

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique**

**UNIVERSITE MOULOD MAMMARI DE TIZI-OUZOU**  
**Faculté du Génie de la Construction**  
**Département de Génie Civil**

**MEMOIRE DE MASTER ACADEMIQUE**  
**EN GENIE CIVIL**

**Option :Structures**

**Présenté par : Boadi Atta Asante Senior**

THEME :

Analyse par modèle continu d'une passerelle suspendue par câbles  
précontraints sous l'action des charges horizontales



**Devant les membres du jury composé:**

Bouafia Youcef  
Sadaoui Arezki  
Adjrad Arezki

Professeur  
Professeur  
Professeur

U.M.M.Tizi-Ouzou  
U.M.M.Tizi-Ouzou  
U.M.M.Tizi-Ouzou

Président  
Rapporteur  
Examineur

Soutenu, le 04/07/2018

## REMERCIEMENTS

*La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.*

*Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude au directeur de ce mémoire, Prof. Sadaoui Arezki, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.*

*Je désire aussi remercier les professeurs du Département de Génie Civil UMMTO, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires. Je tiens à remercier spécialement tous les membres de jury.*

*Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers DAD Celia qui m'a apporté son support moral et intellectuel tout au long de mon séjour en Algérie. Un grand merci à toi ma chère amie.*

*Enfin, je tiens à témoigner toute ma famille, en Algérie et au Ghana pour leur confiance et leur support inestimable.*

# TABLE DES MATIERES

## Chapitre 1 : Introduction

1-1 Etat de la Problématique .....	1
1-2 Etat de la question et objectifs de ce travail .....	6
1-3 Approches de calcul .....	7
1-3-1 Approche par modèle discret .....	7
1-3-2 Approche par modèle continu .....	8
1-4 Cheminement du travail suivi .....	9

## Chapitre 2 : Structures hyperstatiques d'ordre infini et les équations intégrales de Fredholm

2-1 Généralités .....	12
2-2 Catégories de structures hyperstatiques d'ordre infini .....	12
2-3 Opérateur linéaire intégral .....	13
2-3-1 Opérateur dont le noyau est une fonction d'influence .....	15
2-3-2 Opérateur d'intégration J .....	17
2-3-3 Intégrations successives : opérateurs $J_n$ .....	18
2-3-4 Application aux poutres droites .....	19
2-4 Quelques rappels concernant les équations intégrales de Fredholm .....	21
2-5 Structures du premier genre sur appuis élastiques indépendants .....	23
2-5-1 Equation de Fredholm vérifiée par la densité de réaction .....	23
2-5-2 Comparaison avec la méthode classique .....	24
2-6 Exemples de structures du premier genre sur appuis indépendants .....	26
2-6-1 Poutres associées .....	26
2-6-2 Extension à des systèmes plus complexes .....	28
2-7 Effet statique du vent sur une travée suspendue .....	30
2-8 Résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm .....	33
2-8-1 Méthode directe de résolution .....	33
2-8-2 Exemple numérique d'illustration .....	35

## **Chapitre 3: Développements théoriques de la méthode de calcul d'une passerelle suspendue par câbles sous des charges horizontales**

3-1 Généralités .....	40
3-2 Hypothèses de calcul .....	40
3-3 Bref rappel de la théorie des structures hyperstatiques d'ordre infini et l'équation intégrale de Fredholm .....	41
3-3-1 Equation intégrale de Fredholm .....	42
3-3-2 Vérification de l'équation intégrale de Fredholm par la densité de réaction .....	42
3-3-3 Généralisation du théorème de Menabrea .....	44
3-4 Application au système vertical précontraint sous l'action des charges horizontales	45
3-4-1 Formulation de l'équation intégrale de Fredholm .....	46
3-4-2 Résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm .....	47

## **Chapitre 4 : Expérimentations numériques et validation des résultats**

4-1 Généralités .....	49
4-2 Organigramme général du programme de calcul BPCHOR et les principales fonctions associées .....	49
4-2-1 Entrée des données sous forme interactive .....	49
4-2-2 Etapes générales de calcul et principales fonctions associées .....	50
4-2-3 Organigramme général et principales fonctions associées .....	51
4-3 Expérimentations numériques et validation des résultats .....	52
4-3-1 Description de la structure .....	53
4-3-2 Cas de charges envisagées .....	55
4-3-3 Résultats numériques et validation .....	55
4-4 Analyse paramétrique .....	59
4-4-1 Effet de la précontrainte $H_1$ .....	59
4-4-2 Influence du poids propre de la structure .....	60

## **Chapitre 5 : Conclusions générales**

5-1 Rétrospective .....	62
5-2 Conclusions .....	63
5-4 Recommandations futures .....	64

Annexe A: Fichier d'entrée et de sortie sous charges réparties avec le programme BPCHOR

Annexe B: Fichier d'entrée et de sortie sous la charge concentrée centrale avec le programme BPCHOR

Annexe C: Fichier d'entrée et de sortie sous la charge répartie avec le code ANSYS

Annexe D: Fichier d'entrée et de sortie sous la charge concentrée centrale avec le code ANSYS

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### **1-1 Etat de la problématique**

Les systèmes par câbles sont fortement employés dans la construction et constitue tant sur le plan architectural que technique une évolution conceptuelle importante dans l'art de construire. Leurs avantages, permettant à la fois d'augmenter la portée et de réduire considérablement le poids propre, répondent d'une manière radicale au problème longtemps posé dans la réalisation des grandes portées [1,2,3,4]. C'est l'exemple notamment de ponts suspendus indispensables pour franchir des vallées (fig. 1-1), des rivières (fig. 1-2) et des bras de mer d'une ampleur considérable (fig. 1-3). Ces systèmes, réputés très légers, emploient comme principal élément le câble dont l'équilibre des charges est réalisé uniquement par des efforts de traction pure, développés parallèlement à la fibre moyenne du câble. De cette caractéristique découle alors la nécessité pratique de mise en tension préalable à toute utilisation, et dont l'effet joue un rôle extrêmement important dans la stabilité des structures correspondantes dont le poids propre demeure particulièrement faible. Cette pré-tension, dite précontrainte, représente la charge qu'il est nécessaire d'intégrer initialement à une résille pour qu'en aucun cas de surcharge, l'un quelconque des éléments de cette résille ne risque d'être virtuellement comprimé i.e tendu.

On ne peut cependant faire abstraction de la vulnérabilité de ce type de structures aux agressions environnementales (pluie, vent, rayonnement ultra-violet, cycles de gel-dégel, variations thermiques, etc.) ou aux problèmes de stabilité liées au flottement ou au balancement et à la résonance, qui doivent inéluctablement recevoir une grande attention lors de la conception de l'ouvrage. Les sollicitations horizontales dues aux effets du vent naturel turbulent par exemple, peuvent en constituer un des facteurs importants d'instabilités des différents éléments clés porteurs (câbles, haubans, suspentes...) et qui risquent d'affecter sérieusement à terme la stabilité entière de la construction. L'étude du comportement sous l'action des charges horizontales, comme celles occasionnées par le vent turbulent, devient par conséquent primordiale dans un système aussi léger et déformable qu'est le système qui

utilise comme élément principal le câble [5,6]. Rapportons à ce propos, l'incident tragique de la destruction du pont suspendu de Takoma Narrows en 1940 dans l'état de Washington aux USA (fig. 1-4, [7]). La destruction du pont a été cru pendant longtemps qu'il était du au phénomène de résonance entre un mode de vibration de l'ouvrage et les turbulences engendrées par le vent sur la structure du tablier. C'est en 1971 que finalement fut expliqué la raison réelle de la destruction du pont et qu'elle avait été bien occasionné par un effet aérodynamique d'auto-excitation sur la section de tablier. Ce phénomène s'explique en fait par un couplage à un degré de liberté entre le mouvement de torsion du tablier et la force aérodynamique qui découle de ce mouvement. La vitesse du vent pour laquelle ce couplage avait engendré une instabilité n'était pourtant pas élevée qui était de l'ordre de 56 km/h soit bien en dessous de la valeur de la vitesse pour laquelle le pont avait été calculé.



Figure 1-1: Pont Sidi M'Cid de Constantine surplombant les gorges à 175 m de Rhumel ;  
Année : 1910-1912 ;  
Longueur : 164 m ;  
Largeur : 5.75 m

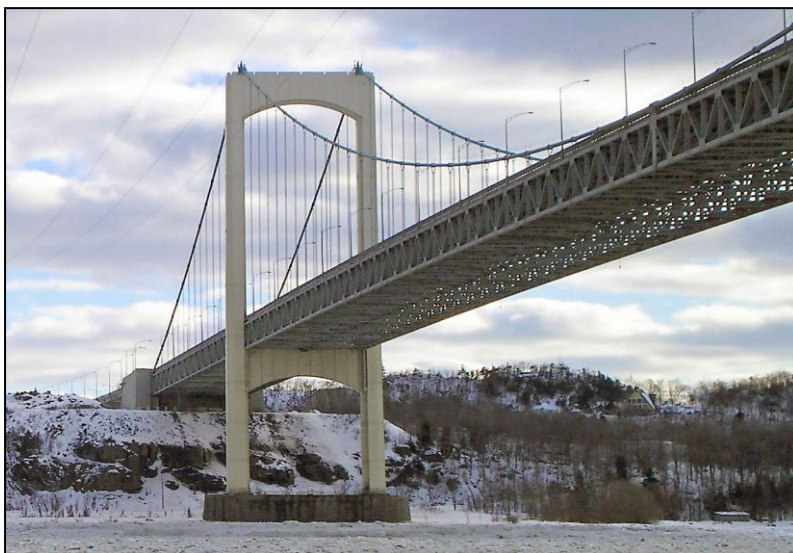


Figure 1-2: Pont routier Pierre-Laporte, Québec city;  
Longueur totale : 1041 m ;  
Portée principale: 668 m ;  
Hauteur totale: 116 m ;  
Année : 1966-1970



Figure 1-3: Pont du Golden Gate, San-Francisco ; Californie ; Longueur totale : 2737 m ; Portée principale: 1280 m ; Hauteur: 230 m ;

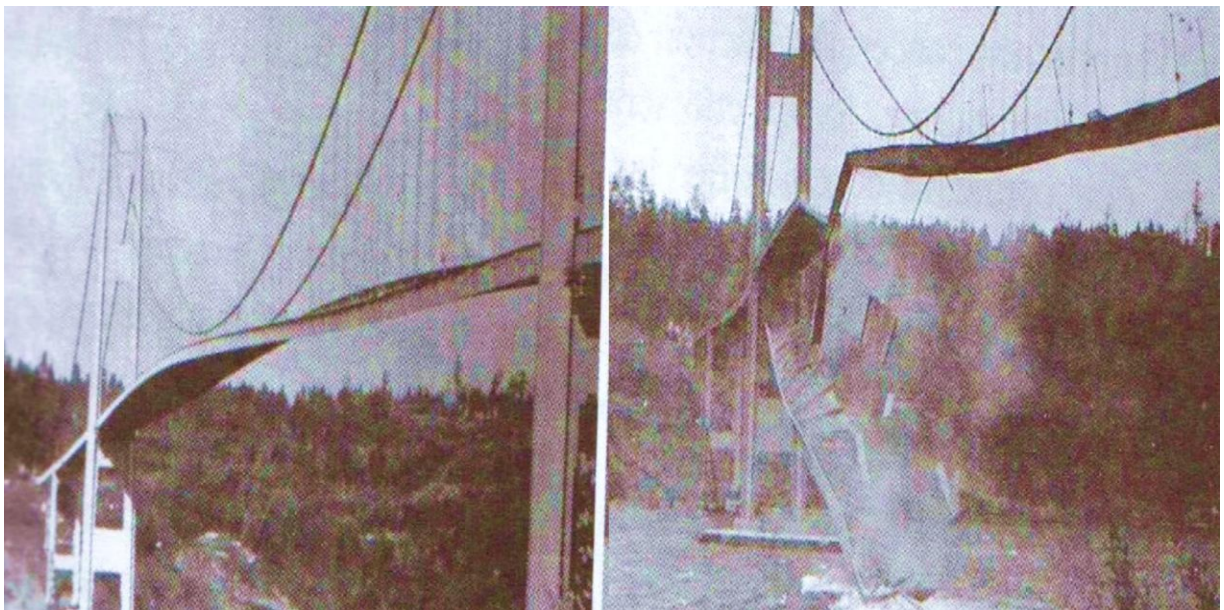


Figure 1-4 : Destruction du pont de Takoma Narrows [9]

Le système à câbles auquel nous allons nous intéresser dans le cadre de ce travail consiste en un système plan vertical à câbles précontraints, de courbures inversées, équivalent à un pont suspendu dont les poutres de rigidité sont représentées par des câbles auxiliaires précontraints appelés câbles de rigidité. Comme représenté sur la figure 1-5, ce système se compose principalement d'une nappe de suspentes verticales réunissant deux câbles principaux à savoir le câble porteur ou principal et le câble tendeur ou de rigidité qui sont

fixés en leurs extrémités à des massifs d'ancrage. Deux systèmes de ce type peuvent supporter un tablier léger que nous pouvons supposer dépourvu de rigidité propre appréciable. Ce qui peut nous permettre de songer dans le cas pratique à une passerelle piétonnière très flexible (fig. 1-6) dont l'implantation peut être très intéressante dans des sites d'attraction ou à un ouvrage connu sous le nom de catérail assurant le passage d'un wagonnet accroché à un rail solidaire du système de suspension.

Nous pourrions également songer dans une moindre mesure à l'usage comme moyen de transport public à l'exemple de téléphérique (bicâble, fig. 1-7) ou de télécabine (monocâble, fig. 1-8). Notons que ce mode de transport public aérien, est généralement utilisé pour gravir un relief pentu et très accidenté ou franchir une dépression géographique (vallée, voie d'eau, montagne dans les stations de ski ou encore en milieu urbain pour la desserte d'un terrain communal au relief difficile) dans le but de se soustraire à des contraintes topographiques.

