en (S_t) son évaluation est $\text{Min } Z_t$.

Décision de séparation au niveau d'un sommet (noeud) :

Comment séparer au niveau d'un sommet ? (quelle variable de séparation à choisir)
Balas à donné une technique pour minimiser le nombre de branching à effectuer et cela comme suivant :

Soit deux sous ensemble $Q(t)$ et $R(t)$ définis comme suit :

$$\begin{aligned} Q(t) &= \{i / S_i < 0\} \quad i = 1 \dots m \\ R(t) &= \{j \in L(t) \mid \exists i \in Q(t), a_{ij} < 0\} \end{aligned}$$

Mesure de proximité :

Balas propose pour ses solutions (pour $P(t) < 0$)

$$P(t) = \sum_{i \in Q(t)} S_i = \sum_{i \in \{1 \dots m\}} \text{Min}(0, S_i)$$

La proximité d'une solution si on fixe x_j à 1 est la suivante :

$$P(t, j) = \sum_{i \in \{1 \dots m\}} \text{Min}(0, S_i - a_{ij})$$

le terme $(S_i - a_{ij})$ est le second membre Si on fixe x_j à 1 .

Pour déterminer la variable x_{j^*} à choisir pour faire le branchig (Séparation) la méthode propose de choisir l'indice $j^* \in \mathbb{R}(t); P(t; j^*) = \max(P(t, j)), j \in \mathbb{R}(t)$.

conclusion :

- $P(t; j^*) = 0$, la solution obtenue pour $x_{j^*} = 1$ et $\forall j \in L(t) \setminus \{j^*\}, x_j = 0$ est une nouvelle solution réalisable (noeud terminal).
- En cas d'exæquo on choisi la variable de cout faible.

Exemple : Résoudre avec la méthode de Balas l'exemple suivant :

$$\begin{cases} Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \rightarrow \text{min} \\ -x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 + 4x_5 \leq -2 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 4x_4 - x_5 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 \leq -2 \\ x_j \in \{0, 1\} \quad j = \{1, \dots, 5\} \end{cases} \quad (5.10)$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_i	$S_i - a_{ij}$	$S_i - a_{ij}$	$S_i - a_{ij}$
-1	1	-6	-1	4	-2	-1	4	-1
2	-5	-4	4	-1	0	-2	4	-4
1	2	-2	1	2	-2	-3	0	-3
/	/	/	/	/	$r(t)$	-6	0	-8

— $Q(t)=\{1,3\}$

— $R(t)=\{1,3,4\}$

On va brancher dans $x_3 = 0$

x_1	x_2	x_4	x_5	S_i	$S_i - a_{ij}$	$S_i - a_{ij}$
-1	1	-1	4	-2	-1	-1
2	-5	4	-1	0	-2	-4
1	2	1	2	-2	-3	-3
/	/	/	/	$r(t)$	-6	-8

— $Q(t)=\{1,3\}$

— $R(t)=\{1,4\}$

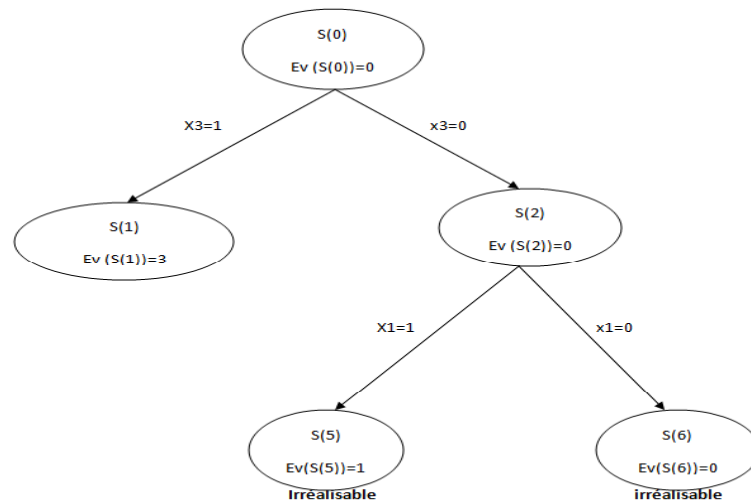


FIGURE 5.3 – Branchement avec Balas

5.7 La méthode de GOMORY

Exemple d'application : Soit le problème linéaire en nombre entier suivant :
 $Z = x_1 + 2x_2 \longrightarrow \text{Max}$

$$PLNE \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3, x_1 \in \mathbb{N} \\ x_2 \leq 2, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La forme standard et relaxé du PLNE : $Z = x_1 + 2x_2 \longrightarrow \text{Max}$

$$PL \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_j \geq 0; j = 1 \dots 4 \end{cases}$$

On a $j = \{1, 2, 3, 4\}$ et $j_B = \{3, 4\}$ et $j_H = \{1, 2\}$
 Donc la solution de base réalisable est $x = (0, 0, 3, 2)$. Dressons le premier tableau du simplexe du PL :

c_b	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	Θ
0	a_3	3	2	1	1	0	3
0	a_4	2	0	1	0	1	2
$Z = 0$	/	Δ	-1	-2	0	0	/

On remarque que la relation $\Delta_j \geq 0, \forall j \in J_H$ n'est pas vérifiée, donc la solution réalisable de base initiale n'est pas optimale, on doit alors changer la base de la manière suivante :

$$\text{Min}(j \in J_H \Delta_j) = \Delta_2 = -2$$

Donc $j_0 = 2$, de là le vecteur a_2 va rentrer dans la nouvelle base, et calculons $\Theta^\circ = \min(j \in J_B, \Theta_j)$, d'où $\Theta^\circ = 2$, de là le vecteur a_4 va sortir de la base, et la nouvelle base est $J_B = \{2, 3\}$. Dressons le 2^{me} du simplexe pour déterminer la nouvelle

solution :

C_b	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	Θ
0	a_3	1	2	0	1	-1	1/2
2	a_2	2	0	1	0	1	/
$Z = 4$	/	Δ	-1	0	0	2	/

La nouvelle solution de base est $\bar{x} = (0, 2, 1, 0)$; qui n'est pas optimale, car $\Delta_1 = -1 < 0$

Dressons le 3^{me} tableau du simplexe :

C_b	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4
1	a_1	1/2	1	0	1/2	-1/2
2	a_2	2	0	1	0	1
$Z = 9/2$	/	Δ	0	0	1/2	3/2

La solution de la troisième itération est optimale pour le PL mais pas optimal pour le PLNE. Pour cela on exhibe la coupe de gomory tel que : $f_i \leq \sum_{j \in J_H} f_{ij} x_j$

$$1/2 \leq 1/2 x_3 + 1/2 x_4$$

D'où on a le nouveau PL :

$$Z = x_1 + 2x_2 \longrightarrow \text{Max}$$

$$PL' \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ -1/2 x_3 - 1/2 x_4 + x_5 = -1/2 \\ x_j \geq 0; j = 1 \dots 5 \end{array} \right.$$

En utilisant le dual du simplexe on resoud le dernier PL'.

1^{ere} itration :

C_b	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	a_1	1/2	1	0	1/2	-1/2	0
2	a_2	2	0	1	0	1	0
0	a_5	-1/2	0	0	-1/2	-1/2	1
$Z = 9/2$	/	Δ	0	0	1/2	3/2	0
/	/	σ	/	/	1	3	/

Le critère d'optimalité n'est pas vérifié car $\exists x_j \leq 0, j \in J_B$, on doit faire sortir a_5 de la base car $\min x_j = x_5$. On a $\sigma_j = \frac{\Delta_j}{x_{5j}}$ et $\min \sigma_j = \sigma_3$, donc on doit faire rentrer a_3 dans la base.

D'où on la 2^{eme} itration :

C_b	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	a_1	0	1	0	0	-1	1
2	a_2	2	0	1	0	1	0
0	a_3	1	0	0	1	1	-2
$Z = 4$	/	Δ	0	0	0	1	1

Le critère d'optimalité est vérifié, donc $\bar{x} = (0, 2, 1, 0, 0)$ est la solution optimale du problème $(PL)'$ avec $Z^o = 4$ et aussi pour le $(PLNE)$.

5.8 Programmation multi-objectif :[12]

Introduction :

La programmation multi-objectif cherche à optimiser plusieurs composantes d'un vecteur de fonctions coûts. Comme pour l'optimisation mono-objectif, la solution d'un problème multi objectif (MOP) n'est pas une solution unique, mais un ensemble de solutions connues comme l'ensemble des solutions Pareto optimales (PO). Toute solution de cet ensemble est optimale dans le sens qu'aucune amélioration ne peut être faite sur un composant du vecteur sans la dégradation d'au moins un autre composant du vecteur.

5.8.1 Concepts de base :

Mathématiquement, un problème d'optimisation multi-objectif (MOP) peut être défini de la manière suivante :

$$(MOP) = \begin{cases} \max(\min) Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_r(x)) \\ \text{s.c,} \quad x \in S \end{cases}$$

où $r \geq 2$ est le nombre de fonctions objectifs $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est le vecteur représentant les variables de décisions $S = \{x \in \mathbb{R}^n, g_j(x) \leq 0, x \geq 0\}$ représente l'ensemble des solutions réalisables associées à des contraintes d'égalités, d'inégalités et des bornes explicites (espace de décision). $Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_r(x))$ est le vecteur des critères à optimiser. Z_i et g_j tel que $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq m$ sont des fonctions à valeurs réelles. $y = Z(x)$ représente les points réalisables dans l'espace des critères (espace objectif), et $Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_r(x))$ avec $y_i = Z_i(x)$ représente un point de l'espace des critères.

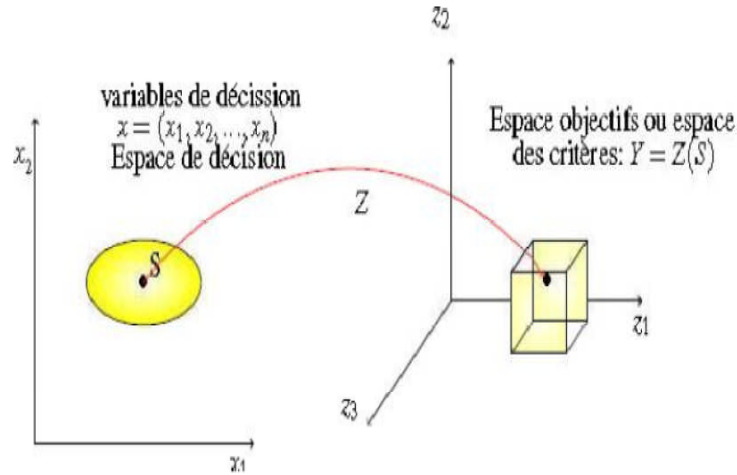


FIGURE 5.4 – Représentation l'espace des décisions et l'espace des objectifs correspondant où $n = 2$.

5.8.2 Définitions :

Remarque : Ces relations sont définies pour un problème de minimisation.

