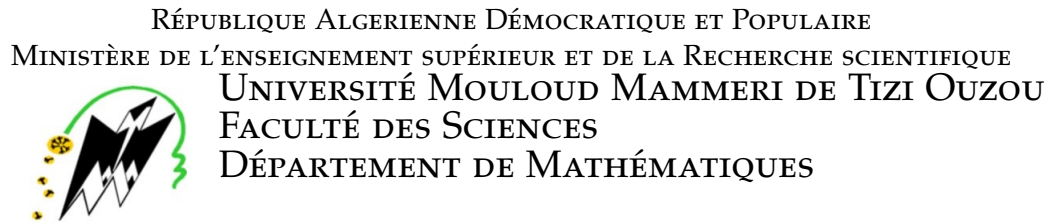




N° d'ordre: .....



# MÉMOIRE DE MASTER

Filière : Mathématiques  
Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par

AMROUCHE TINHINANE

## THÈME : LA MÉTHODE ADAPTÉE ET LE PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL À SYSTÈME DYNAMIQUE HYBRIDE

Soutenu le Septembre 2024 devant le jury :

Mme. REZKI FARIZA	UMMTO	Présidente du jury
Mme. HARRAHE FAZIA	UMMTO	Examinatrice
Mme. ZIDELMAL NACERA	UMMTO	Encadreur

Année Universitaire : 2023/2024

*À mes parents, pour leur amour inconditionnel, leur tendresse, et leur soutien indéfectible tout au long de mes études. Ce travail est le reflet de vos rêves pour moi et le fruit de votre engagement sans faille. Merci d'être toujours présents à mes côtés et de croire en moi à chaque étape de ce parcours.*

# REMERCIEMENTS

**I**L m'est agréable d'adresser mes premiers remerciements à Dieu le tout puissant pour la persévérance, la santé, l'ouverture d'esprit et l'inspiration dont il m'a gratifié.

Mes remerciements vont également à madame zidelmal Nacera qui m'a proposé le sujet de mémoire et m'a encadré avec beaucoup de patience.

Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements à madame Rezki Fariza et madame Harrache Fazia pour m'avoir honoré en acceptant de faire partie du jury.

Je dédie ce travail à ma famille particulièrement mes chers parents, pour le soutien qui m'ont apporté durant toute cette période.

Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements aux enseignants qui m'ont encadré tout au long de mon cursus, particulièrement ceux du Département de Mathématiques de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Un très grand merci pour mes camarades étudiants et amis du Master pour la collaboration et la discussion tout au long de ce travail.

# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iv
LISTE DES FIGURES	vi
NOTATIONS	1
INTRODUCTION	1
<b>1 RAPPELS MATHÉMATIQUES ET GÉNÉRALITÉS SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL</b>	<b>3</b>
1.1 INTRODUCTION . . . . .	3
1.2 RAPPELS SUR LES MATRICES . . . . .	3
1.3 RAPPELS SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL . . . . .	4
1.3.1 Les différents types de systèmes de contrôle . . . . .	4
1.3.2 Contrôlabilité . . . . .	5
1.3.3 Le problème de contrôle optimal . . . . .	7
1.3.4 Principe du maximum de Pontryagin . . . . .	9
1.3.5 Conclusion . . . . .	11
<b>2 RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE ET D'UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE</b>	<b>12</b>
2.1 RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE . . . . .	12
2.1.1 Introduction . . . . .	12
2.1.2 Position du problème . . . . .	13
2.2 RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE : . . . . .	19
2.2.1 Position du problème : . . . . .	19
2.3 CONCEPTS DE BASE . . . . .	19
2.3.1 Principe de discrétisation . . . . .	20
2.3.2 Méthode adaptée pour PPL . . . . .	20
2.3.3 Procédure finale . . . . .	20
2.3.4 Conclusion . . . . .	29
<b>3 DÉFINITIONS ESSENTIELLES SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES</b>	<b>30</b>
3.1 INTRODUCTION . . . . .	30
3.2 SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES . . . . .	30
3.2.1 Systèmes statiques et systèmes dynamiques . . . . .	30
3.2.2 Définition d'un système dynamique hybride . . . . .	31
3.2.3 Classification des Systèmes dynamiques hybrides . . . . .	34
3.2.4 Modélisation des systèmes dynamiques hybrides . . . . .	36

3.2.5	Formulation du problème de commande . . . . .	40
3.2.6	conclusion . . . . .	41
4	<b>SYSTÈME DYNAMIQUE HYBRIDE À COMMUTATION AUTONOME</b>	<b>42</b>
4.1	INTRODUCTION . . . . .	42
4.2	LE SYSTÈME ÉTUDIÉ . . . . .	42
4.3	MODÉLISATION DU SYSTÈME ÉTUDIÉ SOUS FORME D UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL [12] . . . . .	43
4.3.1	Position du problème lorsque le chauffage est en état de marche	43
4.3.2	Conclusion . . . . .	46
	<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	<b>47</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>49</b>

# LISTE DES FIGURES

1.1	Le problème de contrôlabilité. . . . .	5
1.2	Schématisme d'un problème de contrôle optimal . . . . .	8
3.1	Modèle du thermostat et trajectoire de la température. . . . .	34
3.2	(a) Trajectoire d'une boule de billard et (b) Automate associé. . .	35
3.3	Réservoir avec une vanne d'alimentation et vanne d'évacuation .	36
3.4	– Places et transitions d'un RDP hybride . . . . .	37
3.5	Modèle de RdP hybride d'un système de fabrication par lots. . .	38
3.6	Modèle à interface d'Antasklis. . . . .	39
3.7	Schéma détaillé d'un modèle de système hybride à interface gé- néralisé. . . . .	39
3.8	Automate hybride . . . . .	40
4.1	Schéma fonctionnel d'un thermostat d'ambiance à action tout- ou-rien équipé d'une résistance anticipatrice R . . . . .	43

# NOTATIONS

- $H$  : Hamiltonien.
- $J$  : Critère de minimisation.
- $C_p$  : Complément de  $p$ .
- $U_d$  : Ensemble des commandes discrètes .
- $U_c$  : Ensemble des commandes continues.
- $Q$  : Espace d'état discret.
- $\text{rang}(A)$  : Rang de la matrice  $A$ .
- $x_0$  : L'état initial.
- $x_1$  : L'état final.
- $t_0$  : Temps initial.
- $T$  : Temps final.
- $\Delta(t)$  : Le vecteur des estimations ou la co-commande.
- $y$  : Le vecteur des potentiels.
- $\phi$  : La fonction dual.
- $\beta$  : La valeur de suboptimalité.
- $\theta$  : Le pas de changement de commande.
- $\delta$  : Le pas de changement de support.
- $\tau$  : Instant ou ensemble des instants de commutation.
- $u$  : La commande constante par morceaux.
- $w(t)$  : La pseudo-commande.
- $l(t)$  : La direction de changement de commande.
- $u^t$  : La transposée du vecteur.
- $\theta_0$  : La température initiale.
- $\theta_m$  : Seuil inférieur.
- $\theta_M$  : Seuil supérieur.
- SDH : Systèmes Dynamiques Hybrides.
- SED : Systèmes à Évènement Discret.
- RdP : Réseau de Petri.

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'optimisation est une branche des mathématiques et de l'informatique en tant que disciplines. Elle intervient pratiquement dans tous les processus de modélisation actuels et elle joue un rôle très important dans beaucoup de domaines : Qu'il s'agisse de problèmes de la recherche opérationnelle, de mathématiques appliquées, d'analyse, d'analyse numérique, de statistiques, de théorie des jeux, de programmation linéaire, ou encore en théorie du contrôle.

Cette théorie a connu un véritable essor depuis les années cinquante avec la découverte d'outils puissants tels que le principe du maximum de L.S Pontryagin en 1956 , qui généralise les équations d'Euler Lagrange du calcul des variations, et le principe de programmation dynamique de R.Bellman . L'objectif est de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation[16].

Une autre approche pour la résolution des problèmes de contrôle optimal, a été proposée par R. Gabasov et F.M. Kirillova dans les années 80, appelée méthode adaptée de la programmation linéaire. Cette méthode est une généralisation de la méthode de simplexe, à l'opposé de celle-ci, la méthode adaptée atteint l'optimum du problème en passant par l'intérieur de l'ensemble des solutions réalisables. Elle a été utilisée avec succès pour résoudre des problèmes de programmation linéaire , ensuite à la résolution des problèmes de contrôle optimale des systèmes continus. De nos jours, les systèmes automatisés font complètement partis de notre quotidien (nous en sommes souvent inconscients), ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches[6,13].

L'automatique s'est intéressée dès ces origines à l'étude et à la commande des systèmes physiques généralement représentés par un modèle dynamique continu modélisé par un ensemble d'équations différentielles, ou par un modèle à événements discrets, défini par une séquence d'évènements qui provoque la transition entre un nombre fini d'états. Chacun de ces domaines a créé un ensemble de théories et de méthodes et développer des solutions performantes pour régler les problèmes qui se posent . Les progrès de la technologie tels que, les ordinateurs plus rapides et les capteurs plus fiables ont conduit l'homme à construire des systèmes plus complexe. Cependant, l'application de méthodes rigoureuses pour traiter les aspects continus d'une part, et les aspects événementiels d'autre part, ne saurait garantir la qualité du système global tant que les interactions entre ces deux aspects ne sont pas prise en compte. Donc, la combinaison des deux aspects continu et discret dans un même modèle est indispensable, d'ou la notion de modèle hybride. De manière générale, les systèmes dynamiques faisant intervenir explicitement et simultanément des phénomènes ou des modèles de type dynamique continue

et événementielle sont appelés systèmes dynamiques hybrides (SDH)[5,9].

Dans notre travail nous sommes intéressés à l'application de la théorie du contrôle optimal avec la méthode adaptée à des systèmes dynamiques hybrides à commutation autonome. Notre problème de commande consiste à l'optimisation du fonctionnement d'une régulation thermique où un thermostat à résistance anticipatrice est choisi comme régulateur. Notre but est de maintenir la température la plus proche possible d'une valeur désirée tout en ayant les plus faibles variations possibles de la température autour de cette valeur désirée afin de minimiser l'énergie.

# RAPPELS MATHÉMATIQUES ET GÉNÉRALITÉS SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL



## 1.1 INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de rappeler les principaux outils mathématiques utilisés dans ce travail. Dans la première section, nous allons présenter quelques notions élémentaires d'algèbre linéaire utilisées fréquemment dans ce mémoire. La deuxième section a pour objet de présenter les principaux résultats qui traitent différents problèmes de contrôle optimal. Le contenu de ce chapitre est une synthèse des résultats présentés dans les références pionnières[16,10].

## 1.2 RAPPELS SUR LES MATRICES

### Définition 1.1 "Le rang d'une matrice"

Le rang d'une matrice  $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$  est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants. Il est noté  $\text{rang}(A)$ .

### Définition 1.2 "Matrice diagonale"

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée. La matrice  $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$  est diagonale si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls.

### Définition 1.3 "Matrice identité"

Une matrice d'ordre  $n$  ne comportant que des 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs, est notée  $I_n$  et est appelée matrice identité.

### Définition 1.4 "Matrice inversible"

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . On dit que la matrice  $A$  est inversible s'il existe une matrice carrée  $B$  d'ordre  $n$  telle que :

$$A.B = I_n.$$

Dans ce cas, la matrice  $B$  est unique. Elle est appelée l'inverse de la matrice  $A$  et on écrit :

$$B = A^{-1}.$$

**Définition 1.5 "Matrice transposée"** On appelle transposée d'une matrice  $A$  de type  $(n, p)$  et de terme général  $a_{i,j}$ , la matrice notée  $A^t$  obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de même indice  $i$  de  $A$  :

$$\forall i \in 1, \dots, p, \forall j \in 1, \dots, n, (A^t)_{i,j} = a_{j,i}$$

**Définition 1.6** "Matrice symétrique"

Une matrice  $A$  est dite symétrique si  $A^T = A$ .

**Définition 1.7** "Exponentielle d'une matrice"

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée, d'ordre  $n$ . L'exponentielle de la matrice  $A$ , notée  $\exp(A)$ , est définie par le développement en série entière :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

**Définition 1.8** "Matrice définie positive"

Pour qu'une matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq j \leq n}$  réelle symétrique soit définie positive (semi définie positive), il faut et il suffit que les  $n$  matrices  $A_p = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$  pour  $p = 1, \dots, n$  aient leur déterminant strictement positif (positif ou nul) respectivement.

### 1.3 RAPPELS SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL

**Définition 1.9** "Système dynamique"

-Un système est un ensemble d'objets qui réalisent une opération spécifique.  
 -Un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système, cette loi peut être représentée par des équations.

**Définition 1.10** "Système de contrôle (commande)"

Un système de contrôle est un système dynamique dont on peut modifier le comportement au cours du temps. On agit sur un tel système au moyen d'un contrôle (ou commande). Le système de contrôle peut être un système mécanique (moteur, satellite), un processus chimique (réacteur, colonne de distillation), un circuit électrique ou électronique, un phénomène physique, etc.

D'un tel système résulte une relation entrée/sortie où l'entrée  $u(t)$  représente la commande, c'est-à-dire le moyen d'action sur le système, et la sortie  $y(t)$  représente ce que l'on observe du système, généralement sous la forme mesure. Il est représenté dans la figure ( 1.1).

#### 1.3.1 Les différents types de systèmes de contrôle

Il existe plusieurs types de systèmes de contrôle, parmi lesquels nous pouvons :

- \* Système à temps continu :  $\dot{x} = f(t, x, u)$ .
- \* Système à temps discret :  $x_{k+1} = f(t_k, x_k, u_k)$ .
- \* Système non autonome :  $\dot{x} = f(t, x, u)$ .
- \* Système autonome :  $\dot{x} = f(x, u)$ .

**Définition 1.11** "Système de contrôle linéaire, non linéaire"

Un système de contrôle est linéaire s'il est régi par un système d'équations différentielles linéaires. Sinon, il est dit non linéaire.

**Définition 1.12** "Système linéaire stationnaire, non stationnaire"

Un système de contrôle linéaire est dit stationnaire s'il a des coefficients constants (indépendant du temps). Si le système de contrôle a des coefficients variables dans le

temps alors il est dit non stationnaire.

### 1.3.2 Contrôlabilité

Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener en temps fini d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit. Pour les systèmes de contrôle linéaires de dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité due à Kalman. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile car on ne peut pas étudier la contrôlabilité globale du système par contre il faut souvent étudier la contrôlabilité local du système.

- **Le problème de contrôlabilité**

Soit  $T > 0$  un horizon de temps,  $n$  et  $m$  deux nombres entiers naturels non nuls. On considère le système différentiel de contrôle (1.1) suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

avec :

- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^1$ .
- $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est un contrôle du système (1.1).
- $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est l'état du système (1.1).
- Ce système est contrôlable s'il existe un contrôle  $u$  tel que : étant donné un point  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , la trajectoire associée à ce contrôle joigne  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  à  $x_1$  en un temps fini  $t$ . C'est le problème de contrôlabilité. (Voir Figure 1.1)

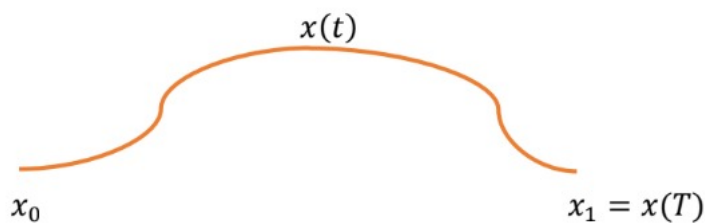


FIGURE 1.1 – Le problème de contrôlabilité.

