

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU  
FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL



## THÈSE

En vue de l'obtention du diplôme de  
Doctorat en Génie Civil

Présenté par :

**M<sup>me</sup> CHABANE CHAOUCHE Ourdia Née BELAIDI**

THEME

**Régularisation du problème à la localisation en  
mécanique de l'endommagement, aspects  
théoriques et implantation numérique**

Devant le jury composé de :

M <sup>f</sup> BALI Abderahim	Professeur, ENP/Alger	Président
M <sup>f</sup> HANNACHI Naceur Eddine	Professeur, UMMTO	Rapporteur
M <sup>f</sup> SAANOUNI Khemais	Professeur, U.T.Troyes, France	Co-Rapporteur
M <sup>f</sup> AIT TAHAR Kamal	Professeur, UMMTO	Examineur
M <sup>f</sup> BAHAR Ramdane	Professeur, USTHB	Examineur
M <sup>f</sup> BOUAFIA Youcef	Professeur, UMMTO	Examineur
M <sup>f</sup> MEDAHI Amer	Professeur, UMMBB	Invité

Soutenu le :

# Remerciements

*Le travail de recherche présenté dans ce mémoire a été réalisé au laboratoire LaMOMS de l'université de Tizi-ouzou, en collaboration avec le laboratoire LASMIS de l'université de Troyes.*

*C'est avec une certaine appréhension que j'aborde l'ultime étape de la rédaction de cette thèse que sont les remerciements. Bien consciente de tout ce que les autres m'ont apporté, il s'agit de trouver les mots justes pour leur exprimer pleinement, mais simplement, ma reconnaissance.*

*En premier lieu, je désire témoigner de ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, Prof. Neceur-Eddine HANNACHI, qui a su me guider tout au long de ce travail. Je tiens à lui exprimer mes sincères reconnaissances pour m'avoir accepté dans son équipe, m'avoir proposé ce thème de recherche et pour la confiance qu'il a manifesté à mon égard. Ses conseils et aides précieux ainsi que les diverses réflexions que nous avons pu échangées ont été très enrichissants et ont permis de mener à bon terme cette étude.*

*Ma gratitude et mes plus vifs remerciements vont à monsieur Khémis SAANOUNI, responsable du laboratoire LASMIS, qui a bien voulu m'accueillir dans son laboratoire. De m'avoir fait partager son goût à la recherche, son encadrement dynamique, sa disponibilité et sa gentillesse, tout au long de mon séjour, j'ai eu à admirer et à apprendre de sa simplicité.*

*J'exprime également ma profonde reconnaissance à monsieur Madjid ALMANSBA avec qui j'ai grand plaisir à travailler. Je tiens spécialement à le remercier pour sa gentillesse, pour sa patience, pour sa motivation et pour sa grande disponibilité. Il a beaucoup contribué à ce travail de recherche.*

*Je ne manquerai surtout pas en cette occasion, d'adresser une reconnaissance des plus vives ainsi qu'une gratitude des plus profondes à monsieur Youcef LABADI, pour son assistance permanente, son aide et ses conseils très précieux.*

*Je remercie également toute l'équipe du laboratoire LASMIS de l'université de Troyes.*

*Une pensée sincère à monsieur Mohand OULD OUAL qui a contribué pour la finalisation de cette thèse.*

*Je présente mes sincères remerciements à messieurs les membres de Jury qui ont accepté de disposer de leurs temps pour pouvoir jugé ce travail. Je leur en témoigne toute ma reconnaissance*

*Je remercie mes parents, d'avoir pu en arriver là.*

*Alors une dernière fois, merci à tous et surtout à ceux que j'ai pu involontairement oublier.*

# Introduction Générale

Parmi les matériaux de construction du génie civil, le béton est celui qui est le plus fréquemment utilisé. Les raisons essentielles en sont la fabrication relativement simple et peu coûteuse, ainsi que la mise en œuvre aisée. De ce fait on peut réaliser, sans grande qualification, un béton de bonne qualité.

Son utilisation couvre alors un vaste champ d'applications de telle sorte que les constructions habituelles (bâtiments, ponts routiers etc.) font partie d'un environnement quotidien.

La conception et le calcul de ces ouvrages sont basés sur une réglementation qui rassemble l'expérience déjà acquise en matière de sécurité ou de durabilité des ouvrages, dans un cadre théorique relativement simple. Ainsi le dimensionnement des différentes parties d'un ouvrage se fait par le biais des coefficients de sécurité par rapport à des états limites, l'un dit de "service" en relation avec l'idée de fonctionnement durable, l'autre dit "ultime" définissant la ruine de l'ouvrage...

Cependant, les approches réglementaires s'avèrent limitées dans les cas suivants :

- Lorsqu'il s'agit des ouvrages qui sortent du quotidien tels que les centrales nucléaires, les tunnels, les barrages etc., pour les quels chaque construction est un prototype, du fait de l'évolution des technologies et de la particularité du site de réalisation,
- pour des sollicitations peu fréquentes mais généralement sévères comme par exemple les actions sismiques, les chocs et les actions de l'environnement,
- pour des problèmes de photologie liés soit au vieillissement du matériau soit à l'apparition d'un défaut.

Ce sont des cas pour lesquels l'ingénieur doit évaluer les risques et apporter la solution la plus convenable et la moins cher (réparation ou reconstruction).

D'autre part le béton n'est presque jamais utilisé seul; il est le plus souvent renforcé ou précontraint par des armatures en acier, et l'étude du matériau composite qui en résulte par un problème fondamental, la liaison acier-béton. De plus, le souci de l'amélioration des performances (mécaniques et économiques) des matériaux de constructions a conduit à l'élaboration de nouveaux composites, comme les bétons de fibres, qui font actuellement l'objet de recherches concernant leur fabrication, leur mise en œuvre et leur comportement mécanique.

Pour l'ensemble de ces raisons, il paraît nécessaire d'approfondir les connaissances sur le comportement jusqu'à la ruine du béton. Les travaux déjà nombreux sur ce thème conduisent à mettre en évidence l'extrême complexité de ce matériau fragile "rustique" qui présente une structure multiphasique fortement microporeuse. Ceci induit des caractéristiques particulières comme le comportement dissymétrique (différent en traction et en compression), le développement de microfissures sous charge, et le caractère unilatéral du béton endommagé.

Etudier l'ensemble de ces facteurs qui interviennent dans le processus de la ruine du matériau et construire un modèle de comportement aussi général semble, à l'heure actuelle, illusoire. Le degré de finesse de la description des différents mécanismes doit être déterminé en fonction des objectifs fixés préalablement à l'utilisation du modèle qui en résulte.

Dans ce contexte, le travail réalisé, concerne l'élaboration d'une méthodologie qui permet, pour une classe de problèmes déterminée, de choisir une modélisation appropriée.

Selon la nature et l'intensité de la sollicitation, le béton se déforme de manière complexe en faisant intervenir une ou plusieurs combinaisons de mécanismes élémentaires : élasticité, endommagement, glissement, frottement, fissuration... plusieurs recherches ont été lancées sur le comportement mécanique du béton dans l'espoir de mieux comprendre les mécanismes de dégradation de ce matériau. Plusieurs théories ont été développées. On peut citer l'approche locale de fissuration, la mécanique de la rupture, la théorie de la plasticité, la théorie de l'endommagement, la méthode de la fissuration distribuée, l'approche par homogénéisation... Une attention particulière sera portée à l'analyse des conséquences du couplage comportement-endommagement.

Ainsi, quatre parties composent cette étude :

Le premier chapitre est consacré au comportement expérimental du béton. On s'intéresse aux principaux mécanismes de sa dégradation en mettant en évidence le rôle de l'hétérogénéité. Plusieurs critères écrits en contrainte ou en déformation, couramment utilisés dans les modèles de comportement du béton, sont présentés.

Dans le deuxième chapitre, on passe en revue un éventail d'approches et de modèles de comportement du béton, formulations issues de la bibliographie, susceptibles d'assurer une indépendance au maillage. Plusieurs modèles numériques sont également présentés. Les formulations les plus robustes et les plus économiques du point de vue du calcul et de l'implémentation, serviront de base aux travaux présentés dans cette étude. Le caractère naturellement localisant des lois basées sur un couplage comportement/endommagement impose le choix d'un modèle particulièrement robuste et efficace.

Dans le troisième chapitre, un modèle d'endommagement scalaire isotrope écrit dans le cadre de la thermodynamique est présenté, modèle qui permet de prendre en compte des divers phénomènes tels que la dissymétrie du comportement en traction et en compression. A cela s'ajoute un comportement élastique anisotrope, différent en traction et en compression, modélisé dans un cadre thermodynamique. La modélisation de l'endommagement anisotrope est plus complexe. Dans le modèle proposé, on fait intervenir deux variables décrivant l'endommagement, une variable d'endommagement volumique (le scalaire  $\delta$ ), et une variable d'endommagement surfacique (le tenseur  $D$ ). L'anisotropie est induite par fissuration, le modèle relativement complet peut également rendre compte des déformations permanentes et de l'effet de refermeture de fissures observés lors de décharges, et nécessite l'identification de plusieurs paramètres au moyen d'essais complexes.

En contre partie, on obtient un résultat physiquement irréaliste d'une rupture à énergie dissipée nulle. L'aspect adoucissant d'un tel comportement favorise l'apparition de la localisation. L'utilisation d'un modèle local provoque des problèmes physiques (rupture à énergie dissipée nulle) et numérique (perte d'objectivité du maillage). Dès que le critère de localisation est satisfait, la déformation devient discontinue. On ne sait pas a priori où sera satisfait ce critère. De ce fait, les éléments finis usuels sont incapable de rendre compte d'une telle discontinuité. Des problèmes de convergences lors du calcul éléments finis apparaissent. Le critère de localisation apparaît comme la limite de fiabilité des calculs par éléments finis.

Après la localisation, il suffit, alors, d'une faible perturbation numérique pour obtenir des résultats complètement différents. Ceci s'explique, en partie, la "non-objectivité" de la réponse éléments finis.

L'adoucissement dû à l'endommagement est à l'origine de la localisation de la déformation dans le béton. Une méthode de régularisation devient donc nécessaire.

Dans le dernier chapitre, le travail de recherche est en grande partie dédié à ce phénomène de localisation, son origine, sa mise en évidence numérique et surtout aux moyens de s'affranchir des difficultés qu'il engendre. On présentera les différents "limiteurs de localisation" également appelés méthodes de régularisation. Le choix qui a été fait ici, est d'introduire dans le modèle local une évolution non locale de l'endommagement compatible avec la thermodynamique.

La modélisation est implémentée dans un code de calcul éléments finis en se basant sur la formulation intégrale. L'application montre que les résultats obtenus par le modèle non local sont quasiment indépendants du maillage, ce qui atteint l'objectif fixé pour ce type de modèle. Elle évoque également la validation des calculs à partir de la comparaison avec des résultats de la littérature.

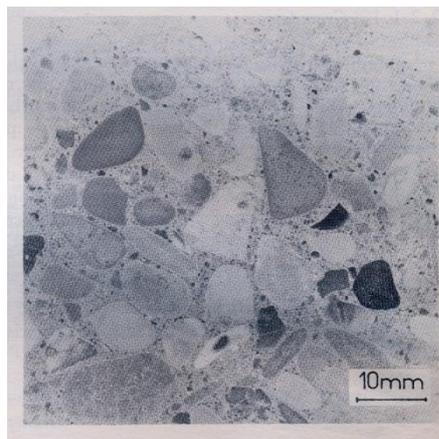
Nous terminons ce travail par une conclusion générale qui nous amène à fournir des éléments de perspectives.

# Chapitre 1

## Le béton, aspects expérimentaux

### Introduction

Le béton est le matériau composite granulaire, hétérogène (mortier et granulats), multiphasique (solide, liquide et gaz), à matrice fragile (granulats enrobés d'une pâte de ciment), le plus utilisé dans la construction. La connaissance de son comportement revêt donc un grand intérêt industriel. Ce comportement est très complexe car le matériau passe d'un état quasi liquide à un état solide et continue d'évoluer dans le temps. Finalement la structure d'un béton durci est la suivante (Figure 1.1) :



**Figure 1.1** : Structure d'un béton (d'après Mazars, Lab. Audio-visuel EN-SET)  
(Lemaitre & Chaboche 1988).

Le terme béton est un terme générique désignant un matériau de construction composite fabriqué à partir de granulats naturels (sable, gravillons) ou artificiels (granulats légers) agglomérés par un liant. Le liant peut être qualifié d'hydrique, lorsque sa prise se fait

par hydratation. Ce liant est appelé couramment ciment; on obtient dans ce cas un béton de ciment couramment utilisé. On peut aussi utiliser un liant hydrocarboné (bitume), ce qui conduit à la fabrication du béton bitumineux.

Le coulis est un mélange très fluide de ciment et d'eau.

Enfin, lorsque les granulats utilisés avec le liant hydraulique se réduisent à des sables, on parle alors de mortier.

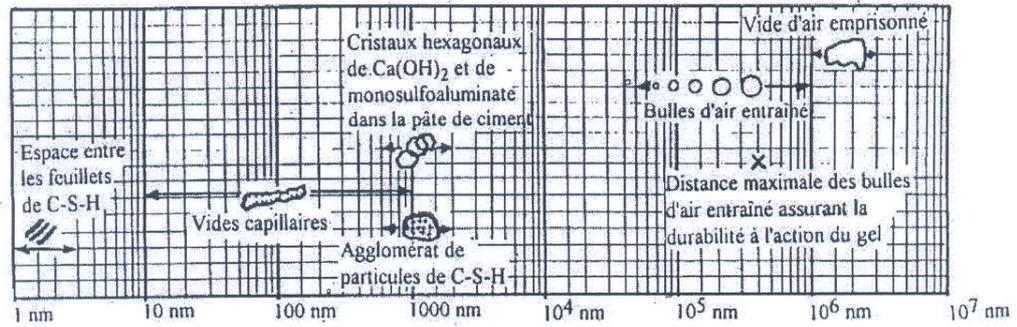
Le Pont du Jardin des Plantes de Grenoble, premier ouvrage au monde en béton coulé, construit en 1855 par Louis et Joseph Vicat est représenté sur la Figure 1.2 ([GrenobleCmieux.com](http://GrenobleCmieux.com)).



**Figure 1.2 :** Le pont du Jardin des plantes de Grenoble ([GrenobleCmieux.com](http://GrenobleCmieux.com)).

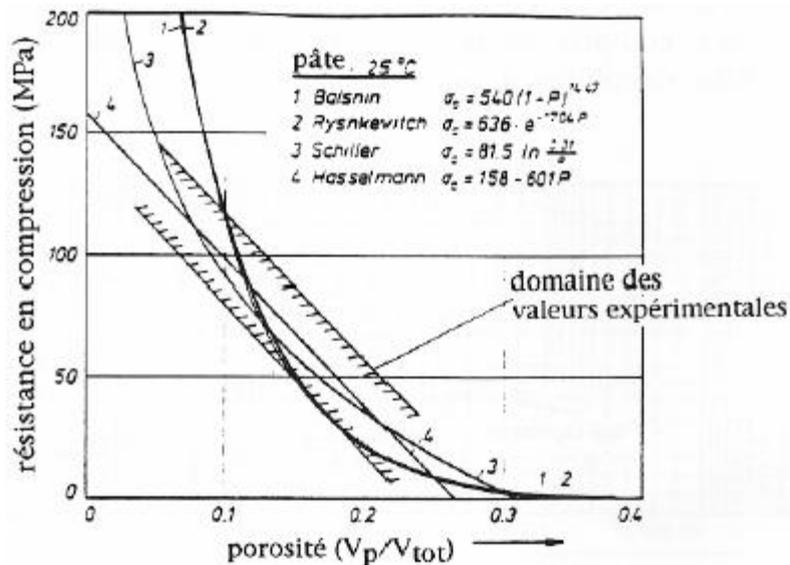
La pate de ciment représente 25 à 45% du volume total du béton. Chaque constituant a un rôle bien défini celui de liant pour la pate de ciment, celui de remplissage atténuateur de variations volumique (retrait) et source de résistance pour les granulats. Les mécanismes d'hydratation du ciment créent au sein du béton un espace poreux.

On distingue traditionnellement la porosité ouverte (dont les pores communiquent entre eux) de la porosité fermée (dont les vides se trouvent isolés les uns des autres). Le schéma présenté à la Figure 1.3 (**Mehta 1986**) illustre la répartition des dimensions des différentes phases solides et poreuses que l'on rencontre au sein de la matrice cimentaire du béton.



**Figure 1.3 :** Dimensions des pores et phases solides présentes dans la pâte de ciment (Mehta 1986).

Il est à noter que la structure des pores a une grande influence sur les propriétés mécaniques du béton (Rostasy & al. 1980, Ferreira & al. 1989). De nombreux essais ont permis de mettre en évidence l'influence de la porosité sur les propriétés mécanique du béton et plusieurs auteurs ont même proposé des relations théoriques permettant de lier la porosité totale à diverses caractéristiques (Rossler & Odler 1985, Perriera & al. 1989). La Figure 1.4 (Rossler & Odler 1985), présente à titre indicatif, les relations d'évolution de la résistance en compression en fonction de la porosité  $\left(\phi = \frac{V_p}{V_{tot}}\right)$ , proposées par différents auteurs. Sous haute température, la porosité évolue de façon significative du fait des pressions de pores.



**Figure 1.4 :** Evolution de la résistance en compression du béton en fonction de sa porosité (Rossler & Odler 1985).

## 1.1 Le béton : structure et comportement

Le béton est un matériau composite aggloméré composé de granulats durs de diverses dimensions collés entre eux par un liant. Dans les bétons courants, les granulats sont des grains de pierre, sable, gravier, cailloux et le liant est un ciment, généralement un ciment portland. Les composants sont très différents, leurs masses volumiques vont, dans les bétons courants de 1 (eau) à 3 (ciment)  $t/m^3$ . Si le type de liant n'est pas un ciment, on parle alors, selon le liant utilisé, de béton de résine, de béton d'hydrocarboné, de béton d'argile, etc.

La complexité de la microstructure du matériau béton est une des causes des particularités de son comportement mécanique. Le comportement très complexe et les mécanismes qui conduisent à sa modification peuvent être bien définis, seulement en étudiant le béton au niveau microscopique (microstructure), et en prenant en considération ses modifications physico-chimiques et les réactions qui ont lieu lors de chargement. Et leurs conséquences sur le comportement macroscopique (analyse microscopique).

Lorsque la structure est soumise à une sollicitation, des microfissures supplémentaires peuvent se former suite à des concentrations de contraintes de tension isolées dues à des déformations compatibles entre les granulats et le ciment. Lorsque ce chargement augmente, les microfissures se développent et se connectent éventuellement entre elles pour former une microfissure entraînant la rupture du matériau, ce qui se traduit à l'échelle macrostructurale pour une diminution des contraintes accompagnée d'une augmentation des déformations. Ce comportement dit adoucissant ou quasi-fragile est associé à un phénomène de localisation des déformations (**Bazant 1976**). En effet le mode de déformation est non homogène, c'est-à-dire que les déformations se concentrent dans des zones localisées de faibles dimensions (le long des microfissures dans le cas du béton) alors que tout le reste du matériau a tendance à se décharger. De sa part sa nature hétérogène, le béton présente donc un comportement mécanique très complexe englobant un comportement fortement non linéaire sous un état de contrainte multiaxial, une fissuration progressive induite par des contraintes ou par des déformations de tension conjuguées à un adoucissement en déformation, et un comportement dépendant du temps et du fluage.

Egalement, Lorsqu'il est soumis à l'action d'une charge rapidement croissante, le béton se comporte comme un matériau fragile. D'une part, sa rupture n'est pas précédée de déformations importantes.

### 1.1.1 Les granulats

Les granulats utilisés dans les travaux de génie civil doivent répondre à des impératifs de qualité et des caractéristiques propres à chaque usage. Les granulats constituent le squelette du béton, et ils représentent dans les cas usuel, environ 80% du poids total du béton. Les granulats sont nécessaires pour la fabrication des bétons, du point de vue économique, car ils permettent de diminuer la quantité de liant qui est plus cher. Du point de vue technique, ils augmentent la stabilité dimensionnelle (retrait, fluage) et ils sont plus résistant que la pâte de ciment. Il faut par conséquent, augmenter au maximum la quantité de granulats en respectant toutefois les deux conditions suivantes :

- Les granulats doivent satisfaire à certaines exigences de qualité ;
- La qualité de pâte liant doit être suffisante pour lier tous les grains et remplir les vides.

Les granulats utilisés pour le béton sont soit d'origine naturelles, soit d'origine artificiels. Leur taille variable déterminera l'utilisation du béton (les gros granulats pour le gros œuvre, les très fins pour le béton sophistiqué). La résistance du béton augmente avec la variété des calibres mélangés. On distingue les granulats naturels alluvionnaires, dits roulés, dont la forme a été acquise par l'érosion. Ces granulats sont lavés pour éliminer les particules argileuses. Et également les granulats de carrières qui sont obtenus par abattage ou concassage, ce qui leur donnent des formes angulaires. Différentes phases de concassage aboutissent à l'obtention de classes granulaires souhaitées. Les granulats utilisés pour le béton sont le plus souvent siliceux, calcaires ou siliceux-calcaires.

Un granulat est caractérisé du point de vue granulaire par sa classe  $d/D$ . lorsque  $d$  est inférieur à 2 mm, le granulat est désigné  $0/D$ .

Il existe cinq classes granulaires principales caractérisées par les dimensions extrêmes  $d$  et  $D$  de granulats rencontrées (Norme NF p 18-101) :

- Les fines  $0/D$  avec  $D$
- Les sables  $0/D$  avec  $D$
- Les gravillons  $d/D$  avec
- Les cailloux  $d/D$  avec
- Les graves  $d/D$  avec

On caractérise un granulat par sa courbe granulométrique qui donne en fonction de la dimension moyenne de grain, le pourcentage des grains de dimensions inférieures à une valeur donnée. Ces aspects interviennent dans les caractéristiques et qualité de la liaison pâte-granulats (**Rossi 1988**).

La dimension maximale des granulats à utiliser  $d$  dépend de la dimension caractéristique des ouvrages aux quels est destiné le béton, si  $h$  est la plus petite dimension de l'ouvrage et  $e$  l'espace compris entre deux armatures de ferrailage éventuel :

$$d \leq \frac{h}{4} \quad \text{ou} \quad d \leq \frac{3}{4}e \quad (1.1)$$

### 1.1.2 Le ciment

Le ciment est un produit moulu du refroidissement du clinker qui contient un mélange de silicates et d'aluminates de calcium porté à 1450- 1550 °C, température de fusion.

Le ciment usuel est aussi appelé liant hydraulique, car il a la propriété de s'hydrater et de durcir en présence d'eau, et parce que cette hydratation transforme la pâte liante, qui a une consistance de départ plus ou moins fluide, en un solide pratiquement insoluble dans l'eau. Ce durcissement est dû à l'hydratation de certains composés minéraux, notamment des silicates et des aluminates de calcium.

La composé de base des ciments actuels (ciment portland) est un mélange de silicates et d'aluminates de calcium résultant de la combinaison de la chaux (CaO) avec la silice (SiO<sub>2</sub>), l'alumine (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), et l'oxyde de fer (Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>). La chaux est apportée par des roches calcaires, l'alumine, la silice et l'oxyde de fer par des argiles broyées en poudre dont les dimensions des grains varient de 10 à 50 µm.

Les principaux composants anhydres obtenus lors du refroidissement rapide du clinker sont :

- Le silicate tricalcique 3 CaO. SiO<sub>2</sub> (C<sub>3</sub>S) (50-70%, du clinker)
- le silicate bicalcique 2 CaOSiO<sub>2</sub> (C<sub>2</sub>S) (10-30% du clinker).
- l'aluminate tricalcique 3CaO, AlO<sub>3</sub> (C<sub>3</sub>A) (2-15 % du clinker).
- l'alumina-ferrite tétracalcique (Ferro-aluminate tétracalcique) (4 CaOAl<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (C<sub>4</sub>AF) (5 – 15% du clinker)
- Gypse (~ 3%)

Dès que le ciment anhydre a été mélangé avec de l'eau, l'hydratation commence et les propriétés de la pâte ainsi obtenue sont évolutives dans le temps. Tant que cette hydratation

n'est pas trop avancée la pâte reste plus ou moins malléable, ce qui permet de lui faire épouser par moulage la forme désirée. Mais au bout d'un certain temps les cristaux d'hydrates prenant de plus en plus d'importance, le mélange a changé de viscosité et se raidit, on dit qu'il se fait priser. L'hydratation s'accompagne de plusieurs phénomènes (**Baron & al. 1982**).

La fabrication du ciment se réduit schématiquement aux trois opérations suivantes :

- Préparation du Cru
- Cuisson
- Broyage et conditionnement.

### 1.1.3 L'eau

L'eau est un constituant du béton qui peut être présent sous deux formes physique ou chimique, tout comme les autres composants du mélange, l'eau doit être propre. Le dosage doit faire preuve d'une attention particulière : trop d'eau entraîne la naissance de fissures et une perte de résistance au moment du séchage, on distingue :

L'eau chimique liée, l'eau absorbée et l'eau libre.

La structure d'un béton dur est formée :

- des granulats de différentes dimensions,
- de la pâte de ciment (un ensemble poreux) liée aux granulats,
- des défauts de liaison pâte-grains constitués par des microfissures dues au retrait et des cavités provenant des bulles d'air emprisonnées lors du moulage.
- ne pas oublier l'eau à l'intérieur des pores, elle est susceptible de migrer dans la pâte de ciment, et des échanges ne cessent d'avoir lieu avec le milieu extérieur.

L'interface entre la pâte et les granulats constitue souvent une zone de faiblesse de moindre résistance (Aurèle de transition). Il faut donc veiller à bien définir les conditions de stockage du béton (**Sierra 1974**).

## 1.2 Comportement macroscopique du béton sous sollicitations mécaniques

Dans ce qui suit, on présente un aperçu du comportement mécanique du béton à température ambiante sous divers types de sollicitation, en passant en revue son

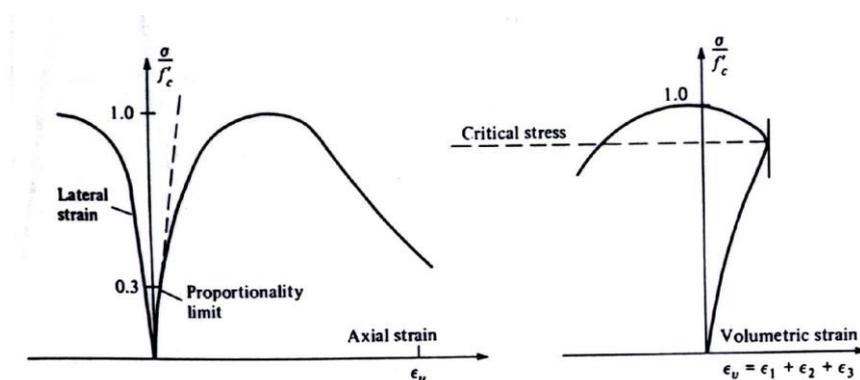
comportement sous sollicitation de compression simple et cyclique, traction simple et cyclique. Cette partie a pour but de mettre en évidence le lien entre la fissuration et l'endommagement. L'essai de traction- compression cyclique par contre, a pour but de mettre en évidence l'effet de la refermeture de fissures (effet unilatéral).

### 1.2.1 Comportement en compression simple

L'essai de compression uniaxial est utilisé pour connaître la résistance et le comportement du béton en compression. L'allure générale de la courbe contrainte-déformation est donnée par la Figure 1.5 (Chen 1982).

Nous observons les quatre phases suivantes :

- La réponse est linéaire jusqu'à 30% de la limite en compression
- La courbe devient de plus en plus non linéaire jusqu'à 75% ; apparition de l'irréversibilité (déformations permanentes)
- La courbe présente un pic suivi d'une branche post-pic correspondant à un comportement adoucissant (Figure 1. 5a). Cette branche post-pic est associée à une forte dilatance (expansion latérale) (Figure 1.5b), qui donne la variation de la contrainte appliquée en fonction de la variation de volume de l'éprouvette. le coefficient de poisson évolue (Figure 1. 5a).
- La rupture apparaît progressivement au-delà du pic par coalescence de microfissures et augmentation de volume ( $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ , sont les déformations principales (Figure 1. 5b)).

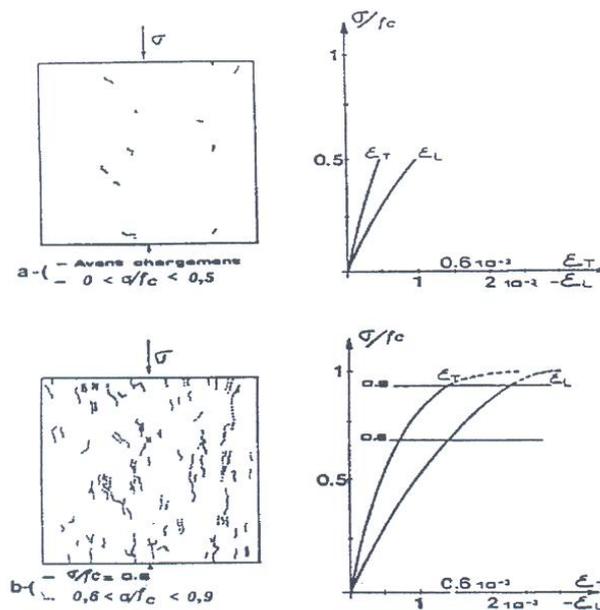


**Figure 1.5 :** Comportement du béton en compression simple (Chen 1982).

Cette dégradation du matériau essentiellement liée au développement de microfissures s'orientant parallèlement à la direction du chargement (et sont donc perpendiculaires aux

directions d'extension). L'interprétation micro-mécanique de ce comportement a fait l'objet de nombreux travaux (**Lorrain 1974, Mazars 1984, Berthaud 1988, Chen 1982, Marcio & al. 2002**), et il est maintenant bien admis que la dégradation est essentiellement liée au développement de microfissures. Le développement des microfissures est lié, selon plusieurs autres, à l'effet des extensions ( $\varepsilon > 0$ , déformation positive) (**Lorrain 1974, Mazars 1984**).

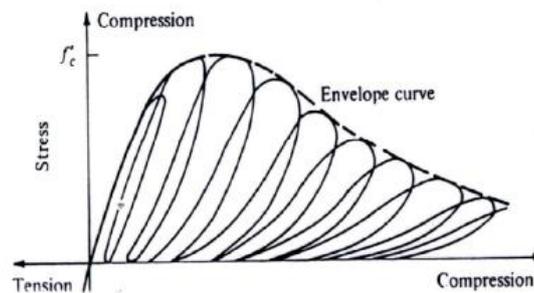
Des observations au microscope optique sur des tranches de matériaux présollicités ont montré que l'orientation privilégiée des microfissures est perpendiculaire aux directions d'extensions, créant ainsi dans un premier stade une anisotropie du comportement du béton, et dans un stade ultime des surfaces de rupture de même sens (Figure 1.6) (**Robinson 1965**). De plus il a été montré (**Torrenti 1994**) que les déformations se localisent dans l'éprouvette au pic d'effort, ce qui montre que le comportement post-pic observé est celui d'une structure dans laquelle le matériau ne répond pas d'une manière homogène.



**Figure 1.6** : Résultats de l'observation aux rayons X d'une éprouvette en compression (**Robinson 1965**).

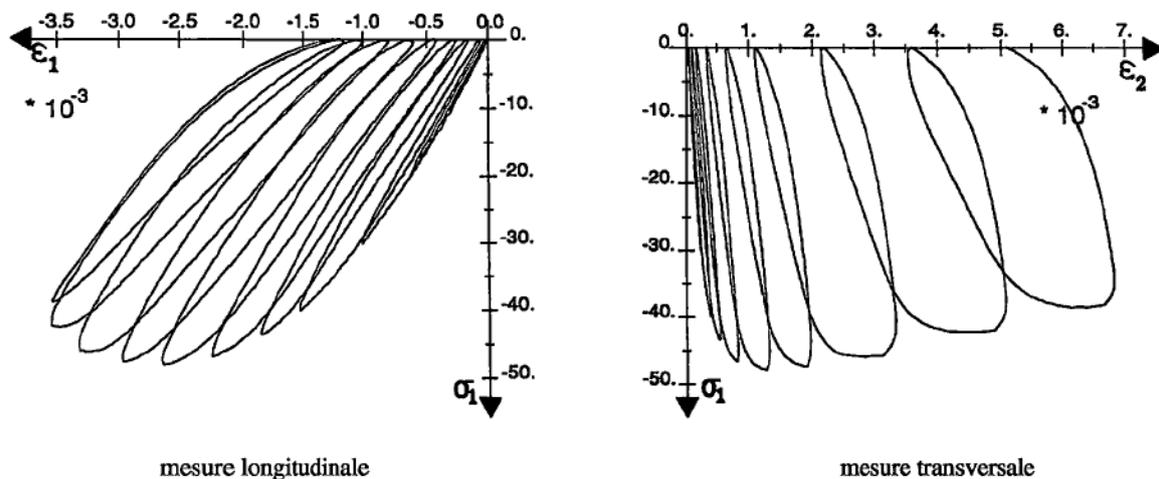
Le comportement en compression est obtenu plus facilement du fait de la plus grande ductilité du matériau. L'essai cyclique en compression présenté par la Figure 1.7 (**Karsan 1969**), permet de confirmer le rôle prépondérant du développement de la micro-fissuration qui provoque une dégradation des caractéristiques élastiques du matériau, et d'autre part, de mettre en évidence le développement de déformations permanentes. Celles-ci sont le plus

souvent expliquées par l'effet de frottement entre surfaces des micro-fissures et non la refermeture complète des micro-fissures après déchargement. De plus, nous distinguons clairement l'apparition de boucles d'hystérésis lors des cycles charge-décharge. Ce phénomène peut être lié à deux aspects : d'une part, au frottement entre lèvres de micro-fissures en cours de refermeture ou réouverture de celles-ci, et d'autre part, au mouvement de l'eau dans la structure micro-poreuse de la pâte de ciment hydratée (**Rossi 1986, Acker 1987**). L'amplitude de ces boucles évolue avec l'endommagement du matériau. Cette dissipation d'énergie s'explique par la présence d'une certaine viscosité et d'une plasticité induite par le frottement et le glissement des lèvres des microfissures lorsque celles-ci s'ouvrent et se referment (**Karsan 1969**).



**Figure 1.7** : Comportement cyclique du béton en compression simple (**Karsan 1969**).

La Figure 1.8 montre une réponse caractéristique d'un essai de compression sur un béton contrôlé par déformation radiale avec décharge successives (**Ramtani 1990**).

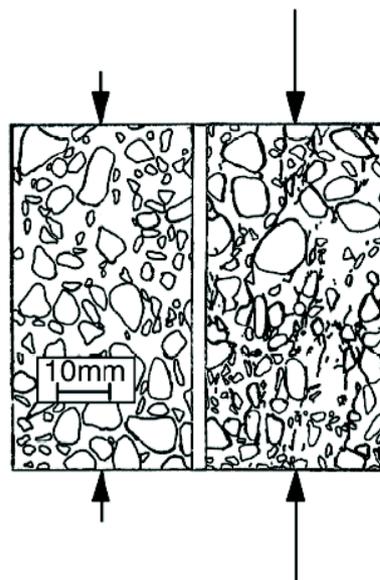


**Figure 1.8** : Essai de Compression : mesures longitudinales et radiales (**Ramtani 1990**).

L'analyse d'un essai de compression (**Mazars 1984**) distingue 4 phases que l'on rappelle :

- Phase 1 : Réponse quasi-linéaire jusqu'à 30-50 % de la charge ultime en compression  $f_c$ , ( $f_c$  étant la résistance en compression).
- Phase 2 : Apparition de la non-linéarité et de l'irréversibilité (déformations permanentes) entre 75 et 90 % de  $f_c$ .
- Phase 3 : Jusqu'à  $f_c$ , on assiste à une propagation instable : la non-linéarité augmente, les fissures s'orientent macroscopiquement plutôt parallèlement à la direction de chargement. On commence à fissurer la pâte de ciment.
- Phase 4 : Au delà de  $f_c$ , la contrainte diminue (adoucissement). On constate que cette diminution est d'autant plus brusque que la charge ultime  $f_c$  du matériau considéré est importante.

En compression simple la rupture présente un caractère ductile, des fissures principalement verticales apparaissent avant la phase de localisation proprement dite (Figure 1.9) et le volume augmente (dilatance). Le mécanisme gouvernant la non-linéarité semble être l'endommagement (dû à l'apparition des micro-fissures) mais également le frottement interne entre les lèvres des fissures mais aussi entre les granulats. Cet endommagement provoque la diminution de la raideur et l'apparition de déformations permanentes dues à l'ouverture des fissures.

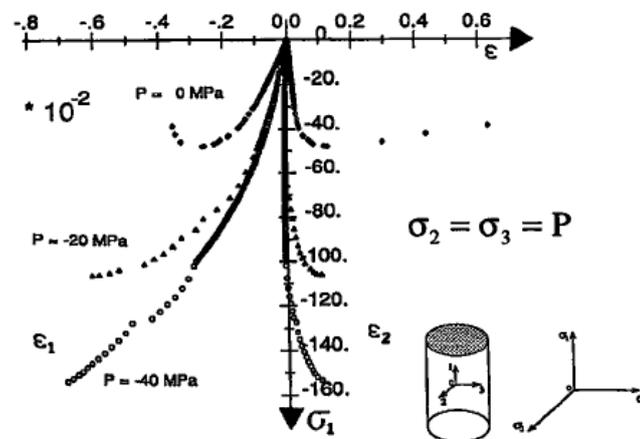


**Figure 1.9:** Évolution de la micro-fissuration en compression - pétrographie Shah  
(John & Shah 1986).

## 1.2.2 Comportement multiaxial

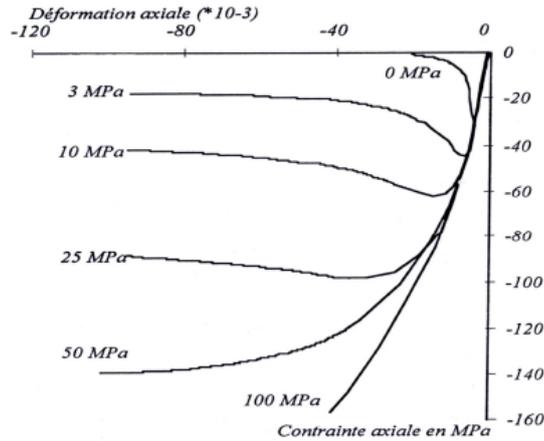
De nombreux essais de compression biaxiaux ont été pratiqués sur béton sollicitant des modes I et II de propagation de fissures (**Kupper & al. 1969, Bascoul 1974, Van Mier 1984, Torrenti 1987**). Selon les trajets de chargement, les ruptures sont plus ou moins ductiles et se produisent perpendiculairement au plan de traction maximale.

Les essais de compression triaxiaux permettent d'identifier le comportement du béton sous étreintes latérales (**Ramtani 1990**). La Figure 1.10 montre la réponse d'éprouvettes soumises à différents niveaux d'étreintes latérales en compression. Des essais hydrostatiques et quasi-œdométrique mettent en relief le comportement compactant des matériaux à matrice cimentaire du fait de l'effondrement de la structure micro-poreuse (**Bazant & al. 1986, Burlion 1997**). Cette caractéristique est capitale lorsqu'on s'intéresse aux structures soumises à des chocs sévères (pression de confinement de l'ordre du GPa). Ces techniques peuvent s'appliquer à d'autres types de structures tels que les assemblages métalliques (**Colson 1984**).



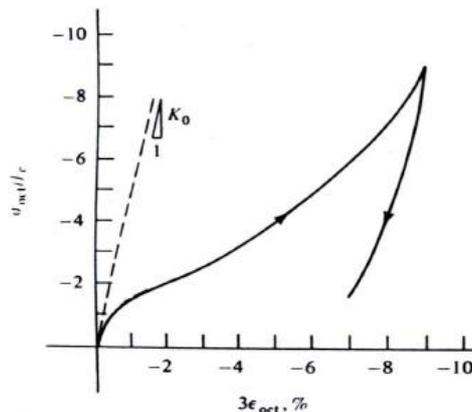
**Figure 1.10** : Trajets de chargements triaxiaux (**Ramtani 1990**).

On peut s'attendre également à une sensibilité du matériau béton à l'application de contrainte de confinement. C'est effectivement ce qui a été démontré par plusieurs auteurs (**Richart & al. 1928, Balmer 1949, Jamet & al. 1984**). On peut constater sur la Figure 1.11 que la réponse du béton est d'autant moins fragile que le confinement est important et que l'on obtient un comportement ductile pour les très grands confinements. Ce gain de rigidité est lié à l'augmentation des contacts au sein de la micro-structure du matériau béton qui est une conséquence de la destruction des pores (**Chen 1982, Ramtani 1990**).



**Figure 1.11:** Essais de compression triaxiale (Jamet & al. 1984).

En ce qui concerne le comportement du béton sous chargements hydrostatiques, le béton présente un comportement non linéaire. La Figure 1.12, présente le comportement expérimental dans le cas d'une compression hydrostatique (Chen 1982). On remarque une phase élastique linéaire, une deuxième phase d'assouplissement correspondant à l'effondrement progressif de la structure micro-poreuse de la pâte de ciment hydraté et une dernière phase de raidissement liée à l'augmentation des contacts au sein de la matière qui est une conséquence de la destruction des pores.



**Figure 1.12 :** Essai de compression hydrostatique du béton (Chen 1982).

Dans le cas d'un comportement adoucissant où une augmentation de la ductilité (en termes de contrainte et de déformation) est observée expérimentalement avec une augmentation de l'élanement (Van Mier 1984), les caractéristiques mécaniques de la structure changent quand la taille de celle-ci change. C'est l'effet de l'échelle. Il apparaît

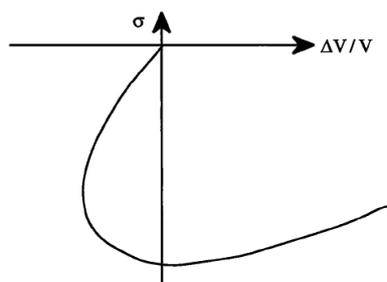
également lors des essais uniaxiaux sur des éprouvettes en béton, que la contrainte maximale supportée, diminue quand la taille de l'éprouvette augmente (**Vonk 1992**). Ce cas particulier d'effet d'échelle, où les sollicitations sont uniformes dans toutes les éprouvettes, est aussi appelé effet de volume.

Cet effet d'échelle peut être expliqué de la façon suivante : le béton n'est pas un matériau parfaitement homogène. En effet, à l'échelle des granulats, l'hétérogénéité du matériau se manifeste par la présence de microdéfauts, de microfissures et de microvides d'orientations aléatoires. Sous l'effet d'un chargement, les déformations se localisent rapidement dans les zones où il y a ces défauts. Plus les dimensions d'une structure sont grandes, plus il est probable d'avoir la présence d'une importante proportion de défauts.

Dans le cas des sollicitations multiaxiales les mêmes observations sont notées. On parle d'effet d'échelle de structures (**Bazant & al. 1993, Mazars & al. 1991**).

Nous pouvons mettre en évidence les principales caractéristiques du comportement du béton en compression :

- Comportement plus ductile, adoucissement en compression,
- Comportement quasi linéaire jusqu'à atteindre sa résistance maximale,
- Le rapport des déformations longitudinales et radiales montre le coté expansif du comportement en compression (dilatation) (Figure 1.13) (**Ragueneau 1999**),
- La résistance en traction est de l'ordre de 10% de celle en compression,
- La fissuration, source d'endommagement, affecte la rigidité et entraîne une diminution du module de Young,
- Les imperfections des fissures, interdisent leur complète refermeture après décharge générant des déformations irréversibles,
- Les différences de diminution de rigidité longitudinale et transversale mettent en évidence l'anisotropie induite par la fissuration orientée sur des plans parallèles au chargement.



**Figure 1.13** : Représentation schématique de la déformation volumique en compression simple (**Ragueneau 1999**).

### 1.2.3 Comportement en traction

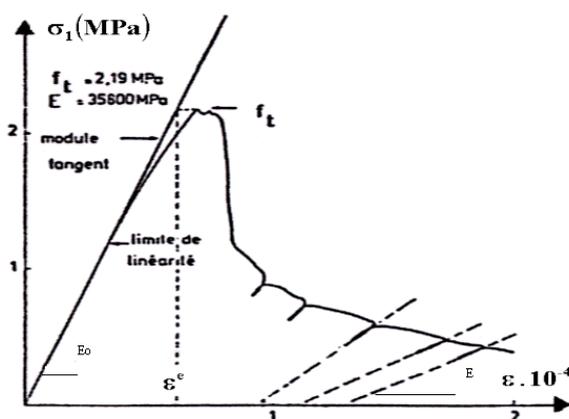
D'une manière simplifiée, le béton, comme tous les géo-matériaux et céramiques, est perçu comme fragile en traction et plus ductile sous sollicitations de compression. Bien qu'il soit conçu principalement pour résister à la compression, la connaissance de ses propriétés en traction est importante. Ainsi, des essais de traction directe et indirecte permettent de mettre en évidence ce comportement.

#### 1.2.3.1 Essais de traction directe

Ce type d'essais est difficile à réaliser, c'est pourquoi on fait souvent appel à des essais indirects pour déterminer le comportement du béton en traction.

- **Essai Asservi en déplacement**

Terrien (**Terrien 1980**) a réalisé un essai de traction sur une éprouvette cylindrique carotté dans un bloc confectionnée en micro-béton. La Figure 1.14 présente la courbe contrainte-déformation pour le béton en traction simple.



**Figure 1.14** : Comportement du béton en traction simple (**Terrien 1980**).

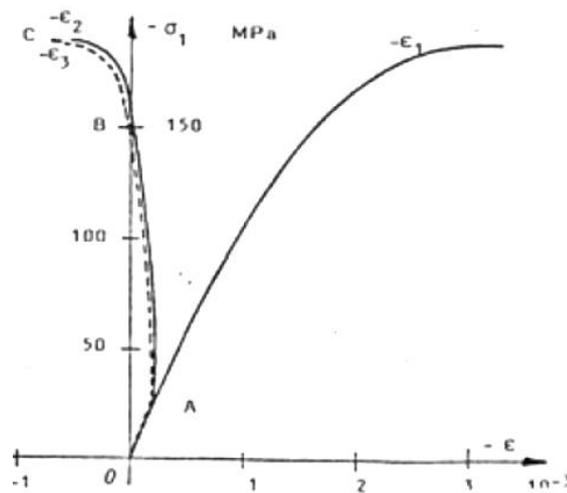
La courbe présente deux phases distinctes :

- Le comportement avant le pic ( $\sigma < f_t$ ) peut être considéré comme un comportement élastique linéaire avec une légère non-linéarité à l'approche du pic correspondant à la décohésion de quelques liaisons à l'interface pâte-granulats et à la progression de quelques microfissures dans la pâte de ciment ( $f_t$  étant la limite en traction) (**Ramtani 1990, Terrien 1980**).

- Le comportement adoucissant post-pic suivi d'une chute importante de la raideur et de l'apparition de déformation résiduelle (apparition de l'irréversibilité en raison de la forte hétérogénéité du béton, déformation permanente). La chute de raideur est due essentiellement au processus de décohésion du béton soumis à une extension. La déformation résiduelle est due à la nature hétérogène du matériau qui se traduit par une multitude de microfissures autour de la fissure principale lors de la rupture. Durant cette phase, les microfissures bifurquent dans la pâte de ciment et se propagent pour former une fissure principale perpendiculaire à la direction de chargement. Ce mécanisme se traduit par un endommagement directionnel du matériau qui devient orthotrope.

Plus généralement, dans le cas où il y aurait au moins une extension (du point de vue de la déformation), le béton se fissure selon le mode I. C'est le mode de dégradation le plus couramment rencontré pour le béton. L'endommagement dû aux extensions est donc naturellement pris en compte.

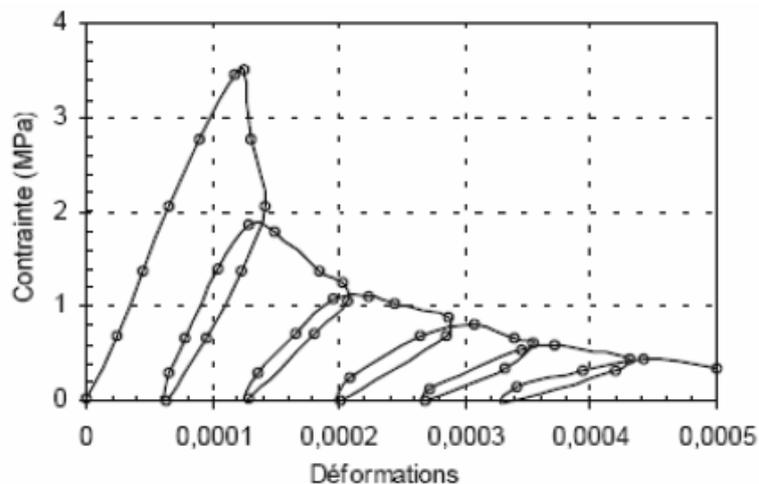
En étudiant ensuite le comportement résultant obtenu par Bertacchi et Belotti (**Bertacchi & Belotti 1972**) sur un échantillon cubique en béton soumis à un chargement hydrostatique ( $\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}$ ) puis à une évolution de  $\sigma_{11}$  après blocage de  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  à 29,3 MPa (Figure 1.15), on distingue trois phases de comportement : phase OA : élasticité et consolidation par l'effet hydrostatique. Il n'y a pas d'endommagement ; phase AB : il n'y a pas d'extension, mais l'endommagement se développe en raison d'une diffusion des microfissures selon le mode II ou III ; phase BC : extension possible, la rupture se produit en mode I ou en mode mixte si l'on continue à augmenter la charge. La phase AB montre que même s'il n'y a pas d'extension, l'endommagement évolue. Dans ce cas là, la partie déviatorique de déformations pourrait être responsable de l'endommagement. Ainsi, la phase BC conduit à la rupture en mode I ou en mode mixte, et met ainsi en évidence l'existence simultanée de 2 modes d'endommagement : "mode d'extension" et "mode de glissement".



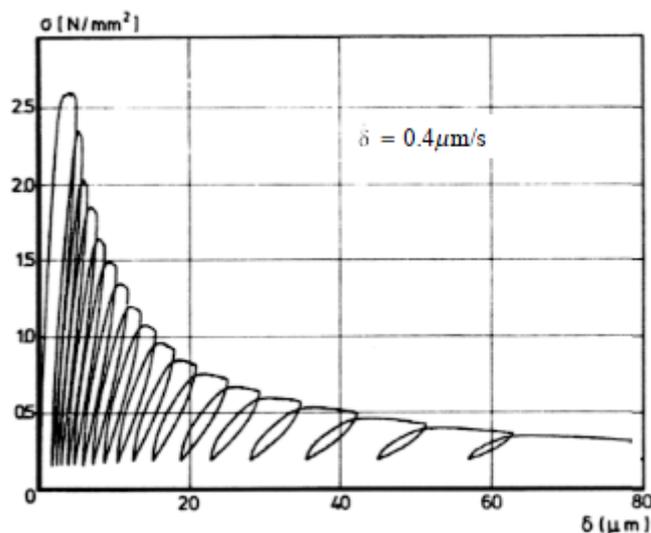
**Figure 1.15** : Courbe expérimentale de Bertacchi et Belotti (Bertacchi & Belotti 1972).

Les cycles de charge-décharge permettent de constater une chute importante de module en fin d'essai  $\left(E \cong \frac{E_0}{2}\right)$  (Gopalaratnam & al. 1985). Dans son état ultime, l'essai de traction directe conduit à une fissure unique, localisée et perpendiculaire à la direction d'extension.

L'essai de traction cyclique (Figure 1.16, Figure 1.17) montre des boucles d'hystérésis très faibles. Ceci s'explique par le fait que le frottement entre les lèvres de microfissures est moins important dans ce type de sollicitation.



**Figure 1.16** : Comportement cyclique du béton en traction simple (Gopalaratnam & al. 1985).



**Figure 1.17 :** Comportement cyclique du béton en traction simple  
(Reinhardt & Corneillesen 1984).

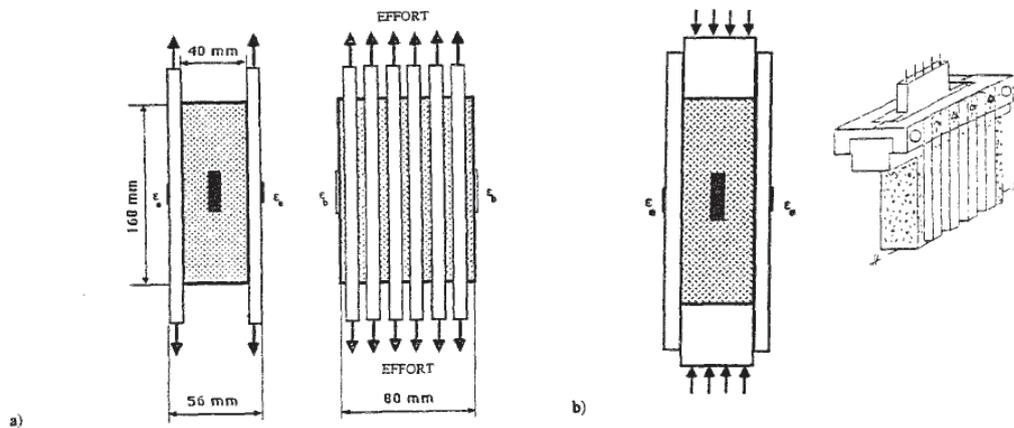
Les principales caractéristiques du comportement du béton en traction sont :

- Comportement fragile en traction
- Comportement quasi linéaire jusqu'à atteindre sa résistance maximale
- La résistance en traction est de l'ordre de 10% de celle en compression
- La non linéarité apparaît très rapidement et de façon importante
- Apparition de l'irréversibilité (déformations permanentes résiduelles)
- Naissance et coalescence de microfissures conduisent à la formation et à la propagation d'une ou plusieurs macrofissures, puis à la ruine.
- La fissuration source d'endommagement, affecte la rigidité et entraîne une diminution importante du module de Young.
- En phase ultime, cet essai conduit à une fissure unique, perpendiculaire à la direction du chargement et visible à l'œil nu.

- **Comportement cyclique, traction-compression**

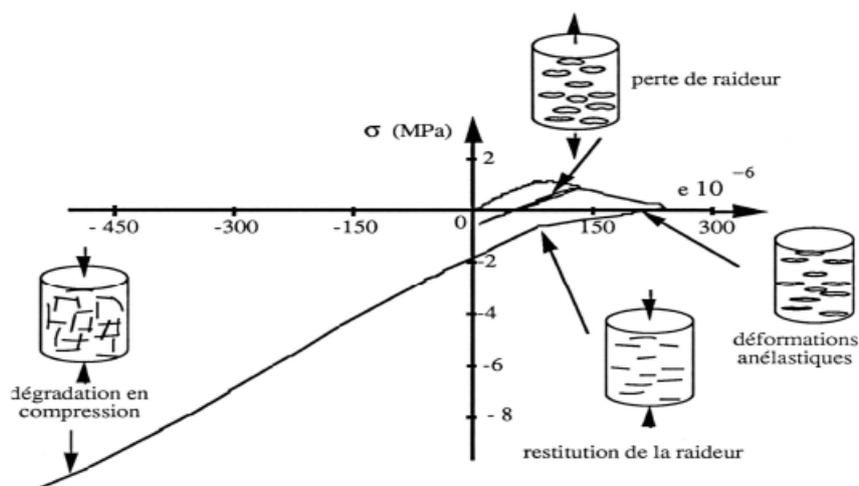
Les essais cycliques de traction-compression (voir par exemple l'essai P.I.E.D-Pour Identifier l'Endommagement Diffus) (Mazars & al. 1989, Ramtani 1990), réalisés pour avoir un endommagement diffus, c'est-à-dire une répartition uniforme des dégradations dans tout le volume de l'éprouvette. Cet essai est mis en place pour réaliser des essais uniaxiaux sur des matériaux dont le comportement est adoucissant. L'idée de base est due à

l'Hermitte (**Hermite 1973**), améliorée par Bazant (**Bazant & al. 1987**). L'effort est transmis au matériau par des barrettes métalliques collées le long des faces latérales d'une éprouvette prismatique (Figure 1.18).

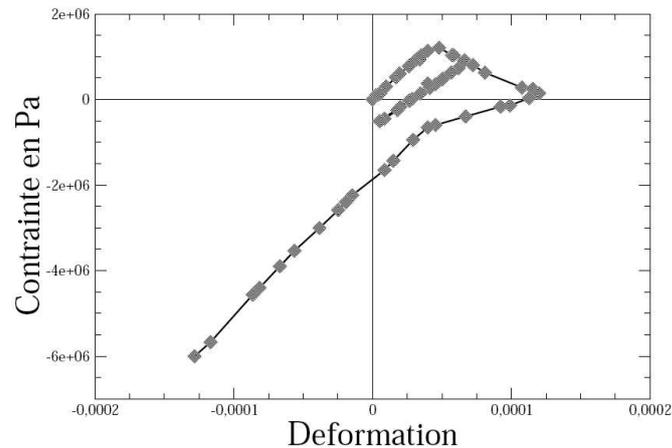


**Figure 1.18:** Principe de l'essai PIED. a) Traction, b) Compression (**Ramtani 1990**).

Ces essais permettent également de mettre en évidence une propriété importante du comportement du béton, c'est le caractère unilatéral. Ce phénomène consiste en une restauration de raideur lors du passage d'un chargement en traction, où cette raideur est initialement endommagée du fait de la fissuration, à un chargement en compression (**Ramtani 1990, Mazars & al. 1989**). Les résultats obtenus pour cet essai sont représentés par les Figures 1.19 et 1.20.

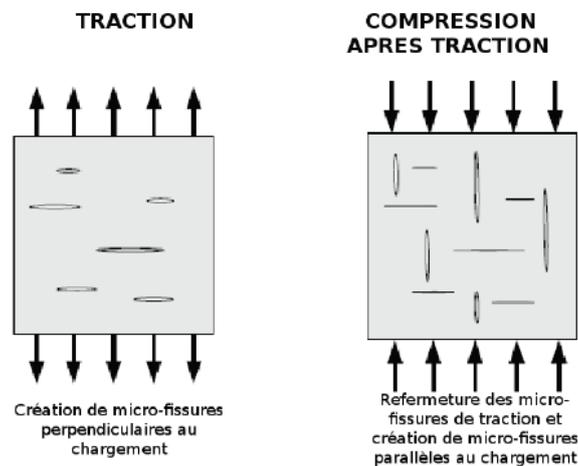


**Figure 1.19 :** Essai P.I.E.D : Comportement uniaxial du béton sous chargement cyclique (**Ramtani 1990**).



**Figure 1.20 :** Réponse expérimentale du béton sous sollicitations alternées (Mazars & al. 1989)

Ce phénomène s'interprète également comme l'effet de la refermeture en compression des microfissures ouvertes en traction (Figure 1.21). On constate également que la récupération de raideur n'est pas immédiate lorsque la contrainte devient négative.



**Figure 1.21:** Refermeture des fissures sous sollicitations alternées (Chambart 2009).

L'information principale de cet essai est que lorsque l'on sollicite en compression une éprouvette préalablement endommagée en traction, la raideur du matériau n'est pas la raideur endommagée ( $\tilde{E} = E(1-D)$  pour un endommagement scalaire); mais une raideur "restaurée" proche de la raideur initiale du matériau sain, c'est-à-dire que sous contrainte de compression, les fissures de traction se referment en sorte qu'il n'y ait aucune interaction avec

celles-ci qui vont se créer en compression dans une direction perpendiculaire (Figure 1.21). Le béton retrouve alors un comportement de matériau sain.

Les résultats expérimentaux sont très rares sur ce sujet du fait de la complexité de réaliser un essai de traction directe et surtout de générer un état d'endommagement diffus dans le matériau.

Cet essai met en évidence différents phénomènes :

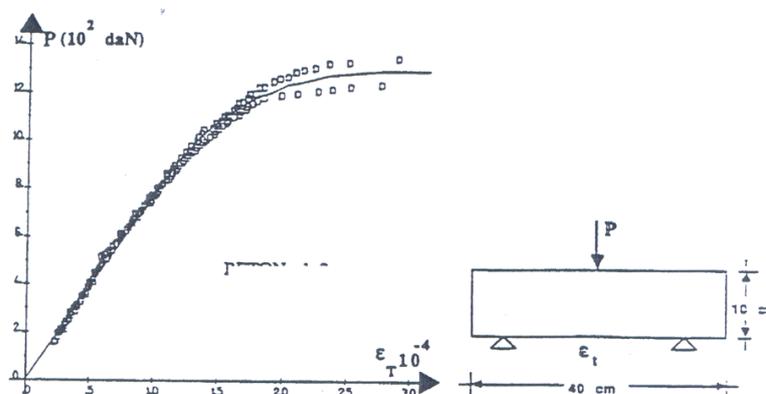
- Perte de raideur, dégradation du matériau (ouverture des fissures en traction et en compression).
- Déformations irréversibles anélastiques (dus à l'imperfection des lèvres de fissures)
- Restauration de raideur (refermeture des fissures, phénomène unilatéral au passage traction-compression).

### 1.2.3.2 Essais de traction indirects

Les essais permettant de mesurer la résistance en traction de façon indirect sont le plus souvent des essais de traction par flexion et des essais de traction par fendage (ou essais "brésilien").