Définition 1 : (Dominance)

Soient deux vecteurs critères $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_r)$ on dit que y domine z si seulement si :

$$\begin{cases} \forall j \in [1, \dots, r] & y_j \leq z_j \\ \exists i \in [1, \dots, r] & y_i < z_i \end{cases} \quad (5.15)$$

si y domine z , alors y est au moins aussi bon que z sur tous les critères et meilleur que lui sur au moins un des critères.

Définition 2 : (Dominance forte)

Soient deux vecteurs critères $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ et $z = (z_1, z_2, \dots, z_r)$ on dit y domine fortement z si et seulement si : $\forall i \in [1, \dots, r] \quad y_i < z_i$ Si y domine fortement z , alors y est meilleur que z sur tous les critères.

Définition 3 : (Dominance faible)

Soient deux vecteurs critères $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ et $z = (z_1, z_2, \dots, z_r)$ on dit y domine faiblement z si et seulement si : $\forall i \in [1, \dots, r], \quad y_i \leq z_i$

Définition 4 : (Non Dominance)

Soit y^* un vecteur critère , on dit que y^* est non dominé si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur critère y tel que : $\forall j \in [1, \dots, r] \quad y_j \leq y_j^*$ et $y_i < y_i^*$ pour au moins un indice i . Dans la cas contraire, on dit que y^* est dominé.

Efficacité :

Définition 1 : (Pareto Optimale)

Une solution $x^* \in S$ est Pareto optimale si et seulement s'il n'existe pas une solution $x \in S$, tel que $Z(x)$ domine $Z(x^*)$. La définition de la Pareto optimalité découle directement de la notion de dominance. Elle signifie qu'il est impossible de trouver une solution qui améliore les performances sur un critère sans que cela entraîne une dégradation des performances sur au moins un autre critère. Elles forment le front Pareto. Les solutions Pareto optimales sont aussi connus sous le nom de solutions efficaces, non-dominées ou non inférieures.

Définition 2 : (Efficacité faible)

Une solution $x^* \in S$ est dit faiblement efficace s'il nexiste aucun vecteur $x \in S$ tel que $Z_i(x) < Z_i(x^*)$.

Définition 3 : (Le point idéal)

Le vecteur idéal $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*)$ est le vecteur qui optimise chacune des fonctions objectives Z_i i.e $y_i^* = \min(Z_i(x))$, $x \in S$ Il est clair que si le vecteur idéal est réalisable, il est la solution du problème (MOP), mais ce n'est pas en général possible à cause des conflits qui existent entre les critères.

Définition 4 : (point anti-idéal)

Le vecteur $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*)$ définie par $y_i^* = \max(Z_i(x))$, $x \in S$ le point anti-idéal.

Définition 6 : (Vecteur référence)

Un vecteur de référence $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*)$ est un vecteur qui définit le but à atteindre par chaque objectif Z_i .

Définition 7 : (Front de pareto)

C'est l'ensemble des vecteurs de décision qui ne sont pas dominé :

Définition 8 : (Convexité)

Un ensemble A est convexe, si et seulement si l'équivalence suivante est vérifiée : $x \in A \text{ et } y \in A \Leftrightarrow \text{segment}[x, y] \subset A$. La convexité est le premier indicateur de la difficulté du problème. En effet, plusieurs méthodes d'optimisation sont incapables de résoudre d'une façon optimale des problèmes non convexes. Mais il existe d'autres indicateurs tout aussi importants, notamment la continuité, la nature des variables de

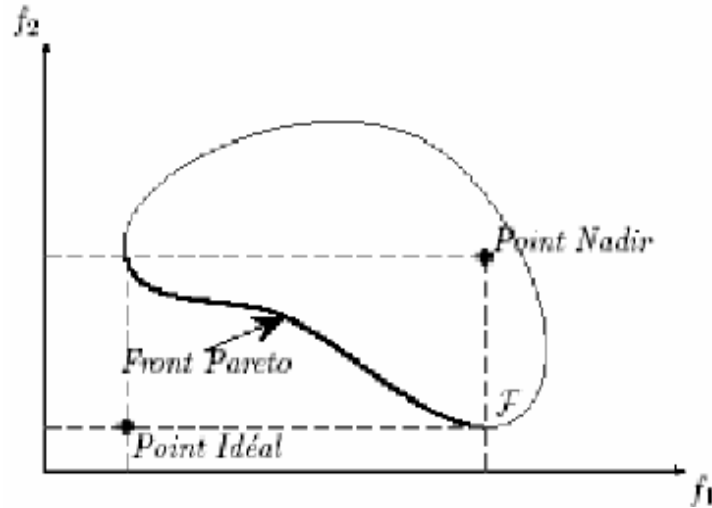


FIGURE 5.5 – Point Nadir et point Idéal

décision (entières ou réelles) .

Comment tester qu'une solution est efficace (cas de problème linéaire, k critères)

Théorème 1 :

Soit $x \in S$ est efficace (respectivement faiblement efficace) s'il existe : $\lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^k, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \lambda_j > 0\}$ (respectivement $\exists \lambda \in \bar{\Lambda} = \{\lambda \in \mathbb{R}^k, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0\}$) tel que x maximise le problème des somme pondérée donné par :

$$P_{\lambda} = \begin{cases} \max & \lambda C' x \\ \text{s.c,} & x \in S \\ S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, \quad x \geq 0\} \end{cases}$$

Théorème 2 :

Si S possède un point efficace, alors au moins un point extrême de S est efficace .

Preuve :

Soit $\bar{x}$ un point efficace de S . D'après le théorème (1), il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $\lambda C' \bar{x} = \max \lambda C' x$. Comme une fonction linéaire atteint son maximum en un point extrême, donc $\bar{x}$ est extrême efficace.

Théorème 3 :

Soit $x \in S$ un point extrême associé à une base efficace B , alors x est efficace.

Preuve :

Puisqu'il existe un $\lambda \in \Lambda$ pour lequel B est une base optimale par le théorème 1 ; x est efficace .

Théorème 4 :

Soient B et $\bar{B}$ deux base efficaces adjacentes obtenues à partir d'un pivot efficace, et soient x et $\bar{x}$ les points extrêmes associés à B et $\bar{B}$ respectivement. Alors, l'arrête $(x; \bar{x})$ est efficace.

Théorème 5 :

soient $(x; v)$ une arrête efficace infinie de S . Alors, x est un point extrême efficace associé à une base efficace B .

5.8.3 Méthode du simplexe multi-critère : [13]

La méthode du simplexe multi-critère consiste à générer un premier point efficace à partir d'une solution de base réalisable, puis à recenser (énumérer) tous les autres points efficaces. Cependant cette méthode ne teste pas toutes les bases car certaines sont dominées de manière évidente. Étant donné le problème :

$$\begin{cases} \max Z_1 = c^1 x \\ \max Z_2 = c^2 x \\ \vdots \\ \max Z_k = c^k x \\ Ax = b, \quad x \geq 0 \\ S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\} \end{cases} \quad (5.17)$$

Le tableau du simplexe (en considérant séparément chaque objectif) est donné par le tableau(1) suivant . Dans ce tableau, on suppose sans perte de généralité que les m premières variables sont dans la base soient :

- j_B : ensemble des indices basiques.
- j_N : ensembles des indices hors base.

						C^1	C_1^1	...	C_m^1	C_{m+1}^1	...	C_j^1	...
						C^2	C_1^2		C_m^2	C_{m+1}^2	...	C_j^2	...
						$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	
						C^k	C_1^k	...	C_m^k	C_{m+1}^k	...	C_j^k	...
C_B^1	C_B^2	C_B^j	C_B^k	base	B	a_1	...	a_m	a_{m+1}	...	a_j	...	
C_1^1	C_1^2	C_1^j	C_1^k	a_1	b_1	1		0	x_{1m+1}	...	x_{1j}	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			0	$\ddots$		$\vdots$		$\vdots$		
C_m^1	C_m^2	C_m^j	C_m^k	a_m	b_m	$\vdots$		1	x_{mm+1}		x_{mj}		
						0	0	0	Δ_{m+1}^1		Δ_j^1		
						$\vdots$	0	0	Δ				
						0	0	...	Δ_{m+1}^i	...	Δ_j^i	...	
						$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$				
						0	0	0	Δ_{m+1}^k	...	Δ_j^k	...	

FIGURE 5.6 – Tableau

$$Z_0 = \begin{pmatrix} Z_0^1 \\ Z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^k \end{pmatrix}$$

De la théorie du simplexe uni-critère on a :

1. $\Delta_j^i = \sum_{r \in J_B} C_r^i x_{rj} - C_j^i, j \in J_N, \forall i = 1, \dots, k.$ et $Z_0^i = \sum_{r \in J_B} C_r^i b_r.$ Si $\Delta_j^i \geq 0, \forall j \in J_N$, alors x° est une solution maximale pour le critère i .
2. Si on introduit la j^{me} variables dans la base, nous obtenons une nouvelle solution x_1 et un nouveau vecteur $\hat{Z}_0 = Z_0 - \theta_j \Delta_j$ ou :

$$\hat{Z}_0 = \begin{pmatrix} \hat{Z}_0^1 \\ \hat{Z}_0^2 \\ \vdots \\ \hat{Z}_0^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_0^1 \\ Z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^k \end{pmatrix} - \theta_j \begin{pmatrix} \Delta_j^1 \\ \Delta_j^2 \\ \vdots \\ \Delta_j^k \end{pmatrix}$$

3. $\theta_j = \min\{\frac{b_r}{x_{rj}} / x_{rj} > 0\}, j \in J_N, r \in J_B.$

Remarques :

1. soit x° une solution basique réalisable.

a- S'il existe un $j \in J_N$ tel que tous les $\Delta_j^{(i)} \leq 0$, avec au moins une inégalité stricte et si $\theta_j > 0$, alors la solution courante x° est dominée.

En effet :

Si on introduit la j^{me} variables, on obtient un point extrême adjacent x^1 pour lequel $\hat{Z}_0 \geq Z_0$ avec au moins une inégalité stricte, car :

$\theta_j \Delta_j \leq 0$, donc $\hat{Z}_0 = Z_0 - \theta_j \Delta_j \geq Z_0$.

S'il existe un $j \in J_N$ tel que tous les $\Delta_j^{(i)} \geq 0$, avec au moins une inégalité stricte et si $\theta_j > 0$, alors l'introduction de la j^{me} variable mène à une solution dominée.

En effet :

Si on introduit la variable j dans la base, on aura un nouveau point extrême x_1 pour lequel :

$\hat{Z}_0 = Z_0 - \theta_j \Delta_j \leq Z_0$ avec au moins une inégalité stricte.

Soit x° une solution basique réalisable s'il existe $(j_1, j_2) \in J_N$ tel que : $\theta_{j_1} \Delta_{j_1} \leq \theta_{j_2} \Delta_{j_2}$ avec au moins une inégalité stricte, alors l'introduction de la variable d'indice j_2 dans la base conduit à une solution dominée par celle résultant de l'introduction de la variable d'indice j_1 .