Pour donner une forme générale de  $f$  dans ce cas, on définit deux fonctions à valeurs matricielle :

$$A : [0, T] \rightarrow M_n(\mathbb{R}); A(t) = (A_{i,j}(t))_{\{i,j=1,\dots,n\}}$$

et

$$B : [0, T] \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{R}); B(t) = (B_{i,j}(t))_{\{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m\}}.$$

Alors,  $f$  sera sous la forme  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

avec

$$f(t, x, u)A(t)x + B(t)u, \quad \forall (t, x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Donc le système de contrôle précédent peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

On supposera que  $A$  et  $B$  sont des fonctions continues, ce qui veut dire que chacune des composantes de  $A$  et  $B$  sont des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$ . D'après les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles, pour tout contrôle  $u$  le système (1.2) admet une solution unique  $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , telle que :

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s)ds,$$

où :  $M(t) \in M_n(\mathbb{R})$  est la résolvante du système linéaire homogène :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

- **Contrôlabilité des systèmes linéaires**

La contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes et non autonomes est donnée par la condition de Kalman.

**Définition 1.13** " Ensemble accessible" [16]

*l'ensemble des points accessibles à partir de  $x_0$  en un temps  $T > 0$  est défini par :*

$$Acc(x_0, T) = \{x_u(T) / u \in U\}, \quad (1.3)$$

*où  $x_u(\cdot)$  est la solution du système (1.2) associée au contrôle  $u$ . Autrement dit :  $Acc(x_0, T)$  est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.8) au temps  $T$ , lorsqu'on fait varier le contrôle  $u$ .*

- **Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes**

**Définition 1.14** *Le système linéaire (1.1) est dit autonome si les matrices  $A$  et  $B$  ne dépend pas de  $t$  (un système invariant dans le temps). Dans ce cas  $M(t) = e^{At}$  et la solution du problème de contrôle devient*

$$\forall x \in I, x(t) = e^{At}x_0 + B \int_{t_0}^T e^{As}u(s) ds.$$

**Théorème 1.1** *Le système contrôlé [10]*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

*est contrôlable en temps  $t$  (quelconque) si, et seulement si, la matrice de contrôlabilité de Kalman :*

$$K = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$

*est de rang  $n$ .*

**Remarque 1.1** *La matrice  $K$  est appelée la matrice de Kalman, la condition  $\text{Rang } K = n$  est appelée condition de Kalman.*

• **Contrôlabilité des systèmes linéaires non autonomes**

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas d'un système de contrôle non autonome (non stationnaire), c'est-à-dire dans le cas où les matrices  $A$  et  $B$  dépendent du temps.

**Théorème 1.2** [16]

Le système linéaire non autonome de  $\mathbb{R}^n$ , défini par

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

est contrôlable en temps  $T$  ssi la matrice définie par

$$C = \int_0^T M(t)^{-1}B(t)B^t(t)M(t)^{t-1}dt \quad (1.5)$$

est inversible.  $C$  est appelée matrice de contrôlabilité,  $M^t(t)$  est la transposée de la résolvante  $M(t)$  solution du système suivant[16] :

$$\begin{cases} \dot{M} = A(t)M(t) \\ M(0) = Id. \end{cases}$$

**Théorème 1.3** [16]

La résolution du système (1.4) en temps  $t$  est donnée par :

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M^{-1}(s)B(s)u(s) ds, \quad (1.7)$$

où  $t \in I = [0, T]$  et  $x(0) = x_0$ .

**Remarque 1.2** Cette condition ne dépend pas de  $x_0$  mais de  $T$ , c'est à dire, que si un système linéaire est contrôlable en temps  $T$  depuis  $x_0$ , alors il est contrôlable en temps  $T$  depuis tout points.

**1.3.3 Le problème de contrôle optimal**

On considère le système dynamique contrôlé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Avec : •  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^1$ .

- $x(t)$  : est le vecteur d'état du système de contrôle (1.8). En général,  $x(t)$  appartient à une variété différentielle  $M$  de dimension  $n$ , on supposera ici que  $M$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^n$ .
- $u(t)$  : est une commande (contrôle) du système de contrôle (1.8).

Le système (1.8) est contrôlable, s'il existe un contrôle  $u$  tel que : étant donné un point  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , la trajectoire associée à ce contrôle joigne  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  à  $x_1$  en un temps fini  $t$ . Si de plus minimise une certaine fonctionnelle  $u \rightarrow J(u)$ , alors le problème de contrôle est optimal.

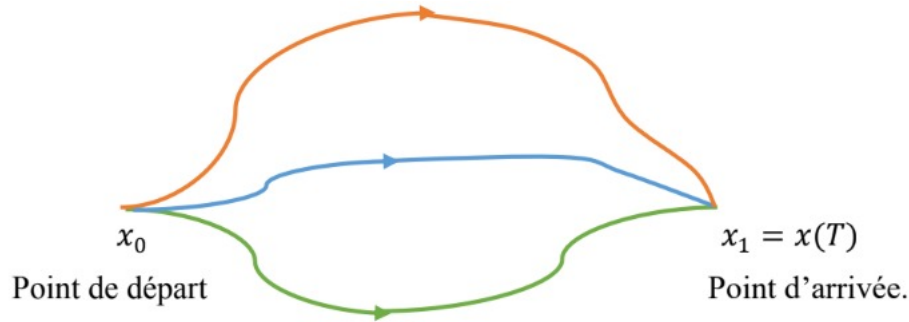


FIGURE 1.2 – Schématisation d'un problème de contrôle optimal

### Définition de problème de contrôle (commande) optimal

On considère le problème du contrôle optimal linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u(T), x(T)) = g(x(T), T) + \int_0^T f_0(t, x(t), u(t)) dt, \rightarrow \min(\max) \\ \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0 \in M_0, \\ x(T) = x_f \in M_1, \\ u(t) \in U, t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

où :

- $J(u, x)$  : est le critère à optimiser (fonctionnelle, coût, critère de qualité).
- $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^1$  ( définit les équations dynamiques).
- $g : W \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$ .
- $V$  : est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .
- $W$  : est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .
- $M_0$  et  $M_1$  sont deux variétés de  $\mathbb{R}^n$ .

Il existe trois problèmes importants de contrôle optimal :

#### 1. Problème de Lagrange

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$J(u(T), x(T)) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t)) dt, \quad (1.10)$$

c'est à dire  $g(x(T), T) = 0$ .

#### 2. Problème de Mayer

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$J(u(T), x(T)) = g(x(T), T), \quad (1.11)$$

c'est à dire

$$f_0(u(t), x(t), t) = 0. \quad (1.12)$$

#### 3. Problème de Bolza (Mayer Lagrange) :

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$J(u(T), x(T)) = g(x(T), T) + \int_0^T f_0(u(t), x(t), t) dt, \quad (1.13)$$

avec  $J(u, x)$  est le coût terminal. Notons que la formulation de Bolza est la plus générale pour la représentation d'un problème de contrôle optimal.

-

### 1.3.4 Principe du maximum de Pontryagin

Dans cette section, nous allons présenter la version forte du principe du maximum de Pontryagin (PMP), qui est très générale, puisqu'elle est valide pour des systèmes différentiels généraux et qu'elle prend en compte des contraintes sur le contrôle. Il s'agit d'un ensemble de conditions nécessaires pour l'optimalité d'une solution d'un problème de contrôle optimal.

**Théorème 1.4** [16]

On considère le système de contrôle dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad (1.14)$$

où  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^1$  et les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle  $[0, t_e(u)[$  de  $\mathbb{R}^+$  et à valeurs dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ . Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ .

On note par  $U$  l'ensemble des contrôles admissibles  $u$  dont les trajectoires associées relient un point initial de  $M_0$  à un point final de  $M_1$  en temps  $t(u) < t_e(u)$ .

Par ailleurs, le coût d'un contrôle  $u$  sur  $[0, t]$  est défini par :

$$C(t, u) = \int_0^t f_0(s, x(s), u(s)) ds + g(t, x(t)),$$

où  $f_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont de classes  $C_1$ .

$x(\cdot)$  est la trajectoire associée au contrôle  $u$ .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : Déterminer une trajectoire reliant  $M_0$  à  $M_1$  et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non. Si le contrôle  $u \in U$  associé à la trajectoire  $x(\cdot)$  est optimal sur  $[0, T]$ , alors il existe une application  $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel  $p_0 \leq 0$ , tels que le couple  $(p(\cdot), p_0)$  est non trivial, et tels que pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)), \end{aligned}$$

où

$$H(t, x, p, p_0, u) = \langle p, f(t, x, u) + p_0 f_0(t, x, u) \rangle$$

est le Hamiltonien associé au système. De plus, on a la condition de maximisation presque partout sur  $[0, T]$  :

$$H(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = \max_{\{v \in \Omega\}} H(t, x(t), p(t), p_0, v).$$

- Si le temps final pour joindre la cible  $M_1$  n'est pas fixé, on a la condition au temps final  $T$

$$\max_{\{v \in \Omega\}} H(T, x(T), p(T), p_0, v) = -p_0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)).$$

- Si de plus  $M_0$  et  $M_1$  (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de  $\mathbb{R}^n$  ayant des espaces tangents en  $x(0) \in M_0$  et  $x(T) \in M_1$ , alors le vecteur adjoint peut

être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux).

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0,$$

$$p(T) - p_0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)}M_1.$$

**Remarque 1.3** La convention  $p_0 \leq 0$  conduit au principe du maximum. La convention  $p_0 \geq 0$  conduirait au principe du minimum.

**Exemple 1.1** *Contrôle optimal d'une épidémie [16]*

Une population touchée par une épidémie que l'on cherche à enrayer par une vaccination.

$x_1(t)$  : Le nombre d'individus infectieux qui peuvent contaminer les autres.

$x_2(t)$  : Le nombre d'individus non infectieux mais contaminable.

$x_3(t)$  : Le nombre d'individus infectés et disparus ou isolés du reste de la population.

Soit  $r > 0$  le taux d'infestation,  $\gamma > 0$  le taux de disparition et  $0 \leq u(t) \leq a$  le taux de vaccination (le contrôle),  $a, \gamma, r$  sont des constantes positives.

• **La modélisation :**

$$\dot{x}_1(t) = rx_2(t)x_1(t) - \gamma x_1(t) - u(t).$$

$$\dot{x}_2(t) = -rx_2(t)x_1(t) + u(t).$$

$$\dot{x}_3(t) = \gamma x_1(t).$$

On cherche à déterminer une loi optimale de vaccination de manière à minimiser en un temps  $T$  fixe le coût suivant :

$$C(u) = \alpha x_2(t) + \int_0^T u(t)^2 dt,$$

où  $\alpha > 0$  et  $2a < \alpha$ .

• **Le Hamiltonien :**

$$H = p_1(rx_2(t)x_1(t) - \gamma x_1(t) - u(t)) + p_2(-rx_2(t)x_1(t) + u(t)) + p_3(\gamma x_1(t)) + p_0 u^2(t),$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -p_2 r x_2(t) + p_1(t)(-\gamma + r x_2(t)) + p_3 \gamma,$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 r x_1 + p_2 r x_1,$$

$$\dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0.$$

On a  $M_1 = \mathbb{R}^n$  (le point final est libre). Les conditions de transversalité sont données par :

$$p_1(T) = 0 \quad p_2(T) = p_0 \alpha \quad p_3(T) = 0,$$

avec :

$$|p_0| = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad p_2(T) = p_0 \alpha.$$

On choisit :

$$p_0 = -\frac{1}{2}$$

$$\max H = p_2 u(t) - p_1 u(t) = u(t)(p_2 - p_1),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= -p_1 + p_2 + 2p_0 u(t), \\ \frac{\partial^2 H}{\partial^2 u} &= 2p_0 = -1 < 0 \text{ (concave)}. \\ u(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } p_2 - p_1 < 0, \\ p_2 - p_1 - 1 & \text{si } 0 \leq p_2 - p_1 \leq 0, \\ a & \text{si } p_2 - p_1 > a. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.15)$$

### 1.3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé des rappels sur l'algèbre linéaire et les systèmes dynamiques, ainsi que des concepts généraux relatifs au contrôle optimal. Nous avons présenté le principe du maximum de pontryagin utilisé pour la résolution du problème de contrôle optimal. Le prochain chapitre sera consacré à l'exploration d'une méthode directe particulière à savoir la méthode adaptée.

# RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE ET D'UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE

# 2

## 2.1 RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE

### 2.1.1 Introduction

En mathématique, les problèmes de programmation linéaire sont des problèmes d'optimisation où la fonction objectif et les contraintes sont toutes linéaires. En 1947, G. B. Dantzig a proposé la méthode de simplexe pour résoudre les problèmes de programmation linéaire, en construisant tout d'abord une solution réalisable qui est un sommet d'un polytope puis on se déplace selon les arêtes de ce polytope pour atteindre des sommets pour lesquels la valeur de l'objectif est de plus en plus grande (cas de problème de maximisation) jusqu'à atteindre le maximum.

Au début des années 80, Karmarkar a mis au point une nouvelle méthode appelée méthode du point intérieur de complexité polynomiale. Il a montré que celle-ci a des performances supérieures à celles de l'algorithme du simplexe. Depuis, il y a eu beaucoup de travaux de recherche portant sur les méthodes de point intérieur dont la méthode adaptée introduite par R.Gabasov et F.M.Kirillova. Au début de son invention, elle a été appliquée à différents types de problèmes de mathématiques, par la suite à des problèmes de contrôle optimal (voir [3],[6],[14]).

L'objectif de ce chapitre, est de résoudre un problème de contrôle optimale par la méthode adaptée. Après avoir formulé le problème et donner quelques notions de support contrôle, critères d'optimalité et de suboptimalité sur lesquels est construit l'algorithme de résolution.



**Définition 2.4** La paire  $\{x, J_B\}$  formée d'un plan  $x$  et du support  $J_B$  est dite support plan du problème (2.2).