- **Essais de traction par flexion trois points**

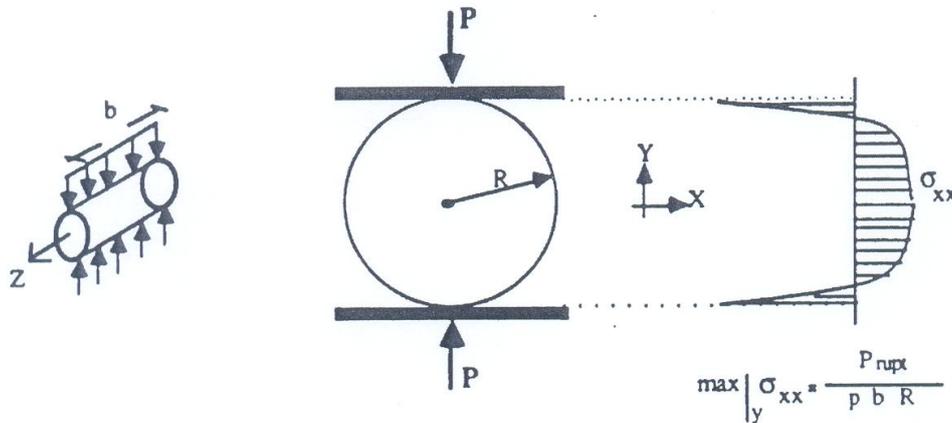
Les essais les plus courants sont des essais de traction par flexion. Ils s'effectuent en général sur des éprouvettes prismatiques. Cet essai de traction par flexion conduit à une localisation correcte des zones endommagées. Néanmoins, il donne des résultats qui sont fonction de la dimension des éprouvettes utilisées (Figure 1.22) (effet d'échelle, déjà cité) (**Hermite 1973, Saouridis 1988**).



**Figure 1.22** : Essai de traction indirect par flexion (**Hermite 1973, Saouridis 1988**).

- **Essai de traction par fendage ("Essai Brésilien" ou "Splitting Test")**

L'essai consiste à écraser un cylindre de béton suivant deux génératrices opposées entre les plateaux d'une presse. Cet essai est souvent appelé "Essai Brésilien" (Figure 1.23).



**Figure 1.23** : Essai de traction par fendage (Davenne & al. 1989).

Si  $P$  est la charge des compressions maximale produisant l'éclatement du cylindre par mise en traction du diamètre verticale, la résistance sera :

$$f_{ij} = 2 \frac{P}{2\pi DL} \quad (1.2)$$

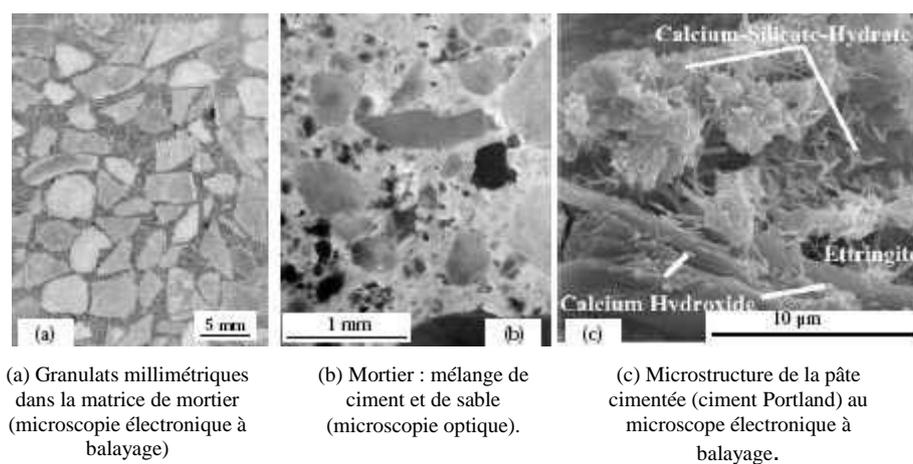
Avec  $j$  : âge du béton (en jours) au moment de l'essai,

$D$  et  $L$  : diamètre et longueur du cylindre

En effet, l'effet de compression appliqué développe des contraintes de traction à l'intérieur de l'éprouvette suivant le plan médian (Saouridis 1988, Hannaut & al. 1973). Le plan de rupture étant donc imposé : les contraintes de traction s'exercent sur le plan diamétral de chargement, et la rupture est progressive. De plus, il est possible de suivre visuellement la coalescence et l'ouverture de la macrofissure. Mais l'interprétation des résultats reste délicate.

### 1.2.3.3 Anisotropie induite par le chargement

Si l'on regarde la microstructure (le mélange de granulats et de pâte de ciment) d'un béton bien formulé (Figure 1.24), on observe un matériau relativement isotrope, dans le sens où il n'y a pas d'orientation privilégiée comme sur un matériau à fibres longues par exemple. L'anisotropie n'apparaît que lorsque l'on sollicite le matériau. On constate expérimentalement



**Figure 1.24 :** Structure multi-échelles d'un béton (Auvray 2003).

que la résistance en compression est environ 10 fois plus grande que la résistance en traction. L'anisotropie n'existant pas à l'origine, on parle donc d'anisotropie induite par le chargement ou tout simplement d'anisotropie induite. Elle peut s'observer au niveau de la microstructure, le mécanisme de dégradation (la microfissuration) qui se développe dans les deux cas est profondément différent.

#### 1.2.3.4 Comportement en fatigue du béton

La succession de cycle de chargement déchargement diminue la résistance du béton et, notamment, sa résistance en compression, celle-ci peut être divisée par 2 et plus après 10 cycles. Il n'existe probablement pas de limite d'endurance et, quelque soit le niveau de chargement, il y a tout un risque de rupture après un nombre de cycle suffisants (**Baron & al. 1982, Lemaitre & al. 1985**). La fatigue des bétons est associée au développement de microfissures dans l'interface granulats/pâte de ciment et dans la matrice elle même. On remarque également une plus grande diffusion des fissures par rapport aux essais de compression monotone (**Bennett 1974**).

### 1.3 Critères de limite d'élasticité

Le comportement du béton est linéaire en deçà d'un certain seuil ou limite d'élasticité quel que soit le type de chargement. Cependant la valeur de la limite d'élasticité sera différente d'un chargement multiaxial à un autre comme le montre (**Kupfer & al. 1969**) sur la surface limite d'élasticité déterminée expérimentalement (Figure 1.25). On observe une

augmentation de la limite d'élasticité pour des chargements confinés, constat classique fait sur les surfaces de rupture. Il est donc essentiel de définir un critère pour représenter au mieux ce comportement élastique. Plusieurs critères écrits en contrainte ou en déformation, couramment utilisés dans les modèles de comportement du béton, sont présentés sous la forme d'une fonction critère  $f$  telle que  $f < 0$  corresponde au domaine d'élasticité.

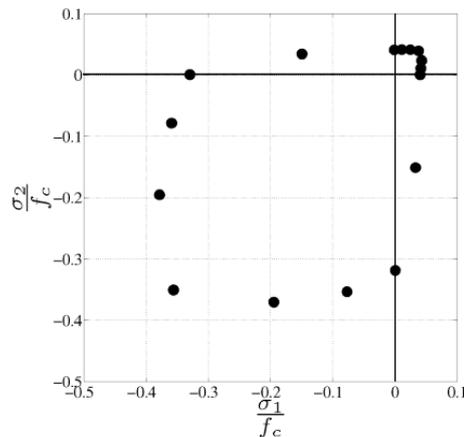
### 1.3.1 Critères écrits en contrainte

#### 1.3.1.1 Critère de Rankine

Le critère isotrope de Rankine énonce que pour rester dans le domaine élastique, aucune contrainte principale ne doit dépasser la limite élastique. Sa surface bien connue dans le cas des contraintes planes est un carré et un cube en 3D. Ce critère, ayant l'avantage d'être fermé (fait intervenir la pression hydrostatique), comporte des points anguleux et ne permet pas de modéliser la dissymétrie traction/compression :

$$f = \max |\sigma_i| - \sigma_y = 0 \quad (1.3)$$

Les contraintes  $\sigma_i$  sont les contraintes principales.



**Figure 1. 25** : Surface limite d'élasticité (**Kupfer & al. 1969**).

#### 1.3.1.2 Critère de Drucker-Prager

Les modèles de plasticité initialement développés pour représenter le comportement des métaux utilisent des critères isotropes réguliers de type von Mises ou anguleux de type Tresca.

Le critère de von Mises (équation 1.4), fonction du second invariant  $J_2 = \frac{1}{2} \sigma^D : \sigma_D$

du déviateur des contraintes  $\sigma_D = \sigma - \frac{1}{3}tr1$ . La surface représentant le critère de von Mises est un cylindre parallèle à la trissectrice de l'espace des contraintes principales :

$$f(\sigma) = \sigma_{eq} - \sigma_y \quad (1.4)$$

avec  $\sigma_y$  la limite d'élasticité en traction et  $\sigma_{eq}$ , la contrainte équivalente de von Mises :

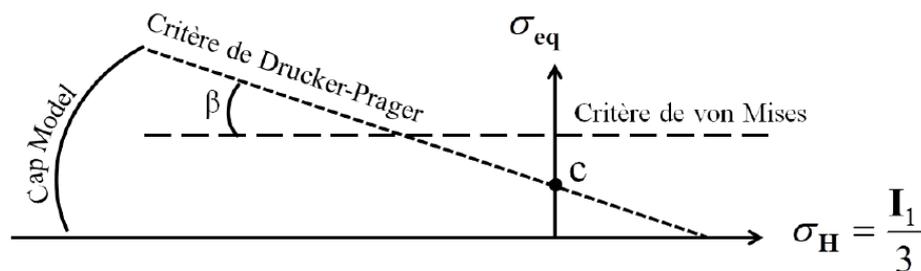
$$\sigma_y = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]} \quad (1.5)$$

si  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$ , et  $\sigma_{III}$  sont les contraintes principales.

Ces critères isotropes sont insensibles aux chargements hydrostatiques (surface ouverte sur l'axe hydrostatique) et ne sont donc pas adaptés pour les géomatériaux comme le béton. L'introduction d'une sensibilité aux contraintes hydrostatiques à l'aide du premier invariant du tenseur des contraintes  $I_1 = tr\sigma$  permet d'obtenir le critère de Drucker-Prager (**Drucker & Prager 1952**) :

$$f(\sigma) = \sigma_{eq} + \tan(\beta)\sigma_H - c \quad \text{où} \quad \sigma_H = \frac{I_1}{3} = \frac{tr\sigma}{3} \quad (1.6)$$

où  $\sigma_H$  est la contrainte hydrostatique,  $\beta$  l'angle de frottement et  $c$  la cohésion. La surface représentant le critère de Drucker-Prager est un cône à section circulaire admettant le même axe de symétrie que von Mises.



**Figure 1.26** : Représentation graphique de critères de limite d'élasticité (**Leroux 2012**).

Le critère Mohr-Coulomb est un autre critère classiquement utilisé qui comporte des points anguleux. Ces deux derniers critères ont l'avantage de prendre en compte la dissymétrie traction/compression. Le critère Drucker-Prager est fermé sur l'axe hydrostatique

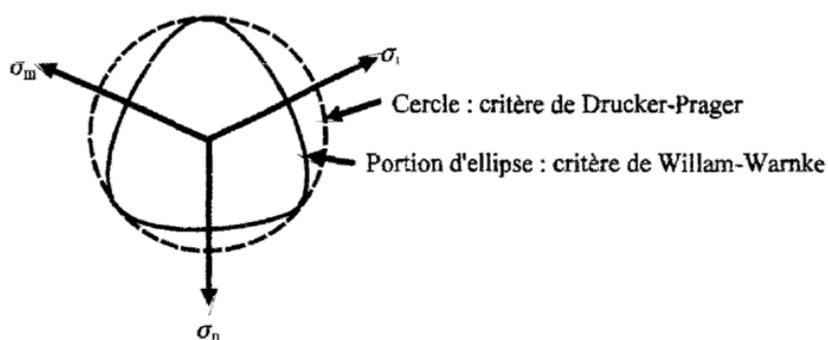
positif (tri-traction) mais reste ouvert sur l'axe hydrostatique négatif. Dans ce cas, le matériau reste élastique, par exemple en compression hydrostatique, ce qui n'est pas réaliste pour le béton puisque, nous l'avons vu, le phénomène de compaction apparaît. Pour fermer cette surface sur l'axe hydrostatique, la surface Drucker-Prager est, en général, complétée par une surface appelée "cap" (Figure 1.26) (Maggio & Sandler 1971, Hofstetter & al. 1993). Ces "cap model" permettent de fermer la surface de charge. Le problème de l'utilisation de ces modèles est un traitement numérique assez lourd nécessitant des résolutions locales itératives à l'intersection entre la surface de charge et le "cap" où se créent en général des points anguleux.

### 1.3.1.3 Critère de Willam-Warnke

De nombreux travaux dans la littérature des géomatériaux sont basés sur le critère de Willam-Warnke (Willam & Warnke 1975), comme ceux de (Fauchet 1991) ou encore de (Ulm 1994). Le critère de Willam-Warnke à 3 paramètres ( $f_t$ ,  $f_c$ ,  $\rho_0$ ), utilisé notamment par (Fauchet 1991), peut être considéré comme un critère de Drucker-Prager adapté au béton dans le domaine des faibles confinements. Ce critère est défini par l'équation suivante :

$$f = \sigma_{eq} + \mu(\theta)(\sigma_H - \sigma_{Hy}) \quad (1.7)$$

avec les contraintes de von Mises  $\sigma_{eq}$  et hydrostatique  $\sigma_H$  précédemment définies ainsi que  $\sigma_{Hy}$  un paramètre matériau. L'expression de la fonction  $\mu(\theta)$  est telle que, dans le plan du déviateur (Figure 1.27), la section initialement circulaire du critère de Drucker-Prager devient une portion d'ellipse entre deux méridiens successifs pour le critère de Willam-Warnke, l'un de compression et l'autre de traction.



**Figure 1.27** : Représentation des domaines d'élasticité de Willam-Warnke à 3 paramètres et de Drucker-Prager dans le plan du déviateur (Leroux 2012).

Ulm (**Ulm 1994**) propose de fermer ce critère (critère dénommé critère de Willam-Warnke modifié à 4 paramètres).

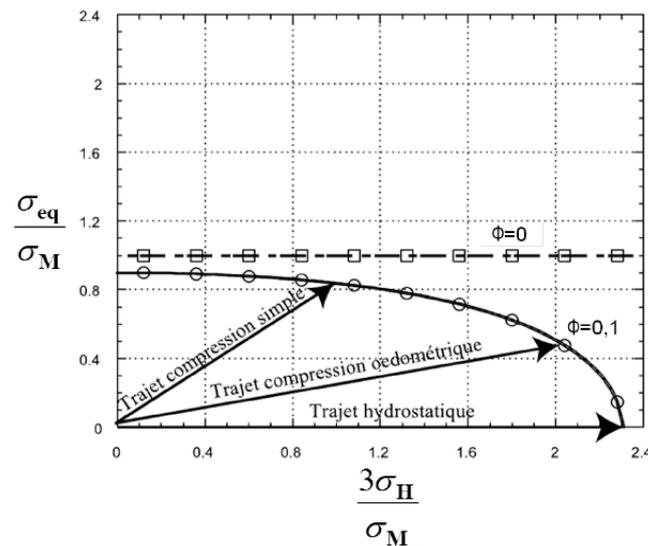
Dans la littérature, les approches continues de type Gurson sont aussi utilisées pour fermer cette surface selon l'axe du premier invariant des contraintes et éviter ainsi les points anguleux rencontrés notamment sur les "Cap model".

### 1.3.1.4 Critère de Gurson

Le critère de Gurson (**Gurson 1977**) (Figure 1.28) est initialement prévu pour modéliser la déformation plastique d'alliages métalliques ayant en leur sein des défauts sous forme de cavités. Il a notamment été utilisé afin de modéliser les déformations plastiques pour des matériaux poreux comme le béton, le critère est défini par :

$$f = \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_M} \right)^2 + 2q_1\phi \cosh \left( q_2 \frac{3\sigma_H}{2\sigma_M} \right) - \left( 1 + (q_3\phi)^2 \right) \quad (1.8)$$

Où  $\phi$  représente la porosité du matériau,  $\sigma_M$  est la contrainte dans la matrice (initialement égale à la limite d'élasticité de la matrice  $\sigma_y$  et  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  sont des paramètres scalaires du matériau.



**Figure 1.28** : Représentation du critère de Gurson modifié dans

le plan  $\left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_M}, \frac{3\sigma_H}{\sigma_M} \right)$  (**Gatuingt 1999**).

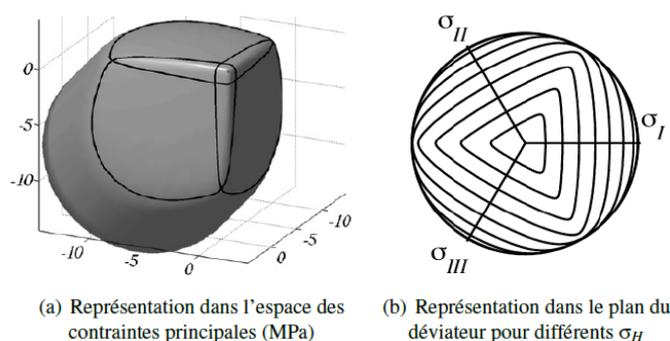
### 1.3.1.5 Critère de François

Le critère de François (**François 2008**) s'écrit sous la forme suivante :

$$f = \sigma_{eq} + \sigma_0 \left( \left\| \exp \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \right\| - \sqrt{3} \right) - \sigma_y \quad (1.9)$$

Avec  $\sigma_0$  et  $\sigma_y$  deux paramètres "matériau".

Le critère est représenté en 3D sur la Figure 1.29a et dans le plan du déviateur sur la Figure 1.29b. Les deux derniers critères présentés ont l'avantage d'être fermés et donnent ainsi la possibilité de modéliser le phénomène de compaction.



**Figure 1.29** : Réponses du critère de (**François 2008**).

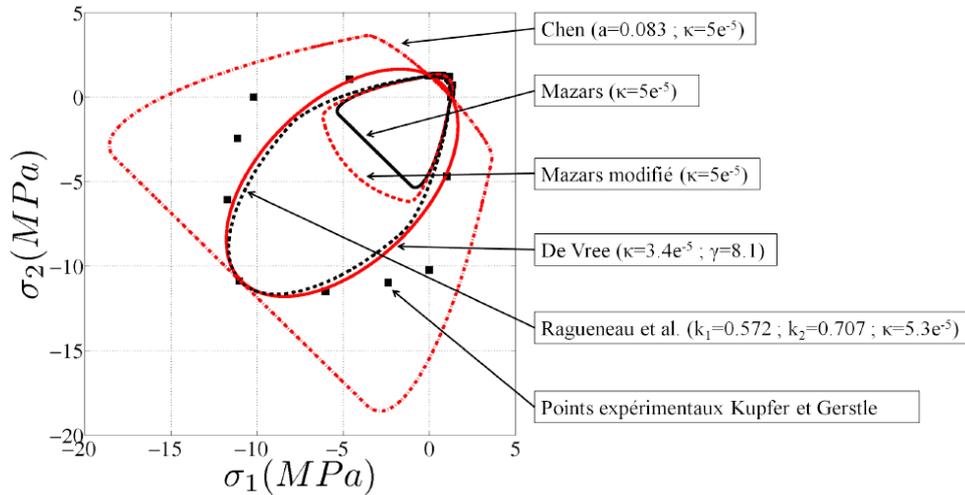
### 1.3.2 Critères écrits en déformation

Contrairement aux critères écrits en contrainte, ceux écrits en déformations sont moins nombreux et plus récents. Nous évoquerons dans cette partie le critère de De Vree (**Vree & al. 1995**), de Mazars (**Mazars 1984**) et des critères de Mazars enrichis à l'aide notamment des invariants des déformations (**Pontioli 1995**, **Ragueneau & al. 2008**, **Chen 2010**). Nous écrirons tous les critères en déformation sous la forme suivante :

$$f = \varepsilon_{eq} - k \quad (1.10)$$

La Figure 1.30 permet de comparer les surfaces de limite d'élasticité de ces critères par rapport aux points expérimentaux de (**Kupfer & al. 1969**). Le paramètre  $k$  (limite d'élasticité en déformation) a été ajusté pour chaque critère afin d'obtenir la même limite d'élasticité en traction uniaxiale, celle de (**Kupfer & al. 1969**). Pour certains critères possédant un second

paramètre, celui-ci a été ajusté afin d'obtenir la limite d'élasticité en bi-compression de (Kupfer & al. 1969).



**Figure 1.30** : Surfaces de limite d'élasticité des différents critères (Leroux 2012).

### 1.3.2.1 Critère de De Vree

Le critère de De Vree (De Vree & al. 1995) est écrit en fonction de deux invariants du tenseur des déformations  $I_1^\epsilon$  et  $J_2^\epsilon$ , où  $\sigma$  est remplacé par le tenseur des déformations  $\epsilon$ . Sa surface limite d'élasticité en forme d'ellipse (Figure 1.30) ne représente pas correctement la dissymétrie traction/compression, ni la réponse en bi-traction :

$$\epsilon_{eq} = \frac{\gamma-1}{2\gamma(1-2\nu)} I_1^3 + \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{1-2\nu} I_1^3\right)^2 + \frac{12\gamma}{(1+\nu)^2} J_2^3} \quad (1.11)$$

$\gamma$  est un paramètre du modèle permettant d'ajuster le rapport entre les limites d'élasticité de traction et de (bi-)compression.

### 1.3.2.2 Critère de Mazars

Le critère de Mazars (Mazars 1984) utilise une déformation équivalente, basée sur les extensions (valeurs propres positives du tenseur des déformations  $\epsilon$ ), et est défini comme suit:

$$\epsilon_{eq} = \tilde{\epsilon} = \sqrt{\langle \epsilon \rangle_+ : \langle \epsilon \rangle_+} = \sqrt{\sum_{l=1}^3 \langle \epsilon_l \rangle_+^2} \quad (1.12)$$

$\langle \cdot \rangle_+$  est l'opérateur appelé partie positive.

La surface limite d'élasticité de Mazars (Figure 1.30) ne permet pas de bien représenter les chargements de compression biaxiale.

### 1.3.2.3 Critères de Mazars enrichis

Le critère de Mazars a été modifié par Mazars et collaborateurs (**Cast3M 2012**), à l'aide d'une fonction de triaxialité  $\tau_x$ . La Figure 1.30 montre une amélioration pleinement satisfaisante :

$$f = \tilde{\varepsilon} - k\tau_x \quad \text{avec} \quad \tau_x = \frac{\text{tr}\langle \sigma \rangle_-}{\|\langle \sigma \rangle_-\|} \quad (1.13)$$

$\langle \cdot \rangle_-$  est l'opérateur de la partie négative.

(**Ragueneau & al. 2008**) proposent plusieurs critères écrits en fonction de la déformation équivalente de Mazars et des deux invariants du tenseur des déformations  $I_1^\varepsilon$  et  $J_2^\varepsilon$ . L'un de ces critères est présenté sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{eq} = \tilde{\varepsilon} + k_1 I_1^\varepsilon + k_2 \sqrt{J_2^\varepsilon} \quad (1.14)$$

Sa surface (Figure 1.30) permet de prendre en compte la réponse en bi-compression mais la dissymétrie traction/compression n'est pas très bien modélisée.

Enfin Chen (**Chen 2010**) propose un critère basé sur celui de Mazars avec un paramètre "a" permettant de modifier la dissymétrie traction/compression. Ce critère s'écrit sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{a(\langle \varepsilon \rangle_+ : \langle \varepsilon \rangle_+) + \frac{1-a}{(1-2\nu)^2} \langle \text{tr} \varepsilon \rangle_+^2} \quad (1.15)$$

Ce paramètre "a" a été identifié sur la réponse en bi-compression. La Figure 1.30 montre que la dissymétrie traction/compression est alors trop importante. A l'inverse, si nous identifions ce paramètre sur la réponse en compression, la réponse en bi-compression ne sera pas satisfaisante.

Les fonctions critères écrites en fonction des forces thermodynamiques (**Marigo 1981, Badel & al. 2007**) sont un autre type de critère moins utilisé. Ces fonctions se présentent

sous la forme suivante,  $f = y - k$ , avec  $y$  la force thermodynamique associée à l'endommagement et  $k$  la fonction de consolidation.

## Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une synthèse bibliographique sur le comportement expérimental du béton. Le béton est, comme en témoigne cette synthèse, un matériau qui demeure très complexe, ce qui rend sa modélisation difficile. Le recours à certaines simplifications s'avère donc quelques fois nécessaire.

Les principales caractéristiques du béton qu'on peut retenir sont :

- Un comportement élastique initial du béton, en traction comme en compression, est linéaire
- Apparition d'un comportement adoucissant après le pic, aussi bien en traction qu'en compression
- Apparition d'une déformation irréversible en traction et en compression
- Dégradation de la raideur du matériau mise en évidence lors de la décharge
- Restauration de la raideur lors de l'inversion du signe de la contrainte (caractère unilatéral)
- Une très grande dissymétrie du comportement en traction et en compression
- Les déformations transversales et les déformations longitudinales sont de signes opposés
- Une anisotropie induite correspondant à l'orientation privilégiée de la microfissuration dans la direction perpendiculaire aux extensions, qui se traduit au delà du pic par un gonflement du matériau
- Un comportement non- linéaire du béton, dû pratiquement à la création et à l'évolution progressive des microfissures contribuant à la dissipation d'énergie
- Le comportement non linéaire du béton a pour origine deux phénomènes distincts, s'interprète comme étant de l'endommagement du fait de la perte de raideur constatée sur les décharges élastiques et l'existence de déformations anélastiques,
- Des déformations permanentes apparaissent, après décharge, du fait de l'ouverture des microfissures, ces déformations sont plus importantes en compression qu'en traction.

- Parallèlement à la formation d'une fissure, se développe une importante zone endommagée constituée d'une multitude de microfissures autour de la fissure principale.
- la dégradation est essentiellement liée au développement de microfissures. Le développement des microfissures est lié, selon plusieurs auteurs, à l'effet des extensions
- La dissymétrie du comportement se constate aussi bien sur les contraintes pic (10 fois plus élevées en traction qu'en compression) que sur les déformations.
- Une résistance multiaxiale est plus élevée que la résistance en uniaxial.
- Le béton est représenté comme un milieu multifissuré depuis l'échelle la plus fine (quelques nanomètres) jusqu'à celle des cailloux les plus gros (quelques centimètres). Les hypothèses de la mécanique des milieux continus ne sont plus vérifiées, il est donc indispensable de faire recours à la mécanique des milieux endommagés pour la formulation de lois de comportement.

# Chapitre 2

## Modèles de comportement endommageable du béton

### Introduction

Le béton, largement utilisé dans la construction, présente un comportement non linéaire très complexe dû à son caractère hétérogène et quasi-fragile. Selon la nature et l'intensité de la sollicitation, cette hétérogénéité favorise le développement de divers modes de rupture et de propagation de fissures. Ceci rend difficile de trouver un modèle physique respectant ces modes d'une manière fiable tout en restant simple d'utilisation.

Plusieurs recherches expérimentales contribuent à mieux comprendre le comportement mécanique de ce matériau surtout avec l'apparition des fissurations et de la phase de rupture (**Ramtani 1990, Nooru-Mohamed 1992, Fichant 1996**). Si l'on considère un échantillon de béton sous chargement monotone croissant, par exemple en traction simple, on observe d'abord une microfissuration qui se propage dans toutes les directions. La continuité de ces microfissures engendre l'amorce et la propagation d'une macrofissure perpendiculaire à la direction de la contrainte principale majeure avant la rupture. Pendant cette phase, le béton présente un comportement adoucissant et anisotrope.

A ce phénomène s'ajoute le comportement dissymétrique en traction et en compression. La résistance en compression est beaucoup plus élevée que celle en traction. De plus, un béton préalablement fissuré en traction récupère sa rigidité quand on le comprime. Ce phénomène est dû à la refermeture des fissures. Les études expérimentales menées sur la loi de comportement du béton montrent également l'existence de déformations anélastiques.

Face à la complexité du comportement du béton sous sollicitations (hétérogénéité, aspect multiphasique, fissuration, anisotropie, unilatéralité avec déformation permanente...), un grand nombre de lois de comportement ont été établies. À travers la présentation de quelques modèles, nous essaierons de mettre en évidence les diverses théories et approches utilisées pour modéliser les différents aspects du comportement du béton.

## 2.1 Approches du comportement du béton

La modélisation macroscopique du comportement mécanique du béton a beaucoup évolué et les modèles actuels permettent de prendre en compte des phénomènes de plus en plus complexes.

Malgré cela, et particulièrement lorsqu'on doit se préoccuper de phénomènes couplés pour modéliser ce comportement, plusieurs approches théoriques ont été établies dont les deux principales sont : l'approche discontinue et l'approche continue. L'objectif est de mettre en évidence les avantages et les limitations des différentes formulations. Ensuite, une attention particulière sera apportée à l'étude du couplage entre les différentes lois de comportement mécanique, et surtout, à l'évolution des dégradations du matériau (donc à l'endommagement).

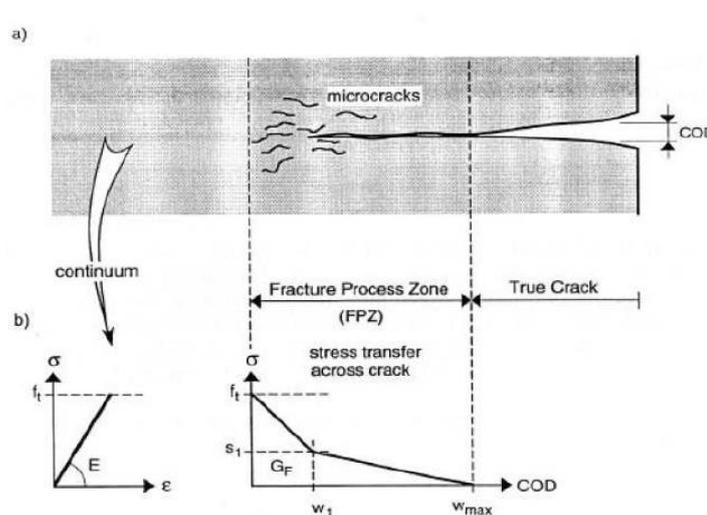
### 2.1.1 Approches discontinues

Dans les approches discontinues, nous nous intéressons à la partie non linéaire du comportement dû à la présence d'une microfissure. Pour cela, nous représentons la fissure explicitement par une discontinuité géométrique qui va se propager selon différents critères.

Deux principaux critères peuvent être envisagés :

- Le modèle linéaire élastique dans lequel la propagation de la fissure a lieu lorsque le facteur d'intensité des contraintes dépasse une valeur limite intrinsèque au matériau. Cette approche est peu adoptée pour décrire le comportement à la rupture des structures en béton, à cause de la présence en pointe de fissure d'une zone de microfissurations communément appelée FPZ (Fracture Process Zone). La taille de la FPZ est souvent non négligeable par rapport aux dimensions de la structure.
- Le modèle d'Hillerborg (**Hillerborg & al. 1976**) qui utilise la notion de fissure fictive (Figure 2.1), c'est un modèle non linéaire dans lequel la fissure est modélisée en deux parties : la première correspond à la fissure physique (fissure réelle), pour la contrainte

est nulle, la deuxième est la fissure fictive, pour laquelle la contrainte, non nulle dépend de l'ouverture de la fissure. La fissuration commence à se propager, lorsque la contrainte en pointe de fissure atteint la contrainte maximale en traction,  $f_t$ .



**Figure 2.1:** Modèle de fissure fictive de Hillerborg.

Figure d'après Brühwiler et Sambridge (**Brühwiler & Sambridge 1996**).

L'un des avantages de telles méthodes est de représenter explicitement la fissure (pour obtenir, par exemple, son ouverture). Néanmoins, la position initiale et le trajet de la fissure doivent être connus a priori. Le maillage dans un calcul par éléments finis doit pouvoir la représenter à chaque étape de sa propagation. Cela suppose généralement l'utilisation de techniques de remaillage automatiques qui rendent lourds et coûteux les calculs éléments finis. Les méthodes sans maillage "Meshless" (**Belytschko & al. 1994**) ou (**Askes 2000**) tendent à limiter la dépendance au maillage, mais elles nécessitent des ressources informatiques supérieures à celles d'une méthode éléments finis classique.

L'inconvénient de ces méthodes est double :

- La microfissuration n'est pas représentée explicitement,
- seulement la phase de propagation d'une macrofissure peut être simulée.

Ces approches sont alors difficilement applicables sur les structures complexes (enceinte de confinement, par exemple) où la fissuration n'est pas une donnée du problème.

### 2.1.2 Approches continues

Les approches continues qui permettent une modélisation acceptable du comportement non linéaire de dégradation du béton, consistent à considérer ce matériau comme un milieu continu et à intégrer le comportement non linéaire du matériau dans la loi de comportement. On s'affranchit ainsi du caractère discontinu provoqué par la fissure, en homogénéisant la loi de comportement sur un domaine fini. Les dégradations sont prises en compte par l'intermédiaire de variables supplémentaires agissant sur les caractéristiques mécaniques ou sur les variables de base de la modélisation. La fissure est alors représentée par une zone de matériau totalement dégradée, qui reste continue au sens de la mécanique des milieux continus. Ainsi, les redistributions des contraintes, qui résultent de la concentration des déformations et de l'évolution de la dégradation, auront lieu dans une région appelée zone de microfissuration ou FPZ (Fracture Processus Zone). L'évolution de la dégradation dans cette zone et de l'évolution de son étendu déterminent la direction de la propagation de la fissure.

À titre d'exemple : nous pouvons citer, concernant ces approches, les modèles de fissuration répartie "Smearred Crack Models " (**Rots 1988, Borst & al. 2003**) ou les modèles d'endommagement (**Mazars 1984, Desmorat & al. 2007**).

Si des modèles utilisant la théorie des milieux continus sont capables de représenter le comportement mécanique du béton pendant différentes phases caractéristiques (élastique, écrouissage non linéaire positif et écrouissage non linéaire négatif) ; ils ne donnent aucune information sur l'évolution de la fissuration, son ouverture en particulier.

### 2.1.3 Approches mixtes

Approches discrètes et méthodes continues présentant des avantages et des inconvénients dans la description du comportement du béton. Dans le premier cas, la fissure est modélisée comme une entité géométrique, mais la microfissuration n'est pas simulée explicitement, alors que les approches continues décrivent les micro et macrofissurations par une variable intermédiaire (l'endommagement), mais les caractéristiques de la macrofissuration ne sont pas obtenues. Les approches mixtes combinent à la fois les méthodes discontinues et continues pour s'affranchir de leurs limites en alliant leurs avantages.

Mazars et Pijaudier-cabot (**Mazars & Pijaudier-Cabot 1996**) ont proposé une approche basée sur la combinaison entre le modèle d'endommagement (pour la phase de microfissuration diffuse) et la mécanique linéaire élastique de la rupture (pour traiter la microfissuration). Néanmoins ce modèle est validé seulement dans le cas où le chemin de

fissuration est connu. Une autre approche mixte consiste à combiner les modèles continus et l'approche de type XFEM (Extended Finit Element Method), elle a été récemment proposée par Simon (**Simon & al. 2003**), et utilisée aussi par Comi (**Comi & al. 2004**).

Cette méthode est applicable jusqu'à présent seulement pour des cas tests bidimensionnels simples.

## **2.2 Analyse des modèles théoriques existants pour le béton**

A nos jours, la modélisation du comportement du béton pose encore des problèmes surtout en présence de la fissuration. Plusieurs modèles locaux ou non, basés sur la mécanique de la rupture ou sur la mécanique de l'endommagement, ont été proposés. Cette partie, de l'étude bibliographique est consacrée à l'analyse des différents modèles existants pour le béton.

### **2.2.1 Approches micromécaniques**

L'étude micromécanique d'une cellule comportant une fissure en son sein permet de remonter à l'écriture d'un potentiel d'énergie libre pour un matériau microfissuré. L'objectif de ces approches est la modélisation des micros mécanismes de base et, par conséquent, les relations sont construites pour une échelle inférieure à celle de l'élément de volume.

Ainsi, les théories d'homogénéisation et de changement d'échelle peuvent trouver toutes leur application. À ce niveau de description microscopique du comportement d'une fissure, il est plus aisé d'introduire des phénomènes complexes tels que la propagation en mode mixte (**Horii & Nemat-Nasser 1983, Lauterbach & Gross 1998**) ou encore le frottement entre lèvres de fissures (**Kachanov 1982**). Les approches micromécaniques sont considérées comme étant des approches indirectes.

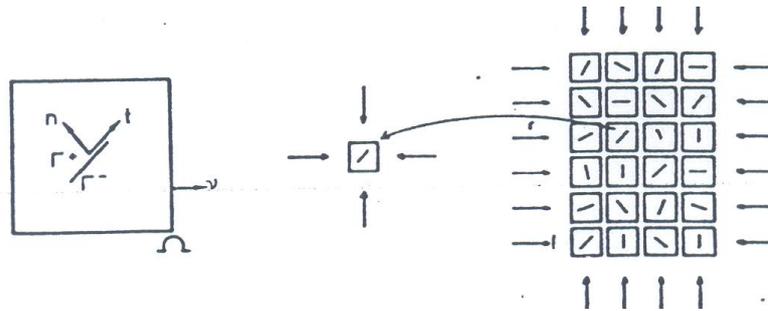
#### **2.2.1.1 Utilisation de techniques d'homogénéisation**

Les modèles utilisant les techniques d'homogénéisation (modélisation à partir d'une cellule élémentaire) sont fréquemment utilisés (**Suquet 1981**), pour représenter le comportement des matériaux composites ou ayant une structure de type périodique (matrice-inclusion). Dans (**Chibab & Dragon 1987**), on trouve par exemple, pour les matériaux métalliques, une modélisation de l'endommagement anisotrope couplé à la plasticité.

Cette technique a été utilisée par Andrieux (**Andrieux, Bamberger & Marigo 1986**) pour modéliser le comportement d'un matériau microfissuré comme le béton. On peut prendre

en compte l'ouverture et la fermeture avec ou sans frottement de fissures et de ce fait, simuler plusieurs des phénomènes observés macroscopiquement.

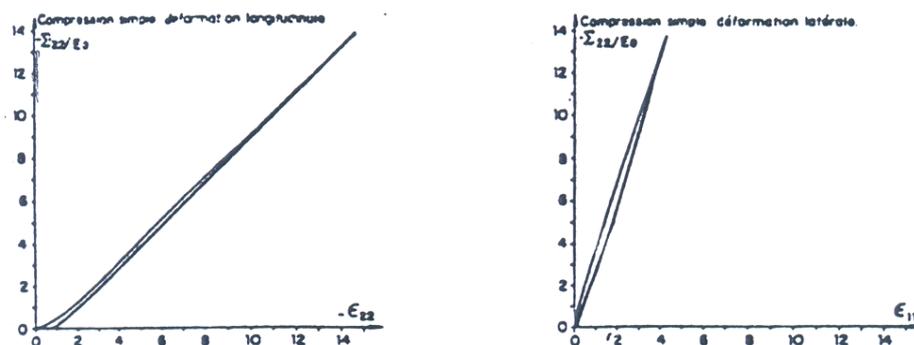
La modélisation s'établit par "la cellule élémentaire représentative" de taille suffisamment petite pour que l'hétérogénéité soit périodique (Figure 2.2).



**Figure 2.2 :** Cellule élémentaire et étude du comportement macroscopique  
(Andrieux & al. 1986).

La cellule élémentaire est une matière carrée comportant une fissure inclinée de taille  $2a$ . La modélisation de micromécanismes élémentaires se fait à l'aide de deux variables représentant les discontinuités de déplacement normales et tangentielles.

Le comportement macroscopique est déduit à partir d'un ensemble de cellules considérées indépendantes. Malgré une relative complexité surtout lorsqu'on considère une évolution de l'endommagement, on a pu mettre en évidence la "restauration" due à la fermeture des microfissures initiales lors d'un essai de compression, l'apparition de déformations permanentes lors de décharge et des boucles d'hystérésis pour des chargements cycliques charge-décharge (Figure 2.3).



**Figure 2.3 :** Cycle charge – décharge à endommagement constant (Andrieux & al. 1986).

Dans cette approche, le matériau est considéré comme étant une juxtaposition de cellules élémentaires de dimensions identiques (Figure 2.2). Chacune comprenant une ou plusieurs microfissures de microvides, d'orientations identiques ou arbitraires et de forme quelconques (Andrieux 1981, Marigo 1985, Nemat-Nasser & al. 1993). A partir d'observations microscopiques (au niveau de la cellule élémentaire), on utilise des méthodes d'homogénéisation afin de déduire le comportement macroscopique du matériau (Suquet 1982). Les étapes permettant le passage micro-macro dans cette approche sont résumées dans (Marigo 1985).

### 2.2.1.2 Modèle "microplan "

Une autre façon de procéder, consiste à considérer un certain nombre de plans, définis par leur normal, passant par un point matériel, et établir les relations reliant les déformations de ces micro-plans aux déformations totales. Ainsi, la connaissance du comportement à rupture d'un micro-plan permet, par intégration, de construire les relations régissant dans tout le corps.

Il s'agit d'établir une relation de type déformation-contrainte dans chaque plan. L'origine de cette idée vient de Taylor (Taylor 1938), elle a été utilisée pour la théorie de glissement dans les modèles de plasticité pour les métaux (Badorf & Boudiaski 1949).

D'autres approches basées sur cette idée ont été appliquées par la suite au cas des sols et aux roches par Zienkiewicz (Zienkiewicz & Pande 1977-1982), et au cas des bétons par Bazant (Bazant & Oh 1985). Sur ces principes ont été établies les modèles proposés par Bazant (Bazant & Oh 1985) et Seaman (Seaman & al. 1984).

L'état sur chaque plan de microfissuration est caractérisé par les composantes de la déformation normale  $\varepsilon_n$ , et la tangentielle  $\varepsilon_T$  et dépend de la déformation latérale  $\varepsilon_L$  appliquée sur des plans orthogonaux au plan considéré (Figure 2.4).

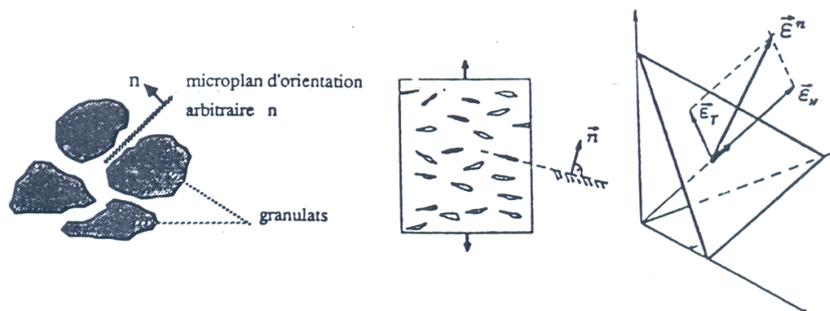
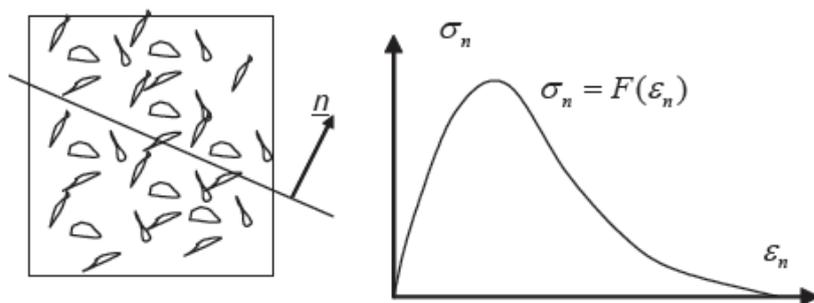


Figure 2.4 : Principe de modèle microplan pour le béton (Bazant & al. 1985).

Pour chaque "microplan" d'une inclination quelconque, on a une relation entre la déformation et la contrainte. Celles ci sont ensuite superposées pour obtenir des tenseurs macroscopiques de déformations et de contraintes (Figure 2.5). Ces relations contiennent généralement des variables d'état qui sont propres à chaque plan.



**Figure 2.5** : Un microplan et la relation déformation contrainte (Ung Quoc 2003).

Pour simplifier, on accepte dans la microstructure des chargements de type cinématique, c'est-à-dire les déformations sur un microplan sont déduites du tenseur des déformations globales.

On peut définir une déformation normale et tangentielle pour chaque plan par :

$$\varepsilon_n = n_i n_j \varepsilon_{ij} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_T = n_{jk} n_k \varepsilon_n \quad (2.2)$$

Ou  $n_i$  est la composante cosinus de la normale à chaque microplan.

$\varepsilon_n$  est la composante normale des déformations à chaque microplan.

$\varepsilon_T$  est la composante tangentielle des déformations à chaque microplan.

$\varepsilon_{ij}$  sont des composantes du tenseur global des déformations.

La relation clé entre la contrainte normale et la déformation normale pour chaque plan s'exprime (à noter que cette loi peut être linéaire, non-linéaire, croissante ou adoucissante ...) :

$$(2.3)$$

Le passage à l'échelle de la structure est effectué à partir de l'équilibre des contraintes entre le niveau microscopique et le niveau macroscopiques (Bazant & Oh 1985).

Le passage des quantités sur les microplans aux contraintes macroscopiques globales, se fait par une équivalence énergétique en appliquant le principe des travaux virtuels :

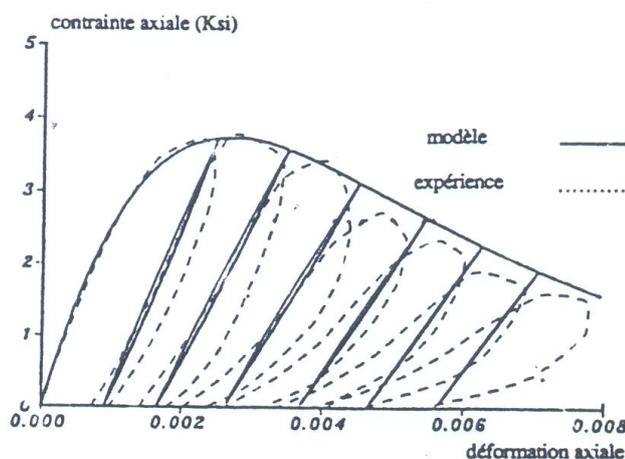
$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma \cdot n \, d\Omega \quad (2.4)$$

Avec  $\Omega$  un élément de volume autour de la normale  $n$  (une sphère unitaire).

Cette dernière étape est la plus difficile dans ce type de modèles car lorsque plusieurs plans sont activés, on doit les considérer simultanément.

Cependant, et vu de sa complexité, il est important de souligner l'existence de certaines difficultés liées à l'utilisation de ce modèle pour simuler le comportement global à l'échelle de la structure. A ce titre, Bazant (**Bazant 1986**) recommande d'utiliser ce modèle pour déterminer les paramètres caractéristiques du matériau (longueur caractéristique ou largeur de la bande de fissuration).

La Figure 2.6 montre une réponse obtenue pour une sollicitation de compression avec cycles charge décharge (**Bazant & al. 1985**).



**Figure 2.6** : Compression uniaxiale cyclique simulée par le modèle microplan (**Bazant & al. 1985**).

### 2.2.1.3 Modèles statistiques

Les modèles statistiques appartiennent aussi à cette catégorie d'approches. L'objectif, est d'inclure la dispersion des réponses (**Freudenthal 1968**) liée à la structure hétérogène et aléatoire du matériau dans la modélisation. On considère alors une distribution spatiale probabiliste de propriétés mécaniques (**Rossi & al. 1987**), ou une probabilité de

rupture de l'élément de volume. Cette dernière approche, initiée par Weibull (**Weibull 1939**) est ensuite utilisée par différents auteurs et incluse dans le modèle d'endommagement isotrope présenté en Mazars (**Mazars 1984**).

Enfin, une approche récente (**Breysse 1988**), consiste à remplacer le schéma habituel déterministe sollicitation → endommagement par une évolution probabiliste sollicitation → probabilité d'endommagement.

#### 2.2.1.4 Modèles numériques

Un dernier exemple de modèles issus des considérations principalement micromécaniques est ceux qu'on appelle les "modèles assistés par ordinateur" ou, dans du matériau considéré, le "béton numérique". L'ordinateur est utilisé pour simuler la structure aléatoire du matériau par assemblage approprié d'éléments finis auxquels on affecte des propriétés d'évolution particulières. L'exemple présenté par Roelfstra (**Roelfstra & al. 1986**), montre une suite d'opérations permettant de simuler le comportement en traction d'un cube en béton avec différents états de déformation initiale de retrait (Figure 2.7).

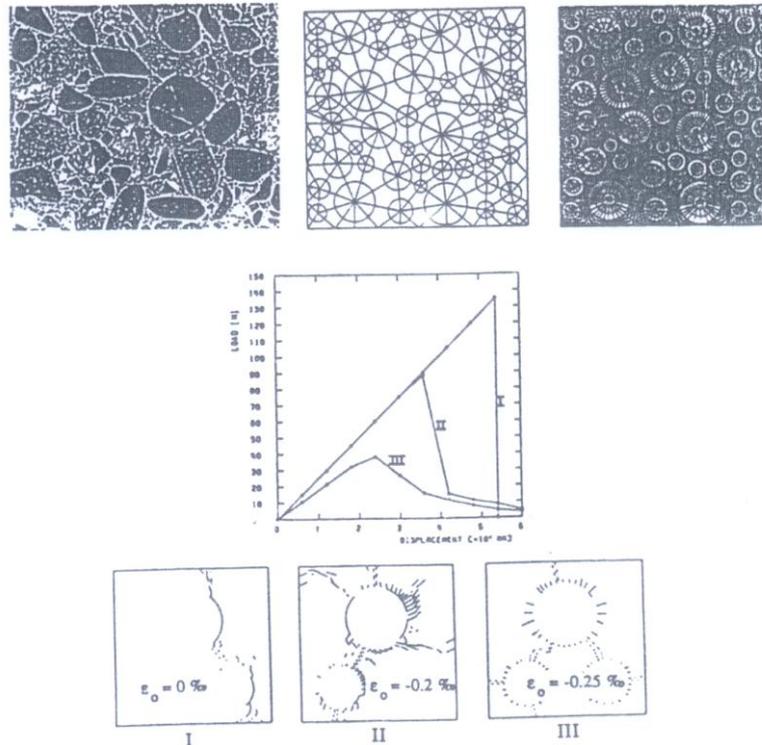


Figure 2.7 : "Béton numérique" (Roelfstra & al. 1986).

## 2.2.2 Modèles élastiques/plastiques

Parmi les modèles élastoplastiques, on peut distinguer tout d'abord les modèles élastiques avec élasticité non linéaire.

### 2.2.2.1 Modèles non linéaires

On dénombre deux approches différentes de l'élasticité non-linéaire : lois hyperélastiques et les lois hypoélastiques.

- Lois hyperélastiques, ou lois non-linéaires réversibles, indépendantes de l'histoire du chargement sont obtenues (pas de différence entre le comportement en charge et en décharge) :
  - Soit directement à partir des relations de l'élasticité linéaire isotrope, en substituant aux constantes élastiques ( $E_0$ ,  $\nu_0$ ,  $G_0$ ,  $K_0$ ), des fonctions des trois invariants du tenseur des contraintes et/ou des déformations (**Kupfer 1973**, **Ottosen 1979**, **Shareef & al. 1983**).

Citons par exemple le modèle isotrope d'Ottosen (**Ottosen 1979**) défini par les relations contraintes/ déformations octaédrales :

$$(2.5)$$

$$(2.6)$$

Où  $K_0$  et  $G_0$  sont les modules sécants introduisant la non-linéarité du matériau dans la loi classique de l'élasticité.

- Soit en postulant pour l'énergie complémentaire (ou de l'énergie de déformation) une forme polynomiale des invariants du tenseur des contraintes (ou des déformations) (**Chen 1982**).

Ces modèles reproduisent bien le phénomène de non-linéaire, de la dilatation et de l'anisotropie induite par le chargement, mais ils risquent d'une part de conduire à des lois non admissibles du point de vue thermodynamique et d'autre part de poser le problème de la détermination des nombreuses constantes que contiennent ces lois. De plus, ces modèles ne sont pas capables de décrire correctement la réponse à des chargements alternés.

- Lois hypoélastiques : ces lois, établies selon les formulations rigoureuses des lois incrémentales linéaires (**Murray 1979**, **Coon & Evan 1972**), présentent les mêmes désavantages que les lois précédentes. Toutefois des lois plus simples de ce genre ont été proposées, supposant un comportement incrémental du matériau soit

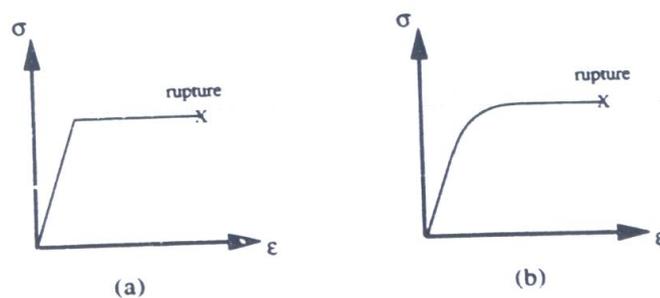
isotrope (**Kupfer 1973, Gerstle 1981**), soit orthotrope (**Darwin & al. 1977, Elwi & al. 1976, Liu & al. 1972, Saenz 1964**). Darwin (**Darwin & Pecknod 1976**) et Buyukozturk (**Buyukozturk & Shareef 1985**) ont ajouté une seconde loi pour tenir compte du comportement en décharge. Mais là encore, se pose le problème de l'inconsistance de la formulation qui engendre des discontinuités.

### 2.2.2.2 Modèles Elastoplastiques

Ces lois sont basées sur la théorie de la dislocation des métaux appliquées au béton par analogie. L'idée générale est que le béton est élastique, fragile en traction et élastoplastique écrouissable en compression (**Reynouard 1974, Frantzeskakis 1987**).

Une première approche du comportement du béton par la théorie incrémentale de la plasticité consiste à supposer le béton comme élastique parfaitement plastique (Figure 2.8a). Le domaine d'élasticité est alors défini par un critère de rupture, c'est-à-dire que la rupture survient lorsque le matériau atteint un état critique. Cette approche a été largement développée par (**Vallapian & Doolan 1972**), par (**Lin & Scordelis 1975**), avec pour critère de plasticité le plus simple, celui de von Mises.

La seconde approche consiste à considérer le béton comme un matériau élastoplastique écrouissable (Figure 2.8b). Lorsque le domaine d'élasticité atteint sa position ultime, on peut considérer soit que le matériau s'écrase, soit qu'il continue à se déformer en étant parfaitement plastique jusqu'à atteindre ses déformations ultimes.

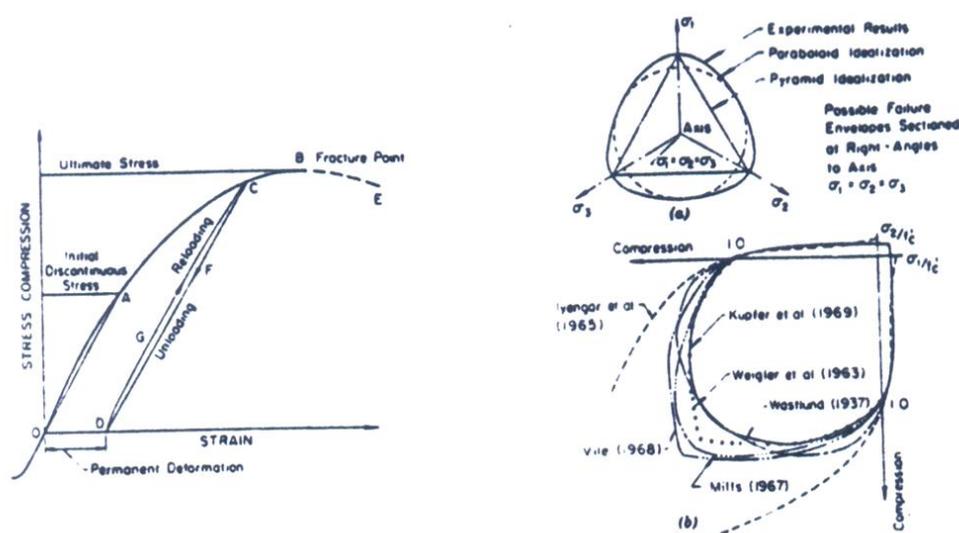


**Figure 2.8** : modèles élastoplastiques :

(a) parfaitement plastique, (b) écrouissable (**Pontioli 1995**).

Plusieurs lois ont été ainsi établies, se différenciant les unes des autres, suivant le choix des critères de plasticité, des lois d'écrouissage (isotrope, cinématique ou mixte) et des lois d'écoulement (associées ou non associées).

L'exemple typique d'un modèle élastoplastique écrouissable est celui de Chen (**Chen 1975**), largement employé pour le calcul des structures planes en éléments finis et implanté dans les codes de calcul industriels tels que ABAQUS (**ABAQUS 1989**), ADINA (**ADINA 1982**) et CASTEM (**CASTEM 1988**) (Figure 2.9).



**Figure 2.9:** Modèle élastoplastique écrouissable (**Chen 1975**).

### 2.2.2.3 Modèles de fissurations

La présence d'une fissure dans une structure analysée par la méthode des éléments finis peut être modélisée de différentes façons. Le choix de la modélisation a une influence sur l'algorithme de propagation et sur le comportement de la fissure elle-même.

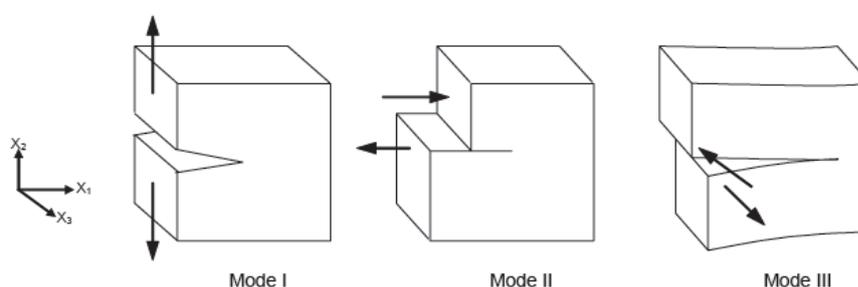
Les modèles présentés dans cette partie considèrent que le béton est un matériau homogène. En général l'hétérogénéité du béton est rarement prise en compte de façon directe, la modélisation de la fissuration par éléments finis étant déjà relativement complexe à mettre en œuvre.

Les travaux pionniers en matière de modélisation de fissuration sont ceux de Ngo et Scordelis (**Ngo & Scordelis 1967**) qui ont introduit le concept de la fissuration discrète et ceux de Roshid (**Roshid 1968**) qui a introduit le concept de la fissuration répartie. La première approche modélise la fissure en insérant une discontinuité géométrique réelle dans le maillage, et la seconde simule la fissuration en modifiant les propriétés du matériau à l'endroit de la fissure.

### Mécanique linéaire de la rupture

Cette méthode est décrite initialement par Lemaitre (**Lemaitre & Chaboche 1988**). Selon la direction de la sollicitation par rapport à celle de la fissure, on distingue trois modes de fissuration (Figure 2.10) :

- Le mode I (mode d'ouverture) où les contraintes normales ouvrent la fissure.
- Le mode II (mode de cisaillement) où les contraintes tangentielle ouvrent la fissure.
- Le mode III (mode de cisaillement anti plan) où les contraintes tangentielles ouvrent la fissure.



**Figure 2.10:** Les modes de sollicitations d'une fissure (**Ung Quoc 2003**).

La mécanique linéaire de la rupture n'est applicable que pour les matériaux linéaires quasi élastiques fragiles. La modélisation la plus simple consiste à considérer le matériau homogène et isotrope, et ayant un comportement élastique linéaire. La présence d'une fissure est prise en compte par des paramètres considérés caractéristiques du matériau (facteurs d'intensité de contraintes  $K$ ) pour un type de fissuration (les différents modes (I, II, III) de propagation). Ces paramètres permettent le calcul des contraintes à la pointe de la fissure.

La propagation de la fissure est simulée à partir d'un critère énergétique classique (Griffith). Énergiquement, si une fissure se propage, il y a dissipation de l'énergie potentielle. Le taux de restitution d'énergie de fissuration  $G$  présente une quantité d'énergie disponible qui peut être utilisée pour créer le mécanisme de décohésion entre les deux lèvres de fissure. On introduit aussi  $G_c$  la valeur seuil d'énergie (qui est fonction de l'énergie dissipée par une unité de surface de propagation de fissuration  $\gamma$ ), à partir de laquelle la fissure commence à se propager ( $G$  et  $G_c$  ne sont utilisées que pour le mode I de fissuration).  $\gamma$  est une constante caractéristique du matériau.

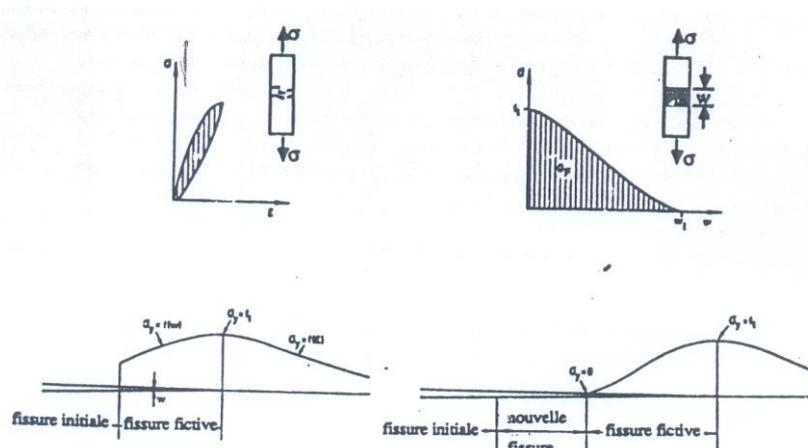
### Mécanique non linéaire de la rupture

L'hypothèse du comportement linéaire, utilisé par la mécanique de la rupture, sous-entend que la seule cause de dissipation d'énergie est la création de nouvelles surfaces lors de la propagation de la fissure. Il s'agit ici d'un modèle applicable pour le comportement non-linéaire. Il existe deux approches : zone plastique à la pointe de la fissure et analyse élastique non-linéaire. L'essentiel de la première approche est d'estimer cette zone plastique non-linéaire et de prendre en compte l'énergie dissipée par microfissure au voisinage de la pointe de la fissure.

Afin de surmonter les difficultés d'identification inhérentes à cette hypothèse et pour mieux représenter l'état de contrainte à la pointe de la fissure (contrainte supposée infinie par la mécanique linéaire de la rupture), différents auteurs ont introduit des caractéristiques de comportement non-linéaire tout en conservant le même formalisme (approche globale, facteurs d'intensité de contraintes, taux critique de restitution d'énergie).