En effet :

$\theta_{j_1} \Delta_{j_1} \leq \theta_{j_2} \Delta_{j_2}$ avec au moins une inégalité stricte, cela implique que $Z_0 - \theta_{j_2} \Delta_{j_2} \leq Z_0 - \theta_{j_1} \Delta_{j_1}$ avec au moins une inégalité stricte.

Résumé de la méthode :

1. S'il existe un indice $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\Delta_j^i \geq 0, \forall j \in J_N$, alors le i^{me} critère à son maximum et la solution basique correspondante est non dominée à condition qu'il n'existe pas de colonne k' avec $\Delta_{k'}^i = 0$.

D'après les deux remarques précédentes, seules les colonnes (variables) non comparables à zéro et les indices $j, k \in J_N$ telle que $\theta_k \Delta_k$ incomparable à $\theta_j \Delta_j$ sont admissibles pour une introduction dans la base. Dans ce cas, on ne peut dire si la solution correspondante $\bar{x}$ est dominée ou pas. Pour cela, on considère le test dit de non dominance énoncé par le théorème suivant :

Théorème 6 : Soit le problème suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & \nu = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \\ & Cx - C'\bar{x} = \xi \\ x \in S = & \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \\ \xi \in \mathbb{R}^n, \quad & \xi \geq 0 \text{ et } \bar{x} \in S \end{aligned}$$

Alors :

- $\bar{x}$ est efficace si et seulement si $\max \nu = 0$.
- $\bar{x}$ est dominée si et seulement si $\max \nu > 0$.

Exemple d'application :

Soit le problème suivant :

$$(1) \begin{cases} \text{Max } Z_1 = 0.4x_1 + 0.2x_2 \\ \text{Max } Z_2 = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 200 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 600 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Max } Z_1 = 0.4x_1 + 0.2x_2 \\ \text{Max } Z_2 = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 200 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 600 \\ x_j \geq 0, j = \{1, \dots, 4\} \end{cases}$$

$x_1 = (0, 0, 200, 600)$ est une solution de base réalisable associée à la base $(a_3, a_4) = I_2$ et $Z(x) = \begin{pmatrix} Z_1(x) \\ Z_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le tableau suivant du simplexe initiale est :

/	/	/	c^1	0.4	0.2	0	0
/	/	/	c^2	2	1	0	0
c_B^1	c_B^2	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	a_3	200	1	1	1	0
0	0	a_4	600	3	2	0	1
/	/	/	Δ^1	-0.4	-0.2	0	0
/	/	/	Δ^2	-2	-1	0	0

Il n'existe pas $i \in \{1, 2\}$ tel que $\Delta_j^i \geq 0, \forall j \in J_N = \{1, 2\}$ donc aucun objectif n'est à son maximum.

$\Delta_1 = \begin{pmatrix} -0.4 \\ -2 \end{pmatrix} \leq 0$, x_1 est dominé.

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{200}{1}, \frac{600}{3}\right\} = 200 \quad (\text{atteint pour } r=3)$$

$$\theta_2 = \min\left\{\frac{200}{1}, \frac{600}{2}\right\} = 200 \quad (\text{atteint pour } r=3)$$

$$\theta_1 \Delta_1 = 200 \begin{pmatrix} -0.4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ -400 \end{pmatrix}$$

$$\theta_2 \Delta_2 = 200 \begin{pmatrix} -0.2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ -200 \end{pmatrix}$$

On a $\theta_1 \Delta_1 \leq \theta_2 \Delta_2$

Donc a_1 rentre dans la base et a_3 sort de la base on aura le tableau suivant :

/	/	/	c^1	0.4	0.2	0	0
/	/	/	c^2	2	1	0	0
c_B^1	c_B^2	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4
0.4	2	a_1	200	1	1	1	0
0	0	a_4	0	0	-1	-3	1
/	/	/	Δ^1	0	0.2	0.4	0
/	/	/	Δ^2	0	1	2	0

Il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que la fonction objectif à son maximum $x = (200, 0, 0, 0)$ est la solution optimale (efficace) avec $\begin{pmatrix} Z_1^1=80 \\ Z_1^2=400 \end{pmatrix}$

5.9 Méthodes muti-objectif linéaire en nombre entiers :[13]

Introduction :

Dans un problème multi-objectif, lorsque, les fonctions $Z_i(x)$ pour $i = \{1, \dots, r\}$ sont linéaires et que l'ensemble des solutions réalisables S est défini par des contraintes linéaires, alors, on parle de problème linéaire multi-objectif (MOLP). Ainsi, si les variables x prennent des valeurs entières dans le problème (MOLP), on parle alors de problème d'optimisation multi-objectif linéaire en nombres entiers noté (MOILP).

5.9.1 Formulation du problème :

Un problème (MOILP) est formulé comme suit :

$$(MOILP) = \begin{cases} \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_r) \\ Z_i = C'_i x \\ x \in S \end{cases}$$

Où $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0, x \text{ entier}\}$.

r : Nombres d'objectifs à maximiser.

C_i : Vecteur des coefficients pour $i = \{1, \dots, r\}$.

A : La $(m; n)$ matrices des contraintes, $\text{rang} A = m \leq n$.

Z_i : Critère à maximiser pour $i = \{1, \dots, r\}$.

5.9.2 Définitions et théorèmes :

Définition 1 : (l'Optimalité de Pareto)

$x^* \in S$ Est efficace si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur $x \in S$ tel que :
 $c'x \geq c'x^*, c'x \neq c'x^*$

Autrement dit :

$x^* \in S$ est efficace si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur $x \in S$ tel que
 $Z_i(x) \geq Z_i(x^*)$ pour $i = \{1, \dots, r\}$ et $Z_i(x) > Z_i(x^*)$ pour au moins un indice i .

Définition 2 : (l'optimalité de Slater ou faible efficacité)

$x^* \in S$ est dite faiblement efficace si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur
 $x \in S$ tel que $c'x > c'x^*$.

Autrement dit :

$x^* \in S$ est faiblement efficace si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur $x \in S$
tel que $Z_i(x) > Z_i(x^*)$ pour $i = \{1, \dots, r\}$.

Remarque 1 :

Dans le cas où le décideur veut minimiser les critères $Z_i, i = \{1, \dots, r\}$ on a des
définitions analogue ,suffit d'inverser les inégalités correspondantes car $\min Z_i(x) =$
 $-\max(-Z_i(x))$.

5.9.3 Méthode D'Abbas et Moulai :[2]

C'est une méthode de coupes. Elle est appropriée à la résolution des problèmes
(MOILP). La première étape consiste à déterminer une solution entière réalisable (op-
timale) pour le problème relaxé. La seconde étape nous permet de trouver toutes les
solutions entières alternatives à la solution optimale obtenue (si elles existent) et obte-
nir la première solution entière efficace du problème principal. Dans la prochaine étape,

nous introduisons des coupes afin de calculer les autres solutions entières efficaces restantes en utilisant la méthode duale du simplexe. L'algorithme s'arrête quand tout le domaine de décision est exploré.

$$(P_1) = \begin{cases} \max Z_1(x) = C'^1 x \\ S.C \\ x \in S \\ x \text{ entier} \end{cases}$$

Procédure :

Résoudre le problème (P_1) et trouver la solution optimal entière x_1^1 du problème dans S_1 et construire Γ_1 .

Si $\Gamma_1 = \phi$, x_1^1 est l'unique solution optimale entière du problème (P_1) de valeur Z_1^1 .

Calculer les valeurs de Z_i^1 , $i \in \{1, \dots, r\}$ et enregistrer $(Z_1^1, Z_2^1, \dots, Z_r^1)$ comme étant le premier r -uplet, on obtient Eff_0 .

Tronquer le point x_1^1 par la coupe $\sum_{j \in N_1} x_j \geq 1$.

En appliquant la méthode duale du simplexe et des coupes de Gomory si nécessaire, on obtient une solution réalisable entière x_2^1 dans la région tronquée S_2 .

— Lire le r -uplet correspondant $(Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$ et l'ajouter à Eff_0 s'il n'est pas dominé par l'un des r -uplets efficaces pour obtenir Eff_1 .

Si $\Gamma_1 \neq \phi$, choisir l'indice $j_1 \in \Gamma_1$ et calculer le nombre θ_{j_1} correspond à x_1^1 .

— Si $\theta_{j_1} < 1$ choisir un indice $j_1 \in \Gamma_1$ et appliqué la coupe $:\sum_{j \in N_1 - j_1} x_j \geq 1$.

— En appliquant la méthode duale du simplexe et si nécessaire des coupes de Gomory successives, on obtient une solution réalisable entière x_2^1 dans la région tronquée S_2 .

— Enregistrer $(Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$ r -uplet dans Eff_0 . s'il n'est pas dominé par l'un des r -uplets efficaces précédemment déterminés pour obtenir Eff_1 .

— Si $\theta_{j_1} \geq 1$, déterminer toutes les solution entières réalisables x_1^q , $q \in \{2, \dots, p_k\}$. alternatives à x_1^1 le long de l'arrêt E_{j_1} .

— Tronquer le point x_1^q par la coupe $\sum_{j \in N_1 - j_1} x_j \geq 1$.

— En appliquant la méthode duale du simplexe et des coupes de Gomory si nécessaire, on obtient une solution réalisable entière x_2^1 dans la région tronquée S_2 . Lire le r -uplet correspondant $(Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$ et l'ajouter à Eff_0 s'il n'est pas dominé par l'un des r -uplets efficaces pour obtenir Eff_1 . et ainsi de suite ...etc.

Exemple d'application de la méthode de Abbas Molai : Soit le problème multicritère suivant : $\max Z_1 = x_1 + 2x_2$

$$Max Z_2 = -x_1 - 2x_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (5.22)$$

La solution de base efficace (0,2) donné par le tableau suivant :

			c^1	1	2	0	0
			c^2	-1	-2	0	0
c^1	c^2	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4
2	-2	a_2	2	2	1	1	0
0	0	a_4	1	-1	0	-1	1
	$Z_1^1 = 4$		Δ^1	3	0	2	0
	$Z_2^1 = -4$		Δ^2	5	4	2	0

on a la solution optimale $x_1^1 = (0, 2)$ produit le premier r-uplet (4,-4) efficace par suite, $Eff_0 = (4, -4)$. Ce point entier est tronqué en utilisant la coupe $x_1 + x_3 \geq 1$ on obtient le tableau 2 suivant :

			c^1	1	2	0	0	0
			c^2	-1	-2	0	0	0
c^1	c^2	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	-2	a_2	1	1	0	1	0	-1
0	0	a_3	1	1	1	0	0	1
0	0	a_4	2	0	0	0	1	-1
	$Z_2^1 = 2$		Δ^1	1	0	0	0	2
	$Z_2^2 = -2$		Δ^2	-1	2	-2	0	2

Le r-uplet (2,-2) correspondant à x_2^1 est non dominée par rapport au précédent de Eff_0 par conséquent, il est ajouté à Eff_0 pour obtenir $Eff_1 = (4, -4), (2, -2)$ avec $I = \{2, 3, 4\}$ et $N_1 = \{1, 5\}$. $\Gamma_1 = \{j/j \in N_1, \Delta_j^1 = 0\} = \emptyset$

Etape 2 :

$\Gamma_1 = \emptyset$. L'unique solution $x_2^1 = (0, 1)$ est l'unique solution. ce point entier est tronqué en utilisant la coupe $x_1 + x_5 \geq 1$

En utilisant le dual du simplexe, on obtient une solution réalisable $x_3^1 = (1, 0)$ alors le tableau 3 suivant :

			c^1	1	2	0	0	0	0
			c^2	-1	-2	0	0	0	0
c^1	c^2	base	b	a_2	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	-1	a_1	1	1	0	0	0	1	-1
2	-2	a_2	0	0	1	0	0	0	1
0	0	a_3	0	0	0	1	0	-2	1
0	0	a_4	2	0	0	0	1	-1	0
	$Z_3^1 = 1$		Δ^1	0	0	0	0	1	1
	$Z_3^2 = -1$		Δ^2	0	0	0	0	-1	-1

Donc le r -uplet $(1, -1)$ correspondant à x_3^1 est non dominée par rapport au précédant de Eff_0 et Eff_1 .

