

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

En vue d'obtention de diplôme en Master 2

SPÉCIALITÉ : Recherche opérationnelle

OPTION : Méthodes et modèles de décision

Présenté par :

M^{elle} **Djeddar Ghania**

Sujet :

**Optimisation globale d'un problème de
contrôle optimal déterministe non linéaire**

Devant le jury d'examen composé de :

M. Mohammed Aidene ;	professeur ;	U.M.M.T.O ;	Président
M. Abdelkader Merakeb ;	M. de Conférences ;	U.M.M.T.O ;	Rapporteur
M. Brahim Oukacha ;	M. de Conférences, HDR ;	U.M.M.T.O ;	Examinateur
M.Nacima Moussouni ;	Maître assistant A ;	U.M.M.T.O ;	Examinatrice

Soutenu le : 17/10/2011

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements aux personnes qui m'ont aidé et soutenu durant l'accomplissement de ce travail.

Par sa présence toujours ponctuelle, par ses critiques sensées, ses précieux conseils et sa gentillesse, je dois dire un grand merci à mon encadreur Mr Merakeb, qui m'a appris beaucoup plus que des mathématiques...Merci.

J'exprime tous mes sincères remerciements au président du jury aux membres du jury, qui m'ont fait l'honneur d'étudier et de juger ce travail.

A ma tante, j'adresse l'expression de ma profonde et sincère gratitude pour son dévouement, son intervention, son aide et pour son soutien, qui m'ont été d'un grand secours surtout dans les moments où j'ai eu le plus besoin.

Je remercie mes amies, je leur souhaitent de ma part la réussite à tous ce qu'elles entreprennent, merci pour leurs aides.

A l'honneur de mes chers parents qui ont été toujours à mes côtés.

A toutes ces personnes, merci, merci vivement.

Table des matières

Introduction générale	2
1 Généralités sur le contrôle optimal	4
1.1 Système et système de commande	4
1.2 Formulation d'un problème du contrôle optimal	5
1.3 Définitions essentielles	6
1.4 Différents types de systèmes de contrôle	10
1.4.1 Systèmes de contrôle linéaires	10
1.4.2 Approximation linéaire d'un système de contrôle non linéaire	10
1.5 Existence d'une trajectoire optimale	11
1.5.1 Pour un système général	11
1.5.2 Pour un système affine	11
1.6 Contrôlabilité	12
1.6.1 Critère de contrôlabilité de Kalman (pour un problème du contrôle linéaire)	12
1.6.2 Contrôlabilité locale d'un système non linéaire	12
1.7 Stabilité	13
1.7.1 Stabilité des systèmes linéaires	14
1.7.2 Stabilisation locale d'un système non linéaire	14
1.8 Conditions d'optimalité	15
1.8.1 Fonction hamiltonienne	15
1.8.2 Principe du Maximum de Pontryagin (PMP)	15
1.8.3 Condition de transversalité	16
2 Méthodes de résolution et d'approximation	17
2.1 Aperçue sur les équations différentielles (ED)	17
2.1.1 Equations aux dérivées partielles (EDPs)	17

2.1.2	Equations différentielles ordinaires (EDOs)	19
2.2	Méthode des différences finies	20
2.2.1	Approximation des opérateurs par la formule de Taylor	21
2.2.2	Maillage	22
2.2.3	Convergence du schéma numérique	22
2.3	Méthode d'Euler	23
2.3.1	Méthode d'Euler explicite	24
2.3.2	Méthode d'Euler implicite	25
2.3.3	Méthode d'Euler semi-implicite	25
2.4	Méthodes de Runge-Kutta (RK)	26
2.4.1	Méthode RK2	26
2.4.2	Méthode RK4	27
2.5	Méthode de bisection	28
2.5.1	Principe de la méthode	29
3	Contrôle optimal non linéaire : approche de résolution	31
3.1	Formulation du problème	32
3.1.1	Approche d'optimisation	33
3.1.2	Détermination de la valeur du sous estimateur	35
3.2	Exemple illustratif	36
3.2.1	La partie dynamique	36
3.2.2	La partie algébrique	41
	Conclusion	45
	Bibliographie	46

Introduction générale

L'optimisation est une branche mathématique qui cherche à analyser et à résoudre les problèmes qui consistent à déterminer le meilleur élément d'un ensemble, au sens d'un critère donné.

Les systèmes dynamiques étant représentés par un modèle mathématique décrivant son état et son contrôle à l'aide de variables. Le problème consiste à trouver des solutions qui satisfont un certain objectif quantitatif, tout en respectant d'éventuelles contraintes.

La modélisation d'un phénomène, est une démarche visant à représenter par un moyen adéquat le plus fidèlement possible, le comportement de ce phénomène. Dans les sciences, la modélisation permet de comprendre les variables qui agissent sur ce comportement, afin de simuler des situations à venir.

La théorie du contrôle est l'un des domaines le plus en vue dans le champ d'application des mathématiques. Récemment, certaines questions concernant cette discipline ont trouvé des solutions géométriques remarquables.

La théorie moderne du contrôle optimal a commencé dans les années cinquante, avec la formulation du Principe du Maximum de Pontryagin. Les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien, ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches : systèmes de freinage, assistance à la conduite, servomoteurs, thermostats, contrôle des flux aériens, boursiers, filtrage et reconstruction d'images. Les applications concernent tous système sur lequel on peut avoir une action avec une notion de rendement optimal.

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques.

Les équations aux dérivées partielles sont omniprésentes dans toutes les sciences, puis-

qu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation ou de l'électromagnétisme (équations de Maxwell).

Certains problèmes de contrôle optimal, comportant des équations aux dérivées partielles, ont été résolus analytiquement ; mais pour d'autres, ces solutions analytiques n'existent pas, ainsi des méthodes numériques sont exploitées.

Du fait de la complexité de la géométrie, et de la variation dans le temps ou dans l'espace des conditions aux limites, ces problèmes ne peuvent en générale pas être résolus de façon exacte ; ils sont résolus de manière approchée, à l'aide des méthodes numériques.

Résoudre numériquement une équation différentielle (problème de contrôle optimal) consiste à approximer, le plus précisément possible, la solution en un certain nombre de points.

L'idée maîtresse sur laquelle repose ces méthodes est qu'on tente de déterminer les mécanismes qui assurent que la solution approchée tend vers la solution exacte du problème traité.

Dans cette étude, on propose une approche d'optimisation globale d'un problème de contrôle optimal non linéaire déterministe, qui traite le problème en deux parties ; un exemple illustratif montre l'efficacité de cette approche et résume les étapes de cette méthode, citée au dernier chapitre.

Dans le but de résoudre un problème de contrôle optimal, on énumère, au deuxième chapitre, quelques méthodes numériques de résolution des équations différentielles les plus connues et les plus utilisées, telles que les méthodes d'Euler, les méthodes de Runge Kutta, tout en faisant un rappel sur les équations différentielles et leurs classification. Une méthode pour trouver un zéro d'une fonction a été mentionnée à la fin de ce chapitre.

Avant d'entamer le travail et de citer ces méthodes, on a donné au chapitre 1 quelques généralités sur la théorie du contrôle optimale.

Chapitre 1

Généralités sur le contrôle optimal

Les problèmes de contrôle optimal apparaissent plus généralement dans la formulation ou la modélisation des problèmes de la mécanique, de la chimie, de la robotique, de l'automatique,...etc.

En mathématique, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la deuxième guerre mondiale pour répondre à des besoins pratique de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol pour optimiser les trajectoires d'un avion.

Le début de la théorie du contrôle optimal remonte aux contributions dans le domaine du calcul des variations *John Bernoulli* (1667 – 1748), *Isaac Newton* (1642 – 1727), *Leonhard Euler* (1707 – 1793), *William Hamilton* (1805 – 1861).

Dans le 20^{ème} siècle, on cite le développement du principe du maximum de Pontryagin par *Lev Semenovich Pontryagin* (1908 – 1988) et la formulation du régulateur linéaire quadratique et le filtre de Kalman par *Rudolf Kalman*(1960).

Les points forts de la théorie ont été la découverte de la méthode de la programmation dynamique. Plus tard, sont apparues les fondements de la théorie du contrôle stochastique et de la théorie des jeux.

1.1 Système et système de commande

Définition 1.1. (*système*)

Un système est un assemblage de constituants branchés ou reliés de telle façon qu'ils forment une entité individualisée et/ou agissant comme telle.

Définition 1.2. (*Contrôle*)

Une commande (contrôle) est une force extérieure exercée sur un système, pour atteindre

un but précis, en respectant certaines conditions.

Définition 1.3. (*Système de commande*)

Un système de commande est un système dynamique qui peut se commander (se diriger, se régler), ou bien commander (diriger ou régler) un autre système au moyen d'une commande (contrôle).

1.2 Formulation d'un problème du contrôle optimal

Un problème de contrôle comporte trois (3) éléments :

(1) Une fonction objectif (coût) J donnée :

$$J(u(t)) = C(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \rightarrow opt \quad (1.1)$$

(cas continu, à temps continu)

$$J(u(t)) = C(x(t_f)) + \sum_{t \in T} g(x(t), u(t), t) \rightarrow opt$$

(cas discret, à un instant)

(2) Une contrainte qui prend la forme d'une équation différentielle du 1^{er} ordre décrivant l'évolution de la variable d'état :

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t} = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_f] \quad (1.2)$$

(cas continu, à temps continu)

$$x(t_{i+1}) = f(x(t_i), u(t_i), t_i), \quad t_i, t_{i+1} \in T \quad (1.3)$$

(cas discret, à un instant)

(3) Des conditions spécifiant les valeurs limites des trajectoires des variables d'état :

$$x(t_0) = x_0 \in M_0 \quad x(t_f) = x_f \in M_1 \quad (1.4)$$

t : l'indice du temps ;

t_0 : le temps initial ;

t_f : le temps final ;

$\mathbf{x}(t)$: le vecteur des variables d'état ;

$\mathbf{x}(t_0)$: les valeurs initiales ;

$\mathbf{x}(t_f)$: Les valeurs finales ;

$\mathbf{u}(t)$: le vecteur des variables de contrôle. Nous supposons que chaque composante de ce vecteur est une fonction continue par partie du temps t , mesurable et bornée ;

\mathbf{U} : l'ensemble des contrôles admissibles ;

\mathbf{C} : une application de classe $C^{(1)}$ par rapport à x et aussi est une fonction algébrique scalaire appelée *le dividende terminal* ;

\mathbf{g} : la fonction coût intermédiaire ;

\mathbf{M} : variété différentielle (\mathbb{R}^n) ;

n et m sont les cardinalités des vecteurs d'état et de contrôle respectivement ;

\mathbf{f} : une fonction suffisamment régulière (dérivable).