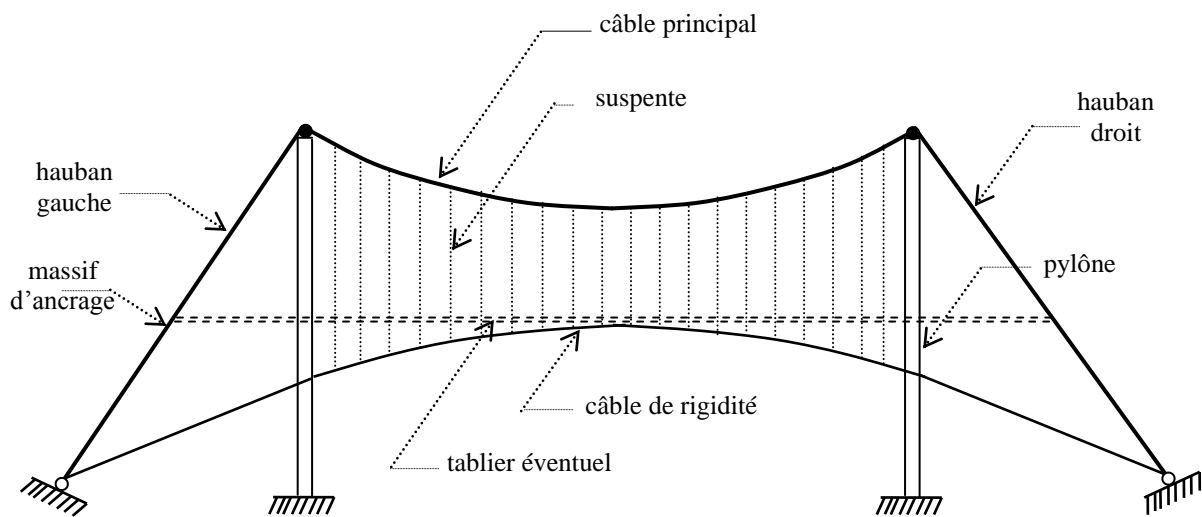


Figure 1-5: Description d'un système vertical précontraint



Figure 1-6: Passerelle piétonnière suspendue rigidifiée par des câbles



Figure 1-7 : Vue du téléphérique de Renon, Italie



Figure 1-8 : Vue d'une télécabine entre Oued Koriche et Bouzaréah, Alger

## 1-2 Etat de la question et objectifs de ce travail

Les réseaux à câbles dont sont composés les structures suspendues sont essentiellement des systèmes discrets, et peuvent être traités comme tels soit par éléments finis en moyennant des codes de calcul disponible dans la littérature. Cependant, si le nombre des câbles dans le réseau devient élevé, il est possible d'approximer le réseau par un système continu conduisant à une méthode d'analyse de nature analytique.

Par suite, la modélisation mathématique d'un réseau à câble peut s'effectuer par l'approche fondamentale qui assimile le comportement de la nappe des suspentes verticales à un voile continu et inextensible [8,9]. Les équations à caractère non linéaire qui en résultent sous l'action des charges verticales, décrivant les tractées ou les poussées dans les câbles, s'établissent de façon à être résolues par une méthode itérative. Par ailleurs, vu que le comportement caractéristique des systèmes suspendus par câbles est non linéaire, les équations d'équilibre fondamentales doivent être formulées par référence à la configuration déformée et non par rapport à la configuration non déformée. C'est pourquoi le calcul exact d'une structure composée de câbles est souvent laborieux contrairement aux structures à éléments rigides dont l'équilibre est formulé par rapport à la configuration initiale. La raison évidente est que la géométrie d'un câble après déformation est très différente de sa géométrie initiale. Cette particularité a une double conséquence où d'une part, le principe de

superposition des petits effets n'est plus applicable et, d'autre part, on ne peut plus se baser sur la géométrie de la structure non chargée pour formuler les équations d'équilibre.

Le but principal de ce travail s'inscrit dans le cadre du développement d'une méthode d'analyse simple, mais suffisamment précise et fiable, permettant d'aborder le calcul sous charges horizontales d'un ouvrage suspendu léger sans poutre de rigidité. C'est le cas par exemple d'une passerelle suspendue rigidifiée par câbles précontraints soumise à l'action de l'effet quasi-statique du vent. A ceci va se greffer un autre objectif complémentaire qui consiste de mettre en évidence, à travers une analyse paramétrique appropriée, l'influence de certains paramètres clés sur la stabilité du système comme la pré-tension du câble de rigidité et le poids propre de l'ouvrage.

Mentionnons que ce travail n'est pas fortuit. C'est une suite logique des travaux de recherche antérieurement réalisés par mon directeur de mémoire et ses collaborateurs [10,11] au cours desquels une méthode analytique originale a été mise au point pour ce type de structure. Elle a été traduite en langage d'ordinateur et dont le programme s'intitule BPCHOR\_version 2017.

### **1-3 Approches de calcul**

Il existe deux grandes approches de calcul des structures suspendues par câbles précontraints à savoir par modèle discret et par modèle continu.

#### **1-3-1 Approche par modèle discret**

Vu que la structure réelle est à l'origine discrète, celle-ci peut être directement traitée comme telle soit en la simulant par un ensemble d'éléments interconnectés à un nombre fini de points nodaux sur lesquels le chargement est supposé concentré (fig. 1-9). La compatibilité géométrique et l'équilibre aux nœuds se traduisent par un système d'équations algébriques à caractère non linéaire dont la résolution fait appel à des méthodes itératives appropriées. Une attention particulière doit être cependant apportée au risque d'une compression éventuelle d'un élément au cours du procédé itératif. Il faut alors, dans ce cas, annuler simplement la rigidité de l'élément en question ainsi que son effort de compression correspondant, avant de passer au cycle d'itération suivant. Si le nombre d'éléments « comprimés » est cependant assez élevé, l'instabilité de la structure devient évidemment inévitable.

Les hypothèses usuelles généralement admises s'y rapportent à la connaissance de la forme initiale, aux propriétés élastiques du matériau et au faible rapport à vide flèche/portée où la portée désigne la distance horizontale entre les points d'accrochage de la structure. Cela suppose une structure aux tensions initiales élevées, de sorte que le tronçon de câble reliant deux nœuds consécutifs soit quasi rectiligne. Mentionnons toutefois qu'il existe des procédés de calcul plus rigoureux qui introduisent mieux le comportement physique de la structure en faisant allusion particulièrement à la courbure de l'élément de câble [12,13,14] et au comportement élastoplastique des matériaux utilisés. Peu d'intérêt toutefois semble être accordé à l'élasto-plasticité, vu la possibilité d'une exploitation optimale du matériau en traction pure, qui permet une valeur élevée du rapport résistance/poids de la structure. La détermination exacte de la forme initiale demeure cependant onéreuse [18], notamment pour des configurations géométriques complexes comme dans la réalisation de couvertures pour les salles de congrès et les stades de sport. Selon Krishna [16], en raison de la longueur et de la lourdeur inouïe des calculs nécessaires à cet égard, un choix judicieux des valeurs initiales des coordonnées est parfois meilleur que toute approche mathématique approfondie.

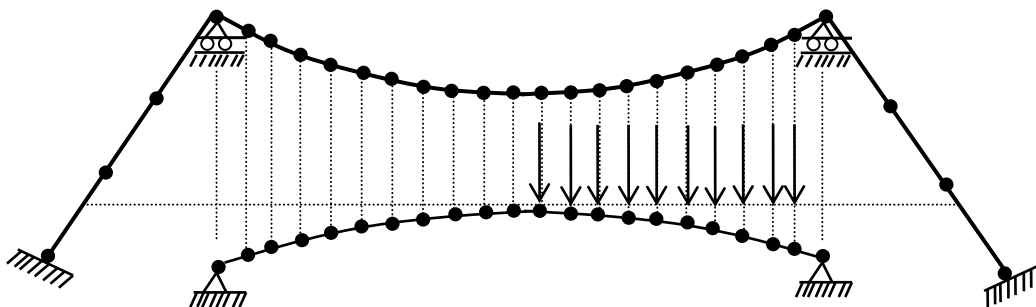


Figure 1-9: Approche discrétisée par éléments finis

### 1-3-2 Approche par modèle continu

Un système à l'origine discret forme naturellement, lorsque ses éléments sont suffisamment rapprochés, un milieu quasi continu. Apriori, une telle situation ne peut se produire que lorsque les charges sont elles-mêmes continues, donc réparties le long du câble. Dans de telles conditions, une structure en résille est assimilable à une membrane incapable d'absorber des efforts de cisaillement ou de compression. La figure 1-10 montre la discontinuité réelle de la membrane qui établit une différence de fait avec la parfaite continuité admise dans la théorie classique. La formulation mathématique se caractérise

généralement par des systèmes d'équations différentielles partielles, intégrales ou intégral-différentielles.

Des approches simplifiées de nature analytique exploitant fondamentalement l'hypothèse de la continuité parfaite de la nappe des suspentes en les assimilant à un voile continu et inextensible, sont rapportées par Chen et al. [6] et Kmet et Kokorudova [17] en vue de l'analyse des systèmes suspendus type passerelle rigidifiée par câbles précontraints dont les charges sont verticales et appliquées dans son propre plan. Les fondements théoriques utilisés, se limitent aux considérations selon lesquelles le poids total de l'ouvrage est nul au moment du réglage initial, les haubans d'ancrage sont totalement absents, le chargement réparti est uniquement appliqué soit sur la totalité ou la moitié du tablier et il n'y a aucune possibilité éventuelle d'une simultanéité de charges réparties et ni présence quelconque de charges concentrées sur le tablier.

Mentionnons, toutefois, à la lumière de la revue bibliographique effectuée [6,10] que les études n'ont pas été étendues à de telles structures sollicitées sous charge horizontales. Cela tient sans doute à la nature des structures étudiés qui sont généralement des toitures suspendues, sollicitées verticalement seulement. Par conséquent, les différentes hypothèses et l'efficacité de la méthode ne pourront être vérifiées qu'à travers un modèle discrétisé fiable basé sur la méthode des éléments finis.

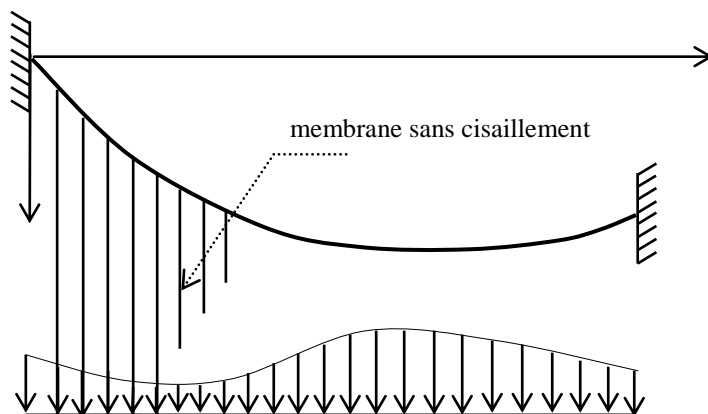


Figure 1-10: Approche par modèle continu

## 1-4 Cheminement du travail suivi

Le travail présenté dans ce mémoire sera organisé en 5 chapitres dont le présent premier chapitre en guise d'introduction, est consacré essentiellement à la nature de la problématique et de la question des structures suspendues légères ainsi à la description des objectifs fixés. Plusieurs points sont abordés dont la revue des deux grandes approches de calcul qui mettent en relief que la modélisation mathématique des réseaux à câbles formant ces structures suspendues peut s'effectuer suivant approches distinctes soit par un modèle continu qui assimile le comportement de la nappe des suspentes à un voile continu et inextensible soit par un modèle discret qui considère la structure en tant que telle i.e. discontinue à l'origine.

Le chapitre deux sera consacré à la revue et commentée de la théorie des structures hyperstatiques d'ordre infini dont le principe de calcul se ramène au calcul d'une structure hyperstatique d'ordre fini en remplaçant les densités de réactions par un nombre fini de réactions concentrées supposées équivalentes ; la précision des résultats augmente bien entendu avec le nombre des réactions concentrées choisies. Plusieurs points seront abordés dont en premier lieu nous donnerons quelques rappels clés sur les équations intégrales de Fredholm qui en résultent. En deuxième lieu, nous montrerons comment résoudre numériquement les équations intégrales de Fredholm en utilisant la méthode d'intégration directe via principalement la méthode numérique des trapèzes. En dernier lieu, nous terminerons par un exemple numérique d'illustration dans le but d'encre dans l'esprit du lecteur la philosophie des calculs avec des structures hyperstatiques d'ordre infini et les équations intégrales de Fredholm.

Le chapitre trois aura trait à l'exposé des fondements théoriques de base de la méthode de calcul d'un système vertical précontraint sans poutre de rigidité soumis à l'action des charges de vent supposées appliquer perpendiculairement au plan du système. La formulation mathématique est basée sur l'approche fondamentale qui assimile le comportement de la nappe des suspentes à celui d'un voile continu et inextensible. Les équations à caractère linéaire décrivant les flèches engendrées dans les câbles sont obtenues en exploitant la théorie des structures hyperstatiques d'ordre infini et la méthode numérique directe pour la résolution de l'équation intégrale de Fredholm qui en résulte. On suppose de plus, par analogie avec la théorie des ponts suspendus à poutre de rigidité, que les câbles

reposent sur les pylônes par l'intermédiaire de chariots de dilatation, afin qu'aucune réaction horizontale ne puisse s'exercer sur les pylônes.

L'avant dernier chapitre sera consacré à l'implémentation numérique et à l'analyse des résultats où dans un premier temps nous décrirons le programme de la méthode ainsi établie par des applications numériques portant sur l'analyse d'une passerelle suspendue type piétonnière rigidifiée par câble cambré soumise à l'action de charges horizontales appliquées perpendiculairement au plan général du système. Pour jauger la fiabilité et la précision de la méthode analytique de calcul ainsi élaborées, les résultats obtenus seront discutés et comparés à ceux issus du logiciel ANSYS, qui est un code numérique basé sur la méthode des éléments finis dont le principe consiste de traiter la structure comme telle par modèle discret.

Nous terminerons finalement en guise de dernier chapitre par une conclusion générale suivie par quelques recommandations pour l'amélioration et la poursuite de ce travail.