Etape 3 :

$\Gamma^2 = \emptyset$. L'unique solution $x_3^1 = (1, 0)$ est l'unique solution. Ce point entier est tronqué en utilisant la coupe $x_5 + x_6 \geq 1$.

En utilisant le dual du simplexe, on obtient une solution efficace : $x_4^1 = (0, 0)$ donné par le tableau 4 :

			c^1	1	2	0	0	0	0	0
			c^2	-1	-2	0	0	0	0	0
c^1	c^2	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	-1	a_1	0	1	0	0	0	0	-2	1
2	-2	a_2	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	a_3	2	0	0	1	0	0	3	-2
0	0	a_4	3	0	0	0	1	0	1	-1
0	0	a_5	1	0	0	0	0	1	1	-1
	$Z_4^1 = 0$	Δ^1	0	0	0	0	0	0	0	1
	$Z_4^2 = 0$	Δ^2	0	0	0	0	0	0	0	0

Le r -uplet $(0, 0)$ correspondant à $x_4^1 = (0, 0)$ est non dominée et est l'unique solution. Le point est tronqué en utilisant la coupe $x_6 + x_7 \geq 1$. L'application du dual du simplexe provoque l'impossibilité de l'opération de pivot. Donc une infaisabilité indiquant ainsi que toutes les solution efficace du problème (P) ont été trouvées.

Cette infaisabilité est donnée par le tableau 5 suivant :

			c^1	1	2	0	0	0	0	0	
			c^2	-1	-2	0	0	0	0	0	0
c^1	c^2	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	-1	a_1	0	1	0	0	0	0	-2	1	0
2	-2	a_2	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	a_3	2	0	0	1	0	0	3	-2	0
0	0	a_4	3	0	0	0	1	0	1	-1	0
0	0	a_5	1	0	0	0	0	1	1	-1	0
0	0	a_8	-1	0	0	0	0	0	0	-1	1
	$Z_5^1 = 0$		Δ^1	0	0	0	0	0	0	1	0
	$Z_5^2 = 0$		Δ^2	0	0	0	0	0	0	-1	0

Le vecteur ligne est positif ou nul. Ceci implique que l'opération pivot est impossible.

Donc la convergence de la méthode de Abbas Moulai nous donne toutes les solutions efficaces $\{(0, 2), (0, 1), (0, 0), (1, 0)\}$

Chapitre 6

Logiciel LINGO et Applications

6.1 Introduction :

La programmation est un ensemble d'outils et de technique permettant de résoudre des problèmes mathématiques par ordinateurs, elle sert à trouver une solution optimale de n'importe quel type de problème par exemple.

Le processus de résoudre un problème mathématique exige un grand nombre de calculs donc il est mieux d'exécuter cela par machine. Pour cela on a choisi le logiciel LINGO qui est spécifique pour résoudre des problèmes d'optimisations (linéaire, non linéaire, convexe, non convexe, ...etc). Il comporte un éventail de commandes qui peuvent être appelées à tout moment.

6.2 Présentation du logiciel LINGO :

Nous permet de formuler rapidement et facilement nos problèmes d'optimisation linéaire, non linéaire ou en nombres entiers. Grâce à ses outils de modélisation, les modèles sont exprimés de manière transparente à l'aide de sommes et de variables indicées.

La méthode ne diffère guère de la méthode traditionnelle avec crayon et papier, mais les modèles seront plus faciles à réutiliser et mettre à jour. Il possède quatre solveurs qu'il utilise afin de résoudre les différents types de modèles :

- Solveur direct.*
- Solveur indirect.*
- Solveur linéaire.*
- Solveur non linéaire.*

Méthode de type séparation et évaluation. De plus, LINGO est :

- Un moyen pour confirmer que l'optimum trouvé est l'optimum global.*
- Possibilités pour résoudre les problèmes plus rapidement.*

Un moyen améliorée pour résoudre beaucoup de type de problèmes. Un moyen de décomposition si un modèle contient des sous-modèles. LINGO est livrée avec un jeu de solveurs pour l'optimisation linéaire, non-linéaire convexe ou non convexe),

simplicial, sous contraintes, et en nombre entier. Nous avons même pas à nous préoccuper du choix du solveur : en effet, LINGO réinterprète lui-même nos formulations et sélectionne automatiquement le solveur adaptée à chaque problème. Un modèle d'optimisation se compose de trois parties :

1. La fonction objective : c'est la formule simple qui décrit exactement ce que le modèle devrait optimiser.
2. Les variables : ce sont les quantités qui peuvent être changées pour déterminer la valeur optimale de la fonction objective.
3. Les contraintes : ce sont les formules qui définissent les limites sur les valeurs des variables. Les fonctions utilisées dans un modèle de LINGO sont :
 - (a) @FOR - utilisée pour produire des contraintes.
 - (b) @SUM - calcul de la somme.
 - (c) @MAX - recherche de maximum.
 - (d) @MIN - recherche de minimum.

Type de variables dans LINGO : Toutes les variables dans un modèle de LINGO sont considérées non négatives et continus, les fonctions variables d'un modèle de LINGO sont :

- GIN - toute valeur positive de nombre entiers.
- BIN - une valeur binaire (0 ou 1).
- FREE - toute valeur positive ou négative réelle.
- BND - toute valeur bornée par des limites indiquées.

La forme générale pour la déclaration d'un variable x , en utilisant les fonctions variables GIN, BIN, FREE est : fonction (x) ; La fonction BND inclut les limites inférieure et supérieure des variables, sa forme générale est : BND (limite inférieure, x , limite supérieure).

6.2.1 Interface de logiciel :

Lors de lancement de LINGO après l'installation, certaines versions nous demandent d'entrer la clé de la licence, donc on voit apparaître la fenêtre suivante :

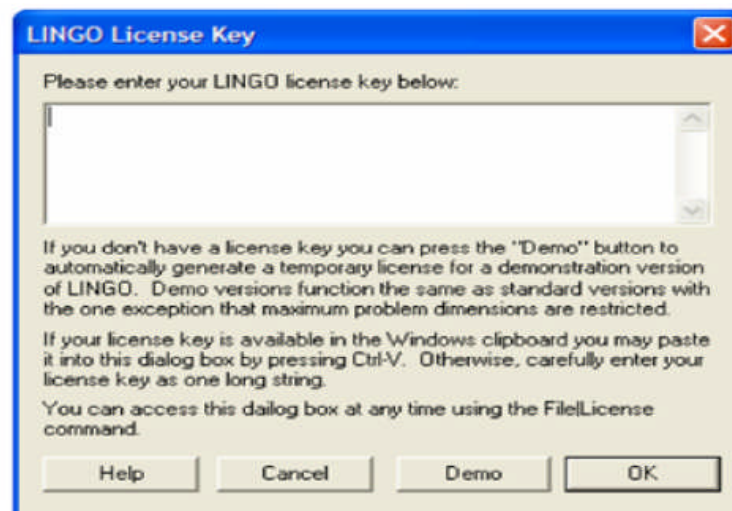


FIGURE 6.1 – Licence du logiciel

Donc on fait entrer la clé et on clic sur "OK ", si on n'a pas la clé de la licence on peut utiliser LINGO sous le mode "Demo ", mais la licence de ce mode expire dans 30jours. Juste après la barre des menus LINGO, une fenêtre pour saisir le modèle de problème à résoudre apparait :

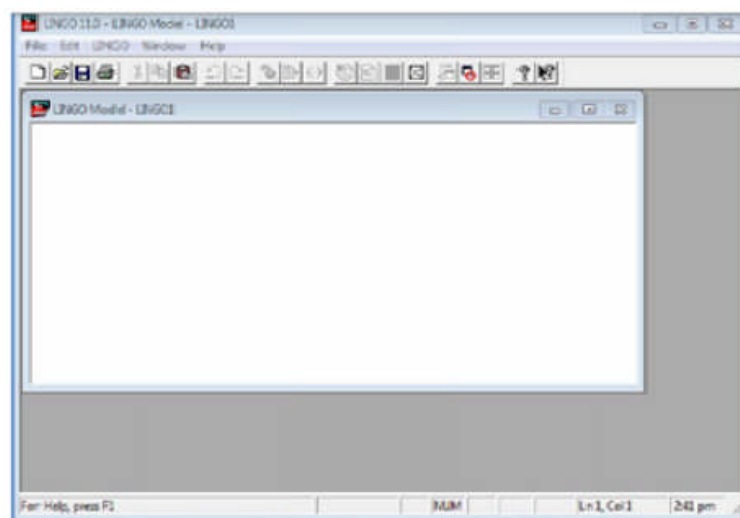


FIGURE 6.2 – La barre des menus du logiciel

La barre des outils de LINGO est la suivante :