La justification de base est qu'au-delà de la dissipation due à la propagation de la fissure, une autre raison de dépense d'énergie est la microfissuration. En faisant l'hypothèse que la zone de microfissuration ("Process zone") est suffisamment restreinte, on la représente comme étant le prolongement fictif de la fissure existante et on adopte pour la décrire une relation non linéaire entre la contrainte et l'ouverture de cette fissure fictive.

Le premier modèle issu de ces considérations est le modèle (Hillerborg & al. 1976), qui a été repris et modifié par différents auteurs (Hillerborg & al. 1976, Bazant & al. 1983, William & al. 1986). Les principes de ce modèle (Hillerborg & al. 1976) sont donnés schématiquement sur la Figure 2.11.



**Figure 2.11:** "Friction Crack Model", Comportement et processus de fissuration (Hillerborg & al. 1976).

L'énergie absorbée par la "fissure fictive" (Figure 2.12) est directement liée à "l'énergie de rupture"  $G_f$  par la relation :

$$(2.7)$$

A étant la section,  $w_1$  l'ouverture qui correspond à .

L'énergie de rupture  $G_f$  et la courbe sont considérées comme propriétés intrinsèques du matériau et sont liées à travers la notion de "longueur caractéristique  $l_c$ " :

$$(2.8)$$

Considérée également comme caractéristique du matériau (entre 0.2-0.4 m), mais sans signification physique (la longueur de la zone endommagée est considérée comme une fraction de  $l_c$ ).

L'identification de  $G_f$  à partir de la courbe est difficile. Peterson (**Peterson & Hillerborg 1985**) propose l'utilisation des essais de flexion sur poutres entaillées et la mesure de l'énergie de rupture à partir de la relation :

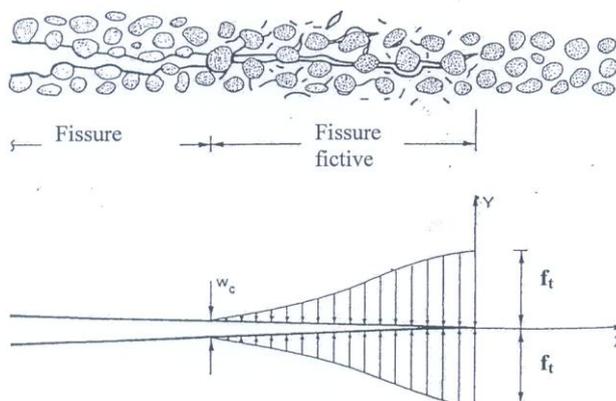
$$(2.9)$$

Ce modèle a par ailleurs été utilisé pour modéliser le comportement de fatigue en traction du béton (**Hordijk 1992**).

La mécanique linéaire de la rupture se heurte à des difficultés d'identification lors de son application au cas particulier du béton. Ceci en raison de l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire du matériau. En effet, les expériences montrent l'existence de zones de microfissurations en pointe de fissure qui doivent être prise en considération. Afin donc d'adopter la mécanique de la rupture au cas particulier du béton, l'introduction d'un comportement non linéaire s'est avéré nécessaire, le modèle de la fissure fictive "fictions model" (**Hillerborg & al. 1976**) est le plus utilisé. Ce modèle prend en compte l'énergie dissipée par microfissuration au voisinage de la pointe de fissure. On peut citer également le modèle de la bande de fissure (Existence d'une bande de fissuration d'une certaine largeur au sein du milieu fissuré, hypothèse justifiée du point de vue physique des matériaux hétérogènes) (**Bazant & al. 1983**).

Ces modèles sont basées sur l'hypothèse que l'énergie de rupture  $G_f$ , et non sur la courbe locale d'adoucissement, est une propriété du matériau.

L'implémentation du concept ( $G_f$  égale à une constante) conduit à la conclusion importante que la loi locale d'adoucissement en tension dépend d'une longueur caractéristique  $l_c$ , appelée également largeur de bande de fissure et dépendant du maillage. Le modèle considère que les contraintes sont encore actives et dépendent de l'ouverture de la fissure.



**Figure 2.12:** Distribution des contraintes au voisinage d'une fissure visible  
(Hillerborg 1983).

Par conséquent dans la majorité des modèles de fissuration, le béton non fissuré est considéré comme linéaire élastique isotrope en tension, en général le critère de Rankine (critère de traction maximale en absence de compression) est utilisé pour détecter l'apparition d'une fissure, le critère de Rankine permet l'amorçage d'une fissure uniquement en mode I, c'est pourquoi certains modèles utilisent, en plus du critère de Rankine, un critère d'ouverture de fissure en cisaillement (Rossi 1997), et d'autres emploient une enveloppe de rupture tridimensionnelle (Torrent & al. 1987, Gonzales & al. 1991, Kotsovos & Pavlovic 1995). Récemment (Weite & al. 1998) ont proposé un critère bidimensionnel d'amorçage et de propagation de fissure applicable à tout type de matériau prenant en compte la rupture en mode I, mode II et mode mixte mais, ils s'accordent sur le fait qu'une fissure apparait en mode I si le matériau, tel le béton, est suffisamment fragile (Weihe & al. 1998, Kroplin & al. 1997).

Les modèles pour le béton issus des approches phénomènes globales sont les modèles de la mécanique de la rupture. L'échelle d'étude est celle d'une structure comportant une fissuration et l'objectif est d'établir les relations permettant de simuler les conditions de

propagation de cette fissure ainsi que l'état des contraintes et des déformations au sein de la structure.

#### 2.2.2.4 Modèles dits "dynamiques"

Dans les modèles présentés précédemment, les effets de vitesse ont souvent été négligés. Toutefois certains modèles utilisent une théorie modifiée de viscoplasticité dans laquelle on introduit un paramètre de viscosité qui est dépendant soit de la vitesse de déformation élastique (**Bicanic 1978, Bicanic 1982**), soit de la vitesse de déformation totale (**Nilsson 1979, Liu 1985**).

(**Liu & Owen 1986**) ont présenté un modèle décrivent le comportement non linéaire du béton en dynamique, qui utilise le modèle sensible à la vitesse développé par (**Bicanic & al. 1978-1982**). Le modèle de Bicanic est une extension du modèle élasto-viscoplastique de (**Perzyna 1966**) qui introduit un paramètre de viscosité dépendant de la vitesse. L'hypothèse de base est que le comportement du béton est contrôlé par deux surfaces : une surface de plasticité et une surface de rupture (ou surface limite). Le béton est initialement considéré comme linéaire. La surface limite contrôle le niveau de rupture. Le modèle original de Bicanic ne tient pas compte de la fissuration en tension, qui est pourtant invariablement la principale cause de non-linéarité du béton, mais un algorithme de contrôle de fissuration a été introduit plus tard par le même auteur (**Zienkiewicz & al. 1983**). Cette fissuration en tension est basée sur un critère de déformation limite. Après fissuration le modèle utilise une théorie de l'endommagement prévoyant une diminution des constantes élastiques au fur et à mesure que les fissures progressent. Cette diminution se fait de façon orthotrope (anisotropie induite par l'endommagement). Dans ce modèle, on retrouve toutefois quelques similitudes avec la théorie développée par Chen et celle utilisée dans le code ABAQUS (mise en place des fonctions de charge, du critère de fissuration, de la loi d'endommagement ...).

Beshara et Virdi (**Beshara & Virdi 1989**) ont développé un modèle élasto-viscoplastique tenant compte de la vitesse de déformation pour le comportement en compression. En tension, ils considèrent le béton comme un matériau élastique adoucissant sensible aux effets de la vitesse avec comme critère de fissuration un critère de déformation dépendant de la vitesse de déformation.

Le comportement post-fissuration est pris en compte par l'introduction du phénomène adoucissant et du transfert d'efforts de cisaillement à travers les fissures. Un point important est l'introduction de l'effet anisotrope et du phénomène d'ouverture- fermeture- réouverture

des fissures lors des sollicitations alternées (**Beshara 1989**). Nous pouvons noter en outre les modèles (**Isenberg & Levine 1984, Hughs 1991, Radnic & Deskovic 1989**) et enfin Faria et Oliver (**Faria & Oliver 1993**). Ce dernier modèle prend en compte à la fois le couplage élasticité-endommagement, la dissymétrie traction-compression, l'existence de déformations permanentes en compression seulement, l'aspect unilatéral (2 variables d'endommagement) et enfin les effets de vitesses (introduction d'une régularisation de type visqueux dans les lois d'évolution des variables d'endommagement).

Citons pour finir les travaux effectués au L.M.T. de Cachan par (**Dubé 1994**) dans le cadre d'une thèse sur le comportement au séisme et au choc d'ouvrage en béton armé. L'effet de la vitesse de chargement est introduit directement dans l'évolution de l'endommagement.

Cette méthode a été développée dans un modèle de comportement unilatéral du béton (**La Borderie 1991**). La formulation particulière des effets des vitesses de déformation dans la modélisation permet en outre d'assurer une certaine objectivité des résultats vis-à-vis de la finesse du maillage (méthode de régularisation de la localisation).

### 2.2.3 Modèles d'endommagement

Dès les années 1500, Léonard de Vinci s'intéresse à la rupture macroscopique des matériaux. En 1958, Kachanov propulse la mécanique de l'endommagement moderne qui vise à décrire l'évolution de la détérioration d'un matériau qui précède sa rupture (**Kachanov 1958**). Une variable d'endommagement, définie comme étant le rapport entre l'aire des micro-défauts dans une section et la surface totale de cette section, a été introduite. Ce cadre a été développée sous chargements uniaxiaux et à la rupture en fluage des métaux. Ses travaux son repris peu de temps après par Rabotnov et Lemaitre (**Rabotnov 1969, Lemaitre 1971**), qui introduisent la notion de contrainte effective. La notion de mécanique de l'endommagement des milieux continus apparait en 1972 avec les travaux de Hult (**Hult 1972**). A partir de cette date commence à se développer un grand intérêt pour la modélisation de l'anisotropie de l'endommagement (**Martin & Leckie 1972, Lemaitre & Chaboche 1974, Chaboche 1978, Murakami & Onho 1978, Cordebois & Sidoroff 1982**) de la durée de vie en fatigue (**Chaboche 1974, Lemaitre 1978**). L'approche de la rupture en fatigue par la mécanique de l'endommagement n'est concrète qu'à partir des années 1980 (**Hua & Socie 1984, Chaboche & Lesne 1988, Lemaitre & Doghri 1994**).

Ces mêmes années voient l'émergence de modèles d'endommagement anisotropes, où la variable d'endommagement scalaire  $D$  est remplacée par un tenseur d'endommagement  $\mathbf{D}$

d'ordre 4 (**Chaboche 1979, Leckie & Ouat 1981**) ou d'ordre 2 (**Murakami & Ohno 1978, Cordebois & Sidoroff 1982, Ladevèze 1983**) plus simples à manipuler et dont les composantes sont aisées à déterminer.

Il s'agit d'une approche très utilisée pour modéliser le comportement du béton. Le principe de la mécanique de l'endommagement correspond à la modélisation des effets des micro-fissures et micro-cavités d'un matériau sur le comportement de ce même matériau. Cette modélisation est bien adaptée à la description des non-linéarités survenant dans le béton ou dans les matériaux fragiles du même type, car il postule l'existence de décohésion au sein du volume élémentaire représentatif du matériau, suffisamment grand pour qu'il puisse être considéré comme homogène et suffisamment petit pour qu'il puisse être considéré comme un point matériel (Pour le béton, la taille de l'élément de volume représentatif (EVR) est de l'ordre de dix mm<sup>3</sup>).

Le but de la théorie de l'endommagement est de disposer d'un outil capable de modéliser via les variations des caractéristiques élastiques, la dégradation progressive du matériau en fonction du chargement, et donc le phénomène d'adoucissement des contraintes. C'est un phénomène à part entière qui repose sur l'observation d'un état endommagé (ici microfissuré) et qui nécessite donc l'introduction d'une nouvelle variable interne au sens de la thermodynamique notée  $D$ .

### 2.3 Approches mécaniques de l'endommagement

L'introduction dans la mécanique des milieux continus de l'endommagement permet de prévoir par un calcul, du même type que celui permettant d'obtenir les contraintes et déformations, l'évolution de la détérioration d'une pièce. Il est donc légitime de penser que les microdéfauts (microfissures, microcavités ...) peuvent s'y développer par les mécanismes bien connus de la rupture (germination, croissance, coalescence) (**Gurson 1977**).

Il est rare que les micro-défauts soient homogènement distribués, en fait ils ont souvent une orientation préférentielle, gouvernée soit par le chargement, soit par la composition microstructurale du matériau. On voit bien que l'endommagement a souvent un caractère directionnel plus ou moins prononcé. De ce fait, sa représentation mathématique doit se faire avec des variables tensorielles d'ordre un (vecteur), deux ou quatre selon les situations.

Cependant, la représentation par une ou plusieurs variables scalaires est la plus utilisée à cause de sa simplicité sur le plan théorique.

Ces dernières décennies, plusieurs approches de prévision de défauts des matériaux et des structures ont été proposées. Ces approches cherchent à modéliser les défauts ainsi que leur influence sur le comportement par une description plus ou moins fine des principaux mécanismes de l'endommagement. Deux familles d'approches sont souvent utilisées :

- Approches basées sur des considérations physiques liées à la germination, la croissance et la coalescence des cavités.

Cette théorie initialement proposée par Clintok (**Clintok 1939**), Rice (**Rice & al. 1969**) et Gurson (**Gurson & al. 1977**)..... Ces travaux décrivent les principaux stades de la rupture ductile en termes d'évolution de la fraction volumique de cavités et son influence sur le comportement plastique (**Gelin & al. 1985, Aravas 1986, Onate & al. 1988, Gelin 1990, Bontcheva & al. 1991, Boudeau & al. 1994, Bennani & al. 1995, Brune & al. 1996, Picard & al. 1998, Brunet & al. 2001, Pardoën & al. 2004**).

La connaissance du comportement d'un volume élémentaire du matériau permet de modéliser le comportement global de la structure grâce à une technique d'homogénéisation qui s'avère complexe et difficile.

C'est cette théorie d'endommagement qui est la plus souvent utilisée dans la description de l'endommagement ductile.

- Approches basées sur l'approche mécanique de l'endommagement continu (MEC) initiée par Kachanov et Rabotnov (**Kachanov 1958, Rabotnov 1969**).

C'est à Chaboche (**Chaboche 1971, Chaboche 1974**) et Lemaitre (**Lemaitre & al. 1985**) que nous devons une véritable structuration de la théorie de la MEC dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus avec variables internes. Ces approches modélisent l'endommagement par des variables d'état de nature scalaire (isotropie) ou tensorielle (anisotropie), et décrivent plus au moins finement l'évolution de l'endommagement et son effet sur le comportement élastoplastique par un couplage "fort" plasticité- endommagement (**Saanouni & al. 1994-2000-2001-2002-2003-2004, Lestriez & al. 2005**). D'autres modèles utilisent un écrouissage purement isotrope avec couplage "faible" comportement-

endommagement pour prévoir l'endommagement en mise en forme (**Lee & al. 1985, Hartley & al. 1989, Zhu & al. 1991-1992, Hambli 2001**).

Cette théorie a été largement développée et utilisée pour modéliser l'endommagement dans diverses situations : les bétons, Le fluage des métaux, la plasticité des métaux, les matériaux composites, bien d'autres travaux divers et variés.

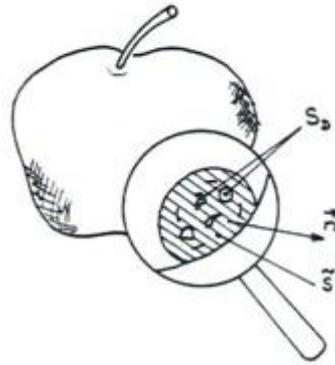
La seconde approche qui nous intéresse est de nature phénoménologique, dans le sens où elle ignore les mécanismes du dommage. Elle ne s'intéresse pas à une forme particulière des défauts, mais associe au phénomène de dégradation du milieu une variable continue d'endommagement (que nous nommerons "dommage"), définis sur un élément de volume.

L'endommagement est défini par la modification du tenseur des contraintes qu'il apporte à la réduction de surface résistance. Cette approche est intégrée dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles (**Lemaitre & Chaboche 1985**). Cette classe d'approche se divise elle-même en deux catégories :

- Les approches locales
- Les approches non-locales.

### ***Concept de la contrainte effective***

La théorie de l'endommagement suppose qu'il existe un état dans lequel le matériau est sain (ou proche de l'être) où l'endommagement est nul (ou quasiment nul). La notion de matériau sain et de matériau endommagé conduit à la notion de contrainte effective initialement proposée par Kachanov (**Kachanov 1958**) et Rabotnov (**Rabotnov 1969**). Pour la définir, on part de la définition de la contrainte qui peut s'écrire comme le rapport d'une force sur une surface  $\sigma = \frac{F}{S}$ . Dire que le matériau est endommagé équivaut à dire que la microstructure du matériau n'est plus continue, il existe des micro-fissures ou des micro-cavités. Ainsi la surface  $S$  sur laquelle s'applique la force  $F$  peut être considérée comme la somme d'une surface saine  $S_s$  (la matière) et d'une surface endommagée  $S_d$  (les vides et les fissures) (Figure 2.13).



**Figure 2.13** : Schéma illustrant la définition de la surface effective  
(**Montheillet & Moussy 1986**).

Du point de vue du comportement de la matière, la force ne s'applique effectivement qu'à la surface saine que l'on appellera alors surface effective  $\tilde{S} = S - S_D$ .

Il en découle la notion de contrainte effective qui s'écrit :

$$\sigma = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{F}{S - S_D} \quad (2.10)$$

Le terme  $\frac{S_D}{S}$  représente la variable  $D$  d'endommagement en 1D ou dans le cas d'un endommagement isotrope. C'est une variable scalaire, l'endommagement est donc égal dans toutes les directions. La contrainte effective peut encore s'écrire :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (2.11)$$

De la même manière on peut définir le module de Young du matériau endommagé ou module effectif  $E$  par le principe d'équivalence en déformations (**Lemaitre 1971**) :

$$\sigma = E\varepsilon \Leftrightarrow \tilde{\sigma} = E\varepsilon \text{ et } E = \frac{E}{1 - D} \quad (2.12)$$

Dans la pratique l'évolution de l'endommagement est déduite des mesures expérimentales du module de Young faites lors de décharges élastiques. Le module d'Young effectif  $E$  varie donc entre  $E$  pour le matériau sain et  $\frac{E}{1 - D_c}$  pour le matériau rompu à l'endommagement critique  $D_c$ . L'endommagement  $D$  est donc borné et prend les valeurs suivantes :

- $D = 0 \rightarrow$  matériau sain ou état vierge
- $0 < D < D_c \rightarrow$  matériau endommagé
- $D = D_c \rightarrow$  matériau rompu

### 2.3.1 Formulation thermodynamique de l'endommagement et couplage Comportement-Endommagement

La dégradation du béton est due à la création de microfissures et de microvides. Ces microdéfauts créent donc en même temps une perte de raideur et des déformations résiduelles. Nous supposerons que ces deux phénomènes sont couplés et c'est l'endommagement qui permettra de décrire ces deux phénomènes. Nous retenons, donc que deux phénomènes, élasticité et endommagement. A température constante, le béton peut être décrit par :

- Le tenseur de déformation élastique  $\epsilon^e$  (variable observable) sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP).
- La variable d'endommagement scalaire ou tensorielle décrivant l'état d'endommagement du matériau "D" (variable interne).

La thermodynamique des processus irréversible fourni un cadre logique permettant la formulation des lois de comportement (**Lemaitre & Chaboche 1985, Lemaitre 1982, Lemaitre 1992**). La loi d'évolution du dommage sera donc donnée à partir d'une approche thermodynamique.

Le cadre thermodynamique a été proposé pour la première fois par Chaboche (**Chaboche 1977**) pour le cas de l'endommagement isotrope. Sa généralisation a été ensuite envisagée en utilisant soit des vecteurs pour représenter l'endommagement (**Krajcinovic & al. 1981**), un tenseur de dommage d'ordre deux (**Cordebois & al. 1979**) ou un tenseur d'endommagement d'ordre quatre (**Simo & al. 1987, Ju 1989**). On illustrera ci-après ce formalisme dans le cas d'un endommagement isotrope avec une loi de comportement élastique linéaire.

### 2.3.2 Potentiel thermodynamique - Lois d'Etat

L'hypothèse d'un potentiel thermodynamique fonction concave de la température et convexe de toutes les autres variables d'état, permet de définir les variables associées aux variables d'état, on choisit le potentiel énergie libre  $\psi(\epsilon^e, T, D)$  de Helmholtz, qui constitue, par hypothèse, le potentiel thermodynamique.

C'est une fonction de toutes les variables d'état, y compris D :

$$\psi = \psi (\varepsilon, T, D) \quad (2.13)$$

On montre que :

- Le teneur de contrainte  $\sigma$  s'exprime par :

$$\sigma = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \quad (2.14)$$

Ce qui montre que la contrainte est la variable associée à la déformation.

L'entropie  $s$  s'exprime par :

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2.15)$$

La force thermodynamique  $Y$  associée à la variable d'endommagement D. Elle représente le taux de restitution d'énergie totale :

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \quad (2.16)$$

: Masse spécifique

$Y$  est un tenseur du même ordre que D

pour respecter le concept de la contrainte effective  $\sigma = \frac{\sigma}{1-D}$ , on choisit  $\psi$  linéaire en  $1-D$ , soit alors :

$$\rho \psi (\varepsilon, T, D) = \frac{1}{2} (1-D) \underline{\underline{\Lambda}} : \varepsilon : \varepsilon \quad (2.17)$$

Pour  $\psi$  d'une forme quadratique définie positive de  $\varepsilon$  (théorie d'élasticité linéaire).

$\underline{\underline{\Lambda}}$  Opérateur des coefficients d'élasticité, éventuellement fonction de la température.

La loi d'élasticité couplée à l'endommagement est définie par :

$$\sigma = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = (1-D) \underline{\underline{\Lambda}} : \varepsilon \quad (2.18)$$

Qui peut également s'écrire :

$$\sigma = \underline{\underline{\Lambda}} : \varepsilon \quad (2.19)$$

La relation définissant  $Y$  fournit le critère de rupture :

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Lambda}} : \varepsilon : \varepsilon \quad (2.20)$$

Sachant que :

$$w = \frac{1}{2} \underline{\Lambda} : 1 - D : \varepsilon : \varepsilon \quad (2.21)$$

On montre que :

$$Y = \frac{w}{1 - D} \quad (2.22)$$

On montre également, que  $Y$  est aussi égal à la moitié de la variation d'énergie élastique  $w$  associée à une variation d'endommagement à températures et à contraintes constantes, d'où son nom de taux de relâchement d'énergie d'endommagement.

Sachant que :

$$d\varepsilon = \varepsilon \frac{dD}{1 - D} \quad (2.23)$$

$$dw = \sigma : d\varepsilon \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{dw}{dD} \right|_{\sigma, T} = \sigma : \frac{d\varepsilon}{dD} \quad (2.25)$$

$$= 1 - D \underline{\Lambda} : \varepsilon : \frac{d\varepsilon}{dD} = \underline{\Lambda} : \varepsilon : \varepsilon \quad (2.26)$$

On remarque que ceci n'est rien d'autre que " $2Y$ ", d'où :

$$Y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial D} \right)_{\sigma, T} \quad (2.27)$$

Notons que  $Y$  est à l'endommagement, ce que le taux de restitution d'énergie de Griffith est à la mécanique de la rupture. Par analogie à la mécanique de la rupture par fissuration, on pose que la rupture est atteinte pour une valeur caractéristique de  $Y$  soit  $Y_c$  :

$$Y_c = \frac{1}{2} \frac{\sigma_R^2}{E(1 - D)} \quad (2.28)$$

et

$$D_c = 1 - \frac{\sigma_R : \sigma_R}{2Y_c} \quad (2.29)$$

### 2.3.3 Potentiel de dissipation - Loi d'évolution de l'endommagement

Un des problèmes majeurs de la description des phénomènes à l'aide des variables internes est l'écriture de leur évolution. Celle-ci s'exprime grâce aux relations qui déterminent les vitesses des variables introduites, ici  $\dot{D}$  en fonction des variables de chargement et leur vitesse.

En suivant la méthode thermodynamique phénoménologique classique, on admet que la loi d'évolution de la variable  $D$  dérive d'un potentiel de dissipation :

$$\varphi_D = -Y\dot{D} \quad (2.30)$$

Le second principe de la thermodynamique impose que la dissipation mécanique  $-Y\dot{D}$  soit uniforme quadratique, définie positive (inégalité de Clausius-Duhem) :

$$-Y\dot{D} \geq 0 \quad (2.31)$$

Cette inégalité impose que l'endommagement provoque un assouplissement du matériau. Ceci impose que  $\dot{D} \geq 0$ , d'où la conséquence : le taux d'endommagement représente toujours un processus de détérioration (l'endommagement ne peut déminer, il ne peut donc que croître ou rester constant).

L'introduction d'un potentiel de dissipation " $\varphi$ ", Conduit par l'intermédiaire de sa fonction duale " $\varphi^*$ " à la loi d'évolution de l'endommagement :

$$\dot{D} = -\lambda \frac{\partial \varphi^*(\sigma, Y, \varepsilon, D)}{\partial Y} \quad (2.32)$$

où  $\lambda$  : est un multiplicateur scalaire d'endommagement avec conditions de Kuhn-Tucker ; le choix de " $\varphi^*$ ", comme dans le cas de la plasticité, peut être lié à la notion de surface seuil, avec ou sans l'hypothèse de matériau standard.

## 2.4 Modélisation de l'anisotropie

Diverses extensions ont été proposées pour étendre la théorie de l'endommagement scalaire isotrope aux matériaux anisotropes et aux chargements complexes. Ce choix n'est pas toujours chose facile, tant d'un point de vue théorique, que dans sa mise en œuvre numérique.

Beaucoup d'observations montrent que l'endommagement du béton présente une anisotropie, tant au niveau de la structure microscopique qu'au niveau des propriétés macroscopique. Concernant ce dernier point, signalons les mesures du coefficient de Poisson des matériaux endommagés, réalisés par Nouailhas (**Nouailhas 1980**). Cette étude mets en évidence des variations de ce coefficient qui dénotent une influence différente de l'endommagement sur les déformations longitudinales et transversales lors des essais de traction.

La façon la plus générale de modéliser l'anisotropie est de considérer un tenseur d'endommagement d'ordre 4M. Dans ce cas, la relation liant les contraintes effectives et réelles est donnée par la relation :

$$\underline{\sigma} = \underline{M}(\underline{D}) : \underline{\sigma} \quad (2.33)$$

$\underline{M}(D)$  est un opérateur d'endommagement, il doit contenir le cas tridimensionnel.

Cette approche, même si elle ne présente pas de difficultés théoriques, présente certaines difficultés expérimentales d'application. L'ingrédient clé, de chaque modèle, est de définir une loi d'évolution du tenseur caractérisant la dégradation du matériau  $\underline{M}(D)$ . Dans le cas d'un tenseur d'ordre 4, les lois d'évolutions sont difficiles à établir vu le nombre important de composantes du tenseur.

### ***Concept de l'endommagement sur la contrainte principale maximale (Leckie & Hayurst 1972)***

Généralement les microfissures se multiplient et se propagent dans des directions plus ou moins perpendiculaires à la direction de la contrainte principale maximale (dans le cas des chargements proportionnels).

Un moyen simple de modéliser donc, l'anisotropie du dommage, est de supposer que la détérioration se produit dans un plan normal à la contrainte maximale principale. La contrainte effective s'écrit dans le repère des contraintes principales.

$$[ \ ] = \text{---} \quad (2.34)$$

Avec :  $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$

Une telle théorie avec une variable  $D$  restant scalaire est utilisable tant que l'on ne considère qu'un chargement proportionnel (isotropie du dommage). Dans le cas contraire, il faut introduire un tenseur d'endommagement : deux sortes de théories ont été proposées :

- La première utilise un tenseur d'endommagement  $D$ .
- La seconde utilise la loi d'élasticité du matériau endommagé pour définir en même temps le tenseur d'endommagement et le tenseur des contraintes effectives. Dans ce cadre plusieurs formulations peuvent être proposées suivant que l'on utilise une équivalence en déformation, en contrainte, ou en énergie.

La théorie des microplans représente une alternative à l'utilisation d'un tenseur d'ordre supérieur. Bažant (**Bažant 1985**) a utilisé ce concept pour décrire la dégradation des matériaux fragiles comme le béton. La loi de comportement est discrétisée suivant un certain nombre de microplans. Sur chaque plan d'orientation  $n$ , des relations uniaxiales reliant les

composantes du vecteur déformation aux composantes du vecteur contrainte sont définies. Le paramètre qui caractérise l'endommagement sur chaque microplan est désormais un scalaire, sa valeur est différente d'un microplan à l'autre, ce qui conduit à une description anisotrope à l'échelle macroscopique.

Cependant, l'intégration de la loi de comportement dans le cas des modèles microplans reste encore problématique (dépendance de la réponse simulée au nombre de points d'intégration (**Badel 2001**)). Un travail numérique doit donc être encore envisagé pour améliorer le calcul de cette intégrale.

Une autre alternative est de choisir un tenseur d'endommagement d'ordre 2, dont seules les valeurs propres peuvent évoluer. Souvent, l'endommagement est calculé en fonction des extensions, son évolution est calculée dans la base propre des déformations (**Fichant 1996, Desmorat & al. 2007, Badel & al. 2007**). Il est, en effet, probable que pour des trajets de chargement non complexes, les directions principales du tenseur d'endommagement et de déformation coïncident ; hypothèse beaucoup moins réaliste dans le cas de chargements complexes.

Badel (**Badel & al. 2007**) utilise l'anisotropie de l'endommagement pour la traction. Pour la compression, il emploie une seule variable d'endommagement isotrope.

Peu d'études ont été menées sur les algorithmes de résolution (**Kuhl & al. 2000**). En particulier, l'absence d'opérateur tangent cohérent pour la méthode de Newton-Raphson, soulève des questions sur les temps de calcul (vitesse de convergence non quadratique). Or, cette qualité numérique fait partie des points clés lorsque des études, utilisant des maillages complexes et des conditions particulières, sont envisagées.

Les modèles d'endommagement anisotropes permettent de décrire avec plus de réalisme l'effet induit par l'endommagement sur l'anisotropie du matériau. Cette anisotropie peut être contrôlée par la définition de la nature des variables d'endommagement.

Les modèles d'endommagement tensoriels d'ordre 2 ont déjà une longue histoire et sont par conséquent relativement nombreux. On distingue néanmoins des caractéristiques communes et des différences notoires. La majorité des modèles d'endommagement se basent sur une même forme de potentiel  $\rho\psi$  pris comme étant l'énergie libre spécifique d'Helmholtz écrite en déformation (**Murakami & al. 1996, Halm & al. 1996, Badel & al. 2007, Challamel & al. 2005**). Dans sa forme la plus générale, ce potentiel est une combinaison des 10 invariants de base du couple  $(\varepsilon, D)$  :

$$tr\varepsilon, tr \varepsilon^2, tr \varepsilon^3, trD, tr D^2, tr D^3, tr \varepsilon D, tr \varepsilon^2 D, tr \varepsilon D^2, tr \varepsilon^2 D^2 \quad (2.35)$$

Cependant, la plus part des auteurs postulent le potentiel quadratique en  $\varepsilon$  et linéaire en  $D$ , puisque le matériau est élastique linéaire à  $D$  constant. Il n'y alors plus que 7 invariants en jeu. D'autres part on a  $\psi \varepsilon = 0, D = 0$ , ce qui supprime également  $trD$  de la liste des invariants.

L'expression classique du potentiel pour les modèles d'endommagement écrits en déformations devient :

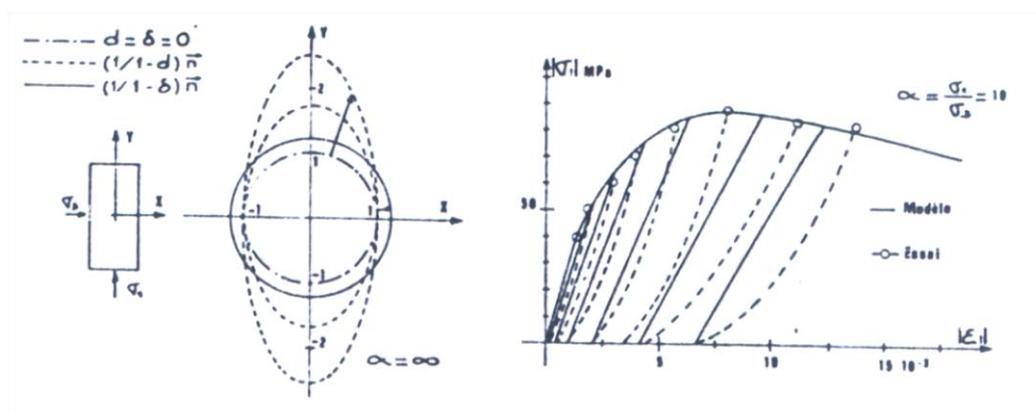
$$\begin{aligned} \rho \psi \varepsilon, D = & \frac{1}{2} \lambda tr \varepsilon^2 + 2\mu tr \varepsilon^2 + \eta_1 tr D tr \varepsilon^2 \\ & + \eta_2 tr D tr \varepsilon^2 + \eta_3 tr \varepsilon tr \varepsilon D + \eta_4 tr \varepsilon^2 D \end{aligned} \quad (2.36)$$

Outre les valeurs des coefficients  $\eta_i$  qui varient, les modèles diffèrent par l'existence ou non d'une seconde variable interne (sorte d'érouissage) pour modéliser l'évolution de la surface seuil d'endommagement avec le chargement (c'est le cas pour le modèle de Murakami (**Murakami 1996**)). Dans le cas du modèle de (**Challamel & al. 2005**) le potentiel est complété par un second terme  $\psi_1$  fonction uniquement de  $D$ . Dans (**Badel & al. 2007**) les auteurs font le choix contestable (et déjà contesté plus haut) d'introduire deux variables d'endommagement, l'une anisotrope pour l'endommagement en traction et l'autre isotrope scalaire pour l'endommagement en compression (sous l'hypothèse que l'endommagement de compression est un endommagement diffus non directionnel).

Pijaudier-Cabot (**Pijaudier-Cabot 1985**) fait intervenir deux variables décrivant l'endommagement volumique (le scalaire  $\delta$ ) et l'endommagement surfacique (le tenseur  $D$ ). En remarquant que l'anisotropie dans le béton est induite par microfissuration (Figure 2.14).

Ces modèles suivent ensuite le cadre classique des matériaux standards pour la définition des lois d'état et des lois d'évolution. Cela conduit à un domaine élastique et une évolution de l'endommagement exprimés en fonction de la force thermodynamique  $Y$ . L'anisotropie de  $Y$  est induite par le chargement (i.e. le signe et la valeur des déformations), cette anisotropie se transmet naturellement à  $D$ . Le principal reproche que l'on peut faire alors à ce type de formulation est de provoquer un endommagement croissant dans toutes les directions, quelle que soit la direction du chargement, avec néanmoins un endommagement plus important dans la direction des déformations positives. Par exemple, en traction simple où la fissuration est clairement identifiée comme étant perpendiculaire au chargement, on a

aussi un endommagement non nul dans les deux directions parallèles du fait de la dépendance en  $tr\varepsilon$  de  $Y$  et donc de l'évolution de  $D$ .



**Figure 2.14** : Endommagement anisotrope et déformations permanentes en compression axisymétrique (Pijaudier-Cabot 1985).

D'autres modélisations existent par ailleurs comme le modèle de Fichant (Fichant & al. 1997) qui est en fait une simplification du modèle micro-plan de Bazant (Bazant & al. 1990), mais qui n'est pas écrit dans le cadre thermodynamique des processus irréversibles. Celui de Papa (Papa & al. 1996), écrit dans un cadre thermodynamique non standard présente le même travers que celui de Badel mais introduit non plus deux mais cette fois trois variables d'endommagement (une scalaire et deux tensorielles, une pour la traction et une pour la compression). Enfin un certain nombre de modèles de référence comme celui de Ju ou de Chow (Ju 1989, Chow & al. 1982) posent d'importants problèmes numériques en ne satisfaisant pas la condition de continuité de la relation contraintes-déformations.

Parmi les modèles les plus fréquents dans la littérature, l'endommagement anisotrope est décrit à l'aide de variables tensorielles d'ordres 2. Il existe toutefois des modèles développés, toujours dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus, qui utilisent comme variables internes, soit un endommagement vectoriel (Krajcinovic & Fonseka 1981), soit un tenseur d'ordre 4 (Chaboche 1979).

Dans cette section, nous avons choisi de décrire les modèles d'endommagement anisotropes issus du cadre général de la théorie d'endommagement anisotrope proposée par Ladevèze (Ladevèze 1983). Nous proposons donc d'abord de rappeler les principales lignes de cette théorie.

Considérons un matériau dont les caractéristiques initiales à l'état non endommagé sont indicées par "0". Le volume élémentaire étudié est soumis à une contrainte uniaxiale  $\sigma^*$  dans une direction  $n$  quelconque. Les déformations associées à  $\sigma^*$  et  $n$  sont :

$\varepsilon_L^* n$  : la déformation longitudinale dans la direction  $n$ .

$\varepsilon_L^* n + \varepsilon_T^* n + \varepsilon_{T'}^* n$  : la déformation volumique où  $\varepsilon_T^*$  et  $\varepsilon_{T'}^*$  désignent les deux déformations transversales (T et T' sont deux directions orthogonales).

En supposant que les comportements en traction et en compression sont identiques, l'élasticité est définie par les relations :

$$\varepsilon_L^* n = \frac{1}{E(n)} \sigma^* \quad (2.37)$$

$$\text{et} \quad \varepsilon_L^* n + \varepsilon_T^* n + \varepsilon_{T'}^* n = \frac{1}{\gamma(n)} \sigma^* \quad (2.38)$$

où  $E(n) = E_0$  désigne le module d'Young dans la direction  $n$  et  $\gamma(n)$  désigne le module volumique toujours suivant la direction  $n$ .

Pour un matériau isotrope non endommagé on a:

$$E(n) = E_0 \quad \text{et} \quad \gamma(n) = \frac{E_0}{1 + 2\nu_0} \quad (2.39)$$

où  $\nu_0$  désigne le coefficient de Poisson initial.

Le tenseur de souplesse (d'ordre 4) est l'inverse du tenseur de rigidité (tenseur de Hooke). En notant  $K$  ce tenseur, les relations entre  $K$  et les modules  $E$  et  $\gamma$  sont :

$$\frac{1}{E(n)} = n_i n_j K_{ijkl} n_k n_l = n(n.K.n)n \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{\gamma(n)} = n_i K_{ijkl} n_j \quad n_k K_{ijkl} n_l = \text{Tr}(n.K.n) \quad (2.41)$$

Les fonctions  $n \rightarrow E(n), n \rightarrow \gamma(n)$  définissent complètement le tenseur de Hooke du matériau (résultat fondamental de la théorie décrite par le théorème Ladevèze). Le tenseur de souplesse est obtenu à partir de la formulation variationnelle suivante (**Ladevèze 1993**):

Trouver le tenseur  $K$  tels que,  $\forall K^*$ :

$$\int_s [n \quad nKn \quad n] [n \quad nK^* \quad n] ds = \int_s \frac{1}{E(n)} [n \quad nK^* \quad n] ds \quad (2.42)$$

$$\text{et} \quad \int_s \left[ \text{Tr } nKn \right] \left[ \text{Tr } nK^*n \right] ds = \int_s \frac{1}{\gamma(n)} \left[ \text{Tr } nK^*n \right] ds \quad (2.43)$$

où  $s$  désigne la sphère unité.

Les fonctions d'endommagement sont définies par :

$$D(n) = \frac{E_0(n) - E(n)}{E_0(n)} \quad \text{et} \quad \delta(n) = \frac{\gamma_0(n) - \gamma(n)}{\gamma_0(n)} \quad (2.44)$$

Si ces deux fonctions sont indépendantes de  $n$  et si en plus nous prenons  $D = \delta$ , nous obtenons la théorie classique d'endommagement isotrope telle qu'elle a été définie en section (2.3.2).

Il s'en suit donc que l'état d'endommagement dépend des deux fonctions suivantes :

$$n \rightarrow D(n) \quad \text{et} \quad n \rightarrow \delta(n) \quad (2.45)$$

Les forces thermodynamiques associées à ces deux variables d'endommagement sont définies par :

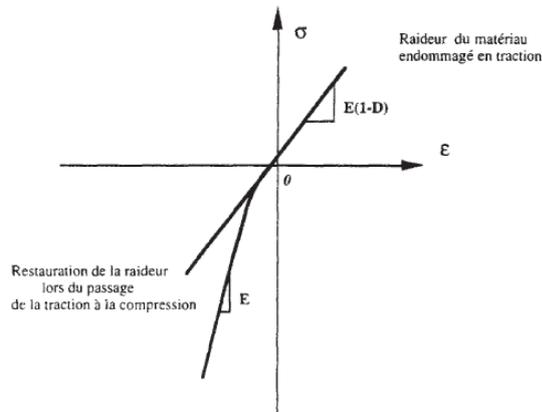
$$Y_D = \frac{\partial \psi}{\partial D} \quad \text{et} \quad Y_\delta = \frac{\partial \psi}{\partial \delta} \quad (2.46)$$

où  $\psi$  est l'énergie libre du matériau qui dépend des deux variables d'endommagement et qui cette fois-ci est donnée en fonction des contraintes,  $\psi = \psi(\sigma, D, \delta)$ .

Cette théorie d'endommagement a servi de base au développement de modèles destinés à être appliqués pour différents matériaux. Citons notamment la modélisation des matériaux composites céramiques (Ladevèze & al. 1993, Ailix & al. 1993) et la modélisation du béton (Mazars & Pijaudier-Cabot 1989, Ramtani 1990).

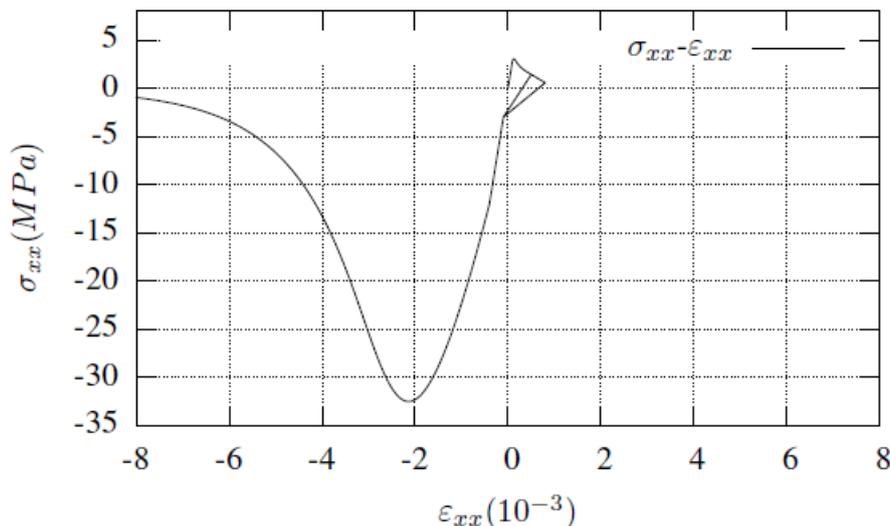
## 2.5 Modélisation de l'effet unilatéral - Effet de fermeture des microfissures

Les effets de fermeture des microfissures (phénomène unilatéral) sont présents lorsque le matériau (béton) est soumis à des chargements alternés (passage d'une traction à une compression). La Figure 2.15 illustre une schématisation de ce phénomène.



**Figure 2.15** : Schématisation du phénomène unilatéral. Sollicitation en compression uniaxiale après endommagement en traction uniaxiale (Nedjar 1995).

La description isotrope de l'endommagement par une unique variable scalaire pose des difficultés quand on cherche à modéliser la refermeture de fissures. En effet, une seule raideur étant définie, la raideur initiale en compression après un chargement en traction est la raideur endommagée  $E = E(1-D)$ . Pour modéliser le caractère unilatéral, il faut donc dans ce cas désactiver l'endommagement provoqué par la traction (Ladevèze & al. 1984, Lienard 1989, Lemaitre & al. 2005). C'est ce que fait Matallah pour le béton dans son modèle (Matallah & al. 2006) (Figure 2.16) où l'endommagement scalaire  $D$ , piloté par les déformations anélastiques, est activé ou désactivé progressivement en fonction de la sollicitation par une nouvelle variable interne.



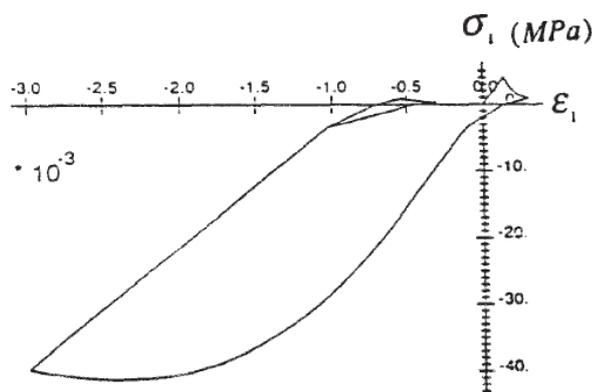
**Figure 2.16** : Simulation du comportement unilatéral du béton (Matallah & La Borderie 2006).

Dans le cas où, comme pour le modèle de Mazars (**Mazars 1984**), l'endommagement est décrit par deux variables distinctes pour la traction et la compression, la modélisation de la refermeture des micro-fissures se fait de manière plus naturelle, sans variable supplémentaire. Le modèle de La Borderie (**La Borderie 1991**), l'un des plus souvent utilisé pour la modélisation des structures sous sollicitations sismiques, s'inscrit dans ce cadre avec  $D_1$  l'endommagement en traction et  $D_2$  en compression. La prise en compte de l'effet unilatéral se fait en ajoutant une fonction de refermeture de fissures. L'effet de la refermeture de fissures est ainsi modélisé comme de l'élasticité non linéaire, mais nécessite l'introduction de trois nouveaux paramètres.

De la même manière pour le modèle de Badel (**Badel & al. 2007**), la refermeture des fissures se fait naturellement puisque l'endommagement de traction (anisotrope)  $D$  agit sur la partie positive du tenseur de déformations et l'endommagement de compression (isotrope)  $D$  sur la partie négative. Dans ce cas, il n'y a pas de contrainte seuil pour la reprise de raideur, la restauration se fait donc pour  $\sigma = 0$ .

Pour les modèles d'endommagement anisotropes, le caractère directionnel de l'endommagement permet de reproduire plus facilement l'aspect unilatéral du comportement. L'endommagement étant différent en traction et en compression et gouverné par les déformations, la modélisation de la refermeture des micro-fissures est simplifiée. On peut par exemple introduire un paramètre fonction du signe des déformations (**Murakami & al. 1996**). Pour (**Challamel & al. 2005**), les conditions unilatérales sont ainsi prises en compte en supprimant du potentiel les termes couplés  $trD(tr \prec \varepsilon \succ_+)^2$  et  $trDtr \prec \varepsilon \succ_+^2$ . Le terme  $tr \prec \varepsilon \succ_+^2$  n'est malheureusement pas continûment différentiable. En effet, comme les endommagements de traction et de compression sont portés par des directions différentes, l'endommagement en compression est nul après un chargement en traction.

Dans le cadre d'une modélisation scalaire de l'endommagement, une solution pour décrire ce phénomène est d'introduire deux variables d'endommagement au lieu d'une seule afin de séparer les effets mécaniques d'ouverture et de fermeture des microfissures. La Figure 2.17 montre la réponse pour un chargement uniaxial cyclique avec changement de signe de chargement (**Pijaudier-Cabot & al. 1994**).



**Figure 2.17** : Modèle à deux variables d'endommagement avec fermeture des microfissures - courbe contrainte-déformation uniaxiale (**Pijaudier-Cabot & al. 1994**).

Citons par ailleurs l'existence d'autres modèles décrivant le phénomène unilatéral. Certains utilisent des variables d'endommagement tensorielles, comme dans (**Ramtani 1990**) et d'autres sont conçus en vue de leur application pour la modélisation de certains composites qui, comme le béton, présentent ce caractère unilatéral (**Ladevèze 1983, Ladevèze & al. 1993**).

## 2.6 Modèle d'endommagement avec effet anélastique

Les essais cycliques menés sur le béton montrent que l'endommagement s'accompagne de déformations permanentes.

Dans la littérature, plusieurs modèles cherchent à introduire cet effet anélastique. L'analogie avec la plasticité est souvent utilisée. Certains modèles proposent un potentiel anélastique et en déduisent les lois d'état supplémentaires.

Nous considérons que la nature de cette dernière n'est pas plastique mais plutôt due à l'hétérogénéité et la fragilité du matériau. Sous chargement, à cause du caractère hétérogène du matériau, les microfissures se forment en premier temps dans toutes directions avant qu'il n'y ait coalescence en une seule macrofissure dans une direction privilégiée. Lors de la décharge, les fissures ont tendance à se refermer. Cependant les lèvres des fissures préalablement soumises à des déplacements relatifs dus au glissement ne peuvent pas revenir à leur position initiale à cause de la rugosité de leurs surfaces. De plus, la multitude des microfissures réparties dans toutes les directions empêchent la refermeture totale des fissures

et causent l'effet irréversible de déformation dans le comportement du béton. Ces effets sont d'autant plus importants que l'endommagement évolue.

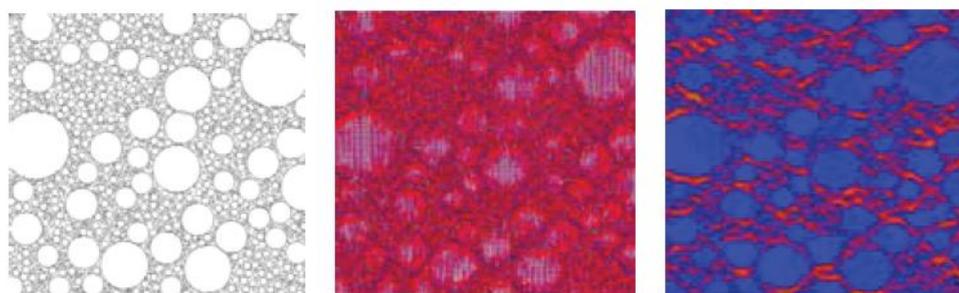
A partir de ce constat, on arrive à expliquer l'existence de la déformation anélastique observée lors d'un essai de traction simple. Nous considérons deux origines possibles de la déformation anélastique :

### 2.6.1 Effet déviatorique au niveau macroscopique

En traction simple, la partie déviatorique du chargement est non nulle. Celle-ci s'exerce sur le réseau initial des microfissures réparties dans toutes les directions et engendre des déplacements relatifs de glissement entre leurs lèvres. Ce déplacement relatif est par nature irréversible. Il est accentué par la rugosité des surfaces de contact entre les lèvres des fissures.

### 2.6.2 Effet sphérique au niveau microscopique

A cause de l'hétérogénéité du matériau, même sous un chargement macroscopique purement sphérique, le béton est soumis à un champ de contraintes et de déformations non homogène. L'état local du tenseur de déformation en un point fait apparaître une partie déviatorique non nulle. Cette dernière conduit à l'échelle microscopique au même mécanisme de glissement irréversible. Cet effet local est mis en évidence avec le modèle "Béton numérique" développé par Mounajed (**Mounajed 2002**). La Figure 2.18 montre la localisation des contraintes et des déformations dans un béton sollicité en traction simple et simulé à l'aide de Symphonie avec le modèle "béton numérique".



**Figure 2. 18** : Localisation des contraintes et déformations dans le béton sous traction (**Mounajed 2002**).

## 2.7 Modélisation du comportement cyclique du béton

Un des cas les plus courants où le comportement cyclique du béton est pris en considération est le cas des chargements sismiques. Le bâtiment ou l'ouvrage soumis à un séisme subit un déplacement alterné de sa base qui induit dans la structure une alternance de sollicitations de traction et de compression (entre autres). Ce cas d'alternance se retrouve également pour les structures soumises aux vibrations (vent, trafic, ...). Le comportement cyclique du béton est donc un sujet d'étude important, notamment parce que ce type de chargement conduit souvent à des dégradations importantes, voir, au pire, à la ruine de la structure.

Dans le cas de sollicitations dynamiques rapides, comme l'impact ou le souffle, la structure est mise en vibration, et la prise en compte du comportement cyclique ou tout du moins alterné est de ce fait nécessaire. Cependant, la rupture sous impact arrive souvent en quelques millisecondes, bien avant que la structure ne se mette à vibrer. Les déformations engendrées par le premier pic d'effort sont suffisantes pour endommager très sévèrement la structure. On ne peut néanmoins s'affranchir de modéliser le comportement cyclique du béton.

## 2.8 Modèles d'endommagement appliqués aux matériaux fragiles et bétons

Les modèles que nous allons présenter s'inscrivent dans le cadre le plus général de la thermodynamique des milieux continus (**Lemaitre & Chaboche 1985**). L'état de la matière est décrite à chaque instant par l'intermédiaire de variables d'état, observables (la déformation totale, la température  $T$ ) ou internes (l'endommagement  $D$ , les déformations anélastiques, l'érouissage, ...). On utilisera la mécanique de l'endommagement continu. Cette théorie permet une approche systématique pour décrire l'apparition et l'évolution des microdéfauts et des microvides dans le matériau endommagé, ainsi que ses effets sur le comportement global.

### 2.8.1 Modèle de Mazars (**Mazars 1984**)

Mazars en 1984 formule un premier modèle élastique endommageable isotrope pour le béton qui fait depuis référence, et dont de nombreux auteurs se sont inspiré. Par la suite, afin de mettre en évidence les limites de l'approche locale et introduire une approche non locale, il

sera considéré comme le modèle de référence. Pour ces raisons, une description précise et détaillée du modèle s'impose (le modèle de Mazars sera détaillé au chapitre 3).

### 2.8.2 Modèle utilisant le formalisme classique de la plasticité (Marigo 1981) :

$$\sigma_{ij} = \tilde{\Lambda}_{ijkl}(D)\varepsilon_{ij} \quad (2.47)$$

La surface seuil s'écrit :

$$f(\varepsilon, D) = Y - K(D) = \frac{1}{2} \underline{\Lambda} : \varepsilon : \varepsilon - K(D) \quad (2.48)$$

Où  $K(D)$  est une fonction scalaire, strictement positive, provenant de l'expression de la dissipation. Marigo reprend la notion d'écrouissage  $H$  utilisée en plasticité :

$$H(\varepsilon, D) = \frac{\partial f(\varepsilon, D)}{\partial D} \quad (2.49)$$

$H$  correspond à l'agrandissement du domaine élastique en fonction de  $D$  dans l'espace des déformations. Il fait en outre l'hypothèse que ce module d'écrouissage est strictement positif afin de pouvoir exprimer un critère charge-décharge lorsque le matériau vérifie le critère  $f(\varepsilon, D) = 0$ . Il est déterminé par expérience.

Le potentiel de dissipation est sous la forme :

$$\varphi = \lambda f(\varepsilon, D) \quad (2.50)$$

La règle de la normalité donne :

$$\dot{D} = \lambda \dot{f} = \lambda \quad (2.51)$$

Le multiplicateur  $\lambda$  s'obtient par la règle de consistance :

$$\dot{f} = 0 \Leftrightarrow \dot{D} = 0 \quad (2.52)$$

Soit :

$$\dot{D} = \frac{\dot{Y}}{H} = \lambda \quad (2.53)$$

D'où la loi d'évolution de l'endommagement  $D$  :

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(\varepsilon, D) < 0 \text{ et } \dot{f}(\varepsilon, D) = 0 \\ \frac{1}{H} \langle \Lambda_{ijkl} \varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} \rangle_+ & \text{si } f(\varepsilon, D) = 0 \text{ et } \dot{f}(\varepsilon, D) = 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

Une application de ce modèle a été conduite par Lino, en prenant :

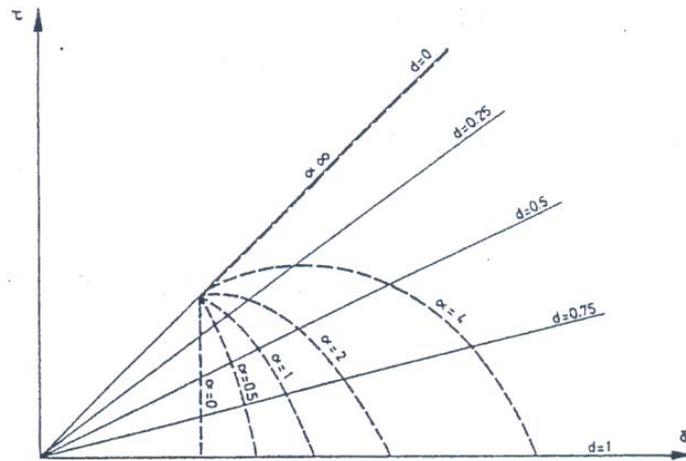
$$K(D) = -K_0(1+2\alpha D) \quad K_0 > 0 \quad \alpha \geq 0 \quad (2.55)$$

Où  $K_0 > 0$  est la taille initiale de la surface de non endommagement (domaine élastique actuel) et  $\alpha \geq 0$  est un paramètre caractéristique du matériau. Il s'avère que lorsque  $\alpha < 1$ , la stabilité du calcul numérique laisse à désirer.

Pour faciliter la représentation graphique de ce critère, deux nouvelles variables  $\tau$  et  $\gamma$  sont définies par :

$$\begin{cases} \sigma = \tau \sigma_0 \\ \varepsilon = \gamma \sigma_0 \end{cases} \quad (2.56)$$

On peut alors tracer les courbes d'érouissage  $\tau, \gamma$  dans le repère pour différentes valeurs de  $\alpha$  (Figure 2.19) :



**Figure 2.19** : Courbe d'érouissage pour différentes valeurs de  $\alpha$  (Marigo 1981).

Par ailleurs, la surface seuil  $f(\varepsilon, D)$  choisie reste symétrique, en traction et en compression, ce qui pose problème pour le matériau fortement dissymétrique qu'est le béton .

### 2.8.3 Modèle de De Vree (De Vree 1995)

La philosophie de ce modèle est assez proche de celle du modèle de Mazars, mais avec l'avantage majeur de ne comporter qu'une seule variable d'endommagement  $D$ , grâce à une nouvelle définition de la déformation équivalente :

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E} \left( 1 - k D \right) \quad (2.57)$$

Où  $k$  est le rapport de la résistance en compression sur celle en traction,

$$k = \frac{f_c}{f_t} \quad (2.58)$$

### 2.8.4 Modèle d'endommagement scalaire (Pijaudier-Cabot & Bodé 1992, Pijaudier-Cabot, Huerta & Bodé 1992, Pijaudier-Cabot 1985)

Un simple modèle d'endommagement couplé à l'élasticité, la fonction seuil est choisie sous la forme suivante :

$$\quad (2.59)$$

La loi d'évolution de l'endommagement est donnée par :

$$\quad (2.60)$$

La fonction  $F$  a pour expression :

$$\quad (2.61)$$

Avec  $k$  variable d'écrouissage,

$$k(y) = y_0 \text{ (initialement),}$$

$$k(y) = \sup(y, y_0),$$

$b_1$  et  $b_2$  sont les paramètres du matériau.

$k$  est la valeur maximale de la quantité  $y$ .

### 2.8.5 Modèle isotrope en contrainte (Lemaitre & Chaboche 1978)

Nous nous restreignons à l'étude des modélisations de l'endommagement plastique isotrope. Tout comme la plasticité, il est indépendant de la vitesse de chargement et par conséquent ne fait pas intervenir le temps.

En ne considérant que l'érouissage isotope, la seule variable interne de plasticité à prendre en compte est la déformation plastique cumulée  $\bar{\varepsilon}^p$  définie par :

$$\bar{\varepsilon}^p = \int \dot{\varepsilon}^p dt \quad (2.62)$$

Le potentiel de dissipation se réduit à :

$$\varphi^* \left( y, \dot{\varepsilon}^p, T \right) = \frac{\dot{\varepsilon}^p}{s_0 + 1} \left[ \frac{-y}{S_0} \right]^{s_0 + 1} \quad (2.63)$$

$s_0$  et  $S_0$  sont des caractéristiques du matériau dépendantes de la température, identifiables grâce à des mesures d'endommagement de plasticité effectuées au cours d'essais de traction par la méthode de variation du module d'élasticité.

Dans le cas unidimensionnel  $\sigma = \sigma_D$ , après développement et prise en compte de la loi d'érouissage, on aboutit à une forme proche des résultats expérimentaux (**Dufailly & al. 1980**).

La loi entière reliant  $D$  à

$$D = 1 - \left[ 1 - \left\langle \frac{\sigma - \sigma_D}{S} \right\rangle^{s+1} \right]^{\frac{1}{s+1}} \quad (2.64)$$

Le modèle d'évolution présenté ci-dessus, valable pour le cas unidimensionnel sans décharge, peut aisément être étendu aux cas tridimensionnels isotropes. Ce modèle de plasticité se développe essentiellement lors des grandes déformations.

### 2.8.6 Modèle de Lubliner (Lubliner, Oliver & al. 1989)

Les auteurs choisissent un critère de type Mohr-Coulomb et Drucker-prager pour les matériaux granulaires :

$$(2.65)$$

L'endommagement total correspond à une perte totale de la cohésion  $C$ .

Dans ce modèle, on tient compte de la diminution de la rigidité du matériau. Celle-ci est influencée par deux types de variables de dégradation : élastique et plastique. La variable "élastique" de dégradation dépend de l'évolution de la déformation totale et celle plastique dépend de l'évolution de la déformation plastique :

$$(2.66)$$

où  $K_i$  et  $I_j$  sont les vecteurs présentant l'évolution de l'endommagement dans cette direction sous un changement quelconque.

La loi de comportement du matériau endommagé s'exprime :

(2.67)

Ce modèle isotrope utilise soit une variable scalaire  $D$ , soit deux variables scalaires  $D_1$  (associée au module hydrostatique  $K$ ) et  $D_2$  (associée au module cisaillement  $G$ ), et une variable scalaire liée directement à la cohésion. Ce modèle se base sur la théorie de plasticité associée avec l'endommagement et l'aspect énergétique. Cependant, les paramètres de ce modèle sont difficilement identifiables par des expériences. Ceci concerne notamment l'identification de la relation C-K et la distinction de la dégradation "plastique" de la déformation "élastique".