## CHAPITRE 2

### STRUCTURES HYPERSTATIQUES D'ORDRE INFINI ET LES EQUATIONS INTEGRALES DE FREDHOLM

#### 2-1 Généralités

Les structures hyperstatiques  $S_n$  d'ordre fini  $n$  sont des structures dont l'état d'équilibre est déterminé les équations de la statique dès que l'on connaît les valeurs de  $n$  réactions dites hyperstatiques. Le théorème du potentiel minimal de Menabrea permet de résoudre les structures  $S_n$  conduisant à la méthode de résolution de flexibilité (ou de forces) en analyse des structures (fig.2-1). Ainsi, en supprimant  $p \leq n$  liaisons surabondantes dans la structure  $S_n$ , on associe à cette structure un système de référence ou de base  $S_{n-p}$ , hyperstatique si  $p < n$ , isostatique si  $p = n$ . Dans ce dernier cas, on appelle le système de référence ainsi obtenu le système de base de la structure rendue isostatique. L'énergie de déformation ou le potentiel du système de référence, soumis aux forces réelles et à  $p$  forces arbitraires dirigées suivant les réactions exercées par les liaisons supprimées, est une fonction de ces  $p$  forces inconnues qui est minimale lorsque ces  $p$  forces sont égales aux  $p$  réactions exercées sur  $S_n$  par les liaisons supprimées. D'une autre manière, les valeurs que prennent les forces surabondantes ( $Q_i$ ) dans un système élastique, rendent stationnaires le potentiel ou l'énergie interne de déformation ( $U$ ) et qu'il s'agit d'un minimum ( $U_{\min}$ ) si l'équilibre du système hyperstatique est stable [1]. La relation de Castigliano ( $\frac{\partial U}{\partial Q_i} = 0 = D_{ir}$ ) devient ainsi la condition qui traduit l'aspect physique et l'aspect mathématique du théorème de Menabrea (fig. 2-2).

Par contre, une structure hyperstatique est dite d'ordre infini lorsqu'il est nécessaire de connaître une infinité de réactions pour déterminer l'état d'équilibre de cette structure au moyen des équations de la statique. En supposant la structure de dimension finie, l'ensemble des réactions comprend nécessairement des densités de réactions qui sont des fonctions d'une ou deux variables et éventuellement un nombre fini de réactions concentrées. L'ensemble des réactions doit bien entendu équilibrer les forces extérieures appliquées à la structure.

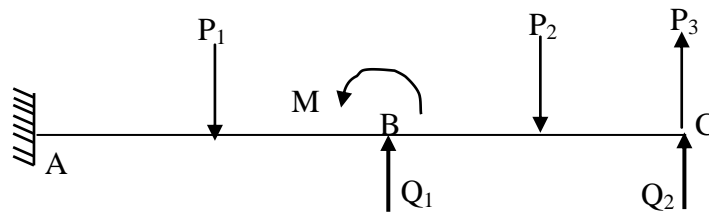


Figure 2-1 : Résolution d'une poutre hyperstatique par la méthode de flexibilité (système de référence de base ; H=2)

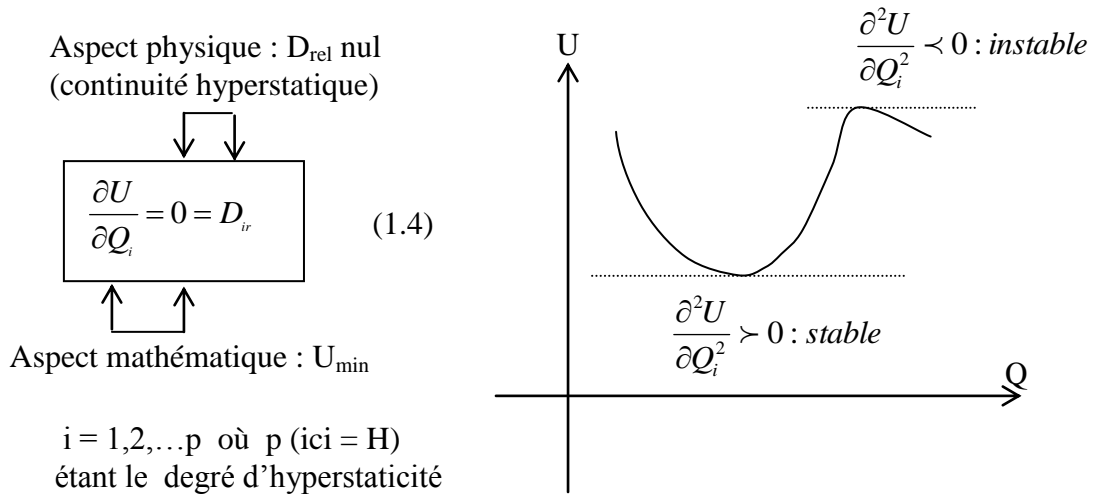


Figure 2-2 : Aspects physique et mathématique du théorème de Menabrea

## 2-2 Catégories de structures hyperstatiques d'ordre infini

Les structures hyperstatiques d'ordre infini peuvent être classées en deux catégories ou en deux genres. Les structures du premier genre sont des structures qui restent stables lorsqu'on supprime les liaisons qui donnent naissance aux densités de réactions ; il est donc immédiat d'associer à toute structure du premier genre une structure de référence isostatique ou hyperstatique d'ordre fini. Les structures du deuxième genre sont par contre des structures pour lesquelles les liaisons qui donnent naissance aux densités de réactions sont indispensables afin d'assurer la stabilité de la structure.

Par exemple, une poutre droite reposant sur un sol élastique (fig. 2-3a) est une structure du deuxième genre ; une poutre droite reposant sur un sol élastique et sur au moins deux appuis (fig. 2-3b) donnant lieu à des réactions concentrées est une du premier genre.

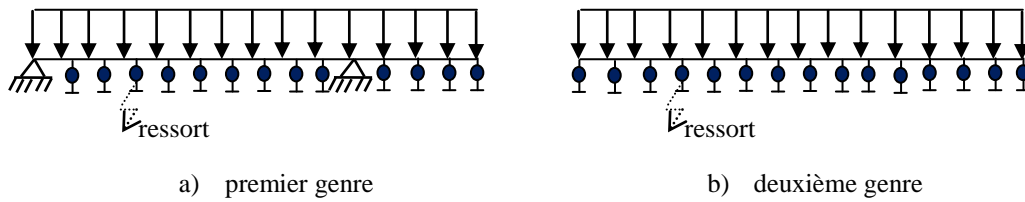


Figure 2-3 : Exemples de structures d'ordre infini

Le calcul d'une structure hyperstatique d'ordre infini peut se ramener au calcul d'une structure hyperstatique d'ordre fini en remplaçant les densités de réaction par un nombre fini de réactions concentrées supposées équivalentes ; la précision des résultats augmentera avec le nombre des réactions concentrées choisies. Il est également possible et c'est l'objectif de ce chapitre, que les densités de réaction sont les solutions d'équations intégrales de Fredholm. Nous pourrions ainsi obtenir rapidement, grâce à l'outil puissant et précis qu'est l'intégration numérique, des tables de densités de réaction et ensuite calculer les déplacements et les efforts recherchés dans la structure.

### 2-3 Opérateurs linéaires intégraux

Soit  $A(x, \alpha)$  une fonction généralement continue des deux variables  $x$  et  $\alpha$  définie sur un domaine carré ( $0 \leq x \leq \ell$  ;  $0 \leq \alpha \leq \ell$ ), la variable  $\alpha$  étant connue.  $A(x, \alpha)$  est une fonction généralement continue de  $x$ , et,  $x$  étant donné,  $A(x, \alpha)$  est une fonction généralement continue de  $\alpha$ .

L'opérateur linéaire intégral de noyau  $A(x, \alpha)$  est l'opérateur  $A$  qui fait correspondre à la fonction  $f(x)$  la fonction  $g(x) = Af$  définie par :

$$g(x) = Af = \int_0^{\ell} A(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha \quad (2-1)$$

où on peut démontrer aisément via l'inégalité de Shawarz [2], que l'opérateur  $A$  est borné et donc continu. L'opérateur transposé noté  $A^*$  de l'opérateur  $A$  est l'opérateur intégral de noyau  $A(\alpha, x)$ . Lorsque le noyau est une fonction symétrique ( $A(x, \alpha) = A(\alpha, x)$ ),

l'opérateur  $A = A^*$  est dit symétrique. Lorsque le noyau est une fonction antisymétrique ( $A(x, \alpha) = -A(\alpha, x)$ ), l'opérateur  $A = -A^*$  est dit antisymétrique. Notons toutefois que le transposé d'une matrice  $A$  est  $A^T$ , tandis que le transposé d'un opérateur intégral  $K(x, \alpha)$  est noté  $K^*(x, \alpha)$ . Ces deux notions sont en effet différentes car dans le cas d'un opérateur intégral matriciel, on a :  $K^*(x, \alpha) = K^T(x, \alpha)$ . Considérons les deux exemples ci-après d'opérateurs linéaires intégraux.

### 2-3-1 Opérateur dont le noyau est une fonction d'influence

Considérons une poutre droite quelconque (fig. 2-4) définie sur l'intervalle  $[0, \ell]$ . Désignons par  $T(x, \alpha)$ ,  $M(x, \alpha)$  et  $v(x, \alpha)$  l'effort tranchant, le moment fléchissant et la flèche (comptée positivement vers le bas, comme la densité de charge) dans la section d'abscisse  $x$  sous à l'effet d'une charge unité appliquée la section d'abscisse  $\alpha$ . L'effort tranchant  $T(x)$ , le moment fléchissant  $M(x)$  et la flèche  $v(x)$  dus à la densité de charge  $p(x)$  ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_0^{\ell} T(x, \alpha) p(\alpha) d\alpha = Tp(x) \\ M(x) &= \int_0^{\ell} M(x, \alpha) p(\alpha) d\alpha = Mp(x) \\ v(x) &= \int_0^{\ell} v(x, \alpha) p(\alpha) d\alpha = vp(x) \end{aligned} \quad (2-2)$$

Nous obtenons ainsi les opérateurs linéaires intégraux  $T$ ,  $M$  et  $v$  de noyaux respectifs  $T(x, \alpha)$ ,  $M(x, \alpha)$  et  $v(x, \alpha)$ . Les noyaux  $T(x, \alpha)$ ,  $M(x, \alpha)$  et  $v(x, \alpha)$  sont des fonctions continues de  $x$  et de  $\alpha$ . Le noyau  $T(x, \alpha)$  est une fonction généralement continue de  $x$  et de  $\alpha$ , discontinue pour  $\alpha = x$ , c'est-à-dire :

$$T(x, x + \varepsilon) - T(x, x - \varepsilon) = 1 \quad \text{et} \quad T(x + \varepsilon, x) - T(x - \varepsilon, x) = -1 \quad (2-3)$$

L'opérateur  $V$ , qui associe la flèche à la densité de charge, est symétrique et défini positif, car nous avons d'une part, en vertu du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti [1] :

$$v(x, \alpha) = v(\alpha, x) \quad (2-4)$$

et, d'autre part, l'énergie interne de déformation (U) de la poutre :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) v(x) dx = \frac{1}{2} (p, Vp) = \frac{1}{2} \int_0^\ell v(x, \alpha) p(x) dx d\alpha > 0 \quad (2-5)$$

Les relations (2-2) sont valables pour toute fonction  $p(x)$  généralement continue ; elles sont également valables pour un ensemble de charges concentrées  $P_i$  appliquées aux sections d'abscisses  $x_i$ , en remplaçant cet ensemble de charges concentrées par la densité de charge généralement continue :

$$p(x) = \frac{P_i}{2\varepsilon} \text{ lorsque } x \text{ appartient à l'intervalle } [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon] \quad (2-6a)$$

$$p(x) = 0 \text{ lorsque } x \text{ n'appartient pas à un intervalle } [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon] \quad (2-6b)$$

où le nombre positif  $\varepsilon$  est supposé aussi petit que l'on peut l'imaginer ; nous trouvons en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 :

$$T(x) = \sum_i T(x, x_i) P_i \quad (2-7a)$$

$$M(x) = \sum_i M(x, x_i) P_i \quad (2-7b)$$

$$v(x) = \sum_i v(x, x_i) P_i \quad (2-7c)$$

L'ensemble des charges concentrées  $P_i$  et la densité de charge  $p(x)$  définie par les relations (2-6) sont des systèmes de forces équivalentes, car ils ont une même résultante générale et un même moment résultant par rapport à l'origine, soit :

$$\int_0^\ell p(x) dx = \sum_i \frac{P_i}{2\varepsilon} \int_{x_i - \varepsilon}^{x_i + \varepsilon} dx = \sum_i P_i \quad (2-8a)$$

$$\int_0^{\ell} xp(x)dx = \sum_i \frac{P_i}{2\varepsilon} \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} x dx = \sum_i x_i P_i \quad (2-8b)$$

Notons que  $T(x)$  est discontinue pour  $x = x_i$ ; en effet :  $T(x_i + \varepsilon) - T(x_i - \varepsilon) = -P_i [T(x_i + \varepsilon; x_i) - T(x_i - \varepsilon; x_i)] = -P_i$ .

### 2-3-2 Opérateur d'intégration J

Désignons par l'opérateur qui fait correspondre à la fonction généralement continue  $f(x)$  la fonction continue  $g(x)$  définie par :

$$g(x) = Jf(x) = \int_0^x f(\alpha) d\alpha \quad (2-9)$$

L'opérateur J est opérateur linéaire intégral dont le noyau  $J(x, \alpha)$  est défini par :

$$J(x, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \alpha \prec x \\ 0 & \text{pour } \alpha \succ x \end{cases} \quad (2-10)$$

Le noyau  $J(x, \alpha)$  est donc généralement continu (fig. 2-4). Il est immédiat de vérifier que l'opérateur J transforme la fonction  $p(x)$  définie par la relation (2-6) en la fonction généralement continue  $Jf(x) = \sum_g P_i$ ; la sommation étant étendue à toutes les charges  $P_i$  dont l'abscisse  $x_i$  est inférieure à  $x$ . L'opérateur transposé  $J^*$  de J est défini par le noyau :

$$J^*(x, \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha \prec x \\ 1 & \text{pour } \alpha \succ x \end{cases} \quad (2-11)$$

Il en résulte que :

$$J^* f(x) = \int_x^{\ell} f(\alpha) d\alpha \quad (2-12)$$

où nous déduisons des relations (2-11) et (2-12) :

$$Jf(x) + J^* f(x) = \int_0^{\ell} f(\alpha) d\alpha \quad (2-13)$$

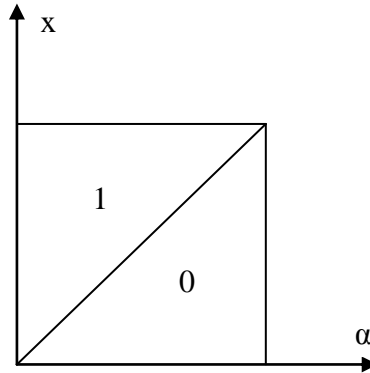


Figure 2-4 : Valeurs de l'opérateur d'intégration  $J(x, \alpha)$

### 2-3-3 Opérateurs d'intégration $J$ successive, $J_n$

L'opérateur d'intégration successive d'ordre 2 soit  $J_2 = JJ = J^2$  a pour noyau :

$$J_2(x, \alpha) = \int_0^{\ell} J(x, t) J(t, \alpha) dt, \text{ soit compte tenu de l'expression (2-10) de } J(x, \alpha) :$$

$$J_2(x, \alpha) = \begin{cases} x - \alpha & \text{pour } \alpha < x \\ 0 & \text{pour } \alpha > x \end{cases} \quad (2-14)$$

Nous aurons donc:

$$g(x) = J_2 f = \int_0^x (x - \alpha) f(\alpha) d\alpha \quad (2-15)$$

La fonction  $g(x)$  définie par (2-15) est telle que :  $g''(x) = f(x)$  ;  $g(0) = 0$  ;  $g'(0) = 0$ . Plus généralement, on montre sans difficulté par récurrence que l'opérateur  $J_n = J^n$  a pour noyau :

$$J_n(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{pour } \alpha < x \\ 0 & \text{pour } \alpha > x \end{cases} \quad (2-16)$$

de sorte que :

$$J_n f = \int_0^x \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} f(\alpha) d\alpha \quad (2-17)$$

les noyaux  $J_n(x, \alpha)$  étant continus lorsque  $n \geq 2$ . L'opérateur  $J_n^*$  a pour noyau :

$$J_2^*(x, \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha < x \\ \alpha - x & \text{pour } \alpha > x \end{cases} \quad (2-18)$$

Il en résulte que l'opérateur :

$$A = J_2 - J_2^* \quad (2-19)$$

est un opérateur antisymétrique de noyau  $x-\alpha$ .