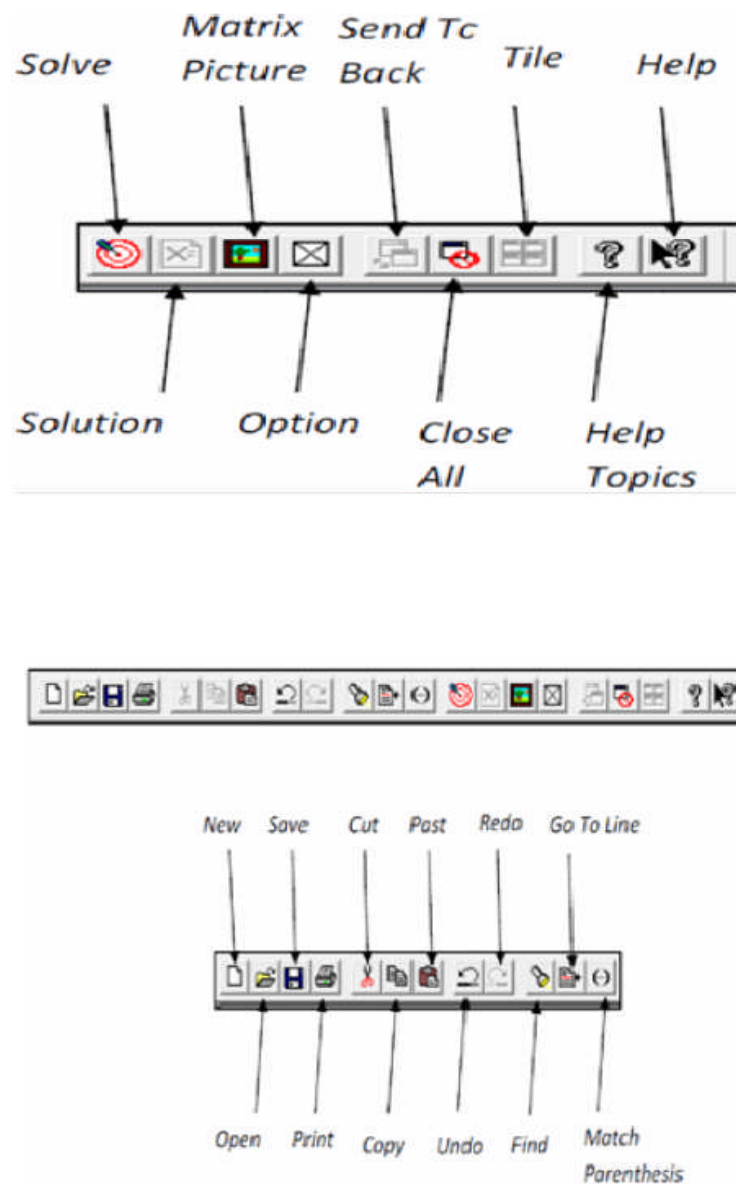


FIGURE 6.3 – La barre des outils du logiciel

Signification :

- **New** : ouvrir une nouvelle fenêtre.
- **Open** : ouvrir un dossier enregistré.
- **Save** : enregistrer un modèle.
- **Print** : imprimer la fenêtre courante.
- **Cut** : copier et déplacer le texte sélectionné.
- **Copy** : copier le texte sélectionné.
- **Past** : coller le contenu sélectionné dans le document.
- **Undo** : refaire l'action précédente.
- **Redo** : revenir à l'action suivante.
- **Find** : chercher un document.
- **Go To Line** : déplacer le curseur à un certain nombre de ligne.
- **Match Parenthesis** : trouvez la parenthèse étroite qui correspond à la parenthèse ouverte que vous avez choisie.
- **Solve** : résoudre le modèle.
- **Solution** : faire la fenêtre de rapport de la solution du modèle courant.
- **Option** : ensemble des options de système.
- **Send To Back** : placer la fenêtre courante derrière les autres fenêtres ouvertes.
- **Close All** : fermer toutes les fenêtres ouvertes.
- **Tile** : placer les fenêtres ouvertes dans la même place dans la fenêtre de programme LINGO.
- **Help Topics** : ouvrir le manuel de LINGO.
- **Help** : Ouvrir l'aide de LINGO.

6.3 Exemple d'application :

Nous avons exécuté 2 modèles parmi les quatre modèles que nous avons proposés sur les données suivantes que nous avons afin de pouvoir les tester.

Position du problème :

L'agent de planning aérien est chargé de construire un planning hebdomadaire de formation des PNC pour les trois salles disponibles au niveau du centre de formation. Dans ce dernier, chaque cours dure 1h30. De plus, les stagiaires de même salle suivent exactement les mêmes cours. Du dimanche au jeudi, les créneaux de cours sont les suivants : 8h-9h30, 9h45-11h15, 12h30-14h et 14h15-15h45, 16h-17h30. Le tableau suivant donne le nombre de cours d'une 1h30 que chaque instructeur doit donner aux PNC des trois salles chaque semaine.

<i>Num de l'instructeur</i>	<i>Instructeur</i>	<i>Formation</i>	<i>Nombre de cours de 1h30 donné à la salle 1</i>	<i>Nombre de cours de 1h30 donné à la salle 2</i>	<i>Nombre de cours de 1h30 donné à la salle 3</i>
I_1	Mr Badaoui	Sécurité et urgence	4	4	4
I_2	Mr Ouidir	Aviation de base	2	2	2
I_3	Mr Sifer	Premiers soins	3	3	3
I_4	Mr Saheb	GRM	2	2	2
I_5	Mr Smail	SMS + DGR	3	3	3
I_6	Mr Hammeg	Endoctrinement de base	2	2	2
I_7	Mr Hajouti	Formation de vol	1	1	1
I_8	Mr Boudjema	Commerciale	3	3	3

6.3.1 Programmation des modèles sur LINGO

Programme du modèle 1 et Résultats

```

MODEL:
SETS:
  pp / 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 /: pp_;
  cc / 1, 2, 3 /: cc_;
  tt / 1, 2, 3, 4 /: tt_;
  dd / 1..30/: dd_;
  dd1 / 9, 10, 11, 12/: dd1_;
  dd2 / 16, 17, 18, 19, 20 /: dd2_;
  d55_ / 1..5 /: d52_;

  d1 / 1, 2, 3, 4, 5/: d1_;
  d2 / 6, 7, 8, 9, 10/: d2_;

  d3 / 11, 12, 13, 14, 15 /: d3_;
  d4 / 16, 17, 18, 19, 20/: d4_;

  d5 / 21, 22, 23, 24, 25/: d5_;
  d6 / 26, 27, 28, 29, 30/: d6_;

  l / 0, 1, 2, 3, 4/: l_;

  IIJJKK1_ ( pp, cc, d1): x_11;
  IIJJKK2_ ( pp, cc, d1): x_22;
  IIJJKK3_ ( pp, cc, d1): x_33;
  IIJJKK4_ ( pp, cc, d1): x_44;
  IIJJKK5_ ( pp, cc, d1): x_55;
  IIJJKK6_ ( pp, cc, l): x_66;

  !JJKK_ ( J1_, K1_): q_;
  IIJJKK_ ( pp, cc, dd): x_;

  JJ_ ( pp, cc): NBC_;
  ppcc_ ( pp, cc): x_1;
  pdd_ ( cc, dd): x_2;

```

FIGURE 6.4 – Application du modèle 1 sur LINGO.

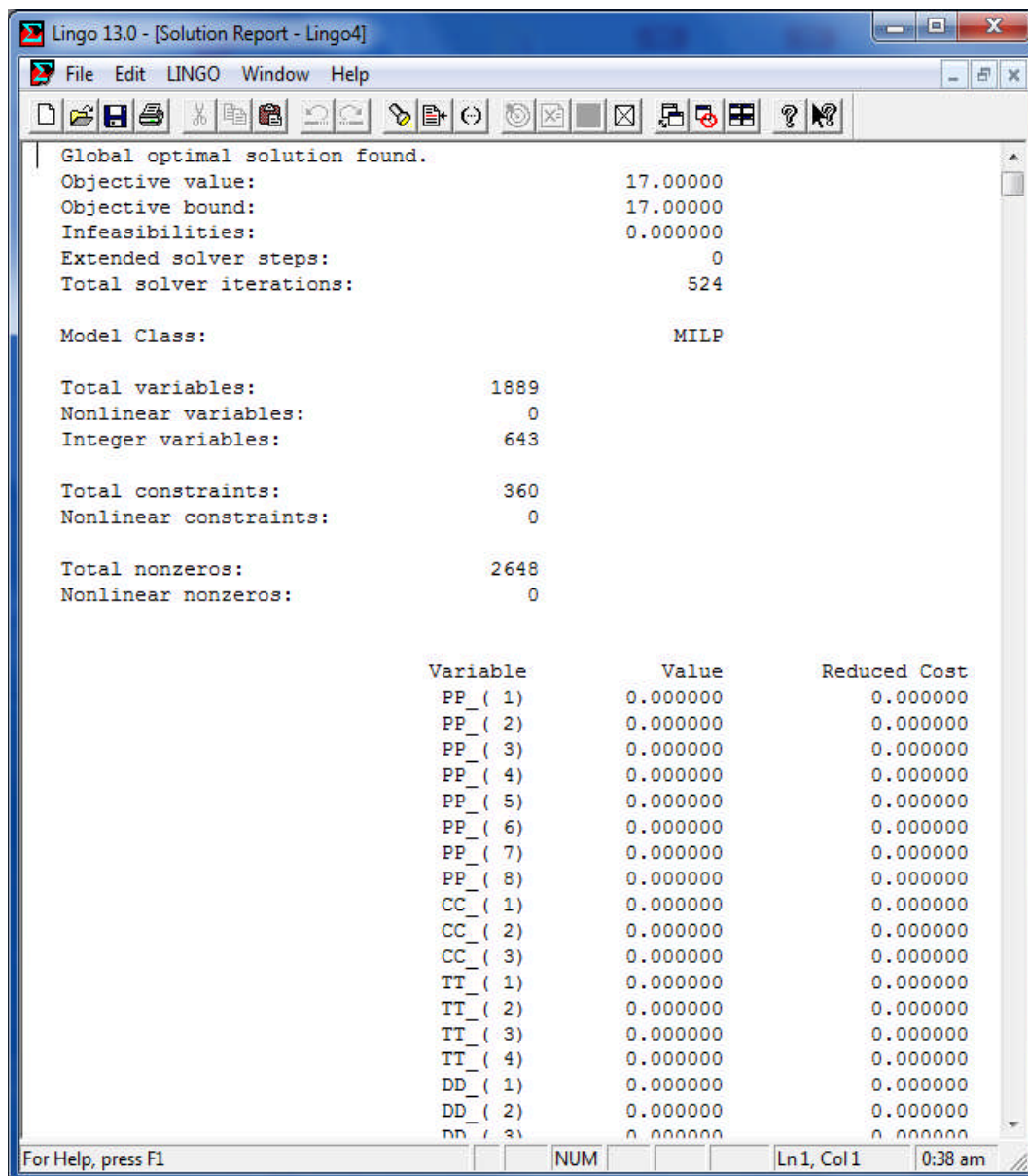
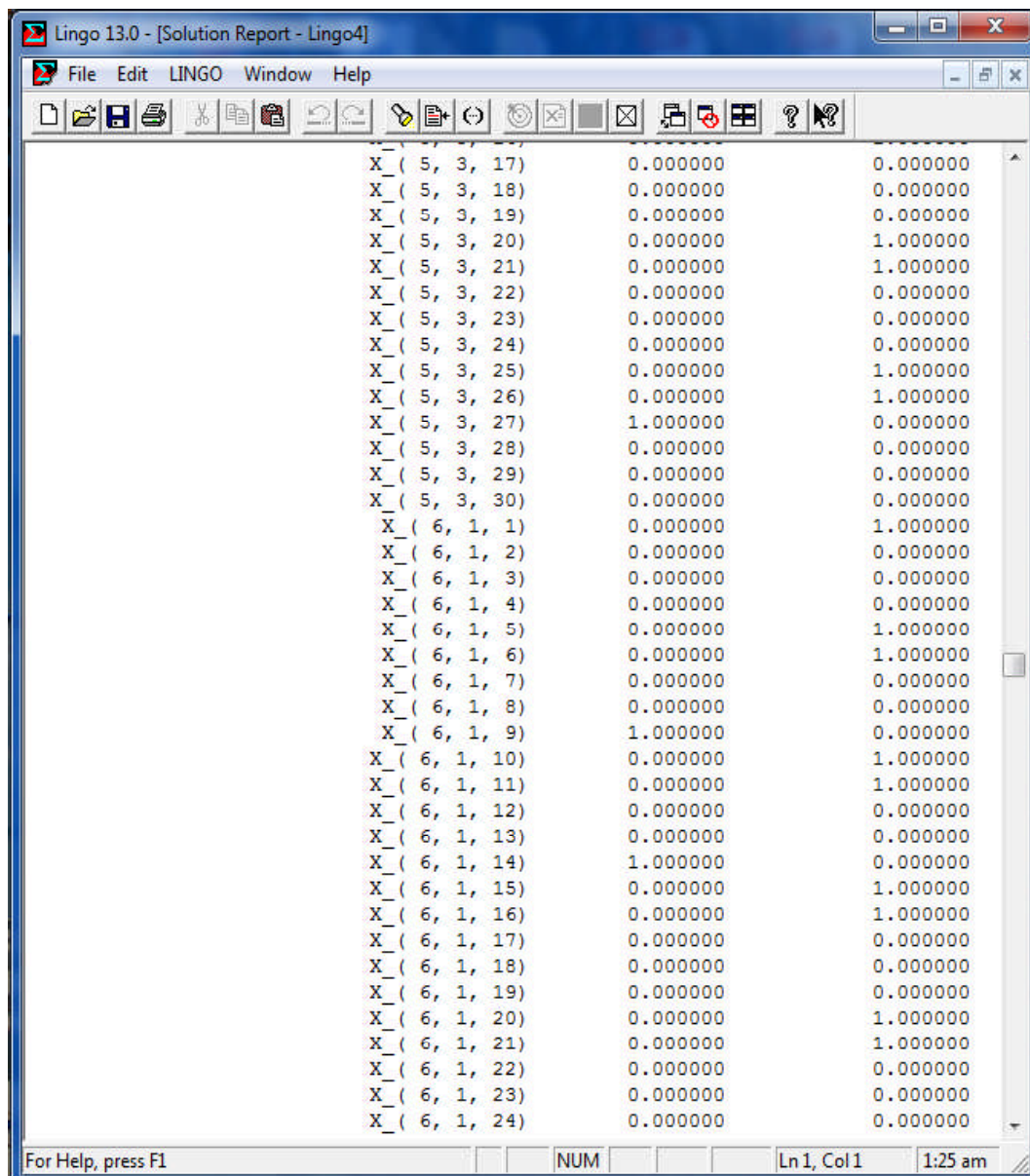