**Définition 2.5** Un plan d'appui  $\{x, J_B\}$  est dit non-dégénéré si

$$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \quad j \in J_B.$$

### Accroissement de la fonctionnelle

Soit  $\{x, J_B\}$  un support plan non dégénéré de départ et  $\bar{x} = x + \Delta x$  un autre plan quelconque qui satisfait la contrainte  $A\bar{x} = b$ . Calculons la formule d'accroissement de la fonctionnelle  $F(x)$  : On a

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= F(\bar{x}) - F(x) = c'\bar{x} - c'x = c'\Delta x = c'(J)\Delta x(J) = c(J_B \cup J_H)\Delta x(J_B \cup J_H) \\ &= c'(J_B)\Delta x(J_B) + c'(J_H)\Delta x(J_H). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Il est évident que :

$$A\Delta x = A(\bar{x} - x) = A\bar{x} - Ax = b - b = 0$$

où

$$P\Delta x_B + A_N\Delta x_N = b$$

et

$$\Delta x_B = -QA_N\Delta x_N$$

avec

$$Q = Q(J_B, J) = P^{-1}.$$

En remplaçant  $\Delta x_B$  dans l'accroissement (2.3), on obtient :

$$\Delta F(x) = c'(J_B)(-QA_N\Delta x_N) + c'(J_H)\Delta x_N = -(c'(J_B)QA_N - c'(J_H))\Delta x_N.$$

Nous considérons les vecteurs suivants :

Le vecteur des potentiels :

$$y' = y'(I) = c'_B A_B^{-1}.$$

Le vecteur des estimations :

$$E = E(J) = y' A(I, J) - c'(J).$$

**Remarque 2.1** Par construction  $E_B = 0$

$$\Delta F(x) = -E'(J_H)\Delta x_H = - \sum_{j \in J_H} E_j \Delta x_j.$$

Le maximum de  $\Delta F(x)$  sous les contraintes :

$$d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j, \quad j \in J_H$$

est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta x_j = d_{1j} - x_j & \text{si } E_j > 0, \\ \Delta x_j = d_{2j} - x_j & \text{si } E_j < 0, \\ \Delta x_j = 0 & \text{si } E_j = 0 \\ j \in J_H, \end{cases}$$

et est égal à :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_H^+} E_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j (x_j - d_{2j}).$$

**Remarque 2.2**  $\beta(x, J_B)$  est appelé vecteur de suboptimalité du support plan  $(x, J_B)$ , où

$$J_H^+ = \{j \in J_H / E_j > 0\},$$

$$J_H^- = \{j \in J_H / E_j < 0\}.$$

**Théorème 2.1** *Critère  $\varepsilon$ -optimal*

1. Si  $\beta(x, J_B) = 0$ , alors arrêter le processus avec  $x$  solution optimale.
2. Si  $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$ , alors arrêter le processus avec  $x$  solution  $\varepsilon$ -optimale.
3. Si  $\beta(x, J_B) > 0$ , alors on passe à l'itération de l'algorithme.

**Algorithme :**

La méthode adaptée est constituée de deux procédures :

— Changement de plan  $x \rightarrow x = \bar{x} + \theta l$ .

— Changement du support  $J_B \rightarrow \bar{J}_B$ .

1. **Changement de Plan** Soit  $\bar{x}$  un nouveau plan qui sera construit de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \theta l.$$

$l$  : La direction du changement.

$\theta$  : Le pas maximal le long de la direction  $l$ , tel que :

$$f(\bar{x}) \geq f(x),$$

$\theta$  dans  $\mathbb{R}^+$ .

**Remarque 2.3** Sur  $J_H$ , on pose  $\theta = 1$ .

Le vecteur de direction  $l = (l(J_B); l(J_H))$  est construit de la manière suivante :

$$l_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j & \text{si } E_j > 0, \\ d_{2j} - x_j & \text{si } E_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_j = 0, \end{cases} \quad j \in J_H,$$

avec

$$l(J_B) = -A_B^{-1} \cdot A_H l(J_H).$$

Pour que  $\bar{x}$  vérifie la contrainte  $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$ , il faut calculer

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{1j} - x_j}{l_j} & \text{si } l_j < 0, \\ \frac{d_{2j} - x_j}{l_j} & \text{si } l_j > 0, \\ \infty & \text{si } l_j = 0, \end{cases} \quad j \in J_B.$$

**Remarque 2.4** On a

$$\theta_{j_0} = \min(\theta_j) \quad \text{pour } j \in J_B.$$

Le pas maximal sera donné par :  $\theta_0 = \min(1, \theta_{j_0})$ .

Le nouveau plan sera :  $\bar{x} = x + \theta_0 l$  et la valeur de sub-optimalité pour le nouveau plan  $(\bar{x}, J_B)$  sera :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta_0) \beta(x, J_B).$$

De cette dernière expression on conclut :

- Si  $\beta(\bar{x}, J_B) = 0$ , alors  $\bar{x}$  est optimal.
- Si  $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$ , alors  $\bar{x}$  est  $\varepsilon$ -optimal.
- Si  $\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon$ , alors on passe au changement du support  $J_B \rightarrow \bar{J}_B$ .

2. **Changement du support** : Le changement du support  $J_B \rightarrow \bar{J}_B$  consiste à remplacer le  $t_0 \in T_B$  par un autre  $t_1 \in T_H$ , le changement du vecteur des potentiels  $y$  vers  $\bar{y}$  et des estimations  $E$  vers  $\bar{E}$  de telle sorte que :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \beta(\bar{x}, J_B),$$

$$\bar{E}(J) = E(J) + \delta_0 t(J),$$

$$\bar{y}(I) = y(I) + \delta_0 t(I).$$

Où  $t$  : est la direction de diminution de la fonction.

$\delta_0$  : est le pas duale, maximal le long de cette direction. Nous calculons d'abord  $t$  et  $\delta_0$  : La direction  $t$  sera calculée de la manière suivante : posons :

$$t_{j_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x}_{j_0} = d_{1j_0} \\ -1 & \text{si } \bar{x}_{j_0} = d_{2j_0} \end{cases}$$

avec

$$t'(J_H) = t'_B \cdot (A_B)^{-1} \cdot A_H.$$

et

$$\delta_j = \begin{cases} -\frac{E_j}{t_j} & \text{si } E_j \cdot t_j < 0, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Le pas maximal sera donné par :  $\delta_0 = \min_{j \in J_H} \delta_j$ , où  $\delta_0 = \delta_j^*$ .

Le nouveau support sera :

$$\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j^*.$$

On calcule la valeur de suboptimalité du nouveau support-plan  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$ .

On a

$$\bar{E}(J) = E(J) + \delta(J),$$

$$\bar{y}(I) = y(I) + \delta t(I).$$

Donc :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \sum_{j \in \bar{J}_H^+} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{2j}).$$

— Si  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \varepsilon$ , alors  $\bar{x}$  est  $\varepsilon$ -optimal.

— Si  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > \varepsilon$ , alors on refait l'itération avec le nouveau support plan  $(\bar{x}, \bar{J}_B)$ .

— Si  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = 0$ , alors  $\bar{x}$  est optimal.

**Exemple 2.1** On considère le problème suivant[7] :

$$F(x) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

sous les contraintes :

$$2x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq -1,$$

$$0 \leq x_1 \leq 1.5, \quad -1 \leq x_2 \leq 1.$$

Forme standard :

$$F(x) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 &= -1, \\ 0 \leq x_1 \leq 1.5, \quad -1 \leq x_2 \leq 1, \\ 0 \leq x_3 \leq 4, \quad 0 \leq x_4 \leq 7. \end{aligned}$$

Le plan initial non dégénéré de départ  $x^1 = (1, 0, 1, 3)$ . Le support initial :  $J_B = \{1, 3\}$ ,  $\epsilon = 10^{-3}$

On a :

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc  $|A_B| = -2 \neq 0$  ( $A_B$  est inversible) et la matrice inverse égale à

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur des potentiels est donné par :

$$\begin{aligned} y' &= C'_B A_B^{-1}, \\ C'_B &= (C_1, C_3) = (1, 0), \\ y' &= (0, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Le vecteur des estimations :

$$\begin{aligned} E_2 &= y' a_2 - c_2, \\ E_4 &= y' a_4 - c_4, \\ E_2 &= -\frac{1}{2}, \\ E_4 &= -\frac{1}{2}, \\ E_B &= 0, \text{ donc } E_1 = E_3 = 0. \end{aligned}$$

Calcul de la valeur de suboptimalité :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_H^+} E_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j (x_j - d_{2j}).$$

$$\beta(x, J_B) = E_2 (x_2 - d_{22}) + E_4 (x_4 - d_{24}).$$

$$\beta(x^1, J_B) = -\frac{1}{2}(0 - 1) - \frac{1}{2}(3 - 7) = \frac{5}{2} > \epsilon.$$

On passe au changement du plan ( $x^2 \rightarrow x^1 + \theta l$ ) :

$$l_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j & \text{si } E_j > 0, \\ d_{2j} - x_j & \text{si } E_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_j = 0. \end{cases}$$

$$l_2 = 1 - 0 = 1 \text{ et } l_4 = 7 - 3 = 4.$$

$$l_B = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_3 \end{pmatrix} = -A_B^{-1} A_H l_H = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le pas admissible : pour  $J_H$  on prend  $\theta = 1$ . Pour  $J_B$ , on a

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{21}-x_1}{l_1} = 1, \\ \frac{d_{13}-x_3}{l_3} = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

et

$$\theta^0 = \min \{1, \theta_1, \theta_2\} = \min \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2},$$

donc  $j_0 = 3$ .

$$x^2 = x^1 + \theta^0 l = (1, 0, 1, 3) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}, 1, -2, 4 \right) = (1, 0, 1, 3) + \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2 \right) = \left( \frac{5}{4}, \frac{1}{2}, 0, 5 \right).$$

Pour la valeur de suboptimalité, on a :

$$\beta(x^2, J_B) = (1 - \theta) \beta(x^1, J_B) = \frac{5}{4} > \varepsilon,$$

donc on passe au changement de base  $J_B \rightarrow \bar{J}_B$ . On cherche alors un indice  $j_i \in J_H$  qui va rentrer dans la base à la place de  $j_0 \in J_B$ .

Le vecteur de direction  $J_B \rightarrow \bar{J}_B$  est donné par :

$$\bar{J}_B = (J_B / j_0) \cup j_1,$$

avec

$$t_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{j_0} = d_{1j_0}, \\ -1 & \text{si } x_{j_0} = d_{2j_0}, j \in J_B, \\ 0 & \text{si } j \in J_B / j_0. \end{cases}$$

Donc,  $t_1 = 0$ ,  $t_3 = 1$ .

Sûr  $J_H$ , on a  $t_H = t_B A_B^1 A_H$ ,  $\delta_0 = \min_{j \in J_H} \delta_j$ , et

$$\delta_j = \begin{cases} -\frac{E_j}{t_j} & \text{si } E_j t_j < 0, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\delta_4 = -\frac{E_4}{t_4} = \frac{1}{2} \delta_0 = \delta_4.$$

Le nouveau support  $\bar{J}_B = 1, 4$ .

Calculons la valeur de suboptimalité :

On commence par le vecteur des estimations.

$$\bar{E}(J) = E(J) + \delta_0 \cdot t(J).$$

$$E(J) = \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} (-2, 1) = \left( -\frac{3}{2}, 0 \right) = (\bar{E}_2, \bar{E}_4).$$

$$\beta(x^2, \bar{J}_B) = \sum_{j \in \bar{J}_H^+} \bar{E}_j (x_j^2 - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} \bar{E}_j (x_j^2 - d_{2j}).$$

Donc :

$$\beta(x^2, \bar{J}_B) = -\frac{3}{2} (1 - 1) = 0.$$

D'où le support plan  $(x^2, \bar{J}_B)$  est optimal, avec  $x^2 = \left( \frac{5}{4}, \frac{1}{2}, 0, 5 \right)$  est le plan optimal et  $\bar{J}_B = \{1, 4\}$  est le support optimal donc on arrête le processus.

La valeur optimale de la fonction objective est donnée par :

$$F(x^2) = \frac{5}{4} + 2 \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{4}.$$

## 2.2 RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE :

### 2.2.1 Position du problème :

Considérons un problème de contrôle optimal de la forme suivante :

$$\text{maximise : } J(u(t_f)) = c'x(t_f), \quad (2.5)$$

sous les contraintes :

$$\dot{x} = Ax(t) + bu(t) \text{ pour } t \in [0, t_f], \quad (2.6)$$

$$x(0) = x_0, \quad Hx(t_f) = g, \quad (2.7)$$

$$d_1 \leq u(t) \leq d_2, \quad \forall t \in T = [0, t_f], \quad (2.8)$$

$$t_f > 0, \quad (2.9)$$

où

- $J(u(t))$  est un coût terminal linéaire en  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , défini par la matrice  $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ .
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système linéaire autonome (12) avec  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ .
- $u(t) \in \mathbb{R}$  est le signal de contrôle, supposé constant par morceaux.
- $Hx(t)$  est le signal de sortie, avec  $H \in M_{(m,n)}$  de rang maximal,  $\text{rang}(H) = m < n$ .
- l'état final  $x(t_f)$  est contraint par la relation  $Hx(t_f) = g$ ,  $g \in \mathbb{R}^m$ .

## 2.3 CONCEPTS DE BASE

### Définition 2.6 [14]

1. Un contrôle  $u(t)$ ,  $t \in T$ , est dit admissible si  $u(t)$  et la trajectoire  $x(t)$  solution de (2.6) correspondante, vérifient les contraintes (2.7) et (2.9).
2. Un contrôle admissible  $u(t)$ , est dit optimal si

$$J(u^0) = \max_{d_1 \leq u \leq d_2} J(u).$$

3. Soit  $\epsilon \geq 0$  donné, Un contrôle admissible  $u^\epsilon(t)$  est dit  $\epsilon$  – optimal si et seulement si :

$$J(u^0) - J(u^\epsilon) \leq \epsilon.$$

La solution du système différentiel (2.6) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)F(\tau)^{-1}Bu(\tau)d\tau, t \in T.$$

où  $F(t)$  est la résolvante du système :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = AF(t), \\ F(0) = I_n, \end{cases}$$

où  $In$  représente la matrice identité. En utilisant cette dernière solution, le problème (2.5)-(2.9) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} J(u(t_f)) = c'F(t_f)x_0 + \int_0^{t_f} c(t)u(t)dt, \\ \int_0^{t_f} \varphi(t)u(t)dt = \bar{g}, \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2, t \in T, \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $c(t) = c'F(t_f)F(t)^{-1}B$ ,  $\varphi(t) = HF(t_f)F(t)^{-1}B$  et  $\bar{g} = g - HF(t_f)x_0$ .

### 2.3.1 Principe de discrétisation

Ce principe consiste à transformer le problème du contrôle optimal (problème initial) au Problème de la Programmation Linéaire (PPL : problème discret).

Nous subdivisons l'intervalle  $T$  en  $N$  sous-intervalles  $[\tau_j, \tau^j]$ , avec  $\tau^j - \tau_j = h$ ,  $h = \frac{(t_f-0)}{N}$ ,  $N \leq m$  et  $T = \bigcup_{j=1}^N [\tau_j, \tau^j]$ .

Comme le contrôle  $u(t)$  est constant par morceaux, alors posons

$$u(t) = u(\tau^j), \quad t \in [\tau_j, \tau^j], \quad j = 1 \dots N.$$

De ce qui précède, le problème (4.3.1) devient le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} J(u) = \sum_{j=1}^N C_j u_j \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^N X_j u_j = g, \\ d_1 \leq u_j \leq d_2, j = 1 \dots N, \end{cases} \quad (2.11)$$

où  $C_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} C(t)dt$  et  $X_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} \varphi(t)dt$ ,  $t \in T$ .

### 2.3.2 Méthode adaptée pour PPL

Cette méthode consiste à résoudre le problème discret (2.11) par la méthode adaptée du problème de la programmation linéaire.

Soit  $\{u^0, J_B^0\}$ , une solution optimale du problème (2.11) donnée par la méthode adaptée (voir l'exemple (2.1)).

En utilisant cette solution, on construit une solution du problème initial. Pour cela posons  $\tau_B = \{\tau_j, j \in J_B^0\}$  et appliquons la procédure finale .