### 2-3-4 Application aux poutres droites

Illustrons l'exemple de la poutre sur appuis simples de portée  $\ell$  soumise à une densité de charge  $p(x)$  montrée sur la figure 2-5. Proposons de calculer l'effort tranchant  $T(x)$  et le moment fléchissant  $M(x)$  dans la section d'abscisse  $x$ .

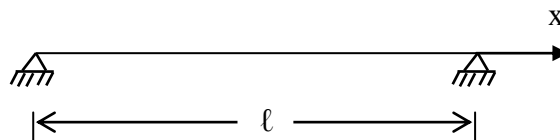


Figure 2-5 : Poutre sur appuis simples

Nous avons en désignant par R de l'appui à  $x = 0$  :

$$T(x) = R - Jp(x) \text{ et } M(x) = Rx - J_2 p(x)$$

La condition aux limites  $M(x=\ell)$  nous donne la réaction R définie par :

$$R = \frac{1}{\ell} [J_2 p(x)]_{x=\ell} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell (\ell - \alpha) p(\alpha) d\alpha.$$

Il en résulte que  $M(x)$  a pour expression :

$$M(x) = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \left[ \frac{x(\ell - \alpha)}{\ell} - J_2(x, \alpha) \right] p(\alpha) d\alpha$$

soit en tenant compte de la valeur (2-14) de  $J_2(x, \alpha)$  :

$$M(x) = \mu p(x) = \int_0^\ell \mu(x, \alpha) p(\alpha) d\alpha \quad (2-20)$$

$\mu$  désignant l'opérateur de noyau :

$$\mu(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha(\ell - x)}{\ell} & \text{pour } \alpha < x \\ \frac{x(\ell - \alpha)}{\ell} & \text{pour } \alpha > x \end{cases} \quad (2-21)$$

le noyau  $\mu(x, \alpha)$  étant symétrique et l'opérateur  $\mu$  est défini également positif ; en effet :

$$I = \int_0^\ell \int_0^\ell \mu(x, \alpha) p(\alpha) p(x) d\alpha dx = \int_0^\ell M(x) p(x) dx = - \int_0^\ell M(x) \frac{dT}{dx} dx$$

soit, en intégrant par parties :  $I = -|M(x)T(x)|_0^\ell + \int_0^\ell T^2(x)dx > 0$ . Notons que la fonction  $g(x)$  déduite de la fonction  $f(x)$  par l'opérateur  $\mu$  :  $g(x) = \mu f(x)$  est définie par les relations :  $g''(x) = -f(x)$  ;  $g(0) = g(\ell) = 0$ .

Calculons maintenant la flèche  $v(x)$  comptée positivement vers le bas. Soit à partir de la relation de la pièce fléchie  $\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)}$  et des conditions aux appuis  $v(0) = v(\ell) = 0$ , nous déduisons immédiatement, en désignant par  $k(x)$  la fonction  $1/EI(x)$  pour simplifier l'écriture :  $v(x) = \mu[k(x)M(x)] = \mu k M(x)$  ; soit, compte tenu de l'expression (2-20) de  $M(x)$  :

$$v(x) = \mu k p(x) = K p(x) \tag{2-22}$$

L'opérateur symétrique défini positif  $K = \mu k \mu$  fait correspondre la flèche  $v(x)$  à la densité de charge  $p(x)$  ; son noyau  $\mu$ , la fonction d'influence de la flèche, a pour expression :

$$K(x, \alpha) = \int_0^\ell \mu(x, t) k(t) \mu(t, \alpha) dt \tag{2-23}$$

#### 2-4 Quelques rappels concernant les équations intégrales de Fredholm

Etant donné une fonction  $K(x, \alpha)$  généralement continue de  $x$  et de  $\alpha$  définie sur un carré ( $0 \leq x \leq \ell$  ;  $0 \leq \alpha \leq \ell$ ), on appelle équation intégrale linéaire de Fredholm une équation de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\ell K(x, \alpha) \varphi(\alpha) dx = f(x) \tag{2-24}$$

dans laquelle  $\lambda$  est un paramètre,  $f(x)$  une fonction généralement continue définie sur l'intervalle ( $0 \leq x \leq \ell$ ) et  $\varphi(x)$  la fonction inconnue sur l'intervalle ( $0 \leq x \leq \ell$ ). Dans toutes les équations de Fredholm que nous allons rencontrer, les fonctions  $K(x, \alpha)$  et  $f(x)$  sont continues. Nous pouvons également écrire l'équation (2-24) sous la forme :

$$\varphi(x) - \lambda K\varphi(x) = f(x) \quad (2-25)$$

K désignant l'opérateur linéaire intégral de noyau  $K(x, \alpha)$ . L'équation homogène associée à l'équation (2-24) :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\ell} K(x, \alpha)\varphi(\alpha)dx = 0 \quad (2-26)$$

n'a de solutions non identiquement nulles que lorsque  $\lambda$  est égal à une valeur propre du noyau  $K(x, \alpha)$ . Limitons à rappeler la première partie du théorème de Fredholm stipulant que si  $\lambda$  n'est pas une valeur propre du noyau  $K(x, \alpha)$ , l'équation (2-24) a une solution et une seule. En particulier, lorsque les valeurs propres du noyau  $K(x, \alpha)$  sont réelles et positives, l'équation :

$$\varphi(x) + \int_0^{\ell} K(x, \alpha)\varphi(\alpha)dx = f(x) \quad (2-27)$$

obtenue en faisant  $\lambda=-1$  dans (2-24), a une solution et une seule. Il y a deux cas où les valeurs propres du noyau sont réelles et positives i) l'opérateur K est symétrique défini positif ii) Il existe un opérateur intégral S symétrique défini positif tel que l'opérateur SK soit symétrique défini positif.

## 2-5 Structures du premier genre sur appuis élastiques indépendants

### 2-5-1 Equation de Fredholm vérifiée par la densité de réaction

Considérons une poutre (fig. 2-6) définie pour  $0 \leq x \leq \ell$  reposant sur un nombre fini d'appuis discrets et sur une infinité d'appuis élastiques infiniment rapprochés exerçant une densité de réaction  $R(x)$ , comptée positivement vers le haut, proportionnelle à la flèche  $v(x)$  de la poutre comptée positivement vers le haut.

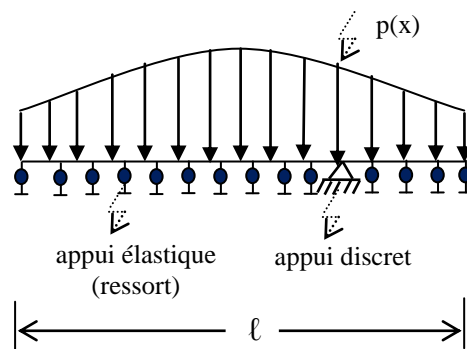


Figure 2-6 : poutre sur appuis discret et sur appuis infiniment rapprochés

En désignant par  $k(x)$  est le coefficient de rappel ou module de réaction de l'appui élastique, alors, on peut écrire :

$$R(x) = k(x)v(x) \quad (2-28)$$

Inversement, la relation précédente équivaut à:

$$v(x) = h(x)R(x) \quad (2-29)$$

où  $h(x)$  représente l'inverse du coefficient de rappel ou du module de réaction de l'appui ; nous supposons la fonction  $h(x)$  toujours positive.

Si nous supprimons les appuis élastiques, nous obtenons ,puisque la structure est du premier genre, une poutre de référence isostatique ou hyperstatique d'ordre fini dont la flèche dans la section d'abscisse  $x$  sous l'action d'une charge unité appliquée dans la section

d'abscisse  $\alpha$  est  $K(x, \alpha)$  ; la fonction  $K(x, \alpha)$  étant continue de  $x$  et de  $\alpha$ . Désignons en outre par  $F(x)$  la flèche de la poutre de référence sous l'action des charges appliquées ( $p(x)$ ) à la poutre donnée ; ces charges peuvent comporter des charges réparties, des charges concentrées, des couples réparties et des couples concentrés ; dans tous ces cas,  $F(x)$  est une fonction continue sur l'intervalle  $0 \leq x \leq \ell$ .

La flèche  $v(x)$  de la poutre donnée est la somme de la flèche  $F(x)$  et de la flèche provoquée par la densité de réaction :

$$v(x) = F(x) - \int_0^{\ell} K(x, \alpha) R(\alpha) dx \quad (2-30)$$

En égalant les expressions (2-29) et (2-30) de la flèche  $v(x)$ , nous obtenons l'équation de Fredholm dont  $R(x)$  est la solution :

$$E(R) = h(x)R(x) + \int_0^{\ell} K(x, \alpha) R(\alpha) dx - F(x) = 0 \quad (2-31)$$

Cette équation a toujours une solution unique ; en effet, en posant  $R(x) = \frac{S(x)}{\sqrt{h(x)}}$ , nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$S(x) + \int_0^{\ell} \frac{K(x, \alpha)}{\sqrt{h(x)h(\alpha)}} S(\alpha) d\alpha = \frac{F(x)}{\sqrt{h(x)}} \quad (2-32)$$

Cette forme est celle de l'équation (2-27), et le noyau  $\frac{K(x, \alpha)}{\sqrt{h(x)h(\alpha)}}$  est évidemment symétrique défini positif comme  $K(x, \alpha)$ .

### 2-5-2 Comparaison avec la méthode classique

Dans le cas où la poutre de référence est une poutre droite, la flèche  $v$  est une intégrale de l'équation différentielle :

$$(EIv'')'' + kv = p \quad (2-33)$$

qui résulte de l'élimination de la force de R entre les équations :  $R=kv$  et  $(EIv'')'' = p - R$ .

L'équation différentielle (2-33) peut être retrouvée en écrivant que l'énergie totale U de la structure est minimale. Supposons par exemple, que la poutre ne soit soumise qu'à des liaisons fixes à ses extrémités  $x=0$  et  $x=\ell$  ; l'énergie totale U, somme de l'énergie de déformation et de l'énergie potentielle de la densité de charge  $p(x)$ , a pour expression :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(v'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell kv^2 dx - \int_0^\ell p v dx \quad (2-34)$$

Donnons à v une variation  $\delta v$  compatible avec les liaisons aux extrémités de la poutre ; la variation  $\delta U$  a pour expression :

$$\delta U = \int_0^\ell EIv'' \delta v' dx + \int_0^\ell kv \delta v dx - \int_0^\ell p \delta v dx \quad (2-35)$$

Or, deux intégrations par parties successives montrent que :

$$\int_0^\ell EIv'' \delta v' dx = \left[ EIv'' \delta v' - (EIv''') \delta v \right]_0^\ell + \int_0^\ell (EIv''')' \delta v dx ; \text{ soit : } \int_0^\ell EIv'' \delta v' dx = \left[ -M \delta v' + T \delta v \right]_0^\ell + \int_0^\ell (EIv''')' \delta v dx .$$

Quelques que soit les liaisons envisagées aux extrémités de la poutre,  $-M \delta v' + T \delta v$  est nul pour  $x=0$  et pour  $x=\ell$  ; donc :  $\int_0^\ell EIv'' \delta v' dx = \int_0^\ell (EIv''')' \delta v dx$  et la variation

$\delta U$  se met sous la forme :

$$\delta U = \int_0^\ell [(EIv''')' + kv - p] \delta v dx \quad (2-36)$$

On trouverait la même expression (2-36) dans le cas où les liaisons d'extrémité sont élastiques, à condition de tenir compte dans l'expression de U de l'énergie de déformation des

liaisons élastiques. La formule (2-36) montre que si  $\delta U=0$  quelque soit  $\delta v$ ,  $v$  est une intégrale de l'équation différentielle (2-33). Lorsque  $EI$  et  $k=1/h$  sont constants, il est possible d'intégrer formellement l'équation différentielle vérifiée par  $v$  :  $EI \frac{d^4 v}{dx^4} + kv = p$  où l'équation différentielle vérifiée par  $R$  :  $EIh \frac{d^4 R}{dx^4} + R = p$ .

Cette méthode d'intégration formelle conduit à des calculs fort longs, car il faut partager l'intervalle  $[0, \ell]$  en intervalles partielles limités par les points de discontinuité de  $p(x)$ , par les points d'application des charges concentrées et par les appuis intermédiaires éventuels. Dans chaque intervalle partiel, l'intégrale dépend linéairement de quatre constantes, de sorte qu'on a finalement beaucoup de constantes à déterminer au moyen des conditions aux limites des intervalles. Cependant, dans le cas où  $EI$  et  $k$  sont des fonctions de  $x$ , on ne peut guère utiliser qu'une méthode qui passe par la recherche du minimum de  $U$ .

Par contre, la recherche de la solution de l'équation de Fredholm vérifiée par  $R(x)$ , au moyen de l'une des méthodes numériques données plus loin, évite les difficultés précédentes ; en effet, le noyau  $K(x, \alpha)$  tient compte de toutes les liaisons de la poutre de référence, et la fonction  $F(x)$  tient compte de toutes les charges extérieures quelles qu'elles soient. Le fait que l'inertie de la poutre ou le module de réaction soient des fonctions de  $x$  ne compliquent pas le calcul. Enfin, comme nous allons le voir, la méthode l'équation de Fredholm s'applique à bien d'autres structures que les poutres droites reposant sur des appuis élastiques infiniment rapprochés.