FIGURE 6.5 – Résultats du modèle 1 sur LINGO.



The screenshot shows the 'Lingo 13.0 - [Solution Report - Lingo4]' window. The menu bar includes File, Edit, LINGO, Window, and Help. The toolbar contains various icons for file operations and solving. The main area displays a list of variables and their values in a table format.

Variable	Value	Value
X_(5, 3, 17)	0.000000	0.000000
X_(5, 3, 18)	0.000000	0.000000
X_(5, 3, 19)	0.000000	0.000000
X_(5, 3, 20)	0.000000	1.000000
X_(5, 3, 21)	0.000000	1.000000
X_(5, 3, 22)	0.000000	0.000000
X_(5, 3, 23)	0.000000	0.000000
X_(5, 3, 24)	0.000000	0.000000
X_(5, 3, 25)	0.000000	1.000000
X_(5, 3, 26)	0.000000	1.000000
X_(5, 3, 27)	1.000000	0.000000
X_(5, 3, 28)	0.000000	0.000000
X_(5, 3, 29)	0.000000	0.000000
X_(5, 3, 30)	0.000000	0.000000
X_(6, 1, 1)	0.000000	1.000000
X_(6, 1, 2)	0.000000	0.000000
X_(6, 1, 3)	0.000000	0.000000
X_(6, 1, 4)	0.000000	0.000000
X_(6, 1, 5)	0.000000	1.000000
X_(6, 1, 6)	0.000000	1.000000
X_(6, 1, 7)	0.000000	0.000000
X_(6, 1, 8)	0.000000	0.000000
X_(6, 1, 9)	1.000000	0.000000
X_(6, 1, 10)	0.000000	1.000000
X_(6, 1, 11)	0.000000	1.000000
X_(6, 1, 12)	0.000000	0.000000
X_(6, 1, 13)	0.000000	0.000000
X_(6, 1, 14)	1.000000	0.000000
X_(6, 1, 15)	0.000000	1.000000
X_(6, 1, 16)	0.000000	1.000000
X_(6, 1, 17)	0.000000	0.000000
X_(6, 1, 18)	0.000000	0.000000
X_(6, 1, 19)	0.000000	0.000000
X_(6, 1, 20)	0.000000	1.000000
X_(6, 1, 21)	0.000000	1.000000
X_(6, 1, 22)	0.000000	0.000000
X_(6, 1, 23)	0.000000	0.000000
X_(6, 1, 24)	0.000000	0.000000

For Help, press F1

NUM

Ln 1, Col 1

1:25 am

FIGURE 6.6 – Suite des résultats du modèle 1 sur LINGO .