### 2.8.7 Formulation Lemaitre

Cette approche a aussi une base énergétique, introduite à travers l'énergie libre. On pourra se porter aux ouvrages de référence pour des informations plus précises (**Lemaitre 1992, Lemaitre 2005**).

Elle utilise une variable de dommage scalaire (au moins dans le cas où l'on ne traite pas l'anisotropie induite), celle-ci varie entre  $D = 0$  et  $D = D_c < 1$ . Notons de suite que, dans cette formulation la valeur critique du dommage correspondant à la rupture de l'élément de volume, ou à l'amorçage macroscopique, est prise nettement inférieure à 1, avec  $0,2 < D_c < 0,5$ .

En utilisant l'énergie d'Helmholtz, on a :

$$\underline{\underline{L}} \quad (2.68)$$

Où  $\underline{\underline{L}}$  est le tenseur de rigidités élastique, et les  $\underline{\underline{D}}$  l'ensemble des variables d'écrouissage.

La loi de Lemaitre est prise sous une forme thermodynamique simple, telle que :

$$\dot{P} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P} \quad (2.69)$$

Où  $Y$  est la force thermodynamique associée à l'endommagement, ou taux d'énergie élastique libérée par accroissement du dommage.  $\dot{P}$  est la vitesse de déformation plastique cumulée, ou norme du tenseur vitesse de déformation plastique, définie par :

$$\dot{P} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P} \quad (2.70)$$

Couplée à cette loi d'endommagement, on a aussi nécessairement une loi de comportement de plasticité cyclique (ou de viscoplasticité cyclique), basée sur une ou plusieurs variables d'érouissage cinématique que l'on ne décrira pas ici. On pourra se reporter à (Desmorat 2006) pour plus détails.

Notons qu'une telle approche ne peut être pratiquée tel que dans le cas de la fatigue oligocyclique, avec des déformations plastiques non négligeables.

### 2.8.8 Endommagement anisotrope en changement radial (Hayhurst & Leckie 1973)

Pour rendre compte de l'anisotropie de l'endommagement lorsque les directions des sollicitations restent fixes, on peut introduire une contrainte effective définie de la manière suivante :

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{1} - \underline{D}^{-1} \underline{\sigma} \quad (2.71)$$

Où les tenseurs  $\underline{D}$  et  $\underline{\tilde{\sigma}}$  sont exprimés dans leurs axes principaux.

Ainsi l'endommagement est caractérisé par 3 scalaires,  $D_1$ ,  $D_2$ , et  $D_3$ . De manière générale les micro-défauts se propagent dans les directions plus au moins perpendiculaires à la direction de la contrainte principale maximale, ceci lorsque le chargement est de directions fixes. Aussi on peut adopter :  $D_2 = D_3 = 0$ .

### 2.8.9 Approche thermodynamique (Chaboche 1979)

En utilisant le concept de la contrainte effective, associée à l'équivalence en déformation. Cette approche met en jeu un tenseur d'endommagement du 4<sup>ème</sup> ordre qui relie la contrainte effective à la contrainte usuelle :

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{1} - \underline{D}^{-1} \underline{\sigma} \quad (2.72)$$

Le tenseur de dommage ainsi obtenue est un tenseur d'ordre 4 non symétrique, correspondant à un état d'endommagement crée par une anisotropie particulière (répartition de fissures planes et parallèles):

$$\underline{D} = \underline{1} - \underline{\tilde{\Lambda}} : \underline{\Lambda}^{-1} \quad (2.73)$$

Ainsi à partir d'un milieu initialement isotrope, moyennant quelques hypothèses que l'on trouve dans Chaboche (**Chaboche 1979**), on obtient l'opérateur  $D$  sous la forme suivante :

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu D}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu D}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha D \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Cette présentation suppose que  $\sigma_1$  est la plus grande des contraintes principales. Elle ne dépend que de 2 variables indépendantes  $D$  et  $\alpha$ . Ce modèle consiste à introduire l'anisotropie dans la loi d'évolution de  $\underline{D}$  en partant de l'hypothèse suivante ; l'anisotropie n'est pas une caractéristique de l'endommagement lui même mais plutôt de sa loi d'évolution.

Chaboche (**Chaboche 1979**) propose la loi d'évolution d'un endommagement plus complexe, pour le cas de fluage des matériaux métalliques sous forme :

$$\underline{G} = \underline{G} + \underline{G} + \underline{G} \quad (2.75)$$

avec :

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Le paramètre  $\alpha$  apparait comme un coefficient de proportionalité entre un cas parfaitement isotrope et le cas anisotrope. Il varie entre 0 et 1. Pour  $\alpha = 1$ , on retombe sur le cas purement isotrope et pour  $\alpha = 0$ , on a le cas anisotrope. Deux paramètres traduisant le degré d'anisotropie, sont à identifier expérimentalement. Cette loi permet une combinaison linéaire quelconque du cas isotrope et du cas anisotrope. Le scalaire  $\alpha$  est fonction du chargement, de la vitesse de chargement et de l'endommagement à un instant donné.

**2.8.10 Approche énergétique (Modèle élastique endommageable anisotrope) (Lemaitre & al. 1979, Cordebois & Sidoroff 1979-1982)**

L'approche proposée précédemment fondée sur le concept de contrainte effective associée à l'équivalence en déformation, nécessite un tenseur d'endommagement d'ordre 4. Si par souci de simplicité on s'impose de caractériser l'endommagement par un tenseur du second ordre, la relation :

$$(2.77)$$

ne conduit pas à un opérateur d'élasticité symétrique pour le matériau endommagé. On peut donc renoncer à l'hypothèse de l'équivalence en déformation et définir une autre contrainte effective fondée sur une équivalence en énergie élastique.

On écrit aussi d'une façon formelle :

$$(2.78)$$

où  $M(D)$  un opérateur linéaire dépendant de  $D$ .

En suivant certains auteurs, nous adoptons pour  $D$  un tenseur symétrique du second ordre (Murakami & Ohno 1978). L'endommagement dans son repère principal est caractérisé par les 3 variables  $D_1$ ,  $D_2$ , et  $D_3$ . Lors d'un essai de traction, on est conduit à introduire les coefficients d'élasticité et de poisson effectifs

**2.8.11 Modèle d'endommagement anisotrope avec un tenseur de dommage du 2<sup>ème</sup> ordre (Murakami & Ohno 1978)**

Soit  $D$  un tenseur symétrique du second ordre. Le tenseur des contraintes effectives non symétrique s'écrit :

$$(2.79)$$

Murakami (Murakami & Ohno 1981) propose d'écrire le tenseur des contraintes effectives sous forme :

$$(2.80)$$

Dans le repère principal de  $D$ , le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{---} \\ & \text{---} \\ & \text{---} \end{aligned} \tag{2.81}$$

Ce modèle est généralement utilisé dans le cas d'une anisotropie complexe et pour des chargements non proportionnels. C'est une approche assez intéressante pour l'étude des matériaux viscoplastique, mais elle ne peut traiter le cas du matériau élastique. Dans ce cas également, le concept de la contrainte effective, associé à l'équivalence en déformation ne peut s'appliquer, car elle conduit à un tenseur d'élasticité non symétrique (la symétrie est respectée uniquement pour un endommagement isotrope).

### 2.8.12 Approche énergétique (Ladeveze 1983)

Le modèle est caractérisé par deux variables scalaires d'endommagement pour le béton. Une variable d'endommagement en traction, et une variable d'endommagement en cisaillement. Ces deux variables caractérisent le dommage qui influence l'énergie élastique de cisaillement et l'énergie élastique hydrostatique ( $D_s$  agit sur la composante déviatorique,  $D_n$  agit sur la composante sphérique).

Les lois d'élasticité sont :

$$\begin{aligned} & \text{---} \\ & \text{---} \end{aligned} \tag{2.82}$$

Les variables associées à  $D_s$  et à  $D_n$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} & \text{---} \qquad \text{---} \end{aligned} \tag{2.83}$$

Avec  $w_e$  la densité complémentaire d'énergie donnée par :

$$\begin{aligned} & \text{---} \qquad \text{---} \end{aligned} \tag{2.84}$$

où  $\underline{S} = \underline{\Lambda}^{-1}$  est la complaisance.

### 2.8.13 Modèle d'endommagement unilatéral de Mazars (Mazars 1985)

Ce modèle permet de décrire le comportement élastique endommageable du béton. Ce modèle isotrope prend en compte l'effet unilatéral du comportement du béton, lié à la restauration de rigidité en cas de "refermetures des fissures".

L'énergie libre est écrite sous la forme suivante :

$$\dots \dots \dots \quad (2.85)$$

Où :

$$\dots \dots \dots \quad (2.86)$$

et

$$\dots \dots \dots \quad (2.87)$$

Les déformations élastiques en traction et en compression sont représentées comme suit :

$$\dots \dots \dots \quad (2.88)$$

$$\dots \dots \dots \quad (2.89)$$

Avec :  $\dots \dots \dots$

La compression et la traction se distinguent par le signe des contraintes. La dissipation s'écrit :

$$\dots \dots \dots \quad (2.90)$$

Avec :

$$\dots \dots \dots \text{ et } \dots \dots \dots \quad (2.91)$$

Les fonctions seuil pour chaque variable d'endommagement sont :

$$\dots \dots \dots \quad \text{(Cas de la traction)} \quad (2.92)$$

$$\dots \dots \dots \quad \text{(Cas de la compression)} \quad (2.93)$$

Ce modèle tient compte de la dissymétrie du comportement du béton en traction et en compression, et tient compte également du phénomène unilatéral du matériau. Néanmoins, la surface seuil d'endommagement n'est pas convexe.

### 2.8.14 Théorie de Ju (Ju 1989) (Anisotropie, effet unilatéral, anélastique tenseur d'endommagement de 4<sup>ème</sup> ordre)

Ce modèle utilise le concept des opérateurs de projection comme méthode de désactivation du dommage. Ce concept à été introduit la première fois par Ortiz (Ortiz 1985).

#### Modèle isotrope élastoplastique

La variable d'état correspondant au processus d'endommagement est un tenseur d'ordre 4, La décomposition de la déformation s'effectue de manière classique :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \tag{2.94}$$

L'énergie libre s'écrit sous la forme :

$$\psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{C}} : \epsilon : \epsilon - \underline{\underline{q}} : \epsilon \tag{2.95}$$

D'où les lois d'état sont :

$$\sigma = \underline{\underline{C}} : \epsilon - \underline{\underline{q}} \tag{2.96}$$

Où, le vecteur  $\underline{\underline{q}}$  présente des variables plastiques,  $D$  est la variable d'endommagement.

Le point particulier, est que la surface seuil d'endommagement est coïncidente avec le potentiel d'énergie :

$$\psi = \psi(\sigma, \underline{\underline{q}}, D) \tag{2.97}$$

#### Modèle anisotrope élastoplastique

L'endommagement est présenté par un tenseur d'ordre quatre :

$$D = \underline{\underline{D}} : \epsilon : \epsilon \tag{2.98}$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}_0 - \underline{\underline{C}}_0 : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{C}}_0 \tag{2.99}$$

où  $\underline{\underline{C}}_0$  et  $\underline{\underline{C}}$  sont les tenseurs de rigidité du matériau vierge et endommagé.

Les lois d'état sont déduites, Ju a choisi le tenseur de rigidité (ou matrice sécante des constantes élastique, qui se varie bien sûr) comme variable interne. L'énergie libre s'écrit :

$$\psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{C}} : \epsilon : \epsilon \tag{2.100}$$

Les forces thermodynamique s'écrivent :

$$\sigma = \underline{\underline{C}} : \epsilon \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{2} \epsilon \otimes \epsilon \tag{2.101}$$

Dans cette théorie l'effet unilatéral de fermeture/ouverture de microfissures est introduit en procédant à la décomposition spectrale du tenseur de déformation (**Ortiz 1985**).

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{i=3} e_i \vec{p}_i \otimes \vec{p}_i \quad \text{avec} \quad |\vec{p}_i| = 1 \quad (2.102)$$

Où  $e_i$  : est la  $i$ ème déformation principale

$\vec{p}_i$  : est la direction principale unitaire correspondante.

Soient  $Q$  et  $Q^+$  les tenseurs projections spectrales régulières et positives respectivement :

$$Q = \sum_{i=1}^{i=3} e_i \vec{P}_i \otimes \vec{P}_i \quad (2.103)$$

$$Q^+ = \sum_{i=1}^{i=3} H(e_i) \vec{P}_i \otimes \vec{P}_i \quad (2.104)$$

Où  $H(\cdot)$  est la fonction de Heaviside

$\vec{P}_i$  est le  $i$ ème vecteur de base de la direction principale.

Un tenseur du 4<sup>ème</sup> ordre des projections  $\underline{\underline{C}}$  est introduit :

$$(2.105)$$

Ainsi la partie positive de  $\underline{\underline{C}}$  peut être exprimée par :

$$\underline{\underline{C}}^+ \quad (2.106)$$

Avec cette notation Ju (**Ju 1989**) définit un tenseur actif sécant des rigidités endommagées

$\underline{\underline{C}}_{act}$ . La relation contrainte-déformation prend alors la forme :

$$\sigma = \underline{\underline{C}}_{act} : \varepsilon \quad (2.107)$$

La fonction seuil d'endommagement est définie par la fonction :

$$g = G \underline{\underline{Y}} - r \leq 0 \quad (2.108)$$

Où  $r$  dépend de l'histoire du chargement.

Ce modèle tient compte à la fois de l'anisotropie, de l'endommagement et des déformations permanentes. Cependant l'anisotropie n'est pas suffisamment interprétée et il n'y a pas de continuité en relation contraintes-déformation selon (**Chaboche 1993**). En effet l'anisotropie induite par endommagement n'est reproduite que sous des conditions de déformations mixtes ( par exemple).

Sur le plan pratique, l'utilisation du tenseur quatrième ordre de l'endommagement est difficile numériquement.

### 2.8.15 Modèle unilatéral (Hansen & Schreyer 1992-1995-1994)

Ce modèle utilise également une projection spectrale du tenseur de déformation totale (Ortiz 1985). Le tenseur de déformation se décompose de la manière suivante :

$$\varepsilon_i^T = \sum_{i=1}^{i=3} H(e_i^T)(\vec{p}_i \otimes \vec{p}_i) \quad (2.109)$$

Où est la ième déformation principale totale,

$P_i$  est la ième valeur propre de .

Le tenseur des parties positives de (tenseur spectral positif) dans le repère principal est donné par :

$$Q^{h+} = \sum_{i=1}^{i=3} H(e_i^T)(\vec{p}_i \otimes \vec{p}_i) \quad (2.110)$$

L'opérateur de projection spectral positif du 4<sup>ème</sup> ordre s'écrit :

$$(2.111)$$

La projection positive de est donné par :

$$(2.112)$$

La relation contrainte-déformation s'écrit :

$$\sigma = \underline{\Lambda}_{act} : \varepsilon \quad (2.113)$$

Avec  $\underline{\Lambda}_{act}$  le tenseur actif des rigidités.

### 2.8.16 Modèle de Simo (Simo & al. 1987)

Ce modèle consiste à utiliser plusieurs surfaces seuils d'endommagement (actives ou non) avec l'hypothèse de dissipation maximale, afin de tenir compte des différents modes de dégradation.

Le domaine d'élasticité est donné par M fonctions de l'endommagement :

$$(2.114)$$

L'expression de l'énergie libre s'écrit :

$$(2.115)$$

Les lois d'état sont donc trouvées :

$$(2.116)$$

La dissipation s'écrit :

$$D = \dots \quad (2.117)$$

En se basant sur le principe de dissipation maximale, on applique le théorème de Lagrange :

$$L(\sigma, q) = -D + \sum_{k=1}^{k=M} \gamma_k \phi_k \quad (2.118)$$

$$\text{qui doit être maximum : } \dots \quad (2.119)$$

Ce modèle apparaît simple et ne tient pas compte de l'effet anélastique. L'idée principale est d'utiliser plusieurs surfaces seuils avec l'hypothèse de dissipation maximale. Ceci permet de tenir compte des différents modes de fissurations et leurs influences portées sur la loi de comportement global. Les auteurs postulent 3 surfaces relatives à la fissuration dans le repère local  $\dots$

### 2.8.17 Modèle de La Borderie (La Borderie 1991)

Confrontés par les résultats encourageants obtenus à l'aide du modèle de Mazars (**Mazars 1984**), La Borderie (**La Borderie 1991**) s'est intéressé au développement d'un modèle d'endommagement qui puisse simuler des chargements cycliques (ou alternés) tels que : la diminution de la raideur du matériau (endommagement), la restauration progressive de la raideur qui se produit à la fermeture de la fissuration et les déformations irréversibles (ou permanents), induites par l'endommagement. Le modèle de Mazars (**Mazars & al. 2006**) et le modèle de La Borderie sont identiques. Contrairement au modèle de Mazars, ce modèle permet d'introduire une partie irréversible des déformations et l'effet unilatéral, selon le changement de signe de contrainte (Figure 2.20).

Le point particulier de ce modèle est l'utilisation de l'énergie Gibbs comme le potentiel. Le modèle se différencie des autres modèles pour son potentiel écrit non plus en déformations mais en contraintes utilisant une partition de l'énergie basée sur le signe des contraintes pour représenter l'effet de refermeture des microfissures. L'énergie libre a été exprimée en fonction des contraintes.

Après des analyses de continuité de la loi de comportement et la vérification de convexité du potentiel, le modèle adopte :

$$2\chi_e = \frac{\sigma^+ : \sigma^+}{E(1-D_1)} + \frac{\sigma^- : \sigma^-}{E(1-D_2)} + \frac{\nu}{E} \sigma : \sigma - tr \sigma^2 \quad (2.120)$$

$$2\chi_{an} = \frac{\beta_1 D_1}{E(1-D_1)} f(tr\sigma) + \frac{\beta_2 D_2}{E(1-D_2)} tr\sigma \quad (2.121)$$

$$\varepsilon^{an} = \frac{1}{2} \left\{ \beta D^{-1} D + \beta^* D^*^{-1} D^* + \gamma \frac{\delta^2}{1-\delta} \right\} \quad (2.122)$$

Où  $D_1$  et  $D_2$  sont deux scalaires d'endommagement relatif à deux modes de dégradation (qui interviennent indépendamment sur des partitions de l'énergie élastique, l'une en traction et l'autre en compression). La fonction  $f(tr\sigma)$  assure le processus de l'unilatéralité (cette fonction permet de gérer les effets de l'ouverture et de refermeture des fissures). On constate en fait que l'utilisation d'une telle fonction est nécessaire pour présenter correctement le comportement cyclique des structures. Les deux paramètres sont homogènes à des contraintes. Les valeurs des paramètres à l'anélasticité pour un béton classique sont identifiables sur des essais de traction et de compression comprenant plusieurs décharges (**La Borderie 1991**).

La décomposition du tenseur de contraintes est définie selon l'expression de Ju (**Ju 1989**). Les forces thermodynamiques  $Y_1$  et  $Y_2$  sont trouvées par la dérivation du potentiel. La loi d'évolution de l'endommagement se déduit en fonction de l'évolution de la force thermodynamique associée pour chaque mode. La modélisation proposée par La Borderie pour représenter ces déformations sont adaptés des travaux de (**Heqman & Kestin 1988**).

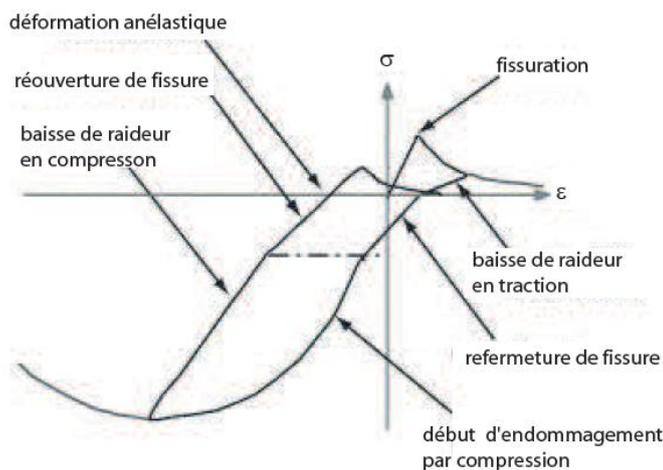
Ce modèle étant isotrope avec deux scalaires d'endommagement permet d'introduire l'effet unilatéral selon le changement de signe de contrainte et la partie anélastique de déformation. Les potentiels ainsi que les surfaces de charges sont continues et convexes, ce qui assure une stabilité numérique. Cependant, le tenseur de déformation anélastique reste toujours sphérique dû au choix de  $\chi_{an}$ . Cela implique, la déformation résiduelle ne dépend pas du cisaillement.

Ceci peut constituer une limitation du modèle, dans la mesure où le rôle de cisaillement peut être prépondérant dans la génération des déformations irréversibles. De ce fait, le modèle risque de conduire à une interprétation peu fidèle dans des cas dominés par le cisaillement. De même, l'idée de conserver l'isotropie pour les déformations anélastiques rend irréaliste la réponse volumique du modèle. Toutefois la difficulté de ce modèle réside dans sa formulation implicite qui impose de faire des interactions pour sa résolution.

Les applications en vue pour ce modèle sont bien sûr liées aux calculs sismiques. Peu d'autres s'étaient penchés sur la question à l'époque, et le seul travail faisant référence aux

effets unilatéraux de l'endommagement était un rapport interne qui a servi de base au développement du modèle (**Ladeveze 1983**).

Aujourd'hui encore, les nombreux problèmes intervenants lorsqu'on couple l'endommagement unilatéral et les déformations anélastiques ne sont pas totalement résolus (**Cormery & Welemene 2002**).



**Figure 2.20** : Réponse en traction-compression du modèle de La Borderie (**La Borderie 1991**).

### 2.8.18 Modèle unilatéral isotrope à deux variables (**Gerard & Baste 1994**)

Ce modèle introduit une variable interne scalaire  $D$  pour caractériser l'état du matériau endommagé, et comme le matériau est microfissuré, il est naturel d'admettre en conséquence que lors du chargement, certaines microfissures peuvent être ouvertes et d'autres fermées. La variable d'endommagement est donc insuffisante pour décrire l'état du matériau microfissuré.

Gerard et Baste (**Gerard & Baste 1994**) introduisent une nouvelle variable interne  $\beta$  (0 <  $\beta$  < 1) permettant de quantifier la proportion de microfissures ouvertes :

- $\beta=1$  quand tous les microfissures sont ouvertes
- $\beta=0$  quand tous les microfissures sont fermées

Pour tenir compte de la restitution de raideur observée, l'énergie libre du matériau microfissuré est constituée de la superposition de trois énergies élémentaires libres :

- énergie libre associée à la proportion  $(1-\beta)$  due aux microfissures fermées
- énergie libre associée à la variable  $\beta$  due aux microfissures ouvertes
- énergie libre due à l'interaction des deux énergies.

L'énergie libre totale s'écrit sous la forme :

$$- \quad - \quad (2.123)$$

### 2.8.19 Modèle de Ramtani (Modèle de dommage unilatéral avec des tenseurs de dommage d'ordre 2) (Ramtani 1990)

Dans ce modèle, Ramtani utilise deux tenseurs de deuxième ordre pour décrire l'endommagement en traction et en compression, et avec un scalaire pour l'endommagement volumique. Ce modèle donne la possibilité de calculer les déformations irréversible associées à l'endommagement, l'énergie libre s'écrit :

$$- \quad - \quad - \quad (2.124)$$

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^{an} \quad (2.125)$$

$$\varepsilon^{an} = \frac{1}{2} \left\{ \beta D \ 1 - D^{-1} D + \beta^* D^* \ 1 - D^{*-1} D^* + \gamma \frac{\delta^2}{1 - \delta} \right\} \quad (2.126)$$

Dans ces expressions,  $D$  est le tenseur d'endommagement relatif au mode d'ouverture de fissures,  $D^*$  au mode de refermeture de fissures. Paramètres intrinsèques du matériau, ils jouent le rôle de coefficients de sensibilité du matériau à l'état d'endommagement dans le processus de création des déformations anélastiques, est un scalaire qui représente les effets de l'endommagement volumiques (correspond au mode d'évolution des microcavités). Ainsi ces tenseurs traduisent l'anisotropie et le comportement dissymétrique en traction et compression.

La décomposition du tenseur de déformation en deux parties "positive" et "négative" est définie comme Ju (Ju 1989, Ladeveze 1983). Comme il est difficile d'expliciter les forces thermodynamiques associées  $Y, Y^*$  à cause de la difficulté de la dérivée selon  $1 - D^{\frac{1}{2}}$ ,

Ramtani (**Ramtani 1990**), utilise trois surfaces d'endommagement en se basant sur la déformation :

$$- \quad (2.127)$$

$$- \quad (2.128)$$

$$- \quad (2.129)$$

Ces trois surfaces d'endommagement peuvent être indépendamment ou simultanément activées selon l'état de déformations.

Cependant le majeur, inconvénient de ce modèle est que le tenseur sécant de rigidité n'est pas toujours symétrique (**Chaboche 1993**).

### **2.8.20 Modèle d'endommagement anisotrope unilatéral avec l'anélasticité menant à la définition d'une nouvelle variable interne (Matallah & La Borderie 2006)**

Le modèle est basé sur un couplage endommagement-déformation anélastiques. Ces dernières représentent l'Ouverture Unitaire des micro-Fissures (OUF) " " et sont les résultats des extensions créées dans le matériau.

Le modèle propose une formulation nouvelle, où l'anisotropie des déformations module l'effet de l'endommagement représenté par une variable scalaire. L'introduction d'une variable interne supplémentaire " " désactive partiellement l'évolution de l'endommagement en compression si bien que l'on obtient des réponses différentes, malgré un endommagement qui reste isotrope avec une unique variable scalaire  $D$ .

Les déformations anélastiques sont anisotropes, et sont représentées par un tenseur d'ordre 2, tandis que l'endommagement est caractérisé par une seule variable scalaire, sa loi d'évolution sera la même en traction et en compression.

L'originalité de la formulation vient du fait que l'endommagement n'intervient pas comme dans la plupart des modèles (**Mazars 1984, Fichant 1996**) comme multiplicateur des déformations élastiques mais des déformations anélastiques . Une formulation du même type a été utilisée par Ragueneau (**Ragueneau 2000**), pour modéliser les effets hystérétiques.

La variable interne  $\alpha$  est liée aux déformations anélastiques  $\epsilon^a$  par une variable scalaire  $S$  fonction de l'état de contraintes qu'on va appeler "indicateur d'ouverture de fissures" :

$$\alpha = S \quad (2.130)$$

Le potentiel thermodynamique :

$$\quad (2.131)$$

$\epsilon$  : Tenseur d'ordre 2 de déformations totales

$\epsilon^a$  : Tenseur d'ordre 2 d'ouverture unitaire de fissures.

$D$  : variable interne scalaire d'endommagement

$P$  : variable interne représentent l'état d'écrouissage (déformation anélastique cumulée).

Les potentiels anélastiques s'écrivent alors :

$$\quad (2.132)$$

La prise en compte du caractère unilatéral est facilitée grâce à la nouvelle formulation proposée, la variable  $\alpha$  s'écrit :

$$\quad (2.133)$$

La fonction  $S$ , permet d'annuler progressivement les déformations anélastiques créées en traction quand le matériau est soumis à un chargement de compression. Celle-ci est donnée en fonction de la contrainte  $\sigma$  qui représente la contrainte au point de restauration de la raideur (donnée expérimentale) (**Matallah & al. 2006, Matallah & al. 2009**).

### 2.8.21 Modèle hystérétique uniaxial (La Borderie 2003)

Les approches classiques basées sur la méthode de Rayleigh ou de décomposition sur base modale mettent en œuvre des paramètres qui sont pris la plus part du temps forfaitairement. Les travaux de Jean François (**Dubé 1994**) montre l'importance de la modélisation de l'amortissement et des conditions aux limites. On a constaté expérimentalement que des phénomènes hystérétiques sont observables dans le comportement cyclique du béton.

Ces phénomènes hystérétiques ne semblent pas primordiaux quand il s'agit de modéliser le comportement statique de structure en béton. Par contre, il semble évident que lors de chargements dynamiques cycliques (comme ceux provoqués par des séismes), la dissipation engendrée par les hystérésis va participer à l'amortissement. Un des objectifs de la

thèse de Ragueneau (**Ragueneau 1999**) était de développer un modèle de comportement permettant de prendre en compte les phénomènes hystérétiques et d'évaluer leur influence sur le comportement dynamique de structures.

Le modèle se base sur la forme particulière de l'énergie de Helmholtz :

$$- \quad - \quad (2.134)$$

Le modèle est construit à partir de variables d'état (déformation  $\epsilon$ , endommagement  $D$ , la variable interne  $Y$ , et d'autres phénomènes ( $V_k$ )). L'énergie consommée par la création de l'endommagement est en partie bloquée par les phénomènes de glissement/adhérence entre les lèvres de fissures.

Un exemple de comportement uniaxial est représenté par La Borderie (**La Borderie 2003**) où l'évolution de l'endommagement peut être calculée classiquement à l'aide de la variable  $Y$  et l'ouverture unitaire de fissure  $w$  à partir d'une évolution basée sur un écrouissage cinématique calculée à partir d'une fonction seuil.

Le modèle tridimensionnel trop complexe et ne permet pas d'aller jusqu'au bout de l'idée. Le modèle a été développé en 3D avec un endommagement anisotrope et les effets unilatéraux, ont été étudiés sur une version uniaxiale. Le modèle permet de prendre en compte les phénomènes d'hystérétiques créés par le frottement entre les lèvres des microfissures. Lors de calcul dynamiques, l'énergie dissipée participe à l'amortissement structurel.

### **2.8.22 Modèle thermo-plastique couplé à l'endommagement pour le béton à hautes températures (Nechnech, Ragueneau & Meftah 2001)**

Un nouveau modèle thermo-plastique endommageable pour le béton soumis à des chargements mécaniques cycliques et thermiques combinés est développé. Ce modèle est basé sur la théorie de l'endommagement, deux variables  $y$  sont introduites, une première variable pour modéliser les effets du chargement mécanique et la seconde pour modéliser les effets du chargement thermique. Un critère multi-surface de plasticité est utilisé. Les relations constitutives de la réponse thermo-elastoplastique sont découplées de celles de la réponse endommagée en utilisant le concept de la contrainte effective.

Une variable scalaire de dégradation est introduite pour simuler les effets d'endommagements thermo-mécaniques sur la rigidité et l'effet unilatéral lors de la fermeture de fissures. Ce modèle est mis en œuvre dans l'analyse du comportement de spécimens en

béton d'une part, et de structures en béton armé soumis à des sollicitations thermo-mécaniques cycliques à hautes températures.

Le potentiel thermodynamique (énergie libre de Helmholtz), s'exprime sous la forme:

$$\psi = \psi_e(\varepsilon^e, \theta, D, \Lambda) + \psi_p(K, \Lambda) \quad (2.135)$$

Les variables d'états sont alors, le tenseur de déformation élastique  $\varepsilon^e$ , la température relative  $\vartheta = \theta - \theta_0$ , la variable d'endommagement mécanique  $D$  et la variable d'endommagement thermique  $\Lambda$ . En outre,  $\psi_p$  désigne le potentiel thermo-plastique endommageable et  $K$  représente le paramètre d'écrouissage qui contrôle le processus de plasticité. La déformation totale est alors décomposée en une part réversible, une part irréversible et une part thermique comme suit :

$$(2.136)$$

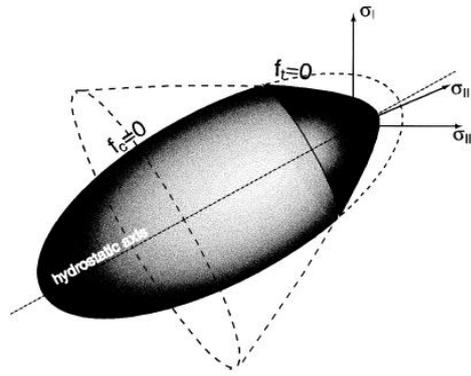
### 2.8.23 Modèle d'endommagement isotrope à deux surfaces (Comi 2001)

Le modèle est caractérisé par deux variables scalaires d'endommagement,  $D_t$  pour la traction et,  $D_c$  pour la compression. Le potentiel énergie libre est défini par :

$$- \quad (2.137)$$

Où  $e$  représente la partie déviatorique du tenseur des contraintes,  
et le tenseur de déformations

On constate dans ce modèle que l'endommagement est piloté par deux surfaces de charges  $f_t$  et  $f_c$  définies dans l'espace des contraintes: une hyperboloïde par la traction et une ellipsoïde par la compression (Figure 2.21). La transition de l'état de traction à un état de compression durant une phase de décharge montre également le caractère unilatéral du modèle. Une description détaillée de ce modèle est donnée dans (Comi 2001).



**Figure 2.21** : Fonctions de charges et domaine élastique dans le repère principal des contraintes (Comi 2001).

### 2.8.24 Modèle avec prise en compte des déformations irréversibles dues à l'endommagement (Lesne & Saanouni 1993).

La description des déformations irréversibles est réalisée sans référence aux formalismes classiques de plasticité ou de viscoplasticité. Dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, le potentiel thermodynamique énergie libre s'écrit sous la forme :

$$\rho\psi = - \quad (2.138)$$

Avec  $\underline{\mathbf{M}}$  et  $\underline{\mathbf{R}}$ , tenseurs symétriques, définis par :

$$\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{D}_{rskl} \mathbf{N}_{kl} \mathbf{M}_{rsij} \quad (2.139)$$

$$\mathbf{M}_{ijkl} = \mathbf{I}_{ijkl} \mathbf{D}_{ijkl} \quad (2.140)$$

$$\text{et} \quad = \mathbf{M}_{ijkl} \wedge_{rspq} \mathbf{M}_{pqkl} \quad (2.141)$$

$$\mathbf{I}_{ijkl} = - ( \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} ) \quad (2.142)$$

Les lois d'état sont déduites de  $\psi$  de manière classique :

$$(2.143)$$

$$(2.144)$$

On constate alors dans l'expression de  $\varepsilon_{ij}$  un terme ne dépend pas de  $\underline{\sigma}$  ce qui traduit l'irréversibilité du comportement. La partie irréversible es donnée par :

$$(2.145)$$

$\underline{N}$  est caractéristique du matériau dans la mesure où il quantifie la déformation irréversible. Il doit être également un tenseur symétrique.

Ce modèle a été appliqué aux composites à matrice céramique. Pour la définition des différents paramètres voir détail (Saanouni 1993).

### 2.8.25 Modèle pour le béton couplant endommagement/frottement (Ragueneau 1999)

La micromécanique permet d'appréhender l'influence du frottement des fissures sur la réponse macroscopique du matériau. De nombreuses études analytiques et numériques ont été accomplies sur le problème d'une propagation de fissure frottante dans un milieu élastique infini (Horii & Nemat-Nasser 1983-1985). Plusieurs hypothèses sont adoptées quant à la forme de la fissure branchée s'ouvrant en traction et s'orientant au cours du chargement parallèlement à l'axe d'application des charges.

Dans ce modèle, un couplage endommagement–fissuration avec frottement est introduit, par l'intermédiaire d'une nouvelle variable interne de glissement et permet de gérer convenablement les évolutions des déformations de frottement ainsi que l'anélasticité résultante. Le modèle met en évidence également sous sollicitations cyclique le caractère unilatéral des fissures : après ouverture, ces dernières peuvent se refermer permettant au matériau de retrouver sa rigidité initiale. compte-tenu de la rugosité de fissures, cette refermeture s'accompagne d'un frottement important.

D'un point de vue thermodynamique, l'énergie consommée par l'ouverture d'une fissures ne se dissipe pas totalement mais qu'une partie de celle-ci va être bloquée dans des phénomènes de frottement. C'est donc par l'intermédiation de l'endommagement que cet échange d'énergie peut s'effectuer.

Le potentiel d'énergie libre est construit en considérant les chargements suivants : un glissement entre les blocs sans efforts externes et un chargement élastique de la matrice fissurée sans frottement. Ceci conduit à un potentiel à deux termes :

$$\psi = \frac{1}{2} E (1-D) \bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \frac{1}{2} E^* \left( \frac{\alpha^2}{d} \right) \quad (2.146)$$

Où  $D$  est l'endommagement crée par la fissure,  $\bar{\varepsilon}$  la déformation totale,  $\alpha$  une variable équivalente à un écrouissage cinématique dû au frottement,  $E^*$  est un facteur sur la géométrie et les hypothèses cinématiques et enfin  $d$  est une variable d'endommagement

associée à une densité de décohéation fibre/matrice. La première partie du potentiel correspond à la perte de rigidité élastique de la matrice, et la seconde au blocage d'énergie interne sous forme d'autocontraintes dues au frottement. Un tel modèle est capable de représenter les déformations anélastiques concomitantes à l'endommagement ainsi que la largeur des boucles d'hystérésis en décharge et d'évaluer leur influence sur le comportement dynamique de structures. Un comportement macroscopique peut être retrouvé en appliquant des lois probabilistes quant à l'orientation des fissures et leur répartition géographique (**Boudon-Cussac 1996**).

## Conclusion

Dans ce chapitre, plusieurs classes de modèles de comportements du béton ont été présentées.

Nous considérons que les modèles micromécanique sont des outils de travail précieux pour la conception des modèles de comportement réalistes. Cependant leur utilisation pour des calculs de structures reste délicate car très souvent ils nécessitent des calculs relativement lourds. Nous souhaitons néanmoins souligner que c'est par le biais de la micromécanique que l'on arrivera à attacher une traduction physique aux problèmes diverses rencontrées par les approches phénoménologiques.

L'approche élastoplastiques est une méthode très utilisée pour le calcul des structures.

Les modèles de la fissuration représentent bien le comportement adoucissant et l'effet anisotrope du béton. Cependant cette approche ne se base pas sur la théorie de la thermodynamique des milieux continus. Par conséquent il est difficile d'intégrer la déformation permanente ainsi que d'autres phénomènes non-linéaires du comportement du béton. De plus, cette théorie ne permet pas d'obtenir des résultats fiables si ce n'est dans le cas de configurations simples dominées par le mode I de fissure.

La synthèse bibliographique réalisée dans ce chapitre montre que l'approche continue basée sur la théorie de l'endommagement est couramment utilisée pour modéliser le comportement macroscopique du béton. Cette approche s'appuie sur un cadre scientifique solide basé sur la thermodynamique des milieux continus. Elle permet de construire des modèles d'endommagements non-linéaires et de les coupler avec d'autres phénomènes. Les mécanismes de dégradation par microfissuration dans le béton sont la source principale de non linéarité. La théorie de l'endommagement qui à été largement développée ces dernières

années, trouve dans ce matériau un champ d'application privilégié, pour construire un modèle analytique satisfaisant.

Ce matériau étant fragile, les non linéarités s'accompagnent de micro et/ou de macro-fissures. De ce fait une attention particulière doit être portée au comportement du matériau pour pouvoir reproduire correctement les différents phénomènes mis en jeu lors de sa dégradation.

Diverses extensions ont été proposées pour étendre la théorie de l'endommagement scalaire isotrope aux matériaux anisotropes et aux chargements complexes. Ce choix n'est pas toujours chose facile, tant d'un point de vue théorique, que dans sa mise en œuvre numérique. L'ingrédient clé, de chaque modèle, est de définir une loi d'évolution du tenseur caractérisant la dégradation de matériau.

A ce jour, plusieurs modèles ont été développés pour répondre à la volonté d'obtenir des résultats proches de la réalité, chacun de ces modèles a contribué à une connaissance meilleure du comportement du béton. Cependant, quels que soient les modèles qui ont été développés, il n'existe aucun modèle capable de décrire de façon fiable et simple le comportement du béton, surtout lorsque l'on veut prendre en compte l'anisotropie, le comportement unilatéral et les déformations permanentes.

De ce constat, une conclusion s'impose: il n'existe pas aujourd'hui de modèle universellement adapté qui serait capable de tout représenter avec un nombre limité de paramètres que l'on identifierait facilement avec très peu d'essais, qui de plus serait numériquement robuste, et convergerait rapidement. Et si ce modèle n'existe pas, c'est que le comportement mécanique du béton est complexe, les phénomènes à reproduire sont nombreux, ce qui impose souvent de faire des choix :

- d'un domaine de validité (en température, en déformations maximales, en vitesse de sollicitations...),
- d'un type d'applications particulières (changements multi-axiaux, cycliques, dynamiques, fluage, comportement hydromécaniques, ...) et finalement
- d'une échelle de modélisation.

Néanmoins, les modèles d'endommagement sont confrontés à des problèmes de mise en œuvre numérique : forte dépendance de la solution numérique vis-à-vis du maillage qui conduit à des résultats difficilement exploitables. Cette dépendance, liée à la localisation et à la bifurcation, est due au caractère adoucissant du comportement du béton et qui nécessite

d'introduire une technique de régularisation pour éviter le phénomène de localisation (ce dernier point fera l'objectif essentiel du chapitre 4).

Le chapitre 3 est dédié au développer d'un modèle de type endommagement, adapté au comportement des bétons.

# Chapitre 3

## Modélisation et implémentation dans le cadre de l'approche locale

### Introduction

La synthèse bibliographique réalisée dans le chapitre 2 montre que l'approche continue basée sur la théorie de l'endommagement est couramment utilisée pour modéliser le comportement macroscopique du béton. Cette approche s'appuie sur un cadre scientifique solide basé sur la thermodynamique des milieux continus. Elle permet de construire des modèles d'endommagement non-linéaires et de les coupler avec d'autres phénomènes.

Il s'agit, dans ce chapitre, de développer un modèle de type endommagement dans le cadre de l'approche locale (isotrope ou anisotrope), adapté au comportement des bétons. Ce modèle doit être simple, suffisamment représentatif du comportement du béton, et doit répondre aux besoins des calculs des structures en béton.

Pour établir un tel modèle, nous sommes partis des observations expérimentales à l'échelle mésoscopique et microscopique afin d'identifier les différents mécanismes élémentaires à l'origine de la dégradation du béton. En effet, l'observation du comportement mécanique du béton au laboratoire, matériau initialement isotrope (**Berthaud 1988**), souligne les principales propriétés suivantes :

- Un comportement adoucissant du béton, aussi bien en traction qu'en compression.
- Une perte de raideur à partir d'un certain seuil de contraintes, appelé endommagement qui est fortement anisotrope (anisotropie induite). L'expérience montre, que sous chargement mécanique, la perte progressive de rigidité des matériaux fragiles tels que les bétons et les roches induit une anisotropie. On distingue (**Pijaudier-Cabot 1985**) :
  - Endommagement volumique (crushing) créé par une pression hydrostatique qui conduit à une consolidation du matériau, et par conséquent à une diminution du volume apparent du matériau. Cet endommagement est lié à l'effondrement de la structure microporeuse,
  - Endommagement surfacique sous pression hydrostatique très élevée, qui correspond à la création de surfaces par décohérence du matériau, principalement à l'interface grain-matrice (fissuration intragranulaire). Ce mode d'endommagement conduit à une anisotropie de comportement (abaissement différentiel des modules d'élasticité et augmentation des coefficients de poisson). La fissuration est orientée selon les directions principales et en particulier au voisinage de la rupture.
- Un comportement unilatéral dû à une restitution de la raideur lors d'un passage d'un chargement endommageable en traction à un chargement endommageable en compression.
- Un effet d'échelle, les résistances décroissent au fur et à mesure de l'augmentation de la taille des éprouvettes.
- Un effet d'étreinte latérale, les essais de compression dépendent fortement de la pression de confinement (plus les contraintes latérales en compression (2 et 3) augmentent, plus la résistance à la compression dans la direction longitudinale augmente (**Hordjik 1988**)).
- Une dissymétrie de comportement en traction-compression (la valeur de la résistance en compression est environ 10 fois la valeur en traction), avec un comportement quasi-fragile en traction et un comportement ductile en compression.
- Des déformations permanentes.
- Le phénomène à l'origine des non-linéarités s'interprète comme étant de l'endommagement du fait de la perte de raideur constatée sur les décharges élastiques. Cet endommagement se traduit au niveau microscopique par des microfissures orientées qui coalescent pour former des macrofissures conduisant à la ruine,

- Ces déformations sont plus importantes en compression qu'en traction. De plus, en compression, elles sont plus importantes latéralement que suivant l'axe de la sollicitation (phénomène classique de dilatance dans les géomatériaux).

Ces constatations nous conduiront à l'établissement d'un modèle théorique général du comportement applicable aux matériaux fragiles et hétérogènes, et plus particulièrement aux bétons.

En plus de ces considérations, nous gardons comme objectif l'exploitation industrielle de ce nouveau modèle en adoptant les critères suivants :

- Les paramètres doivent être limités en nombre et facilement identifiables à partir d'expériences simples (traction simple, compression simple).
- Le modèle doit être facilement intégrable en 2D et en 3D dans un code de calcul aux éléments finis.
- Le modèle doit être numériquement robuste et doit assurer une convergence rapide.

En fonction des données expérimentales et des différentes modélisations proposées sur l'anisotropie induite (**Ramtani 1990, Govindge & al. 1995, Fichant & al. 1997, Gadhbi & al. 1998, Valliapan 1999**), nous avons établi une modélisation pour le comportement du béton qui devrait contribuer à la compréhension des processus physiques qui gouvernent les mécanismes de dégradation du béton.

### 3.1 Modèle d'endommagement de Mazars (Mazars 1984)

Mazars en 1984 formule un premier modèle élastique endommageable isotrope pour le béton qui fait depuis référence et dont de nombreux auteurs se sont inspiré. Par la suite, afin de mettre en évidence les avantages de l'anisotropie de l'endommagement et de l'approche non locale (voir chapitre 4), il sera considéré comme le modèle de référence.

Le modèle de Mazars (**Mazars 1984**) est l'un des premiers modèles d'endommagement appliqués aux bétons. Le modèle est élaboré dans le cadre de la mécanique de l'endommagement (**Mazars 1984, Mazars 1988, Mazars 1994**), il repose sur la théorie de l'élasticité-couplée à l'endommagement isotrope (il ignore toute manifestation de plasticité, ainsi que la fermeture des fissures). Une variable d'endommagement  $D$  scalaire et isotrope est définie. Ce concept décrit directement la perte de rigidité, ainsi que le comportement adoucissant du matériau et prend en compte la dissymétrie de comportement en traction/compression. Le point particulier de ce modèle est qu'il utilise un critère en

déformation, en introduisant la notion de déformation équivalente. En outre, l'hypothèse classique que l'endommagement ne dépend que des contraintes effectives, définies comme les contraintes s'appliquant sur une surface non endommagée, permet d'écrire une équivalence en déformations, et donc d'exprimer le modèle en déformations.

La relation contraintes-déformations s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1 - D) \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{3.1}$$

où  $\underline{\underline{\Lambda}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  sont respectivement les composantes du tenseur d'élasticité d'ordre 4, et du tenseur des déformations élastiques.

D est la variable d'endommagement.

Mazars suppose que l'endommagement du béton est piloté par une variable observable appelée "déformation équivalente". Cette dernière traduit l'état local d'extension du matériau durant le chargement; elle est définie par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_e = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}} \tag{3.2}$$

Dans laquelle :

est la déformation principale dans la direction i (i=1,3) et

L'expression de l'énergie libre spécifique est de la forme :

$$\rho \psi = \frac{1}{2} (1 - D) \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \tilde{\underline{\underline{\Lambda}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{3.3}$$

Sous une autre forme :

$$\psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \tilde{\underline{\underline{\Lambda}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{3.4}$$

où

$$\tilde{\underline{\underline{\Lambda}}} = (1 - D) \underline{\underline{\Lambda}} \tag{3.5}$$

et qui représente le tenseur effectif des modules élastiques. Les lois d'état découlent de ce potentiel par les dérivations classique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \tag{3.6}$$

$$\text{où } \underline{\underline{\Lambda}} = \frac{2}{1 + \nu} \underline{\underline{I}} + \frac{2\nu}{1 - 2\nu} \underline{\underline{I}} \underline{\underline{I}} \tag{3.7}$$

avec  $\nu$  le coefficient de poisson et I la matrice unité.

$$\text{et} \quad \underline{\psi} \quad - \quad (3.8)$$

où sont les contraintes associées aux déformations , et le taux de restitution d'énergie associé à l'endommagement, qui est positif ou nul.

L'équation (3.6) exprime la décroissance de la matrice de rigidité avec l'endommagement. L'équation (3.8) exprime la force thermodynamique associée à l'endommagement, en d'autres termes, la force motrice de l'endommagement.

Un des problèmes majeurs de la description des phénomènes à l'aide des variables internes est l'écriture de leur évolution. Celle-ci s'exprime grâce aux relations qui déterminent les vitesses des variables introduites, ici  $\dot{D}$  en fonction des variables de chargement et de leurs vitesses (**Montheillet & Moussy 1986**). En suivant la méthode thermodynamique phénoménologique classique, on admet que la loi d'évolution de la variable D dérive d'un potentiel de dissipation :

$$\varphi = -Y\dot{D}$$

Le second principe de la thermodynamique impose que la dissipation mécanique ( $-Y$ ) soit uniforme quadratique, définie positive:

$$-Y\dot{D} \geq 0 \quad (3.9)$$

L'introduction d'un potentiel de dissipation " $\varphi$ " conduit par l'intermédiaire de sa fonction duale " $\varphi^*$ " à la loi d'évolution de l'endommagement :

$$\dot{D} = -\lambda \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} \quad (3.10)$$

Où:  $\lambda$  est un multiplicateur scalaire d'endommagement,

et  $\varphi^*$  est la fonction indicatrice de la surface seuil d'endommagement.

Ceci impose que  $\dot{D} \geq 0$ , l'endommagement ne peut donc que croître ou rester constant. Il faut encore définir l'évolution de l'endommagement, qui est pilotée par une fonction seuil et une loi dépendant des déformations. Le modèle (potentiel d'énergie libre et loi d'évolution de l'endommagement) est donc entièrement écrit en déformations.

L'évolution de l'endommagement scalaire est définie à partir d'une fonction seuil :

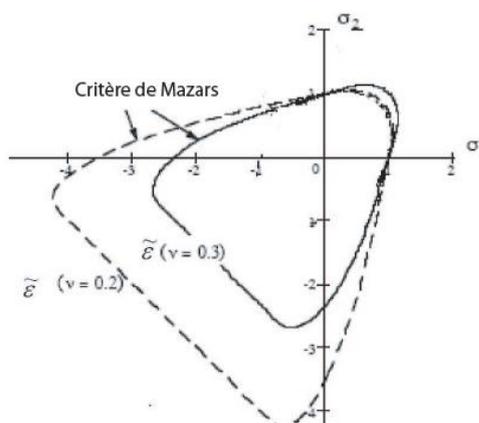
$$(3.11)$$

est un paramètre contenant l'histoire du chargement. Initialement, vaut le seuil d'endommagement et prend la valeur maximale atteinte par durant toute l'histoire du chargement :

$$(3.12)$$

La figure 3.1 présente le tracé de la surface seuil dans le plan des contraintes (**Mazars 1984**).

est un paramètre du modèle qui peut être identifié à l'aide de la contrainte limite en traction et du module d'élasticité : — (calcul complexe). Il est habituellement pris égal à  $1.10^{-4}$  pour le comportement asymétrique du béton (**Mazars 1984**).



**Figure 3.1:** Tracé de la surface seuil dans le plan des contraintes  $\sigma_1 - \sigma_2$  (**Mazars 1984**).

Ceci se traduit par le fait que l'endommagement dans ce modèle n'évolue que sous l'effet de déformations de tension, et correspond à des microfissurations principalement normales à l'axe de chargement en traction et parallèlement en compression. La fonction équivalente est la variable qui permet de définir l'endommagement de la fonction seuil. C'est une grande partie, le choix de la déformation équivalente qui a fait le succès du modèle (les déformations d'extension qui sont à l'origine de l'endommagement). Ce choix est adapté aux matériaux fragiles et particulièrement aux bétons.

Comme il est déjà indiqué dans le précédent paragraphe, les extensions sont la cause majeure de l'endommagement du béton. La variable représente les extensions et permet d'accéder naturellement à l'endommagement dans un état de traction. En compression simple, il y a également des extensions dans les directions transversales à l'axe de

compression, mais le calcul de l'endommagement à partir de ces extensions mènerait ici un comportement qui n'est pas représentatif de la réalité. L'isotropie du modèle ne permet pas d'utiliser cette idée, qui a été exploitée pour des modèles mettant en œuvre l'anisotropie ou des phénomènes unilatéraux (**Fichant, Pijaudier- Cabot & La Borderie 1997**).

Mazars a donc été obligé de recourir à un subterfuge qui conduit à calculer deux fonctions d'endommagement  $D_t$  et  $D_c$ , afin de tenir compte du comportement dissymétrique du béton en traction et en compression. La variable d'endommagement  $D$  s'identifiant à  $D_t$  dans le cas d'une sollicitation de traction pure, à  $D_c$  en compression pure.

La combinaison linéaire de ces deux variables intermédiaires d'endommagement donne l'endommagement global isotrope :

(3.13)

avec

$$\text{-----} \quad \text{-----} \quad (3.14)$$

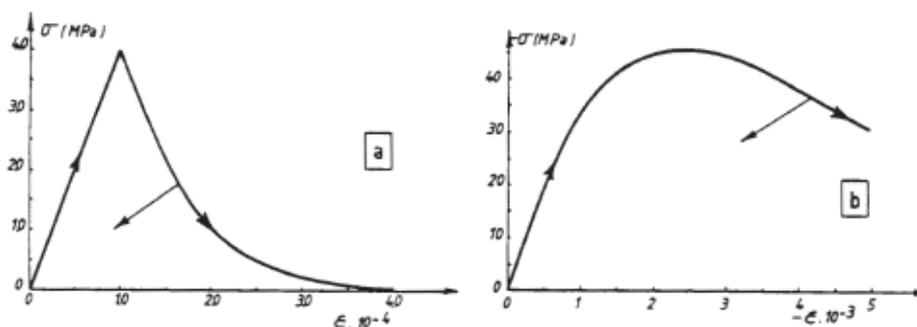
$$\text{-----} \quad (3.15)$$

et la loi d'évolution :

(3.16)

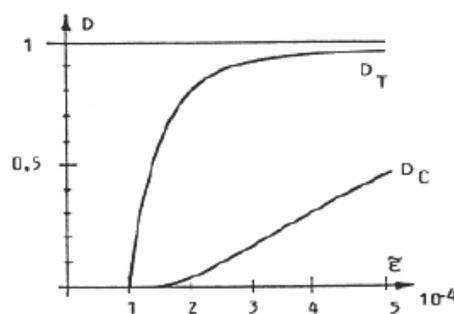
$A_t$ ,  $B_t$ ,  $A_c$ , et  $B_c$  sont quatre paramètres du modèle à déterminer sur des essais de compression et de flexion. Les coefficients  $A_t$  et  $A_c$  sont des coefficients adimensionnel qui représentent respectivement l'influence de la contribution de chacune des parties en traction et en compression. En traction pure  $A_t = 1$  et en compression pure  $A_c = 1$ .  $B_t$  et  $B_c$  sont les déformations qui résultent des contraintes principales positives, les déformations qui résultent des contraintes principales négatives, et  $\beta$  est un paramètre introduit pour améliorer le comportement du modèle en cisaillement. À noter que ce coefficient est très sensible et qu'il est déconseillé de s'éloigner de la valeur par défaut  $\beta = 1.06$  (**Mazars 1984, Saouridis 1988**).

La figure 3.2 présente les réponses du modèle d'endommagement de Mazars à des chargements en traction et en compression (**Mazars 1984**).



**Figure 3.2:** Réponse du modèle d'endommagement de Mazars en traction simple (a) et en compression simple(b) (**Mazars 1984**).

La Figure 3.3 présente un exemple d'évolution des deux quantités d'endommagement séparément.



**Figure 3.3:** Evolution des deux quantités  $D_c$  et  $D_t$  séparément (**Mazars 1984**).

Ce modèle basé sur la thermodynamique des processus irréversibles possède une surface seuil convexe. Malgré l'isotropie de l'endommagement, ce modèle tient compte d'un endommagement différent en traction et en compression. Cependant ce modèle ne tient pas compte, des déformations permanentes ni de l'effet unilatéral. Le fait de prendre  $\sigma$  constant limite le domaine d'application du modèle. Il n'est donc valable que dans les cas de chargements proportionnels.

L'introduction de l'expression de déformation équivalente conduit à une condition stricte : l'endommagement se produit s'il y a au moins une extension dans une direction principale.

Ce modèle a le mérite d'être l'un des premiers modèles d'endommagement pour le béton. C'est assurément le modèle de comportement le plus utilisé pour le béton. C'est également le premier modèle de comportement tridimensionnel du béton formulé dans le cadre de la mécanique de l'endommagement (Mazars 1984, Mazars 1986).

## 3.2 Modèle d'endommagement isotrope pour le béton

Dans cette section nous proposons un modèle couplant l'écroutissement avec l'endommagement isotrope est proposé. Ce couplage est assuré en utilisant le principe de la contrainte effective, sans pour autant perdre de vue la physique les autres phénomènes observés expérimentalement. Cette modélisation est effectuée de manière phénoménologique dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles.

### 3.2.1 Formulation du modèle

Le modèle est élaboré dans le cadre thermodynamique des processus irréversibles où l'énergie d'Helmholtz est postulée comme potentiel thermodynamique.

Il est formulé dans l'espace des déformations, il est basé sur la notion de déformation équivalente (variable observable étant la déformation).

L'énergie libre s'écrit :

(3.17)

Dans cette équation désigne le potentiel élastique endommageable par :

(3.18)

Où : est un tenseur du quatrième ordre des rigidités élastique du matériau vierge qui s'écrit sous la forme :

(3.19)

est la masse spécifique du matériau, et sont, respectivement, le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes effectives, est l'énergie élastique initiale stockée dans le matériau et le symbole de Kronecker. L'énergie libre tend vers zéro quand

l'endommagement évolue, l'inégalité de Clausius Duhem doit être vérifiée. La dissipation due à l'endommagement s'écrit :

$$\text{---} \tag{3.20}$$

avec une variation infinitésimale arbitraire.

L'équation (3.20) peut s'écrire aussi :

$$\begin{matrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{matrix} \tag{3.21}$$

Cette inégalité est vérifiée si :

$$\text{---} \tag{3.22}$$

À partir de l'équation (3.22), on obtient :

$$\text{---} \tag{3.23}$$

Où représente la matrice sécante du matériau.

L'équation (3.21) peut s'écrire :

$$\text{---} \tag{3.24}$$

L'équation (4.20) montre que l'endommagement est irréversible. Elle est satisfaite si D est croissante (c'est-à-dire , et étant définie positive).

### 3.2.2 Déformations permanentes

Le potentiel d'état (énergie libre) est réécrit sous une autre forme, en vue de tenir compte des déformations permanentes :

$$\text{---} \tag{3.25}$$

Où est la densité initiale du matériau, , , sont les coefficients effectifs d'élasticité données par :

$$\text{---} \tag{3.26}$$

$$\sigma = E(1-D)\epsilon \tag{3.27}$$

$$\nu \tag{3.28}$$

Où  $E(1-D)$  est le module d'élasticité du milieu endommagé,  $E$  celui du milieu sain, et  $\nu$  le coefficient de poisson. Les forces thermodynamique ( $\sigma$  et  $Y$ ) associées aux variables normales ( $\epsilon, D$ ) sont obtenues à partir de l'équation du potentiel :

$$\sigma = E(1-D)\epsilon \tag{3.29}$$

$$Y = \frac{1}{2} E D \epsilon^2 \tag{3.30}$$

est homogène à une déformation.

A partir de son dual par :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E(1-D)} \tag{3.31}$$

$$D = \frac{Y}{E \epsilon^2} \tag{3.32}$$

où  $\epsilon_c$  est un paramètre qui représente la valeur de la composante anélastique de la déformation au moment de la rupture ( $D=1$ ), et  $\mathbf{1}$  est le tenseur unité de second ordre.

On vérifie bien qu'en absence d'endommagement (c'est-à-dire  $D = 0$ ), les équations (3.25) à (3.32) donnent les équations classique de l'élasticité linéaire (**Germain 1986**).

D'autre part si  $D \neq 0$  et  $\epsilon = 0$ , on obtient les équations d'un milieu élastique endommageable sans déformations anélastiques.

Par contre si  $\epsilon \neq 0$ , si l'on effectue une décharge ( $\dot{\epsilon} < 0$ ), l'équation (3.31) montre qu'il subsiste une déformation anélastique linéaire en  $D$  ( $\dot{D} > 0$ ). On voit clairement se dégager la signification physique de  $\epsilon_c$  qui apparait comme la déformation anélastique limite du matériau pour  $D = 1$ .

### 3.2.3 Critère d'endommagement

Pour les métaux, on adopte couramment une démarche en énergie (Mises) combinée au postulat de Drucker. Généralement cette approche est faite en contrainte. Cependant, (**Kotsovos 1980, Dougil 1976, Dougil 1983, Bazant & Kim 1979, Mazars 1984, Ramtani**

1990, .....) ont montré qu'il était plus intéressant de proposer une formulation en terme de déformation pour le béton. Dans le but de compléter le modèle présenté ci-dessus, nous nous placerons dans le cadre des hypothèses de Mazars (**Mazars 1984**). L'endommagement étant supposé consécutif à la progression en mode I des microfissures, l'auteur introduit une norme du tenseur des déformations appelée déformation équivalente ( ).

Inspiré du critère de Saint Venant une surface seuil d'évolution de l'endommagement définie dans l'espace des déformations est introduite :

$$- \tag{3.33}$$

Notons que cette formulation rend bien compte de l'aspect dissymétrique du seuil de dégradation. Elle fait intervenir soit les déformations appliquées directement au matériau (traction), soit les déformations induites par effet de poisson (compression).

où  $k$  est une fonction positive et croissante de .

Il faut noter que la surface d'élasticité du matériau vierge, ou surface seuil d'endommagement initiale est confondue avec la surface définie  $K$  (  $=$  ou est un paramètre du modèle qui peut être identifié à l'aide de la contrainte limite de traction et du module d'élasticité. Une fois dépassé,  $K$  prend en chaque point la plus grande valeur de atteint pour toute l'histoire du chargement. Elle contient donc l'histoire du chargement (**Pijaudier-Cabot, heurta, Bode 1993, La Borderie 2003, Mazars 1984.....**).