Dans tous qui se suit on note :

$$x = x(t), u = u(t)$$

$$x_0 = x(t_0), x_f = x(t_f)$$

Le problème général du contrôle optimal est de la forme :

$$J(u) = C(x_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t) dt \rightarrow opt$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ x(t_0) = x_0 \in M_0 \\ x(t_f) = x_f \in M_1 \end{cases} \quad (1.5)$$

M_0 et M_1 sont des variétés différentielles.

L'objectif de résolution d'un problème du contrôle est de trouver une solution optimale (contrôle optimal) où de stabiliser le système (problème de stabilisation) pour le rendre insensible à certaines perturbations.

1.3 Définitions essentielles

Définition 1.4. (*Signal d'entrée*)

On appelle signal d'entrée le stimulus appliqué au système de commande au moyen d'un contrôle afin d'y provoquer une réponse spécifique.

Définition 1.5. (*Signale de sortie*)

On appelle signal de sortie la réponse effective obtenue à partir d'un système de commande. Parfois elle coïncide avec la réponse du signal d'entrée.

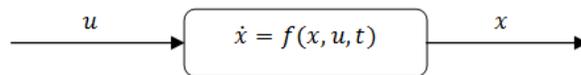
Les systèmes de commande entrent dans deux catégories générales, selon la nature du signal d'entrée et la formulation du signal de sortie :

Définition 1.6. (*Système en boucle ouverte*)

Un système en boucle ouverte est un système où le signal de commande (le contrôle) est indépendant du signal de sortie. Dans les systèmes de ce type, le contrôle est une application

$$t \mapsto u(t)$$

d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles présenté dans le diagramme suivant :

**Définition 1.7.** (*Système en boucle fermée*)

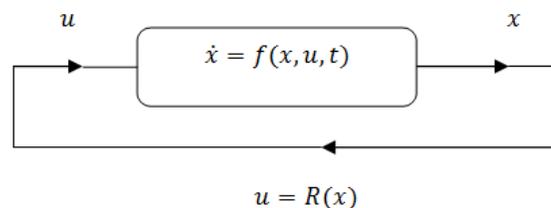
Un système en boucle fermée est un système où le signal de commande (le contrôle) dépend d'une façon ou d'une autre du signal de sortie.

Ces contrôles sont appelés *rétroaction* ou *bouclage (feed back)* ; ce sont des applications

$$u \mapsto R(x(t))$$

définies sur les variables d'état du système.

Le système en boucle fermée est donné par :

**Définition 1.8.** (*Ensemble accessible*)

Un état x_f du système (1.5) est dit accessible depuis x_0 , lorsqu'on est capable de l'atteindre

en temps fini, c.à.d qu'il existe un contrôle $u(t) \in U$ déterminant une trajectoire contrôlée x_u et un instant $t \in [t_0, t_f]$ tels que :

$$\begin{cases} x_u(t_0) = x_0 ; \\ x_u(t) = x_f = x(t_f). \end{cases}$$

La réunion sur tous l'intervalle du temps $t \in [t_0, t_f]$ des états accessibles depuis x_0 constitue l'ensemble accessible, notée $A_{x_0}(t_f)$, et le système est dit :

1. Complètement contrôlable en x_0 si $A_{x_0}(t_f) = M$;
2. localement contrôlable en x_0 si $A_{x_0}(t_f)$ est un voisinage de x_0 pour tout $t_f > 0$.

Remarque 1.1. Dans le cas des systèmes affines (constitués par une ou plusieurs fonctions affines ¹⁾, la dynamique s'écrit :

$$\dot{x}(t) = F_0(x) + \sum_{k=1}^m u_k F_k(x)$$

On pose $F_u(x) = f(x, u, t)$; si le domaine de contrôle U est un compact alors, l'ensemble accessible est un compact convexe et varie continûment avec le temps.

Définition 1.9. (Contrôle admissible)

On désigne par U un ensemble convexe fermé de \mathbb{R}^m , un contrôle u est dit admissible si $u(t) \in U, t_0 \leq t \leq t_f$

Définition 1.10. (Contrôle réalisable)

Un contrôle est dit réalisable s'il est admissible et que la réponse x satisfait aux conditions terminales.

Définition 1.11. (Contrôle optimal)

Un contrôle u est dit optimal si la trajectoire associée à u vérifiée :

$$x_f \in frA_{x_0}(t_f)$$

frA : est la frontière de l'ensemble accessible A .

Définition 1.12. (Dynamique d'un système de contrôle)

La dynamique d'un système de contrôle définit les transformations possibles du système, survenant dans le temps d'une manière déterministe ou aléatoire.

¹Une fonction affine est une fonction obtenue par addition et multiplication des variables par des constantes. Les fonctions constantes et linéaires sont des exemples des fonctions affines.

Définition 1.13. (*Système dynamique contrôlé*)

Un système dynamique contrôlé est un processus d'évolution déterminé par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$f : M \times U \longrightarrow M ;$$

Définition 1.14. (*Système autonome*)

Un système est dit autonome si la dynamique du système ne dépend pas explicitement du temps (i.e : $\dot{x} = f(x, u)$)

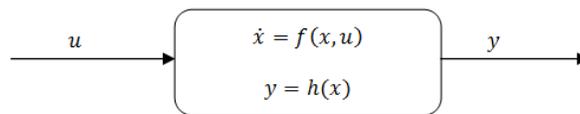
Définition 1.15. (*Système commandé-observé*)

Un système commandé-observé est un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Le vecteur y est le vecteur des variables observées (sorties).

Ce système est dit en boucle ouverte est représenté par :



Définition 1.16. (*Système augmenté*)

Le système augmenté du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f \end{cases}$$

en optimisant une fonctionnelle :

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_f} f^*(x, u, t) dt$$

est donné comme suit

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ \dot{x}^* = f^*(x, u, t) \end{cases}$$

en posant

$$\tilde{x} = (x, x^*) \text{ et } \tilde{f} = (f, f^*)$$

$$\tilde{x}_0 = (x_0, 0) \text{ et } \tilde{x}_f = (x_f, x_f^*)$$

on obtient la dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u, t) \\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0, \quad \tilde{x}(t_f) = \tilde{x}_f \end{cases}$$

1.4 Différents types de systèmes de contrôle

1.4.1 Systèmes de contrôle linéaires

Le système d'équation donné par (1.5) est un système linéaire s'il est de la forme suivante :

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \quad (1.6)$$

$A(n \times n)$: la matrice d'état ;

$B(n \times m)$: la matrice du contrôle.

Les solutions de (1.6) sont données par :

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_{t_0}^{t_f} M(t)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds$$

$M(\cdot)$ est la résolvante du système homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ définie par $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$, $M(0) = Id$.

1.4.2 Approximation linéaire d'un système de contrôle non linéaire

On appelle un système de contrôle non linéaire, tout système différentiel de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u, t), x \in M, u \in U. \quad (1.7)$$

f non linéaire. Le système (1.6) s'obtient par linéarisation du système non linéaire (1.7) à l'équilibre (x_e, u_e) pour que $f(x_e, u_e) = 0$.

Si on pose

$$X = x - x_e, \quad V = u - u_e;$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e).$$

on obtient l'équation :

$$\dot{x} = AX + BV + O(X, V) \quad (1.8)$$

Le système commandé donné par (1.8) s'appelle alors, *l'approximation linéaire* (ou *le linéarisé tangent*) du système non linéaire (1.7).

1.5 Existence d'une trajectoire optimale

1.5.1 Pour un système général

Considérons le système de contrôle :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ x_0(t_0) = x_0 \end{cases}$$

f est C^1 de \mathbb{R}^{n+m+1} dans \mathbb{R}^n , les contrôles u sont à valeurs dans un compact $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, et on a des contraintes sur l'état $c_1(x) \leq 0, \dots, c_r \leq 0$ où c_1, \dots, c_r sont des fonctions continues sur \mathbb{R}^n . Soient M_0 et M_1 deux compacts de \mathbb{R}^n tels que M_1 est accessible depuis M_0 . Soit U l'ensemble des contrôles à valeurs dans Ω joignant M_0 à M_1 . Soient f_0 une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^{n+m+1} et g une fonction continue sur \mathbb{R}^n .

On considère le coût :

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt + g(x, u, t)$$

où $t_f \geq 0$ est tel que $x(t_f) \in M_1$.

On suppose que :

- * il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée à un contrôle u est uniformément bornée par b sur $[t_0, t_f]$, i.e :

$$\exists b > 0 \text{ tel que } \forall u \in U, \forall t \in [t_0, t_f], \|x_f(t)\| \leq b;$$

- * pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, l'ensemble des vecteurs vitesse augmenté

$$\tilde{V}(t, x) = \{(f_0(x, u, t), f(x, u, t)) \text{ tel que } u \in \Omega\}$$

est convexe.

Alors, il existe un contrôle optimal u sur $[t_0, t_f]$ tel que la trajectoire associée joint x_0 à x_f en temps t_f est en coût minimal.

1.5.2 Pour un système affine

Considérons le système affine dans \mathbb{R}^n :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_f) = x_f \end{cases}$$

avec le coût

$$J_{t_f}(u) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m u_i^2(t) dt$$

où : $t_f > 0$ est fixé et U est le sous-ensemble de $L^2([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ tel que :

- 1/ $\forall u \in U$, x_f est bien définie sur $[t_0, t_f]$;
- 2/ $\exists B_{t_f} > 0$, tel que $\forall u \in U, \forall t \in [t_0, t_f], \|x_f(t)\| \leq B_{t_f}$.

Si x_f est accessible depuis x_0 en temps t_f , alors il existe un contrôle reliant x_0 à x_f .

1.6 Contrôlabilité

Un système de contrôle est dit *contrôlable*, si on peut l'amener (en temps fini) d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit.