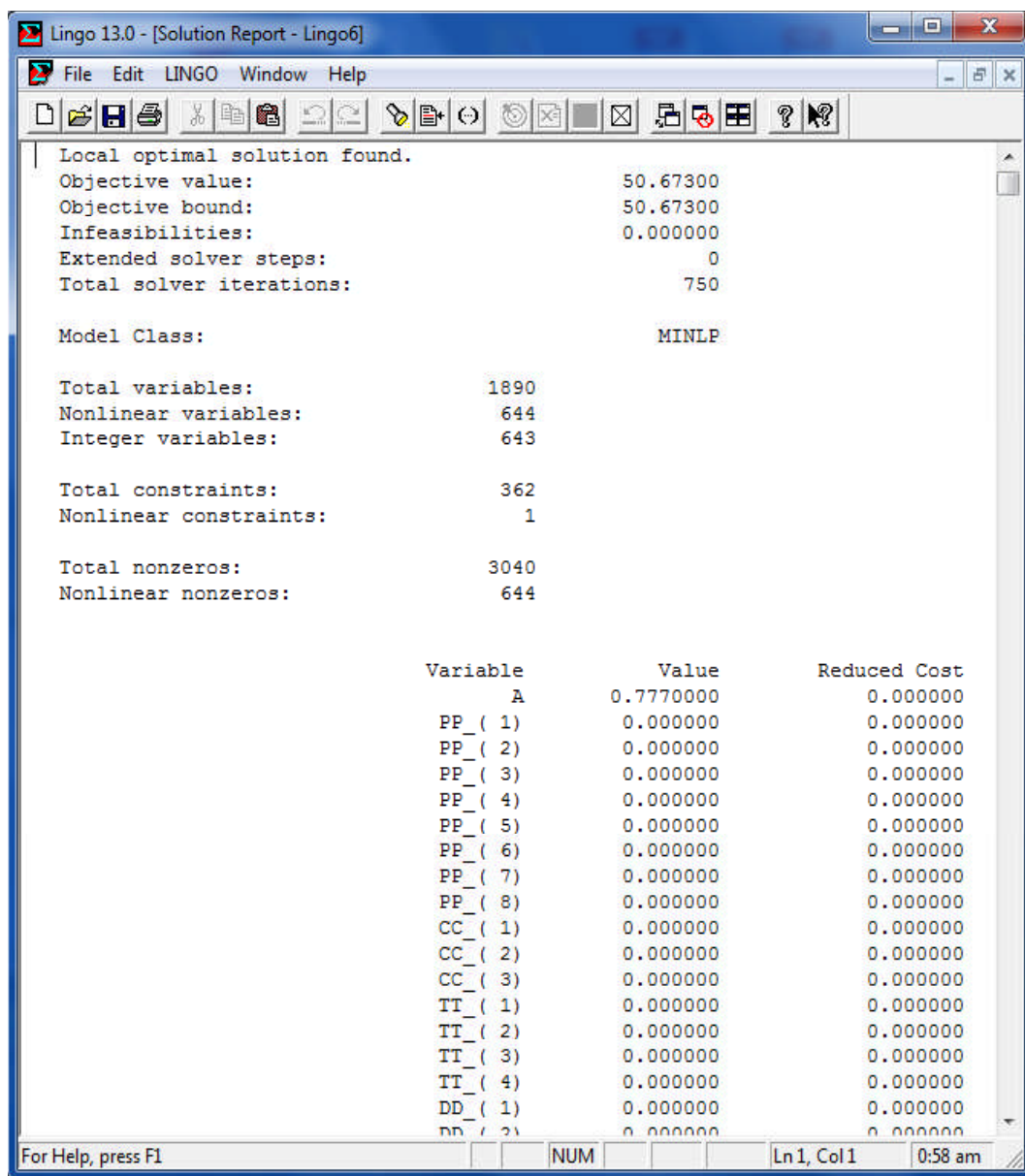
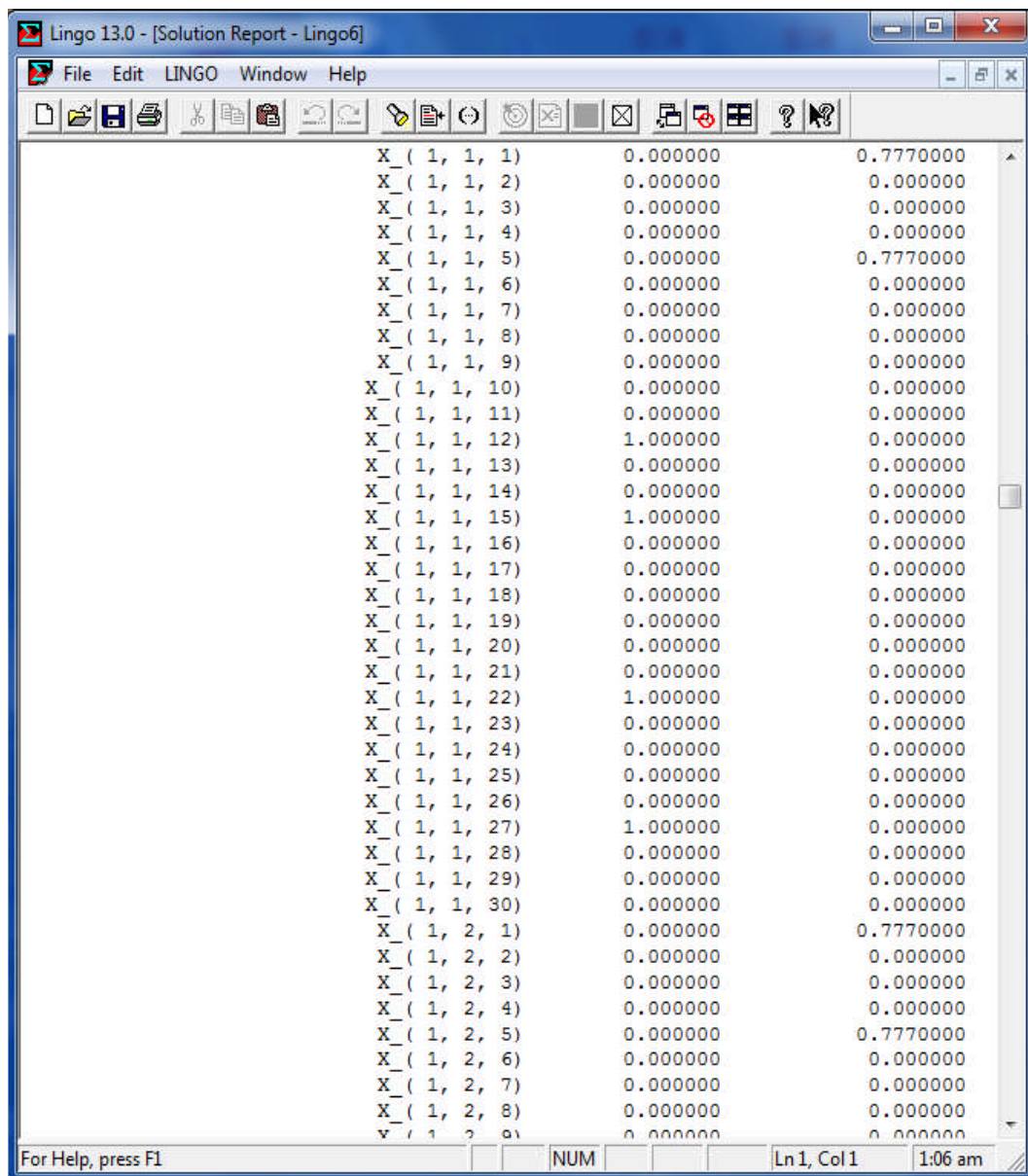
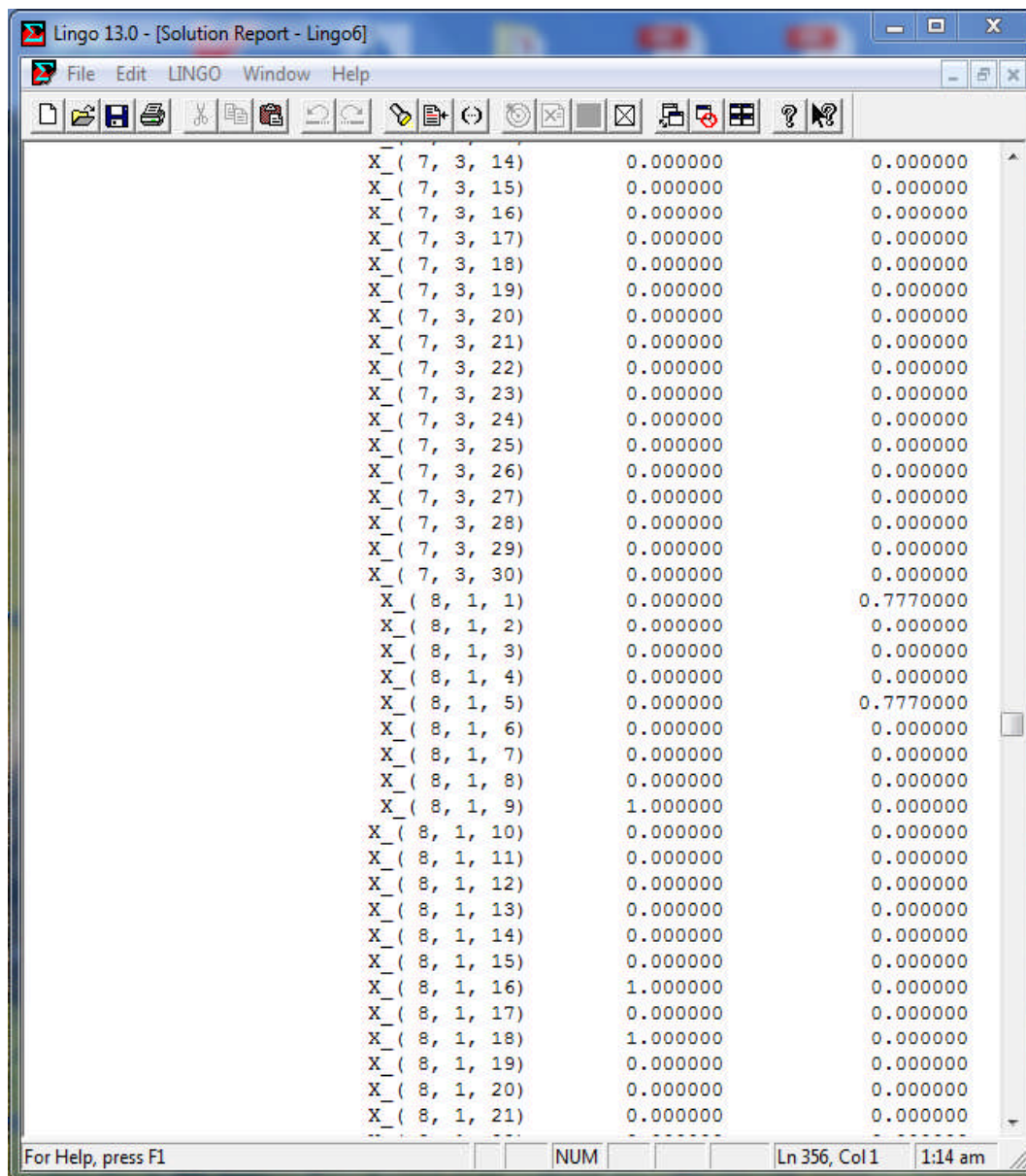
Résultat de la programmation du modèle 2 sur LINGO.

FIGURE 6.7 – Résultats du modèle 2 sur LINGO .



Variable	Value	Reduced Cost
X_ (1, 1, 1)	0.000000	0.7770000
X_ (1, 1, 2)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 3)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 4)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 5)	0.000000	0.7770000
X_ (1, 1, 6)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 7)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 8)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 9)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 10)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 11)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 12)	1.000000	0.000000
X_ (1, 1, 13)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 14)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 15)	1.000000	0.000000
X_ (1, 1, 16)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 17)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 18)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 19)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 20)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 21)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 22)	1.000000	0.000000
X_ (1, 1, 23)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 24)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 25)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 26)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 27)	1.000000	0.000000
X_ (1, 1, 28)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 29)	0.000000	0.000000
X_ (1, 1, 30)	0.000000	0.000000
X_ (1, 2, 1)	0.000000	0.7770000
X_ (1, 2, 2)	0.000000	0.000000
X_ (1, 2, 3)	0.000000	0.000000
X_ (1, 2, 4)	0.000000	0.000000
X_ (1, 2, 5)	0.000000	0.7770000
X_ (1, 2, 6)	0.000000	0.000000
X_ (1, 2, 7)	0.000000	0.000000
X_ (1, 2, 8)	0.000000	0.000000
V / 1 2 3 4 5 6 7 8 9	0.000000	0.000000

FIGURE 6.8 – Suite des résultats du modèle 2 sur LINGO.



Variable	Value	Value
X_(7, 3, 14)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 15)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 16)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 17)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 18)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 19)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 20)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 21)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 22)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 23)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 24)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 25)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 26)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 27)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 28)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 29)	0.000000	0.000000
X_(7, 3, 30)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 1)	0.000000	0.7770000
X_(8, 1, 2)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 3)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 4)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 5)	0.000000	0.7770000
X_(8, 1, 6)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 7)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 8)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 9)	1.000000	0.000000
X_(8, 1, 10)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 11)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 12)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 13)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 14)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 15)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 16)	1.000000	0.000000
X_(8, 1, 17)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 18)	1.000000	0.000000
X_(8, 1, 19)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 20)	0.000000	0.000000
X_(8, 1, 21)	0.000000	0.000000

FIGURE 6.9 – Suite des résultats du modèle 2 sur LINGO .

6.4 Présentation des résultats :

Présentation des résultats du modèle 1 :

Après la résolution de problème de modèle 1 nous avons obtenu le premier planning suivant :

Salle 01					
<i>Heures</i> <i>Jours</i>	8h-9h30	9h45-11h15	12h30-14h	14h15-15h45	16h-17h30
Samedi					
Dimanche	Aviation de Base (Mr Ouidir)	Commerciale (Mr Boudjema)	SMS+DGR (Mr Smail)	Premiers soins (Mr Sifer)	Aviation de Base (Mr Ouidir)
Lundi	Premiers soins (Mr Sifer)	Commerciale (Mr Boudjema)	Premiers soins (Mr Sifer)	Endoctrinement de Base (Mr Hammeg)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)
Mardi	Commerciale (Mr Boudjema)	SMS+DGR (Mr Smail)	Endoctrinement de Base (Mr Hammeg)	GRM (Mr Saheb)	SMS+DGR (Mr Smail)
Mercredi		Premiers soins (Mr Sifer)	GRM (Mr Saheb)	Formation de vol (Mr Hajouti)	
Jeudi		Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)		

FIGURE 6.10 – Résultats du premier modèle.

Salle 02					
<i>Heures</i> <i>Jours</i>	8h-9h30	9h45-11h15	12h30-14h	14h15-15h45	16h-17h30
Samedi		SMS+DGR (Mr Smail)			
Dimanche	SMS+DGR (Mr Smail)	Premiers soins (Mr Sifer)	Formation de vol (Mr Hajouti)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	
Lundi	Commerciale (Mr Boudjema)	Aviation de Base (Mr Ouidir)	Commerciale (Mr Boudjema)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	GRM (Mr Saheb)
Mardi	GRM (Mr Saheb)	Premiers soins (Mr Sifer)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	SMS+DGR (Mr Smail)	Aviation de Base (Mr Ouidir)
Mercredi		Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Endoctrinement de Base (Mr Hammeg)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	
Jeudi		Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Premiers soins (Mr Sifer)		

FIGURE 6.11 – Suite des résultats du premier modèle .

Salle 03					
Heures Jours	8h-9h30	9h45-11h15	12h30-14h	14h15-15h45	16h-17h30
Samedi					
Dimanche	Premiers soins (Mr Sifer)	GRM (Mr Saheb)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	SMS+DGR (Mr Smail)	Formation de vol (Mr Hajouti)
Lundi	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	SMS+DGR (Mr Smail)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Aviation de Base (Mr Ouidir)	Commerciale (Mr Boudjema)
Mardi	Endoctrinement de Base (Mr Hammeg)	GRM (Mr Saheb)	Endoctrinement de Base (Mr Hammeg)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Premiers soins (Mr Sifer)
Mercredi		Commerciale (Mr Boudjema)	Aviation de Base (Mr Ouidir)	Premiers soins (Mr Sifer)	
Jeudi		SMS+DGR (Mr Smail)	Commerciale (Mr Boudjema)		

FIGURE 6.12 – Suite des résultats du premier modèle.