## **2-6 Exemples de structures du premier genre sur appuis indépendants**

### **2-6-1 Poutres associées**

Considérons comme montré sur la figure 2-7 une structure formée de deux poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$ , de même portée  $\ell$ , reliées par des suspentes élastiques infiniment rapprochées. Désignons, en supposant les suspentes supprimées, par  $K_1(x, \alpha)$  et  $K_2(x, \alpha)$  les fonctions d'influence de la flèche des poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$ , et par  $F_1(x)$  et  $F_2(x)$  la flèche des poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  sous l'effet des charges qui leurs sont appliquées.

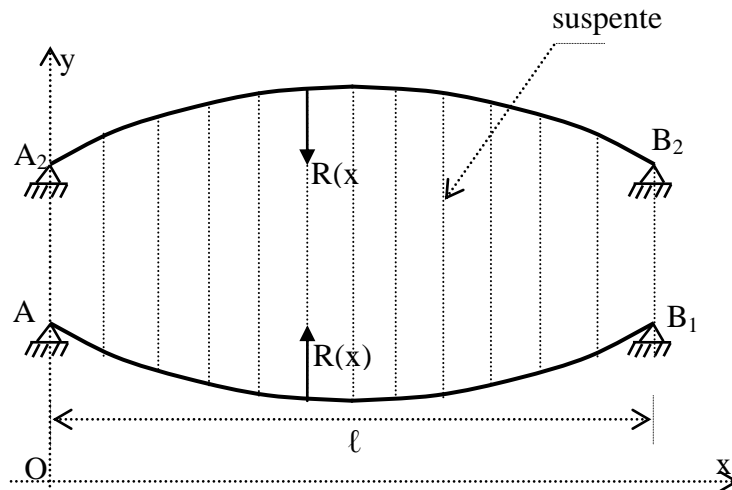


Figure 2-7 Système de deux poutres reliées par des suspentes

Il suffit, pour déterminer les efforts dans les poutres, de connaître la densité de réaction  $R(x)$  transmise par les suspentes ; en fonction de cette densité  $R(x)$ , les flèches  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  des poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  reliées par les suspentes ont pour valeurs :

$$v_1(x) = F_1(x) - K_1 R(x) ; v_2(x) = F_2(x) - K_2 R(x) \quad (a)$$

$K_1$  et  $K_2$  étant des opérateurs intégraux de noyaux  $K_1(x,\alpha)$  et  $K_2(x,\alpha)$ . Si nous définissons la fonction  $F(x)$  et l'opérateur  $K$  par  $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$  et  $K = K_1 + K_2$ , l'allongement des suspentes aura pour valeur :

$$v_1(x) - v_2(x) = F(x) - K R(x) \quad (b)$$

Mais si nous désignons par  $b(x)$  la longueur des suspentes, par  $S(x)$  la densité de section des suspentes et par  $E$  leur module d'élasticité, nous avons également :

$$v_1(x) - v_2(x) = \frac{b(x)}{ES(x)} R(x) = h(x) R(x) \quad (c)$$

En égalant les expressions (b) et (c) trouvées pour  $v_1(x) - v_2(x)$ , nous obtenons l'équation de Fredholm dont  $R(x)$  est la solution :

$$E(R) = h(x)R(x) + KR(x) - F(x) = 0 \quad (2-37)$$

Remarquons que cette équation est identique à l'équation (2-31) ;  $K$  est l'opérateur intégral symétrique défini positif de noyau :

$$K(x,\alpha) = K_1(x,\alpha) + K_2(x,\alpha) \quad (2-38)$$

### 2-6-2 Extension à des systèmes plus complexes

Il est possible d'étendre les résultats de la section précédente à des systèmes plus complexes. Considérons d'abord la structure représentée sur la figure 2-8, dans laquelle les appuis élastiques de module  $k(x) = \frac{1}{h(x)}$  ne règnent que dans l'intervalle  $a \leq x \leq b$  ; la densité de réactions  $R(x)$  étant nulle en dehors de cet intervalle, la flèche de la poutre pour  $0 \leq x \leq \ell$  a pour valeur,  $F(x)$  désignant la flèche de la poutre de référence :

$$v(x) = F(x) - \int_a^b K(x,\alpha)R(\alpha)d\alpha \quad (a)$$

Mais, dans l'intervalle  $a \leq x \leq b$ , la flèche  $v(x)$  est égale à  $h(x)R(x)$  ; nous obtenons donc, pour déterminer  $R(x)$ , l'équation de Fredholm:

$$E(R) = h(x)R(x) + \int_a^b K(x,\alpha)R(\alpha)d\alpha - F(x) = 0 \text{ pour } a \leq x \leq b \quad (2-39)$$

dont le noyau  $K(x,\alpha)$  défini sur le carré  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq \alpha \leq b$ , coïncide avec la fonction d'influence de la flèche de la poutre de référence.

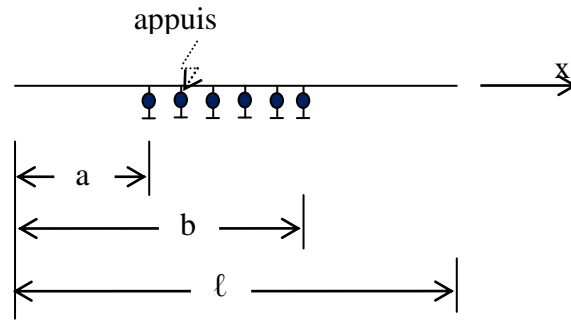


Figure 2-8 : Cas d'une poutre sur appuis élastiques partiellement réparties

La structure représentée sur la figure 2-9 dans laquelle les deux poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  ne sont pas des suspentes élastiques infiniment rapprochées que dans l'intervalle  $a \leq x \leq b$  donne lieu à un calcul semblable. La densité de réaction  $R(x)$  transmise par les suspentes n'étant définie que sur l'intervalle  $a \leq x \leq b$ , la flèche  $v_1(x)$  de la poutre  $A_1B_1$  et la flèche  $v_2(x)$  de la poutre  $A_2B_2$  ont pour valeurs:

$$v_1(x) = F_1(x) - \int_a^b K_1(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq b$$

$$v_2(x) = F_2(x) + \int_a^b K_2(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha \quad \text{pour} \quad a \leq x \leq \ell$$

Dans l'intervalle  $a \leq x \leq b$ , en conservant les mêmes notations que dans la figure (2-7), l'allongement des suspentes a pour valeur :

$$v_1(x) - v_2(x) = \frac{b(x)}{ES(x)} R(x) = h(x) R(x)$$

En éliminant  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  entre les trois dernières équations, nous retrouvons l'équation intégrale (2-39) dont le noyau  $K(x, \alpha)$  défini sur le carré  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq \alpha \leq b$ , coïncide dans ce cas avec la somme des fonctions d'influence de la flèche des poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$ .

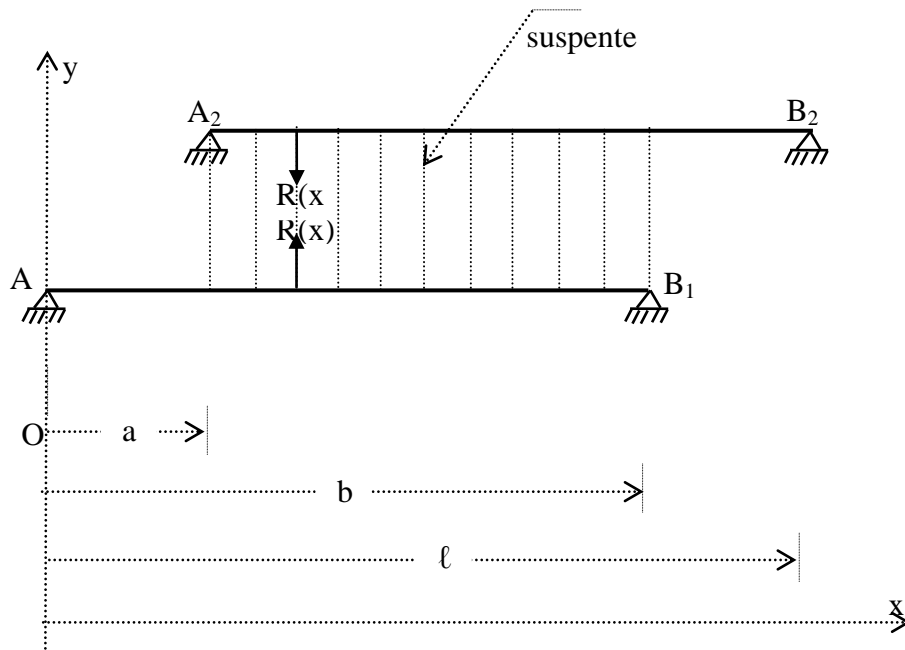


Figure 2-10 Système de deux poutres reliées par des suspentes dans un intervalle [a,b]

### -7 Effet statique du vent sur une travée suspendue

Soit la structure représentée sur la figure 2-11a qui se compose d'un câble porteur et d'une poutre de rigidité les deux reliés par des suspentes élastiques supposées infiniment rapprochées. Elle est supposée soumise à l'action des charges horizontales dues par exemple à une rafale de vent. Proposons de déterminer l'équation correspondante de Fredholm qui permet de calculer les densités de réaction  $R(x)$  transmises par les suspentes conjointement sur le câble porteur et sur la poutre de rigidité.

Désignons par  $q_1(x)$  et  $q_2(x)$  respectivement les efforts exercés par le vent sur la poutre de rigidité et sur le câble porteur par mètre de tablier, et par  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  respectivement les déplacements transversaux de la poutre de rigidité et du câble porteur. A l'équilibre (fig.2-11b), les suspentes exercent par mètre du tablier l'effort transversal ( $R(x)$ ) sur le câble par mètre de tablier et l'effort transversal ( $-R(x)$ ) sur la poutre de rigidité. L'équilibre des suspentes montre que:

$$\frac{v_1(x) - v_2(x)}{b(x)} = \frac{R(x)}{p(x)}$$

où  $b(x)$  désigne la longueur des suspentes et  $p(x)$  l'effort qu'elles transmettent par mètre de tablier ; nous avons donc, en posant  $h(x) = \frac{b(x)}{p(x)}$  :

$$v_1(x) - v_2(x) = h(x)R(x) \quad (2-40)$$

Calculons la flèche horizontale  $v_1(x)$  de la poutre de rigidité sous l'effet de la densité de charge  $q_1-R$  ; nous avons, en désignant par  $F_1(x)$  la flèche due à  $q_1$  et par  $K(x,\alpha)$  la fonction d'influence de la flèche de la poutre horizontale constituée par la poutre de rigidité :

$$v_1(x) = F_1(x) - \int_0^\ell K_1(x,\alpha)R(\alpha)d\alpha \quad (2-41)$$

Calculons maintenant le déplacement transversal  $v_2(x)$  du câble ; soit  $H$  la composante horizontale de l'effort de traction du câble, nous obtenons, en écrivant que le moment fléchissant dans le câble est nul :

$$\int_0^\ell \mu(x,\alpha)[q_2(\alpha) + R(\alpha)]d(\alpha) - Qv_2(x) = 0$$

Nous obtenons ainsi :

$$v_2(x) = F_2(x) + \frac{1}{H} \int_0^\ell \mu(x,\alpha)R(\alpha)d\alpha \quad (2-42)$$

La fonction  $F_2(x)$  étant définie par :  $F_2(x) = \frac{1}{H} \int_0^\ell \mu(x,\alpha)q_2(\alpha)d\alpha$ . Finalement, en éliminant

$v_1(x)$  et  $v_2(x)$  entre les équations (2-40), (2-41) et (2-42), nous trouvons que  $R(x)$  est la solution de l'équation de Fredholm :

$$E(R) = h(x)R(x) + \int_0^\ell K(x,\alpha)R(\alpha)d\alpha - F(x) = 0 \quad (2-43)$$

dans laquelle  $F(x)$  et  $K(x,\alpha)$  désignent les fonctions :  $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$  ;  
 $K(x,\alpha) = K_1(x,\alpha) + \frac{1}{H} \mu(x,\alpha)$ . Le noyau  $K(x,\alpha)$  est symétrique défini positif comme les  
noyaux  $K_1(x,\alpha)$  et  $\mu(x,\alpha)$ .

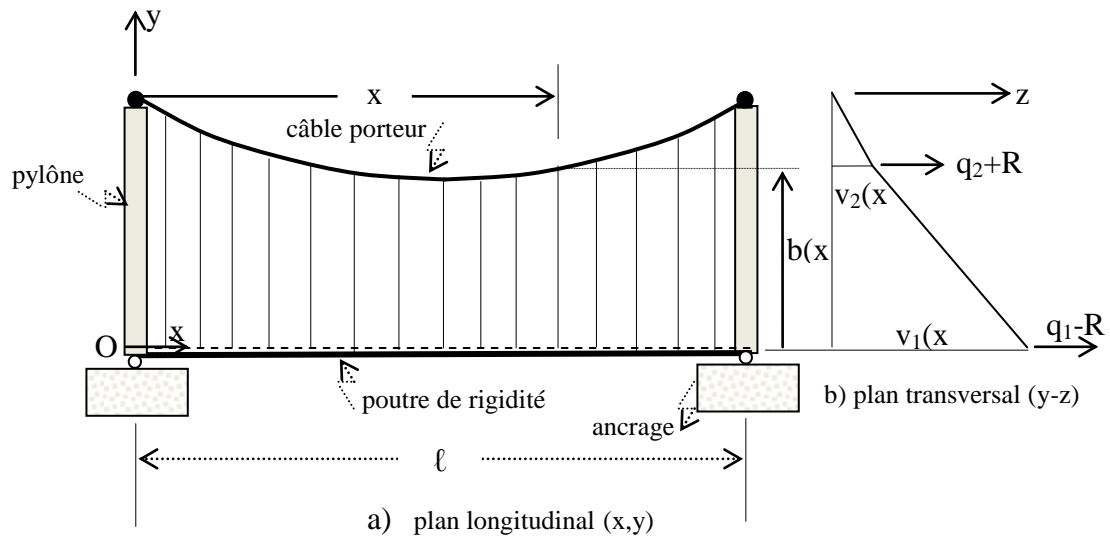


Figure 2-11: Travée suspendue sous charges horizontales dues au vent

## 2-8 Résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm (équ. 2-44) à savoir la méthode directe et les méthodes à itérations successives. Toutes ces méthodes consistent à déterminer les valeurs des réactions  $R_i=R(x=x_i)$  de la fonction inconnue pour une suite de valeurs croissantes :  $x_0=0, x_1, x_2, \dots, x_n=l$ . Très souvent,  $R(0)$  et  $R(l)$  sont nuls, mais ce n'est pas toujours vrai, comme on le voit en considérant par exemple, l'équation (2-39). Nous supposons habituellement que les valeurs  $x_i=li/n$ ,  $i=0,1,2,\dots,n$  sont en progression arithmétique afin de simplifier la présentation ; cependant, il peut être quelquefois intéressant de choisir les valeurs  $x_i$  différemment pour obtenir une meilleure présentation de  $R(x)$  dans une zone où elle varie rapidement.