### 2.3.3 Procédure finale

A partir du support  $\tau_B$  obtenu on appliquant la méthode adaptée d'avant, on construit le co-contrôle

$$\Delta(t) = -\psi'B, \quad t \in T,$$

où  $\psi$  est la solution du système conjugué suivant :

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A'\psi, \\ \psi(t_f) = c - H'y. \end{cases} \quad (2.12)$$

Ainsi, construisons le quasi-contrôle  $\omega(t)$ ,  $t \in T$  de la manière suivante :

$$\omega(t) = \begin{cases} d_1, & \Delta \leq 0, \\ d_2, & \Delta < 0, \quad t \in T, \end{cases} \quad (2.13)$$

et sa quasi-trajectoire correspondante  $\chi(t)$  solution de :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)T(\tau)^{-1}Bu(\tau)d\tau, \quad t \in T,$$

La quantité  $g - H\chi(t_f)$  nous permet de voir si l'on passe à la dernière étape de la méthode ou non.

— si  $H\chi(t_f) = g$ , alors le contrôle  $\omega(t)$ ,  $t \in T$  est optimal pour le problème (2.5)-(2.9).

— si  $H\chi(t_f) \neq g$ , alors on construit le vecteur :

$$\lambda(\tau_B) = \phi(\tau_B)^{-1}(g - H\chi(t_f)), \quad (2.14)$$

sachons que  $(\phi_B)_j = \phi(\tau_j)$ .

A partir de ce vecteur, un test est effectué en comparant la norme pondérée de  $g - H\chi(t_f)$ , i.e.  $\|\lambda(\tau_B)\|$  avec une valeur seuil  $\mu$ , où  $\mu > 0$ , une constante donnée et qui représente le paramètre de la méthode :

1. si  $\|\lambda(\tau_B)\| > \mu$ , alors on change  $\tau_B$  en  $\bar{\tau}_B$  par la méthode duale.
2. si  $\|\lambda(\tau_B)\| < \mu$ , alors on passe à l'étape finale.

**Méthode duale :** La méthode duale consiste à modifier le support  $\tau_B$ , de telle sorte que la quantité  $\lambda(\tau_B)$  diminue jusqu'au point où le test sera négatif. Soit  $t^0 \in \tau_B$ , tel que :

$$|\lambda(t^0)| = \max_{t \in \tau_B} |\lambda(t)| > \mu.$$

Le changement du support  $\tau_B$  à  $\bar{\tau}_B$  consiste à changer le co-contrôle  $\Delta(t)$  par le co-contrôle  $\bar{\Delta}(t) = \Delta(t) + \gamma\delta(t)$ ,  $t \in T$ , où  $\delta(t)$  est la direction et  $\gamma$  le pas dual le long de cette direction. Pour cela cherchons la fonction :

$$\gamma(t) = \begin{cases} -\frac{\Delta(t)}{\delta}, & \Delta(t)\gamma(t) < 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Avec  $\delta(t) = -\text{signe}(\lambda)(\phi(\tau_B)^{-1}\varphi(t))$ . Construisons l'ensemble  $T_g(\gamma)$  de la manière suivante :

$$T_g(\gamma) = \{t \in T, \quad \gamma(t) < \gamma\}.$$

Donc, la vitesse de la décroissance de la fonctionnelle du dual est égal à :

$$\alpha(\gamma) = -|\lambda(t^0)| + (d_2 - d_1) \int_{T_g(\gamma)} |\delta(t)| dt.$$

Par construction  $\alpha(0) < 0$  et  $\alpha\gamma \leq \alpha(\bar{\gamma})$  si  $\gamma < \bar{\gamma}$ . Si  $\alpha(\gamma) < 0$  pour  $\gamma > 0$ , alors le problème (2.5)-(2.9) ne possède pas de contrôle admissible. Dans le cas contraire cherchons  $\gamma_0 \geq$ , tel que

$$\alpha(\gamma_0 - \gamma) < 0, \quad \alpha(\gamma_0 + 0) \leq 0,$$

pour tout  $\gamma$  tel que  $0 < \gamma \leq \gamma_0$ . Cherchons  $t^0 \in T \cap \tau_B$  tel que :

$$\Delta(t^0) + \gamma_0 \delta(t^0) = 0, \delta(t^0) \neq 0,$$

on obtient alors le nouveau support  $\bar{\tau}_B = (\tau_B \setminus t^0) \cup t^0$ .

**Étape finale** L'étape finale consiste à modifier le support  $\tau_B$  obtenu à l'étape précédente  $|\lambda(\tau_B)| < \mu$ , jusqu'à la réalisation du test  $H\chi(t_f) = g$ . Elle est basée sur la méthode de Newton. Désignons par  $T^0 = \{t \in T : \Delta(t) = 0\}$ , l'ensemble des points isolés  $t_j$  et supposons que  $\dot{\Delta}(t_j) \neq 0, j = 1, \dots, m$ . Cette étape consiste à déterminer  $\tau_B^0 = \{\tau_j^0, j = 1, \dots, m\}$  à partir de l'équation suivante :

$$(d_2 - d_1) \sum_{j=1}^m \text{signe}(\dot{\Delta}(t_j)) \int_{\tau_j^0}^{t_j} \varphi(t) dt = g - H\chi(t_f). \quad (2.16)$$

C'est-à-dire : trouver un  $\tau_B^0$  de sorte que  $H\chi(t_f) = g$ . En effet, l'équation (2.16) est obtenue à partir de la formule du Cauchy (4.3.1). Nous avons :

$$g - H\chi(t_f) = g - H \left[ F(t_f)x_0 + \int_0^{t_f} F(t_f)(F(t)^{-1}B\omega dt) \right], \quad (2.17)$$

$$g - HF(t_f)x_0 - \int_{T_H} \varphi(t)\omega(t)dt - \int_{T_B} \varphi(t)\omega(t)dt. \quad (2.18)$$

En identifiant la partie  $g - HF(t_f)x_0 - \int_{T_H} \varphi(t)\omega(t)dt$  à zéro, ce qui implique :

$$H\chi(t_f) - g = \int_{T_B} \varphi(t)\omega(t)dt.$$

Subdivisons l'ensemble  $\tau_B$  en deux sous ensembles :

$$T^+ = \{t_j \in T_B, \dot{\Delta}(t_j) > 0\},$$

et

$$T_B^- = \{t_j \in T_B, \dot{\Delta}(t_j) < 0\},$$

tel que  $T_B = \{[t_j - \eta, t_j + \eta], j = 1, \dots, m\}$  et  $\tau_j = |t_j - \eta|$ , on aura ainsi :

$$H\chi(t_f) - g = \begin{cases} \sum_{j=1}^m (d_2 - d_1) \int_{\tau_j}^{t_j} \varphi(t) dt, & \text{si } \dot{\Delta}(t_j) < 0, \\ \sum_{j=1}^m -(d_2 - d_1) \int_{\tau_j}^{t_j} \varphi(t) dt, & \text{si } \dot{\Delta}(t_j) > 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Pour la résolution des équations (2.16), on prend comme approximation initiale  $\tau_B^0 = \{\tau_j^{(0)}, j = 1, \dots, m\}$ , avec  $\tau^0 = \tau_B$ . Supposons connue la k-ème approximation  $\tau_B^{(K)} = \{\tau_j^{(K)}, j = 1, \dots, m\}$ . On a alors la relation de récurrence suivante :

$$\tau^{(K+1)} = \tau^k + \frac{1}{d_2 - d_1} \left\{ \text{signe}(\dot{\Delta}(t_j)) (\lambda(\tau_B^{(K)})_j), j = 1, \dots, m \right\},$$

où  $\lambda_j$  est un vecteur calculé par la relation (20). Alors, la fonction  $\omega(t) = \omega(t), t \in T$  est calculée par le support  $T_B^0$  qui est un contrôle optimal pour le problème ((2.12)-(2.16).

**Exemple 2.2** Considérons le problème de contrôle autonome au temps final  $t_f$  fixé [14] :

$$\begin{cases} J(u(t)) = x_2(t_f), \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \quad x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_3(t) = u(t), \quad x_3(0) = 0, \\ x_1(3) = 1, \\ -1 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, 3], \quad t_f > 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Pour ce problème le système dynamique peut être écrit sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = (0 \quad 1 \quad 0), \quad H = (1 \quad 0 \quad 0), \quad g = 1.$$

**Résolution par la méthode adaptée** Choisissons le nombre de discrétisations  $N = 4$  et le contrôle initial admissible, non dégénéré  $u_0$  borné entre  $d_1 = -1$  et  $d_2 = 1$  :  $u_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$  et le pas  $h = \frac{t_f - 0}{N} = \frac{3}{4}$ . La solution du système dynamique du système (2.20) à condition initiale nulle est donnée par :

$$x(t) = \int_0^{t_f} F(t)F^{-1}(\tau) + Bu(\tau)d\tau, \quad t \in T, \quad (2.21)$$

**Calcul de la résolvante**

$$F(t) = e^{At}$$

$$e^{At} = I + At + \frac{At^2}{2!}$$

où :

$$At^2 = A \cdot t \cdot A \cdot t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(t_f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4.5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in T.$$

En utilisant cette dernière solution, le problème initial (2.19) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} J(u(t)) = \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt \rightarrow \max_u, \\ \int_0^{t_f} \varphi(t)u(t)dt = g, \\ -1 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, 3]. \end{cases} \quad (2.22)$$

Où :

$$C(t) = c'F(t_f)F(t)^{-1}B = -t + 3 \text{ et } \varphi = HF(t_f)F(t)^{-1}B = \frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2}.$$

**Principe de discrétisation**

Posons  $\tau_{j+1} = \tau^j$  avec  $\tau^j = \tau_j + h$ , ce qui implique :

$$T = [0, \frac{3}{4}[\cup[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}[\cup[\frac{3}{2}, \frac{9}{4}[\cup[\frac{9}{4}, 3].$$

Calculons  $C_j$  et  $X_j$  :

$$C_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} C(t)dt = \int_{\tau_j}^{\tau^j} (-t + 3)dt, \quad j = 1 \dots N,$$

$$X_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} \varphi(t)dt = \int_{\tau_j}^{\tau^j} (\frac{t^2}{2} - 3t + \frac{9}{2})dt, \quad j = 1 \dots N.$$

En utilisant les dernières quantités, le problème (2.22) devient un problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} J(u) = \frac{63}{32}u_1 + \frac{45}{32}u_2 + \frac{27}{32}u_3 + \frac{9}{32}u_4 \rightarrow \max_u, \\ \frac{333}{128}u_1 + \frac{171}{128}u_2 + \frac{63}{128}u_3 + \frac{9}{128}u_4 = 1, \\ -1 \leq u_j \leq 1, \quad j = 1 \dots 4. \end{cases} \quad (2.23)$$

**La résolution :** Considérons le problème de la programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} J(u) = \frac{63}{32}x_1 + \frac{45}{32}x_2 + \frac{27}{32}x_3 + \frac{9}{32}x_4 \rightarrow \max_x, \\ \frac{333}{128}x_1 + \frac{171}{128}x_2 + \frac{63}{128}x_3 + \frac{9}{128}x_4 = 1, \\ -1 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1 \dots 4. \end{cases} \quad (2.24)$$

Où

$$Q = [\frac{333}{128}, \frac{171}{128}, \frac{63}{128}, \frac{9}{128}], \quad c = [\frac{63}{32}, \frac{45}{32}, \frac{27}{32}, \frac{9}{32}], \quad b = 1, \quad d_1 = -1 \text{ et } d_2 = 1.$$

**Détermination d'un support-plan de départ**

Choisissons le plan initial non dégénéré qui vérifie la condition  $d_1 < x < d_2$ ,  $x_0 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  et le support initial  $J_B = 2$ . Calculons la quantité  $Qx \neq 1$ , alors la solution initiale n'est pas admissible. On ajoute des variables d'écarts, Ce qui implique :

1. L'ensemble des indices du support  $J_B = 2$ .
2. L'ensemble des indices du hors-support  $J_H = [1, 3, 4, 5]$ .
3. La matrice du support est  $Q_B = \frac{171}{128}$ .
4. La matrice du hors-support est  $Q_H = [\frac{333}{128}, \frac{63}{128}, \frac{9}{128}, 1]$ .
5. Le coût du support  $C_B = \frac{45}{32}$ .

6. Le coût du hors-support  $C_H = [6332, \frac{27}{32}, \frac{9}{32}]$ .
7. Le déterminant de la matrice du support est  $\det(Q_B) = \frac{171}{128}$ .
8. L'inverse de la matrice du support est  $Q_B^{-1} = \frac{128}{171}$ .

**Calculons :**

1. Le vecteur des potentiels  $y' = \frac{20}{19}$ .
2. Le vecteur des estimations  $\Delta = [\frac{117}{152}, -\frac{99}{304}, -\frac{63}{304}, \frac{19020}{19}]$ .
3. Le plan  $x = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{59}{32}]$ .
4. La valeur de suboptimalité est  $\beta(x, J_B) = \frac{561387}{304}$ .  
Test :  $\beta(x, J_B) > \epsilon$ , alors on passe au changement de plan.

**Changement de plan**  $x \rightarrow \bar{x}$

1. Le vecteur de direction  $l(J_H) = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{59}{32}]$ .
2. Le vecteur de direction  $l(J_B) = [\frac{607}{342}]$ .

**Calculons :**

1. Le pas admissible maximal  $\theta^0 : \theta^0 = \min(1, \frac{171}{607}) = \frac{171}{607}$ .
2. Le nouveau plan  $\bar{x} = [-\frac{389}{607}, 1, -\frac{47}{607}, \frac{389}{607}, \frac{6434}{4850}]$ .
3. La valeur de suboptimalité pour le nouveau plan  $\beta(\bar{x}, J_B)$ .

Test :  $\beta(\bar{x}, J_B) > \epsilon$ , alors on passe au changement du support.

**Changement du support**  $J_B \rightarrow \bar{J}_B$

1. Calculons Le vecteur  $\tau : \tau(J_B) = -1$  et  $\tau(J_H) = [-\frac{37}{19}, \frac{-7}{19}, -\frac{1}{19}, -\frac{128}{171}]$ .
2. Le pas dual  $\sigma : \sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H} (0.3952, 1337.3437, \infty, \infty)$ . Alors  $J_1 = 1$ .

Par conséquent :

1. L'ensemble des indices du nouveau support  $\bar{J}_B = 1$ .
2. Le nouveau vecteur de potentiels  $\bar{y}' = \frac{28}{37}$ .
3. Le nouveau vecteur d'estimations  $\bar{\Delta} = [-\frac{117}{296}, -\frac{279}{592}, -\frac{135}{592}, \frac{37028}{37}]$ .
4. La valeur de suboptimalité est  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \frac{29779127}{22459}$ .  
Test :  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > \epsilon$ , alors on passe au changement de plan.

**Changement de plan**  $\bar{x} \rightarrow \tilde{x}$

1. Le nouveau vecteur de direction  $l(J_H) = [0, \frac{654}{607}, \frac{218}{607}, -\frac{6431}{4856}]$ .
2. Le vecteur nouveau de direction  $l(J_B) = \frac{59732}{202131}$ .