Sachant que la résistance du béton à la traction est plus faible que la résistance à la compression, et pour tenir compte de cette dissymétrie du comportement, est définie par :

$$\tag{3.34}$$

où  $\alpha$  : facteur de dissymétrie du comportement entre la traction et la compression,

$f_t$  : résistance ultime en traction,

$f_c$  : résistance ultime en compression,

et est un tenseur symétrique d'ordre 4.

peut s'écrire pour un matériau initialement isotrope comme suit :

=

$$= \begin{matrix} & - & - & - \\ & & - & - \\ & & & - \\ - & & & - \\ & & & & - \\ & & & & & - \end{matrix} \quad (3.35)$$

avec  $r = \max(\mathbf{E}, \mathbf{G})$ , (3.36)

et  $r = 0$  si  $\sum_{i=1}^{i=3} |\varepsilon_i| = 0$  (3.37)

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} \langle \varepsilon_i \rangle}{\sum_{i=1}^{i=3} |\varepsilon_i|} \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^{i=3} |\varepsilon_i| > 0 \quad (3.38)$$

$\varepsilon_i$  représente la déformation principale dans la direction  $i$ .

### 3.2.4 Loi d'évolution de l'endommagement

Nous apportons les modifications sur les lois proposées par Mazars (**Mazars 1984**), en les adaptant aux caractéristiques de notre modèle. La vitesse d'endommagement peut s'écrire sous la forme:

$$\dot{D} = \frac{dF}{d\varepsilon_{eq}} \varepsilon_{eq} \langle \dot{\varepsilon} \rangle_+ \quad (3.39)$$

La loi d'évolution s'écrit:

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & \text{Si } f(\varepsilon_{eq}, D) < 0 \quad (\text{décharge}) \\ \frac{dF}{d\varepsilon_{eq}} \varepsilon_{eq} \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle & \text{Si } f(\varepsilon_{eq}, D) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}(\varepsilon_{eq}, D) = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

où  $\frac{dF}{d\varepsilon_{eq}} \varepsilon_{eq}$  est une fonction définie positive de  $\varepsilon_{eq}$  et qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{dF}{d\varepsilon_{eq}} \varepsilon_{eq} = \left( \frac{\varepsilon_{D0}}{\varepsilon_{eq}^2} \right) 1 + b \varepsilon_{eq} \exp \left[ -b \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{D0} \right] \quad (3.41)$$

La fonction  $F(\varepsilon_{eq})$  est déterminée à partir des constatations faites sur les résultats expérimentaux (**Lemaitre & Mazars 1982**). La courbe d'adoucissement doit être concave, en accord avec les travaux de Rots et Lubliner (**Rots 1991, Lubliner & al. 1989**).

En intégrant l'équation (3.40), on obtient :

$$D = 1 - \left[ \left( \frac{\varepsilon_{D0}}{\varepsilon_{eq}} \right) \exp \left[ -b (\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{D0}) \right] \right] \quad (3.42)$$

D est défini en imposant les valeurs limites :  $D=0$  pour  $\varepsilon_{eq} = \varepsilon_{D0}$  et  $D=1$  pour  $\varepsilon_{eq} \rightarrow \varepsilon_{\infty}$ . L'énergie totale dissipée durant le processus de déformation admet donc une borne supérieure qui représente l'énergie spécifique de rupture du matériau notée  $g_f$ .

La valeur de  $g_f$  peut être obtenue par intégration à travers le trajet de déformation :

$$g_f = \int_{\varepsilon_{D0}}^{\infty} \sigma \varepsilon \, d\varepsilon = \int_{\varepsilon_{D0}}^{\infty} \psi' \, dD \quad (3.43)$$

Dans le cas d'un test de traction,  $\varepsilon_{eq} = \varepsilon_{11}$  et  $\psi_0 = \frac{\varepsilon_{11}^2}{2\rho_0} E$ , l'équation (3.42) s'écrit :

$$g_f = \int_{\varepsilon_{D0}}^{\infty} \frac{\varepsilon_{11}^2}{2\rho_0} E \frac{dD}{d\varepsilon_{11}^0} d\varepsilon_{11}^0 \quad (3.44)$$

En introduisant l'équation (3.41) dans (3.43), on obtient les résultats suivants (énergie de rupture spécifique en  $J/m^3$ ) :

$$g_f = \frac{\varepsilon_{D0}^2}{\rho_0} E \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{b} \right) \quad (3.45)$$

où s'écrit comme suit:

$$b = \left( \frac{g_f \rho_0 E}{f_t^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \quad (3.46)$$

$b$  représente une constante adimensionnelle. La relation (3.45) montre que le paramètre dans l'équation (3.41) dépend de l'énergie spécifique de rupture dissipée à travers le processus d'endommagement ( $b$  est considéré comme un paramètre lié à l'énergie de fissuration). Si on définit l'énergie de rupture par unité d'aire d'ouverture de la fissure, comme étant l'énergie de rupture normalisée par rapport à la longueur caractéristique de rupture, par  $G_f = l_c g_f$  (énergie de rupture du matériau par unité d'aire en  $J/m^2$ ).

On obtient ainsi :

$$b = \left( \frac{G_f \rho_0 E}{l_c f_t^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \geq 0 \quad (3.47)$$

L'énergie de rupture  $G_f$  peut être mesurée à partir d'essais de flexion sur des éprouvettes entaillées.  $G_f$  est une propriété du matériau et  $l_c$  une longueur caractéristique de l'élément de volume élémentaire représentant le comportement du matériau. C'est une mesure de la taille du volume de localisation de l'endommagement. Les matériaux fragiles tels que les bétons ont un comportement adoucissant, conduisant à une perte totale de leur rigidité. Dans ce type de matériaux, le module sécant diminue lors de l'augmentation de la déformation.

Au début on observe un comportement linéaire jusqu'à environ 60% de la contrainte maximale. Par la suite, des microfissures se développent à travers l'éprouvette, provoquant ainsi un comportement non-linéaire jusqu'à la contrainte maximale. Dans le régime post-pic, plusieurs microfissures apparaissent dans la section fragile de l'éprouvette appelée zone de rupture, (Fracture Process Zone FPZ). Elles conduisent à une chute continue de la résistance du matériau allant de la valeur maximale  $f_t$  ( $f_t$  est la limite élastique en traction du matériau) à zéro. Des microfissures se forment de plus en plus et coalescent entre elles et forme une fissure macroscopique. Egalement dans le régime post-pic, toute l'énergie de déformation est dissipée dans la zone FPZ. C'est le phénomène adoucissant. La longueur caractéristique est une constante géométrique, introduite comme étant une mesure de la taille de FPZ d'une éprouvette.

Par analogie, on peut considérer un essai de compression ainsi  $b$  s'écrit :

$$b = \left( \frac{g_c \rho_0 E}{f_c^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \Rightarrow g_c = k^2 g_f \quad (3.48)$$

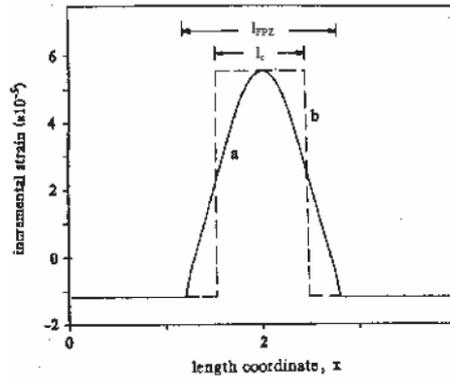
Le symbole  $g_c$  est utilisé pour identifier l'énergie totale dissipée.

$l_c$  est la longueur caractéristique du matériau, appelée généralement longueur interne pour un milieu non local. Bazant et Pijaudier-Cabot (**Bazant & Pijaudier-Cabot 1989**) ont lié la longueur interne à la zone de microfissuration (Figure 3.4). Si nous considérons que l'aire sous la courbe "a" est le même que l'aire sous la courbe "b", la relation suivante peut être établie :

$$l_{FPZ} = \alpha l_c \quad (3.49)$$

avec  $\alpha = 1,93$ .  $l_{FPZ}$  est la largeur de la zone de microfissuration.

Bazant et Pijaudier-Cabot (**Bazant & Pijaudier-Cabot 1989**) ont alors proposé une méthode permettant de déterminer la longueur interne expérimentalement en délocalisant l'endommagement. Ils ont déterminé ainsi la relation entre la relation  $l_c \cong 3d_a$  où  $d_a$  est le diamètre du plus gros granulats présent dans le béton.



**Figure 3.4:** Profil de déformation obtenu analytiquement avec le modèle non local intégral (**Pijaudier-Cabot & Bazant 1987**)

Ce paramètre joue le rôle d'un limiteur de localisation et limite la taille de la zone de localisation.

On remarque que l'expression (3.42) est analogue à la loi de dommage isotrope donnée dans (**Mazars 1984, Ragueneau 1999, Feenstra 1993**) ou également les lois de dommages anisotropes données dans (**Ghrib & Tinawi 1995, Fichant & al. 1997**).

### 3.2.5 Modélisation des phénomènes de fatigue

On utilise le formalisme de Marigo (**Marigo 1985**), réécrit sous une forme standard équivalente (**Papa 1993**).

En partant de l'équation (3.42) :

$$0 \leq D = 1 - \left[ \left( \frac{\varepsilon_{Do}}{\varepsilon_{eq}} \right) \exp \left[ -b \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{Do} \right] \right] \leq 1 \quad (3.50)$$

L'équation (3.50), et après quelques manipulations mathématiques, peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1-D}{\left[ \left( \frac{\varepsilon_{Do}}{\varepsilon_{eq}} \right) \exp \left[ -b \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{Do} \right] \right]} \leq 1 \quad (3.51)$$

On obtient ainsi une fonction seuil fictive variant entre 0 et 1, sous la forme :

$$0 \leq f^* \varepsilon_{eq}, D = \frac{1-D}{\left[ \left( \frac{\varepsilon_{Do}}{\varepsilon_{eq}} \right) \exp \left[ -b \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{Do} \right] \right]} \leq 1 \quad (3.52)$$

En imposant la condition de consistance, on doit retrouver la loi d'évolution de l'endommagement, qui s'écrit :

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon_{eq}} \quad (3.53)$$

$\dot{\lambda}$  est obtenu tel que  $\dot{f}^* \varepsilon_{eq}, D = 0$  c'est-à-dire :

$$\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon_{eq}} d\varepsilon_{eq} + \frac{\partial f^*}{\partial D} \dot{D} = 0 \quad (3.54)$$

Soit alors :

$$\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon_{eq}} d\varepsilon_{eq} + \frac{\partial f^*}{\partial D} \dot{\lambda} \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon_{eq}} = 0 \quad (3.55)$$

Par conséquent :

$$\dot{\lambda} = \frac{-d\varepsilon_{eq}}{\frac{\partial f^*}{\partial D}} \quad (3.56)$$

On obtient finalement :

$$\dot{\lambda} = \frac{-d\varepsilon_{eq}}{-1} = \left[ \left( \frac{\varepsilon_{Do}}{\varepsilon_{eq}} \right) \exp \left[ -b \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{Do} \right] \right] d\varepsilon_{eq} \quad (3.57)$$

La loi d'évolution de l'endommagement devient :

$$\dot{D} = \frac{d\varepsilon_{eq}}{\left[ \left( \frac{\varepsilon_{Do}}{\varepsilon_{eq}} \right) \exp \left[ -b \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{Do} \right] \right]} \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon_{eq}} \quad (3.58)$$

À partir de l'équation (3.52), on obtient :

$$\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon_{eq}} = \frac{-1-D}{\left[ \left( \frac{\varepsilon_{Do}}{\varepsilon_{eq}} \right) \exp[-b \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{Do}] \right]^2} \left( \frac{\varepsilon_{Do}}{\varepsilon_{eq}} \right) \left[ 1 + b \varepsilon_{eq} \right] \exp[-b \varepsilon - \varepsilon_{Do}] \quad (3.59)$$

En injectant l'équation (3.59) dans (3.58), on obtient :

$$\dot{D} = \frac{-1-D}{\left[ \left( \frac{\varepsilon_{Do}}{\varepsilon_{eq}} \right) \exp[-b \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{Do}] \right]^2} \left( \frac{\varepsilon_{Do}}{\varepsilon_{eq}} \right) \left[ 1 + b \varepsilon_{eq} \right] \exp[-b \varepsilon - \varepsilon_{Do}] \left[ \left( \frac{\varepsilon_{Do}}{\varepsilon_{eq}} \right) \exp[-b \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{Do}] \right] d \varepsilon_{eq} \quad (3.60)$$

Après certaines manipulations mathématiques et certaines simplifications, on obtient :

$$\dot{D} = f^* \varepsilon_{eq}, D \left[ \left( \frac{\varepsilon_{Do}}{\varepsilon_{eq}} \right) \left[ 1 + b \varepsilon_{eq} \right] \exp[-b \varepsilon - \varepsilon_{Do}] \right] \langle d \varepsilon_{eq} \rangle \quad (3.61)$$

Finalement, la loi d'évolution de l'endommagement s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{D} = \left[ f^* \varepsilon_{eq}, D \right] \left[ \left( \frac{\varepsilon_{Do}}{\varepsilon_{eq}} \right) \left[ 1 + b \varepsilon_{eq} \right] \exp[-b \varepsilon - \varepsilon_{Do}] \right] \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_+ & \text{si } f^* = 1 \text{ et } \dot{f}^* = 0 \\ \dot{D} = 0 & \text{si } f^* < 1 \text{ ou } f^* = 1 \text{ et } \dot{f}^* < 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

Pour les chargements en fatigue, la loi d'évolution s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{D} = \left[ f^* \varepsilon_{eq}, D \right]^n \left[ \left( \frac{\varepsilon_{Do}}{\varepsilon_{eq}} \right) \left[ 1 + b \varepsilon_{eq} \right] \exp[-b \varepsilon - \varepsilon_{Do}] \right] \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_+ & \text{si } f^* = 1 \text{ et } \dot{f}^* = 0 \\ \dot{D} = 0 & \text{si } f^* < 1 \text{ ou } f^* = 1 \text{ et } \dot{f}^* < 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

Ou  $n > 0$  est un paramètre caractéristique du matériau identifié à partir des résultats expérimentaux sur éprouvettes sous chargement cycliques.

### 3.3 Modèle d'endommagement anisotrope

Un comportement anisotrope sera rendu en adoptant une variable  $D$  tensorielle d'ordre 4 ou, moyennement certaines simplifications, un tenseur d'ordre 2. La loi de comportement élastique endommageable est obtenue par une équivalence en énergie entre un matériau sain, fictif, et le béton non endommagé. Les déformations permanentes sont supposées directement induites par l'endommagement. Leur évolution est donc uniquement liée à la variable  $D$ , la non linéarité du comportement résulte de l'évolution d'une variable

descriptive supplémentaire. Celle-ci est introduite dans les formulations par équivalence avec un matériau sain fictif.

Du fait de l'anisotropie, la loi de comportement à définir devient intrinsèque à un certain repère fixé par la matière. L'étude phénoménologique a montré que les dégradations, principalement en ce qui concerne les défauts surfaciques, suivant une certaine direction de l'espace, provoquent un comportement anisotrope du matériau. Cette caractéristique, induite par la sollicitation peut être liée aux directions principales du tenseur des contraintes. Une deuxième simplification est de supposer que seules les caractéristiques relatives à la direction de contraintes principales maximales évoluent. Le béton possède dans ce cas un comportement isotrope transverse.

A partir de la définition d'un tel repère d'anisotropie sur le matériau endommagé, il reste à caractériser l'effet de la dégradation dans une seule direction de l'espace. Le modèle est formulé dans l'espace des déformations.

En effet, en raison de la forte hétérogénéité du béton, son endommagement est accompagné des déformations irréversibles. On postule pour le nouveau modèle d'endommagement déviatorique que ces déformations anélastiques sont dues au glissement entre les lèvres des microfissures. Le glissement est également à l'origine d'un endommagement supplémentaire du matériau (en plus de l'endommagement dû aux extensions hydrostatiques).

Le tenseur des déformations de Cauchy est donc, divisé en deux parties, une partie déviatorique et une partie sphérique. Chacune est responsable d'un type d'endommagement particulier, un endommagement "sphérique" pour le tenseur de déformation sphérique et en endommagement "déviatorique" pour la partie déviatorique du tenseur :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_v \cdot \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{e}} \quad (3.64)$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon_v = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.65)$$

$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon_v \cdot \underline{\underline{1}} \quad (3.66)$$

$\underline{\underline{e}}$  représente le tenseur déviatorique des déformations.

L'endommagement "sphérique" est activé si et seulement si il y a une extension. Dans ce modèle, cet endommagement évolue quand il y a évolution de la déformation hydrostatique

positive. Tandis que l'endommagement "déviatorique" est considéré comme "permanent". Contrairement à l'endommagement "sphérique", l'endommagement déviatorique existe à la fois en extension et en confinement. Le modèle suppose donc deux modes d'endommagement: mode par extension et mode par glissement. Le premier mode, par analogie avec la fissuration, est en fait le mode I, et il n'existe que s'il y a extension. Tandis que le deuxième mode de glissement correspond aux modes II et III de fissuration. L'un des concepts de base du modèle consiste à considérer ce mode comme "permanent". Ceci implique que cet endommagement peut évoluer aussi bien en traction qu'en confinement. Cet aspect explique que quand le béton est suffisamment endommagé en traction (par exemple traction simple) où il y a deux modes d'endommagement qui s'activent simultanément, il ne peut pas récupérer totalement la rigidité en compression (par exemple compression simple) (voir Chapitre 1, Figure 1.15).

A partir de ces considérations, on peut alors traduire l'effet unilatéral en activant les deux modes d'endommagement en traction et en désactivant la contribution du mode d'extension en compression. L'état de traction ou de compression pourra être détecté en fonction de l'état sphérique de déformation.

L'énergie libre spécifique s'écrit sous la forme :

$$\rho\psi_{el} = \frac{1}{2} K \text{Tr}^2 \underline{\underline{\epsilon}} + G \cdot \text{tr} \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{e}} \quad (3.67)$$

Avec K le module de compression hydrostatique et G le module de cisaillement du matériau.

$$K = \frac{\text{Tr} \underline{\underline{\epsilon}}}{3 \text{Tr} \underline{\underline{\epsilon}}} \quad (3.68)$$

K peut s'écrire sous une autre forme en fonction des coefficients de Lamé :

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (3.69)$$

Dans notre modèle, on constate que deux contributions :

- Une contribution qualifiée de surfacique :  $\rho\psi_{\text{surf}} = G \cdot \text{Tr}(\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}})$  (3.70)

- Et une contribution qualifiée de volumique :  $\rho\psi_{\text{vol}} = \frac{1}{2} K \cdot \text{Tr}^2 \underline{\underline{\epsilon}}$  (3.71)

avec  $\rho$  la densité du matériau

En dérivant l'équation de l'énergie libre, on obtient le tenseur des contraintes (relation contraintes déformations) qui s'écrit comme suit :

$$\underline{\sigma} = 2G.\underline{e} + K.Tr \underline{\underline{1}} \quad (3.72)$$

### 3.3.1 Couplage élasticité-endommagement

Le modèle est basé sur la mécanique de l'endommagement et la thermodynamique des processus irréversibles (Lemaitre & Chaboche 1988, Besson & al. 2001). Un couplage endommagement-élasticité entre les deux modes de fissure est pris en compte. Pour traduire l'endommagement, on choisit deux variables indépendantes :

- Une variable tensorielle  $\underline{D}$  représentant les dégradations surfaciques
- Une variable scalaire  $\delta$  représentant la dégradation volumique du matériau

Pour construire le couplage élasticité-endommagement, on associe la variable  $\delta$  à la contribution volumique de l'énergie libre et la variable tensorielle  $\underline{D}$  à la contribution surfacique.

Les dégradations volumiques du matériau sont dues à une forte pression hydrostatique appliquée à la structure microporeuse du béton.

Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\sigma}$  obtenu dans la loi de comportement doit être symétrique, l'énergie libre s'écrit sous la forme :

$$\rho\psi = G.Tr \left[ \underline{\underline{1}} - \underline{D} \right]^{1/2} \cdot \underline{e} \cdot \left[ \underline{\underline{1}} - \underline{D} \right]^{1/2} \cdot \underline{e} + \frac{1}{2} K.(1-\delta)Tr^2 \left[ \underline{\underline{1}} - \underline{D} \right] \quad (3.73)$$

$$\text{Avec } \rho\psi = \rho\psi_{vol} + \rho\psi_{surf} \quad (3.74)$$

$$\rho\psi_{surf} = G.Tr \left[ \underline{\underline{1}} - \underline{D} \right]^{1/2} \cdot \underline{e} \cdot \left[ \underline{\underline{1}} - \underline{D} \right]^{1/2} \cdot \underline{e} \quad (3.75)$$

$$\rho\psi_{vol} = \frac{1}{2} K.(1-\delta)Tr^2 \left[ \underline{\underline{1}} - \underline{D} \right] \quad (3.76)$$

En dérivant l'équation de l'énergie libre, on obtient l'équation contraintes-déformations, qui s'écrit sous la forme:

$$\underline{\sigma} = 2G. \left[ \underline{\underline{1}} - \underline{D} \right]^{1/2} \cdot \underline{e} \cdot \left[ \underline{\underline{1}} - \underline{D} \right]^{1/2} + K.(1-\delta).Tr \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{1}} \quad (3.77)$$

Ainsi les lois d'états associées à l'énergie libre s'écrivent comme suit :

$$\underline{\sigma} = 2G. \left[ \underline{\underline{1}} - \underline{D} \right]^{1/2} \cdot \underline{e} \cdot \left[ \underline{\underline{1}} - \underline{D} \right]^{1/2} + K.(1-\delta).Tr \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{1}} \quad (3.78)$$

$$\underline{Y}_D = G \underline{e} \underline{e} \quad (3.79)$$

$$Y_\delta = \frac{1}{2} K \cdot \text{Tr}^2 \underline{\underline{\delta}} \quad (3.80)$$

Le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$  obtenu doit être symétrique.

Le second principe de la thermodynamique conduit au respect de la condition suivante:

$$\dot{\phi} = \text{Tr} \underline{\underline{Y}}_D \cdot \underline{\underline{\dot{D}}} + Y_\delta \cdot \dot{\delta} \geq 0 \quad (3.81)$$

avec  $\underline{\underline{\dot{D}}} \geq 0$  et  $\dot{\delta} \geq 0$ , pour  $D = 0$  et  $\delta = 0$  on retrouve l'énergie de déformation élastique du milieu non endommagé.

### 3.3.2 Modélisations des déformations anélastiques

Les essais cycliques menés sur le béton montrent que l'endommagement s'accompagne de déformations permanentes. Par conséquent une analyse de la partie anélastique de la déformation est aussi incorporée dans notre modèle. Si l'on considère des microfissures soumises à des glissements des lèvres, on peut dire que lors de la décharge, la rugosité de ces dernières empêche la refermeture totale des fissures. Dans le modèle, on postule que le glissement entre les lèvres des microfissures est à l'origine de la déformation irréversible. Autrement dit, l'endommagement et les déformations anélastiques évoluent simultanément. Les microvides sont donc la cause des déformations anélastiques. Il s'ensuit que ces dernières peuvent être modélisées à l'aide des variables d'endommagement.

D'une façon naturelle et à fin de mettre en évidence ces contraintes anélastiques à l'intérieur du matériau, nous nous sommes basés sur les travaux de Hermann, Kestin, et Ramtani (**Hermann & Kestin 1988, Ramtani 1990**), où on a rajouté un terme supplémentaire dans l'équation de l'énergie libre sous la forme suivante :

$$\rho \psi_{an} = \underline{B} : \underline{e} + C \quad (3.82)$$

avec  $\underline{B}$  un tenseur d'ordre 2

L'expression analytique de cette partie anélastique s'écrit sous la forme :

$$\underline{B} : \underline{e} = \frac{1}{2} \llbracket G \beta \text{tr} \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{e} \cdot \underline{\underline{D}} \rrbracket \quad (3.83)$$

$$C = \frac{1}{2} \llbracket \gamma \delta \text{Tr} \underline{\underline{\delta}} \rrbracket \quad (3.84)$$

L'énergie libre s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
\rho\psi = & G \cdot \text{Tr} \left[ \mathbf{1} - \underline{\underline{D}} \right]^{n/2} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \left( \mathbf{1} - \underline{\underline{D}} \right)^{n/2} \cdot \underline{\underline{e}} \\
& + \frac{1}{2} K(1-\delta) \cdot \text{Tr}^2 \left[ \mathbf{1} - \underline{\underline{D}} \right] \\
& + \frac{1}{2} \left( \beta G \text{tr} \left[ \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{D}} \right] + K\gamma\delta \text{Tr} \left[ \mathbf{1} - \underline{\underline{\delta}} \right] \right)
\end{aligned} \quad (3.85)$$

Les forces thermodynamiques associées à  $\underline{\underline{e}}$ ,  $\underline{\underline{D}}$  et  $\delta$  ont pour expression:

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2G \cdot \text{Tr} \left[ \mathbf{1} - \underline{\underline{D}} \right]^{n/2} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \left( \mathbf{1} - \underline{\underline{D}} \right)^{n/2} + K \cdot (1-\delta) \text{Tr} \left[ \mathbf{1} - \underline{\underline{D}} \right] + \frac{1}{2} \left( \beta G \text{tr} \left[ \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{D}} \right] + \gamma K \delta^2 \mathbf{1} \right) \quad (3.86)$$

$$\underline{\underline{Y}}_D = G \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}} - 2\beta G \text{tr} \left[ \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{D}} \right] \quad (3.87)$$

$$\underline{\underline{Y}}_\delta = \frac{1}{2} K \text{Tr}^2 \left[ \mathbf{1} - \underline{\underline{D}} \right] - \gamma K \delta \text{Tr} \left[ \mathbf{1} - \underline{\underline{D}} \right] \quad (3.88)$$

De l'équation (3.86), on déduit la contrainte anélastique :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{an} = \frac{1}{2} \left( \beta G \text{tr} \left[ \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{D}} \right] + \gamma K \delta^2 \mathbf{1} \right) \quad (3.89)$$

$\beta$  et  $\gamma$  sont des paramètres intrinsèques du matériau, ils représentent le degré d'hétérogénéité de ce dernier.

On constate que la contrainte anélastique totale peut être divisée en deux parties :

- Une contribution isotrope, relative à la variable d'endommagement volumique  $\delta$  :  $\gamma K \delta^2 \mathbf{1}$
- Une contribution anisotrope, relative à la variable d'endommagement surfacique  $\underline{\underline{D}}$  :  $2\beta G \text{tr} \left[ \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{D}} \right]$

### 3.3.3 Modélisation du comportement unilatéral du béton

L'observation des essais met en évidence une restauration en compression de la raideur d'un matériau endommagé en traction. Cet effet unilatéral se manifeste d'abord par une phase transitoire non-linéaire due à la refermeture des fissures lors du changement de signe de la contrainte et puis la restauration de la raideur en compression. L'effet unilatéral est automatiquement pris en compte grâce au concept physique du modèle. En effet, lors de la compression, l'endommagement sphérique disparaît. On décompose ainsi la déformation déviatorique en deux parties, une partie de traction et une partie de compression pour tenir compte de l'unilatéralité du dommage :

$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{e}}^t + \underline{\underline{e}}^c \quad (3.90)$$

avec :

$$\mathbf{e}_{ij}^t = \sum_{p=1}^3 \langle \mathbf{e}^p \rangle \mathbf{V}_i^p \mathbf{V}_j^p \quad (3.91)$$

$$\mathbf{e}_{ij}^c = \mathbf{e}_{ij} - \langle \mathbf{e}_{ij} \rangle_+ = - \sum_{p=1}^3 \langle -\mathbf{e}^p \rangle \mathbf{V}_i^p \mathbf{V}_j^p \quad (3.92)$$

avec  $\mathbf{e}^1$ ,  $\mathbf{e}^2$  et  $\mathbf{e}^3$  les déformations principales et  $\mathbf{V}^1$ ,  $\mathbf{V}^2$  et  $\mathbf{V}^3$  les vecteurs propres de  $\underline{\mathbf{e}}$ .

$$\rho\psi(\underline{\mathbf{D}}^t, \underline{\mathbf{D}}^c, \text{Tr} \underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \rho\psi_t^{\text{surf}}(\underline{\mathbf{e}}^t, \underline{\mathbf{D}}^t) + \rho\psi_c^{\text{surf}}(\underline{\mathbf{e}}^c, \underline{\mathbf{D}}^c) + \rho\psi^{\text{vol}}(\text{Tr} \underline{\underline{\mathbf{I}}}, \delta) \quad (3.93)$$

avec:

$$\rho\psi_t^{\text{surf}}(\langle \underline{\mathbf{e}} \rangle_+, \underline{\mathbf{D}}^t) = G \cdot \text{Tr} \left[ \left( -\underline{\mathbf{D}}^t \right)^{\mathbb{T}^2} \cdot \underline{\mathbf{e}}^t \cdot \left( -\underline{\mathbf{D}}^t \right)^{\mathbb{T}^2} \right] \quad (3.94)$$

$$\rho\psi_c^{\text{surf}}(\langle \underline{\mathbf{e}} \rangle_-, \underline{\mathbf{D}}^c) = G \cdot \text{Tr} \left[ \left( -\underline{\mathbf{D}}^c \right)^{\mathbb{T}^2} \cdot \underline{\mathbf{e}}^c \cdot \left( -\underline{\mathbf{D}}^c \right)^{\mathbb{T}^2} \right] \quad (3.95)$$

$$\rho\psi_{\text{vol}} = \frac{1}{2} K \cdot (1 - \delta) \text{Tr}^2 \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (3.96)$$

La dérivée de l'équation de l'énergie libre par rapport à  $\underline{\mathbf{e}}$ , nous donne la relation entre les contraintes et les déformations, qui s'écrit comme suit :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = 2G \cdot \text{Tr} \left[ \left( \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\mathbf{D}}^t \right)^{1/2} \cdot \underline{\mathbf{e}}^t \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\mathbf{D}}^t \right)^{1/2} \right] + G \cdot \text{Tr} \left[ \left( \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\mathbf{D}}^c \right)^{1/2} \cdot \underline{\mathbf{e}}^c \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\mathbf{D}}^c \right)^{1/2} \right] + K \cdot (1 - \delta) \text{Tr} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (3.97)$$

Les lois associées à l'énergie libre s'écrivent sous la forme :

$$\underline{\underline{\mathbf{Y}}}_D^t = - \frac{\partial \rho\psi}{\partial \underline{\mathbf{D}}^t} = G \cdot \underline{\mathbf{e}}^t \cdot \underline{\mathbf{e}}^t \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{Y}}}_D^c = - \frac{\partial \rho\psi}{\partial \underline{\mathbf{D}}^c} = G \cdot \underline{\mathbf{e}}^c \cdot \underline{\mathbf{e}}^c \quad (3.98)$$

$$\mathbf{Y}_\delta = - \frac{\partial (\rho\psi)}{\partial \delta} = \frac{1}{2} K \cdot \text{Tr}^2 \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (3.99)$$

Afin d'étendre cette formulation pour tenir compte des déformations permanentes, l'équation de l'énergie est réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \rho\psi = & G \cdot \text{Tr} \left[ \left( -\underline{\mathbf{D}}^t \right)^{\mathbb{T}^2} \cdot \langle \underline{\mathbf{e}} \rangle_+ \cdot \left( -\underline{\mathbf{D}}^t \right)^{\mathbb{T}^2} \cdot \langle \underline{\mathbf{e}} \rangle_+ \right] \\ & + G \cdot \text{Tr} \left[ \left( -\underline{\mathbf{D}}^c \right)^{\mathbb{T}^2} \cdot \langle \underline{\mathbf{e}} \rangle_- \cdot \left( -\underline{\mathbf{D}}^c \right)^{\mathbb{T}^2} \cdot \langle \underline{\mathbf{e}} \rangle_- \right] \\ & + \frac{1}{2} K (1 - \delta) \cdot \text{Tr}^2 \underline{\underline{\mathbf{I}}} \\ & + \frac{1}{2} \left( 2\beta_t \cdot \text{Gtr} \left[ \underline{\mathbf{Q}}^t \cdot \langle \underline{\mathbf{e}} \rangle_+ \cdot \underline{\mathbf{D}}^t \right] + 2\beta_c \cdot \text{Gtr} \left[ \underline{\mathbf{Q}}^c \cdot \langle \underline{\mathbf{e}} \rangle_- \cdot \underline{\mathbf{D}}^c \right] + \frac{1}{2} K \gamma \delta \text{Tr} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \end{aligned} \quad (3.100)$$

### 3.3.4 Critère et loi d'évolution de l'endommagement

Il s'agit d'identifier les paramètres des lois d'évolution de l'endommagement et de formuler des critères pour chaque type d'endommagement.

L'évolution de l'endommagement est la progression au niveau microscopique de la fissuration. Pour formuler un critère d'endommagement, on postule que le mécanisme d'endommagement est gouverné par des expressions équivalentes en déformation et seuils correspondants.

#### 3.3.4.1 Critère et loi d'évolution de l'endommagement en traction

L'évolution de la variable d'endommagement  $D^t$  est gouvernée par une surface seuil  $f$  définie sous la forme :

$$f(\varepsilon_{ij}, \underline{D}, \delta) = e_i^t - K(e_i^t) \leq 0 \quad (3.101)$$

avec  $e_i^t$  : déformations déviatoriques principales,

et :  $K(e_i^t)$  une fonction positive et croissante de  $e_i^t$ , qui a pour valeur initiale  $e_{D0}$  ( $e_{D0} = f_{t/E}$ ). Cette dernière est une constante représentant la taille initiale du domaine (seuil initial d'endommagement).  $K(e_i^t)$  Prend en chaque point la plus grande valeur de  $e_i^t$  atteinte pour toute l'histoire du chargement.  $K(e_i^t)$  est analogue à une variable d'écrouissage en plasticité, elle contient l'histoire du chargement :

$$K(e_i^t) = \max_t \left[ e_{D0} \quad ; \quad \max_{\tau \leq t} e_i^t \right] \quad (3.102)$$

La loi d'évolution de l'endommagement en traction s'écrit :

$$\dot{D}_i^t = \begin{cases} 0 & \text{si } f(e_i^t, \underline{D}) < 0 \quad (\text{décharge}) \\ \frac{dF(e_i^t)}{de_i^t} \langle \dot{e}_i^t \rangle & \text{si } f(e_i^t, \underline{D}) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}(e_i^t, \underline{D}) = 0 \quad (\text{charge}) \end{cases} \quad (3.103)$$

Sous forme explicite, on écrit:

$$D_i^t = 1 - \left[ \left( \frac{e_{D0}}{e_i^t} \right) \exp \left[ -b(e_i^t - e_{D0}) \right] \right] \quad (3.104)$$

On constate que l'endommagement est décrit à partir des extensions positives. L'endommagement surfacique apparaît dans une direction quand la déformation déviatorique dans cette direction atteint le seuil de traction  $e_{D0}$ .

### 3.3.4.2 Critère et loi d'évolution de l'endommagement en compression

L'endommagement en compression est considéré comme une conséquence du comportement en traction du matériau. Il est donc pris égal, dans une direction à une fonction de l'état de fissuration dans les directions orthogonales (**Fichant & al. 1997**), c'est-à-dire l'accroissement de la fissuration en compression est induit par les extensions transverses et positives (**Mazars 1984**). On utilise une loi puissance de la forme:

$$D_i^c = \left( \frac{D_j^t + D_k^t}{2} \right)^\alpha \quad (3.105)$$

avec  $\alpha$  un paramètre matériau à identifier.

### 3.3.4.3 Critère et loi d'évolution de l'endommagement pour la variable $\delta$

La variable  $\delta$  apparaît lorsqu'il y a augmentation de volume du matériau. Elle représente l'ensemble des effets volumiques répartis de façon sphérique. La fonction seuil est choisie sous la forme suivante :

$$f(\varepsilon_{ij}, \underline{D}, \delta) = \langle \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle - \varepsilon_{D0} \leq 0 \quad (3.106)$$

Cette variable d'endommagement peut être interprétée comme un effet macroscopique des dégradations volumiques qui s'écrit sous la forme :

$$\dot{\delta} = \begin{cases} 0 & \text{si} & g(\langle \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle, \delta) < 0 & \text{(décharge)} \\ \frac{dG(\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}})}{d(\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}})} \langle \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle & \text{si} & g(\langle \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle, \delta) = 0 & \text{et} & \dot{g}(\langle \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle, \delta) > 0 & \text{(charge)} \end{cases} \quad (3.107)$$

Une fonction exponentielle peut être aussi choisie de la forme :

$$\delta = 1 - \left[ \left( \frac{\varepsilon_{D0}}{\langle \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle} \right) \exp \left[ -b(\langle \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle - \varepsilon_{D0}) \right] \right] \quad (3.108)$$

## 3.4 Aspect numérique

Le un calcul non linéaire de structures, est effectué en utilisant la méthode des éléments finis. Elle consiste à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent. L'utilisation de cette méthode dans le cas d'un matériau à écrouissage négatif pose des problèmes numériques qui conduisent à une instabilité du calcul. Lorsque le champ de vitesse des contraintes est localement négatif. La chute de contraintes créée par l'endommagement correspond à un écrouissage négatif, nous avons donc choisi de le traiter

par une méthode à raideur variable en adaptant localement la raideur des éléments finis à celle du matériau endommagé. La solution finale s'obtient en résolvant un système d'équations global formé en assemblant les équations algébriques obtenues sur tous les éléments discrétisant le domaine (**Batoz & Dhatt 1990, Germain 1973**).

### 3.4.1 Position du problème d'évolution

Soit un solide ayant un comportement élastique endommageable (Sections 3.1, 3.2 et 3.3). Dans sa configuration initiale non endommagée, ce solide occupe le domaine  $\Omega_0$  de frontière  $\Gamma_0$ . Après déformation, ce solide occupe une nouvelle configuration définie par le domaine  $\Omega$  de volume  $V$  et de frontière  $\Gamma$ .

Ce solide est soumis à :

- Une densité volumique de force  $\vec{f}_v$  dans  $\Omega$ ,
- Une densité surfacique d'effort  $\vec{f}_s$  sur une partie  $\Gamma_1$  de  $\Gamma$ ,
- Des déplacements imposés  $\vec{u}$  sur une partie  $\Gamma_2$  de  $\Gamma$ . ( $\Gamma_1, \Gamma_2$  forme une partition de  $\Gamma$ ).

Dans notre étude la formulation lagrangienne actualisée est adoptée, c'est-à-dire la configuration de référence est la dernière configuration en équilibre. On se propose alors de déterminer à chaque pas de chargement (incrément de chargement) les quantités mécaniques définies ci-dessous; soit pour chaque point du solide  $\Omega$  :

- Le vecteur déplacement ( $\vec{u}$ ),
- Le champ de contrainte défini par le tenseur de Cauchy ( $\underline{\sigma}$ ),
- Le champ de déformation ( $\underline{\varepsilon}$ ),
- L'intensité du dommage représenté par un scalaire dans le cas isotrope et par un tenseur dans le cas anisotrope ( $D(u)$ ).

### 3.4.2 Modélisation par éléments finis

Dans le cas du couplage de l'élasticité à l'endommagement, le tenseur des constantes élastiques est affecté par la valeur du dommage; pour cela on peut écrire la condition d'équilibre local:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{\sigma}) + f_v &= 0 & \text{sur } \Omega \\ \partial \sigma_{ij,j} + f_{vi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\sigma_{ij}n_j = f_{si} \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad (3.110)$$

$f_{vi}$  et  $f_{si}$  sont respectivement les forces volumiques et surfaciques s'exerçant sur ce milieu,  $n_i$  la normale unitaire à la frontière.

En appliquant le théorème des résidus pondérés et en choisissant pour fonction test un déplacement virtuel, l'équation locale (3.109) s'écrit sous la forme globale comme suit :

$$\int_{\Omega} u_i^* \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_{vi} \right) d\Omega = 0 \quad (3.111)$$

En appliquant le théorème de Green, l'intégration par parties fournit une formulation intégrale modifiée (facile à utiliser et dite "forme intégrale faible") et permet aussi de diminuer l'ordre de dérivabilité :

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma} u_i^* f_{si} d\Gamma - \int_{\Omega} u_i^* f_{vi} d\Omega = 0 \quad (3.112)$$

L'équation (3.112) est dite forme faible (ou variationnelle), qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\int_{\Omega} \varepsilon^{*T} \sigma d\Omega - \int_{\Gamma} u^{*T} f_s d\Gamma - \int_{\Omega} u^{*T} f_v d\Omega = 0 \quad (3.113)$$

En utilisant l'équation (3.23) dans le cas isotrope, on obtient :

$$\int_{\Omega} \varepsilon^{*T} [\Lambda^s] \varepsilon d\Omega - \int_{\Gamma} u^{*T} f_s d\Gamma - \int_{\Omega} u^{*T} f_v d\Omega = 0 \quad (3.114)$$

Le domaine  $\Omega$  définissant la structure est discrétisé spatialement de manière approchée par un maillage en sous domaine  $\Omega_e$  de volume  $V_e$  (où l'indice "e" indique l'élément et, il faut noter que  $d\Omega^e = dx dy$  en déformations planes).

Les déplacements dans un élément sont sous la forme :

$$\begin{cases} u_1^e = \sum_{i=1}^{i=n} N_i(x, y) u_{1i}^e \\ u_2^e = \sum_{i=1}^{i=n} N_i(x, y) u_{2i}^e \\ u_3^e = \sum_{i=1}^{i=n} N_i(x, y) u_{3i}^e \end{cases} \quad (3.115)$$

$N_i$  étant la fonction de forme (ou d'interpolation) par rapport au nœud  $i$  de coordonnées  $x_i, y_i$  dans le repère global  $x, y$  et de coordonnées  $(\zeta_i, \eta_i)$  dans le repère local  $(\zeta, \eta)$  et  $n$  est le nombre de nœud de l'élément.

En utilisant les mêmes approximations, on obtient le déplacement virtuel, la déformation et la déformation virtuelle :

$$u^*_{x,y} = N u_n^* \quad u_{x,y} = N u_n \quad (3.116)$$

$$\varepsilon^*_{x,y} = B u_n^* \quad \varepsilon_{x,y} = B u_n \quad (3.117)$$

où  $B$  est la matrice des dérivées des fonctions de forme. Dans le cas des problèmes plans, elle s'écrit sous la forme :

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

Finalement l'équation intégrale (3.114) s'écrit sous la forme :

$$\int_{\Omega^e} [B^e]^T [\Lambda^s] [B^e] d\Omega^e u_n^e - \int_{\Gamma^e} N^T f_s^e d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} N^T f_v^e d\Omega^e = 0 \quad (3.119)$$

La matrice élémentaire s'écrit donc :

$$[k^e] u_n = f^e \quad (3.120)$$

avec: 
$$[k^e] = \int_{\Omega^e} [B^e]^T [\Lambda^s] [B^e] d\Omega^e \quad (3.121)$$

et 
$$f^e = \int_{\Omega^e} N^T f_v^e d\Omega^e + \int_{\Gamma} N^T f_s^e d\Gamma^e \quad (3.122)$$

Les équations (3.121) et l'équation(3.122) représentent respectivement la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur des forces équivalentes élémentaires dues aux forces de volume et de surface. Le calcul de ces deux équations peut se faire en utilisant la méthode de Gauss bien adapter aux problèmes des éléments finis. Les itérations du schéma sont répétées jusqu'à obtenir un résidu inférieur à une certaine tolérance établie. L'étape d'assemblage

correspond à la construction de la matrice de rigidité globale sécante  $[K^s D]$  obtenue par assemblage des matrices, et le vecteur force global des sollicitations  $R$  obtenu par assemblage des vecteurs sollicitations élémentaires à partir de la matrice de rigidité élémentaire  $[k^e]$  et du vecteur force élémentaire  $f^e$ . Nous avons donc :

$$\int_{\Omega} B^T [\Lambda^s] [B] d\Omega U_n = \int_{\Omega} N^T f_v d\Omega + \int_{\Gamma} N^T f_s d\Gamma \quad (3.123)$$

L'équation (3.123) s'écrit sous la forme condensée :

$$[K^s D] U = F \quad (3.124)$$

On aboutit ainsi à un système d'équations non linéaires, du fait que la matrice global dépend de  $D(u)$ . L'endommagement qui est fonction de la déformation, donc du déplacement, affecte les caractéristiques matérielles de la structure et par conséquent sa rigidité. La stratégie de résolution doit s'adapter à une classe de problèmes donnée. Soit pour notre cas, la méthode pas à pas de Newton-Raphson qui tient compte du fait que le problème est fortement non linéaire. Elle consiste à introduire une nouvelle variable scalaire  $\lambda_j$ , appelée facteur de charge. Cependant la matrice tangente est évaluée à chaque itération. De plus la matrice de rigidité tangente devient non symétrique et elle est remplacée par la matrice sécante. Le temps de calcul augmente rapidement.

Avec le schéma de Newton-Raphson, l'algorithme de calcul est le suivant :

$$[K^s D] U = \lambda F_0 = F \quad (3.125)$$

L'équation (3.125) peut alors être remplacée par la résolution successive :

$$[K^s u_j] u_j = \lambda_j F_0 \quad (3.126)$$

Où  $\lambda_j = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda$  représentent les facteurs de charges (la charge est appliquée en plusieurs incréments) et  $F_0$  la charge globale à appliquer à la structure.

On obtient ainsi :

$$[K^s D] U - F = R U \quad (3.127)$$

Où  $R U$  est le résidu de résolution qui tend vers  $\eta$  à la convergence.  $\eta$  est une tolérance choisie par l'opérateur ( $\eta = 10^{-7}$  par exemple).

La solution initiale utilisée pour calculer  $u_j$  est la solution  $u_{j-1}$  obtenue à l'étape précédente. Chaque étape constitue un problème non linéaire qui se résout avec une ou plusieurs itérations de la méthode de Newton-Raphson. La méthode incrémentale, utilisant plusieurs itérations de Newton-Raphson s'écrit pour un niveau donné de sollicitations  $\lambda_j$  (Dhat & Touzot 1984) :

$$K_j^{i-1} \lambda_j R_0 \quad (3.128)$$

$$K_j^{i-1} A_j^i R_j^{i-1} + C_j - \lambda_{j-1} R_0 \quad (3.129)$$

$$u_j \quad (3.130)$$

On obtient ainsi, à chaque itération, un système d'équations linéaires que l'on résout par la méthode frontale. Le processus de Newton-Raphson converge lorsque la condition suivante est satisfaite : À l'itération "i" ( $i > 1$ ), on calcule les résidus  $\{R\}_i$ . On estime que l'on a raisonnablement convergé vers la solution lorsque le test suivant est vérifié:

$$\sqrt{\frac{R^T R}{R^T R}} * 100 \leq n \quad (3.131)$$

Où  $R^T$  résulte de l'assemblage des vecteurs élémentaires suivants :

$$R^e = \int_{\Omega^e} B^T \sigma \quad (3.132)$$

L'analyse faite jusqu'à maintenant concerne le problème d'évolution jusqu'à la phase d'amorçage. Lorsqu'un point de Gauss de la structure atteint la valeur critique d'endommagement.  $D'_c = 1$ , il faudra préciser le suivi de la zone endommagée. Une solution simple, et qui est retenue dans le présent travail, consiste à prendre comme critère de rupture  $D = D'_c$ . Afin d'éviter les problèmes numériques,  $D'_c$  est choisi proche mais différent de 1 ( $D'_c = 0.99$ ). A cet instant le tenseur de contrainte devient presque nul et le point de Gauss en question n'intervient plus ni dans le calcul du résidu, ni dans le calcul de la matrice de rigidité. La zone endommagée lors du processus de chargement, est donc définie comme l'ensemble des points de Gauss où l'endommagement à atteint cette valeur critique.

Par la suite, un programme numérique de calcul par éléments finis a été réalisé pour décrire le comportement des structures endommageables. Ce programme reprend dans la partie classique du calcul les éléments du programme éléments finis PLAST2 de Owen et

Hinton (**Owen & Hinton 1980**). Profitant des larges similitudes formelles entre modèles élastoplastiques et modèles endommageables, ce programme a été adapté pour le calcul des structures élastiques endommageables. Gadhib a repris la même idée pour le calcul en 3D des structures élastiques endommageables (**Gadhib 1998**). La préparation des données ainsi que la visualisation des résultats sont réalisés à l'aide du pré-post processeur GID. Ceci a été fait par l'ajout de "blocs" indépendants respectant l'architecture du programme. La figure (3.5) présente l'organigramme général du programme de calcul.

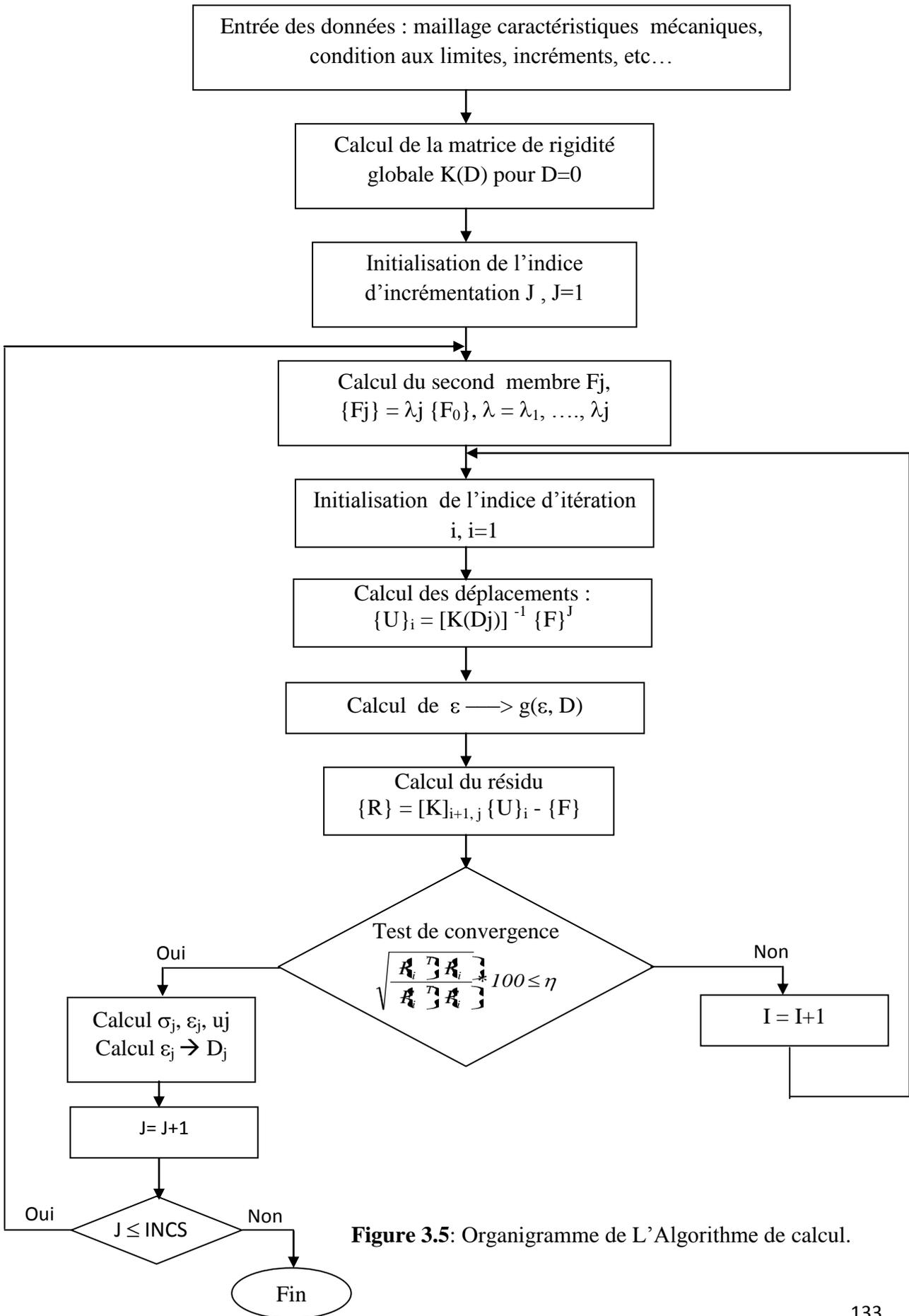


Figure 3.5: Organigramme de L'Algorithme de calcul.

## 3.5 Validation du Programme et résultats issus du modèle isotrope

### 3.5.1 Réponse d'un élément de volume sollicité en traction pure

Un élément de volume est sollicité en traction homogène (solllicitation uniforme - endommagement homogène). Le chargement se fait à déplacement imposé en déformations planes. Les caractéristiques du matériau sont les suivantes:

$$E = 20000 \text{ MPa} \quad \nu = 0.2, \quad \varepsilon_{D0} = 0.0001 \quad A_c = 1.4, \quad A_t = 1, \quad B_t = 1000, \quad B_c = 1500$$

La réponse d'un élément de volume sollicité en traction pure est donnée sur les figures 3.6, 3.7 et 3.8.

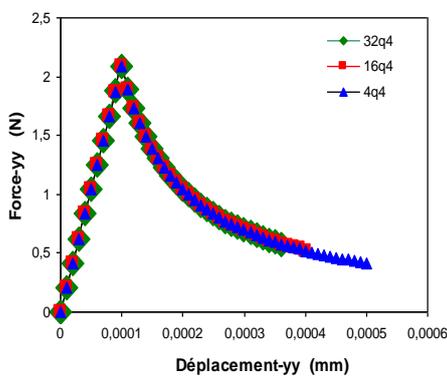


Figure 3.6 : Comportement local.

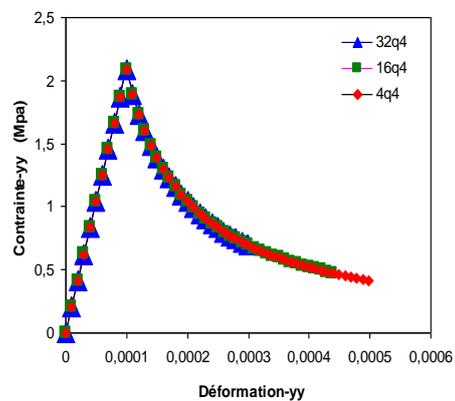


Figure 3.7 : Comportement global.

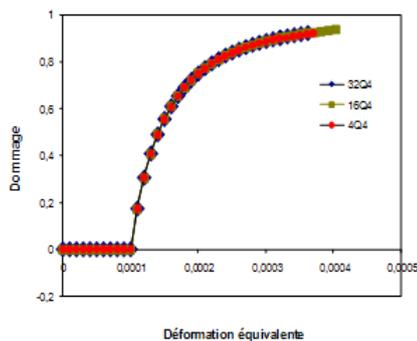


Figure 3.8 : Evolution du dommage en fonction de la déformation.

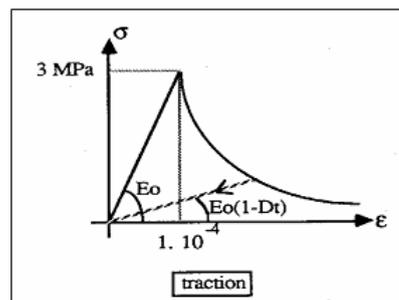


Figure 3.9 : Comportement du béton sous sollicitations uniaxiales (traction) résultats expérimentaux (Mazars 1984).

Afin de vérifier l'implémentation du modèle de comportement, nous l'avons appliqué à un élément de volume soumis à une sollicitation monotone. Dans ce cas, l'endommagement est homogène dans tout l'élément : il n'y a aucune localisation. Sur les figures 3.6, 3.7 et 3.8, on

observe les résultats de calculs utilisant trois maillages différents. L'objectif est la vérification de la sensibilité des résultats. Par rapport au maillage utilisé les résultats sont identiques tant en ce qui concerne la réponse locale (force-déplacement), la réponse globale (contrainte-déformation) qu'en ce qui concerne le champ d'endommagement (objectivité des résultats du cas homogène).

### 3.5.2 Réponse d'un élément de volume sollicité en compression pure

Un élément de volume est sollicité en compression homogène. Le chargement se fait à déplacement imposé en déformations planes. Les caractéristiques du matériau sont les suivantes :

$$E = 20000 \text{ MPa} \quad \nu = 0.2, \quad \varepsilon_{D0} = 0.0001 \quad A_c = 1.4, \quad A_t = 1, \quad B_t = 1000, \quad B_c = 1500$$

La réponse d'un élément de volume sollicité en compression pure est représentée dans les figures 3.10, 3.11 et 3.12.

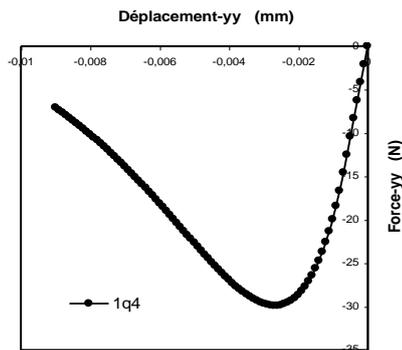


Figure 3.10 : Comportement local.

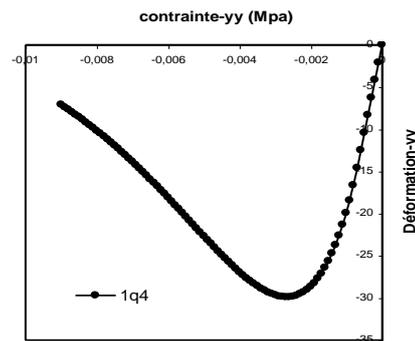
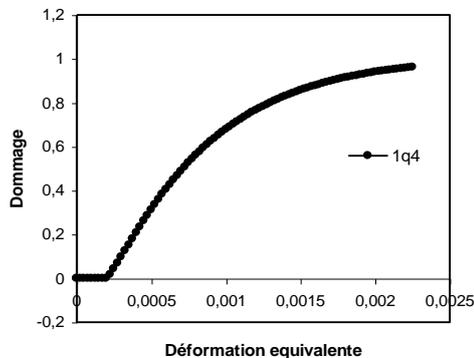


Figure 3.11 : Comportement global.



3.5.3 1 Figure 3.12 : Evolution du dommage en fonction de la déformation équivalente

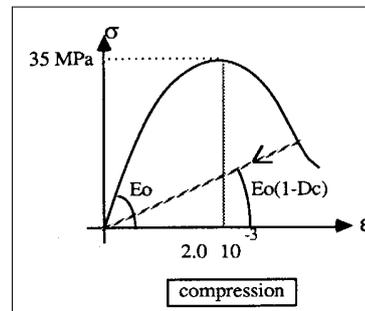


Figure 3.13 : Comportement du béton sous sollicitations uniaxiales (compression) résultats expérimentaux (Mazars 1984).

### 3.5.3 Essai de traction-chargement alterné

Cet exemple est présenté dans le but de vérifier le critère de charge-décharge.

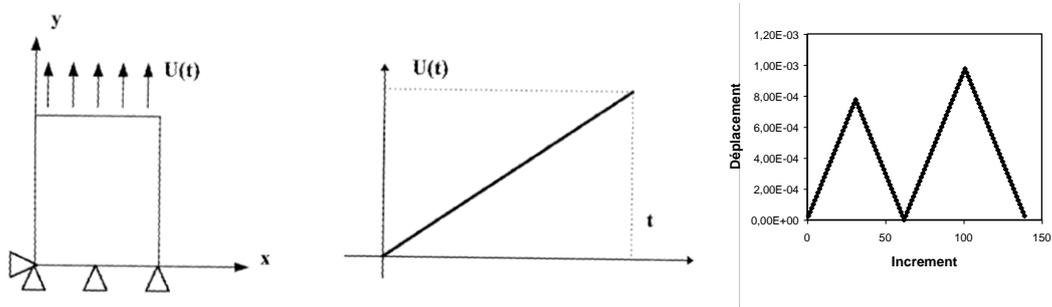


Figure 3.14 : Simulation de l'essai (géométrie et chargement).

Les résultats de la simulation sont donnés sur les figures 3.15, 3.16 et 3.17.

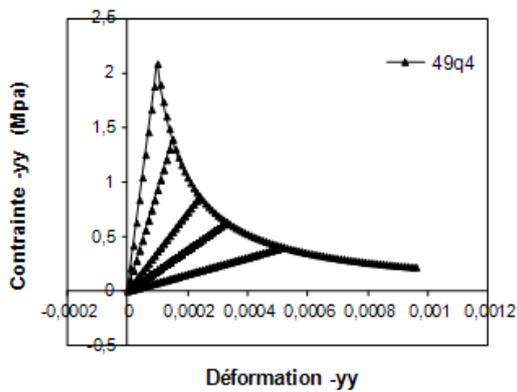


Figure 3.15 : Réponse locale (chargement alterné).

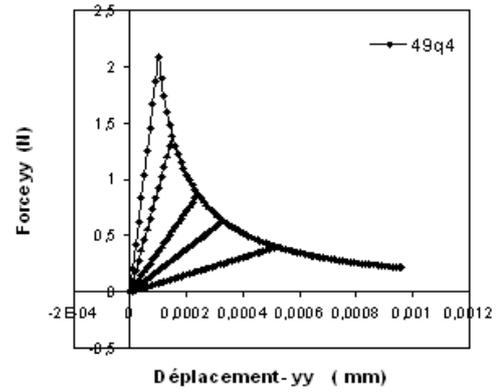


Figure 3.16 : Comportement global (chargement alterné).

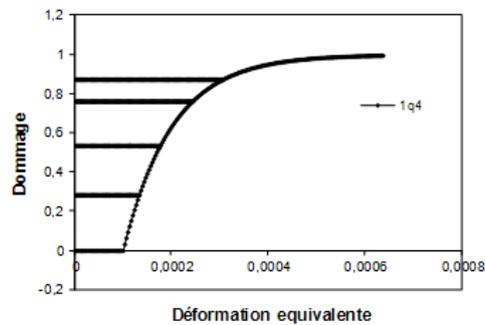


Figure 3.17 : Evolution du dommage en fonction de la déformation équivalente (Chargement alterné).

### 3.5.4 Test de compression homogène-chargement alterné (sans "rentrer" en traction)

Toujours dans le but de vérifier le critère de charge-décharge un test de compression en chargement alterné est réalisé.