1.6.1 Critère de contrôlabilité de Kalman (pour un problème du contrôle linéaire)

Considérons le système différentiel de contrôle (1.6). Ce système est dit *contrôlable* en temps t_f , si pour tous points x_0 et x_f de M , il existe une fonction u telle que la solution x du système (1.6) associée à ce contrôle u et vérifiant les conditions $x(t_0) = x_0$ et $x(t_f) = x_f$. Le critère de Kalman est le suivant :

Théorème 1.1. [1] *On suppose que $U = \mathbb{R}^n$. Le système (1.6) est contrôlable (en temps t_f quelconque), si et seulement si le rang de la matrice $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ (à n lignes et nm colonnes) est égal à n .*

Le critère de Kalman est une condition nécessaire est suffisante pour qu'un système linéaire soit contrôlable.

Dans le cas où le contrôle u est contraint ($U \subset \mathbb{R}^m$), les propriétés de contrôlabilité sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice A (la matrice A est stable c'est toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles strictement négatives).

1.6.2 Contrôlabilité locale d'un système non linéaire

On dit que le système (1.7) est localement contrôlable au point x_0 , s'il existe un voisinage V de x_0 , tel que pour tout $x_f \in V$, il existe t_f (fini) et un contrôle admissible u tel que $x_f = x(t_f)$.

On ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité globale pour un système non linéaire, mais on a une condition suffisante de contrôlabilité locale, qu'on peut l'obtenir par linéarisation.

Théorème 1.2. [9] *Supposons qu'il existe $x_0 \in M$ tel que U_{voi} soit un voisinage de u_0 et $f(x_0, u_0) = 0$.*

Soient :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$$

Si le rang de la matrice $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est égal à n , alors le système non linéaire (1.7) est localement contrôlable en x_0 .

1.7 Stabilité

Soit le système :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.9}$$

tel que $f(0) = 0$, admettant $x_e = 0$ comme équilibre (i.e :par un changement de variable, on peut toujours ramener l'équilibre à l'origine).

Définition 1.17. (*Système stable*)

Un équilibre $x_e = 0$ du système (1.7) est dit stable, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour toute solution $x_s(t)$ du système on a :

$$\|x_s(0)\| < \eta \implies \forall t \geq 0, \|x_s(t)\| < \varepsilon$$

$\|\cdot\|$: désigne la norme usuelle.

Définition 1.18. (*Système attractif*)

L'équilibre du système (1.7) est dit attractif si $\exists r > 0$, tel que pour toute solution $x_s(t)$ du système on a :

$$\|x_s(0)\| < r \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Définition 1.19. (*Système asymptotiquement stable*)

L'équilibre $x_e = 0$ du système (1.7) est dit asymptotiquement stable, s'il est stable et attractif.

Définition 1.20. (*Stabilisation*)

Le problème de stabilisation (*régulation*), consiste à maintenir un système près d'un équilibre x_e asymptotiquement stable du système en boucle fermée.

1.7.1 Stabilité des systèmes linéaires

Définition 1.21. On appelle *bouclage* d'état linéaire (ou régulateur linéaire) du système $\dot{x} = Ax + Bu$ une loi de commande du type :

$$u = Kx$$

où $K(m \times n)$: matrice de gain.

Une telle loi est dite *stabilisante*, si l'origine du système en boucle fermée $\dot{x} = (A + BK)x$ est asymptotiquement stable.

1.7.2 Stabilisation locale d'un système non linéaire

Soit le système commandé :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ f(x_0, u_0) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

On pose $u = R(x)$ telle que le système en boucle fermée : $\dot{x} = f(x, R(x))$ admet l'origine comme équilibre asymptotiquement stable. On considère l'approximation linéaire :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

où : $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$

Théorème 1.3. [9] *Le contrôle $u = Kx$ stabilise localement le système (1.10). En effet le système en boucle fermée s'écrit :*

$$\dot{x} = F(x) = f(x, Kx)$$

On a :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)K = A + BK$$

donc $x = 0$ est asymptotiquement stable pour le linéarisé.

1.8 Conditions d'optimalité

1.8.1 Fonction hamiltonienne

Définition 1.22. L'hamiltonien du système (1.4) est la fonction :

$$H(x, u, p, t) = \langle p, f(x, u, t) \rangle$$

\langle, \rangle est le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n

L'idée de Lagrange est d'introduire des variables additionnelles (multiplicateurs dynamiques ou de la Lagrange) dans la fonction Hamiltonienne.

La fonction Hamiltonienne est définie par :

$$H(x, u, p, t) = g(x, u, t) + p^t(t)\dot{x}$$

p^t : la transposée de multiplicateur de Lagrange.

On peut prendre aussi des contraintes statiques (exemple : la non négativité des variables de contrôle).

1.8.2 Principe du Maximum de Pontryagin (PMP)

Le principe du Maximum de Pontryagin énonce que la trajectoire optimale vérifie les trois conditions suivantes :

(1) l'équation adjointe :

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H(x, u, p, t)}{\partial x} \quad (1.11)$$

dans le cas où l'état final est libre, une condition apparaît sur la valeur finale de l'état adjoint :

$$p(t_f) = \frac{\partial C(x(t_f))}{\partial x(t_f)} \quad (1.12)$$

(2) une condition qui suppose qu'aucune contrainte n'est subie par la commande ; c'est la condition de stationnarité :

$$\frac{\partial H(x, u, p, t)}{\partial u} = 0 \quad (1.13)$$

(3) l'équation d'état $\dot{x} = f(x, u, t)$ avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

1.8.3 Condition de transversalité

Définition 1.23. (*Transversalité*)

La condition de transversalité est une contrainte supplémentaire (ou une condition finale), qui est énoncée sur l'état adjoint dans le cas où l'état final est libre.

La formule de cette condition est donnée par l'équation (1.12).

Conclusion

La théorie du contrôle optimal a résolu beaucoup de problèmes dans différents domaines, notamment dans le cas où la stabilité d'un système qui modélise un phénomène quelconque est très importante, mais aussi dans le but de maintenir un équilibre d'un système commandé.

Malgré, les études faites autour de la théorie du contrôle optimal qui a répondu à la plupart des problèmes, elles restent toujours incomplètes et constituent un domaine de recherche très actif.

Chapitre 2

Méthodes de résolution et d'approximation

Dans la modélisation de plusieurs phénomènes, on obtient souvent des équations *différentielles*. La résolution des équations différentielles par quadrature (c.à.d : des opérations élémentaires et de la primitivation) n'est possible que dans un nombre de cas très restreints. Il est donc indispensable de disposer de techniques de résolution dites *méthodes numériques* qui donnent une solution approchée.

2.1 Aperçue sur les équations différentielles (ED)

Les équations différentielles est un terme qui a été inventé par *Leibnig* en 1676, d'une relation entre les deux différentiels ∂x et ∂y pour les deux variables x et y . Ce terme (équations différentielles) est utilisé pour toute équation algébrique qui implique des produits dérivés.

2.1.1 Equations aux dérivées partielles (EDPs)

Une EDP est une équation dont les solutions sont des fonctions inconnues qui vérifient certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.

Certaines des EDPs sont résolues analytiquement et leurs solutions sont connues. Pour d'autres, les solutions analytiques ne sont pas connues, il est donc utile d'utiliser des méthodes numériques dans le but de résoudre ces équations approximativement.

soit :

- la fonction inconnue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

- l'équation $F(x, f(x), \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f^p(x)}{\partial x^p}) = 0, \forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
avec $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^2 \times \dots \times (\mathbb{R}^n)^p$;
 p est l'ordre de l'EDP.

Classification des EDPs linéaires d'ordre ≤ 2

On distingue trois catégories :

1. Les EDPs de type elliptiques :

Le prototype de ces équations est l'équation de Poisson :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}, \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Ω : le domaine de définition de f .

2. Les EDPs de type parabolique :

Le prototype de ces équations est l'équation de chaleur :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \alpha \nabla^2 T(x, t) = 0, \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \forall t > 0, \alpha > 0$$

t : le temps invariant.

3. Les EDPs de type hyperbolique :

Les prototypes de ces équations sont :

- **L'équation de transport :**

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 0, \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \forall t > 0, a > 0$$

- **L'équation des ondes :**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = 0, \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \forall t > 0$$

Une EDP d'ordre ≤ 2 à coefficients constants est de type :

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) + b \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, t) + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, t) + d \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + e \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) + gf(x, t) = 0$$

a, b, c, d, e, g des constantes réelles.

on pose : $\Delta = b^2 - 4ac$

si :

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow \text{l'équation est elliptique;} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \text{l'équation est parabolique;} \\ \Delta > 0 \Rightarrow \text{l'équation est hyperbolique.} \end{cases}$$

2.1.2 Equations différentielles ordinaires (EDOs)

Une EDO est une relation entre, une variable réelle x et une variable dépendante y , des dérivées de la variable dépendante y par rapport à x .

Classification des EDOs

On s'intéressera aux EDOs du premier et du deuxième ordre.

1) Les EDOs du premier ordre

Le premier type : *équations à variables séparables*

Ce sont toutes les équations dont l'expression est de la forme :

$$f(x)\partial x = g(y)\partial y$$

Le deuxième type : *équations homogènes*

Ce sont toutes les équations dont l'expression est de la forme :

$$y' = f(y/x)$$

on peut remplacer x par kx et y par ky avec k non nul.

Le troisième type : *équations linéaires*

Le premier cas : équations linéaires avec second membre

Ce sont toutes les équations dont l'expression est de la forme :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Le deuxième cas : équations linéaires sans second membre

Ce sont toutes les équations dont l'expression est de la forme :

$$y' + a(x)y = 0$$

ce qui permet de séparer les variables comme : $\frac{\partial y}{y} = -a(x)\partial x$ et d'intégrer :

$\ln \frac{y}{c} = -\int a(x)\partial x$ avec $\frac{y}{c} > 0$; on obtient la solution $y = c \exp(-Ax)$

Cas particulier : *équations linéaires à coefficients constants avec second membre constant*

Ces équations sont de type :

$$y' + ay = b$$

2) Les EDOs du deuxième ordre

Le premier type : équations où la fonction n'apparaît que par ses dérivées

Ces équations sont de la forme :

$$y'' = f(x, y')$$

elle peut être transformé en une équation du premier ordre $z' = f(x, z)$ si on pose $z = y'$.

Le deuxième type : équations où la fonction n'intervient que par sa dérivée seconde

Ces équations sont données par la formule suivante :

$$y'' = f(x)$$

Le troisième type : équations où la variable n'apparaît pas explicitement

Ces équations prennent la forme :

$$f(y, y', y'') = 0$$

on prend $z = y'$ on obtient :

$$y'' = \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z \partial y}{\partial y \partial x} = z \frac{\partial z}{\partial y}$$

alors : $f(y, z, z \frac{\partial z}{\partial y}) = 0$.