**Calculons :**

1. Le nouveau pas admissible maximal  $\bar{\theta}^0 : \theta^0 = \min(1, \frac{82917}{14933}) = 1$ , ce qui implique  $J_1 = 2$ .
2. Le nouveau plan  $\bar{x} = [-\frac{115}{333}, 1, 1, 1, 0]$ .
3. La valeur de suboptimalité pour le nouveau plan  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = 0$ .  
Test :  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = 0$ , alors le support-plan  $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$  est optimal :
4. La solution optimale est  $x^0 = [-0.3453, 1, 1, 1]$  et  $J_B^0 = 1$ .
5. La valeur optimale de la fonction du critère est  $J(\bar{x}) = 1.8514$ .

Après deux itérations, on obtient la solution optimale suivante :

1. Le plan optimal est  $u = [-\frac{115}{333}, 1, 1, 1]$ .
2. Le support optimal est  $J_B = 1$ .

**Procédure finale :**

En utilisant  $J_B^0$ , on construit  $\tau_B$ , tel que :  $\tau_B = \tau_j, j \in J_B^0 = \frac{3}{4}$ . Le support  $\tau_B$  permet de calculer  $\phi_B = \frac{81}{32}, \phi_B^{-1} = \frac{32}{81}, C_B = \frac{9}{4}$  et de construire  $y' = C_B \phi^{-1} = \frac{8}{9}$ , et ainsi  $\Delta(t) = -\psi'(t)B = \frac{4}{9}t^2 - \frac{5}{3}t + 1$ , où  $\psi(t)$  est donnée par la formule (2.12).  
Construisons la quasi-commande  $\omega(t)$ ,  $t \in T$  :

$$\omega(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ 1, & \text{si } \Delta < 0, \end{cases} \quad t \in [0, 3]. \quad (2.25)$$

Calculons  $\chi(t_f)$  la trajectoire correspondante à  $\omega(t)$  :

$$\chi(3) = \int_{\tau_j}^{\tau_j} \sum_{j=0}^N F(s)^{-1} B u(s) ds = \begin{pmatrix} -0,7031 \\ 0,5625 \\ 1,5000 \end{pmatrix}.$$

$H\chi(3) = -0,7031 \neq 1$ , alors on construit le vecteur  $\lambda(\tau_B)$  :

$$\lambda = \phi_B^{-1}(g - H\chi(t_f)) = \frac{8}{9}(1 - (-0,7031)) = 0,6728.$$

Par conséquent,  $\|\lambda(\tau_B)\| = 0,6728 > \mu$ , alors on change  $\tau_B$  en  $\bar{\tau}_B$  par la méthode duale ( $\mu = 0,2$ , paramètre de la méthode).

**Méthode duale :** Soit  $t^0 \in \tau_B$  tel que  $\lambda(t^0) = \max(|\lambda(\tau_B)|) = 0,6728$ , ce qui implique  $t^0 = \frac{3}{4}$ . Le changement du support  $\tau_B$  à  $\bar{\tau}_B$  consiste à changer le co-contrôle

$$\Delta(t) = \frac{4}{9}t^2 - \frac{5}{3}t + 1$$

à

$$\bar{\Delta}(t) = \Delta(t) + \gamma\delta(t), \quad t \in T.$$

Pour cela cherchons la fonction :

$$\gamma(t) = \begin{cases} -\frac{\Delta(t)}{\delta(t)} & \text{si } \Delta(t)\delta(t) < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.26)$$

Avec  $\delta(t) = -\text{signe}(\lambda)\phi^{-1}\varphi(t) = -\frac{16}{81}t^2 + \frac{32}{27}t - \frac{16}{9}$ .

Construisons l'ensemble :

$$T_g(\gamma) = \{t \in [0,3], \gamma(T) < 0\}.$$

Nous avons  $\Delta(t)\gamma(t) < 0$  sur l'intervalle  $[0, t_c]$ , ce qui implique :

$$\gamma(t) = \frac{-\frac{4}{9}t^2 + \frac{5}{3}t - 1}{-\frac{16}{81}t^2 + \frac{32}{27}t - \frac{16}{9}} < \gamma. \quad (2.27)$$

La résolution de l'inégalité (2.25) revient à résoudre cette égalité :

$$-\frac{4}{9}(1 + \frac{4}{9}\gamma)t^2 + \frac{1}{3}(5 + \frac{32}{9}\gamma)t - (1 + \frac{16}{9})\gamma = 0.$$

Les racines de cette dernière équation sont :

$$t_1 = 3, t_2 = \frac{3(16\gamma - 9)}{4(4\gamma - 9)}.$$

Par conséquent :

$$T_g(\gamma) = \left\{ t \in [0, \frac{3(16\gamma - 9)}{4(4\gamma - 9)}] \right\}.$$

Ainsi :

$$\alpha(\gamma) = -|\lambda(t^0)| + (d_2 - d_1) \int_{T_g(\gamma)} |\gamma(t)| dt.$$

D'où :

$$\alpha(\gamma) = \frac{2(7472\gamma^3 - 50436\gamma^2 + 113481\gamma - 40824)}{81(4\gamma - 9)^3}.$$

Ce qui donne :  $\gamma_1 = 0,4403$ ,  $\gamma = 3,1549 + 1,5673i$ ,  $\gamma_3 = 3,1549 - 1,5673i$ .

Nous calculons  $t_*$  à partir de l'équation  $\Delta(t_*) + \gamma\delta(t_*) = 0$ , tel que  $\delta(t_*) \neq 0$ , ce qui implique :

$$\frac{4}{9}t_*^2 - \frac{5}{3}t_* + 1 + \gamma_1(-\frac{16}{81}t_*^2 + \frac{32}{27}t_* - \frac{16}{9}) = 0. \quad (2.28)$$

La solution de l'équation (2.26) est :

$$t_1 = \frac{3666}{18097}, t_2 = 3.$$

Puisque  $\delta(t_2) = 0$ , alors  $t_* = 0,2026$ . Le nouveau support est :

$$\bar{\tau}_B = (\tau_B/t^0) \cup t_* = 0,2026.$$

Ce nouveau support permet de recalculer :  $\phi(\bar{\tau}_B) = 3,9127$ ,  $\phi(\bar{\tau}_B)^{-1} = 0,2555$ ,  $C(\bar{\tau}_B) = 2,7974$ . Ainsi de reconstruire :  $y' = C(\bar{\tau}_B)\phi(\bar{\tau}_B)^{-1}$  et  $\Delta(\bar{\tau}) = -\psi'(t)B = 0,3574t^2 - 1,1448t + 0,2172$ . Où  $\psi(t)$  est donnée par la formule(2.12). Reconstituons la quasi commande  $\omega(t)$ ,  $t \in T$  :

$$\omega(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \Delta(t) > 0 \\ 1 & \text{si } \Delta < 0, t \in [0,3]. \end{cases} \quad (2.29)$$

Calculons  $\chi(t_f)$  :

$$\chi(3) = \int_{\bar{\tau}_j}^{\bar{\tau}^j} \sum_{j=0}^N F^{-1}(s)Bu(s)ds = \begin{pmatrix} 2,7968 \\ 3,3253 \\ 2,5947 \end{pmatrix}.$$

On a  $H\chi(3) = 2,7968 \neq 1$ , alors on reconstruit le vecteur  $\lambda(\bar{\tau}_B)$  :

$$\lambda(\bar{\tau}_B) = \phi(\bar{\tau}_B)^{-1}(g - H\chi(t_f)) = 0,2555(1 - 2,7968) = -0,4592.$$

Par conséquent,  $\|\lambda(\bar{\tau}_B)\| = 0,4592 > \mu$ , alors on change  $\bar{\tau}_B$  en  $\bar{\bar{\tau}}_B$  par la méthode duale.

**Méthode duale** : Soit  $t^0 \in \bar{\tau}_B$  tel que  $\lambda(t^0) = \max(|\lambda(\bar{\tau}_B)|) = 0,4592$  ce qui implique  $t^0 = 0,2026$ .

Le changement du support  $\bar{\tau}_B$  à  $\bar{\bar{\tau}}_B$  consiste à changer le co-contrôle  $\bar{\Delta}(t) = 0,3574t^2 - 1,1448t + 0,2172$  à  $\bar{\bar{\Delta}}(t) = \Delta(\bar{t}) + \bar{\gamma}(t)\bar{\delta}(t)$ ,  $t \in T$ . Pour cela cherchons la fonction :

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} -\frac{\bar{\Delta}(t)}{\bar{\delta}(t)} & \text{si } \bar{\Delta}(t)\bar{\delta}(t) < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.30)$$

Avec  $\bar{\delta}(t) = -\text{sign}(\lambda)\phi(\bar{\tau}_B)^{-1}\varphi(t) = 0,1277t^2 - 0,7667t + 1,1501$ . Reconstruisons l'ensemble :

$$T_g(\gamma) = \{t \in [0, 3], \gamma(t) < \gamma\}.$$

Nous avons :  $\Delta(\bar{t})\bar{\delta}(t) < 0$  sur l'intervalle  $[t_c, t_f]$ , ce qui implique :

$$\gamma(t) = -\frac{\Delta(t)}{\delta(t)} = \frac{0,3574t^2 - 1,1448t + 0,2172}{0,1277t^2 - 0,7667t + 1,1501}.$$

Par conséquent :

$$T_g(\gamma) = \left\{ t \in \left[0, 2026, \frac{4,8901s + 92,3888}{0,61347s + 0,2193}\right] \right\}.$$

Ainsi :

$$\alpha(\gamma) = -|\lambda(t^0)| + (d_2 - d_1) + \int_{T_g(\gamma)} |\delta(t)| dt.$$

$$\alpha(\gamma) = 0,4592 + 1 - (-1) \int_{0,2026}^{\frac{4,8901s + 92,3888}{0,61347s + 0,2193}} |0,1277t^2 - 0,7667t + 1,1501| dt.$$

D'où :

$$\alpha(\gamma) = \frac{(6,0882\gamma^3 + 51,0937\gamma^2 + 142,9289\gamma - 43,5418)10^{48}}{(16300543533549461s + 45598946227126272)^3}.$$

On obtient alors :  $\gamma_1 = 0,2764$ ,  $\gamma_2 = -4,3342 - 2,6620i$ ,  $\gamma_3 = -4,3342 + 2,6620i$ .

On calcule  $t_*$  à partir de l'équation  $\Delta(t_*) + \gamma\delta(t_*) = 0$ , ce qui implique  $t_* = 0,4541$ .

Alors, le nouveau support est :

$$\tau_B = (\tau_B t^0) \cup t_* = 0,4541.$$

Ce nouveau support permet de recalculer  $\phi(\bar{\bar{\tau}}_B) = 3,2406$ ,  $\phi(\bar{\bar{\tau}}_B)^{-1} = 0,3085$ ,  $C(\bar{\bar{\tau}}_B) = 2,5458$ .

Ainsi reconstruire  $y' = C(\bar{\bar{\tau}}_B)\phi(\bar{\bar{\tau}}_B)^{-1} = 0,7856$  et  $\bar{\bar{\Delta}}(t) = -\psi'(t)B = 0,3928t^2 - 1,3568t + 0,5352$ , Où  $\psi(t)$  est donnée par la formule (2.11).

Reconstruisons la quasi-commande  $\omega(t)$ ,  $t \in T$ .

$$\omega(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } \bar{\bar{\Delta}}(t), \\ 1, & \text{si } \bar{\bar{\Delta}}(t). \end{cases} \quad (2.31)$$

Calculons  $\chi(t_f)$  :

$$\chi(3) = \int_{\tau_j}^{\tau_j} \sum_{j=0}^N F(s)^{-1} B u(s) ds = \begin{pmatrix} 1,0000 \\ 1,9812 \\ 2,0916 \end{pmatrix}.$$

$H\chi(3) = 1$ , alors  $\omega(t)$  est le contrôle optimal.

1. Le support optimal  $\tau_B = 0,454178315170256 \approx 0,4542$ .
2. Le valeur optimal de la fonction du critère est  $J(u) = 1,8513$ .

#### 2.3.4 Conclusion

Dans ce chapitre la première partie est consacré à la résolution d'un problème de programmation linéaire, en utilisant la méthode adaptée. Dans la deuxième partie, nous avons résolu le problème de contrôle optimal en utilisant la méthode adaptée. Tout d'abord, Nous avons discrétisé le problème en le formulant sous la forme d'un problème de programmation linéaire. Ensuite, nous avons appliqué la méthode adaptée.

# DÉFINITIONS ESSENTIELLES SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES

# 3

## 3.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons définir quelques notions de base du système dynamique hybride. Les systèmes hybrides sont définis comme des sous-systèmes continus et discrets interagissant entre eux. En mathématique un système dynamique hybride peut être représenté par un ensemble d'équations différentielles ordinaires (EDO) pour les dynamiques continues et des règles de commutation discrètes spécifiant les transitions entre différents modes ou états du système.

Dans ce chapitre nous allons étudier comment se produisent les interactions entre les deux sous systèmes (discret-continu) qui forment le système dynamique hybride (SDH) et les actions discrètes qui peuvent intervenir lors de l'évolution d'un système continu.

Dans un premier temps, nous allons donner quelques notions générales, puis nous présentons la définition formelle des systèmes dynamiques hybrides. Nous exposerons d'une part la classification des systèmes dynamiques hybrides et chaque classe sera muni d'un exemple illustratif. D'autre part, Nous présenterons les différents moyens de modélisation des (SDH)[5,12,9].

## 3.2 SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES

Un système dynamique est dit hybride, s'il possède deux types de variables d'état : variables d'état continues et variables d'état discrètes. Dans cette partie, nous allons rappeler les principales caractéristiques des systèmes.

### 3.2.1 Systèmes statiques et systèmes dynamiques

Les systèmes statiques ont une sortie qui est toujours indépendante des valeurs passées de son entrée. Les systèmes dynamiques ont une sortie qui dépend des valeurs passées de son entrée. L'évolution des systèmes dynamiques au cours du temps est décrite par un ensemble de lois mathématiques qui peuvent être de natures continues au sens classique d'équations différentielles ou équations aux différences soumis aux éléments décisionnels discrets ou événementiels.

### Variable discrète [5]

Une variable est dite discrète si elle peut prendre ses valeurs dans un ensemble dénombrable de valeurs. Les variables  $V_1 \in \{0, 1\}$ ,  $V_2 \in \{4, 1, 2\}$ ,  $N \in \{B, M, H\}$ , sont des variables d'état discrètes.

### Système discret [5]

Un système à événements discrets est un système dynamique défini par un espace d'états discrets et des évolutions, nommées trajectoires, basées sur une succession des états et des transitions. Les transitions sont étiquetées par des symboles, appelés événements. L'évolution d'un état discret à un autre est régie par l'occurrence d'un ou d'une suite d'événements. Une approche courante pour l'étude de ces systèmes consiste à ignorer la valeur explicite de temps et à s'intéresser uniquement à l'ordre d'occurrence des événements.

En général, les (SED) peuvent être modélisés par des automates à états finis. Les automates à états finis sont décrits par un triplet  $(Q, \Sigma, G)$  où  $Q$  est un ensemble fini dont les éléments  $q$  sont les états ou localités discrets.  $\Sigma$  représente l'ensemble des événements et  $G$  est une fonction de transition. La fonction de transition définit le prochain état discret :

$$q^+ = G(q, \Sigma)$$

où  $q^+$  se rapporte à l'état discret après la transition qui est due à l'occurrence de l'évènement  $\sigma$ .

### Variable continue

Les variables continues prennent leurs valeurs dans l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  (donc non dénombrable) et ses variations ne présentent pas de discontinuités. Par exemple :  $t \in [0, 5]$ .