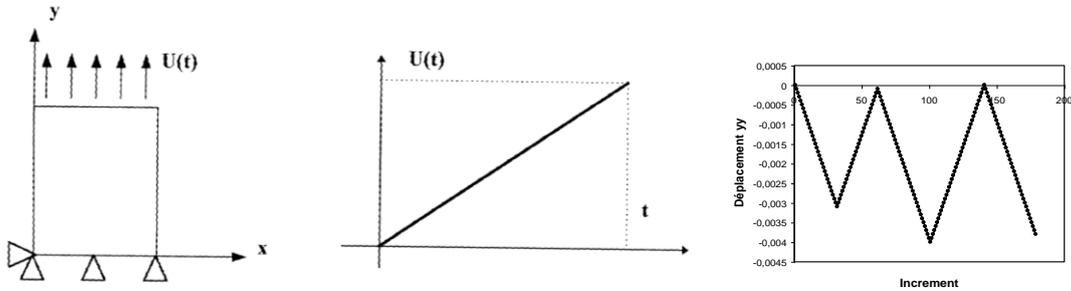


Figure 3.18 : Simulation de l'essai (géométrie et chargement).

Les résultats de la simulation sont donnés sur les figures 3.19 et 3.20.

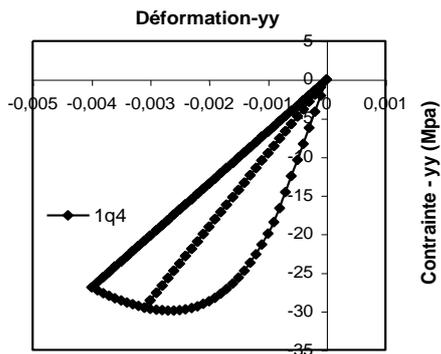


Figure 3.19: Réponse locale (compression-chargement alterné).

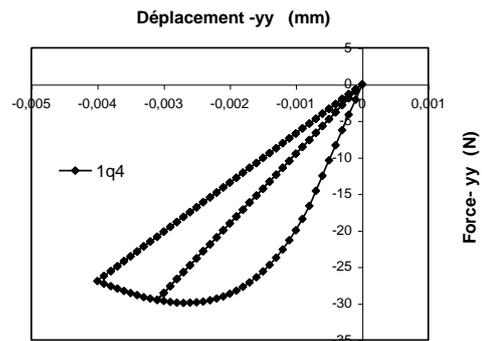


Figure 3.20 : Comportement global (chargement alterné-compression).

### 3.5.5 Test de traction-compression (compression-traction, chargement alterné)

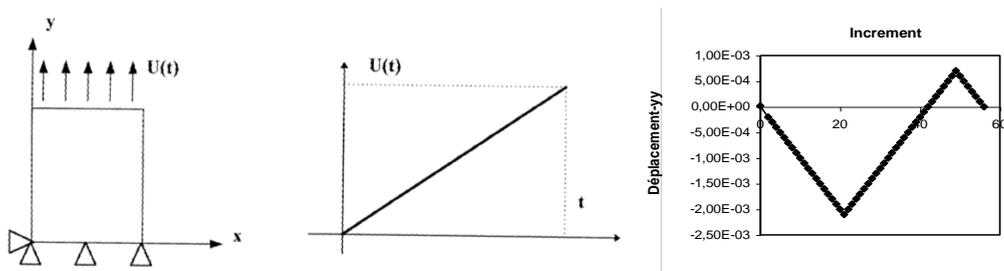
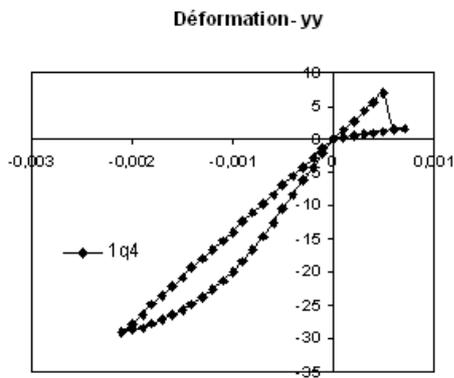
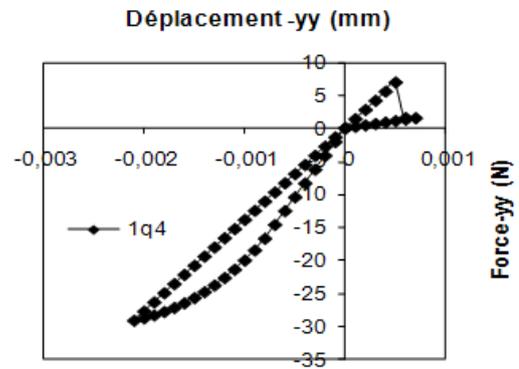


Figure 3.21 : Simulation de l'essai, chargement alterné (géométrie et chargement).

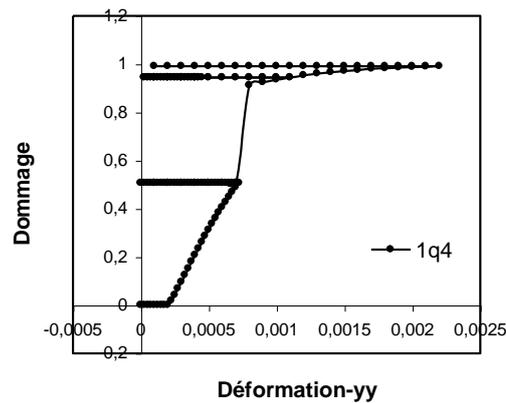
Les résultats de la simulation sont donnés sur les figures 3.22, 3.23 et 3.24.



**Figure 3.22 :** Réponse locale (chargement alterné, compression-traction)



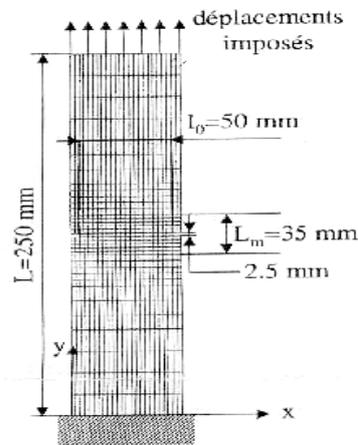
**Figure 3.23 :** Comportement global (chargement alterné, compression-traction).



**Figure 3.24 :** Evolution du dommage en fonction de la déformation équivalente (Chargement alterné, compression-traction).

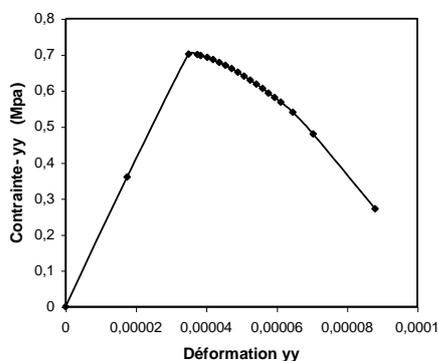
### 3.5.6 Essai de traction d'une poutre entaillée en béton

La géométrie et le chargement du matériau sont donnés sur la figure 3.25.

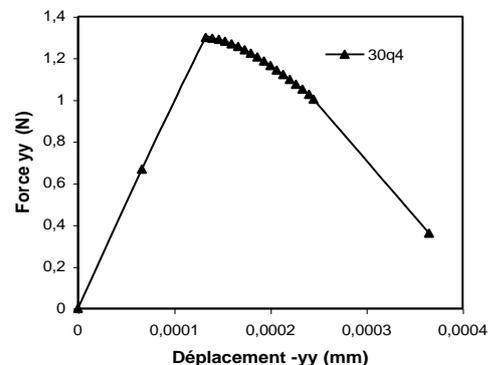


**Figure 3.25 :** Maillage et conditions aux limites pour la simulation d'un test de traction d'une poutre entaillée en béton (Bode 1994).

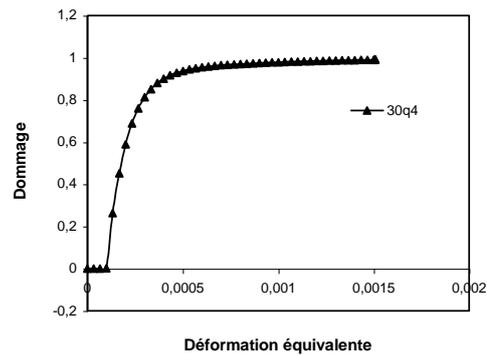
La plaque entaillée schématisée sur la figure 3.25 est chargée en déplacement imposé. Une série d'essais a été effectuée par Legendre sur de telles plaques (Bode 1994). Cet exemple vise à modéliser un essai d'ouverture de fissures sur une plaque en béton avec entaille. Etant donné que le programme établi constitue un outil de la prévision de la ruine par endommagement des structures, on désire donc connaître sa capacité à suivre le trajet de fissuration. Les calculs ont été menés dans le cadre d'une modélisation en déformations planes, et la symétrie du problème a été exploitée afin de réduire de moitié la taille de la pièce calculée. Les différents résultats numériques sont présentés sur les figures 3.26, 3.27 et 3.28.



**Figure 3.26 :** Réponse locale (essai de traction d'une poutre entaillée).



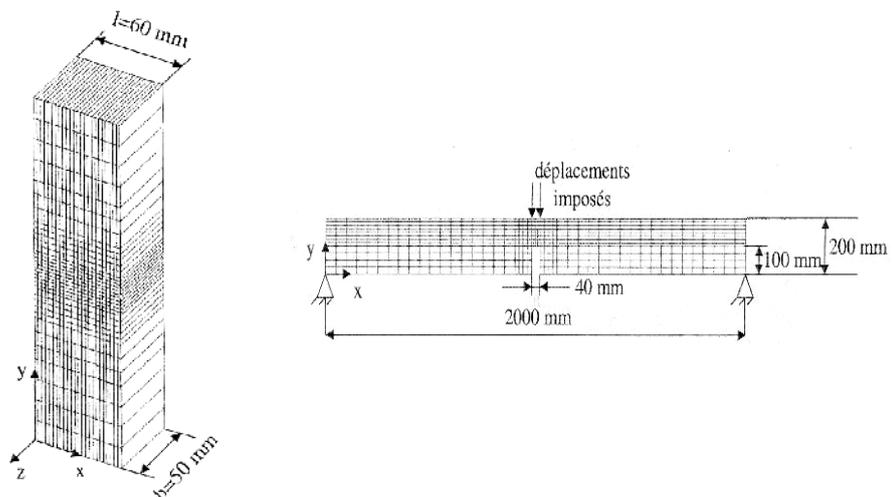
**Figure 3.27:** Comportement global (essai de traction d'une poutre entaillée).



**Figure 3.28 :** Evolution du dommage (essai de traction d'une poutre entaillée).

### 3.5.7 Essai de flexion d'une poutre entaillée en béton plein (effet de l'échelle)

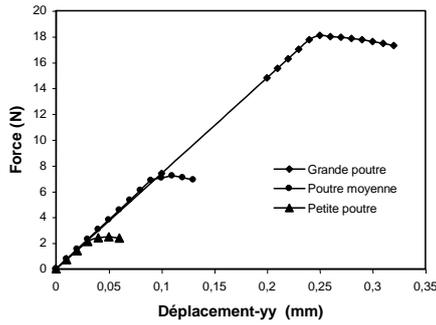
Une poutre de béton entaillée soumise à un essai de flexion simple est étudiée (Figure 3.29). Cet exemple a été retenu, car il a déjà fait l'objet de nombreuses études expérimentales et analytiques. Il est inspiré des essais expérimentaux réalisés par Bazant (**Bazant 1990**).



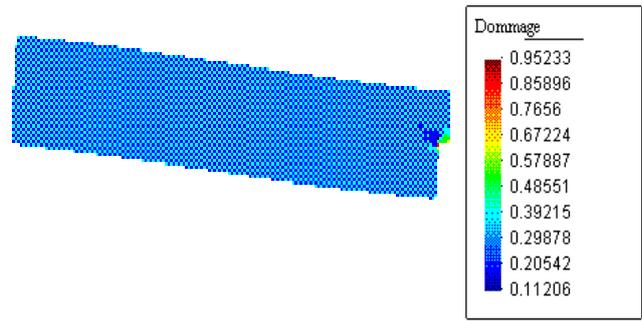
**Figure 3.29 :** Simulation d'un test de flexion d'une poutre entaillée (**Bazant 1990**).

Pour des raisons de symétrie, seule la moitié de la poutre est modélisée. Cet exemple numérique est proposé sur trois poutres entaillées de géométries semblables, avec toutefois trois rapports d'homothétie géométrique différents : 0,5 (petite poutre), 1,0 (poutre moyenne) et 1,5 (grande poutre) (Figure 3.29).

Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 3.30 et 3.31.



**Figure 3.30** : Comportement global des trois poutres.

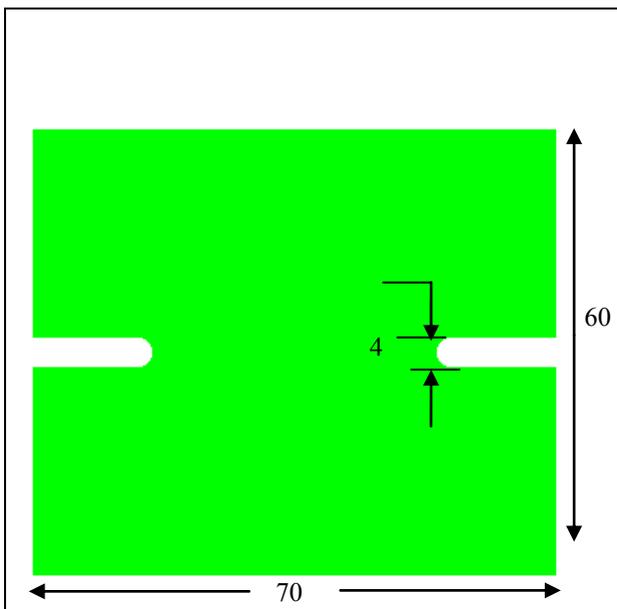


**Figure 3.31** : Configuration finale.

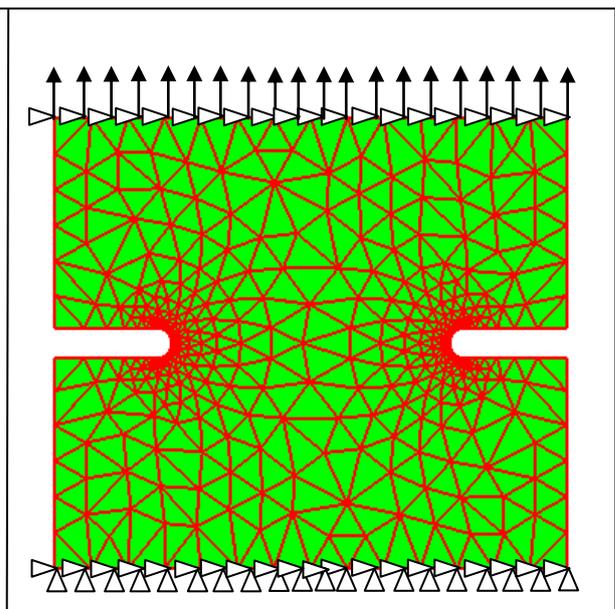
Les résultats obtenus montrent que le béton est le siège d'effet d'échelle. Ces difficultés sont dues au comportement adoucissant du béton.

### 3.5.8 Simulation d'un cube en béton

Cet exemple concerne une simulation numérique d'un essai de traction réalisé par Hassanzadeh (Hassanzadeh 1991) sur des cubes en béton avec entailles sur les quatre côtés. La géométrie, les dimensions, le maillage, les conditions aux limites et le chargement de l'éprouvette sont représentés sur les figures 3.32 et 3.33.



**Figure 3.32** : Géométrie et dimensions de l'éprouvette.



**Figure 3.33** : maillage de l'éprouvette.

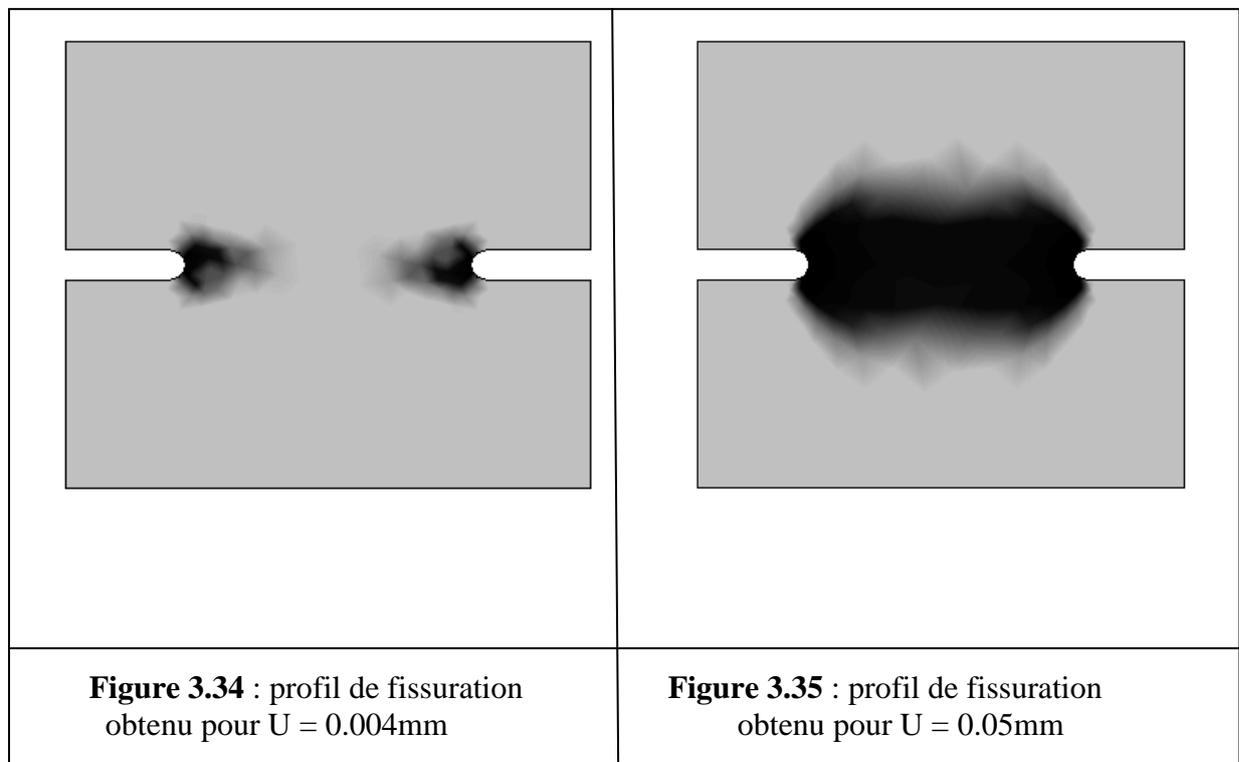
Cet essai est considéré dans la littérature comme un benchmark (**Benchmark 2008**). De ce fait, cet essai est repris par de nombreux auteurs (**Ferrara 1998, Comi 2001, Labadi 2005**).

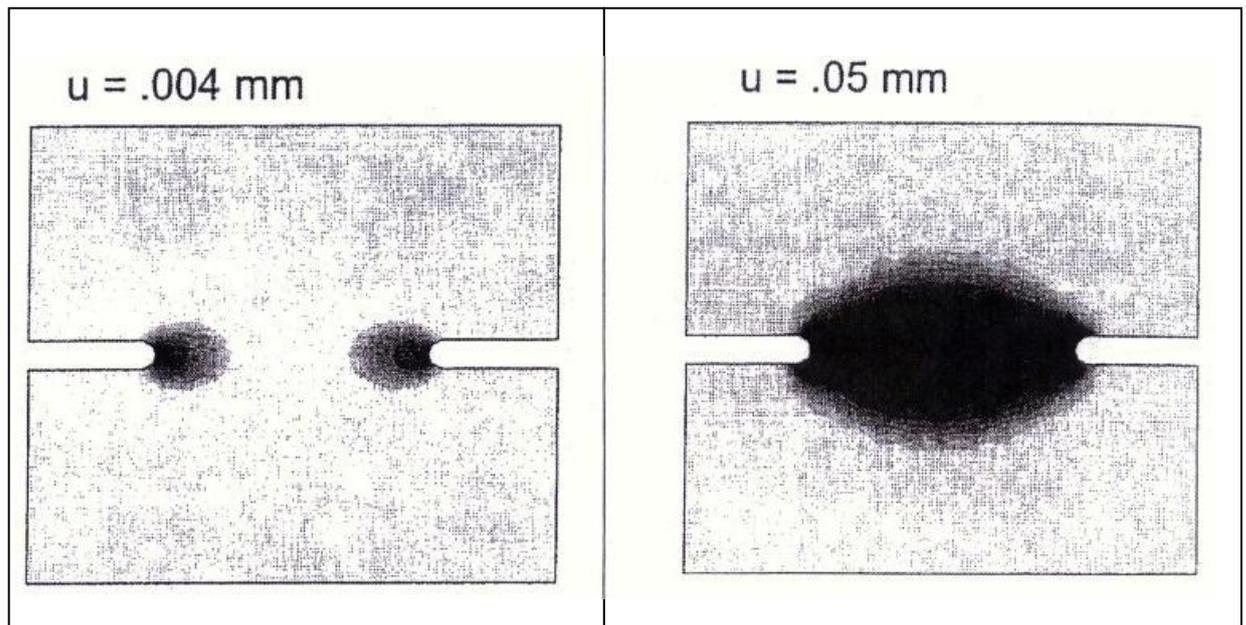
Les paramètres du matériau utilisé sont donnés dans le tableau 3.1:

E (MPa)	$\nu$	$\varepsilon_{D_0}$	n
36000	0.2	0.0001	5

**Tableau 3.1** : Paramètre du matériau.

On montre sur les figures 3.34 et 3.35 deux profils de fissuration à deux instants du calcul correspondants à des déplacements :  $U = 0.004$  mm et  $U = 0.05$  mm. Afin de valider l'évolution de la fissuration nous avons confronté ces résultats à des calculs obtenus avec un modèle d'endommagement non local (**Comi 2001**) (Figure 3.36). Les résultats de notre modèle sont donnés sur les figures 3.34 et 3.35. Les cartes de dommages concordent parfaitement.





**Figure 3.36 :** Profils de fissuration donnés par Comi (Comi 2001).

### 3.5.9 Essai de flexion trois points

Nous effectuons un calcul éléments finis jusqu'à la rupture sur une poutre en béton chargée en flexion (figure 3.37). En raison de la présence de l'entaille, le mode de rupture dominant est le mode I. Ce cas est traité dans le manuel d'exemples du logiciel commercial de calcul par éléments finis ABAQUS.

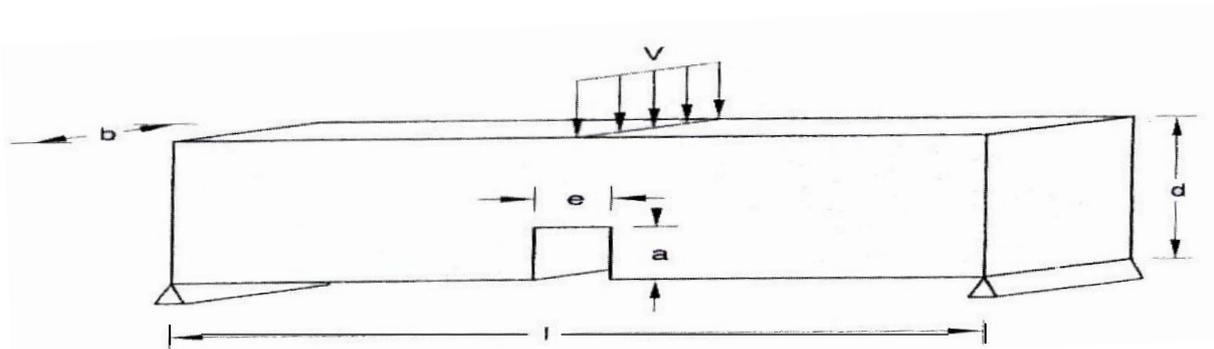
Le même exemple à été traité précédemment afin de mettre en évidence l'effet de l'échelle. La géométrie et les conditions aux limites sont données sur la figure 3.37. Les paramètres du matériau utilisé sont donnés dans le tableau 3.2 :

E (MPa)	$\nu$	$\varepsilon_{D_0}$	n
37000	0.2	0.0001	3

**Tableau 3.2:** paramètres du matériau

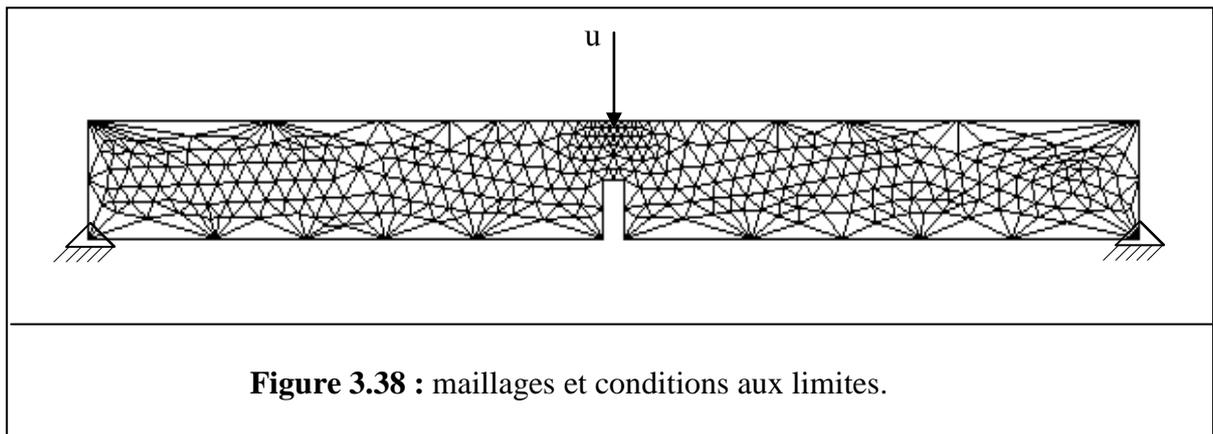
Le maillage utilisé est donné sur la figure 3.38, composé de 684 éléments triangulaire à trois nœuds, le nombre total de nœuds est 370.

Une plus grande densité d'éléments a été concentrée au bout de l'entaille ainsi qu'autour du développement d'une fissure supposée. Cette bande d'éléments est néanmoins assez large afin de ne pas influencer la réponse.



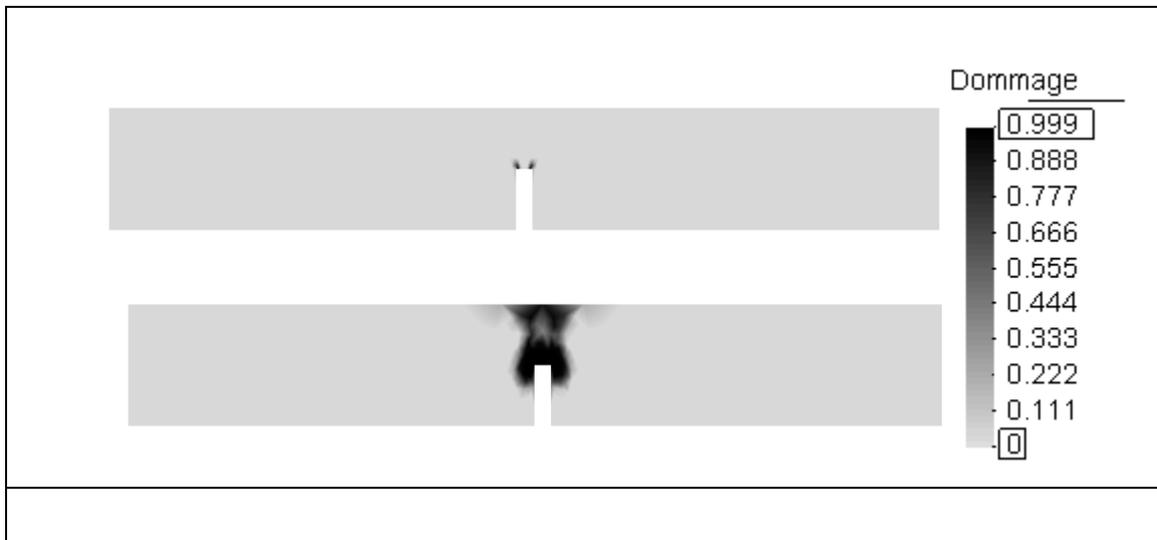
$$a/b = 0.5, \quad l = 2 \text{ m}, \quad d = 0.2 \text{ m}, \quad b = 0.05 \text{ m} \quad e = 0.04 \text{ m}$$

**Figure 3.37 :** Géométrie et chargement de l'éprouvette de flexion.



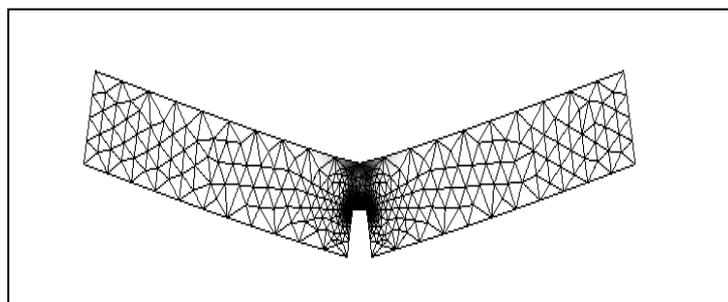
**Figure 3.38 :** maillages et conditions aux limites.

sur la figure 3.39 nous présentons des relevés de fissuration de la structure à deux instants différents.



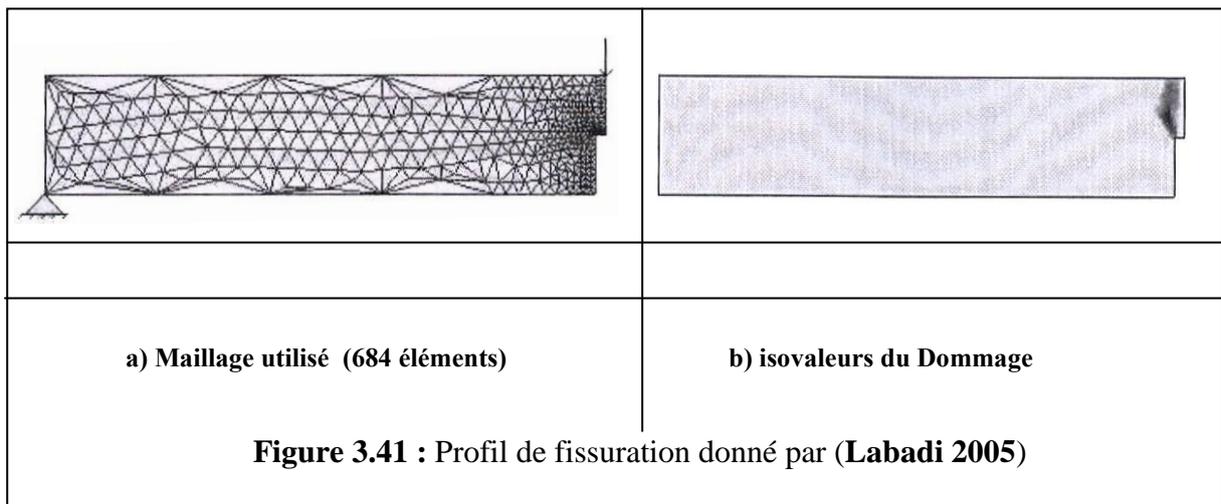
**Figure 3.39** : Relevés de fissuration à deux instants différents.

la figure 3.40 représente la déformée de la poutre à la fin du calcul.

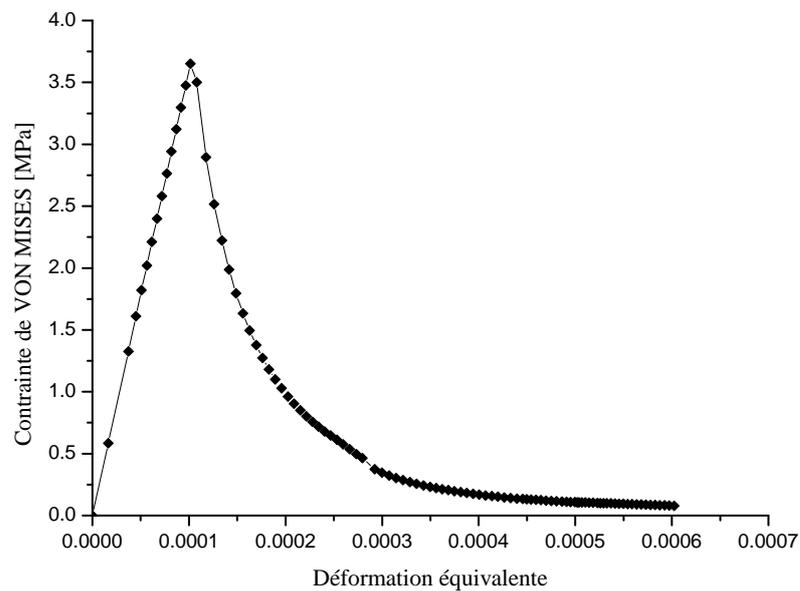


**Figure 3.40** : Déformée de la poutre à la fin du calcul.

Sur la figure 3.41 on présente un calcul effectué par (**Labadi 2005**) avec un modèle d'endommagement des structure en béton. Ce résultat est utilisé pour une comparaison quantitative avec les résultats de notre calcul.



Nous présentons la réponse locale contrainte-déformation sur la figure 3.42 en un point de Gauss de l'élément le plus sollicité situé au fond de l'entaille. La réponse donnée par Labadi (Labadi 2005) pour le même point de Gauss est représentée sur la figure 3.43.



**Figure 3.42 : Réponse locale de l'éprouvette.**

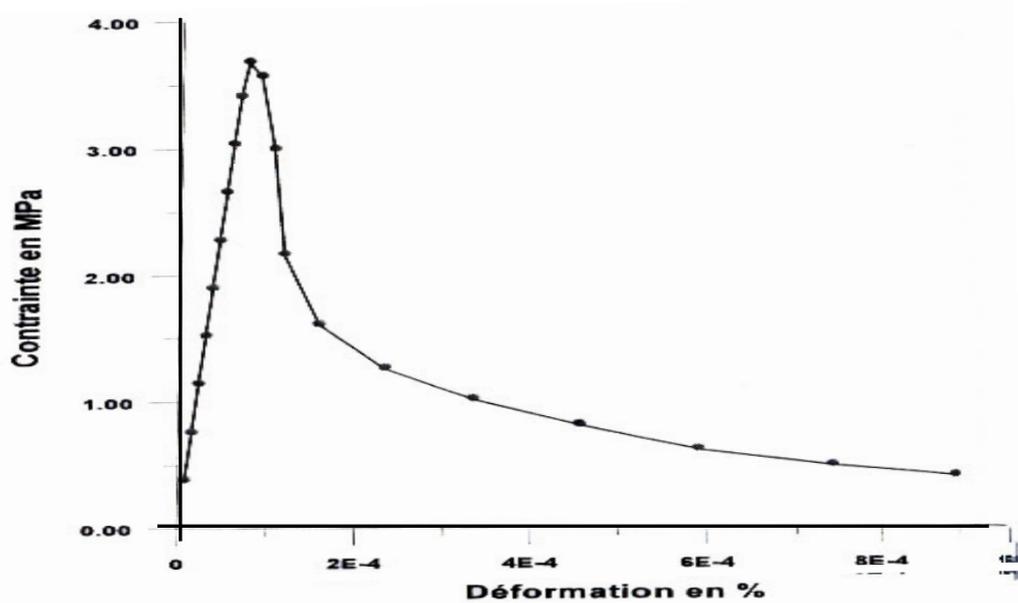


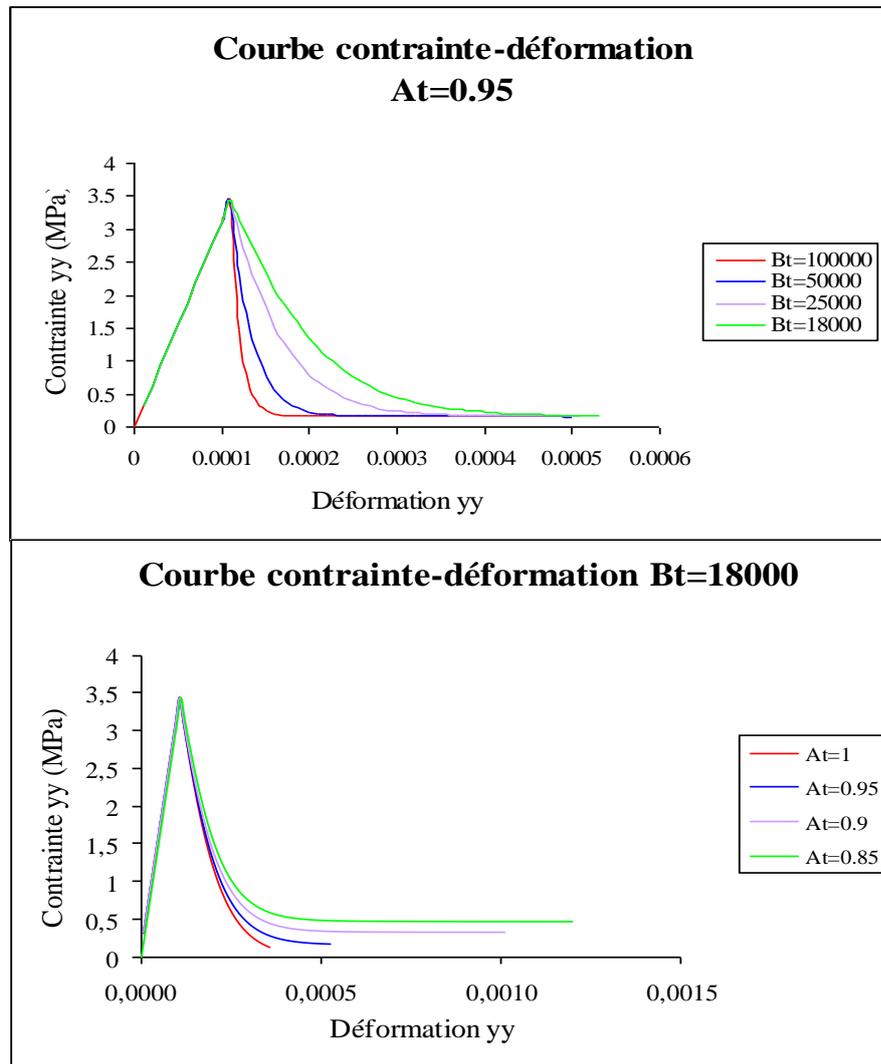
Figure 3.43 : Réponse locale de l'éprouvette donnée par (Labadi 2005).

Au vu de ces résultats, on remarque bien, que l'endommagement est localisé dans deux bandes symétriques. Le profil de fissuration correspond bien au résultat obtenu par (Labadi 2005). Nous constatons aussi que notre modèle retrouve bien la contrainte maximale ainsi que l'allure de la partie adoucissante de la courbe (Figure 3.42).

Les exemples traités nous ont permis de valider la loi de comportement du modèle élastique-endommageable. L'examen des différentes courbes a montré la cohérence qualitative et quantitative des prédictions numériques en compression aux résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

### 3.5.10 Influence des différents paramètres

Le test consiste en une représentation de l'influence des différents paramètres constituant le modèle (figures 3.44 et 3.45). Les paramètres  $A_c$  et  $B_c$  commandent le comportement en compression. En traction, le paramètre  $A_t$  contrôle l'asymptote horizontale ( $A_t=0$  signifie que le comportement est adoucissant jusqu'à une contrainte nulle), et  $B_t$  détermine la vitesse de l'adoucissement.



**Figure 3.44** : Influence des paramètres  $A_t$  et  $B_t$  sur la réponse locale.

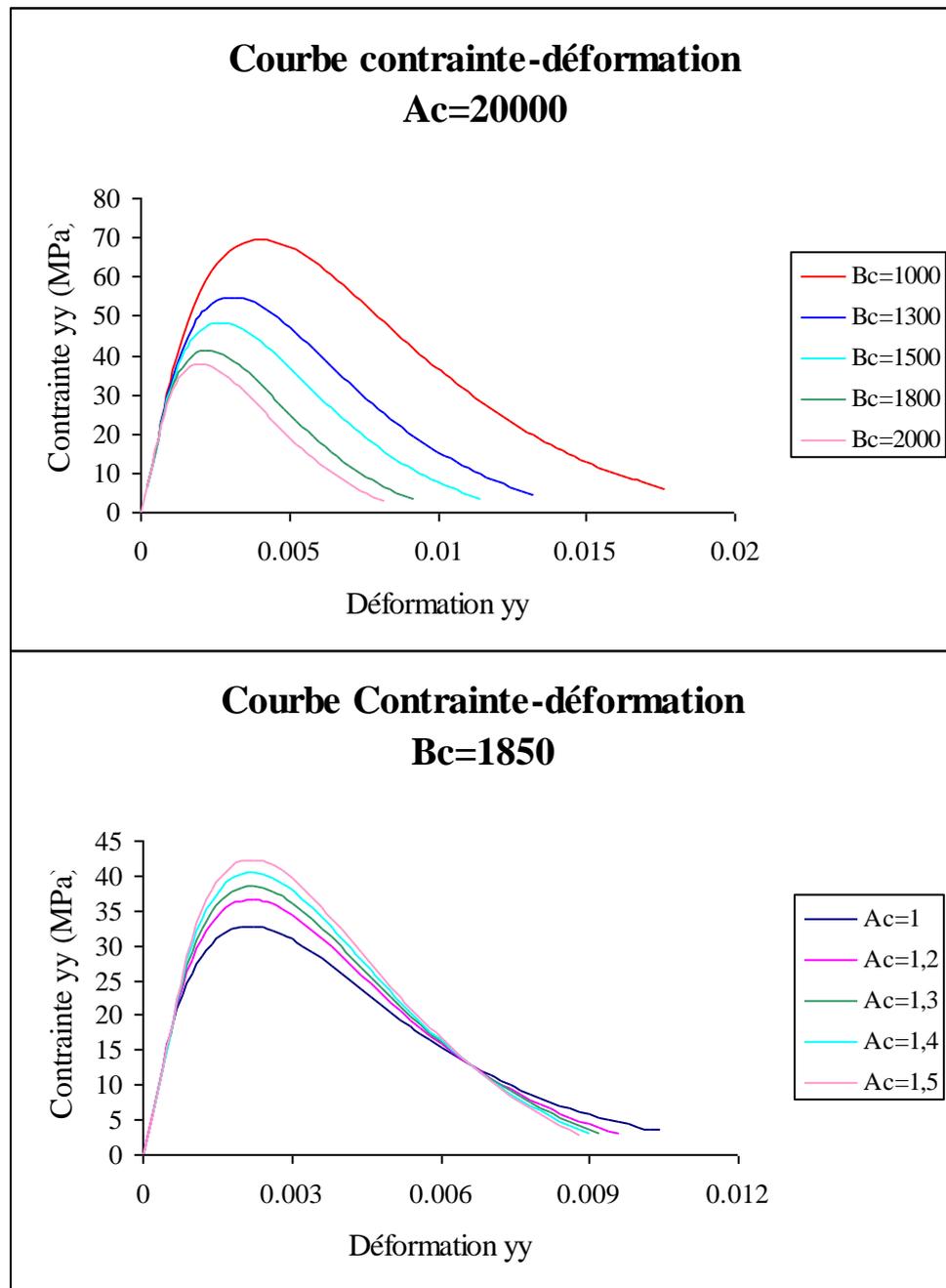
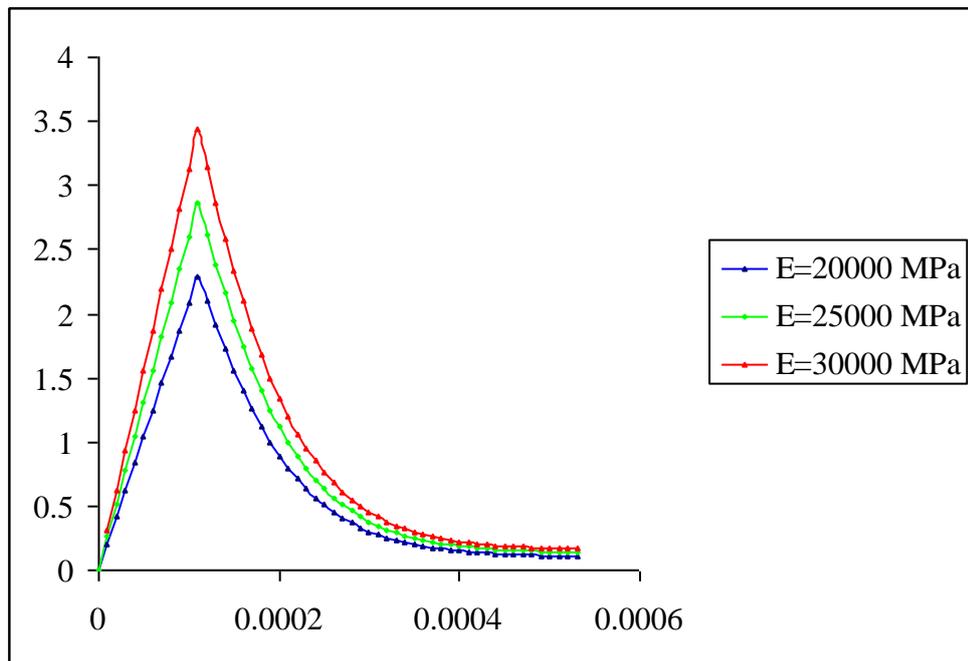
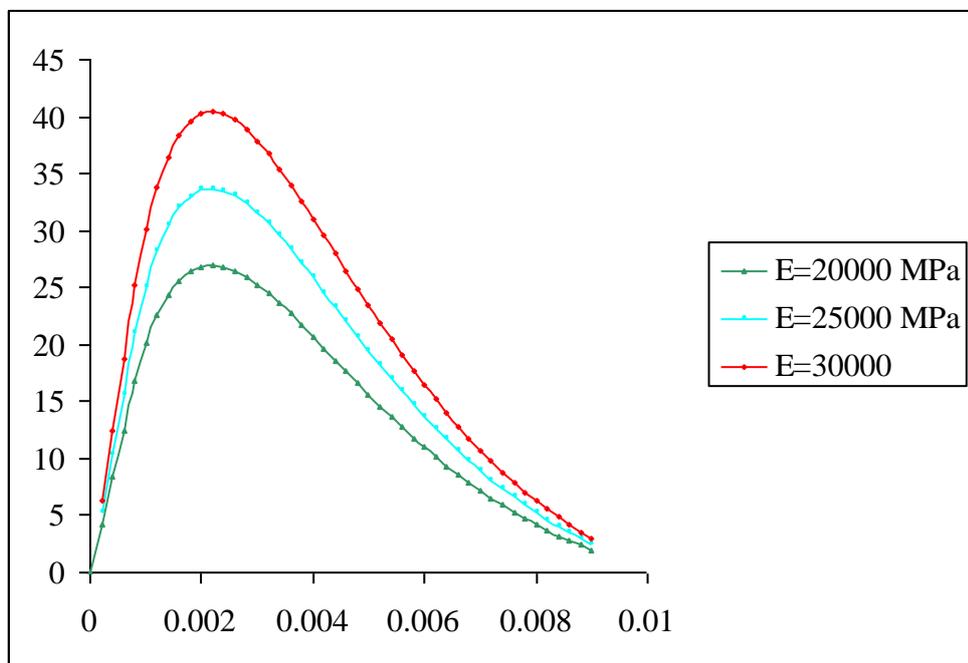


Figure 3.45 : Influence des paramètres  $A_c$  et  $B_c$  sur la réponse locale.

L'influence du module de Young sur le comportement en traction est illustrée sur la figure 3.46 et sur le comportement en compression sur la figure 3.47.

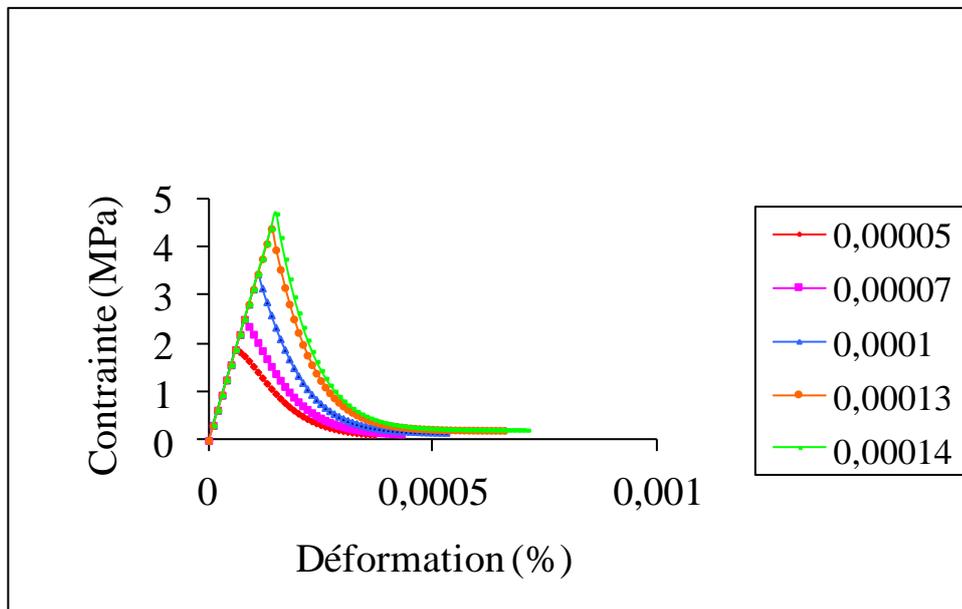


**Figure 3.46.** Influence du module de Young sur le comportement en traction.



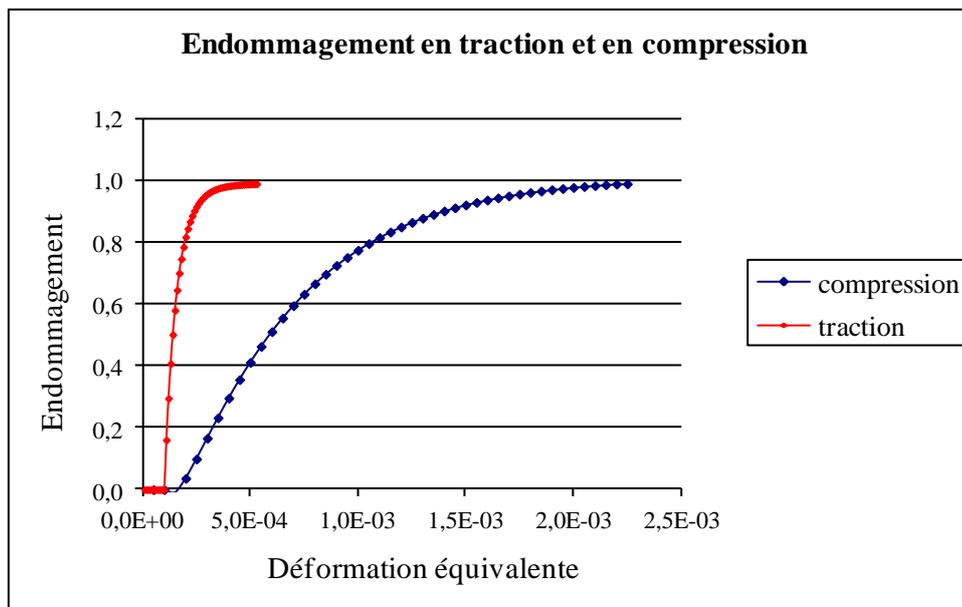
**Figure 3.47 :** Influence du module de Young sur le comportement en compression.

L'influence du seuil d'endommagement  $\varepsilon_{D0}$  sur la réponse locale est représentée sur la figure 3.48.



**Figure 3.48 :** Influence du seuil d'endommagement  $\varepsilon_{D0}$  sur la réponse locale.

L'évolution de l'endommagement dans les deux cas (traction-compression) est représentée sur la figure 3.49.



**Figure 3.49 :** Comparaison de l'évolution de l'endommagement dans les deux cas de traction et de compression

## 3.6 Validation du modèle anisotrope et application à des structures en béton

### 3.6.1 Essai de traction

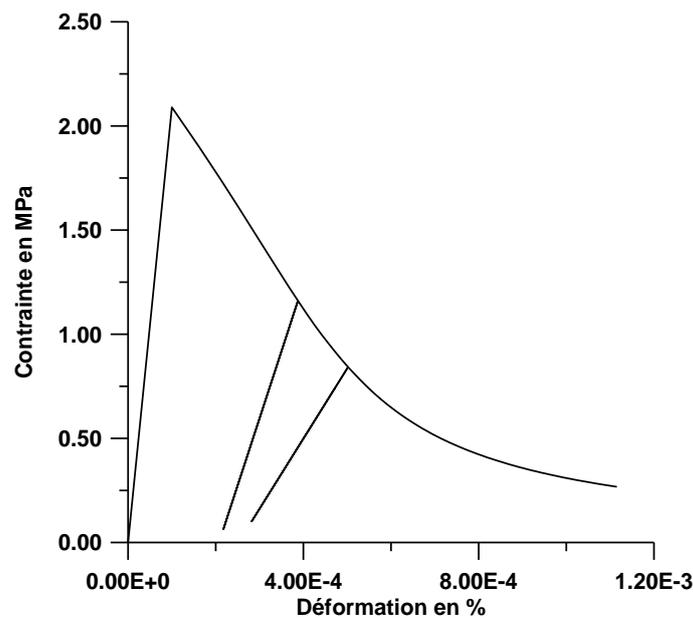
Un essai de traction simple est étudié. On présente la réponse d'un élément représentatif de volume sollicité en traction uniaxial en déformations planes.

Les paramètres utilisés pour cet essai sont les suivants :

$$E = 20000 \text{ MPa}, \quad \nu = 0.2 \quad f_t = 2.5 \text{ MPa} \quad f_c = 25 \text{ MPa}$$

$$G_f = 0.05 \text{ Nmm/mm}^2 \quad \varepsilon_{D_0} = 0.0001 \quad \beta = 8.10^{-4} \quad \gamma = -3.10^{-4}$$

Le comportement global en traction uniaxial de la plaque en traction est représenté sur la figure 3.50.



**Figure 3.50** : Comportement global (contraintes – déformations).

On constate que le modèle reflète bien les caractéristiques réelles du matériau :

- Un comportement fragile
- Une perte de raideur importante (matériau fragile, endommagement fragile),
- Des déformations permanentes irréversibles qui croissent avec l'endommagement du matériau.

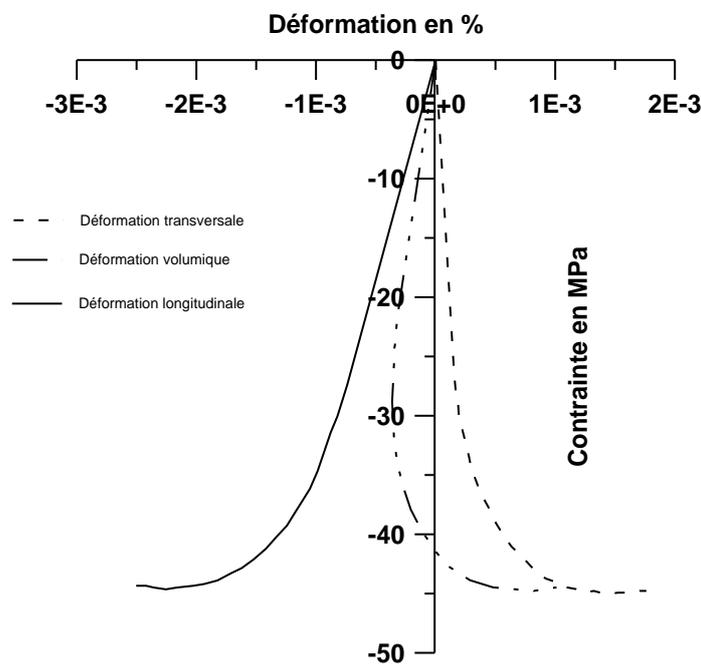
### 3.6.2 Réponse d'un élément de volume sollicité en compression

Un élément de volume est sollicité en compression uniaxial sous déplacement imposé en déformations planes, Les paramètres du matériau sont :

$$E = 20000 \text{ MPa}, \quad \nu = 0.2 \quad f_t = 2.5 \text{ MPa} \quad f_c = 25 \text{ MPa}$$

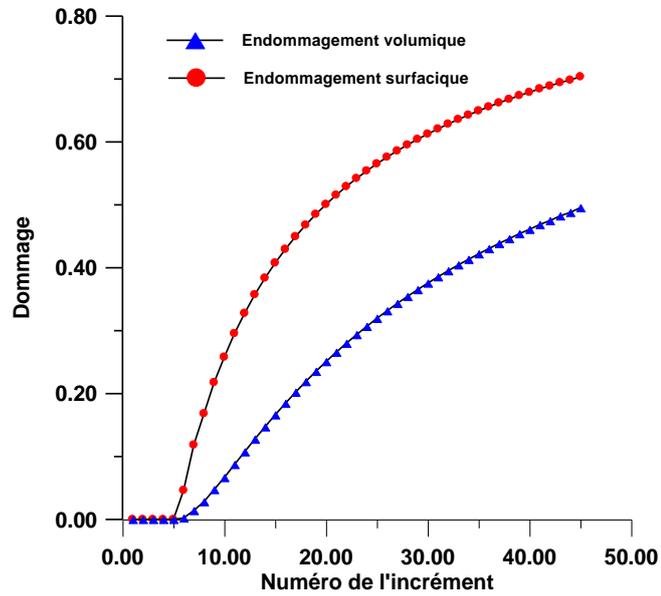
$$G_f = 0.05 \text{ Nmm/mm}^2 \quad \varepsilon_{D_0} = 0.0001$$

Les résultats sont donnés sur la figure 3.51.



**Figure 3.51** : Essai de compression simple.

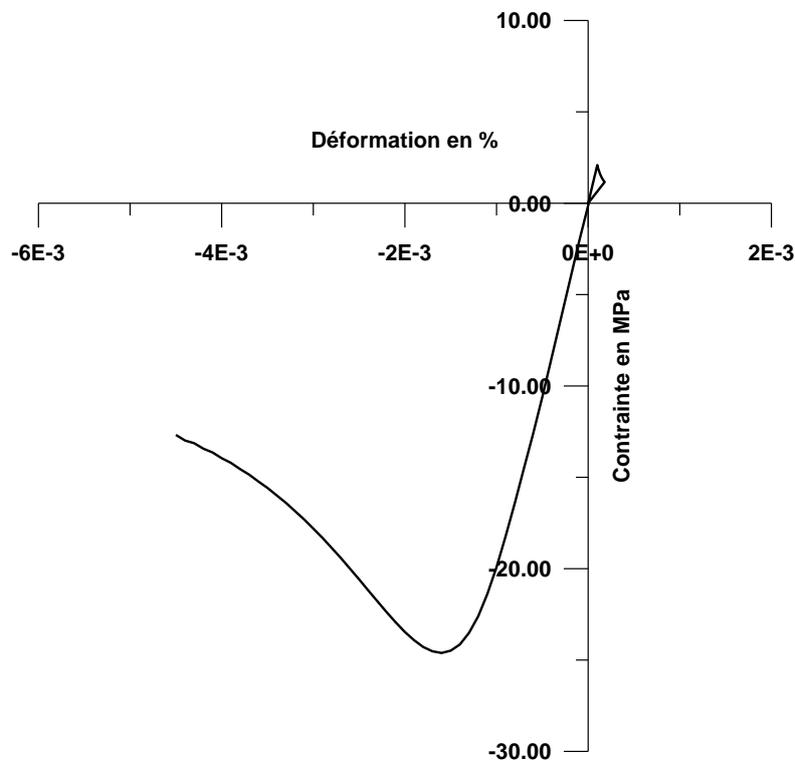
L'évolution de l'endommagement volumique et de l'endommagement surfacique est représentée sur la figure 3.52.



**Figure 3.52** : Evolution de l'endommagement volumique et de l'endommagement surfacique.

La description des déformations volumiques correspond à celle trouvée expérimentalement par Ramtani (**Ramtani 1990, La Borderie 2003**).

### 3.6.3 Réponse d'un élément de volume sous chargement cyclique (unilatéralité du modèle)

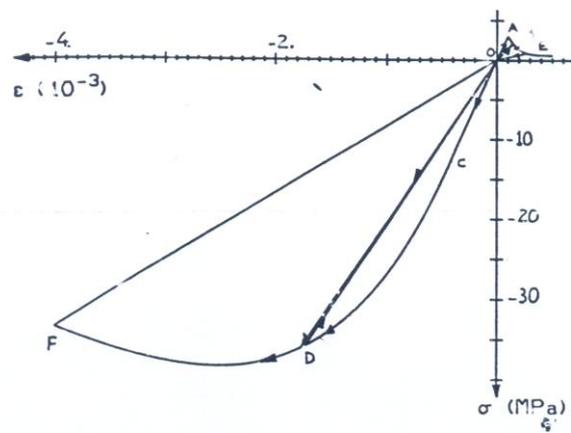


**Figure 3.53** : Réponse sous chargement cyclique.

La figure 3.53 montre le caractère unilatéral du modèle. La réponse du modèle à des cycles de traction-compression est représentée.

Le même phénomène est mis en évidence lors d'un essai uniaxial réalisé par Berthaud (**Berthaud & al. 1988**). Après dégradation par une procédure d'essai en traction directe, le passage en compression fait "apparaître" une restauration de la raideur du matériau (Figure 3.54).

La création de microfissures en traction (perpendiculairement à l'axe de sollicitation) ne modifie pas, les caractéristiques en compression puisque cette sollicitation va permettre la refermeture de ces microfissures et par conséquent, la restauration de la raideur. Ce phénomène unilatéral est une conséquence de l'anisotropie induite due à la microfissuration.



**Figure 3.54** : Comportement unilatéral d'un microbéton (Berthaud & al. 1988).

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé dans une première étape un modèle d'endommagement local isotrope, pour le béton. Le modèle est construit sur la base de la théorie de la thermodynamique des processus irréversibles où les critères d'endommagement sont formulés avec des expressions en déformation équivalente. Le modèle présenté permet la description du comportement dissymétrique du béton en traction et en compression. Il est à constaté que l'étendue des dégradations est en bon accord avec l'expérience. Le modèle est implémenté avec succès dans un code de calcul éléments finis. Nous avons également proposé une extension de ce modèle pour tenir compte des déformations anélastiques et des phénomènes de fatigues.