En général, on pose $q = y'^2$

2.2 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une technique de recherche des solutions approchées d'une équation aux dérivées partielles, utilisée en analyse numérique.

La méthode consiste à approcher les dérivées partielles d'une équation, au moyen des développements de Taylor aux points de maillage ; autrement dit, de remplacer les dérivées partielles par des différences divisées des valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets appelés *nœuds du maillage*.

Cette méthode repose sur deux notions :

1. la discrétisation des opérateurs de dérivation ;
2. la convergence du schéma numérique obtenu.

2.2.1 Approximation des opérateurs par la formule de Taylor

On utilise les approximations de Taylor pour la discrétisation des opérateurs différentiels (dérivées première et deuxième, partielles ou non).

La procédure

Soit x un point et h un pas dit *de discrétisation*, f est une fonction continue n fois dérivable sur le domaine de définition de f ; la formule de Taylor-Young est donnée par :

$$1. f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x) + h^n \epsilon_1(x, h)$$

$$\implies \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{i=1}^n \frac{h^{(i-1)}}{i!} f^{(i)}(x) + h^{(n-1)} \epsilon_1(x, h);$$

$$2. (f(x-h) = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{(-h)^i}{i!} f^{(i)}(x) + h^n \epsilon_2(x, h))$$

$$\implies \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = \sum_{i=1}^n \frac{(-h)^{(i-1)}}{i!} f^{(i)}(x) + h^{(n-1)} \epsilon_2(x, h).$$

La première dérivée de f est :

$$a) \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

$$b) \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

De 1) et 2) on obtient :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \sum_{i=1}^n \frac{h^{i-1}}{i!} f^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^n \frac{(-h)^{i-1}}{i!} f^{(i)}(x) + h^{(n-1)} \epsilon_1(x, h) + h^{(n-1)} \epsilon_2(x, h);$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \sum_{i=2}^n \frac{(h)^{i-1}}{i!} f^{(i)}(x) + \sum_{i=2}^n \frac{(-h)^{i-1}}{i!} f^{(i)}(x) + h^{(n-1)} \epsilon_3(x, h);$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Ceci est appelé le schéma numérique d'une EDP.

on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ :appelé } \mathbf{Schéma\ avant} ; \\ \frac{f(x-h)-f(x)}{h} \text{ :appelé } \mathbf{Schéma\ arrière} ; \\ \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} \text{ :appelé } \mathbf{Schéma\ centré}. \end{array} \right.$$

La deuxième dérivée sera :

$$\frac{\partial f^2(x)}{\partial x^2} = \frac{f(x+h) + f(x-h) + 2f(x)}{h^2} + \frac{h^2}{12} f^4(x) + h^2 \epsilon_4(x, h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) + 2f(x)}{h^2} = \frac{\partial f^2(x)}{\partial x^2}$$

2.2.2 Maillage

Un maillage est un ensemble de points isolés (*nœuds*), dans le domaine de définition de la fonction assujetties aux dérivées partielles.

Le maillage comprend les extrémités situées sur la frontière du domaine ou bien proche de la frontière, afin de pouvoir appliquer les conditions aux limites (initiales et finales).

Le but d'un maillage est de diminuer la distance entre deux extrémités successives et permet de discrétiser les approximations des opérateurs de différentiation.

On appelle "*pas local*" $h_i = \sup_{i=\overline{1,n}} |x_{i+1} - x_i|$ du maillage la distance entre deux points successifs du maillage ; en dimension 1, il est simplifié en différence des abscisses.

On définit un "*pas global*" h par :

$$h = \max_{i=\overline{1,n}} h_i$$

Si ce pas global tend vers 0, cela veut dire que la répartition des points du maillage dans l'intervalle choisi, tend à se faire sur tout le domaine par densité.

Un "*pas constant*" est le plus souvent retenu.

2.2.3 Convergence du schéma numérique

La convergence d'un schéma numérique, a pour but d'assurer que l'écart entre la solution exacte et la solution approchée tend vers zéro, lorsque le pas de discrétisation tend

vers zéro. Il est fréquent d'utiliser des normes apparentées à celles des espaces L^p . Pour une fonction d'une variable, on a plusieurs types de convergences :

- La convergence simple qui convergence en tout point de l'espace de définition ;
- La convergence uniforme (dans L^∞) : $\|f_h(x) - f(x)\|_\infty = h \max_i |f(x_i) - f(ih)|$;
- La convergence dans L^2 : $\|f_h(x) - f(x)\|_2 = h \sqrt{\sum_i |f(x_i) - f(ih)|^2}$;
- La convergence dans L^1 : $\|f_h(x) - f(x)\|_1 = h \sum_i |f(x_i) - f(ih)|$.

où $f_h(x) = f(x + h)$ ou $f_h(x) = f(x - h)$

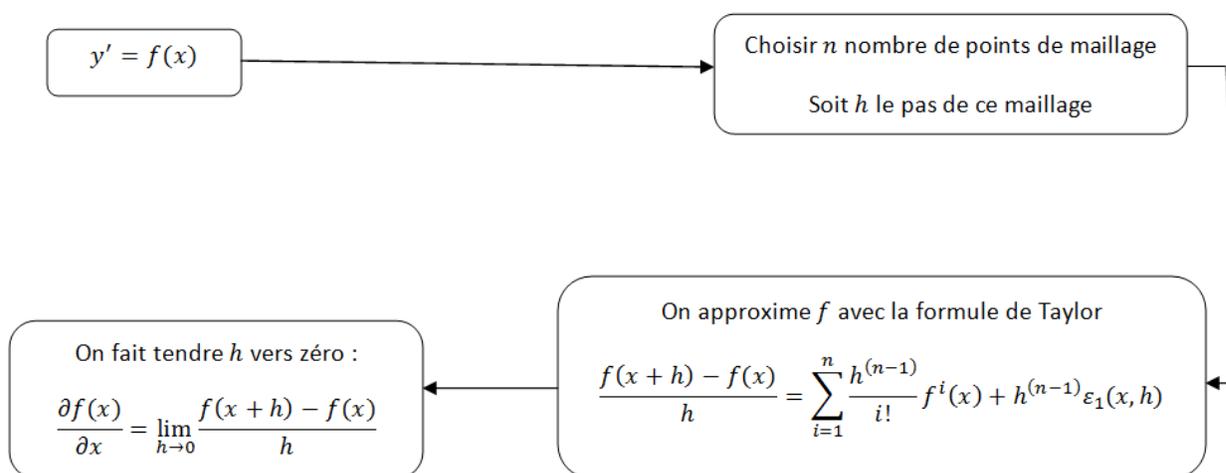


FIG. 2.1 – Diagramme de la méthode des différences finies (schéma avant)

2.3 Méthode d'Euler

En mathématique, la méthode d'Euler nommée ainsi en l'honneur du mathématicien *Leonhard Euler*, est une procédure numérique pour résoudre approximativement des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale, le système est de type :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \\ x \in [x_0, x_n] \end{cases} \quad (\text{condition initiale})$$

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . On note C_f sa courbe représentative dans un repère quelconque.

On veut déterminer les valeurs approchées des images de n nombres x_1, \dots, x_n par cette

fonction et construire la courbe intégrale sur l'intervalle $I = [x_0, x_n]$ même si on ne connaît pas l'expression de f explicitement.

On peut diviser I en n intervalles et on choisit : $h = \frac{x_n - x_0}{n}$; ou encore $h = x_i - x_{i-1}$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h \\ x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh \end{cases}$$

Pour tout réel $x_i \in I$, on a :

$$f(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} \simeq \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

Quand h est très proche de zero, alors :

$y(x_i + h) = y(x_i) + f(x_i)h$ est une équation de la tangente à la courbe C_f en x_i , $i = \overline{0, n}$.

Supposons qu'on connaît :

- La dérivée f de y ;
- Un point $M_0(x_0, y_0)$ de la courbe avec $y_0 = y(x_0)$;
- Un pas h fixé, proche de 0 ;

alors, pour $i = 0$:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + f(x_0)h$$

$M_1(x_1, y_1)$ est le 2^{eme} point proche de la courbe C_f .

Le segment $[M_0, M_1]$ approche la courbe sur l'intervalle $[x_0, x_1]$.

On peut itérer cette méthode afin d'obtenir une courbe approchée de C_f donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n).$$

2.3.1 Méthode d'Euler explicite

L'équation $y' = f(x, y)$ est discrétisée comme :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x_i) = f(x_i, y_i) \simeq \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

y_i : connu ;

y_{i+1} : inconnu ;

$h = x_{i+1} - x_i$: le pas de la méthode.

d'où :

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

2.3.2 Méthode d'Euler implicite

L'équation $y' = f(x, y)$ est discrétisée comme :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x_i) = f(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

d'où :

$$y_i = y_{i+1} - f(x_{i+1}, y_{i+1})h.$$

2.3.3 Méthode d'Euler semi-implicite

L'équation $y' = f(x, y)$ est discrétisée comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x}(x_i) = f(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \\ y(x_i) \simeq (1 - \theta)f(x_i, y_i) + \theta f(x_{i+1}, y_{i+1}) \\ \text{où } : \theta \in [0, 1] \end{cases}$$

d'où :

$$y_{i+1} - \theta h f(x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i + (1 - \theta)h f(x_i, y_i).$$

Exemple canonique : le cas linéaire $y' = ay$

La méthode d'euler explicite

Soit le problème de Cauchy suivant, avec $a \in \mathbb{R}$:

$$y' = ay, \quad y(0) = 1$$

alors : $y_{i+1} = y_i + hay_i = y_i(1 + ha)$; d'où : $y_i = (1 + ha)_i$

La méthode d'euler implicite

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Si f est assez régulière (une fonction suffisamment dérivable) et h est assez petit ; le schéma implicite a une solution unique : $y' = ay, \quad y(0) = 1$

alors : $y_{i+1} = y_i + hay_{i+1}$ et $y_i = y_{i+1}(1 - ha)$; d'où : $y_i = (1 - ha)^{-i}$.