### Système continu

Les systèmes à temps continu changent d'état continûment lorsque le temps change. Ces systèmes continus sont caractérisés par des équations différentielles qui décrivent comment l'état du système change continuellement au fil du temps. Le système dynamique d'état continu et de temps continu est décrit par un triplet  $(X, U_c, F)$  où l'ensemble  $X \subset \mathbb{R}^n$  est l'espace état,  $U_c \subset \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des commandes continues, et  $F : X \times U_c \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un champ de vecteur décrivant la dynamique du système.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u_c(t), t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec  $x \in X$  étant les variables d'états,  $u_c \in U_c$  les commandes continues.

### 3.2.2 Définition d'un système dynamique hybride

De nombreux systèmes automatisés ne sont pas purement continus ou à événements discrets mais combinent les deux aspects. On parle alors communément de systèmes dynamiques hybrides[12].

Les systèmes dynamiques hybrides (SDH) sont des systèmes qui combinent explicitement des comportements continus et discrets. Ces systèmes sont généralement composés de processus continus, tels que des équations différentielles, qui interagissent avec, ou sont supervisés par des processus discrets, comme des automates finis.

La première formulation unitaire des concepts concernant les systèmes hybrides a été proposée par M.S Branicky . Ses travaux ont permis d'établir une classification de ces systèmes.

### Définition formelle d'un système dynamique hybride [5]

Nous proposons la définition formelle des systèmes dynamiques hybrides suivante :

Soit  $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $q(t) \in Q \subset \mathbb{N}^m$ ,  $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^c$ ,  $v(t) \in V \subset \mathbb{N}^d$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$  où  $n, m, c$ , et  $d$  sont donnés.

L'ensemble  $X$  représente l'ensemble des états continus et  $Q$  représente l'ensemble des états discrets.  $U$  représente l'ensemble des commandes continues et  $V$  représente l'ensemble des commandes discrètes. La variable  $t$  représente le temps.

Soit  $S = X \times Q$  et soit  $P$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^n \times Q$ . On définit l'état hybride  $s(t) \in S$  du système à l'instant  $t$  par la donnée du couple  $[x(t), q(t)]$  et on appelle SDH un système dynamique décrit par les équations suivantes pour  $t \in [t_0, t_f]$  :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x(t), q(t), u(t)), \quad \forall s(t) \in S \cap CP, \\ [x(t+), q(t+)] &= G(x(t), q(t), v(t)) \quad \text{si} \begin{cases} s(t) \in \partial P, \\ v(t) \in V \text{ intervient,} \end{cases} & (3.2) \\ x(t_0) &= x_0, \\ q(t_0) &= q_0. \end{aligned}$$

La fonction  $F$  représente la dynamique continue du système hybride et  $G$  représente la dynamique hybride du système correspondant aux phénomènes hybrides décrits précédemment. L'ensemble  $P$  est celui des zones de déclenchement des phénomènes hybrides et  $\partial P$  est la frontière de  $P$ . La commande discrète  $v(t)$  détermine les instants où la fonction  $G$  intervient (instants de commutation/saut). Elle détermine également le nouveau modèle ou l'amplitude du saut de l'état suivant l'action du phénomène hybride. Les fonctions  $F$  et  $G$  sont supposées suffisamment régulières pour que le système défini par les équations admet une solution unique.

### Phénomène hybride

Nous allons maintenant étudier comment se produisent les interactions entre les deux sous systèmes(continu et discret ) qui forme le (SDH) nous présentons d'abord les actions discrètes qui peuvent intervenir lors de l'évolution d'un système continu décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t), \quad t \geq 0,$$

où  $x(t)$  est la trajectoire d'un état continu du système hybride avec une valeur initiale fixée et arbitraire  $x(t_0) \in X$  et  $\dot{x}(t)$  la vitesse de l'état continu pour le même système hybride.

### Actions des phénomènes hybrides

On note  $\tau$  l'instant où intervient une action discrète dont nous verrons ultérieurement comment elle peut être déclenchée. L'ensemble, action et déclenchement, est appelé phénomène hybride.

- Les phénomènes hybrides agissent sur la dynamique du système continu, modifiant ainsi cette dynamique. Le système hybride se situe alors pour  $t \geq \tau$  dans un autre mode de fonctionnement. On appelle ce phénomène commutation de modèle et  $\tau$  instant de commutation. Un exemple simple de modèle avec deux modes de fonctionnement est le suivant :

$$\dot{x}(t) = f_1(t) \text{ pour } t < \tau.$$

$$\dot{x}(t) = f_2(t) \text{ pour } t \geq \tau.$$

- Les phénomènes hybrides agissent également sur le vecteur d'état du système, le faisant évoluer de manière différente pour  $t = \tau$ . On appelle ce phénomène saut de l'état. Un exemple de modèle est représenté par les équations suivantes :

$$\dot{x}(t) = f(t) \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } t \neq \tau$$

$$x(\tau) = g(\cdot, \tau).$$

Les deux actions peuvent être couplées. En effet, on peut considérer qu'à l'instant  $\tau$ , on a une commutation de modèle et saut du vecteur d'état. Un exemple de modèle est le suivant :

$$\dot{x}(t) = f_1(t) \text{ pour } t \leq \tau,$$

$$x(\tau) = g(\cdot, \tau),$$

$$\dot{x}(t) = f_2(t) \text{ pour } t > \tau.$$

La fonction  $g$  provoque une discontinuité de l'état à l'instant  $\tau$ , puis intervient la deuxième dynamique continue  $f_2$ .

### Déclenchement des phénomènes hybrides

Les phénomènes hybrides peuvent être déclenchés lorsque le vecteur des états continus atteint certaines valeurs (phénomène hybride autonome) Les phénomènes hybrides peuvent également être déclenchés par une commande discrète extérieure. On dit alors que ce phénomène est contrôlé.

### 3.2.3 Classification des Systèmes dynamiques hybrides

Dans cette partie, nous proposons une classification des phénomènes hybrides intervenant dans les (SDH).

- **SDH à commutation autonome** : Une commutation autonome caractérise un phénomène où le champ de vecteur  $f(t)$  change de façon discontinue lorsque l'état  $x(\cdot)$  atteint certains seuils.

**Exemple 3.1** [5]

Afin d'illustrer ce type de systèmes dynamiques hybrides nous présentons l'exemple classique d'un thermostat utilisé pour maintenir la température dans un lieu fermé. Le système étudié est composé d'un système de chauffage et d'un capteur de température. Les seuils inférieur et supérieur du thermostat sont fixés à des valeurs  $\theta_m$  et respectivement  $\theta_M$  tel que  $\theta_m < \theta_M$ .

Le système de chauffage est en marche tant que la température dans la chambre est inférieure au seuil  $\theta_M$ . Le chauffage est arrêté lorsque le capteur détecte le seuil supérieur  $\theta_M$ , et il reste en arrêt jusqu'au moment où la température chute au dessous du seuil inférieur  $\theta_m$ . La température de la chambre et le thermostat peuvent être vue comme un système dynamique dont l'évolution continue est définie par la variation de la température  $x$  dans la chambre et l'évolution discrète par le passage de l'état en marche du système de chauffage dans l'état d'arrêt. L'évolution de la température peut être modéliser par les équations différentielles suivantes.

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(t) = -x(t) + \alpha & \text{si le chauffage est on marche,} \\ f_2(t) = -x(t) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Où  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  est une constante réelle positive. La figure suivante représente le modèle du thermostat et la trajectoire de la température.

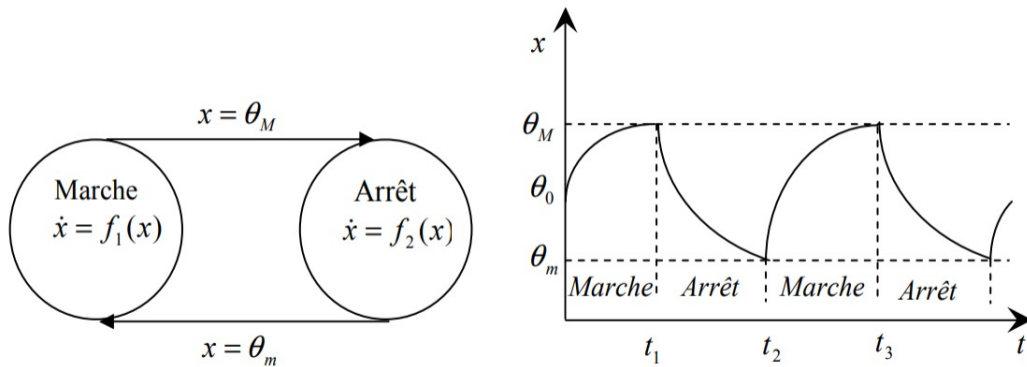


FIGURE 3.1 – Modèle du thermostat et trajectoire de la température.

- **SDH à Saut autonome** : Dans ce cas, lorsque l'état atteint une certaine région de l'espace d'état, il effectue un saut, c'est à dire qu'il passe de façon discontinue de sa valeur courante à une autre. Généralement, dans le cas des systèmes à saut autonome, le système possède un seul mode de fonctionnement et une seule transition autorisant la réinitialisation de la variable continue.

**Exemple 3.2** [9]

Nous illustrons ce type de SDH à travers l'exemple d'une table de billard de longueur  $l$  et de largeur  $h$ , avec une boule.

La position initiale de la boule est  $(x_0, y_0)$  et après avoir été frappée elle commence à se déplacer avec une vitesse  $v$ . Quand la boule arrive à un côté de la table parallèle à l'axe  $y$ , elle rebondit et le signe de la composante de la vitesse  $v_x$  change. De même, le signe de la composante de la vitesse  $v_y$  change lorsque la boule arrive à un côté parallèle à l'axe  $x$ . La combinaison des signes des composantes de la vitesse donne quatre directions différentes du mouvement de la boule. L'automate modélisant le mouvement de la boule est représentée dans la Figure suivante :

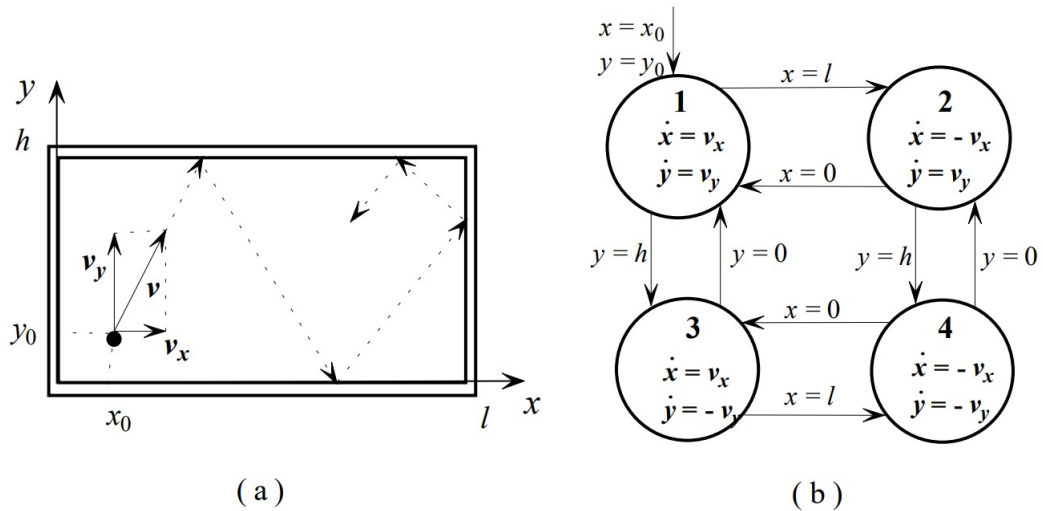


FIGURE 3.2 – (a) Trajectoire d'une boule de billard et (b) Automate associé.

Le vecteur de la vitesse peut avoir quatre états différents  $[v_x, v_y]^T$ ,  $[-v_x, v_y]^T$ ,  $[v_x, -v_y]^T$  et  $[-v_x, -v_y]^T$ .

Chaque état de la vitesse caractérise une dynamique des variables  $x$  et  $y$ , représentée par un sommet de l'automate. Le passage d'une dynamique à une autre est modélisé par les arcs de l'automate et se produit lorsque la boule atteint un côté de la table, c'est-à-dire, quand  $x$  atteint les valeurs 0 ou  $l$  et/ou  $y$  atteint les valeurs 0 ou  $h$ .

• **SDH à Commutation contrôlée :**

Les évènements déclenchés par une commande discrète externe, provoquant un phénomène hybride est dit contrôlé. Une commutation contrôlée traduit un phénomène où le champ de vecteur  $f(t)$  change de façon discontinue et instantanée en réponse à une entrée de commande.

**Exemple 3.3** [13]

Afin d'illustrer ce type de système, nous présentons sur la figure (3.3) un réservoir avec une vanne d'alimentation et une vanne d'évacuation.

$x$  représente le niveau du liquide dans le réservoir et  $u$  est le signal de commande de la vanne d'alimentation  $V_1$  qui peut avoir les valeurs 0 (fermée) ou 1 (ouverte). La vanne d'évacuation  $V_2$  est supposée ouverte. L'équation d'état est alors  $\dot{x} = -ax + bu$ , où  $a$  et  $b$  sont des paramètres réels, positifs liés aux grandeurs physiques du réservoir. Quand le signal  $u$  commute de 1 à 0, la vitesse d'état  $x(t)$  permute de  $-ax(t) + b$  à  $-ax(t)$ , avec un saut négatif d'amplitude.

• **SDH à Saut contrôlé :**

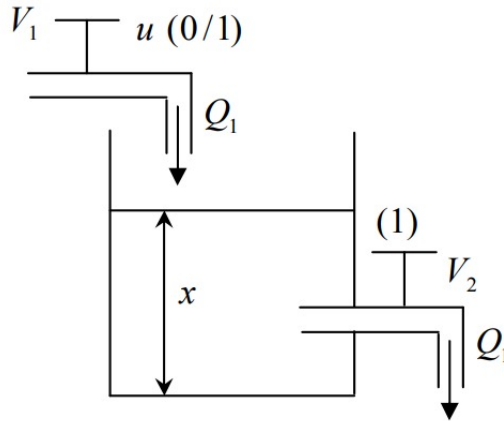


FIGURE 3.3 – Réservoir avec une vanne d'alimentation et vanne d'évacuation

Dans ce cas, la valeur de l'état change de façon discontinue, en réponse à une commande. Ce type de comportement est présent dans les systèmes électrotechniques, avec des entrées de types impulsionnels.

**Exemple 3.4** *Comme exemple de ce type de système dynamique hybride, nous pouvons citer l'exemple d'un montant d'argent dans un compte pendant des opérations de virement ou de retrait. Nous pouvons aussi citer le cas d'un débit lors de l'ouverture et la fermeture d'une vanne dans un procédé physico-chimique sous l'hypothèse que la fermeture et l'ouverture des vannes sont des gestes instantanés.*

### 3.2.4 Modélisation des systèmes dynamiques hybrides

La modélisation des systèmes dynamiques hybrides est une étape importante qui permet l'étude et la mise au point d'une loi de commande. Elle consiste à proposer des modèles précis qui peuvent décrire le comportement riche et complexe des systèmes dynamiques hybrides. De façon générale, un système hybride sera modélisé par un ensemble de systèmes à dynamique continue interagissant avec un ou plusieurs systèmes à dynamiques discrètes. Plusieurs méthodes de modélisation des systèmes dynamiques hybrides ont été proposées dans la littérature : automate hybride, les réseaux de Petri, modélisation par interface et il existe en général trois classes principales des approches de modélisation des systèmes dynamiques hybrides à savoir :

#### a) L'approche continue

Il s'agit d'étudier le comportement des modèles continus en présence des discontinuités, et éventuellement, de définir un modèle "étendu". Cette approche consiste à définir une approximation des dynamiques discrètes du système hybride par des équations différentielles (ou aux différences) pour modéliser l'occurrence des événements discrets.