La modélisation par éléments finis d'un problème d'élasticité-endommageable, conduit à un système d'équations algébriques non-linéaires. La non-linéarité du comportement est totalement gouvernée par l'endommagement sans référence à la plasticité. L'endommagement est, à tout instant du processus, interprété comme une variation des caractéristiques mécaniques de la structure. La linéarisation de ces équations se fait par la méthode incrémentale pas à pas de Newton-Raphson.

Par la suite nous avons construit un nouveau modèle d'endommagement issue du modèle isotrope, capable de modéliser le caractère anisotrope et unilatéral des structures en béton.

Dans ce nouveau modèle, nous considérons que le béton présente deux modes d'endommagement possibles : un endommagement par extension "sphérique" et un endommagement par déformation "déviatorique". On postule également que l'endommagement est non seulement responsable des modifications du comportement élastique mais aussi générateur des déformations permanentes : Une analyse de la partie anélastique de la déformation est aussi incorporée dans ce nouveau modèle. L'évolution des déformations anélastiques dépend de l'état de dégradation et d'hétérogénéité du matériau. L'endommagement "sphérique" est activé si et seulement s'il y a extension. A partir de ces considérations, on peut alors traduire l'effet unilatéral, conséquence de l'anisotropie induite due à la microfissuration, (refermeture des fissures en compression) en activant les deux modes d'endommagement en traction et en désactivant la contribution du mode d'extension en compression. L'état de traction ou de compression pourra être détecté en fonction de l'état sphérique de déformation.

Le modèle est validé en comparaison avec les résultats expérimentaux et analytiques trouvés dans la littérature. Une analyse du modèle au niveau de l'élément de volume a permis d'apprécier sa capacité à restituer certains phénomènes observés expérimentalement. Le modèle pourra être adapté aux différents matériaux hétérogènes fragiles par exemple des roches ou d'autres matériaux à base de liant hydraulique. Une procédure d'identification des différents paramètres du modèle reste à développer pour s'assurer d'une bonne reproductibilité du modèle.

Toutefois nous avons dû mettre en évidence l'un des inconvénients majeur de ce type d'approche qui est l'effet de l'échelle sur la réponse de la structure et sur la zone endommagée. Le modèle local d'endommagement présenté dans ce chapitre permet de reproduire le comportement adoucissant du béton, observé expérimentalement. L'adoucissement, qui se traduit par le fait que la matrice tangente cesse d'être définie positive, reflète au niveau macroscopique l'apparition de microfissures au sein du matériau. La contrainte pour un matériau adoucissant diminue alors graduellement à mesure que les microfissures se développent pour finalement atteindre zéro quand celles-ci coalescent en une macro-fissure visible. En conséquence, les solutions des équations différentielles qui gouvernent le comportement du matériau perdent leur unicité (**Bazant 1976, Lasry & Belytchko 1988, Benallal & al. 1991**).

Pour faire part de ces problèmes, il faut reprendre les formulations initiées en approche locale et y introduire des formulations non locales (approche non locale), afin de

mieux appréhender le comportement des matériaux. Relativement à cet aspect du problème, la littérature actualisée met en évidence de nombreuses tentatives de modélisation expérimentale, numérique et mathématique. Ces différents problèmes liés à la discrétisation spatiale de la structure (origine, instabilités, problèmes de dépendance au maillage) sont l'objectif essentiel du chapitre 4.

# Chapitre 4

## Instabilités, dépendance au maillage et formulations non-locales

### Introduction

Le modèle d'endommagement local permet de reproduire le comportement adoucissant du béton, observé expérimentalement. L'adoucissement, qui se traduit par le fait que la matrice tangente cesse d'être définie positive. En conséquence, les solutions des équations différentielles qui gouvernent le comportement du matériau perdent leur unicité (**Bazant 1976, Lasry & al. 1988, Benallal & al. 1991**). On distingue le cas statique où ces équations perdent leur ellipticité et deviennent hyperboliques et le cas dynamique où elles deviennent elliptiques. Le problème à résoudre devient alors mal posé. Les résultats des simulations numériques dépendent de la discrétisation.

De nombreux travaux présentent des formulations variées selon les auteurs, physiques pour certains, phénoménologiques pour d'autres, et enfin mathématique. Elles permettent ainsi de prendre en compte un effet de voisinage pour corriger la dépendance numérique de la solution à la discrétisation spatiale. Des formulations basées sur la relaxation de l'énergie potentielle (**Francfort & Marigo 1993, Lorentz 1994**), des méthodes basées sur l'introduction de nouveaux degrés de liberté (**Markov 1995, Pijaidier-Cabot & Burlion 1996, Borst 1991, Steinmann 1995**), et d'autres prennent en compte un effet de voisinage spatiale, soit via un opérateur de délocalisation (modèles non locaux), soit en introduisant des gradients de

variables d'état (théories à gradients), (Saanouni 1988, Bazant & Pijaudier-Cabot 1988, Leblond & al. 1994, Pijaudier-Cabot 1995, Peerlings & al. 1995, Huerta & Pijaudier-Cabot 1994, Germain 1973, Aifantis 1987, Triantafyllidis & Aifantis 1986, Muhlhaus & Aifantis 1991, Borst & Muhlhaus 1992).

Le présent chapitre est en grande partie dédié à ce phénomène, son origine, sa mise en évidence numérique et surtout aux moyens de s'affranchir des difficultés qu'il engendre. On présentera les différents "limiteurs de localisation" également appelés méthodes de régularisation.

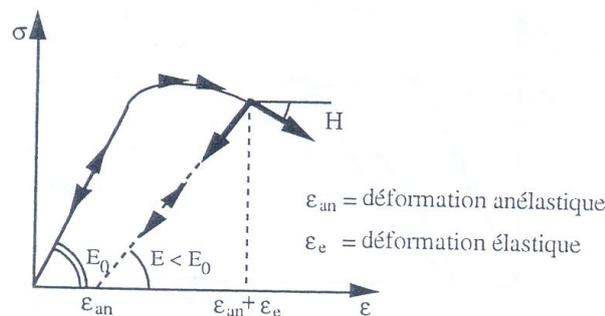
## 4.1 Matériau élastique endommageable et localisation

### 4.1.1 Notion de matériau endommageable

Les matériaux endommageables subissent au cours d'un chargement des dégradations conduisant à la détérioration de leur rigidité élastique. Ceci se traduit par l'apparition d'une phase d'écroutissage positif pouvant aller jusqu'à un écroutissage négatif.

### 4.1.2 Schématisation usuelle

Le comportement uniaxial des matériaux endommageables peut être schématisé comme montré sur la figure 4.1 :



**Figure 4.1:** Décomposition de la déformation (Joussemet 1997)

La loi de comportement d'un tel matériau s'écrit:

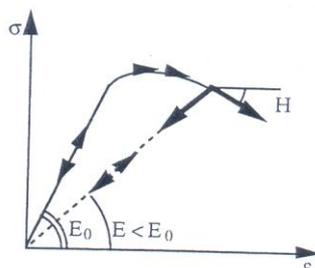
$$\dot{\sigma} = L : \dot{\epsilon} \quad (4.1)$$

$$\text{avec } L = \begin{cases} E & \text{en charge/décharge élastique} \\ H & \text{en charge dissipative} \end{cases}$$

$\dot{\sigma}$  et  $\dot{\epsilon}$  représentent respectivement les vitesses de contrainte et de déformation, E et H sont les modules sécant et tangent courant.

- **Idéalisation du comportement élastique endommageable**

Les interactions (couplages) entre les différents mécanismes dissipatifs responsables du comportement mécanique des matériaux réels sont extrêmement complexes. Pour cette raison, nous ne considérons pas les effets de frottement ( $\varepsilon^{in} = 0$ ) ce qui permet de proposer une modélisation mécanique du type élastique endommageable (Figure 4.2)



**Figure 4.2:** Idéalisation du comportement d'un matériau élastique-endommageable (Jousset 1997).

- **Hypothèse des petites perturbations**

L'expérience montre que, la déformabilité des matériaux justifie, dans la plupart des cas, l'utilisation de l'hypothèse de petites perturbations (hpp). Les phénomènes de bifurcation (non unicité de la solution) sont donc dus aux non-linéarités du comportement du matériau et non aux non-linéarités géométriques.

## 4.2 Origine du phénomène de localisation

### 4.2.1 Le phénomène de localisation : un fait expérimental

Afin d'identifier les lois de comportement des matériaux, on cherche à réaliser des essais sur éprouvettes lisses (tels que les essais en déformations planes ou sur éprouvettes axisymétriques) qui permettent d'avoir un champ de déformation homogène : on obtient ainsi la branche fondamentale. Il est alors possible de déduire la loi de comportement des résultats expérimentaux. Pour une large classe de matériaux (dont les matériaux endommageables), on peut observer, pour des essais contrôlés grâce à la mesure de la distance entre plateaux de chargement, que la courbe effort-déplacement passe par un maximum (pic d'effort) puis décroît. La partie descendante de cette courbe est appelée branche radoucissante (Figure 4.1)

Cependant, un mode bifurqué, dit localisé, se substitue systématiquement à la branche fondamentale : une ou plusieurs bandes étroites de déformation intenses sont observées, ces

bandes n'étant pas obligatoirement actives en même temps. Le champ de déformation n'est plus homogène dans l'échantillon et la loi de comportement (contrainte-déformation) ne peut plus être directement déduite des résultats expérimentaux globaux (force-déplacement) obtenus.

Ces bandes s'initient au cœur du matériau et le lieu d'initiation des bandes est très sensible à la présence des hétérogénéités et des imperfections du matériau. La charge de localisation y est beaucoup moins sensible. On constate que l'orientation et la largeur des bandes sont fonction des caractéristiques de l'échantillon (élancement, taille des grains et agrégats...) (Tableau 4.1) (**Mokni 1992**) et des conditions d'essai (essai drainé ou non, pression de confinement,...). Rien de simple ne permet de modéliser les phénomènes mis en jeu dans les bandes de localisation. Ainsi, certains auteurs considèrent les bandes de cisaillement comme des lignes de localisation en tout point tangent aux facettes sur lesquelles le critère de Coulomb est vérifié. Pour Roscoe, les surfaces de rupture sont des surfaces d'extension nulle, i.e. la déformation est nulle dans la direction de la bande (**Roscoe 1970**). Les observations expérimentales montrent que les orientations de Coulomb et Roscoe (**Roscoe 1970**) constituent les bornes inférieures et supérieures de ces orientations (**Desrues 1984**).

De plus, pour des échantillons présentant les mêmes caractéristiques, la réponse globale de l'échantillon après localisation dépend des conditions aux limites appliquées (**Benaija & Co 1990**).

Paramètres variables	Caractéristiques mesurées			
	$\varepsilon_{pic}$	Orientation de la bande $\Theta$	Épaisseur de la bande E	E/ $\Theta$
h/l	↗	↗	↗	↗
h.l	↗	↗	↗	↗
$\varnothing$ des grains	↗	↗	↗	↘
$\rho$ compacité	↗	↗	↗	↗

**Tableau 4.1:** Tableau qualitatif récapitulatif des résultats obtenus sur sable en contraintes plane, avec h = hauteur de l'échantillon et l= largeur de l'échantillon (**Mokni 1992**).

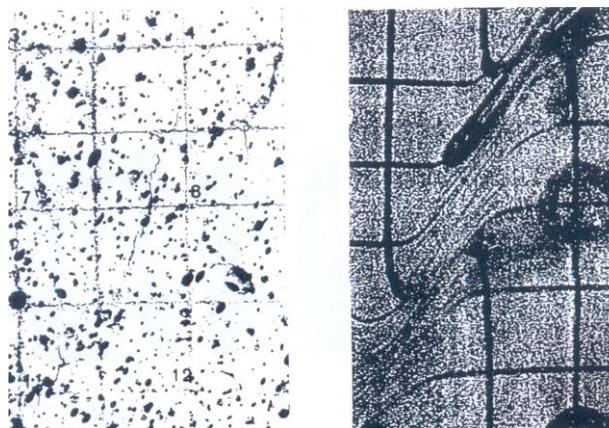
Selon la nature du matériau, on observe soit des bandes de cisaillement (matériaux de type granulaires (**Desrues 1983, Desrues & Chambon 1985, Mokni 1992**) et métaux (**Rey & Viaris de Lesegno 1994**)), soit des macro-fissures (matériaux ductiles: grès, bétons,....

(**Torrenti & Co 1990, Berthaud 1991, Benaija1992**)) (Figure 4.3). En géologie, ces phénomènes correspondent aux glissements de terrain pour les bandes de cisaillement et certaines failles dans les massifs rocheux peuvent être interprétées comme ces macro-fissures de localisation.



**Figure 4.3:** Essai de compression biaxial sur sable (**Desrues & Chambon1985**).

Les méthodes expérimentales sont maintenant très efficaces pour la détection de l'initiation de la localisation lors d'essais sur éprouvettes bidimensionnelles (méthode de stéréophotogrammétrie de faux relief (**Desrues 1983, Benaija1992, Mokni 1992**) et de speckle (**Berthaud 1991**)) (Figure 4.4). Des méthodes de détection dans la masse, telle que la méthode de tomodensitométrie (**Mokni1992**), sont mises en œuvre pour des essais pseudo 3-D sur des éprouvettes axisymétriques. Les phénomènes observés sont, dans certains de ces cas, plus complexes qu'une simple bande traversante (pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra se reporter aux travaux de Mokni (**Mokni 1992**)). Ces méthodes font encore l'objet d'études.



**Figure 4.4:** Phénomène de localisation dans les bétons, grès et les sables (**Berthaud 1991**).

## 4.2.2 Perte d'ellipticité des équations en vitesse

### 4.2.2.1 Localisation : Mise en évidence avec un système constitué de deux ressorts en série

Il est possible de rendre compte du problème de localisation par l'étude, de deux ressorts en série (Figure 4.5) (Billardon 1989). Chaque ressort, de longueur  $\frac{L}{N}$  (assemblage de  $N$  ressorts montés en série et soumis à un effort de traction), obéit à une loi de comportement de type élastique fragile. Disons simplement que l'état du matériau est décrit par deux variables, la déformation  $\varepsilon$  et l'endommagement caractérisé par une variable scalaire  $D$  qui varie de manière croissante entre 0 (matériau sain) et 1 (matériau totalement endommagé, à la rigidité résiduelle nulle). La modélisation d'une phase d'écroutissage négatif est source de problèmes (Figure 4.6).

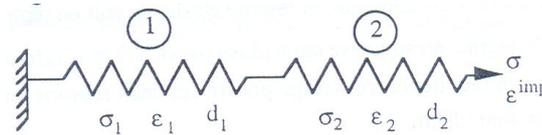


Figure 4.5: Système de deux ressorts identiques en série (Billardon 1989).

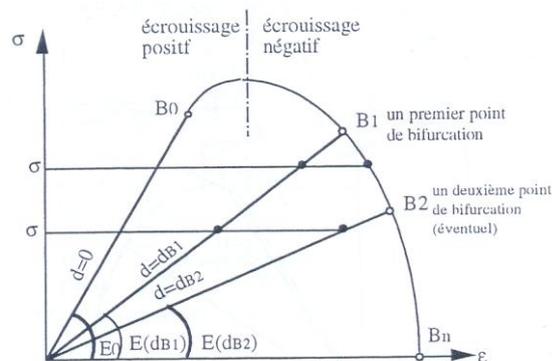


Figure 4.6: Allure de la courbe ( $\sigma - \varepsilon$ ) d'un ressort avec les points de bifurcations (éventuels)  $B_1$  et  $B_2$  (Billardon 1989).

On considère le système de deux ressorts identiques élastiques endommageables en série, pilotés en déplacement. La loi de comportement incrémentale d'un ressort s'écrit:

$$\dot{\sigma} = (d) : \dot{\varepsilon} \quad (4.2)$$

$$\text{avec } L(d) = \begin{cases} E(d) & \text{en charge/ décharge élastique} \\ H(d) & \text{en charge dissipative endommageante} \end{cases}$$

L'équation d'équilibre du système :

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \quad (4.3)$$

et l'équation de compatibilité géométrique :

$$\varepsilon^{imp} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (4.4)$$

#### • Ecrouissage positif

Tant que l'on est en phase d'écrouissage positif, il n'y a pas de problème. On pilote la déformation croissante, soit  $\varepsilon^{imp} \geq 0$ , et on suppose que le seuil d'irréversibilité est atteint (Figure 4.7).

Pour les régimes élastiques et endommageables en phase d'écrouissage positif, on a :

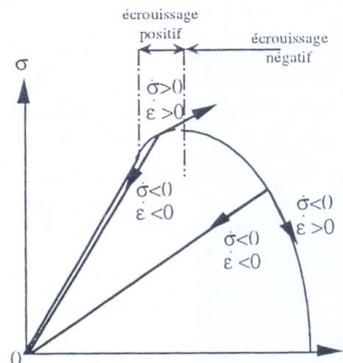
$$\text{décharge élastique : } \quad \dot{\varepsilon} \leq 0 \quad \dot{\sigma} \leq 0 \quad \text{avec } \dot{\sigma} = E(d)\dot{\varepsilon} \quad (4.5)$$

$$\text{surcharge endommageante : } \quad \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad \dot{\sigma} \geq 0 \quad \text{avec } \dot{\sigma} = H(d)\dot{\varepsilon} \quad (4.6)$$

Or d'après l'équation (4.3) écrite de manière incrémentale :  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2$ , les deux ressorts sont soit en régime élastique, soit en régime endommageant et  $\dot{d}_1 = \dot{d}_2$ . Comme le régime élastique se caractérise par  $\dot{\sigma} \leq 0$  et  $\dot{\varepsilon} \leq 0$ , ceci contredit  $\varepsilon^{imp} \geq 0$ . En régime d'écrouissage positif, les deux ressorts sont en charge endommageable, et comme ils sont identiques :

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2 \quad \varepsilon^{imp} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad d = d_1 = d_2 \quad (4.7)$$

$$\dot{\sigma} = T\dot{\varepsilon}^{imp} \quad \text{avec } T(d) = \frac{H(d)}{2} \quad (4.8)$$



**Figure 4.7:** Caractérisation des taux de contrainte et de déformation en charge/décharge élastique et charge dissipative (Billardon 1989).

- **Ecrouissage négatif**

Pour les régimes élastiques en phase d'écrouissage négatif (Figure 4.7), on a :

$$\text{élastique :} \quad \dot{\varepsilon} \leq 0 \quad \dot{\sigma} \leq 0 \quad \text{avec} \quad \dot{\sigma} = E(d)\dot{\varepsilon} \quad (4.9)$$

$$\text{endommagement :} \quad \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad \dot{\sigma} \leq 0 \quad \text{avec} \quad \dot{\sigma} = H(d)\dot{\varepsilon} \quad (4.10)$$

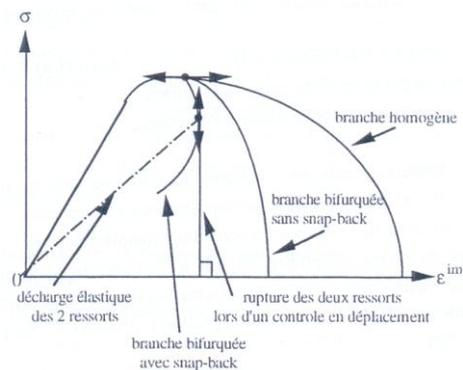
L'équation d'équilibre incrémentale ne permet plus de conclure sur le régime des deux ressorts. Elle n'interdit pas que l'un des ressorts décharge élastiquement (le 1 par exemple) alors que l'autre ressort continue à s'endommager :

$$\dot{\sigma} = E(d_1^*)\dot{\varepsilon}_1 = L(d_2)\dot{\varepsilon}_2 \leq 0 \quad (4.11)$$

$$\text{et} \quad \dot{\varepsilon}_1 \leq 0 \quad \dot{\varepsilon}_2 \geq 0 / \dot{\varepsilon}^{imp} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \geq 0 \quad \dot{\varepsilon}_2 \geq 0 \quad (4.12)$$

$$\dot{\sigma} = T\dot{\varepsilon}^{imp} \quad (4.13)$$

(La notation  $d^*$  signifie que l'endommagement n'évolue plus au cours de la décharge élastique). Au delà du pic en contrainte (caractérisé par  $L(d) = 0$ ), tous les points de la branche homogène sont susceptibles de voir développer une bifurcation. Sur cette branche bifurquée, selon l'expression de la loi, il peut encore survenir une bifurcation (caractérisée par  $T = \infty$ ) où les deux ressorts se déchargent élastiquement (snap-back), soit  $\dot{\varepsilon}_i \leq 0$  ce qui n'est pas compatible avec  $\dot{\varepsilon}^{imp} \geq 0$  : il y a rupture brutale des deux ressorts, comme montré sur la figure 4.8.



**Figure 4.8 :** Allure des réponses possibles du système de deux ressort pilotés à déformation imposée (**Billardon 1989**).

#### 4.2.2.2 Localisation : cas général

Pour une structure, le problème de décharge élastique de certaines régions de la structure est similaire au modèle simple étudié précédemment. Les difficultés correspondent à

la perte d'ellipticité des équations en vitesse du problème de la structure (dans le cas 1-D des deux ressorts en série, cette "perte d'ellipticité" coïncide avec le pic en contrainte).

L'opérateur tangent peut prendre les valeurs  $L = E$  ou  $L = H$ . Pour cette raison, il est plus facile de travailler avec le solide élastique de comparaison (ou solide incrémentalement linéaire de comparaison) pour le quel  $L = H$  uniquement. Ottosen et Runesson (**Ottosen & Runesson 1991**) ont montré que, si le problème élastique de comparaison est bien posé, alors il en est de même du problème incrémental réel. On étudie le problème incrémental de structure suivant :

$$\operatorname{div} \dot{\sigma} = -\dot{f} \quad \text{dans } \Omega \quad \dot{\sigma} \cdot n = \dot{T}^d \quad \text{sur } \partial_T \Omega \quad (4.14)$$

$$\dot{\sigma} = H \dot{\varepsilon} \quad \text{dans } \Omega \quad \dot{u} = \dot{u}^d \quad \text{sur } \partial_u \Omega \quad (4.15)$$

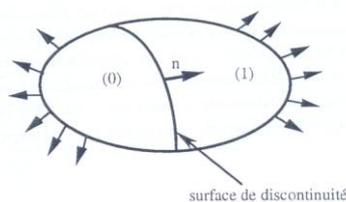
$$\dot{\varepsilon} = \nabla_s (\dot{u}) \quad (4.16)$$

Un problème est bien posé (**Benallal & Co. 1993**) s'il admet un nombre fini de solutions linéairement indépendantes, qui dépendent continûment des données. Ceci se traduit, pour le problème (élastique de comparaison), par les conditions suivantes:

- Ellipticité de l'opérateur H  $\Leftrightarrow \det(n.H.n) > 0 \quad \forall n / \|n\| = 1$
- Condition complémentaire à la surface
- Condition complémentaire de l'interface

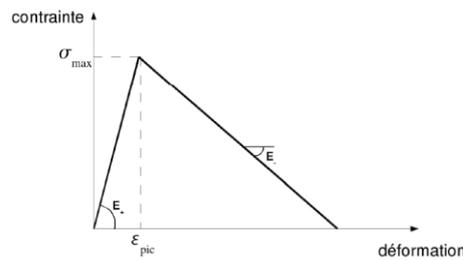
Les deux dernières conditions concernent des ondes de surface à la frontière ou aux interfaces (**Benallal & Co. 1989**). Elles peuvent être importantes dans certains cas où la condition d'ellipticité est vérifiée mais pas les conditions complémentaires.

Le critère de perte d'ellipticité  $\det(n.H.n) = 0$  exprime, en quasi-statique, la condition d'émergence d'un saut de vitesse de déformation à la traversée d'une surface localement plane de normale  $n$  (surface de discontinuité) (Figure 4.9) (**Rudnicki & Rice 1975, Hill & Hutchinson 1975, Rice 1976**).



**Figure 4.9** : Emergence d'une surface de discontinuité (**Joussemet 1997**).

En dynamique, c'est la caractère hyperbolique des équations du problème qui est perdu, lorsque la condition  $\det(n.H.n)=0$  est rencontré et qui rend le problème mal posé. Ceci s'interprète comme une direction d'émergence d'une onde stationnaire dans la direction  $n$  (**Hadamard 1903, Hill 1962**). On se place ici dans le cas d'un problème unidimensionnel (par exemple le cas d'une poutre en traction). On considère que le matériau est modélisé par un modèle adoucissant, par exemple un comportement bi-linéaire. La matrice tangente (ou de le cas 1D bilinéaire le module d'Young) prend deux valeurs :  $E+$  (positive) et  $E-$  (négative). Tant que  $e < e_{pic}$ , la vitesse est positive, il n'y a donc aucun problème, en revanche, lorsque  $e > e_{pic}$ , les ondes restent alors "confinées" au premier élément où le signe du module change (Figure 4.10). L'augmentation de la déformation n'est pas transmise aux éléments voisins, la déformation est donc localisée dans cet unique élément. Si on réduit la taille de cet élément, la déformation se localise alors dans une zone plus petite, qui tend vers 0 si l'on raffine à l'extrême le maillage.



**Figure 4.10** : Comportement bi-linéaire d'une poutre en traction (**Chambart 2009**).

En 3D et en quasi-statique, on montre (**Hill 1958**) que l'on perd l'unicité de la solution lorsque le tenseur du second ordre  $n_i L_{ijkl} n_l$  devient singulier c'est à dire lorsque :

$$\det(n_i L_{ijkl} n_l) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(nLn) = 0 \quad (4.17)$$

Le tenseur  $L_{ijkl}$  correspond à la rigidité tangente et est défini en dérivant la relation contrainte déformation:

$$\dot{\sigma}_{ij} = L_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad \text{ou} \quad \dot{\sigma} = L : \dot{\epsilon} \quad (4.18)$$

La perte d'unicité ne survient plus alors automatiquement au pic de contraintes.

La localisation des déformations a pour conséquence en monotone de faire tendre la dissipation à la rupture vers 0 quand on raffine le maillage.

La solution homogène est toujours solution du problème, la condition d'ellipticité est donc une condition suffisante de non-bifurcation en mode localisé. En général, on s'accorde à

penser que la perte d'ellipticité (condition ponctuelle) coïncide avec l'émergence d'une bande de localisation (réorganisation globale à l'échelle de la structure).

Abeyaratne et Triantafyllidis (**Abeyaratne & Triantafyllidis 1984**) étudient l'influence des cavités sur les propriétés de stabilité du matériau élastique. La matrice (saine) du matériau utilisé est stable dans le sens où elle conduit à un problème elliptique pour tout niveau de déformation. Le problème homogénéisé, par contre, peut présenter une perte d'ellipticité pour un niveau suffisant de déformation, la présence des cavités au sein de la matrice élastique est alors responsable de l'émergence d'un mode localisé.

## 4.3 Limites des modèles locaux

### 4.3.1 Aspects physiques

#### 4.3.1.1 Effet d'échelle

A petite échelle spatiale, les résultats prédits par les théories locales peuvent s'écarter des mesures expérimentales, écarts qui s'estompent à plus grandes échelle. Ainsi, Lakes (**Lakes 1995**) recense quelques observations :

- La charge limite de plaques trouées en graphite époxy dépend de la taille des trous,
- La distribution des déformations autour de cavités dans un matériau composite à fibres correspond bien aux prédictions pour de grandes cavités mais s'en écarte pour de petites cavités.
- Des expériences de torsion sur de petites poutres à section carrée constituées de matériaux osseux exhibent des contraintes au coin de la section, en contradiction avec les prédictions.

Dans chacun de ces cas, une microstructure sous jacente au point matériel semble interagir avec les sollicitations qui s'exercent à la même échelle spatiale. Par ailleurs, pour des matériaux métalliques Fleck (**Fleck & al. 1994**) a également mis en évidence des effets d'échelle par des essais de torsion sur des fibres de cuivre dont le diamètre varie entre 12 et 170 $\mu\text{m}$ , effet d'échelle que ne laissait pas présager une analyse dimensionnelle du problème. La description du comportement du matériau par une loi de plasticité usuelle ignore l'existence d'une longueur caractéristique liée ici aux propriétés géométriques des dislocations. Ainsi en présence de variations significatives des champs mécaniques à petite échelle (forts gradients), les théories locales ne suffisent plus à décrire quantitativement la réponse du matériau.

#### 4.3.1.2 Dégradation mécaniques et localisation des déformations

Sous fortes sollicitations, les propriétés mécaniques d'un matériau peuvent se dégrader. Ces dégradations se manifestent à l'échelle du point matériel sous des formes diverses comme en témoigne l'essai de traction d'un béton représenté sur la figure 1.14 (voir Chapitre 1). En particulier, on peut relever quatre types de phénomènes au cours du chargement :

- Perte de rigidité du matériau,
- Apparition de déformation irréversible,
- Présence de boucles hystérétiques lors des cycles traction compression,
- Diminution de la limite d'élasticité.

La modélisation de ces phénomènes a fait l'objet d'un grand nombre de travaux, le lecteur peut consulter par exemple (**Lemaitre 1988, Nedjar2001, Comi 2000**) qui proposent des synthèses sur les modèles utilisés. De manière générale, la perte de rigidité est modélisée par une diminution des propriétés élastiques, les déformations irréversibles relèvent des théories de la plasticité, les boucles d'hystérésis résultent de l'ouverture et la refermeture de microfissures alors que la diminution de la limite d'élasticité exprime une réduction du domaine de réversibilité dans l'espace des contraintes provoqué par un adoucissement du matériau. Or lorsqu'on sollicite une éprouvette constituée d'un matériau adoucissant, on observe fréquemment une bifurcation d'un état homogène vers un état hétérogène, au-delà d'une certaine valeur du chargement. Ce nouvel état présente des bandes d'épaisseur faible, appelées bandes de cisaillement ou de localisation, dans lesquelles se concentre la déformation (Figure 4.3). De manière générale, elles se forment dans les zones de fortes densités de micro-hétérogénéités du matériau.

Les dimensions des bandes de localisation et les mécanismes physiques qui en sont à l'origine diffèrent d'un matériau à l'autre (**Darve & al. 1995**). Pour illustrer cette diversité, nous pouvons citer:

- ***Les matériaux granulaires (sables, poudres,...)***

Ils sont constitués de réarrangement de grain. Ils se forment dans ces matériaux des bandes de localisation. De nombreux paramètres interviennent dans la formation de ces bandes : la porosité, la pression de confinement, les tailles des grains et de l'échantillon.

- ***Les matériaux quasi-fragiles (roches, bétons,...)***

Les bandes de localisation y sont le fait d'une forte concentration de microfissures. Là encore d'après Berthaud (**Berthaud & al. 1994**), la largeur des bandes dépend de la taille des

agrégats (de l'ordre de 2 à 10 diamètres d'agrégats). Des auteurs ont aussi étudié l'orientation des microfissures et concluent qu'en dehors des bandes de localisation, les microfissures s'orientent dans des directions privilégiées selon la direction du chargement. En revanche, dans les bandes, on observe une anisotropie des fissures avec tout de même une tendance à se développer dans la direction de la bande.

- **Les métaux**

Dans les polycristaux, les bandes de cisaillement sont le siège d'une déformation plastique importante, concomitante avec une nucléation et une coalescence de cavités très marquées. Même dans un monocristal (**Rey & al. 1994**), on assiste à la formation de bandes de localisation à l'échelle macroscopique (épaisseur de l'ordre du millimètre) dans lesquelles le réseau cristallin est nettement déformé, ce phénomène résulte en fait de l'accumulation de bandes microscopiques (épaisseur de l'ordre du micron), appelées bandes de Luders. Là encore, la description fine de ces mécanismes nécessite l'introduction dans le modèle une nouvelle échelle dont découle la largeur des bandes de localisation. Comme pour les effets d'échelle, les modèles locaux n'introduisent pas de telles longueurs caractéristiques et ne peuvent donc pas décrire la discrétisation des champs mécaniques au sein d'une bande de localisation. C'est d'autant plus problématique qu'ils prédisent une énergie dissipée nulle au sein de ces bandes de localisation (**Bazant 1984**). Ce résultat est physiquement inacceptable : une pièce pourrait se rompre sans consommer d'énergie.

### 4.3.2 Aspects numériques

Comme nous venons de le voir, les modèles en description locale ne suffisent pas pour décrire un certain nombre de phénomènes physiques. Sur le plan de la mise en œuvre numérique, cela peut avoir des conséquences fâcheuses.

#### 4.3.2.1 Critère de localisation et approche par analyse de perte de stabilité d'une perturbation linéaire

D'un point de vue modélisation, il est maintenant largement admis depuis les travaux désormais classique de Rice (**Rice 1976**), que pour une large classe de modèles de comportement non visqueux, la perte d'ellipticité des équations d'équilibre continu en vitesses, constitue un critère de bifurcation en mode localisé. Cependant, si le critère de perte d'ellipticité permet d'avoir accès, localement, à l'orientation de la bande de localisation grâce à la connaissance de la normale  $n$  sur une surface localement plane, sa largeur reste

indéterminée. Une méthode courante utilisée pour illustrer cette propriété des modèles "usuels", est l'approche par analyse de perte de stabilité d'une perturbation linéaire. L'état initial étant supposé homogène, la solution homogène est linéairement perturbé par un terme tel que :

(4.19)

Avec:  $\delta$  module de la perturbation  
 $n$  la normale locale à la bande de localisation  
 $\omega$  la pulsation caractéristique de la perturbation

On cherche alors la condition qui permettrait à une telle perturbation de se développer (maximisation  $\omega$ , solutions qui vont effectivement croître dans le temps). Dans cette approche, la variation dans le temps de  $\delta$  est supposée grande, si  $\delta$  représente le nouvel état mécanique perturbé, on aura  $\delta$  et

Après quelques manipulations sur l'équation d'équilibre en vitesse de l'état perturbé, on obtient un critère de localisation (bifurcation continue) :

(4.20)

On retrouve la formulation du critère usuel. Ceci permet d'avoir accès à l'orientation de la bande de localisation, mais la période spatiale de la perturbation (largeur de la bande de localisation) reste indéterminé dans cette approche, en particulier elle peut être nulle. Rien n'interdit à la bande de localisation d'avoir une largeur nulle source de problèmes.

L'intérêt essentiel de cette approche réside dans le fait qu'elle est extensible à d'autres types de comportements indépendants du temps.

#### 4.3.2.2 Conséquences numérique de la localisation

Dés que le critère de localisation est satisfait, la déformation devient discontinue. On ne sait pas a priori où sera satisfait ce critère. De ce fait, les éléments finis usuels isoparamétriques (qui imposent la continuité à l'intérieur des éléments) sont incapable de rendre compte d'une telle discontinuité, des problèmes de convergences lors du calcul éléments finis apparaissent. Après la localisation, une faible perturbation numérique suffit, alors, pour obtenir des résultats complètement différents. Ceci s'explique, en partie, par la "non-objectivité" de la réponse éléments finis.

Après localisation:

- On constate la concentration de valeurs élevées de la déformation dans une bande dont la taille correspond à la taille de l'élément fini, ceci entraîne le paradoxe d'une rupture à énergie nulle lorsqu'on raffine le maillage, la taille de la bande étant conditionné par la taille de l'élément fini,
- La discrétisation par éléments finis tend à privilégier certains modes de rupture, ainsi, la position et l'orientation de la bande changent avec l'orientation du maillage.

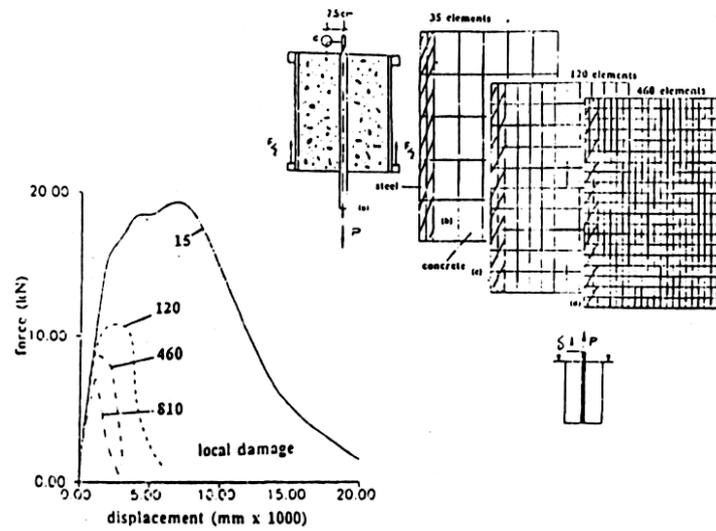
En conclusion, le critère de localisation apparaît comme la limite de fiabilité des calculs par éléments finis "usuels".

### ***Sensibilité au maillage***

La conséquence du phénomène de localisation sur le plan numérique est immédiate. En effet, les mêmes symptômes que pour le système de ressorts apparaissent lorsqu'on maille une barre par éléments finis, les instabilités numériques et les erreurs d'arrondis jouant un rôle comparable à celui des micro-hétérogénéités du matériau. Ainsi, toute la déformation se localise dans un seul élément. En raffinant le maillage, on modifie la réponse globale de la structure (qui dépend explicitement du nombre d'éléments). En outre l'énergie dissipée pour rompre la barre s'élève à :

$$E_{rupt} = kL/N \quad (4.21)$$

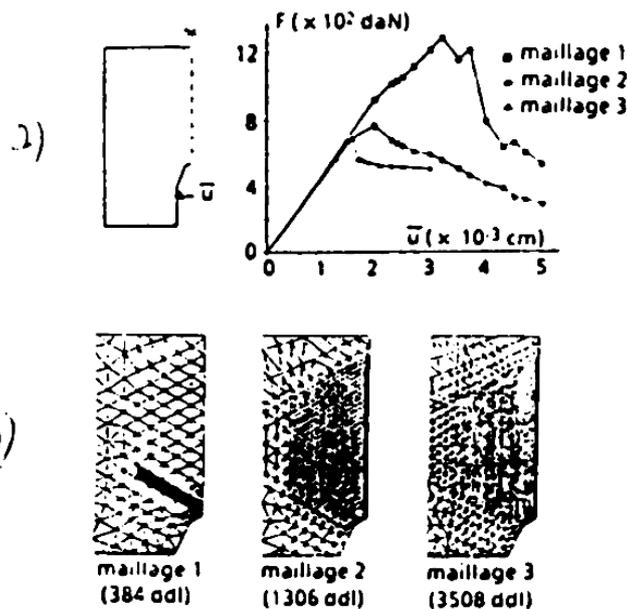
avec  $k$  le seuil du domaine de réversibilité égal à la densité dissipé par le point matériel totalement endommagé (caractéristique du matériau), Qui tend vers zéro quand on raffine le maillage : à la limite, la barre se rompt sans consommer d'énergie, comme précédemment. Autant dire que les résultats obtenus numériquement ne sont pas représentatifs de la réponse réelle d'une structure. En effet la solution de calcul dépend pathologiquement de la taille des éléments, mais aussi plus généralement de leur forme, de leur orientation, du degré d'interpolation. Comme le montrent les résultats de la figure 4.11 présentés dans Pijaudier-Cabot (**Pijaudier-Cabot & al. 1991**).



**Figure 4.11:** Essai d'arrachement sur éprouvette en béton.

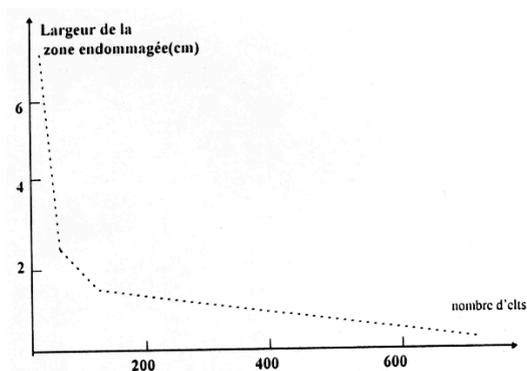
Effet du raffinement du maillage (Pijadier-Cabot & al. 1991).

Les travaux de Saouridis (Saouridis 1988) sur une éprouvette entaillée avec trois maillages différents illustrent bien ce phénomène. Avant le pic, les courbes force-déplacement se superposent parfaitement. A partir du pic, les résultats sont très différents, (Figure 4.12-a) et quand le maillage est raffiné (voir Figure 4.12-b) l'épaisseur de la fissure diminue également, ce qui va à l'encontre des résultats expérimentaux (Saouridis 1988).



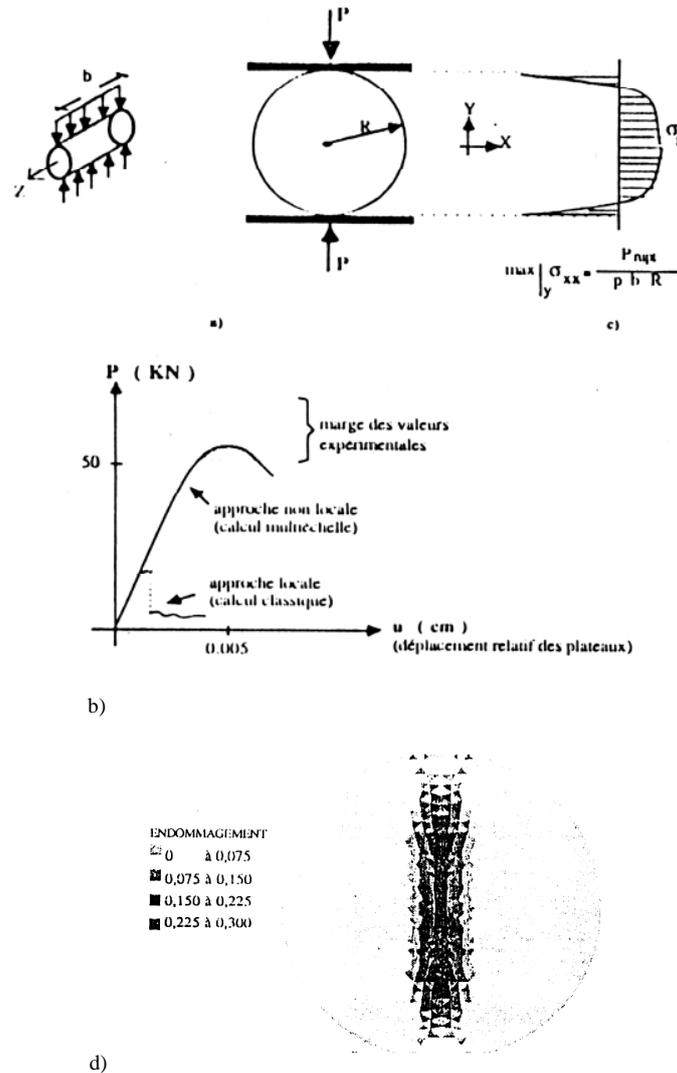
**Figure 4.12 :** a) Courbes force déplacement d'une éprouvette entaillée ; b) évolution de la zone endommagée pour les trois maillages différents (Saouridis 1988).

Nous présentons également sur la figure 4.11, le résultat de simulation de l'arrachement d'une armature d'un cylindre de béton. La figure montre les maillages utilisés pour un calcul axisymétrique. Dans cet essai d'arrachement, un effort de traction est appliqué à l'armature et le bloc de béton est maintenu immobile à sa périphérie. L'interface acier béton est considérée comme parfaite. Les courbes effort/déplacement sont très différentes selon les maillages utilisés. Dans cet essai, l'endommagement du béton est concentré exclusivement au voisinage de l'armature. Il est intéressant de voir quelle est l'épaisseur de la zone endommagée autour de l'armature. La figure 4.13 montre la variation de l'épaisseur minimale de cette zone en fonction du nombre d'éléments du maillage. Cette zone tend vers zéro. C'est le maillage qui contrôle la taille de la zone de localisation de l'endommagement (**Pijaudier-Cabot & al. 1991**). Récemment Sornin (**Sornin 2007**) a fait une synthèse sur la sensibilité des modèles locaux aux différents paramètres.



**Figure 4.13** : Essai d'arrachement sur éprouvette en béton. Influence du maillage sur l'épaisseur de la bande de béton endommagée autour de l'armature (**Pijaudier-Cabot & al. 1991**).

Un autre exemple significatif est celui de l'essai "Brésilien" (ou l'essai de fendage), schématisé sur la figure 4.14, cet essai consiste en un chargement en compression d'une éprouvette en béton. Les résultats de la simulation montrent une initiation de la fissuration directement sous la charge et une rupture par écrasement de cette zone fortement comprimée. Ce mode de rupture est incompatible avec les données expérimentales (rupture par traction en demi coquilles), notons aussi que le calcul sous estime nettement la résistance ultime de l'éprouvette comme s'est présenté sur la figure 4.14 (**Davenne & al. 1989**).

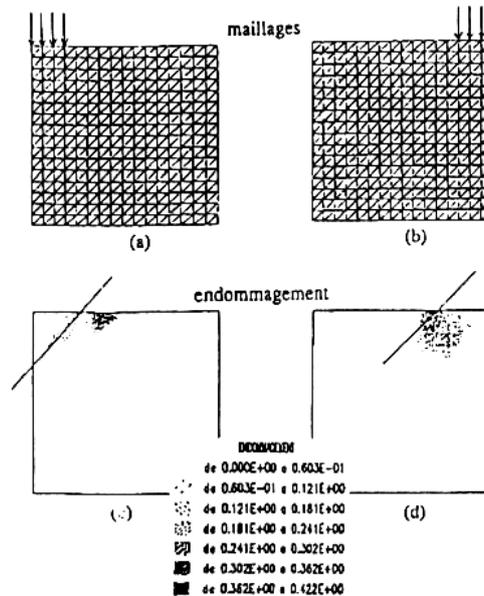


**Figure 4.14:** Essai Brésilien. a) Schéma de l'essai, b) Comparaison des différentes approches de calcul, c) Répartition des contraintes en élasticité d) Etat de l'endommagement peu avant la rupture (Davenne & al. 1989).

### Effet d'alignement

En plus de la discrétisation, il existe une autre limitation de ces modèles en approche locale qui est l'effet d'alignement. Les résultats précédents montrent que la taille des éléments du maillage a une importance primordiale. On remarque aussi que la discrétisation en éléments finis tend à privilégier certains modes de rupture. La figure 4.15 montre un exemple typique. Il s'agit d'un bloc de béton sollicité en compression excentrée. Les deux maillages utilisés contiennent des directions privilégiées qui influencent les modes d'endommagement. La distribution du dommage montrée sur la figure 4.15-c, correspond à la solution attendue du problème. Au même pas de chargement, la distribution d'endommagement obtenue avec le

second maillage (Figure 4.15-d) est différente. Celle ci a été biaisée par le maillage conduisant à la formation des bandes de cisaillement dans l'une des directions privilégiées du maillage (**Pijaudier-Cabot & al. 1993**).



**Figure 4.15** : Essai de compression excentrée - effet de l'alignement du maillage sur l'orientation des bandes d'endommagement (**Pijaudier-Cabot & al. 1993**).

### *Sensibilité à la discrétisation temporelle pour des matériaux adoucissants et/ou visqueux*

La présence d'effets visqueux dans une loi de comportement adoucissante a été examinée entre autres par Needleman (**Needleman 1988**). Dans le cas de la loi de type élastique fragile, on peut rendre compte de la viscosité en remplaçant par exemple la condition de cohérence par l'équation d'évolution suivante :

$$-\quad (4.22)$$

$\eta$  viscosité (caractéristique du matériau)

Partie positive de " " (crochets de Macaulay).

Notons que cette forme d'équation d'évolution est similaire à la régularisation mathématique des équations de la plasticité proposée par Duvaut (**Duvaut & al. 1972**). Lorsque " $\eta$ " tend vers zéro, on retrouve le modèle de comportement non visqueux. Grâce à l'introduction de la viscosité, les résultats sont stables par rapport au maillage, à condition

qu'il soit suffisamment raffiné pour décrire convenablement de fines bandes de localisation. Mais c'est alors la question de la discrétisation en temps qui devient cruciale.

### *Schéma explicite*

Dans ce cas une discrétisation très fine en temps est nécessaire (**Pitman 1995**). Plus inquiétant, les travaux de Cherukuri (**Cherukuri & al. 1995**) indique que la condition nécessaire de stabilité de Neumann, qui découle d'une analyse linéaire du problème est loin d'être suffisante. Pour obtenir des résultats convenables, ces auteurs ont dû employer des pas de temps 500 fois plus petits que ceux prescrits par cette condition de stabilité.

### *Schéma implicite*

Contrairement aux résultats habituels, la stabilité de ce schéma n'est pas inconditionnelle mais dépend de la taille des pas de temps. Simo (**Simo 1988**) montre que cette taille doit être inférieure à une valeur critique, indépendante de la discrétisation en espace, mais qui tend vers zéro avec la viscosité.

## 4.3.3 Aspects mathématiques

L'emploi de modèles locaux pour décrire la formation de bandes de localisation se heurte à des difficultés dans la mise en œuvre numérique qui trouvent leur origine, non dans une quelconque défiance de l'approximation par éléments finis mais dans les propriétés mathématiques du système d'équations qui régit le problème continu lui-même : Ce dernier est mal posé et une analyse s'impose. Rappelons qu'un problème est dit bien posé lorsqu'il admet un nombre fini de solutions, linéairement indépendantes et qui dépendent continûment des données. En fait, obtenir des conditions pour assurer le caractère "bien posé" du problème dans toute sa généralité est difficile. C'est pourquoi on se limite à l'examen du problème en vitesse. Cependant une difficulté subsiste : l'incrément de contrainte est une fonction non linéaire de l'incrément de déformation . La théorie de Hill justifie dans le cadre des modèles associés la modélisation du comportement réel du matériau par une loi tangente à la branche dissipative pour lequel (H est l'opérateur tangent pour le comportement dissipatif). On parle alors de solide linéaire de comparaison. Si le problème qui en résulte est bien posé, alors il en est de même du problème réel. Le lecteur peut consulter les travaux de Benallal (**Benallal & al. 1993**) pour une synthèse détaillée du problème.

Le problème est bien posé s'il satisfait trois conditions :

- (i) une condition d'ellipticité de l'opérateur  $H$ ,
- (ii) une condition complémentaire de bord,
- (iii) une condition complémentaire d'interface.

On laissera les deux dernières conditions dans l'ombre, précisant simplement qu'elles concernent respectivement l'apparition éventuelle d'ondes de surface stationnaires (onde de Rayleigh) sur les bords (ii) ou les interfaces (iii), c'est-à-dire les surfaces de discontinuités de l'opérateur  $H$ .

Par ailleurs, cette condition d'ellipticité permet également de constater que l'adoucissement n'est pas un phénomène nécessaire à la localisation. En effet, des lois de comportement non associées, ne présentant pas d'adoucissement dans leurs formulation, peuvent également y conduire, et ce en l'absence d'adoucissement (**Benallal & al. 1994**).

Finalement, si l'on omet les conditions complémentaires de bord et d'interface, la condition d'ellipticité nous garantit que le problème est bien posé. Donc, les résultats numériques obtenus par éléments finis sont représentatifs de la réponse réelle de la structure, à condition de prendre garde à d'éventuelles bifurcations. En revanche, lorsque la condition d'ellipticité n'est plus assurée, des bandes de localisation mal décrites par le modèle local peuvent apparaître, remettant en cause la confiance que l'on peut accorder aux résultats numériques.

Notons d'ailleurs que dans cet esprit certains auteurs comme **Billardon (Bilardon & al. 1989)** proposent d'employer cette condition mathématique comme critère d'amorçage ; la direction de localisation étant alors censée fournir la direction de fissuration. Une telle approche paraît cependant hasardeuse pour deux raisons : D'une part, des observations expérimentales dans les métaux indiquent que l'orientation des microfissures (qui correspondrait à la direction des bandes de localisation) ne coïncide pas nécessairement avec celle de la fissure macroscopique. D'autre part, l'initiation d'une bande de localisation microscopique n'est pas nécessairement concomitante à l'amorçage d'une zone endommagée macroscopique (**Li & al. 1994**). En fait, le développement de ces zones semble relever davantage d'effets de structures (singularités, redistribution des champs mécaniques, instabilités structurales) que de considérations purement locales.

## 4.4 Traitement du problème de localisation - Trois orientations possibles

Dans la littérature, on peut distinguer, de manière assez schématique, trois grandes tendances dans le traitement du problème de localisation :

- Celle mettant en œuvre des méthodes mathématiques ou numériques spécifiques, sans modifications des lois de comportement.
- Une deuxième approche consiste, cette fois, à apporter des modifications aux lois de comportement.
- La troisième et dernière approche beaucoup plus fondamentale. Non seulement la nature des modèles est remise en cause, mais également la notion de critère énergétique de sélection des solutions

### 4.4.1 Méthodes numériques spécifiques

#### *Maillage adaptatif*

En pratique, si la zone de localisation n'est pas connue, ou se développe, la discrétisation en éléments finis impose un nombre prohibitif de degrés de liberté (**Ortiz & Quingley 1991**). Pour cette raison, on a recours à des méthodes de type maillage adaptatif, mais le problème de bifurcation reste entier

#### *Éléments finis spéciaux*

La localisation que l'on modélise par une discontinuité des vitesses de déformation n'est pas modélisable par éléments finis usuels. Cette incapacité des éléments fins à capturer la discontinuité des vitesses de déformation a mené certains auteurs à proposer différents éléments finis spéciaux pour modéliser la présence d'une solution localisée avec saut de la vitesse de la déformation. Les éléments spéciaux sont des éléments auxquels sont rajoutés des fonctions de forme afin de capter le mode localisé. La plus aboutie des méthodes est celle proposée par (**Simo & Co 1993**). Les calculs sont menés jusqu'à rupture. Les auteurs montrent qu'il n'y a pas de problème de convergence avec le raffinement du maillage. Cependant, la méthode ne permet que des pertes de rigidité sur des surfaces (discontinuité de localisation captées par l'élément) ce qui ne peut pas rendre compte de phénomène diffus. Cette méthode est en développement.

#### 4.4.2 Critères de sélection énergétique

Une méthode, se fondant sur des critères de sélection énergétique à été proposée par **(Francfort & Marigo 1993)**. Succinctement une solution d'un problème de structure est un point stationnaire de l'énergie potentielle ; elle est stable s'il s'agit d'un minimum. En présence d'un comportement adoucissant, l'énergie peut ne plus être semi-continue inférieure, ce qui remet en cause l'existence de solutions : on peut construire des champs d'énergie toujours plus basse mais qui ne convergent pas vers une solution du problème. Une technique couramment employée par les mathématiciens **(Dal Maso 1993)**), consiste alors à relaxer le problème, c'est-à-dire à remplacer l'énergie réel par son enveloppe semi-continue inférieure : ainsi les solutions du problème réel subsistent et les suites minimisâtes du problème réel convergent vers des solutions du problème relaxé.

- Elle impose de sévères restrictions à la loi de comportement locale : l'endommagement doit être de type fragile et brutal-partiel, c'est-à-dire que le matériau, à l'échelle microscopique, est soit sain, soit détérioré, et dans ce dernier cas, il possède encore une réserve de rigidité,
- sa mise en œuvre numérique est délicate dans des situations de déformations planes (isotropes) **(Lorentz 1994)**,
- elle se fonde sur un formalisme mathématique de haut niveau qui nuit à son appropriation par la communauté des mécaniciens.

En dépit de ces difficultés, il faut cependant remarquer que cette méthode qui repose sur des bases physiques (critère de stabilité, homogénéisation) permet, d'une part, de retrouver les solutions du problème local quand celui-ci est bien posé et d'autre part, d'assurer une indépendance vis-à-vis du maillage **(Lorentz 1994)**.

Marigo **(Marigo 1995)** propose une nouvelle approche de la Mécanique de la Rupture Fragile : "Elle reprend en fait la notion originale de Griffith d'énergie de surface et consiste, à un niveau de chargement donné, à chercher parmi tous les états de fissuration possibles celui ayant la moindre énergie".

#### 4.4.3 Régularisation des modèles

Les problèmes de localisation rencontrés par les modèles macroscopiques usuels sont imputables au fait que des mécanismes mis en jeu, à l'échelle de la microstructure, lors des phénomènes de localisation, ont une répercussion importante au niveau macroscopique et ne

sont pas rendus par ces modèles. Il s'agit alors de revoir les modèles afin de tenir compte des phénomènes négligés dans la première formulation et introduire une longueur interne microscopique. Dans ce type d'approche, le modèle admet des "localisations" (i.e concentration de la déformation sans discontinuité) qui dépendent du paramètre longueur interne. L'apparition d'une réponse inhomogène à des sollicitations homogènes est donc considérée comme caractéristique du comportement du matériau et la détection expérimentale de la localisation devient un élément supplémentaire pour le choix et le calage des lois.

Les méthodes de régularisation les plus usuelles sont l'introduction de la viscosité (ou régularisation par effet retard) (**Needleman 1988**) et celles de grandeurs "délocalisées" (limiteur de localisation) (**Bazant 1984**). La prise en compte d'une viscosité n'a souvent pas de réalité physique pour les niveaux de températures et de vitesses de sollicitation envisagés, et apparaît alors comme un artifice de calcul qui permet de ne pas localiser dans une bande de largeur nulle.

D'autres ont proposé de remettre en cause l'hypothèse de l'état local en introduisant des termes non locaux sous la forme de moyenne de certaines grandeurs sur un voisinage du point considéré, ou d'introduire des termes en gradients d'ordre élevé.

#### 4.4.3.1 Introduction d'une cinématique enrichie

Le point commun de ces méthodes réside dans l'introduction de degrés de liberté supplémentaires, qui peuvent ou non s'appuyer sur des justifications microstructurales. Le principe des puissances virtuelles permet alors de définir les efforts intérieurs associés et construire les équations d'équilibre correspondantes. Plusieurs points méritent d'être mentionnés:

- Comme l'a noté Lakes (**Lakes 1995**), ces méthodes conduisent à des effets d'échelle, y compris dans les régimes réversible (élastique) ou à écrouissage positif,
- des degrés de liberté supplémentaires nécessitent l'introduction de nouvelles conditions aux limites dont le choix (Dirichlet, Neumann, mixte,...), toujours délicat et parfois arbitraire, conduit à des résultats différents,
- l'introduction de nouvelles grandeurs cinématiques, et donc aussi de nouveaux efforts qui en sont les grandeurs duales, impose aussi de nouvelles relations de comportement, pour lesquelles la part d'arbitraire peut, là encore être importante.

### **Modèles de degrés de liberté de porosité**

Plusieurs auteurs (**Marok 1995**, **Pijaudier-Cabot & Burlion 1996**, **Frémond & Nedjar 1993**), ont essayé de prendre en compte l'endommagement, comme un degré de liberté supplémentaire du milieu continu.

En dépit d'une inspiration microstructurale, ces modèles laissent ouverts certains choix. Par exemple, en ce qui concerne le traitement de l'irréversibilité de l'endommagement, il y a autant de formulations que d'auteurs. Laissé réversible chez Markov (**Markov 1995**), l'endommagement est décomposé en une part réversible et une autre irréversible, chez Pijaudier-Cabot et Burlion (**Pijaudier-Cabot & Burlion 1996**), ou bien forcé à être irréversible à travers le potentiel de dissipation chez Frémond et Nedjar (**Frémond & Nedjar 1993**). Frémond et Nedjar proposent sans doute le cadre le plus constructif. L'endommagement y représenté comme un déplacement microscopique, isotrope car scalaire, qui s'interprète comme la porosité du matériau ce qui renvoie aux travaux antérieurs de Cowin et Nunziato (**Cowin & Nunziato 1983**) sur la modélisation des matériaux élastiques poreux.

En ce qui concerne les conditions aux limites à imposer pour cette nouvelle variable cinématique, seul Pijaudier Cabot et Burlion (**Pijaudier-Cabot & Burlion 1996**) les précisent en optant pour des conditions de type de Neumann.

Enfin, Il est important de remarquer que l'introduction d'une nouvelle inconnue cinématique découplée des déplacements est équivalente à l'introduction d'une nouvelle variable interne, comme le montre (**Lorentz & Andrieux 1999**), pour peu qu'on puisse négliger la puissance virtuelle d'accélération associée à cette inconnue.

### **Modèles de Cosserat ou micropolaires**

La théorie des milieux micropolaires, due aux frères Cosserat (**Cosserat 1909**), prend en compte, outre les degrés de liberté (d.d.l.) de déplacements, des degrés de liberté de rotations indépendants des déplacements, ces nouveaux d.d.l. décrivent la rotation de la microstructure sous jacente au point matériel. La cinématique d'un tel milieu continu est décrite par un tenseur de déformation et un tenseur de courbure :

$$\underline{\varepsilon} = \nabla u - A(\omega) \quad (4.23)$$

$$\text{et} \quad k = \nabla \omega \quad (4.24)$$

Où  $u$  est le vecteur déplacement ;  $\omega$  le vecteur rotation ( $A(\omega)$  est le tenseur antisymétrique associé à  $\omega$ ),  $\varepsilon$  le tenseur de déformation (non symétrique) et  $k$  le tenseur de courbure.

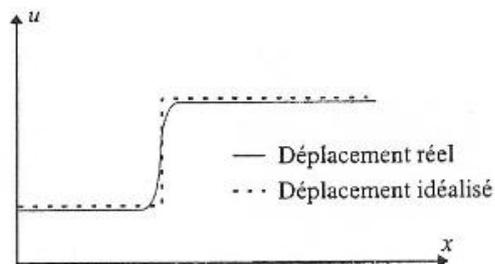
L'introduction des rotations dans la formulation des lois n'est donc pas équivalente à l'incorporation de nouvelles variables internes, contrairement aux modèles à cinématique de type porosité. Les efforts intérieurs sont alors modélisés par un tenseur de contrainte non symétrique "n", dual des déformations, et un tenseur moment de contraintes "m", dual de la courbure.

Plusieurs auteurs, comme De Borst (**De Borst 1991**) ont adopté cette démarche pour traiter des comportements adoucissants, essentiellement dans le contexte de la plasticité à écrouissage négatif. Dans ce cadre, Steinmann (**Steinmann 1995**) a réalisé des calculs qui montrent une bonne indépendance par rapport au maillage. Cependant, une analyse menée par Iordache (**Iordache & al. 1995**) indique que certains modes de bifurcation localisée peuvent subsister : ce sont des modes d'ouverture (mode I), pour lesquelles les rotations ne paraissent pas activées.