Présentation des résultats du modèle 1 avec un autre objectif qui optimise les coûts :

Après avoir tester ce modèle sur notre exemple on trouver les résultats suivant :

Salle 01					
Heures Jours	8h-9h30	9h45-11h15	12h30-14h	14h15-15h45	16h-17h30
Samedi					
Dimanche	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Aviation de Base (Mr Ouidir)
Lundi	Aviation de Base (Mr Ouidir)	Premiers soins (Mr Sifer)	Premiers soins (Mr Sifer)	Premiers soins (Mr Sifer)	GRM (Mr Saheb)
Mardi	SMS+DGR (Mr Smail)	GRM (Mr Saheb)	SMS+DGR (Mr Smail)	SMS+DGR (Mr Smail)	Endoctrinement de Base (Mr Hammeg)
Mercredi	Endoctrinement de Base (Mr Hammeg)	Commerciale (Mr Boudjema)	Commerciale (Mr Boudjema)	Formation de vol (Mr Hajouti)	Commerciale (Mr Boudjema)
Jeudi					

FIGURE 6.13 – Résultats du premier modèle avec objectif coût.

Salle 02					
Heures Jours	8h-9h30	9h45-11h15	12h30-14h	14h15-15h45	16h-17h30
Samedi					GRM (Mr Saheb)
Dimanche	Formations de vol (Mr Hajouti)	Aviation de Base (Mr Ouidir)	Aviation de Base (Mr Ouidir)	Premiers soins (Mr Sifer)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)
Lundi	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	SMS+DGR (Mr Smail)	Premiers soins (Mr Sifer)
Mardi	GRM (Mr Saheb)	Premiers soins (Mr Sifer)	Endoctrinement de Base (Mr Hammeg)	Endoctrinement de Base (Mr Hammeg)	SMS+DGR (Mr Smail)
Mercredi	SMS+DGR (Mr Smail)			Commerciale (Mr Boudjema)	
Jeudi	Commerciale (Mr Boudjema)	Commerciale (Mr Boudjema)			

FIGURE 6.14 – Suite des résultats du premier modèle avec objectif coût.

Salle 03					
Heures Jours	8h-9h30	9h45-11h15	12h30-14h	14h15-15h45	16h-17h30
Samedi					
Dimanche	Aviation de Base (Mr Ouidir)	Formation de vol (Mr Hajouti)	Premiers soins (Mr Sifer)	Aviation de Base (Mr Ouidir)	Premiers soins (Mr Sifer)
Lundi	Premiers soins (Mr Sifer)	GRM (Mr Saheb)	GRM (Mr Saheb)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)
Mardi	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Commerciale (Mr Boudjema)	Commerciale (Mr Boudjema)	Commerciale (Mr Boudjema)
Mercredi		SMS+DGR (Mr Smail)	SMS+DGR (Mr Smail)	SMS+DGR (Mr Smail)	Endoctrinement de Base (Mr Hammeg)
Jeudi	SMS+DGR (Mr Smail)				

FIGURE 6.15 – Suite des résultats du premier modèle avec objectif coût.

Présentation des résultats du modèle 2 :

Dans ce cas on a testé notre modèle multi-objectifs , qui consiste à optimiser les trons dans un plannig et les couts des formations , alors on a obtenue les résultats suivant :

Salle 01					
Heures Jours	8h-9h30	9h45-11h15	12h30-14h	14h15-15h45	16h-17h30
Samedi					
Dimanche	Endoctriment de Base (Mr Hammeg)	Formation de vol (Mr Hajouti)	Formation de vol (Mr Hajouti)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	SMS+DGR (Mr Smail)
Lundi	SMS+DGR (Mr Smail)	Commerciale (Mr Boudjema)	Aviation de Base (Mr Ouidir)	Premiers soins (Mr Sifer)	
Mardi		Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Aviation de Base (Mr Ouidir)	GRM (Mr Saheb)	Endoctriment de Base (Mr Hammeg)
Mercredi	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	SMS+DGR (Mr Smail)	Premiers soins (Mr Sifer)	Formation de vol (Mr Hajouti)	
Jeudi	Premiers soins (Mr Sifer)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	GRM (Mr Saheb)		

FIGURE 6.16 – Résultats du deuxième modèle.

Salle 02					
Heures Jours	8h-9h30	9h45-11h15	12h30-14h	14h15-15h45	16h-17h30
Samedi					
Dimanche		Premiers soins (Mr Sifer)	Endoctriment de Base (Mr Hammeg)	Aviation de Base (Mr Ouidir)	Commerciale (Mr Boudjema)
Lundi	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Formation de vol (Mr Hajouti)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Commerciale (Mr Boudjema)	Commerciale (Mr Boudjema)
Mardi	GRM (Mr Saheb)	Premiers soins (Mr Sifer)	GRM (Mr Saheb)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	
Mercredi		Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Endoctriment de Base (Mr Hammeg)	SMS+DGR (Mr Smail)	Premiers soins (Mr Sifer)
Jeudi	Premiers soins (Mr Sifer)	Aviation de Base (Mr Ouidir)	SMS+DGR (Mr Smail)		

FIGURE 6.17 – Suite des résultats du deuxième modèle .

Salle 03					
Heures Jours	8h-9h30	9h45-11h15	12h30-14h	14h15-15h45	16h-17h30
Samedi				Formation de vol (Mr Hajouti)	
Dimanche	GRM (Mr Saheb)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)	Commerciale (Mr Boudjema)	
Lundi	SMS+DGR (Mr Smail)	SMS+DGR (Mr Smail)	Endoctrinement de Base (Mr Hammeg)	SMS+DGR (Mr Smail)	
Mardi	Premiers soins (Mr Sifer)	Aviation de Base (Mr Ouidir)	Endoctrinement de Base (Mr Hammeg)	Commerciale (Mr Boudjema)	Commerciale (Mr Boudjema)
Mercredi	SMS+DGR (Mr Smail)	Premiers soins (Mr Sifer)	SMS+DGR (Mr Smail)	GRM (Mr Saheb)	
Jeudi		Premiers soins (Mr Sifer)	Sécurité et Urgences (Mr Badaoui)		

FIGURE 6.18 – Suite des résultats du deuxième modèle

6.5 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons donné une description du logiciel LINGO , nous avons choisi un exemple de notre problématique, après préparation des données nous avons exécuté le logiciel. Des solutions optimales obtenus par exemple :

- Optimiser les trous dans les planning des formations du personnel navigant commerciale(PNC).
- Libérer des journées ou des après midi souhaités pour rendre le planning plus performant.
- Optimiser les couts des formations du personnel navigant commerciale (PNC).
- Satisfaire les instructeurs dans un cas d'un empêchement en faisons appelé au modèle de remplacement .

En fin ces resultats reste toujours à améliorer ,on a proposé d'autre modèles qui sont plus généralisés mais on a pas pu les tester comme le LINGO professionnel ne peut pas aller au dela de 800 variables.

CONCLUSION

Le stage effectué à Air Algérie séction " Aéroport Houari Boumediene " a été bénéfique dans le sens où cela nous a permis de parfaire nos notions théoriques et pratiques dans les domaines suivantes :

- Les mathématiques : car nous avons exhibé des théorèmes avec leurs preuves.*
- Recherche Opérationnelle : nous avons réussi à construire un modèle mathématique général applicable pour toute structure.*
- Informatique : nous avons présenté et vérifié nos modèles sur des logiciels très performants et professionnels*

D'autre part , nous avons solutionnés la conjecture proposé par la compagnie " Air Algérie " section formation , en proposant des modèles mathématiques exécutables et vérifiables.

En perspective , nous avons pensé à améliorer ce travail par l'adjonction d'interface informatique et de l'adapter à toute structure.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *Documentations Air Algérie.*
- [2] Abbas M. et Moulai M., *Solving multiple objective integer linear programming, Journal of the Italian operations research society (Ricerca operativa)*, Vol. 29 n° 89 pp.15-38 (1999).
- [3] A.Patrouche, *Plannification d'horaires de travail* , Thèse de Doctorat, Université Paris Dauphine, 1998.
- [4] Chan Yew Chéong, Peter, "La planification du personnel : acteurs, actions et termes multiples pour une planification opérationnelle des personnes", Thèse de doctorat, Institut IMAG, Université Joseph Fourier-Grenoble, 2002.
- [5] Leo Liberti, Ruslan Sadykov. "introduction à la programmation linéaire en Nombres Entiers". LIX Ecole Polytechnique 2006.
- [6] Meryem Baba Allah, Rabah Sahbani. Mémoire pour l'obtention du titre d'ingénieur d'état en informatique " Implémentation d'un algorithme de résolution pour l'optimisation du problème de transport du personnel" Ecole Nationale Supérieure d'Informatique et d'Analyse des Systèmes .
- [7] Padberg (Manfred W) et Rinaldi (Giovanni). "Symmetric Traveling Salesman Problem by branch and cut". *Opérations Research Letters* (1987).
- [8] Remy-Robert, Alexandre Joseph, "Systèmes interactifs d'aide à l'élaboration de plannings de travail de personnel", Thèse de doctorat, Laboratoire TIMC, institut IMAG Université Joseph Fourier-Grenoble, 2003.
- [9] *Transport Aérien de marchandise dangereuses. Document d'Air Algérie DOA*, 2013.
- [10] Aidene M. Oukacha B. "les manuels de l'étudiant Recherche Opérationnelle, Programmation Linéaire ". Copyright Eurl Pages Bleues internationales, Maison d'Édition pour l'enseignement et la formation, 2005.
- [11] C. Guéret C. Prins M. Sevaux *Programmation linéaire*, N° éditeur : 6186, Février 2003.

- [12] Yann C., Siarry P., *Optimisation multiobjectif*, groupe Eyrolles, 2002.
- [13] Moulaï M., *Optimisation multicritère fractionnaire linéaire en nombres entiers. Thèse de Doctorat*, 2002.
- [14] Michael Sakarovitch. *Techniques Mathématiques de la recherche opérationnelle "Programmation linéaire"*..
- [15] Klein D. and Hannan E., An algorithm for multiple objective integer linear programming problem, *European journal of operational research* 9, pp. 152-159, (1982).
- [16] Michael Sakarovitch. *Techniques Mathématiques de la recherche opérationnelle "Optimisation Combinatoire"*. Hermann, 1984. .
- [17] Weil G., Heus K., Chan P., et François P. : "The Nurse Scheduling Problem : a combinatorial problem", solved by the combination of constraint programming and real user's heuristics. In *Medinfo 98*. B. Cesnik et al. (Eds) IOS Press, Amsterdam. pp 508-512, 1998.