**b) L'approche événementielle** Avoir une approche purement discrète pour modéliser les systèmes hybrides consiste à supprimer les dynamiques continues ou à faire une approximation de l'évolution continue de façon à ce que le système hybride soit représenté uniquement par les événements qui le caractérisent. Ces modèles sont de type automates à états finis ou réseaux de Petri. La dynamique continue est remplacée par une dynamique discrète à titre d'exemple, les travaux de Puri présentent une méthode permettant d'obtenir

un modèle évènementiel en découpant l'espace d'état continu en plusieurs régions qui sont ensuite associées à un état discret.

**c) L'approche mixte** Cette approche repose sur la supposition que le fonctionnement d'un système dynamique hybride est une séquence de deux phases : une transformation continue de l'état continu suivie d'un changement discret instantané. L'approche conduit à rechercher des modifications dans les modèles discrets adaptées à la modélisation des phénomènes hybrides, en particulier en étudiant l'insertion des variables continues.

- **Modélisation des SDH par les réseaux de Petri hybrides :**

Les réseaux de Petri sont proposés pour la première fois par Petri (1962). Ils ont été très utilisés comme outils de modélisation, analyse et synthèse pour les systèmes à événements discrets. Un réseau de petri hybride (RdP hybride) est composé par des places et des transitions continues (C-places et C-transitions) et des places et transitions discrètes (D-places et D-transitions). Le marquage d'une C-place est représenté par un nombre réel, dont l'unité est appelée marque, et le marquage d'une D-place est représenté par un nombre entier dont l'unité est appelée jeton.

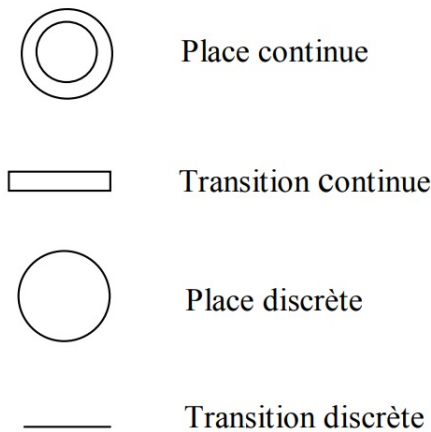


FIGURE 3.4 – Places et transitions d'un RDP hybride

**Exemple 3.5** Le réseau de Petri hybride de la Figure (3.5) modélise un système de fabrication qui produit des pièces par lots de 5. A la fin de la production de 2 lots de 5 pièces, un nouveau cycle de production est entamé. Le marquage de la place  $P_1$  (D-place) est associé au nombre de lots à l'entrée du système de fabrication. Les durées  $d_1$  et  $d_2$  sont les temps de chargement et déchargement des pièces (D-transitions). La transition  $T_2$  modélise une machine dont la vitesse de production est  $V_3$ (C-transition).

Cette machine possède un stock d'entrée et un stock de sortie modélisés par les places  $P_2$  et  $P_3$  (C-places). Le franchissement continu de la transition  $T_2$  correspond à une production continue à la vitesse  $V_3$  quand la place  $P_2$  n'est pas vide. Lorsque  $P_2$  est marquée, le franchissement d'une quantité  $V_3 dt$  de  $T_2$  correspond à retirer  $V_3 dt$  marques à  $P_2$  et à ajouter la même quantité à  $P_3$ .

- **Modélisation des SDH par les systèmes à interface :**

Les auteurs montrent comment un système de commande hybride peut être représenté par l'interaction de deux systèmes à événements discrets comme l'illustre la Figure (3.6), où l'un des systèmes à événements discrets est le

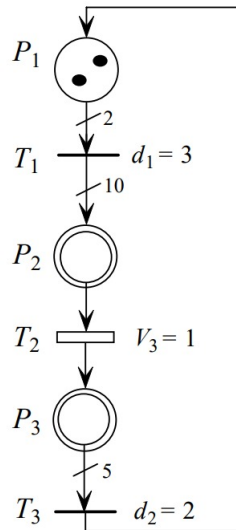


FIGURE 3.5 – Modèle de RdP hybride d'un système de fabrication par lots.

contrôleur et l'autre représente le procédé couplé avec l'interface. L'approche est basée sur le principe de partition de l'espace d'état continu. Cette méthode de modélisation est une représentation purement analytique des systèmes hybrides basée essentiellement sur un ensemble d'équations différentielles ou d'équations aux différences. Les différents modèles interface proposés en littérature sont :

1-Le modèle proposé par Antasklis, est divisé en trois parties. La première contient le système continu, la deuxième contient le SED et la troisième l'interface. Le rôle de l'interface est de générer des événements fournissant à la partie discrète une information provenant de l'évolution continue du système, et respectivement, de transmettre les informations provenant du contrôleur au procédé.

2-Le modèle de Brockett, qui a utilisé d'une manière simultanée les commandes continues et discrètes en introduisant une horloge ou un compteur variable.

3-Le modèle à interface généralisée, qui a une particularité d'inclure toutes les particularités des modèles cités ci-dessus. Ce qui fait que le modèle est capable de décrire l'influence de la partie discrète sur la partie continue et vice versa. Il est constitué d'un système hybride en boucle ouverte contrôlé par un contrôleur hybride, comme le montre la figure (3.7) :

• **Modélisation des SDH par les automates hybrides :**

Les auteurs définissent l'automate hybride comme une extension de l'automate discret en associant une évolution continue à chaque état discret. La composante continue est décrite par un ensemble d'équations différentielles et la composante discrète par un automate à états fini. Un automate hybride est un graphe composé de sommets (ou places) et d'arcs orientés modélisant les transitions discrètes qui relient les sommets.

Tout arc orienté doit avoir un sommet destinataire. Un automate hybride à états finis noté AEF, peut prendre un nombre fini d'états. Il est défini par le schéma suivant :

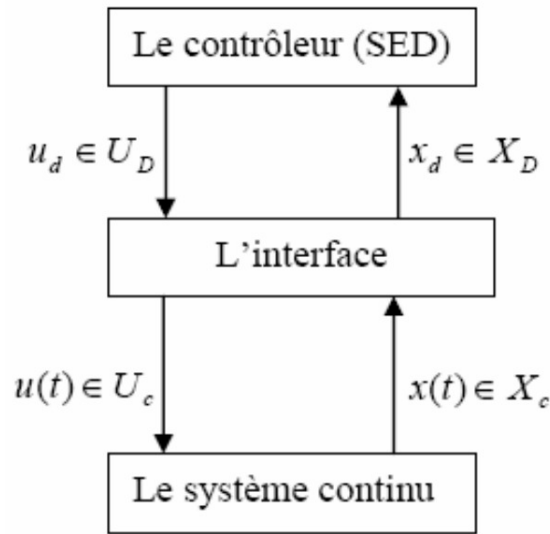


FIGURE 3.6 – Modèle à interface d'Antasklis.

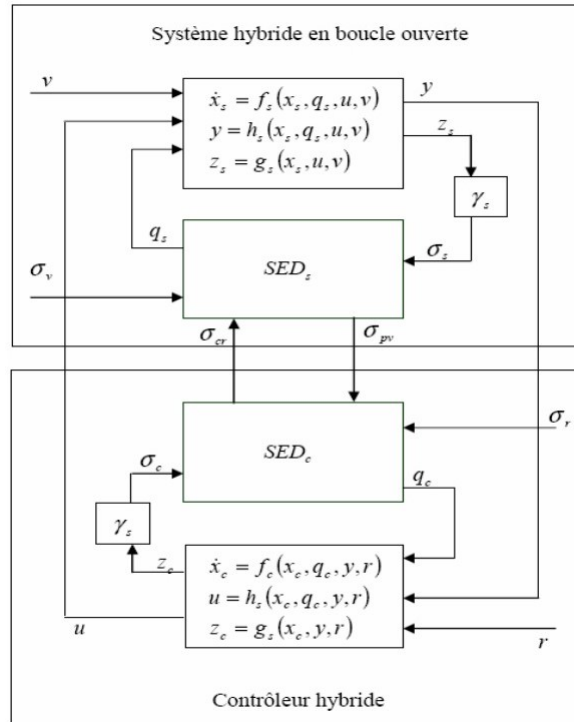


FIGURE 3.7 – Schéma détaillé d'un modèle de système hybride à interface généralisé.

$$AEF = \{Q, \sigma, f, I, F\}.$$

Avec :  $Q = q_0, q_1, \dots, q_n$  : Ensemble fini d'états discrets aux états de fonctionnement de la machine.

$\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m$  : Ensemble de symboles représentant les transitions d'états.

$f$  : est la fonction qui associée à chaque état et à chaque symbole de transition un ensemble d'état, c'est la fonction de transitions d'état.

$$\Gamma : Q \times \sigma \rightarrow Q' \subseteq Q.$$

$$(q, \varrho) \rightarrow Q' \subseteq Q.$$

Avec :  $I \subseteq Q$  est l'ensemble des états initiaux et  $F \subseteq Q$  est l'ensemble des états finaux.

**Exemple 3.6** Considérons l'automate représenté dans la Figure (3.8) modélisant un système hybride.

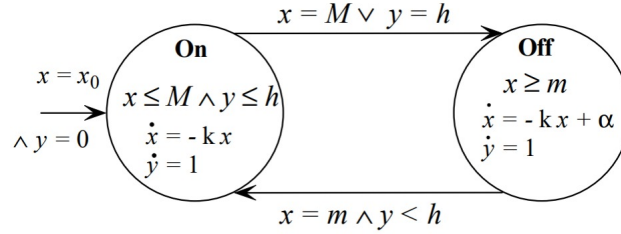


FIGURE 3.8 – Automate hybride

Les sommets *On* et *Off* représentent les états discrets du système où l'évolution continue a lieu. Les prédicats  $(x = M \vee y = h)$  et  $(x = m \wedge y < h)$  sur les arcs traduisent les conditions pour l'occurrence d'un événement. Les prédicats  $(x \leq M \wedge y \leq h)$  et  $x \geq m$  dans les sommets représentent les invariants de l'automate, c'est-à-dire, des conditions imposées aux variables continues du système pour rester dans un état discret (ici les états *On* ou *Off*). L'état initial du système est représenté par un arc d'entrée dans le sommet d'origine. L'étiquette de cet arc  $x = x_0 \wedge y = 0$  représente la région de l'espace continue à partir de laquelle la dynamique du système hybride démarre. La figure (3.8) est une représentation graphique d'un AEF à deux états, tel que :

$$Q = \{on, off\}, \sigma = \{x = M \vee y = h, x = m \wedge y < h\}, f\{off, x = m \wedge y < h\} = \{on\}, f\{on, x = M \vee y = h\} = \{off\}, I = \{x = x_0 \wedge y = 0\}.$$

### 3.2.5 Formulation du problème de commande

D'une manière générale, il est possible de définir un système hybride de la manière suivante : Pour un ensemble fini d'états discrets  $Q = q_1, q_2, \dots, q_{r+1}$ , on associe une famille d'équations différentielles :

$$\dot{x}(t) = f_{q_i}(x(t), u(t), t)$$

Avec :

$q_i \in Q, i = 1, \dots, r + 1$  est l'état continu,  $x(t)$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . La commande continue  $u(t)$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $U$  inclus dans  $\mathbb{R}^m$ . Le champ  $f_{q_i}$  est défini sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, t_f], \forall q_i \in Q$ .

Nous supposons donc de manière très générale qu'un changement d'état discret  $q_i$  est déterminé par la donnée d'une fonction de transition discrète  $\wp$ .

$$q(t^+) = \wp(x(t^-), q(t^-), v(t), t).$$

Où  $v(t) \in \Omega$  représente la commande discrète. La variable discrète  $q(t)$  est une fonction du temps constante par morceaux. Les notations  $t^+$  et  $t^-$  correspondent respectivement aux limites à gauche et à droites de  $t$ . Un ensemble de fonctions de saut  $\Phi(q_i, q_{i+1})$  associées aux transitions d'état discret est également considéré :

$$\Phi(q_i, q_{i+1})(x(t^-), t).$$

Avec l'occurrence d'une transition de  $q_i$  vers  $q_{i+1}$ , où  $i = 1, \dots, r$  l'état continu est réinitialisé de  $x(t^-) \in \mathbb{R}^n$  vers  $x(t^+) \in \mathbb{R}^n$ .

Posons  $[t_0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_r, \tau_{r+1} = T]$  et  $q_i \in Q = q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_{r+1}$  les suites respectivement des instants de commutations et des modes associés à la commande  $(u, v)(t)$  sur l'intervalle  $[t_0, T]$ .

$$J(u, v) = \int_{t_0}^T L_q(t)(x(t), u(t), t) dt = \sum_{i=0}^{\tau} L_{q_i}(x(t), u(t), t) dt.$$

Une commande  $(u, v)(t)$  est alors une commande qui minimise  $J$  sur l'intervalle  $[t_0, T]$ .

### 3.2.6 conclusion

A travers ce chapitre, nous avons essayé de présenter quelques notions générales sur les systèmes dynamiques hybrides. Dans un premier temps nous avons donné quelques définitions élémentaires, par la suite nous avons présenté la définition formelle de ces systèmes. Ainsi une classification de ces systèmes basée sur le mode de fonctionnement. Enfin, nous avons passé en revue les principales approches de modélisation et de commande des systèmes hybrides.

# SYSTÈME DYNAMIQUE HYBRIDE À COMMUTATION AUTONOME

# 4

## 4.1 INTRODUCTION

Nous traitons dans ce dernier chapitre un problème de contrôle optimal de Système Dynamique Hybride à commutation autonome. Nous avons choisi un thermostat, cas simple et classique de (SDH), dont la fonction est de maintenir constante la température d'un local.

Nous modélisons dans un premier temps ce système pour obtenir des équations différentielles. Nous posons ensuite un problème de commande continue : l'optimisation du fonctionnement d'une régulation thermique où un thermostat à résistance anticipatrice est choisi comme régulateur.

Notre but est de maintenir la température la plus proche possible d'une valeur désirée tout en ayant les plus faibles variations possibles de la température autour de cette valeur désirée à fin de minimiser l'énergie.

## 4.2 LE SYSTÈME ÉTUDIÉ

Considérons l'exemple classique d'un thermostat utilisé pour maintenir la température d'une chambre. Le système étudié est composé par un système de chauffage et un capteur de température. Les seuils inférieur et supérieur du thermostat sont fixés à des valeurs respectivement  $x_m$  et  $x_M$ .

Le système de chauffage est en marche tant que la température dans la chambre est inférieure au seuil  $x_M$ . Le chauffage est arrêté lorsque le capteur détecte le seuil supérieur  $x_M$  et il reste en arrêt jusqu'au moment où la température chute au dessous du seuil inférieure  $x_m$ .