Dans ce qui suit, nous allons uniquement nous intéresser à la méthode directe de résolution qui sera utilisée par la suite dans le cadre de ce travail. Concernant les méthodes de résolution à base itérative, nous suggérons aux lecteurs de consulter directement la référence [1].

### 2-8-1 Méthode directe de résolution

Proposons de résoudre l'équation intégrale de Fredholm (équ. 2-39), soit:

$$E(R) = h(x)R(x) + \int_0^l K(x, \alpha)R(\alpha)dx - F(x) = 0 \quad (2-44)$$

La méthode de résolution directe consiste à remplacer l'intégrale par une sommation approchée ; nous obtenons ainsi pour calculer les valeurs approchées  $R_i=R(x=x_i)$  le système d'équations linéaires que nous écrivons sous la forme :

$$h(x_i)R_i + \sum_{j=0}^{j=n} C_j K(x_i, x_j)R_j = F(x_i) ; (i=0,1,2,\dots,n) \quad (2-45)$$

dans lesquelles  $C_j$  sont les coefficients de la formule d'intégration numérique utilisée (méthode des trapèzes, méthode de Simpson ...). Par exemple, si l'on utilise la formule des trapèzes :

$$C_0 = C_n = \frac{\ell}{2n} ; \quad C_1 = C_2 = \dots = C_{n-1} = \frac{\ell}{n} \quad (2-46a)$$

Si l'on utilise la formule de Simpson, en supposant n pair :

$$C_0 = C_n = \frac{\ell}{6n} ; \quad C_1 = C_3 = \dots = C_{n-1} = \frac{4\ell}{6n} ; \quad C_2 = C_4 = \dots = C_{n-2} = \frac{2\ell}{6n} \quad (2-46b)$$

La précision augmente bien entendu avec le nombre de points de subdivision (n). Il est aisé de remplacer le système (2-45) par une équation matricielle ; en désignant par R et F les matrices colonnes, par h et C les matrices diagonales et par K la matrice symétrique définie positive, soit explicitement:

$$R = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_n \end{Bmatrix} ; \quad F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (2-47a)$$

$$h = \begin{Bmatrix} h(x_1) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h(x_2) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h(x_i) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & h(x_n) \end{Bmatrix} \quad (2-47b)$$

$$F = \begin{Bmatrix} F(x_1) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F(x_2) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F(x_i) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & F(x_n) \end{Bmatrix} \quad (2-47c)$$

$$K = \left\{ \begin{array}{cccccc} K_{11} = K(x_1, x_1) & K_{12} = K(x_1, x_2) & \dots & K_{1i} = K(x_1, x_i) & \dots & K_{1n} = K(x_1, x_n) \\ K_{21} = K(x_2, x_1) & K_{22} = K(x_2, x_2) & \dots & K_{2i} = K(x_2, x_i) & \dots & K_{2n} = K(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} = K(x_i, x_1) & K_{i2} = K(x_i, x_2) & \dots & K_{ii} = K(x_i, x_i) & \dots & K_{in} = K(x_i, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} = K(x_n, x_1) & K_{n2} = K(x_n, x_2) & \dots & K_{ni} = K(x_n, x_i) & \dots & K_{nn} = K(x_n, x_n) \end{array} \right\} \quad (2-47d)$$

Le système (2-45) est équivalent à l'équation matricielle :

$$[h + CK]\{R\} = \{F\} \quad (2-48)$$

dans laquelle la matrice  $[h + CK]$  est symétrique définie positive, donc régulière ; il en résulte que :

$$\{R\} = [h + CK]^{-1} \{F\} \quad (2-49)$$

L'inconvénient de la méthode directe est d'être parfois longue, car elle exige la détermination des coefficients  $K(x_i, x_j)$  de la matrice  $K$ , ce qui peut entraîner d'assez longs calculs d'intégration numérique, et la résolution d'un système de  $n+1$  équations linéaires dont tous les coefficients sont différents de zéro. Dans les cas usuels où  $R(0)$  et  $R(\ell)$  sont nuls, le nombre des équations du système (2-45) se réduit à  $n-1$ .

### 2-8-2 Exemple numérique d'illustration

Soit la structure ainsi décrite sur la figure 2-12 qui se compose de deux poutres identiques sur appuis simples reliées par des suspentes infiniment rapprochées, de longueur  $b$  et de section  $S$  par unité de longueur suivant l'axe  $ox$ . L'inertie des poutres, en béton, est  $I=1 \text{ m}^4$  ; les suspentes, en acier, ont un module d'élasticité  $E'$  égal à dix fois le module d'élasticité  $E'$  des poutres en béton. La portée des poutres est  $2a=36\text{m}$ , et seule la poutre  $A_1B_1$  est soumise à la charge concentrée  $P=24 \text{ kN}$  appliquée, dans la section médiane. On demande de déterminer numériquement à l'aide de la méthode d'intégration directe 1) la matrice  $[K(x, \alpha)]$  et le vecteur  $\{F(x)\}$  de l'équation intégrale de Fredholm correspondante 2) les valeurs des réactions engendrées dans les suspentes. NB : il faut utiliser la méthode des trapèzes ( $n=6$ ).

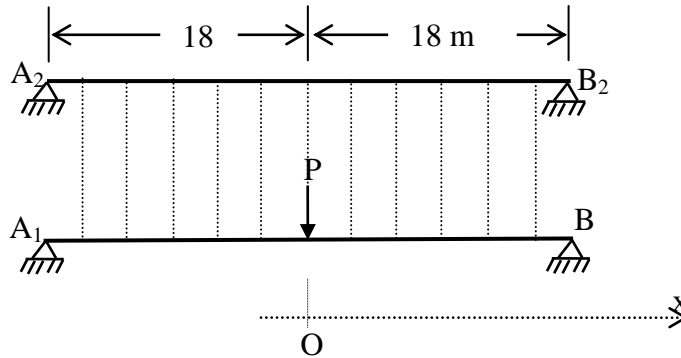


Figure 2-12 Exemple d'illustration numérique par la méthode directe de résolution

### 1- Matrice $[K(x,\alpha)]$ et le vecteur $\{F(x)\}$ de l'équation intégrale de Fredholm

Choisissons l'origine de l'axe Ox dans la section médiane ; nous savons que la densité de réaction  $R(x)$  transmise par les suspentes est la solution de l'équation intégrale de Fredholm :

$$\frac{b}{E'S} R(x) + \int_0^l 2K(x,\alpha) R(\alpha) dx = v(x)$$

où  $v(x)$  est la flèche de la poutre  $A_1B_1$ , supposée désolidarisée des suspentes, sous l'action de la charge concentrée  $P$  (fig.2-13a), et  $K(x,\alpha)$  la fonction d'influence de la flèche de l'une ou l'autre des deux poutres sur appuis simples (fig.2-13b). En posant :

$$h = \frac{Elb}{2E'S} = \frac{lb}{20S} ; \quad G(x,\alpha) = EIK(x,\alpha) ; \quad F(x) = \frac{1}{2} EIv(x)$$

nous pouvons écrire l'équation intégrale sous la forme :

$$hR(x) + \int_0^l G(x,\alpha) R(\alpha) dx = F(x) \tag{2-50}$$

Nous trouvons pour expressions de  $G(x,\alpha)$  et de  $F(x)$ , en appliquant la formule classique des pièces fléchies (cours de résistance des matériaux) relatives aux poutres sur

appuis simples, et en utilisant comme unités le kilonewton [kN] pour les forces et le mètre [m] pour les longueurs :

$$G(x, \alpha) = \frac{(18+x)(18-\alpha)}{6 \times 36} [(18+\alpha)(54-\alpha) - (18+x)^2] \quad \text{pour} \quad x < \alpha$$

$$G(x, \alpha) = \frac{(18+\alpha)(18-x)}{6 \times 36} [(18+x)(54-x) - (18+\alpha)^2] \quad \text{pour} \quad x > \alpha$$

$$F(x) = (18-x)(648 + 36x - x^2)$$

Supposons  $b=20\text{m}$ ,  $S=1\text{cm}^2$ , ce qui équivaut de prendre  $h = \frac{Ib}{20S} = 10000$  ;  $I$  étant égal à  $I=1\text{m}^4$ . Par ailleurs, en raison de la symétrie, bornons-nous à l'intervalle  $0 \leq x \leq 18$ . Pour les intégrales numériques, nous divisons cet intervalle en intervalles partiels de 3m, et nous calculerons les valeurs suivantes :

$R_0 = R(x=0)$ ,  $R_1 = R(x=3)$ ,  $R_2 = R(x=6)$ ,  $R_3 = R(x=9)$ ,  $R_4 = R(x=12)$ ,  $R_5 = R(x=15)$  ;  $R_6 = R(x=18)$  étant nul.

Puisque nous connaissons le noyau  $G(x,\alpha)$ , il est facile d'utiliser la méthode directe consistant à remplacer l'équation intégrale (2-50) par un système d'équations linéaires. Le tableau 2-1 donne les valeurs de  $F(x)$  le tableau 2-2 celles de  $\frac{4}{3}G(x,\alpha)$ .

Tableau 2-1 : Valeurs de  $F(x)$  de l'équation intégrale de Fredholm

x	0	3	6	9	12	15	18
F(x)	11664	11205	9936	8019	5616	2889	0

Tableau 2-1 : Evaluation numérique du noyau de l'équation intégrale de Fredholm

$\alpha \backslash x$	0	3	6	9	12	15	18
-18	0	0	0	0	0	0	0
-15	321	295	254	201	139	71	0
-12	624	575	496	393	272	139	0
-9	891	825	714	567	393	201	0
-6	1104	1030	896	714	496	254	0
-3	1245	1175	1030	825	575	295	0
0	1296	1245	1104	891	624	321	0
3	1245	1225	1106	903	637	329	0
6	1104	1106	1024	852	608	316	0
9	891	903	852	729	531	279	0
12	624	637	608	531	400	215	0
15	321	329	316	279	215	121	0
18	0	0	0	0	0	0	0

## 2) Détermination des réactions engendrées dans les suspentes

L'utilisation de la méthode des trapèzes nous conduit au système linéaire:

$$\begin{bmatrix} 51664 & 22410 & 19872 & 16038 & 11232 & 5778 \\ 11205 & 61600 & 19224 & 15552 & 10908 & 5616 \\ 9936 & 19224 & 57280 & 14094 & 9936 & 5130 \\ 8019 & 15552 & 14094 & 51664 & 8316 & 4320 \\ 5616 & 10908 & 9936 & 8316 & 46048 & 3186 \\ 2889 & 5616 & 5130 & 4320 & 3186 & 41728 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 46656 \\ 44820 \\ 39744 \\ 32076 \\ 22464 \\ 11556 \end{Bmatrix}$$

La résolution de ce système d'équations nous donne les résultats récapitulés dans le tableau 2-3 :

Tableau 2-3 : Solution de l'équation intégrale de Fredholm

$R_0 = R(x=0)$	0.438519
$R_1 = R(x=3)$	0.417502
$R_2 = R(x=6)$	0.363503
$R_3 = R(x=9)$	0.287637
$R_4 = R(x=12)$	0.198104
$R_5 = R(x=15)$	0.100793
$R_6 = R(x=18)$	0

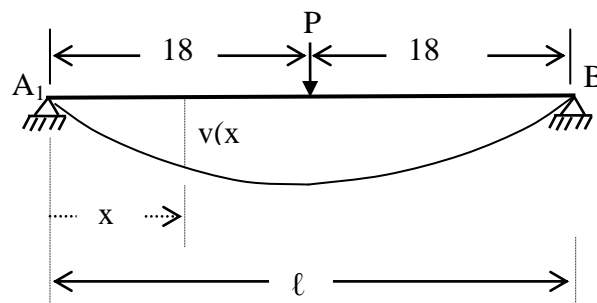


Figure 2-13a : Calcul de la flèche  $v(x)$  due à la charge appliquée  $P$

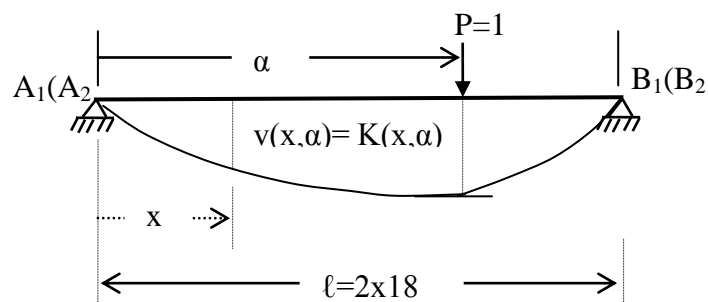


Figure 2-13b : Calcul du noyau  $K(x, \alpha) = v(x, \alpha)$ ; flèche à l'abscisse  $x$  due à la charge unité  $P=1$  appliquée à l'abscisse  $\alpha$

## CHAPITRE 5

### CONCLUSIONS GENERALES

#### **5-1 Rétrospective**

Ce présent travail s'inscrit dans le cadre du développement d'une méthode d'analyse simple, mais suffisamment précise et fiable, permettant d'aborder le calcul sous charges horizontales d'un ouvrage suspendu léger sans poutre de rigidité. C'est le cas par exemple d'une passerelle suspendue rigidifiée par câbles précontraints soumise par exemple à l'action de l'effet quasi-statique du vent. A ceci va se greffer un autre objectif complémentaire qui consiste de mettre en évidence, à travers une analyse paramétrique appropriée, l'influence de certains paramètres clés sur la stabilité du système comme la pré-tension du câble de rigidité et le poids propre de l'ouvrage.

La modélisation mathématique a été effectuée par l'approche fondamentale qui assimile le comportement de la nappe des suspentes à celui d'un voile continu et inextensible. Les fondements théoriques de la méthode de calcul exploitent fondamentalement la théorie des structures hyperstatiques d'ordre infini que Courbon avait initialement adapté aux structures avec inerties flexionnelles à l'exemple des poutres solidarisiées par des suspentes infiniment rapprochées, des poutres sur appuis élastiques infiniment rapprochés indépendants ou non ou les ponts à poutres multiples. Soulignons, toutefois, qu'à la lumière de la revue bibliographique effectuée, les études n'ont pas été étendues à de telles structures sollicitées sous charge horizontales dues à l'action d'une rafale quasi-statique de vent. Cela tient sans doute à la nature des structures étudiés qui sont généralement des toitures suspendues, sollicitées verticalement seulement.