Pour comprendre mieux la méthode, on donne le diagramme ci-dessous :

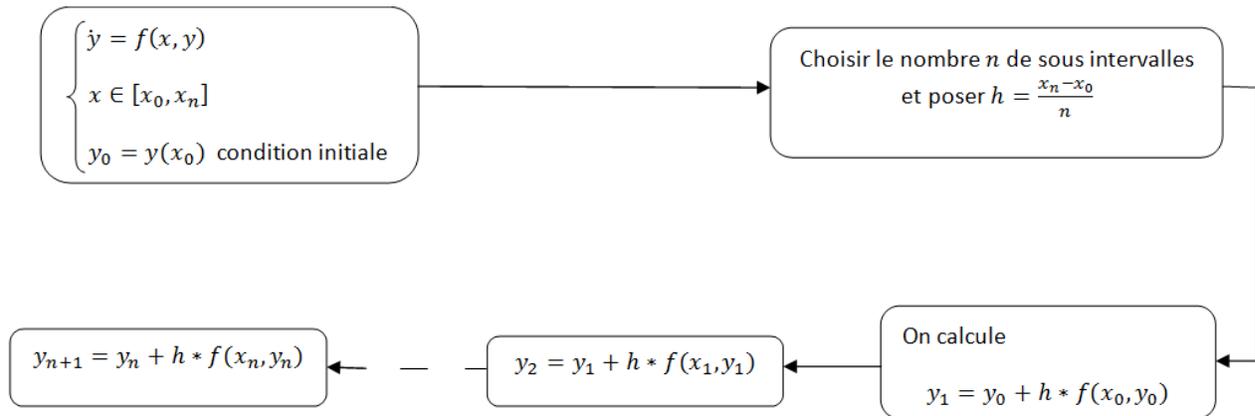


FIG. 2.2 – Diagramme de la méthode d'Euler explicite

2.4 Méthodes de Runge-Kutta (RK)

Considérons une équation différentielle du premier ordre :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \\ x \in [x_0, x_n] \end{cases} \quad \text{condition initiale}$$

Les méthodes RK utilisent plus d'un point intermédiaire pour calculer la valeur de y_{i+1} à partir de la valeur de y_i ($i = \overline{0, n}$).

Ces méthodes définissent deux étapes successives ; où $h = x_{i+1} - x_i$ est le pas de discrétisation en x :

Une première qui permet de définir les valeurs de x ; on connaît :

- le terme initiale : x_0 ;
- la relation de récurrence : $x_i = x_{i-1} + h$

Une deuxième étape qui permet d'évaluer les valeurs de y , en connaissons :

- le terme initiale : y_0 ;
- la relation de récurrence de chaque méthode.

2.4.1 Méthode RK2

Les étapes de la méthode de RK2 sont :

1° / utiliser la méthode d'Euler sur un demi pas : $y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i) \frac{h}{2}$

2° / poser $f_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$

3° / sur la totalité de pas : $y_{n+1} = y_n + f_{n+1/2} h$

2.4.2 Méthode RK4

Les étapes de la méthode RK4 sont :

1°/ Calculer la première variante : $k_1 = f(x_i, y_i)h$

2°/ au milieu du pas on pose : $k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})h$

3°/ calculer l'évaluation $k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})h$

4°/ calculer l'évaluation $k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3)h$

alors :

$$y_{i+1} = y_i + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

L'interprétation géométrique variantes k_1, k_2, k_3, k_4 :

k_1 : est la pente au début de l'intervalle ;

k_2 : est la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente k_1 pour calculer la valeur de y au point $x_n + h/2$ par le biais de la méthode d'Euler ;

k_3 : est de nouveau, la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente k_2 pour calculer y ;

k_4 : est la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur y calculée en utilisant k_3 .

y_{n+1} : est le schéma de la méthode RK4; ou bien la moyenne des quatre pentes, on affectant des poids plus grands aux pentes au points milieu.

Le diagramme ci-dessous résume les étapes de la méthode :

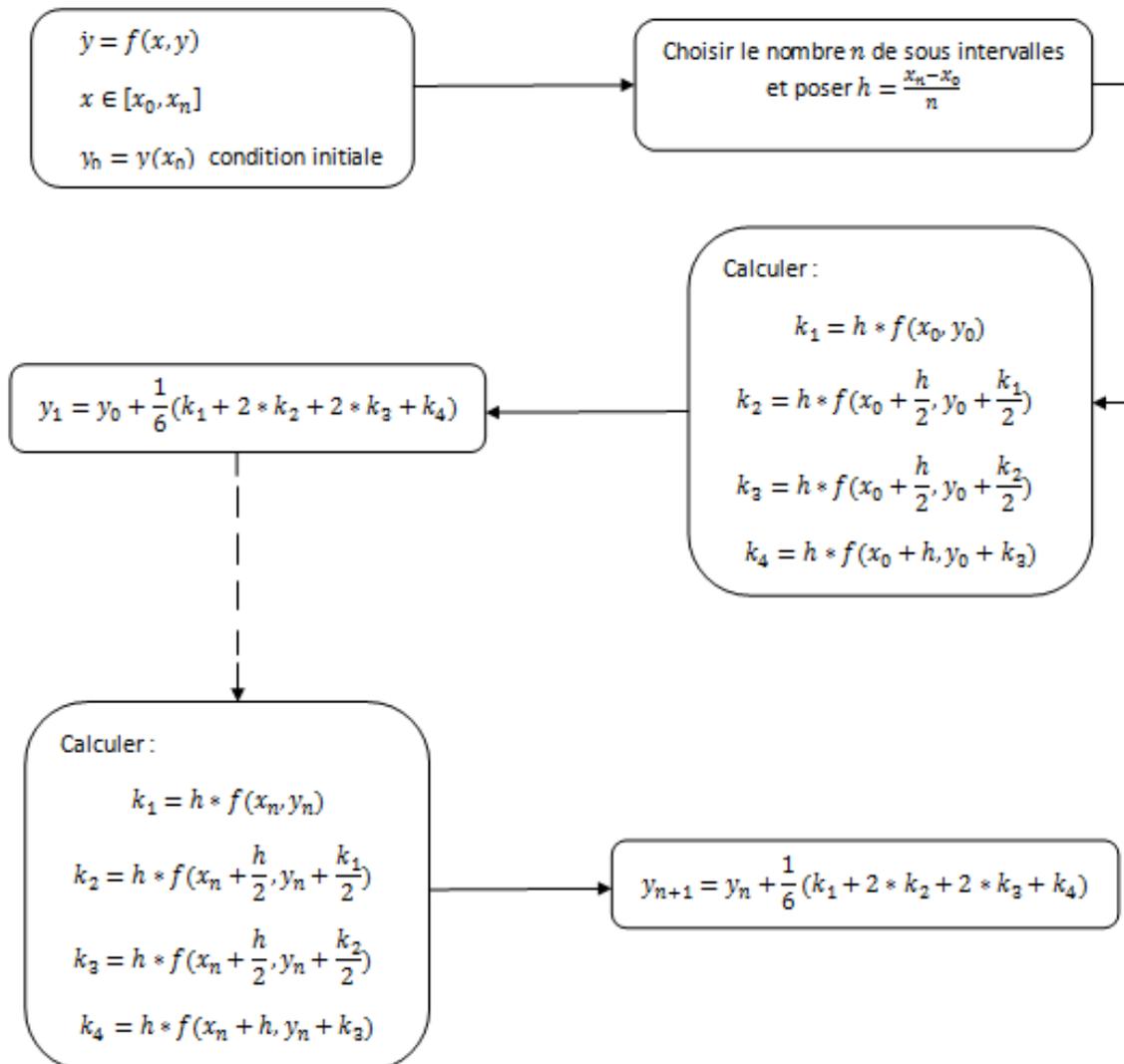


FIG. 2.3 – Diagramme de la méthode de Runge Kutta 4

2.5 Méthode de bisection

La méthode de bisection est un procédé qui consiste à chercher un zéro d'une fonction (i.e : de résoudre l'équation $f(x)=0$). Elle repose sur le partage simultané d'un intervalle en deux parties équivalentes, puis de sélectionner le sous-intervalle dans lequel existe la solution.

2.5.1 Principe de la méthode

Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ tel que $f(a).f(b) < 0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

On va créer une variable $c = \frac{b+a}{2}$, alors on a deux possibilités :

1. $f(a).f(c) < 0$ alors, on pose $b = c$;
2. $f(c).f(b) < 0$ alors, on pose $a = c$.

L'erreur absolue de la méthode est de : $\frac{b-a}{2^{n+1}}$ où n est le nombre d'itération.

Si on veut résoudre $f(x) = y$, et soit f une fonction continue sur $[a, b]$ avec $f(a) < y < f(b)$

donc : $\exists x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y$

on pose $c = \frac{a+b}{2}$

1. $f(c) < y$ alors $a=c$;
2. $f(c) > y$ alors $b=c$.

Son diagramme est donné par :

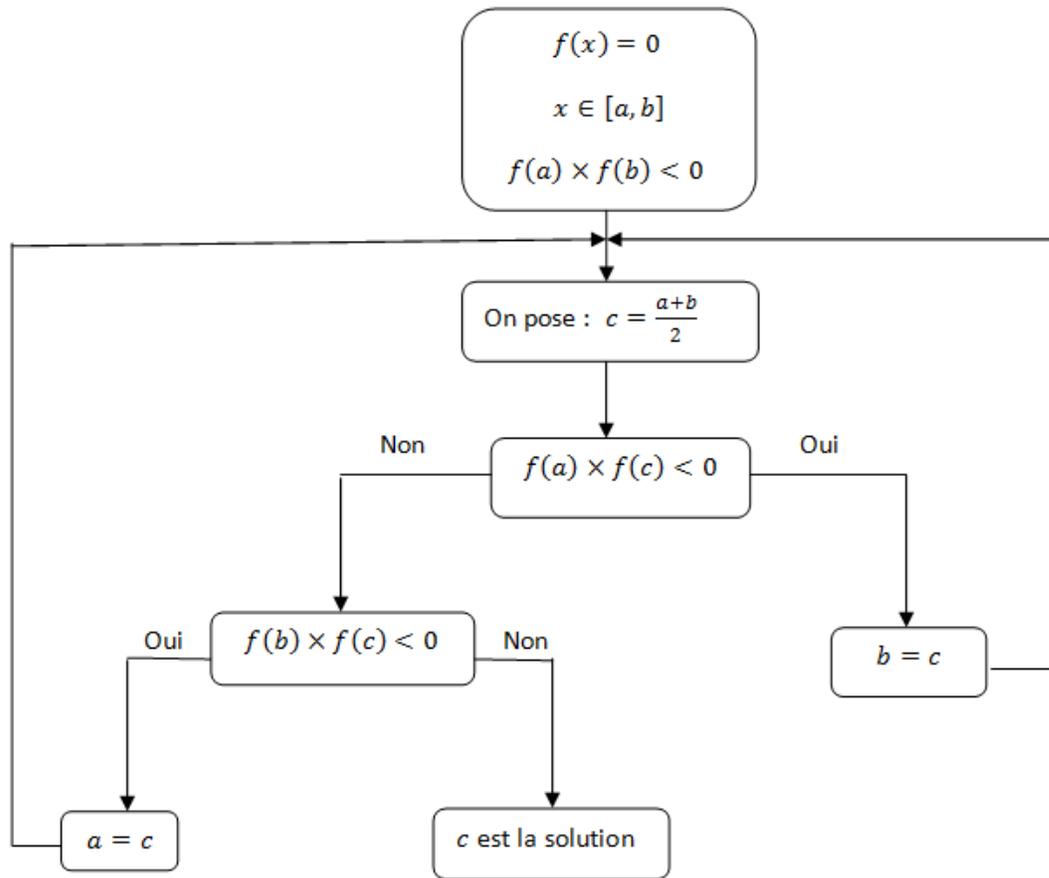


FIG. 2.4 – Diagramme de la méthode de bisection

Conclusion

Très souvent, les méthodes numériques étaient le seul moyen de résoudre plusieurs problèmes dont le type de systèmes ou d'équations est différentiel. Si ces méthodes sont mal employées, elle peuvent conduire à des résultats erronés où les erreurs d'arrondis sont très élevées.