La température de la chambre et le thermostat peuvent être vus comme un système dynamique hybride (SDH) dont l'évolution continue est défini par la variation de la température  $x$  dans la chambre et l'évolution discrète par le passage de l'état marche du système de chauffage à l'état d'arrêt.

La figure (4.1) représente un thermostat d'ambiance à action tout ou rien (TOR) équipé d'une résistance anticipatrice  $R$ . Quand la température du local témoin varie, les deux bandes de métal, qui forment le bilame, se dilatent ou se contractent en fonction de la consigne et ceci provoque l'ouverture ou la fermeture de l'interrupteur  $c$ . Pour une température inférieure à la consigne, le bilame se contracte et ferme l'interrupteur  $c$ . Ainsi, la résistance  $R$  est alimentée et commence à chauffer l'environnement du bilame. En même temps un signal, constitué par le courant qui traverse la résistance est envoyé vers l'organe de commande, c'est - à-dire que le brûleur est alimenté en gaz.

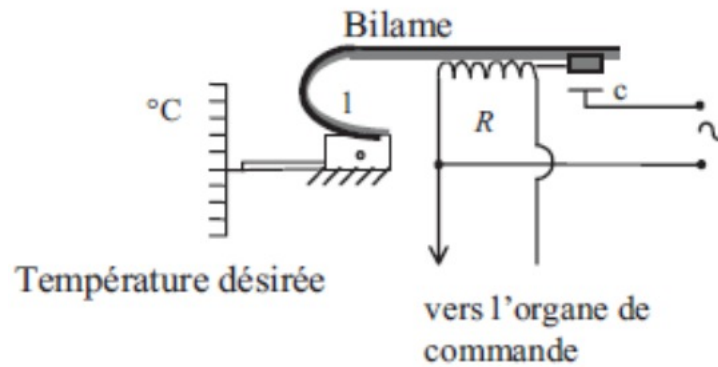


FIGURE 4.1 – Schéma fonctionnel d'un thermostat d'ambiance à action tout-ou-rien équipé d'une résistance anticipatrice R

### 4.3 MODÉLISATION DU SYSTÈME ÉTUDIÉ SOUS FORME D UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL [12]

Considérons que l'évolution de la température en état de marche peut être modélisée par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = k(u(t) - x(t)),$$

et en état d'arrêt :

$$\dot{x} = -kx(t)$$

où :

- $u$  est la quantité de chaleur produite par le chauffage en consommant de l'énergie.
- $k$  est une constante déterminée par le local.
- $x$  est la température dans la chambre .

#### 4.3.1 Position du problème lorsque le chauffage est en état de marche

Avec les équations différentielles définies précédentes pour l'évolution de la température dans le local on a définie le problème de contrôle optimal suivant dans le cas de marche en minimisant une certaine énergie :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \int_0^{t_f} u^2(t)dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} = K(u(t) - x(t)), \\ 0 \leq t \leq t_f, \\ x_m \leq x \leq x_M, \\ u_m \leq u \leq u_M. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Avec :  $f(x, u, t) = k(u(t) - x(t))$  et une fonction de classe  $C^1$ .

- **Résolution du problème lorsque le chauffage est en état marche** Nous considérons le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \int_0^{t_f} u^2(t)dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} = (u(t) - x(t)), \\ 0 \leq t \leq 3, \\ x(0) = 15, \quad x(3) = 25, \\ 5 \leq u \leq 20. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Avec :

$x$  : La température dans le local.

$u$  : La quantité de chaleur produite.

$J(u)$  : L'énergie à minimiser.

on pose  $k=1$

**Changement de fonction** : Nous allons utiliser le changement de fonction suivant :

$$\begin{aligned} u^2(t) &= 2\dot{x}(t) \\ \int_0^{t_f} u^2(t)dt &= \int_0^{t_f} 2\dot{x}(t)dt = 2[x(t_f) - x(0)] \\ &= 2x(t_f) - 2x(0) \end{aligned}$$

Alors, la fonctionnelle, prend la forme  $2x(t_f) \rightarrow$  maximiser. On essaye de maximiser la température finale dans la chambre pour minimiser la consommation de l'énergie .

on définit le nouveau problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\dot{x}(t_f) \rightarrow \max_x, \\ \dot{x} = (u(t) - x(t)), \\ 0 \leq t \leq 3, \\ x(0) = 15, \quad x(3) = 25, \\ 5 \leq u \leq 20. \end{array} \right.$$

**La résolvante** :

$$F(t) = e^{-t}, F(t_f) = e^{-3}, F^{-1}(t) = e^t.$$

$$C(t) = 2e^{-3}e^t = 2e^{t-3}.$$

$$Q = e^{-3}e^t = e^{t-3}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u(t_f)) = c'F(t_f)x_0 + \int_0^{t_f} c(t)u(t)dt, \\ \int_0^{t_f} \varphi(t)u(t)dt = \bar{g}, \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2, t \in T, \end{array} \right.$$

o

$$c(t) = c'F(t_f)F(t)^{-1}B, \quad \varphi(t) = HF(t_f)F(t)^{-1}B \quad \text{et} \quad \bar{g} = g - HF(t_f)x_0.$$

En utilisant cette dernière solution, le problème initial (4.4) prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \int_0^3 2e^{t-3}u(t)dt \rightarrow \max_u, \\ \int_0^3 e^{t-3}u(t)dt = 24, 3 \leq 25, \\ 5 \leq u(t) \leq 20, t \in [0, 3]. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

**Déscritisation**

$$h = \frac{t_f - t_0}{3} = \frac{3-0}{3} = 1.$$

$$t_f = [0, 1] \cup [1, 2] \cup [2, 3].$$

$$c_1 = \int_0^1 2e^{t-3}dt = 2e^{-2}.$$

$$c_2 = \int_1^2 2e^{t-3} dt = 2e^{2-3} - 2e^{1-3} = 0,46.$$

$$c_3 = \int_2^3 2e^{t-3} dt = 2 - e^{-1} = 1,27.$$

$$X_1 = 0,13.$$

$$X_2 = 0,24.$$

$$X_3 = 0,63.$$

En utilisant les dernières quantités, le problème (4.6) devient un problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} J(u) = 0,27u_1 + 0,46u_2 + 1,27u_3. \\ 0,13u_1 + 0,24u_2 + 0,63u_3 = 25. \\ 5 \leq u_j \leq 20. \end{cases} \quad (4.4)$$

$$Q=[0,13 \quad 0,24 \quad 0,63]$$

Détermination d'un support-plan de départ Choisissons le plan initial non dégénère qui vérifié la condition  $u_m \leq u \leq u_M$ .  $u = (10, 10, 10)$  et le support initiale  $J_B = 2$ .

Calculons la quantité  $Qu = 10 \neq 25$ , alors la solution initiale n'est pas admissible On ajoute des variables d'écarts.

On pose  $u = (10, 10, 10, 15)$  et  $J_B = \{2\}$  solution de départ dégénérée.

#### Vecteur des potentiels

$$y' = 0,46 \times \frac{1}{0,24} = \frac{46}{24}.$$

#### Vecteur des estimations (sur $J_H$ ) :

$$E_1 = \frac{46}{24} \times 0,13 - 0,27 = -0,021.$$

$$E_2 = \frac{46}{24} \times 0,63 - 1,27 = -0,062.$$

$$E_3 = \frac{46}{24} \times 1 + 1000 = 1001,9.$$

$$\text{Sur } J_B : E_2 = 0$$

$$\beta(u, J_B) = 1001,9(15 - 5) - 0,21(10 - 20) - 0,62(10 - 20) = 10021,72 > \varepsilon.$$

Donc la solution n'est pas optimale.

#### Changement du plan

Sur  $J_H$  :

$$l_1 = 20 - 10 = 10.$$

$$l_3 = 20 - 10 = 10.$$

$$l_4 = 5 - 15 = -10.$$

Sur  $J_B$  :

$$l_2 = \frac{-1}{0,24} (0,13 \quad 0,63 \quad 1) \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$l_2 = 10.$$

$$\theta_2 = \frac{20-10}{10} = 1.$$

$$\theta_{j_0} = \min \theta_j = \theta_2.$$

$$\theta_0 = \min(1, 1) = 1.$$

$$\bar{x} = (10 \quad 10 \quad 10 \quad 15) + \mathbf{1} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Donc, on a :

$$\bar{u} = (20, 20, 20, 5).$$

$$\beta(\bar{u}, J_B) = (1 - 1)\beta(x, J_B) = 0$$

donc le plan optimale  $u=(20,20,20)$ .

**Procédure finale**

Le support  $\tau_B = 2$  permet de calculer  $(\phi_B)_2 = \varphi(\tau_2) = e^{(2-3)} = 0,368\phi_B^{-1} = 2,72, C_B = 0,736$  et de construire  $y' = 0,736 \times 2,72 = 2,002$  ainsi  $\psi(t) = (2 - 2,002 \times 1)e^{-3}e^t, \psi(t) = 0,002e^{-3+t}, \Delta(t) = -0,002e^{-3+t}$ .

Construisons la quasi commande  $\omega(t), t \in T$  : on a :  $\Delta(t) < 0$  donc  $\omega(t) = 20$ .

Calculons  $\chi(t_f)$  la trajectoire correspondante à  $\omega(t)$  :

$$\chi(3) = e^{-3}15 + \int_{\tau_j}^{\tau^j} \sum_{j=0}^N F(3)F(s)^{-1}Bu(s)ds,$$

sachant que  $u(s) = u(\tau_B) = 20, F(3) = e^{-3}, B = 1$  :

$$\chi(3) = e^{-3}15 + 20e^{-3} \int_j^{\tau^j} \sum_{j=0}^N F(s)^{-1}ds,$$

$$\chi(3) = 25,$$

$$H\chi(3) = 25 = g,$$

alors le contrôle  $\omega(t) = 20$  est optimal pour le problème

**Interprétation des résultat :**

D'après le résultat obtenu on constate que  $x(t)$  est maximale ( $x(t_f) = 25$  degrés) lorsque le chauffage dégage une quantité de chaleur maximale ( $u(t) = 20$ ) en consommant une énergie minimale ( $J(u(t)) = 2666,6$ )

Reste a valider cette démarche avec les spécialiste du domaine énergétique

**Résolution du problème lorsque le chauffage est en arrêt**

Si le le chauffage est éteint donc y a pas de quantité de chaleur produite, c'est à dire que  $u(t) = 0$ .

d'où  $x(t) = \lambda e^{-t}$

on a  $x(0) = 15$  alors :  $\lambda = 15$

$$x(t) = 15e^{-t}$$

**4.3.2 Conclusion**

Ce chapitre se concentre sur la résolution d'un système dynamique hybride à commutation autonome particulier , tel qu'un thermostat. Nous commençons par appliquer le principe du maximum de Pontryagin (PMP), qui fournit des conditions nécessaires pour l'optimalité et conduit souvent à une solution optimale rapidement. Ensuite, nous utilisons la méthode adaptée, qui vise à trouver des solutions  $\epsilon$ -optimales. Cependant, cette méthode peut nécessiter plus de temps et de précision en raison des ajustements et itérations nécessaires pour affiner la solution.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire a été d'étendre la méthode de R. Gabasov et F. M. Kirillova à la résolution des problèmes de contrôle optimal des systèmes dynamiques hybrides. Nous avons considéré la classe de système dynamique à commutation autonome, car une grande partie des processus réels peut être représentée par des modèles issus de cette classe.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous avons d'abord présenté des rappels sur l'algèbre linéaire et les systèmes dynamiques, avant de passer aux généralités sur le contrôle optimal.

Dans le deuxième chapitre un problème classique de la programmation linéaire, a été résolu par la méthode adaptée ou dite du support. Nous avons adapté cette méthode, à la résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire qui a été transformé, Par la suite, en un problème de programmation linéaire.

Dans le chapitre 3, nous avons présenté une définition et une classification des systèmes dynamiques hybrides suivant les caractéristiques des phénomènes hybrides, ainsi que les outils de modélisation.

Dans le dernier chapitre, nous avons considéré un problème de contrôle optimal d'un système dynamique hybride à commutation autonome. Nous avons ainsi, modélisé le problème d'un thermostat dont le but est de maintenir la température ambiante dans un local à une certaine température désirée en minimisant l'énergie consommée par le chauffage. Pour la résolution de notre problème nous avons effectué un changement de fonction afin de pouvoir utiliser les différentes étapes de la méthode adaptée.

=====

## Résumé

Dans le cadre de ce travail nous avons fait une synthèse bibliographique en s'intéressant à la résolution du problème de contrôle optimale d'un système dynamique hybride à commutation autonome. Notre but est de pouvoir résoudre un exemple de problème dynamique hybride à savoir un thermostat par deux méthodes différentes, le principe du maximum de Pontryagin et la méthode adaptée

## Mots clés

Contrôle optimal, Commutation, Systèmes Dynamiques Hybrides, thermostat, Saut, Méthode Adaptée, automate hybride.

## Abstract

In this paper, we are interested in solving the optimal control problem in a hybrid dynamic system. Our objective is to solve a hybrid dynamic problem, namely a thermostat using two different methods : the Pontryagin Maximum Principle and the adaptive method.

## Keywords

Optimal Control, Switching, Dynamic Hybrid Systems, thermostat, Jump, Adaptive Methode, Hybrid PLC

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. Achemine, A. Merakeb *cours de contrôle optimal : aspects théoriques et numériques*, faculté des sciences département de mathématique, 2013/2014.
- [2] M.Aiden, A.Nait Abdesselam. , *Control With Constraints of a Class of Hybrid Systems Based on Adaptive Method of Linear Programming*.
- [3] M.Aiden K.louadj, *adaptive méthode of solving optimal control problem*, 2012.
- [4] A.Boukhama, *Modélisation d'un système dynamique hybride par stateflow*.
- [5] Benoit Cebron, *commande de systèmes dynamique hybrides*.
- [6] R. Gabasov, *Adaptive method of solving linear programming problem*, series of University of Karlsruhe, Institut of statistics and mathematics , 1997
- [7] G. Khadidja , M. Nour El Houda, *Application de la Méthode adaptée au problème de programmation linéaire avec des contraintes bornées*, 2017.
- [8] T.A.Hedfi *Surveillance par observateurs des systèmes dynamique hybrides*.
- [9] M.KUROVSZKY, *Étude Des systèmes Dynamiques Hybrides Par Représentation D'État Discret et Automate Hybride*, 2002.
- [10] K.khaldi, *Contrôle optimal des systèmes dynamiques*, 2020.
- [11] M.M.Lee and L.Maarkus, *Foundations of optimal control Theory*, Wiley, New York, 1967.
- [12] A.MADJOUR , H.SAHNOUN , *Minimisation d'une énergie dans un problème de contrôle optimal à système dynamique hybride Application : Thermostat* , 2017/2018.
- [13] A.Nait abdesselam, *Résolution d'un problème de contrôle optimal des systèmes dynamiques hybrides*.
- [14] O.Oukacha, *Méthode directe d'optimisation de problèmes de contrôle*, 2017.
- [15] E.Trelat, *Direct Method Of Solving Optimal Control Problems*, 2014.
- [16] E.Trelat, *contrôle optimal théorie et application université paris sud Laboratoires-EDP Mathématique*, 2005.
- [17] E.Trelat, *Notes de cours Master de Mathématique*, université d'Orléans, 2007/2008.