Les hypothèses admises qui délimitent les conditions de validité de la méthode de calcul sont principalement les suivantes:

- les poussées engendrées ( $h_0$  et  $h_1$ ) dans les câbles sont très petites et sont pratiquement négligeables. Les géométries des haubans de rive sont en outre supposées invariables (extrémités fixes) ;
- les déplacements horizontaux aux extrémités des suspentes restent faibles. La longueur de la suspenste est alors confondue pratiquement avec sa projection verticale (angle toujours faible par rapport à la verticale) ;
- les changements géométriques et mécaniques étant admis petits, il est donc possible d'appliquer le principe de superposition.

## 5-2 Conclusions

La méthode de calcul est traduite en langage d'ordinateur dont le programme principal s'intitule BPCHOR (Bloc Principal de l'analyse sous Charges HORizontales), programme facilement exploitable sur micro-ordinateurs. La méthode est ensuite appliquée à différents aspects d'analyses d'une passerelle piétonnière suspendue par câbles précontraints soumise à l'action des charges des charges horizontales dues par exemple à celles du vent agissant perpendiculairement au plan général de l'ouvrage.

Les résultats sont confrontés avec succès à ceux issus du logiciel ANSYS qui est un code essentiellement numérique basé sur la méthode des éléments finis dont le principe consiste de traiter la structure comme telle soit par modèle discret. Nous avons ainsi pu examiner par le biais de l'analyse paramétrique l'influence de certains paramètres clés sur la stabilité du système comme la pré-tension de réglage du câble de rigidité et le poids propre de l'ouvrage. En conséquence, nous avons pu juger de la valeur et du mérite des hypothèses simplificatrices du système continu et nous renseigner sur le comportement global de l'ouvrage selon les hypothèses admises.

Les hypothèses de la modélisation numérique sont évidemment plus réalistes que les simplifications admises de continuité et d'inextensibilité des suspentes. Cela confère bien entendu au modèle discrétisé plus de souplesse que n'en possède le modèle analytique ou continu puisqu'il permet de tenir compte des conditions d'appuis, de la présence des pylônes et de n'importe quelle direction de la sollicitation. L'avantage de la méthode analytique proposée demeure, par conséquent, dans la faible taille du problème résultant qui permet se

traiter très aisément sur un micro-ordinateur simple, ce qui répond avec succès à un objectif tant recherché sur le plan théorique et pratique.

Quant aux résultats de l'analyse paramétrique, nous pouvons en dégager les conclusions suivantes :

- La précontrainte initiale de réglage du câble de rigidité contribue très efficacement à la stabilité de l'ouvrage. Les résultats obtenus démontrent qu'avec des valeurs relativement élevées de la précontrainte ( $H_1$ ), on pourrait réduire de façon appréciable (jusqu'à environ 300%) les flèches engendrées dans les câbles. A titre illustratif, nous enregistrons pour  $H_1=400$  kN,  $w_{1max}=0.563$  m et pour  $H_1=800$  kN,  $w_{1max}=0.290$  m ; ce qui correspond à une diminution de l'ordre de 200%. Par suite, sans affecter significativement à la hausse du poids propre de la travée, un choix adéquat de ce paramètre permet de réduire la déformabilité à laquelle sont sujettes en majorité ces types de structures suspendues.
- L'influence stabilisatrice plus nette du poids propre soit, en d'autres termes, la stabilité de l'ouvrage s'avère d'autant meilleure que le poids propre devient de plus en plus important. On note, pour la valeur maximale utilisée, une réduction des effets allant jusqu'à 40% par rapport à la structure usuelle ou de référence ( $H_1=600$ kN ;  $w'=0.5$ kN/m). Cela démontre, que le rappel des suspentes du au décalage horizontal (effet balancier) est grandement proportionnel au poids propre de l'ouvrage.

### 5-3 Recommandations futures

Ce qu'on pourrait enfin suggérer comme études futures pour l'amélioration de ce thème de travail sont les suivantes :

- Introduire dans la formulation mathématique l'effet du gradient thermique et en étudier les effets sur la stabilité de l'ouvrage.
- Entreprendre une analyse paramétrique afin de montrer l'influence des pylônes (conditions d'appuis, sections, etc.).

## Références

- [1] Flamand O. Actions du vent sur les ouvrages effets dynamiques, CSTB, le futur en construction.
- [2] Prud'homme S. et al., 2014. Wind forces on single and shielded angle members in lattice structures, *J. Wind Eng. Ind. Aerod.*, 124, 20-28.
- [3] Ecole des ponts, Cours de projet de pont Actions du vent.
- [4] Troyano L.F., 2003. Bridge engineering-A global perspective, London, Tomas Telford Ltd, 775 p.
- [5] Grogorjeva T., Juozpaitis A. and Kamaitis Z., 2010. Static analysis and simplified design of suspension bridges having various rigidity of cables, *Journal of Civil Eng. And Mang.*, 16:3, pp. 363-371.
- [6] Chen Z. and al., 2014. A simplified structural mechanics model for cable truss footbridges and its implications for preliminary design, *Engineering Structures*, 68, pp. 121-133.
- [7] Hemon P., 2006, Vibrations des structures couplées avec le vent, Editions de l'école polytechnique,
- [8] Desai Y.M. and al., 1989. Geometric nonlinear static analysis of cable supported structures, *Computers & Structures*, V. 29, N° 6, pp. 1001, 1009.
- [9] Goremikins V. and al., 2013, Simplified method of determination of natural-vibration frequencies of prestressed suspension bridges, *Procedia Engineering*, 57, pp. 343-352.
- [10] Sadaoui A., Lattari K. and Khennane A, 2016. A novel analytical method for the analysis of cable-truss footbridges, *Engineering Structures*, 123, Pages 97-107. <http://dx.doi.org/10.201j.struct.2016.05.025>. Journalhomepage: [www.elsevier.com/locate/engstruct](http://www.elsevier.com/locate/engstruct).
- [11] Sadaoui A., Lattari K., and Khennane A., 2016. Effects of temperature changes on the behaviour of a cable truss system, *Journal of Constructional Steel Research*, November 2016, 129 (2016),Pages 111-118, <http://dx.doi.org/10.2016/J.Jcsr.2016.11.013>.
- [13] Möllman, H., Analysis of plane prestressed cable structures, *ASCE, J. Str. Div.*, Oct. 1970, pp. 2059-2083.
- [14] Ozdemir, H., A finite element approach for cable problems, *Int. J. Solids & Structures*, Oct.1978, pp. 427-437.
- [15] Gandhir, M. L. et Batchlor, B., A finite element for 3D prestressed cable nets, *Int. J. Numer. Methods Eng.* V.11, 1977, PP. 905-929.
- [16] Krishna, P., Theoretical analysis of pretensioned cable networks, 1971, *IASS Pac. Sym. Part II*.

- [17] Kmet S. and Kokorudova Z., Non-linear closed-form computational model of cable trusses, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44, 2009, PP. 735-744.
- [18] Juozpaitis A. and al., 2010. Non linear analysis of suspension bridges with flexible and rigid cables, *Journal of Civil Eng. and Mang.*, 16:1, pp.149-151.
- [19] Courbon, J., « Structures hyperstatiques d'ordre infini », *Annales ITBTP, TMC190*, N°334, Déc. 1975, PP. 91-133.
- [20] Ounas C., 2016. Analyse par modèle continu d'une passerelle piétonnière suspendue par câbles cambrés en tenant compte des effets de dilatation thermique, Master académique, Option Structure, Département de Génie Civil, Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou, Mémoire soutenu le 15-09-2016.
- [21] ANSYS® Academic Research, Release 15.0 <http://www.ansys.com/>.
- [22] SETRA, novembre 2001. Haubans, Recommandations de la commission interministérielle de la précontrainte, [www.setra.equipement.gouv.fr](http://www.setra.equipement.gouv.fr).
- [23] Eurocode 1, 2005, Actions sur les structures – partie 1-4 : Actions générales Actions du vent.
- [24] Idjeri F. , Analyse par modèle continu d'une passerelle suspendue rigidifiée par câbles cambrés précontraints: Développements théoriques et numériques, Mémoire de master académique, Option structures, Département de Génie Civil, UMMTO, 2014-15.
- [25] Courbon, J., Application de la résistance des matériaux au calcul des ponts, 1950, Dunod, Paris.
- [26] Maurice Dalois, APL, une approche pratique, Sd edition, 1981.

ANNEXE A

Fichier d' entrée et de sortie sous charges réparties avec le programme BPCHOR

BPCHOR  
BPCHOR

DONNEES GENERALES

-----

DEUX NIVEAUX D'AIDE SONT DISPONIBLES:

0: RAPPEL DES DONNEES D'ENTREE ET IMPRESSION DES  
RESULTATS AVEC CERTAINS DETAILS SUPPLEMENTAIRES

1: RAPPEL SEULEMENT DES DONNEES ET IMPRESSION DES  
RESULTATS PRINCIPAUX

QUEL NIVEAU DESIREZ-VOUS?

:

1

\*DEUX TYPES DE REPONSES SONT POSSIBLES:

0: OUI

1: NON

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES

-----

SONT-ELLES DEJA ENTREES?

:

1

F0: FLECHE MAX. DU CABLE PORTEUR

F1: FLECHE MAX. DU CABLE DE RIGIDITE

L: LONGUEUR DE LA TRAVEE

N: NB DE POINTS D'INTEGRATION NUM. A DISTANCE EGALE

W: DENSITE DU POIDS PROPRE TOTAL DE L'OUVRAGE

H1: PRECONTRAINTTE DU CABLE DE RIGIDITE

D: HAUTEUR DE LA STRUCTURE (ENTRE APPUIS DES CABLES SUR LES PYLONNES)

F0 F1 L N W H1 D

:

6.4 3.2 80 39 0.5 600 12.6

DESIREZ-VOUS CORRIGER CES VALEURS?

:

1

INTENSITES DES CHARGES

-----

SONT-ELLES DEJA ENTREES?

:

1

CES CHARGES DOIVENT ETRE CONCENTREES EQUIVALENTES  
AUX POINTS D'INTEGRATION NUMERIQUES  
SUR LE CABLE DE RIGIDITE

Q1:

:

0.6

Q0:

:

0.3

DESIREZ-VOUS CORRIGER CES VALEURS?

:

1

SOLUTION: REACTION A CHAQUE POINT D'INTEGRATION

-----

1.390E<sup>-3</sup>

2.860E<sup>-3</sup>

4.418E<sup>-3</sup>

6.071E<sup>-3</sup>

7.824E<sup>-3</sup>

9.685E<sup>-3</sup>

1.166E<sup>-2</sup>

1.375E<sup>-2</sup>

1.595E<sup>-2</sup>

1.826E<sup>-2</sup>

2.066E-2  
2.314E-2  
2.564E-2  
2.811E-2  
3.047E-2  
3.263E-2  
3.447E-2  
3.589E-2  
3.679E-2  
3.710E-2  
3.679E-2  
3.589E-2  
3.447E-2  
3.263E-2  
3.047E-2  
2.811E-2  
2.564E-2  
2.314E-2  
2.066E-2  
1.826E-2  
1.595E-2  
1.375E-2  
1.166E-2  
9.685E-3  
7.824E-3  
6.071E-3  
4.418E-3  
2.860E-3  
1.390E-3

DEPL. CABLE DE RIGIDITE DEPL. CABLE PORTEUR

-----

3.774E-2	3.436E-2
7.348E-2	6.706E-2
1.072E-1	9.809E-2
1.390E-1	1.274E-1

1.688E <sup>-1</sup>	1.551E <sup>-1</sup>
1.966E <sup>-1</sup>	1.811E <sup>-1</sup>
2.225E <sup>-1</sup>	2.053E <sup>-1</sup>
2.463E <sup>-1</sup>	2.279E <sup>-1</sup>
2.683E <sup>-1</sup>	2.487E <sup>-1</sup>
2.883E <sup>-1</sup>	2.677E <sup>-1</sup>
3.063E <sup>-1</sup>	2.850E <sup>-1</sup>
3.224E <sup>-1</sup>	3.006E <sup>-1</sup>
3.366E <sup>-1</sup>	3.143E <sup>-1</sup>
3.489E <sup>-1</sup>	3.263E <sup>-1</sup>
3.593E <sup>-1</sup>	3.364E <sup>-1</sup>
3.677E <sup>-1</sup>	3.447E <sup>-1</sup>
3.743E <sup>-1</sup>	3.512E <sup>-1</sup>
3.790E <sup>-1</sup>	3.559E <sup>-1</sup>
3.818E <sup>-1</sup>	3.586E <sup>-1</sup>
3.828E <sup>-1</sup>	3.596E <sup>-1</sup>
3.818E <sup>-1</sup>	3.586E <sup>-1</sup>
3.790E <sup>-1</sup>	3.559E <sup>-1</sup>
3.743E <sup>-1</sup>	3.512E <sup>-1</sup>
3.677E <sup>-1</sup>	3.447E <sup>-1</sup>
3.593E <sup>-1</sup>	3.364E <sup>-1</sup>
3.489E <sup>-1</sup>	3.263E <sup>-1</sup>
3.366E <sup>-1</sup>	3.143E <sup>-1</sup>
3.224E <sup>-1</sup>	3.006E <sup>-1</sup>
3.063E <sup>-1</sup>	2.850E <sup>-1</sup>
2.883E <sup>-1</sup>	2.677E <sup>-1</sup>
2.683E <sup>-1</sup>	2.487E <sup>-1</sup>
2.463E <sup>-1</sup>	2.279E <sup>-1</sup>
2.225E <sup>-1</sup>	2.053E <sup>-1</sup>
1.966E <sup>-1</sup>	1.811E <sup>-1</sup>
1.688E <sup>-1</sup>	1.551E <sup>-1</sup>
1.390E <sup>-1</sup>	1.274E <sup>-1</sup>
1.072E <sup>-1</sup>	9.809E <sup>-2</sup>
7.348E <sup>-2</sup>	6.706E <sup>-2</sup>
3.774E <sup>-2</sup>	3.436E <sup>-2</sup>

## ANNEXE B

Fichier d'entrée et de sortie sous la charge concentrée centrale avec le programme BPCHOR

BPCHOR

DONNEES GENERALES

-----

DEUX NIVEAUX D'AIDE SONT DISPONIBLES:

0: RAPPEL DES DONNEES D'ENTREE ET IMPRESSION DES  
RESULTATS AVEC CERTAINS DETAILS SUPPLEMENTAIRES

1: RAPPEL SEULEMENT DES DONNEES ET IMPRESSION DES  
RESULTATS PRINCIPAUX

QUEL NIVEAU DESIREZ-VOUS?