Chapitre 3

Contrôle optimal non linéaire : approche de résolution

Dans plusieurs domaines, le but de résoudre un problème de contrôle est d'atteindre un maximum ou un minimum d'une fonctionnelle soumis à un système dynamique, qui est décrit par l'ensemble des équations différentielles algébriques, ordinaire ou algébro-différentielles linéaires ou non linéaires, qui donne de multiples solutions locales. Les méthodes les plus utilisées pour ce genre de problèmes est le contrôle paramétrique. Ces approches convertissent les problèmes de dimension infinie en un problème de dimension finie, dans laquelle l'optimisation est réalisée sur un paramètre défini, utilisé pour décrire les variations du contrôle en fonction de temps.

Les problèmes du contrôle optimal, sont souvent résolus par les méthodes indirectes basées sur le Principe de Maximum de Pontryagin, réputées pour leurs rapidité et leurs précision dans le traitement des problèmes. Toutefois, leurs mise en oeuvre peuvent en pratique rencontrer certaines difficultés notamment lorsque la structure du contrôle de type bang bang ou bien lors de présence de contrainte sur les états du système.

Dans ce chapitre, on propose une méthode de resolution qui permet de trouver la solution globale d'un problème de contrôle. Cette méthode traite le problème en deux partie ; une partie dynamique qui fait une étude de système dynamique de problème (étude de problème sans la fonctionnelle) ; à la fin de cette partie, on calcule la valeur d'un paramètre β qui est utilisé pour sous estimer les contraintes.

Dans la deuxième partie, on transforme le problème de départ en un problème relaxé et on cherche la solution de ce problème, après avoir sous estimer les contraintes et la fonction-

nelle.

La solution globale est trouvée en résolvant le problème sous estimé.

3.1 Formulation du problème

La forme générale du problème étudié est :

$$\min_{x,v,u(t)} f(x, v)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_j = g(z, v, u, t) \quad j \in J, \quad z \in Z \\ h(z, v, u, t) = 0 \\ z(t_0) = z_0 \quad t \in [t_0, t_f] \\ u^L \leq u \leq u^U \\ c_{m,u}(x) + z_m(t_u) = 0 \quad m \in M \quad u \in P \\ d(x, v) \leq 0 \\ x^L \leq x \leq x^U \\ v^L \leq v \leq v^U \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Z : l'ensemble des variables d'état ;

J : l'ensemble des variables d'états où les dérivées apparaissent explicitement dans le système ;

M : l'ensemble des variables d'états qui apparaissent dans les contraintes définies à des instants de l'ensemble P ;

u : est le contrôle dépendant du temps ;

v : est un paramètre ne dépendant pas du temps l'ensemble qui apparaît dans le système dynamique ;

x : les variables algébriques qui n'apparaissent pas dans le système dynamique.

Les conditions sur les fonctions du problème (3.1) sont les suivantes :

- 1) $f(x, v), C(x), d(x, v)$ sont des fonctions continues et différentiables dans les régions définies par $x \in [x^L, x^U]$ et $v \in [v^L, v^U]$;
- 2) le système algébro-différentiel est en fonction de u ;
- 3) $g(z, v, u, t)$ et $h(z, v, u, t)$ sont continues et différentiables par rapport à l'état z, u et v dans la région définie par $z \in [z^L, z^U], u \in [u^L, u^U]$ et $v \in [v^L, v^U]$.

Dans le but de convertir le problème (3.1) de dimension infinie en un problème de dimension finie, la paramétrisation du contrôle est utilisée. Les variables du contrôle sont écrites comme une fonction des paramètres v et de temps t ,

$$u(t) = U(v, t).$$

La paramétrisation la plus commune prend la forme

$$u(t) = v_i \quad \text{pour } t_i \leq t \leq t_{i+1};$$

Un autre schéma de paramétrisation du contrôle est le contrôle linéaire par morceau de la forme :

$$u(t) = v_i + \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i}(t - t_i) \quad \text{pour } t_i \leq t \leq t_{i+1}.$$

En écrivant, u en fonction de v , le contrôle u disparaît dans le modèle et le problème sera réduit à :

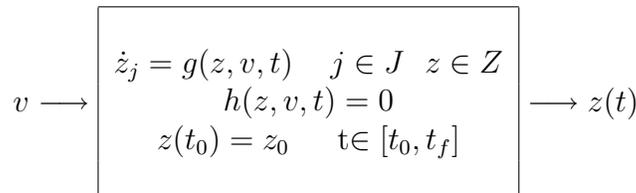
$$\begin{aligned} & \min_{x,v} f(x, v) \\ & \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_j = g(z, v, t) \quad j \in J \quad z \in Z \\ h(z, v, t) = 0 \\ z(t_0) = z_0 \quad t \in [t_0, t_f] \\ c_{m,u}(x) + z_m(t_u) = 0 \quad m \in M \quad u \in P \\ d(x, v) \leq 0 \\ x^L \leq x \leq x^U \\ v^L \leq v \leq v^U \end{array} \right. \quad (3.2) \end{aligned}$$

3.1.1 Approche d'optimisation

Formule du sous estimateur

Dans le problème (3.2), on a deux différents types de termes : une partie algébrique et une partie dynamique. La partie algébrique est constituée de $f(x, v)$, $c(x)$ et $d(x, v)$.

On considère le système d'équations algébro-différentiel comme un simple diagramme entrée-sortie ; l'entrée représente la valeur de paramètre v , alors que la sortie correspond à la valeur de l'état dans l'intervalle de temps $z(t)$



On pose $z(t_u) = F_u(v)$; et en la substituant dans le problème (3.2) on obtient le problème :

$$\min_{x,v} f(x, v)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_j = g(z, v, t) & j \in J \quad z \in Z \\ h(z, v, t) = 0 \\ z(t_0) = z_0 & t \in [t_0, t_f] \\ c_{m,u}(x) + F_{m,u}(v) = 0 & m \in M \quad u \in P \\ d(x, v) \leq 0 \\ x^L \leq x \leq x^U \\ v^L \leq v \leq v^U \end{cases} \quad (3.3)$$

$F_{m,u}$ est la fonction qui décrit la valeur de l'état z_m à l'instant t_u .

La dérivation de cette fonction est la valeur de la sensibilité de l'état z_m . Cette sensibilité est déterminée par intégration d'un ensemble d'équations linéaires avec le problème initial.

Cet ensemble d'équations prend la forme :

$$\begin{bmatrix} I_{j \times j} & 0_{j \times k} \\ 0_{q \times j} & 0_{q \times k} \end{bmatrix} \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial v} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) + \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

j : le nombre des états où les dérivées sont explicite ;

k : le nombre des états sans dérivées explicite ;

q : la taille du vecteur d'équation h .

Ainsi la dérivée de $F_{m,u}$ par rapport à v est définie comme :

$$\frac{\partial F_{m,u}}{\partial v} = \frac{\partial z_m}{\partial v}(t_u).$$

Une intégration numérique est utilisée pour générer la fonction nécessaire et les évaluations de son gradient pour le système dynamique. Le sous estimateur de cette fonction est générée en ajoutant un terme quadratique en v , donné par la formule suivante :

$$L_{F_{m,u}}(v) = F_{m,u}(v) + \beta_{m,u} \sum_{i \in I} (v_i^U - v_i)(v_i^L - v_i)$$

où I est l'ensemble des variables v . $\beta_{m,u}$ est une valeur qui assure la convexité de la fonction de sous estimateur L , elle ne doit pas être trop grande au point de trop sous estimer cette fonction.

La formulation de (3,3) devient :

$$\min_{x,v} L_f(x, v)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_j = g(z, v, t) \quad j \in J \quad z \in Z \\ h(z, v, t) = 0 \\ z(t_0) = z_0 \quad t \in [t_0, t_f] \\ L_{c_{m,u}}^+(x) + L_{F_{m,u}}^+(v) \leq 0 \quad m \in M \quad u \in P \\ L_{c_{m,u}}^-(x) + L_{F_{m,u}}^-(v) \leq 0 \quad m \in M \quad u \in P \\ L_d(x, v) \leq 0 \\ x^L \leq x \leq x^U \\ v^L \leq v \leq v^U \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$L_{c_{m,u}}^+$ est le sous estimateur de la fonction $c_{m,u}$;

$L_{c_{m,u}}^-$ est le sous estimateur de la fonction $-c_{m,u}$;

$L_{F_{m,u}}^+$ est le sous estimateur de la fonction $F_{m,u}$;

$L_{F_{m,u}}^-$ est le sous estimateur de la fonction $-F_{m,u}$;

L_d est le sous estimateur de la fonction d .

Il est nécessaire de séparer la contrainte d'égalité algébrique de problème (3.1), en deux équations inégalités de signes différents et de sous estimer chacune indépendamment de l'autre.