:

1

\*DEUX TYPES DE REPONSES SONT POSSIBLES:

0: OUI

1: NON

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES

-----

SONT-ELLES DEJA ENTREES?

:

1

F0: FLECHE MAX. DU CABLE PORTEUR

F1: FLECHE MAX. DU CABLE DE RIGIDITE

L: LONGUEUR DE LA TRAVEE

N: NB DE POINTS D'INTEGRATION NUM. A DISTANCE EGALE

W: DENSITE DU POIDS PROPRE TOTAL DE L'OUVRAGE

H1: PRECONTRAINTES DU CABLE DE RIGIDITE

D: HAUTEUR DE LA STRUCTURE (ENTRE APPUIS DES CABLES SUR LES PYLONNES)

F0 F1 L N W H1 D



5.222E-2  
6.465E-2  
7.942E-2  
9.691E-2  
1.175E-1  
1.415E-1  
1.691E-1  
2.003E-1  
2.350E-1  
2.724E-1  
3.117E-1  
3.517E-1  
3.117E-1  
2.724E-1  
2.350E-1  
2.003E-1  
1.691E-1  
1.415E-1  
1.175E-1  
9.691E-2  
7.942E-2  
6.465E-2  
5.222E-2  
4.178E-2  
3.301E-2  
2.564E-2  
1.943E-2  
1.418E-2  
9.742E-3  
5.969E-3  
2.752E-3

DEPL. CABLE DE RIGIDITE DEPL. CABLE PORTEUR

-----

1.810E-2	1.141E-2
3.622E-2	2.281E-2

5.435E <sup>-2</sup>	3.418E <sup>-2</sup>
7.251E <sup>-2</sup>	4.549E <sup>-2</sup>
9.073E <sup>-2</sup>	5.673E <sup>-2</sup>
1.090E <sup>-1</sup>	6.786E <sup>-2</sup>
1.274E <sup>-1</sup>	7.884E <sup>-2</sup>
1.458E <sup>-1</sup>	8.965E <sup>-2</sup>
1.644E <sup>-1</sup>	1.002E <sup>-1</sup>
1.832E <sup>-1</sup>	1.105E <sup>-1</sup>
2.022E <sup>-1</sup>	1.204E <sup>-1</sup>
2.215E <sup>-1</sup>	1.299E <sup>-1</sup>
2.411E <sup>-1</sup>	1.389E <sup>-1</sup>
2.611E <sup>-1</sup>	1.472E <sup>-1</sup>
2.815E <sup>-1</sup>	1.547E <sup>-1</sup>
3.025E <sup>-1</sup>	1.613E <sup>-1</sup>
3.242E <sup>-1</sup>	1.668E <sup>-1</sup>
3.467E <sup>-1</sup>	1.710E <sup>-1</sup>
3.701E <sup>-1</sup>	1.737E <sup>-1</sup>
3.945E <sup>-1</sup>	1.747E <sup>-1</sup>
3.701E <sup>-1</sup>	1.737E <sup>-1</sup>
3.467E <sup>-1</sup>	1.710E <sup>-1</sup>
3.242E <sup>-1</sup>	1.668E <sup>-1</sup>
3.025E <sup>-1</sup>	1.613E <sup>-1</sup>
2.815E <sup>-1</sup>	1.547E <sup>-1</sup>
2.611E <sup>-1</sup>	1.472E <sup>-1</sup>
2.411E <sup>-1</sup>	1.389E <sup>-1</sup>
2.215E <sup>-1</sup>	1.299E <sup>-1</sup>
2.022E <sup>-1</sup>	1.204E <sup>-1</sup>
1.832E <sup>-1</sup>	1.105E <sup>-1</sup>
1.644E <sup>-1</sup>	1.002E <sup>-1</sup>
1.458E <sup>-1</sup>	8.965E <sup>-2</sup>
1.274E <sup>-1</sup>	7.884E <sup>-2</sup>
1.090E <sup>-1</sup>	6.786E <sup>-2</sup>
9.073E <sup>-2</sup>	5.673E <sup>-2</sup>
7.251E <sup>-2</sup>	4.549E <sup>-2</sup>
5.435E <sup>-2</sup>	3.418E <sup>-2</sup>
3.622E <sup>-2</sup>	2.281E <sup>-2</sup>
1.810E <sup>-2</sup>	1.141E <sup>-2</sup>

## ANNEXE C

Fichier d' entrée et de sortie sous charges réparties avec le code ANSYS

ANSYS

/COM,Analyse d'une passerelle suspendue

/PREP7

/TITLE, VM31, SINGLE CABLE

! 0: câble principal

!1: câble de rigidité

ANTYPE,STATIC

ET,1,LINK180 !

R,1,0.00196,,1 ! 1=> numéro de la constante

!AREA =>m^2, , 1=> tension only :activée

R,2,0.00126,,1 ! Section du câble de rigidité

R,3,0.000079,,1 ! Section des suspentes

NLGEOM,ON ! Active large displacement

SSTIF,ON ! STRESS STIFFENING

MP,EX,1,150E6 ! Module de Young KN/m^2

mp,prxy,1,0.3 ! Coefficient de Poisson

!mp,dens,1,48.8 ! Masse volumique

nm=41 ! number of nodes

ne=nm-1 ! (nm-1): number of elements

L=80 ! Longueur de la travée m

dd=L/ne ! Dimension de l'élément

f0=6.4 ! Flèche à mi-travée

f1=3.2 ! Flèche du câble rigidité

! Forme parabolique

\*do,i,1,nm

xx=(i-1)\*dd

X=XX+18.45

yy=((-4\*f0/L\*\*2)\*xx\*(L-xx))+17.3

```

N,i,X,yy
y=((4*f1/L**2)*xx*(L-xx))+4.7
N,i+nn,X,y
*enddo

! Câble supérieur
E,1,2      ! Créer un élément entre les nœuds 1 et 2
EGEN,ne,1,-1  ! Créer 'ne' éléments

! Câble de rigidité
real,2
E,nn+1,nn+2
egen,ne,1,-1

! Suspentes
real,3
E,2,43
egen,ne-1,1,-1

! Haubans
! nœuds
N,83,0.45,4.7
N,84,116.45,4.7
*do,j,1,5
N1=84+j
N2=95-j
x1=0.45+(j*3)
x2=116.45-(j*3)
y1=4.7+(j*2.1)
N,N1,x1,y1
N,N2,x2,y1
*enddo
      ! elements
real,1
E,83,85
E,85,86
E,86,87
E,87,88
E,88,89
E,89,1

```

E,41,90  
E,90,91  
E,91,92  
E,92,93  
E,93,94  
E,94,84

! Conditions initiales

INIS,SET,CSYS,-2 ! ARBITRARY SMALL INITIAL STRAIN  
INIS,SET,DTYP,EPEL

! Déformations initiales du Câble de rigidité

H1=600 ! KN  
 $w1=(8*f1*H1)/(L*L)$   
 $ccc1=((L*L)/(8*f1))**2$   
E=150e6  
A1=0.126e-2  
x=-1  
\*do,i,41,80  
x=x+2  
 $ccc2=((L/2)-x)**2$   
 $T1=w1*((ccc1+ccc2)**0.5)$   
 $epsi1=(T1/(E*A1))$

INIS,DEFINE,i,,,,epsi1 !déformation dans les éléments  
\*enddo

! Cable principal

H0=362.5 ! KN  
 $w0=(8*f0*H0)/(L*L)$   
 $ccc1=((L*L)/(8*f0))**2$   
E=150e6  
A0=0.196e-2  
x=-2  
\*do,i,1,40  
x=x+2  
 $ccc2=((L/2)-x)**2$   
 $T0=w0*((ccc1+ccc2)**0.5)$

epsi0=(T0/(E\*A0))

INIS,DEFINE,i,,,,epsi0 !déformation dans les éléments  
\*enddo

! Suspentes

As=0.000079

Ts=2\*w1

epsis=Ts/(E\*As)

\*do,i,81,119

INIS,DEFINE,i,,,,epsis !déformation dans les éléments  
\*enddo

! Haubans

D=12.6

Lh=18

CCCh=(D/Lh)\*\*2

epsih=(H0\*((1+ccch)\*\*0.5))/(E\*A0)

\*do,i,120,131

INIS,DEFINE,i,,,,epsih !déformation dans les éléments  
\*enddo

NSUBST,5

OUTPR,,3

OUTPR,NLOAD,3 ! PRINT NODAL FORCES

KBC,1 ! STEP CHANGE B.C.'S

! BOUNDARY CONDITIONS

D,42,ALL ! Les 3 DDL (ux, uy,uz) du nœud 1 sont nuls

D,82,ALL,,,84

D,1,ALL ! le déplacement Uz est nul pour tous les nœuds

D,41,ALL

! Application du poidspropre 0.5 KN/m

\*do,j,2,40

F,j,FY,-1

```
*enddo
```

```
! Charge répartie  $p=0.15$  KN/m  $\implies 0.15 \times (2\text{m}) = 0.3$ KN par nœud
```

```
*do,j,2,40
```

```
F,j,FZ,-0.3
```

```
*enddo
```

```
! Charge répartie  $p=0.3$  KN/m  $\implies 0.3 \times (2\text{m}) = 0.6$ KN par nœud
```

```
*do,j,43,81
```

```
F,j,FZ,-0.6
```

```
*enddo
```

```
!acel,,-10 ! Appliquer la pesanteur
```

```
FINISH
```

```
/SOLU
```

```
SOLVE
```

```
FINISH
```

```
PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE
```

```
***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****
```

```
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 4
```

```
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0
```

```
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL  
COORDINATE SYSTEM
```

```
NODE  UZ  
1  0.0000  
2 -0.33755E-01  
3 -0.65864E-01  
4 -0.96330E-01  
5 -0.12515  
6 -0.15230  
7 -0.17779  
8 -0.20161  
9 -0.22373  
10 -0.24415
```

11 -0.26286  
12 -0.27985  
13 -0.29510  
14 -0.30860  
15 -0.32034  
16 -0.33029  
17 -0.33846  
18 -0.34483  
19 -0.34939  
20 -0.35212  
21 -0.35304  
22 -0.35212  
23 -0.34939  
24 -0.34483  
25 -0.33846  
26 -0.33030  
27 -0.32034  
28 -0.30860  
29 -0.29510  
30 -0.27985  
31 -0.26287  
32 -0.24415  
33 -0.22373  
34 -0.20161  
35 -0.17780  
36 -0.15231  
37 -0.12515

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 4  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL  
COORDINATE SYSTEM

NODE UZ  
38 -0.96331E-01  
39 -0.65864E-01  
40 -0.33755E-01  
41 0.0000

42 0.0000  
43 -0.37022E-01  
44 -0.72084E-01  
45 -0.10519  
46 -0.13636  
47 -0.16558  
48 -0.19287  
49 -0.21822  
50 -0.24166  
51 -0.26318  
52 -0.28278  
53 -0.30049  
54 -0.31630  
55 -0.33023  
56 -0.34227  
57 -0.35245  
58 -0.36077  
59 -0.36722  
60 -0.37183  
61 -0.37460  
62 -0.37552  
63 -0.37460  
64 -0.37183  
65 -0.36722  
66 -0.36077  
67 -0.35245  
68 -0.34227  
69 -0.33023  
70 -0.31630  
71 -0.30049  
72 -0.28278  
73 -0.26318  
74 -0.24166

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 4  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL  
COORDINATE SYSTEM

NODE	UZ
75	-0.21822
76	-0.19287
77	-0.16558
78	-0.13636
79	-0.10519
80	-0.72084E-01
81	-0.37022E-01
82	0.0000
83	0.0000
84	0.0000
85	0.0000
86	0.0000
87	0.0000
88	0.0000
89	0.0000
90	0.0000
91	0.0000
92	0.0000
93	0.0000
94	0.0000

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	62
VALUE	-0.37552

ANNEXE D

Fichier d' entrée et de sortie sous la charge concentrée centrale avec le code ANSYS

PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 4  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UZ
1	0.0000
2	-0.11297E-01
3	-0.22576E-01
4	-0.33823E-01
5	-0.45017E-01
6	-0.56133E-01
7	-0.67144E-01
8	-0.78016E-01
9	-0.88709E-01
10	-0.99174E-01
11	-0.10936
12	-0.11919
13	-0.12859
14	-0.13746
15	-0.14569
16	-0.15316
17	-0.15971
18	-0.16518
19	-0.16937
20	-0.17209
21	-0.17312
22	-0.17209
23	-0.16937
24	-0.16518
25	-0.15971
26	-0.15316

27 -0.14569  
28 -0.13746  
29 -0.12859  
30 -0.11919  
31 -0.10936  
32 -0.99174E-01  
33 -0.88709E-01  
34 -0.78016E-01  
35 -0.67145E-01  
36 -0.56133E-01  
37 -0.45017E-01

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 4  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UZ
38	-0.33823E-01
39	-0.22576E-01
40	-0.11297E-01
41	0.0000
42	0.0000
43	-0.17874E-01
44	-0.35753E-01
45	-0.53651E-01
46	-0.71582E-01
47	-0.89559E-01
48	-0.10760
49	-0.12572
50	-0.14396
51	-0.16233
52	-0.18087
53	-0.19962
54	-0.21863
55	-0.23796
56	-0.25767
57	-0.27784
58	-0.29857

59 -0.31995  
60 -0.34210  
61 -0.36514  
62 -0.38919  
63 -0.36514  
64 -0.34210  
65 -0.31995  
66 -0.29857  
67 -0.27784  
68 -0.25767  
69 -0.23796  
70 -0.21863  
71 -0.19962  
72 -0.18087  
73 -0.16233  
74 -0.14396

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 4  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UZ
75	-0.12572
76	-0.10760
77	-0.89559E-01
78	-0.71582E-01
79	-0.53651E-01
80	-0.35753E-01
81	-0.17874E-01
82	0.0000
83	0.0000
84	0.0000
85	0.0000
86	0.0000
87	0.0000
88	0.0000
89	0.0000
90	0.0000

91	0.0000
92	0.0000
93	0.0000
94	0.0000

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES  
NODE 62  
VALUE -0.38919