3.1.2 Détermination de la valeur du sous estimateur

La valeur de β est calculée au moyen de la matrice Hessienne de la fonction $F_{m,u}(v)$. Cette matrice est générée en utilisant, la sensibilité du second ordre de l'état z_m par rapport à v .

$$H_{m,u} \equiv \frac{(\partial z_m)^2}{\partial v^2}(t_u)$$

On aura :

$$\beta_{m,n}^+ \geq -\frac{1}{2} \min_v \lambda_{m,u}^{\min}(v) \quad (3.6)$$

$$\beta_{m,n}^- \leq \frac{1}{2} \max_v \lambda_{m,u}^{\max}(v) \quad (3.7)$$

$\beta_{m,n} \geq 0$; où

$\lambda_{m,u}^{\min}$: est la plus petite valeur propre de $H_{m,u}$.

$\lambda_{m,u}^{\max}$: est la plus grande valeur propre de $H_{m,u}$.

La difficulté provient du fait que $H_{m,u}$ ne peut pas être écrite comme une fonction analytique de v . Cependant trois différentes méthodes pour la détermination de β sont développées dans [17]

3.2 Exemple illustratif

Soit le problème suivant :

$$\min_{x,v} -(z(t_f))^2$$

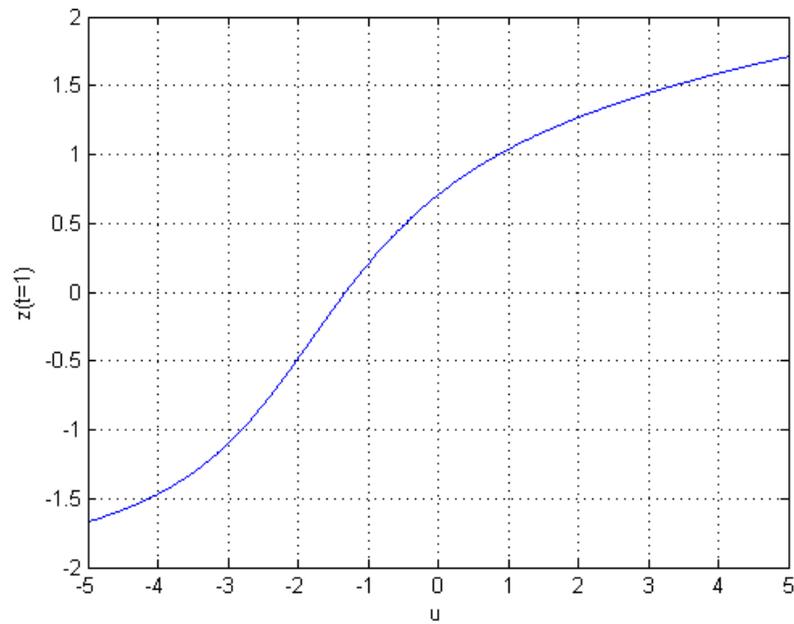
$$\begin{cases} \dot{z} = u - z^3 \\ z(t_0) = 9 \\ -5 \leq u \leq 5 \\ -12 \leq x \leq 9 \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad (3.8)$$

3.2.1 La partie dynamique

Dans cette partie, il consiste à résoudre le système dynamique en ignorant les variables algébriques et la fonctionnelle, le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{z} = u - z^3 \\ z(t_0) = 9 \\ -5 \leq u \leq 5 \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad (3.9)$$

puisque la fonction objectif est une fonction de $z(t_f)$, on s'intéressera alors, aux variations de l'état final ($z(t_f)$) en fonction de la commande u . On considère la valeur du l'état z en temps final $t = 1$, qui est une fonction implicite de u notée $F(u)$ et on trace la courbe de $F(u)$ qui est donnée par la figure (3.1); on note que cette fonction est continue et non convexe, ce qui n'assure pas de trouver un minimum globale de problème de départ.

FIG. 3.1 – Courbe de l'état à $t=1$

La sensibilité du premier ordre est calculée en utilisant la méthode des différences finies (c'est à dire $\frac{\partial z}{\partial u}$, cette sensibilité est tracée dans la figure (3.2) :

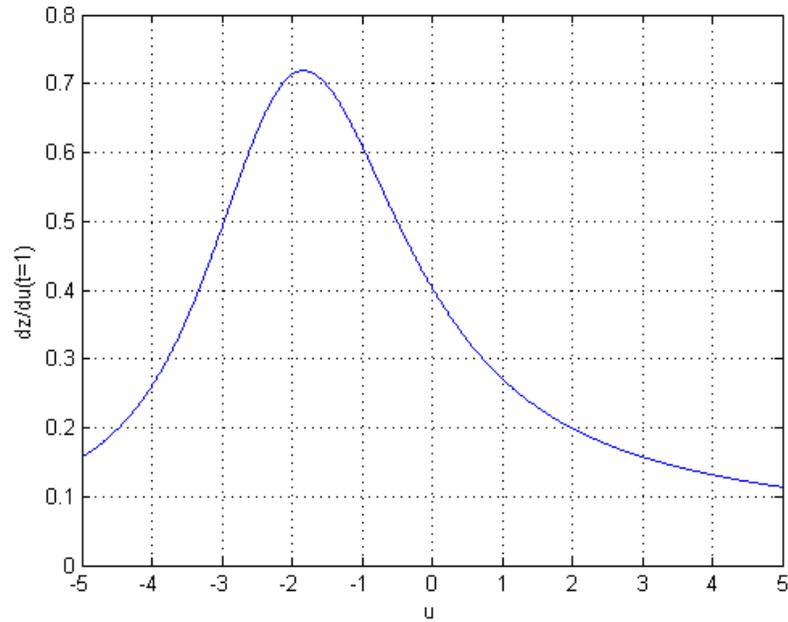


FIG. 3.2 – Courbe de la sensibilité du premier ordre

La sensibilité du deuxième ordre $\frac{\partial z^2}{\partial u^2}$ est calculée toujours en utilisant la méthode des différences finies; cette sensibilité est tracée dans la figure (3.3).

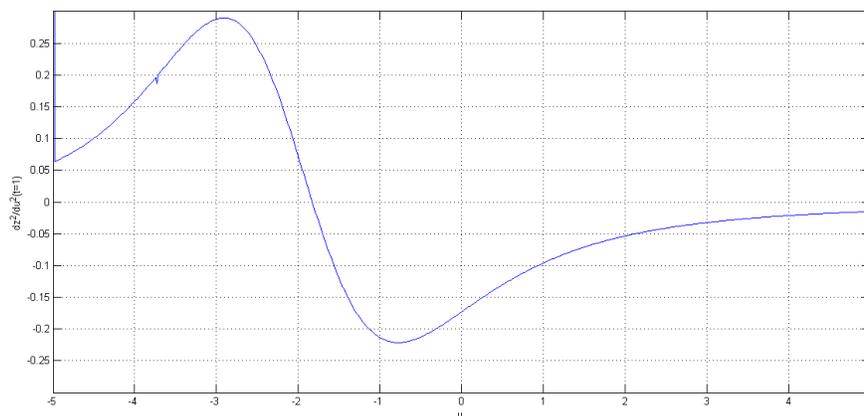


FIG. 3.3 – Courbe de la sensibilité du deuxième ordre au temps final

La valeur minimale de la sensibilité du deuxième ordre est : $\min(\frac{\partial z^2}{\partial u^2}) = -0.2214$ qui est la pente inférieure extraite du graphe (3.3). La pente supérieure de courbe (3.3) est donnée

par : $\max\left(\frac{\partial z^2}{\partial u^2}\right) = 0.29$

D'après la formule (3.6), on aura :

$$\beta_{m,n}^+ \geq -\frac{1}{2} \min_v \lambda_{m,u}^{\min}(v)$$

$$\beta^+ \geq -1/2(-0.2214) = 0.1107$$

D'après la formule (3.7), on aura :

$$\beta_{m,n}^- \geq -\frac{1}{2} \max_v \lambda_{m,u}^{\max}(v)$$

$$\beta^- \leq 1/2(0.29) = 0.1450$$

dans notre cas, on prend $\beta^+ = 0.1107$ qui est nécessaire pour générer une relaxation convexe de la fonction $F(u)$ qui prend la forme suivante :

$$\mathbb{L}_F(u) = F(u) + 0.1107(u^U - u)(u^L - u)$$

son graphe est donné par la figure (3.4) qui est convexe.

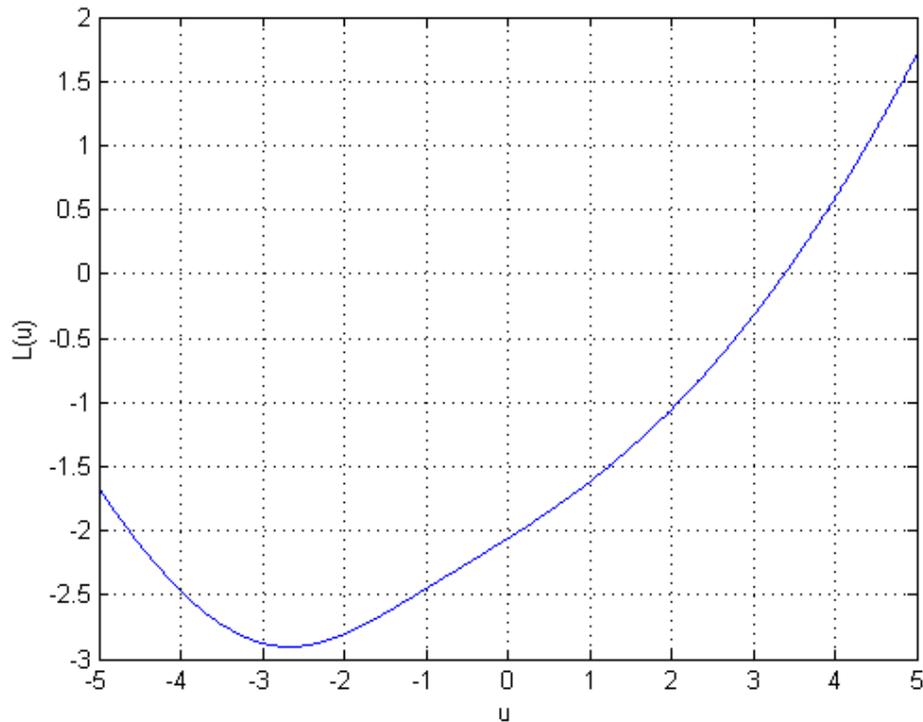


FIG. 3.4 – la courbe de sous estimateur au temps final

Le programme détaillé est :

```
clear; clc;
t0=0;tf=1;
pas=0.001;
n=((tf-t0)/pas)+1;

for i=1:n
    v=-5+(i-1)*10*pas;
    x0=[9 v]; [t, x]=ode45('fn', [t0 tf], x0);
    m=size(x);
    u(i)=v;%affecter les valeurs de la commande v au vecteur u
    y(i)=x(m(1),1);%affecter les dernières valeurs de x(1) au vecteur y
end

%calcul de la première dérivée par la méthode des différences finies
for i=2:n
    f(i)=(y(i)-y(i-1))/(u(i)-u(i-1));
end

%calcul de la deuxième dérivée par la méthode des différences finies
for i=2:n
    g(i)=(f(i)-f(i-1))/(u(i)-u(i-1));
end

%calcul de sous estimateur
for i=1:n
    L(i)=y(i)+0.1107*(-5-u(i))*(5-u(i));
end

%les figures

%tracer la courbe de l'état final z(t=1) en fonction de la commande u
plot(u,y);
xlabel('u');ylabel('z(t=1)');
```

```

title('Courbe de l'état à t=1');

%tracer les variations de la première dérivée en fonction de la commande u
plot(u,f); xlabel('u');ylabel('dz\du}(t=1)');
title('Courbe de la
sensibilité de premier ordre');

%tracer les variations de la deuxième dérivée en fonction de la
commande u plot(u,g); xlabel('u');ylabel('dz\du(t=1)');
title('Courbe de la sensibilité de deuxième ordre');

%la courbe de sous estimateur
plot(u,L);
xlabel('u');ylabel('L(u)');
title('Courbe de sous estimateur').

```

qui fait appel à la fonction "fn" donné comme suit :

```

function dx= fn(t,x)
    dx=zeros(2,1); dx=[x(2)-x(1)^3 0];

```

3.2.2 La partie algébrique

$$\min_u -z(t_f)^2$$

$$\begin{cases} \dot{z} = u - z^3 \\ z(t_0) = 9 & t \in [0, 1] \\ -5 \leq u \leq 5 \\ -12 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Un profil constant est introduit dans le système dynamique sur tous l'intervalle de temps.

Le problème doit être reformuler d'une façon a rendre l'objectif comme une fonction algébrique. Ceci est accompli en introduisant un point constant au temps final t_f , ce qui relie l'état z à la variable algébrique x .

$$\min_{u,x} -x^2$$

$$\begin{cases} \dot{z} = u - z^3 \\ z(t_0) = 9 \quad t \in [0, 1] \\ x - z(t_f) = 0 \\ -5 \leq u \leq 5 \\ -12 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

La contrainte de point d'égalité doit être repartir en deux inégalités de signe opposés. La formule finale de problème est comme suit :

$$\min_{u,x} -x^2$$

$$\begin{cases} \dot{z} = u - z^3 \\ z(t_0) = 9 \quad t \in [0, 1] \\ -x + z(t_f) \leq 0 \\ x - z(t_f) \leq 0 \\ -5 \leq u \leq 5 \\ -12 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Le problème a deux solutions au bornes de la variable de contrôle, données dans le tableau :

Obj	u	x
-2.9246	5	1.7101
-2.7902	-5	-1.6704

Dans le problem(3.1), non seulement le système dynamique sera sous-estimée, mais la fonction objectif aussi. La fonction objectif est concave ; on la sous-estime en utilisant un segment de x^L à x^U , le problème sera :

$$\min_{u,x} -[(x^L)^2 + \frac{(x^U)^2 - (x^L)^2}{x^U - x^L}(x - x^L)]$$

$$\begin{cases} \dot{z} = u - z^3 \\ z(t_0) = 9 \quad t \in [0, 1] \\ -x + z(t_f) + \beta^+(u^U - u)(u^L - u) \leq 0 \\ x - z(t_f) + \beta^-(u^U - u)(u^L - u) \leq 0 \\ -5 \leq u \leq 5 \\ -12 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

La solution de ce système trouvée en utilisant Matlab, avec les valeurs de $\beta^- = 0.145$ et $\beta^+ = 0.1107$ est : $(x, z(t_f), u) = (-2.9031, -0.9202, -2.6623)$ Cette solution est la solution système(3.1) qui à l'objectif la valeur de -116.7093 .

Le programme est le suivant :

```
x0=[-3; 0.7051; 0];
lb = [-12 -1.6704 -5 ]; % Lower bound
ub = [9 1.7101 5] options=optimset('Algorithm' ,
'active-set','TolX',1e-8,'TolCon',1e-8 );
[x,fval,exitflag,output]=fmincon(@objectif,x0,[],[],[],[],lb,ub,@contrainte,options)
```

qui fait appel à des fonctions qui ont décrites ci-dessous :

La fonction objectif :

```
function y = objectif(x)
    y = -108 +3*x(1);
```

la fonction contraintes :

```
function [c, ceq] = contrainte(x)

c = [x(1) - x(2) + 0.1450*(5 - x(3))*(-5 - x(3))
     - x(1) + x(2) + 0.1107*(5 - x(3))*(-5 - x(3))];
ceq = ztf(x(3))-x(2);
```

avec la fonction *ztf* définie ainsi :

```
function z=ztf(u) t0=0;tf=1; pas=0.01;n=((tf-t0)/pas)+1;
for i=1:n
p0=[9 u]; [t, p]=ode45('fn', [t0 tf], p0); z=p(end,1);
end
```

et la fonction "*fn*".

La difficulté provient du fait que $H_{m,u}$ ne peut pas être écrite comme une fonction analytique de v qui ne facilite pas la recherche de ses valeurs propres. Cependant trois différentes méthodes pour la détermination de β sont développées dans [17]

Conclusion générale

La difficulté trouvée en appliquant le Principe de Maximum de Pontryagin, est presque résolue en employant des méthodes numériques telles que la méthode de tir, mais ces méthodes peuvent être moins efficaces notamment lors de l'initialisation des algorithmes.

Dans ce travail, une approche d'optimisation globale déterministe a été présentée pour des problèmes de commande optimale non linéaires.

La méthode proposée donne une solution d'une relaxation convexe pour produire une limite inférieure valable sur la solution globale. La nouveauté de cette approche est dans la génération d'une sous estimation convexe du problème non convexe de départ. Les valeurs des états données au temps final sont traitées comme des fonctions implicites continues deux fois dérivables. Ceci tient en compte du développement d'une fonction de sous estimation, en utilisant les informations qu'on a sur la sensibilité de second ordre de ces états. Les étapes de cette méthode sont illustrées et discutées en les appliquant sur un exemple, qui montre l'existence de plusieurs minimums locaux.

La difficulté de mise en œuvre de cette approche est dans la recherche ou le calcul de la valeur du paramètre β

Cet étude a été tiré des travaux de W. R. Esposito et C. A. Floudas [17]. Nous avons traité qu'une section, on envisage de ce fait, de continuer l'étude pour mieux appréhender cette technique.

Bibliographie

- [1] ABDELKADER MERAKEB, "*Optimisation multicritères en contrôle optimal : Application au véhicule électrique*", Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, Juin 2011 ;
- [2] A-TAIK, "*Cours : Equations aux dérivées partielles-Méthodes des différences finies*", cours AN3 LST-MI, FST Mohammedia, 2008 ;
- [3] ANTON MITSIOUK, "*Contribution à l'optimisation des systèmes dynamiques : Application au génie des procédés*", Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, Juillet 2007 ;
- [4] BERNARD CAPPELAERE, VINCENT GUINOT, "*Méthodes numériques appliquées : résolution numérique des équations différentielles de l'ingénieur*", Polytech'Montpellier STE2, 2005-2006 ;
- [5] CYRILL KONTZ, "*Contrôle optimal de la dynamique dissipative de système quantique*", Thèse de doctorat version 1, Université de Bourgogne-France, Septembre 2008 ;
- [6] DENIS LAVIGNE, "*Notions de contrôle optimal appliquées à la gestion d'une ressource renouvelable*", Bulletin AMQ. Vol XLVIII, n°4, Association Mathématique du Québec, 2008 ;
- [7] DAVEAU CHRISTAIN, "*Méthodes d'approximation des équations aux dérivées partielles par les différences finies et volumes finis*", Cours de Master MAP M1 Math appliquée UE2 EDP2, Université de Cergy-Pontoise, Département de Mathématiques-France, 2010-2011 ;
- [8] EMMANUEL TRÉLAT, "*Contrôle optimal*", Notes de cours Master de Mathématiques, Université d'Orléans, 2007 – 2008 ;
- [9] EMMANUEL TRÉLAT, "*Contrôle optimal : théorie et applications*", livre de contrôle optimal, Université Paris-Sud, Laboratoire Mathématiques AN-EDP, 2005 ;

-
- [10] EMMANUEL TRÉLAT, JEAN-MICHEL CORON, "*Tout est sous contrôle*", Article, Université Paris-Sud, Laboratoire Mathématiques AN-EDP, Université d'Orléans, Fédération Denis Poisson, Laboratoire MAPMO, Juillet 2007 ;
- [11] HATTAB MAKER, "*Optimisation et gestion d'énergie pour un système hybride : association pile à combustible et supercondensateurs*", Thèse de doctorat, Université de technologie Belfort Montbeliard, 2008 ;
- [12] J.L.LIONS, "*Sur la théorie du contrôle*", Actes de Congrès International des Mathématiciens, Vancouver, 1974 ;
- [13] NADIA BELKACEME, "*Résolution numérique d'un problème de commande optimale d'un véhicule électrique*", Mémoire d'ingénieur, Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, 2009 ;
- [14] PASCAL COMBES MOTEL, "*Chapitre IV. Contrôle optimal*", Licence en Economie de Gestion 3^{ème} année-Parcours Magistère, Développement économique, Ecole polytechnique, Université d'Auvergne, Octobre 2009 ;
- [15] PASCAL COMBES MOTEL, "*Chapitre III. Optimisation sous contrainte en inéquation*", Licence en Economie de Gestion 3^{ème} année-Parcours Magistère, Développement économique, Ecole polytechnique, Université d'Auvergne, Janvier 2010 ;
- [16] VINCENT GUINOT, BEARNARD CAPPELAERE, "*Méthodes numériques appliquées (Résolution numérique des équations différentielles de l'ingénieur)*", livre, Polytech'Montpellier STE 2, 2005 – 2006 ;
- [17] WILLIAM R. ESPOSITO ET CHRISTODOULOS A. FLOUDAS, "*Deterministic Global Optimization in Nonlinear Optimal Control problems*", journal of Global Optimization 17 :97-126, Departement of chemical Engineering, Princeton University, Princeton, USA, 2000.