Sur les matériaux métalliques, Fleck et Hutchinson (**Fleck & Hutchinson 1993**) justifient l'introduction de ces termes en rotation dans la mesure où ils jouent un rôle sur l'écrouissage plastique. Quant à Forest (**Forest 1996**), il justifie l'introduction de ces nouvelles grandeurs cinématiques en se fondant sur une analyse microstructurale. Pour ces matériaux, on observe en effet de fortes courbures du réseau cristallin au voisinage de la bande de localisation, qui engendrent des dislocations d'accommodation géométrique, ignorées par les modèles de plasticité classiques. Ce n'est qu'après avoir précisé la nature physique des rotations qu'il peut raisonnablement exprimer les lois de comportement complémentaires, indispensables à la fermeture des équations du modèle.

### ***Modélisation par des surfaces de discontinuité***

A la différence des autres méthodes présentées dans cette étude bibliographique, cette approche ne cherche pas à décrire finement le comportement interne des bandes de localisation, mais à les modéliser comme des surfaces de discontinuités des déplacements. La Figure 4.16 représente la réponse globale d'une structure.



**Figure 4.16 :** Localisation des déformations en 1D (Lorentz 1994).

En fait, il s'agit d'une démarche qui enrichit la cinématique traditionnelle des milieux continus. Le champ de déplacements s'exprime dans le cadre de cette formulation comme la somme d'un champ de déplacements régulier (continu) et de termes de saut le long des surfaces de discontinuités (à priori inconnues). Fréquemment employée d'une façon purement technologique, en lien direct avec le développement d'éléments finis fait par Foreau et Millard (Foreau & Millard 1994). Cette modélisation a fait l'objet d'une théorie précise de la part de Simo et Olivier (Simo & Olivier 1993) puis Olivier (Olivier 1997a, Olivier 1997b), qui couvre à la fois l'écriture du comportement, la formulation variationnelle et le développement éléments finis mixtes appropriés. Pour plus de détails, le lecteur peut voir les travaux de Simo et Rifai (Simo & Rifai 1990).

Le point essentiel de l'analyse consiste à remédier au fait que la présence de discontinuité des déplacements au cours d'une modélisation avec une loi adoucissante engendre des contraintes infinies. Par exemple, pour y parvenir, il est nécessaire de modifier la loi de comportement en introduisant un modèle d'écrouissage dont l'inverse s'écrit comme une distribution de Dirac, localisée sur les surfaces de discontinuités. Dans ce cas, toute la dissipation est confinée sur ces surfaces de discontinuité ; (sans pour autant que la dissipation globale soit nulle car la dissipation n'est plus volumique mais surfacique) ; le comportement est élastique dans tout le reste de la pièce. En prescrivant la continuité de la contrainte normale, Simo et Olivier (Simo & Olivier 1993) montrent alors que l'intensité du saut de déplacements est fixée par la partie régulière des déplacements et le module d'écrouissage.

Cette méthode paraît attrayante car elle s'intègre aisément dans un code de calcul préexistant et ne nécessite pas de maillages particulièrement fins puisqu'on ne cherche pas à décrire les champs à l'intérieur des bandes de localisation. Ceci a fait l'objet d'étude approfondie dans les travaux d'Amoussou (Amoussou & Rousseau 1997) et Lorentz (Lorentz 1997a) : le constat est moins optimiste. Toute la difficulté aussi bien théorique

qu'algorithmique, réside dans la détermination des lieux géométriques des surfaces de discontinuité. De plus, des réseaux de fissures parallèles les un aux autres peuvent apparaître dans la structure, où le nombre de fissures est directement lié à la finesse du maillage. Cela dit, même si on considère que la solution la plus stable sera celle où ce nombre de fissures est minimal ; l'obtenir par éléments finis est délicat. La difficulté consistant à construire des surfaces de discontinuité géométriquement continues d'une maille à l'autre. Sans entrer plus dans le détail, il est certain que l'emploi de cette méthode requiert un savoir faire technologique plus important que ne le laissent entendre les différents articles déjà cités.

#### 4.4.3.2 Régularisation par effet retard

Needleman (**Needleman 1988**) a montré que si l'on prend en compte la dépendance au taux de déformation dans la loi de comportement d'un matériau, il n'y a plus de perte d'ellipticité pour le problème quasi-statique et la vitesse des ondes demeure réelle pour le problème dynamique. Le problème reste bien posé tant que le niveau de contrainte reste faible devant la raideur élastique. La dépendance au taux de déformation introduit de manière implicite une longueur dans le problème aux limites sans que celle-ci soit un paramètre de la modélisation. C'est cette longueur qui permet la régularisation de la solution. Needleman (**Needleman 1988**) montre comment un comportement visco-plastique permet de rendre la solution indépendante de la discrétisation spatiale à la fois dans le cas d'un chargement statique et d'un chargement dynamique. D'autres études ont confirmé ce résultat par la suite (**Sluys 1992, De Boorst & al. 1993, Suffis 2004, Pedersen & al. 2008**).

Le même principe a été appliqué par la suite dans la cadre des modèles d'endommagement. L'introduction d'une dépendance en vitesse ralentit l'évolution de l'endommagement (on parle d'endommagement retardé ou d'endommagement à effet retard) et régularise la solution. En effet, en retardant l'endommagement, on laisse le temps à une zone plus importante de s'endommager, la déformation n'est plus localisée dans un unique élément. La première formulation d'un modèle d'endommagement à effet retard semble être due à Ladevèze (**Ladevèze 1991, Ladevèze 1992**) qui propose la loi d'évolution de l'endommagement suivante pour les composites stratifiés :

$$\dot{D} = \frac{1}{m} \left\langle \frac{Y - Y(d)}{Y_c} \right\rangle^n \quad \text{pour} \quad D \leq 1 \quad (4.25)$$

$$Y(D) = Y_0 + Y_c d \quad \text{sinon} \quad (4.26)$$

Elle fait intervenir deux paramètres  $m$  et  $n$  déjà rencontrés aux paragraphes précédents et  $Y_0$  et  $Y_c$  sont des constantes qui définissent l'évolution de l'endommagement. Par la suite, cette loi a été modifiée, toujours pour la modélisation des composites stratifiés de manière à introduire une borne supérieure pour la vitesse d'endommagement (**Allix & Deü 1997**) :

$$\dot{D} = \dot{D}_\infty (1 - \exp[-b\langle g(\varepsilon_e) - D \rangle]) \quad \text{pour } D \leq D_c \quad (4.27)$$

$$D = D_c \quad \text{sinon} \quad (4.28)$$

où  $\dot{D}_\infty$  est l'inverse d'un temps caractéristique  $\tau_b$ . La justification physique de cette borne est que la rupture sous l'effet d'un chargement croissant ne peut pas être instantanée. Elle doit donc être gouvernée par un temps interne caractéristique qui traduit un certain retard. Combinée avec une analyse dynamique, ce temps caractéristique introduit une longueur caractéristique à travers la vitesse des ondes. La distinction doit être faite pour les composites entre les modèles d'endommagement retardé et les modèles de viscosité. Certains composites fragiles (les stratifiés époxy/verre par exemple) ont un comportement éminemment visqueux. Pour autant le temps caractéristique introduit n'est pas lié au processus de rupture, il diffère du temps caractéristique de l'endommagement retardé de plusieurs ordres de grandeur. Ce temps caractéristique est déterminé à partir de la longueur caractéristique du matériau, elle-même fonction de la microstructure. L'endommagement à effet retard ne sert donc pas, le plus souvent, à reproduire un effet de la vitesse de sollicitation puisque celui-ci n'existe pas pour les composites étudiés. C'est un outil de modélisation qui permet de rendre la rupture non instantanée et de ce fait régulariser la solution du problème. La même loi d'évolution a ensuite été appliquée pour des matériaux métalliques dans le cas de sollicitations dynamiques (**Suffis 2004**) puis pour les bétons et la glace (**Chuzel-Marmot & al. 2008**).

#### 4.4.3.3 Théories à gradients

Les théories à gradient consistent à prendre en compte des effets de voisinage spatial à travers des gradients d'ordre supérieur des déformations et des variables internes. En pratique, aucune théorie n'agit simultanément sur les inconnues cinématiques et les variables, pour des raisons de simplicité. C'est pourquoi nous distinguons les deux cas.

##### *Théorie du second gradient*

Certaines méthodes enrichissent la description cinématique en optant pour une densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs qui dépend linéairement non seulement du taux de

déformation mais aussi du second gradient de la vitesse (**Mindlin 1965, Mindlin & Eshel 1968, Germain 1971, Germain 1973**) :

(4.29)

tenseur de des contraintes usuel

tenseur des contraintes complémentaires (tenseur d'ordre 3).

On parle alors de théories du second gradient et on pourra se reporter à Germain (**Germain 1973**) pour une présentation détaillée.

Certains auteurs, se fondant sur la perspective du contrôle de la localisation via le gradient de la déformation, ont adopté cette théorie du second gradient pour traiter les problèmes avec adoucissement...

#### ***Modèles à gradients de variables internes***

La seconde approche pour prendre en compte un effet de voisinage via des gradients, consiste à introduire les gradients des variables internes dans les relations de comportement. A la différence de l'introduction du gradient de déformations, il n'y a de nouvelle description des efforts intérieurs. En outre, contrairement aux modèles non locaux, le voisinage spatial n'a pas ici une taille fixée: en effet, si deux champs coïncident au voisinage d'un point (quelle que soit la taille du voisinage en question), alors toutes les dérivées sont égales en ce point.

Cette approche introduite par Aifantis (**Aifantis 1987**) dans le cadre de la plasticité des métaux, est fondée sur l'interaction entre les dislocations (mesuré par le gradient de la déformation plastique).

La simple observation de l'équation d'équilibre montre bien la complexité de la théorie. Animé par le souci de clarifier et de systématiser toutes ces théories, Germain (**Germain 1973**) a utilisé la méthode des puissances virtuelles pour construire, d'une façon systématique, les théories du premier et du second gradient ainsi que la théorie micromorphique. Il a ainsi montré la capacité de la méthode des puissances virtuelles à construire une théorie "universelle" des milieux continus généralisés dans laquelle celle des milieux continus classiques est le cas particulier le plus simple.

#### **4.4.3.4 Théories non locales**

Un milieu non local est un milieu dans lequel au moins un champ de variable est sujet à une moyenne spatiale dans un voisinage fini d'un point (**Bažant & al. 1984**). L'avantage

d'un tel concept est applicable à tout type de modèle continu : modèles diffus (**Bazant & Lin 1988, Jirasek & Zimmermann 1998**), modèles d'endommagement (**Bazant & Pijaudier-Cabot 1988, Rodriguez-Feran & al. 2005, Desmorat & al. 2007**), modèles microplans (**Bazant & Ozbolt 1990, Ozbolt & Bazant 1992, Di Luzio 2007**) et modèles de plasticité (**Strömberg & Ristinmaa 1996, Jirasek & Rolshoven 2003**).

Les formulations non locales introduites initialement par L'Hermite en 1952 (**L'Hermite 1952**) pour l'étude du retrait du béton, et par Kroner en 1967 (**Kroner 1967**), Krumhansel (**Krumhansel 1968**) et Enrigen (**Enrigen 1972**) et autres, en mécanique des milieux continus, ce n'est qu'en 1974 que Bazant (**Bazant 1974**) a réussi pour la première fois à appliquer la théorie non locale au comportement adoucissant. Cependant, la formulation présentée et dans la quelle toutes les variables d'états étaient non locales s'avérait difficilement maniable et extrêmement compliquée car elle exigeait l'introduction de conditions aux limites supplémentaires menant à une forme non standard des équations différentielles d'équilibre d'une part, et d'autre part à une implémentation par éléments finis nécessitant une imbrication entre éléments (**Bazant & al. 1988**).

Par ailleurs, même si cette première formulation semble donner de bons résultats pour les problèmes types de mécanique de la rupture, il n'en demeure pas moins que ces derniers restent assez "grossiers" pour la résolution de la distribution de la densité du dommage à travers la zone de rupture (ou de localisation), et donc la détermination de l'énergie dissipée lors de la rupture en est peu précise (**Bazant & al. 1988**).

Les théories non locales considèrent que l'état de contrainte en un point matériel dépend de l'histoire de la déformation de tous les autres points matériels du milieu considéré. On tient ainsi compte de l'interaction entre les différents éléments de volume contrairement aux théories locales qui négligent totalement cette question. Les premières théories non locales, proposées pour des matériaux élastiques granuleux, ont été basées sur des considérations purement heuristiques (**Kunin 1968**). En utilisant le cadre thermodynamique des milieux continus, Eringen (**Eringen 1970-1972**) a proposé une théorie non locale pour les milieux élastiques dans laquelle la théorie classique est un cas particulier. Du point de vue formulation théorique, la différence fondamentale entre les théories locales et les théories non locales réside dans le passage de la forme intégrale (globale) à la forme locale des lois de conservation. En effet, pour les théories non locales, le passage de la forme intégrale à la forme locale des lois de conservation donne lieu à des termes appelés "termes résiduels de localisation" selon la terminologie de l'auteur (**Eringen 1972**). En un point matériel donné,

ces termes représentent l'effet du voisinage de ce point. Par conséquent, ils figureront comme variables nouvelles dans l'expression du potentiel thermodynamique, ce qui traduira la non localité de la loi de comportement. Notons enfin, que dans l'écriture des lois de conservation, il faut tenir compte des sauts subis par les variables à travers les surfaces de discontinuité entre les EVR constituant le domaine. Pour éclairer la théorie d'Eringen, écrivons les lois de conservation pour un milieu non local.

### *Conservation de la masse*

Remarquons que si toutes ces variables non-locales sont nulles, on retrouve bien les équations de conservation et de discontinuité de la théorie classique des milieux continus. Notons les méthodes plus récentes de non-localité en déplacement ou en déformation totale. Pour ces cas la non-localité est introduite via l'écriture d'un déplacement ou d'une rotation non-locale.

Citons les travaux de Jirasek (**Jirasek 2005**) où seule la déformation totale est calculée via une forme pondérée intégrale. Cette approche, moins riche que celle de la formulation d'Eringen est cependant plus simple de mise en œuvre. La dépendance du voisinage est introduite dans l'équation d'équilibre en enrichissant le premier gradient du déplacement.

Bien que les théories mécaniques des milieux à microstructure semblent plus réalistes et en tout cas plus adaptées à l'étude des phénomènes de rupture, elles restent très peu utilisées à cause des difficultés théoriques, numériques et expérimentales qu'elles engendrent.

De plus les travaux d'Iordache (**Iordache & al. 1995**) semblent montrer une persistance de la bifurcation pour les milieux micropolaires. En tout état de cause, la complexité des développements induits par ces approches les rendent incompatibles avec les codes industriels. Nous n'aborderons pas par la suite de telles formulations et nous leur préférons des formulations non locales en gradient de variables internes. Ces approches font l'objet de la suite de ce chapitre. La méthode des résidus de localisation limitée au cas de la déformation a inspiré les travaux de Pijaudier-Cabot (**Pijaudier-Cabot & al. 2004**) ou encore de Saanouni (**Saanouni 1988**) et Bazant (**Bazant & al. 1988**) pour les formulations endommageables. Plus récemment encore, les travaux menés par Nedjar (**Nedjar 2001**) puis Engelen (**Engelen 2005**) font intervenir des formulations en second gradient de déformation ou de variables internes. Ces approches sont des théories suffisamment simplifiées pour permettre une intégration aisée dans les codes éléments finis. Cependant, les difficultés d'utilisation et de convergence de ces modèles en limitent l'utilisation industrielle. De plus

l'interprétation physique de ces formulations est complexe. La mesure des effets microscopiques à l'origine des phénomènes non locaux restant à ce jour délicate. Par ailleurs les approches sans maillage par essence non-locales semblent être naturellement insensibles à la discrétisation spatiale selon Duflot (**Duflot 2004**) et Chen (**Chen & al. 2000**). Cependant la lourdeur des calculs limite encore l'utilisation de telles formulations pour la simulation complexe de mise en forme.

Dans ce qui suit nous présenterons un éventail de formulations issues de la bibliographie susceptibles d'assurer une indépendance au maillage et une régularisation de la solution éléments finis. Les formulations les plus robustes et les plus économiques du point de vue du calcul et de l'implémentation serviront de base aux travaux présentés dans la suite de l'étude. Nous proposons de classer les différentes formulations selon les différents types de modèles non-locaux. L'analyse de la bibliographie montrant une grande disparité de résultats selon le type de loi de comportement retenu, il faudra pour chaque type d'étude évaluer le potentiel de la formulation au vu du comportement matériel choisi. Ainsi les modèles de matériaux élastiques endommageables (type bétons) semblent plus aisés à régulariser dans la zone post-critique. En contre partie, peu de formulations sont appliquées à la plasticité à grand taux de déformation. Le caractère naturellement localisant des lois basées sur un couplage comportement/endommagement impose le choix d'un modèle non-local particulièrement robuste et efficace.

### ***Choix de la variable à délocaliser***

La formulation non locale de certains termes dans les lois de comportement a été introduite intuitivement sur des bases d'expériences numériques. Cependant, d'un point de vue physique, il n'y a aucune raison de privilégier un terme de loi par rapport à un autre. Certains auteurs ont donc considéré des lois entièrement délocalisées. Mais l'implémentation éléments finis de loi entièrement délocalisées conduit à des difficultés sérieuses (**Bazant & Pijaudier-Cabot 1998**) : des systèmes d'éléments finis imbriqués, des problèmes de conditions aux limites, des problèmes des conditions aux interfaces ,...C'est en vue de limiter ces inconvénients que les numériciens ont été amenés à ne considérer comme non locaux ou différentiels que les grandeurs considérées comme responsables de la localisation .

Cependant, comment déterminer avec exactitude le mécanisme prépondérant responsable de la localisation. Comme nous l'avons déjà mentionné, la localisation peut se

manifester sous la forme de bande de cisaillement pour les matériaux granulaires et les métaux, ou de macro-fissures pour les matériaux ductiles comme le béton, les céramiques...

Devant cette diversité, les phénomènes menant à la localisation ont-ils une origine unique et peut-on rassembler sous un même formalisme tous les phénomènes de localisation ? Pour les matériaux élastiques-endommageables la question est la suivante : est-ce la localisation de l'endommagement qui est précurseur de la localisation de la déformation, ou l'inverse. Ainsi, expérimentalement, c'est la déformation (ou plus exactement les incréments de déformation entre deux " instants " successifs) que les techniques de détection de la localisation visualisent (méthodes de stéréophotogrammétrie de faux relief (**Desrues 1983**) et de speckle (**Berthaud 1991**)). On n'a que difficilement accès, d'un point de vue expérimental, à la variable interne endommagement même si la détection acoustique donne quelques résultats (**Berthaud 1991**). Pour cette raison, il apparaît naturel de vouloir travailler avec les grandeurs auxquelles on a accès facilement expérimentalement comme la déformation et donc proposer des modèles à déformation " délocalisée ".

Cependant, si on s'interroge sur les mécanismes précurseurs de la localisation, il est possible d'envisager l'endommagement comme étant à l'origine de la localisation. Les techniques de détection de la localisation qui permettent de visualiser les incréments de déformation entre deux instants successifs mettraient, dans ce cas, en évidence une déformation induite par l'endommagement. En effet, la propagation des fissures va induire une dilatance et donc une déformation supplémentaire locale correspondant à l'ouverture des fissures. La zone où l'endommagement va se localiser va effectivement être associée à une zone de forte distorsion induite.

D'un point de vue modélisation, le choix de la variable à " délocaliser " reste un problème ouvert !

L'idée des modèles non locaux tel que décrit par (**Pijaudier-Cabot 2004, Saanouni 1988, Bažant & Pijaudier-Cabot 1988, Nedjar 1994**) pour les formulations endommageables, et repris sous formes de gradient par (**Aifantis 1984, Triantafyllidis & Aifantis 1986, Shen & Saanouni 2002, Balystshko 1988, Shreyer 1990, Peerlings 1999, Engelen 2005, Lorentz & Benallal 2005, Almansba 2011, De Borst & muhlhaus 1992, Desoyer & Leroux 1994, Pijaudier-Cabot 1987-1991**) consiste à prendre en compte un effet de voisinage spatial pour décrire le comportement d'un point matériel : il y a interaction à distance entre les points de la structure . Ces interactions ont lieu dans un voisinage de taille fixée du point matériel considéré. Plus précisément, certaines grandeurs locales de la loi de

comportement sont remplacées par leurs pendants non locaux. Le choix d'une ou plusieurs variables non locales reste délicat à justifier. Cependant, on peut remarquer que les modèles les plus efficaces choisissent de rendre non locales la ou les variables associées aux phénomènes adoucissants. Ainsi le choix de la variable scalaire d'érouissage isotrope pour un modèle à érouissage négatif ou le choix de l'endommagement semblent les plus pertinents. Les travaux de Peerlings (**Peerlings 1999, Peerlings 2005**) puis Engelen (**Engelen 2005**) par exemple proposent de régulariser la déformation plastique cumulée. Par contre Voyiadjis (**Voyiadjis & al. 2004**) propose de régulariser l'ensemble des variables internes. Germain (**Germain & al. 2005**) et Liebe (**Liebe & al 2001**) proposent le choix de la variable force motrice de l'endommagement. Pour des comportements élastiques endommageables, ces formulations semblent particulièrement efficaces.

Cela dit, en 1987, Pijaudier-Cabot et Bazant (**Pijaudier-Cabot & al. 1987**) et en 1988, Saanouni (**Saanouni 1988**) ont introduit une nouvelle idée qui apporta des simplifications considérables. Ils ont montré qu'il suffisait de considérer comme non locale, uniquement la variable d'endommagement, et que le comportement élastique, notamment la déformation, doit être traité comme local. Cette dernière formulation n'exigera plus d'imbrications entre éléments, ni de conditions aux limites supplémentaires et ni d'artifices de calcul assez compliqués d'élimination de modes d'énergie nuls lors de l'imbrication (**Bazant & al. 1988**).

C'est pour ces raisons que nous avons choisi cette dernière formulation pour la suite de notre travail. On tente de limiter la dépendance au maillage en utilisant une variable non locale sous forme intégrale au sens de Pijaudier-Cabot (**Pijaudier-Cabot 1987-1991-2004**), et Saanouni (**Saanouni 1988, Lesne & Saanouni 1990**). Nous choisissons de "délocaliser" la variable local d'endommagement  $D$ , en la remplaçant par la variable non local  $\bar{D}$ . Ainsi la variable d'endommagement non local  $\bar{D}$  est calculée sur un volume représentatif de l'endommagement.

## 4.5 Admissibilité thermodynamique

Les lois d'évolution du comportement matériel et les équations d'équilibre doivent vérifier les principes élémentaires de la thermodynamique et en particulier le second principe. La structure est considérée dans son ensemble comme un système thermodynamique à l'équilibre. Pour les formulations locales la thermodynamique des processus irréversibles propose un cadre général (**Lemaitre 1992, Lemaitre & Chaboche 2001**). Il n'en est pas de

même pour les formulations non-locales. Si nombre d'entre elles s'avèrent capables d'assurer l'indépendance des réponses éléments finis au maillage, toutes ne sont pas équivalentes du point de vue thermodynamique. En effet, certaines ne semblent pas respecter le principe de dissipation plastique maximum. D'autre part, l'origine ou la justification des termes non-locaux n'est pas toujours compatible avec le respect du second principe de la thermodynamique. Certains auteurs comme Santaoja (**Santaoja 2004**) proposent un cadre thermodynamique pour l'analyse des modèles à gradient. Mais face au nombre très important de formulations disponibles il est difficile de définir un contexte thermodynamique général pour les modèles non-locaux. Par ailleurs Lorentz et Benallal (**Lorentz & Benallal 2005**) présentent un modèle en gradient découlant rigoureusement de la thermodynamique. Nous proposons donc d'étudier et de classer les différentes approches issues de la bibliographie au regard de leurs fondements thermodynamiques.

## 4.6 Quelques propositions figurant dans la littérature

Les techniques de régularisation sont rencontrées à deux niveaux. Ce sont, soit les équations d'équilibre qui sont régularisées, soit les équations de comportement.

### 4.6.1 Régularisation des équations d'équilibre

Le déroulement d'une théorie cohérente est a priori possible avec les modèles en gradient d'ordre élevé. Ainsi des "degrés de liberté supplémentaires" peuvent être pris en compte dans le principe des puissances virtuelles (PPV). Ce qui permet d'obtenir de nouvelles équations d'équilibre. Cependant, la justification de l'introduction de nouveaux termes dans le PPV qui conduit à une théorie cohérente, pêche par un manque de bases physiques, ce qui lui est souvent reproché.

#### 4.6.1.1 Principe des puissances virtuelles avec gradients d'endommagement (Frémond & Nedjar 1993)

Frémond et Nedjar (**Frémond & Nedjar 1993**) introduisent le gradient d'endommagement dans le principe des puissances virtuelles. Les vitesses microscopiques étant liées à la vitesse d'endommagement, la puissance des efforts intérieurs dépend de la vitesse d'endommagement et aussi de son gradient pour décrire les interactions. C'est une théorie du premier gradient. Cependant la justification de l'introduction des termes en gradients ne fait pas l'unanimité.

La puissance des forces intérieures se formule de la manière suivante :

$$P_i(v, \gamma) = - \int_{\Omega} (\sigma : \varepsilon(v) + (B + H \operatorname{grad}(\gamma))) d\Omega \quad (4.30)$$

avec :  $\sigma$  désigne le tenseur des contraintes de Cauchy

$\varepsilon$  la déformation

$v$  est une vitesse virtuelle

Deux nouvelles forces apparaissent :

$B$  le travail d'endommagement interne

$H$  le vecteur flux de travail d'endommagement interne

La puissance des forces extérieures se formule de la forme suivante :

$$P_e(v, \gamma) = \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\partial\Omega} T \cdot v \quad (4.31)$$

avec :  $f$  est le vecteur des forces volumiques extérieures

$T$  est le vecteur des efforts surfaciques sur la frontière  $\partial\Omega$

Deux nouveaux termes de sources apparaissant :

$A$  et  $b$  sont des sources extérieures de travail d'endommagements volumiques et surfaciques.

Les sources extérieures d'endommagement sont des sources qui peuvent rompre les liens intérieures du matériau sans pour cela qu'il y ait de déformations macroscopique : oxydation, corrosion, irradiation... Dans le cas des bétons, par exemple, de telles sources sont les alcaliréactions qui endommagent ce matériau.

L'axiome des puissances virtuelles (la puissance virtuelle des efforts intérieures est nulle dans tout mouvement rigidifiant) est vérifié. Le raisonnement des auteurs est le suivant : pour tout mouvement rigidifiant, il n'existe pas de mouvement microscopique puisque la distance relative des points matériels reste constante,  $d$  est alors nul.

En quasi-statique, le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$P_i(v, \gamma) + P_e(v, \gamma) = 0 \quad (4.32)$$

En écritures locales, le principe des puissances virtuelles conduit à deux systèmes de deux équations :

$$\operatorname{div} \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \sigma n = F \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (4.33)$$

$$\operatorname{div} H - B = -A \quad \text{dans } \Omega, \quad H n = b \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (4.34)$$

Le système (4.33), non usuel, décrit l'évolution de l'endommagement.

La modélisation thermomécanique des sources d'endommagement extérieures est délicate; pour cette raison, les auteurs les ont supposées nulles, soient  $A = b = 0$ .

Le second principe sous la forme de Clausius-Duhem s'écrit, pour tout processus isotherme :

$$-\dot{\sigma} : + B + H \text{grad}( ) \quad (4.35)$$

Avec énergie libre volumique.

Cette inégalité conduit à supposer que l'énergie libre est une fonction de  $\varepsilon$ , de l'endommagement et du gradient d'endommagement.

$$=(\varepsilon, d, \text{grad}(d)) \quad (4.36)$$

Pour simplifier, les auteurs ont supposé que la dissipation ne portait que sur l'endommagement, soit le pseudo-potentiel de dissipation :

$$=(d, \varepsilon) \quad (4.37)$$

Où la déformation  $\varepsilon$  joue le rôle d'un paramètre.

Les lois de comportement s'écrivent :

$$\sigma = \text{---} \quad H = \text{---} \quad B = \text{---} \quad (4.38)$$

Il reste un choix d'énergie libre et de potentiel de dissipation. Les auteurs envisagent le cas d'un potentiel visqueux, ce qui régularise le problème de localisation. Nous ne développons pas davantage leurs propos et nous ne retiendrons que l'idée générale d'une volonté de développer une théorie cohérente, avec la prise en compte de termes en gradients d'endommagement dans le PPV. Cette approche est de controverse.

#### 4.6.1.2 Théories du second gradient (Triantafyllidis & Aifantis 1986)

La motivation de départ de cette approche est le désir d'introduire, en accord avec les observations expérimentales, une échelle satisfaisante de longueur physique pour la zone de déformation du matériau. Cependant, les études menées le sont pour les matériaux hyperélastiques (i.e. non dissipatifs) (Triantafyllidis & Aifantis 1986, Triantafyllidis & Bardenhagen 1993).

Ainsi ils introduisent un second gradient de déformation dans le PPV. Soit la puissance des efforts intérieurs (**Germain 1973**) :

$$(v) = - \quad (4.39)$$

$$\text{L'équation d'équilibre se formule : } \sigma_{ij,j} - (\sigma v)_{ijk,jk} + f_i = 0 \quad (4.40)$$

(avec f les forces extérieures).

Un terme supplémentaire quadratique en gradient de déformation est introduit dans l'expression de l'énergie libre :

$$= (\varepsilon) + \text{---} \quad (4.41)$$

Avec : B tenseur d'ordre 6 et  $L_c$  longueur interne.

La forme du terme  $(\nabla \varepsilon B(\varepsilon) \nabla \varepsilon)$  permet d'assurer l'indifférence matérielle (objectivité) de ce terme supplémentaire. De plus, il lui est imposé de vérifier :  $\nabla \varepsilon B(\varepsilon) \nabla \varepsilon \geq 0$ , afin d'assurer la positivité de l'énergie.

On peut montrer que la direction des bandes de déformation est déterminée par une condition de localisation du matériau ( $\det(n.H.n)=0$ ) comme dans l'analyse classique. Au contraire du résultat classique, une prédiction de l'épaisseur de la bande est maintenant possible et on peut déterminer une formule explicite. Le problème se situe, au niveau de l'interprétation physique des conditions aux limites naturelles nouvellement introduites. Les cas étudiés par cette méthode sont des cas non-dissipatifs.

## 4.6.2 Régularisation des équations de comportement

### 4.6.2.1 Modèle avec Laplacien d'endommagement (**Peerlings & al. 1995**)

Certains auteurs ont préféré travailler avec des termes locaux, c'est-à-dire des termes dérivés et en particulier des laplaciens. On peut citer deux techniques.

La première technique concerne l'introduction, dans le seuil de plasticité, de termes en laplaciens (**De Borst & Mühlhaus 1992**) de la variable interne. La condition de consistance doit alors être écrite sous forme variationnelle : il faut imposer des conditions limites sur le multiplicateur...mais lesquelles ? De plus, (**Mühlhaus & Aifantis 1991**) ont précisé que le traitement de la phase d'écrouissage positif était problématique avec un tel modèle. La seconde technique a pour point de départ l'approche Pijaudier–Cabot (**Pijaudier–Cabot 1987**) par moyennation.

Une grandeur du modèle est délocalisée par moyennation :

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{l} \int_{V_r} y(x+s)w(s) ds \quad (4.42)$$

Où  $w(x)$  est une fonction de poids gaussienne. Une formulation en gradient peut être dérivée directement de la formulation non-locale.

Dans cette approche  $\bar{Y}(x)$  est considérée comme une nouvelle variable indépendante. L'équation aux dérivées partielle issue de l'équation (4.52) est une nouvelle équation qui doit être vérifiée en plus de l'équilibre.

La force motrice de l'endommagement est "délocalisée" dans (Peerlings & al. 1995) :

$$F_D \mapsto \bar{F}_D \quad \text{telque} \begin{cases} \bar{F}_D - L_c^2 \Delta \bar{F}_D = F & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \bar{F}_D}{\partial n} = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.43)$$

De Borst (De Borst 1994) délocalise la déformation équivalente :

$$\varepsilon_{eq} \mapsto \bar{\varepsilon}_{eq} \quad \text{telque} \begin{cases} \bar{\varepsilon}_{eq} - c \Delta \bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq} & \text{dans } \Omega \\ \bar{\varepsilon}_{eq} n = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.44)$$

avec  $c$  le carré d'une longueur caractéristique définis par le choix de la fonction de pondération  $w(x)$ .

Heurta (Huerta & Pijaudier- Cabot 1994) rappelle cependant que si une justification de l'approche gradient est "justifiée" habituellement par la dérivation de la théorie non-locale, il n'en reste pas moins que les deux approches ne sont pas équivalentes. En effet, la largeur de la bande de localisation est, dans les deux approches, minorée par une valeur non nulle. Cependant, les valeurs obtenues pour les deux modèles ne sont pas identiques (30% de différence).

#### 4.6.2.2 Modèle élastique-endommageable avec Gradient d'endommagement d'ordre supérieur (GOS) dans la fonction seuil (Desoyer & Leroux 1994)

L'introduction des gradients d'ordre supérieur (GOS) n'affecte que les lois d'évolutions des variables internes sans modifier les lois d'état. Ceci avait été proposé par (Aifantis 1984) pour des matériaux à comportement élasto-plastique afin de préciser l'épaisseur des bandes de cisaillement en régime adoucissant. L'introduction des termes de gradients d'ordre supérieur est, ici, purement intuitif. Les auteurs considèrent un modèle

"d-standard" (loi associée). L'énergie libre est identique à celle du modèle élastique-endommageable sans gradient d'endommagement :

$$\psi = \psi(\varepsilon, D) \quad (4.45)$$

Les gradients ne sont pas introduits que dans la fonction seuil d'endommagement

$$f(F_D, D) = F_D - k(D) + \sum_{i=1}^{i=n} C_i \text{tr}(\nabla^i D) \quad (4.46)$$

avec :

$$\nabla^i D = \frac{\partial^i D}{\partial x^i} \quad (4.47)$$

où  $n$  est l'ordre du gradient significatif le plus élevé (ici  $n = 4$ )

$k(D)$  est la fonction pilotant l'écrouissage de l'état homogène usuel

$C^i$  sont des fonctions caractérisant l'influence des inhomogénéités.

L'étude du critère de localisation se fait, ici encore, par analyse d'une perturbation linéaire. Cette fois, la perturbation est introduite dans les équations d'équilibre et non plus dans les équations d'équilibre en vitesse (**Rousselier 1991**). Dans ce modèle, il n'y a pas de loi d'évolution sur le gradient d'endommagement; ceci permet de faire dépendre le critère de localisation de la période spatiale de l'onde de perturbation. L'obtention de critère de localisation n'est pas immédiate. L'introduction de gradients d'ordre impairs nécessitant l'étude d'un déterminant complexe, l'étude est restreinte au cas :

$$\underline{n=4}: \quad C^1=C^3=0 \quad C^2 \neq 0 \text{ et } C^4 \neq 0 \quad (4.48)$$

Le cas de la déformation plane est étudié. Il ressort de l'étude que :

- (i) Quel que soit le trajet de chargement en déformation plane considéré, les GOS ont pour effet d'avancer la localisation, c'est à dire que la valeur de l'endommagement  $D$  à la localisation avec GOS est plus petite que celle obtenue sans GOS.
- (ii) L'orientation des bandes est indiquée à celle obtenue avec le modèle élastique endommageable sans GOS.
- (iii) La période spatiale de la perturbation peut-être précisée et est indépendante du trajet de chargement considéré.
- (iv) La pulsation  $\omega$  est infinie, le problème n'est pour autant pas régularisé (comme ceci avait été établi par d'autres auteurs ((**Aifantis 1987**) en élasto-plasticité).

Ce dernier résultat pouvait laisser supposer que les effets d'inertie deviennent importants à la localisation. L'étude de stabilité menée en tenant compte, cette fois, des effets d'inertie montre que la perturbation est parfaitement précisée mais que la localisation est possible dès le début du processus d'endommagement.

## 4.7 Développement d'un modèle d'endommagement non-local

Une loi standard est proposée et l'endommagement est supposé être un processus intrinsèquement non local : c'est la force thermodynamique responsable de l'évolution de l'endommagement noté  $F_D$  qui est considérée comme non-locale. Le modèle de référence étant le modèle d'endommagement non local (Limiteur intégral) proposé par Pijaudier-Cabot et Saanouni (**Pijaudier-Cabot 1987, Saanouni 1988**).

### 4.7.1 Modèle local

- La Variable d'endommagement  $D$  déterminée par le modèle local (voir chapitre 3) (**Mazars 1984**)

- La densité d'énergie libre : 
$$\rho\psi = \frac{1}{2}(1-D)\varepsilon : C : \varepsilon \quad (4.49)$$

- La force motrice locale de l'endommagement : 
$$F_D = -\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial D} = \frac{1}{2}\varepsilon : C : \varepsilon \quad (4.50)$$

Dans la théorie locale, le domaine de réversibilité est défini par la surface de charge :

$$f(F_D, D) = F_D - k(D) \quad (4.51)$$

et les évolutions dissipatives par une fonction :

$$g(F_D, D) \quad / \quad \dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial g(F_D, D)}{\partial F_D} \quad (4.52)$$

Ce modèle conduit à un problème en vitesse mal posé lorsque survient la localisation.

### 4.7.2 Délocalisation de la force motrice de l'endommagement

Pour palier cet inconvénient, les auteurs proposent que le processus d'endommagement ne dépende plus uniquement de la valeur de  $F_D$  au point  $x$  considéré, mais dépende aussi, via une fonction de pondération, de la force motrice vue en chaque point d'un

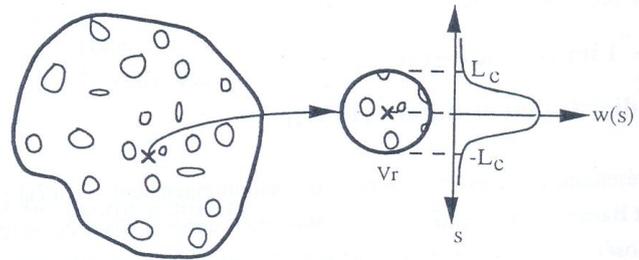
volume représentatif  $V_r$  autour de ce point. Une force motrice non-locale de l'endommagement est donc proposée ayant pour expression :

$$\bar{F}_D(x) = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} F_D(x+s) w(s) ds \quad (4.53)$$

Où  $V_r$  représente le volume représentatif et  $w(s)$  une fonction de poids gaussienne :

$$\int_{V_r} w(s-x) ds = |V_r| \quad w(s) = \exp\left(\frac{-|s|^2}{(L_c)^2}\right) \quad (4.54)$$

Où  $L_c$  représente la longueur caractéristique du matériau (caractéristique microscopique) (Figure 4.17).



**Figure 4.17:** Délocalisation par convolution (Joussemet 1997).

### 4.7.3 Fonctions de charge

La délocalisation va porter sur la fonction seuil au travers de la force motrice d'endommagement  $\bar{F}_D$  délocalisée. De manière schématique, ceci revient à dire que l'endommagement en un point ne pourra évoluer que si les contributions des points du voisinage  $V_r$  vérifient une relation globale.

Ainsi, on obtient une fonction de charge non-locale de l'endommagement :

$$f(\bar{F}_D, D) = \bar{F}_D - k(D) \leq 0 \quad (4.55)$$

De la même manière que l'on définit une fonction locale  $g(F_D, D)$  régissant l'évolution dissipative, on peut définir une fonction dissipative non locale :

$$g(\bar{F}_D, D) \quad (4.56)$$

La loi d'évolution de  $D$  s'écrit alors :

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(\bar{F}_D, D) < 0 \text{ ou } f(\bar{F}_D, D) = 0 \text{ et } \dot{f}(\bar{F}_D, D) < 0 \\ \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{F}_D} & \text{si } f(\bar{F}_D, D) = 0 \text{ et } \dot{f}(\bar{F}_D, D) = 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

Le manipulateur  $\dot{\lambda} [\dot{\lambda} \geq 0]$  étant précisé par la relation de consistance, c'est-à-dire  $\dot{f} = 0$  au cours d'un chargement endommageant.

#### 4.7.4 Critère de localisation : approche par analyse de perte de stabilité d'une perturbation linéaire

Une approche par analyse de stabilité d'une perturbation linéaire peut être envisagée (Pijaudier-Cabot & Benallal 1993) afin de dégager un critère de localisation.

L'état initial étant supposé homogène, la solution homogène est perturbée par un terme  $\dot{u}_1$  tel que :

$$\dot{u}_1 = \gamma \exp(-i\alpha n x) \quad (4.58)$$

Avec :  $\gamma$  module de la perturbation,

$2\pi/\alpha$  période spatial de la perturbation

$n$  la normale locale à la bande de localisation

Après quelques manipulations, on obtient un critère de localisation dépendant de la période spatiale de la perturbation :

$$\det [P(n, \varepsilon, D, \alpha)] = 0 \quad (4.59)$$

L'étude du critère de localisation permet de dégager les conclusions suivantes :

- (i) Les orientations ( $n$ ) de bandes de localisation sont identiques pour le modèle non local et le modèle local usuel,
- (ii) La longueur d'onde  $2\pi/\alpha$  de la solution périodique est proportionnelle à la longueur caractéristique du matériau  $L_c$ ,
- (iii) La condition nécessaire et suffisante de localisation pour le "milieu local" est une borne inférieure de la condition nécessaire et suffisante de localisation pour le "milieu non local".

Le caractère non local du modèle a pour effet de rendre plus "stable" le comportement de ce modèle par rapport au modèle local usuel. En effet, l'influence de l'endommagement est concentrée au point considéré dans le modèle usuel. Dans ce cas, l'endommagement se trouve

réparti dans une zone caractérisée par la longueur caractéristique  $L_c$ , ce qui retarde le moment d'apparition de la localisation par rapport au modèle local.

#### 4.7.5 Résultats numériques

L'exemple traité par cette loi délocalisée est l'essai d'arrachement d'une armature sur éprouvette de béton (Figure 4.11) (**Pijaudier-Cabot & al. 1991, Pijaudier-Cabot 1992**). L'utilisation d'une loi délocalisée permet de converger et de ne plus localiser numériquement dans une région infiniment mince. Il n'y a plus de sensibilité des résultats au maillage. Il s'ensuit une énergie à rupture non nulle.

Cependant, cette régularisation ne garantit pas l'unicité de la réponse de la structure étudiée (**Pijaudier-Cabot & huerta 1991**). Le problème majeur de ce modèle réside dans la lourdeur du traitement numérique surtout en 3-D.

L'idée principale du modèle étant la définition non locale de la variable d'endommagement  $D$  associée à une approche locale, on introduit la relation entre les contraintes et les déformations sous la forme :

(4.60)

A signaler que la variable moyenne est considérée comme variable scalaire (endommagement isotrope). Elle peut être appliquée de manière similaire au cas des modèles d'endommagement anisotropes tirés par exemple des modèles de Mazars (**Mazars & Pijaudier-Cabot 1986**), et Ladeveze (**Ladeveze 1983**). Par ailleurs, les déformations plastiques seront omises de la présente formulation. D'après certains auteurs (**Bažant & Pijaudier-Cabot 1988**), leur introduction n'exigera aucun changement important.

Soit donc, La variable d'endommagement non local écrit en tout point  $x$  de la structure par l'opérateur moyenne spatiale  $\Omega$  sur un volume  $V$  telle que :

— (4.61)

$D$  et  $\Omega$  peuvent être considérés respectivement comme des variables d'endommagement locale et non locale.

désigne également l'opérateur de moyenne spatiale de l'endommagement. Il désigne à cet effet la définition non locale de l'endommagement.

$y$  et  $x$  sont les vecteurs coordonnées.

Où est le volume de la structure, et le volume représentatif au point  $x$  défini par :

(4.62)

est une fonction de pondération non locale supposée homogène et isotrope, elle caractérise la géométrie de la zone de localisation. Elle dépend uniquement de la distance entre le point source  $x$  et le point de réception  $y$ . En général, on choisit comme fonction poids une gaussienne. Ce choix est purement numérique, en effet, il a été montré qu'une gaussienne optimisait le taux de convergence de la solution éléments finis (**Pijaudier-Cabot 1987, Bazant & Pijaudier-Cabot 1988**).

On prendra donc :

$$\text{-----} \quad (4.63)$$

(4.64)

$R$  décrit l'aire du rayon d'intégration (ou Opérateur fonctionnel de délocalisation). En calcul plan cette aire d'intégration est constituée d'un disque de rayon  $R$  qui définit non seulement la taille minimale de la bande de localisation mais représente aussi une propriété intrinsèque du matériau en définissant la longueur ou le diamètre du volume représentatif (segment de droite, cercle ou sphère). Il est de même ordre de grandeur que la taille maximale des hétérogénéités. Il contient des informations sur la microstructure du matériau et son choix constitue un point crucial dans le modèle, puisqu'il détermine la taille du domaine d'influence qui intervient dans le calcul de la variable non locale d'un point matériel donné. Ce rayon a été déterminé expérimentalement (**Bazant & Pijaudier-Cabot 1987**) en comparant la distribution du dommage (ou microfissures) sur plusieurs échantillons de compositions différentes et dont la rupture s'est produite par localisation. Pour le béton, de telles expériences ont indiqué que  $R$  est suffisamment proche de 2,7 fois la taille maximale du plus gros granulat (ou diamètre du plus gros granulat). A signaler que la taille peut également être déterminée grâce à l'analyse micromécanique (**Bazant & Pijaudier-Cabot 1989**).

#### 4.7.6 Formulation thermodynamique et loi d'évolution

L'énergie libre spécifique par unité de volume et le taux de dissipation d'énergie peuvent s'exprimer comme suit :

$$\text{-----} \quad (4.65)$$

$$\text{-----} \quad (4.66)$$

avec :

et  $Y$  est comme on le sait déjà, le taux de restitution de densité d'énergie telle que:

$$\text{---} - \quad (4.67)$$

L'évolution du dommage est caractérisée par une équation du type :

$$(4.68)$$

D'après Mazars (**Mazars & Pijaudier-Cabot 1986**), l'expression du dommage peut approcher de manière correcte le comportement du béton en offrant l'avantage d'introduire différentes valeurs du seuil d'endommagement local en traction et en compression.

L'endommagement étant supposé croître uniquement lors du chargement, pour le cas du déchargement ou du rechargement, nous devons donc avoir:  $\bar{D}=0$ , signifiant que la réponse est élastique.

Ainsi, le critère de chargement ou de l'endommagement non local  $\Omega$  (ou ) est définit comme suit :

$$Si \begin{cases} g(\bar{D})=0 & \text{et} & \dot{g}(\bar{D}) < 0 & \text{alors} & \Omega = \bar{D} \\ g(\bar{D}) < 0 & \text{ou} & g(\bar{D})=0 & \text{et} & \dot{g}(\bar{D})=0 & \text{alors} & \Omega = 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

La fonction  $g(\bar{D})$  représente la fonction de charge définie par :

$$g(\bar{D}) = \bar{D} - k(\bar{D}) \quad (4.70)$$

$k(\bar{D})$  est un paramètre d'écrouissage qui est égal à la valeur maximale de . Pour un matériau initialement vierge, la valeur initiale de  $k(\bar{D})$  est nulle.

Par ailleurs, la formulation de charge satisfait automatiquement l'inégalité de dissipation. Le taux de dissipation d'énergie due au dommage est :

$$(4.71)$$

et comme  $\Omega$  on a

Ainsi, on voit que les seules différences que présente ce modèle vis-à-vis des théories classiques locales résident en l'utilisation par la loi de comportement (équation 4.59) et par la fonction de charge (équation 4.68) d'une variable d'endommagement non locale au lieu d'une variable locale.

Bazant et Pijaudier-Cabot (**Bazant & Pijaudier-Cabot 1988**) ont démontré analytiquement qu'avec ce type de modèle, la dissipation d'énergie ne peut se localiser dans un volume nul et les calculs numériques, qu'ils ont effectués, l'ont confirmé à travers l'obtention de zones de localisation de dimensions finies non nulles et d'une convergence vers la solution exacte au fur et à mesure du raffinement du maillage.

Par ailleurs, c'est cette formulation que Pijaudier-Cabot et Benallal (**Pijaudier-Cabot & Benallal 1993**) ont utilisé pour l'étude de la bifurcation et de la localisation.

#### 4.7.7 Implantation numérique

Le modèle ainsi décrit pour la simulation des principaux phénomènes macroscopiques, mis en jeu dans le cas d'un comportement élastique endommageable est implémenté dans le programme de calcul éléments finis PLAST2 de Owen et Hinton (**Owen & Hinton 1980**). Ce programme est modifié pour la prise en compte du comportement couplé, élasticité-endommagement en premier lieu, puis un bloc supplémentaire est rajouté pour le calcul de l'endommagement non local, selon l'organigramme de la figure 4.18. Ce programme sera ineffaçable avec le logiciel post traiteur GID.

Etant donnée l'écriture du modèle, la façon naturelle de résoudre par éléments finis les problèmes non linéaires est d'utiliser un algorithme à matrice sécante car l'endommagement affecte la valeur du module sécant (Figure 4.18) : à chaque itération, les caractéristiques élastiques des éléments sont recalculées (l'endommagement est à tout instant du processus, interprété comme une variation de ces caractéristiques élastiques).

Le test de convergence revêt une forme traditionnelle : à l'itération courante  $i$  ( ), on calcule les résidus (ou forces de rééquilibrage) de la résolution qui assurent l'équilibre global de la structure :

$$= [K ( )] - \quad (4.72)$$

Où est l'effort imposé (à équilibre) de l'incrément en cours (dans le cas où l'on impose un déplacement à la structure, cet effort dépend de l'itération  $i$ ).

est le déplacement calculé à partir de et de l'endommagement de l'itération précédente :

$$(4.73)$$

et  $[K ( )]$  est la matrice sécante affectée par le nouvel endommagement calculé à partir de .

On estime que l'on a raisonnablement convergé vers la solution lorsque les deux tests suivants sont vérifiés :

$$\frac{\| \mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1} \|}{\| \mathbf{u}^i \|} < \epsilon \quad \text{et} \quad \frac{\| \mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1} \|}{\| \mathbf{u}^i \|} < \epsilon \quad (4.74)$$

Où  $\mathbf{u}^i$  sont les composantes à valeur absolue maximale des vecteurs de l'itération  $i$ , et  $\epsilon$  est une tolérance choisie par l'utilisateur ( $10^{-3}$  par exemple).  $\mathbf{u}^i$  indique la transposition euclidienne).

L'algorithme de calcul non linéaire est testé sur une éprouvette en traction permettant de valider l'implantation du modèle. L'option choisie étant de calculer la moyenne de la variable d'endommagement  $D$  sur un volume représentatif de l'endommagement. Ce volume est en calcul plan, constitué d'un disque de rayon  $R$ . La valeur d'endommagement non locale  $\bar{D}$ , peut être calculée par une méthode d'intégration numérique, par exemple, la méthode de Gauss dans le cadre de la méthode des éléments finis.

Dans ce cadre, la valeur de  $\bar{D}$  sur un point géométrique  $x_i$  est calculée par :

$$\bar{D} = \frac{\int_V \psi(y, x) D dv}{\int_V \psi(y, x) dv} \quad (4.75)$$

dont l'approximation numérique est :

$$\bar{D}(M) = \frac{\sum_{N \in V} W(N) D(N)}{\sum_{N \in V} W(N)} \quad (4.76)$$

L'équation qui s'écrit également comme suit :

$$\bar{D}(x_i) = \frac{\sum_{N=1}^{N=N_e} \sum_{N=1}^{N=N_g} w_g \psi(y_g, x_i) D(y_g) \det(J)_g}{\sum_{N=1}^{N=N_e} \sum_{N=1}^{N=N_g} w_g \psi(y_g, x_i) \det(J)_g} \quad (4.77)$$

Où  $N_e$  est le nombre total d'éléments,  $N_g$  est le nombre des points de Gauss dans un élément,  $y_g$  est le vecteur position du point d'intégration, et  $w_g$  le coefficient du poids associé.

$W(N)$  est la contribution du point  $N$  dans le volume représentatif de  $M$  et s'écrit sous la forme :

$$W(N) = S(N)\psi(\overline{MN}) \quad (4.78)$$

où  $S(N)$  représente l'élément d'aire attaché au point d'intégration  $N$  et  $\psi(x)$  est la fonction de pondération décroissante avec la distance (fonction de Gauss ou cloche).

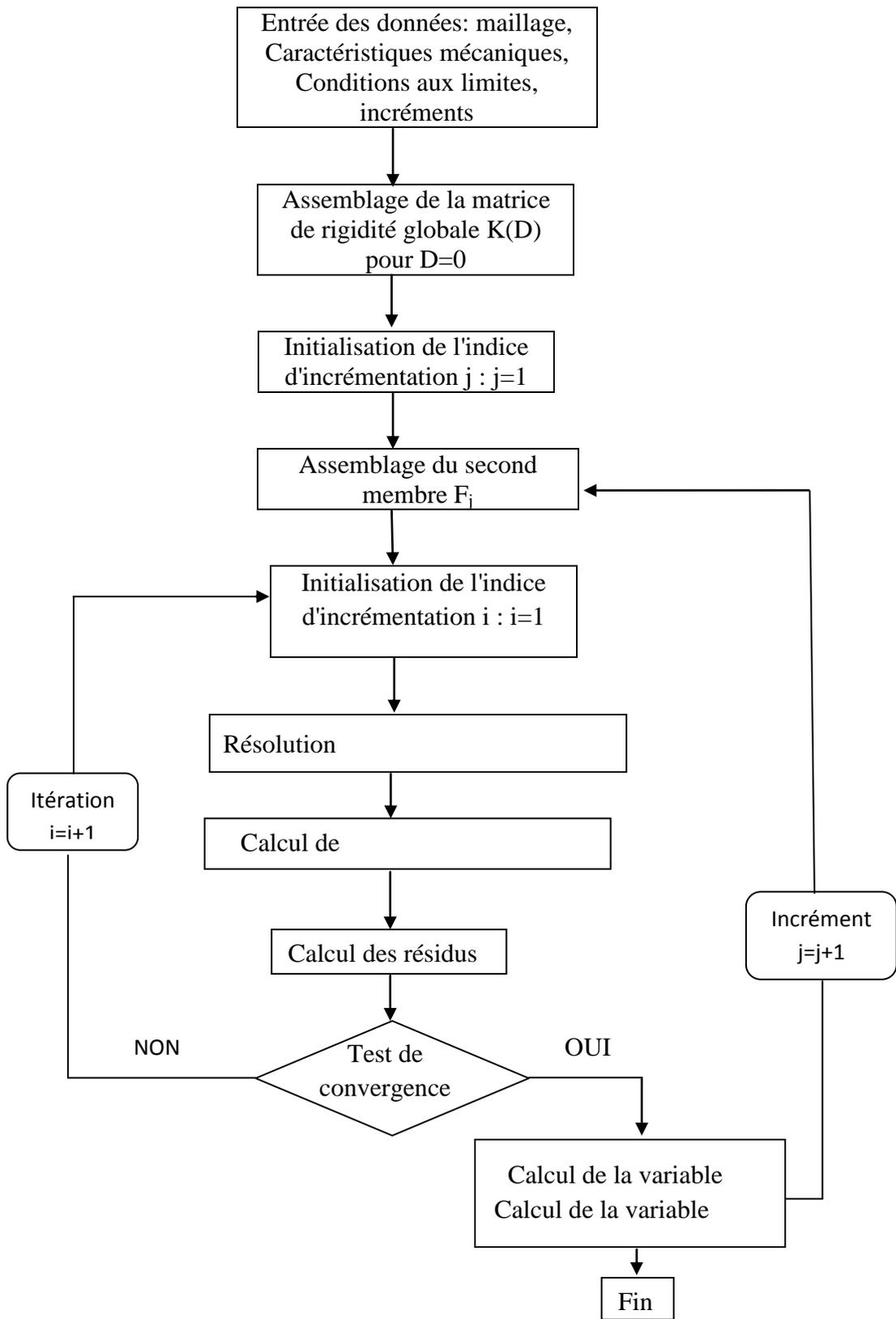
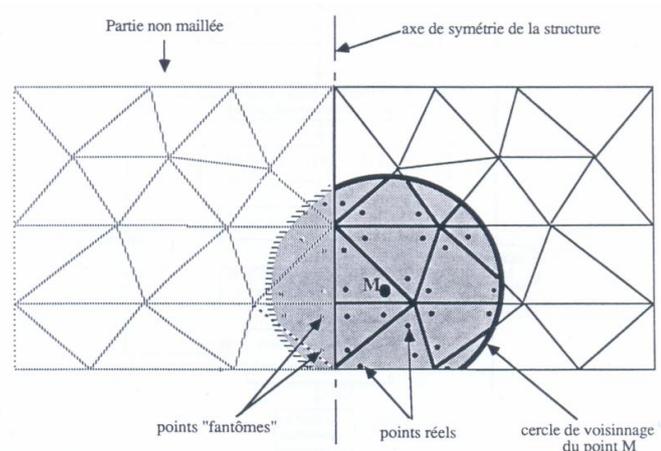


Figure 4.18: Organigramme de l'algorithme de calcul.

L'implantation pratique de cet aspect non local dans le code éléments finis se fait de la manière suivante: Avant d'effectuer le premier pas de chargement, un sous programme a pour fonction de définir le volume représentatif de chaque point de Gauss de la structure. Ainsi, pour chaque point d'intégration  $M$  du maillage, on calcul les distances qui le sépare de tous les autres points de Gauss et l'on considère comme voisins ceux qui sont inclus dans le disque de rayon  $R$  donnée. Pour chacun de ces points  $N$ , on calcul la contribution dans le voisinage du point  $M$  et l'on constitue un fichier où l'on stocke, pour tout point  $M$ , le nombre de points voisins, la référence et la contribution de chacun de ces voisins. On peut remarquer qu'avec une telle procédure, la donnée  $R = 0$  permet de mener une approche locale classique (le point  $M$  est considéré comme étant voisins de lui-même avec une contribution unité) (Figure 4.19).

Dans le cas où, pour diminuer la taille du problème éléments-finis, les symétries de géométrie et de chargement de la structure sont exploitées, il est nécessaire de tenir compte des points de Gauss fictifs qui ne sont pas présents dans le maillage mais qui existent dans la structure réelle (Figure 4.19).



**Figure 4.19** : Construction de points fictifs dans le voisinage du point  $M$  (Davanne, Saouridis & Piau 1989).

## 4.8 Validation du programme de calcul

### 4.8.1 Etude de la réponse d'un élément de volume en traction

Un élément de volume est sollicité en traction uniaxiale. Le chargement se fait en déplacement imposé. La géométrie et le chargement utilisé sont représentés sur la figure 4.20.

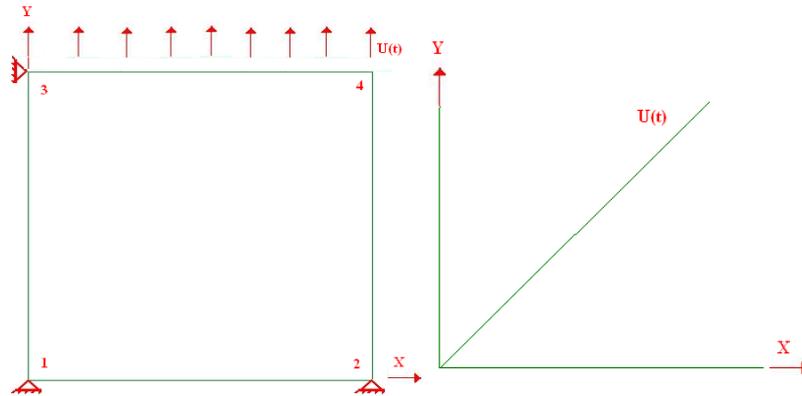


Figure 4.20 : Géométrie et chargement.

Les paramètres du modèle sont définis dans le tableau 4.2.

E(MPa)							
25000	0.2	0.8	20000	0.0001	1.4	1800	1

Tableau 4.2: Paramètres du modèle pour une éprouvette en traction

La figure 4.21 présente la réponse globale au nœud N°4.

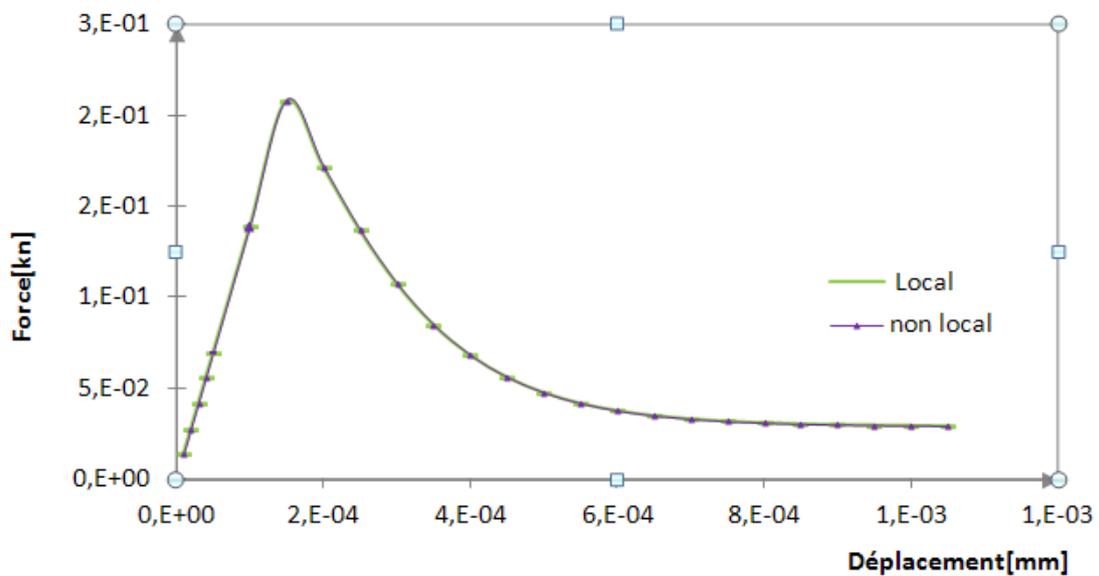
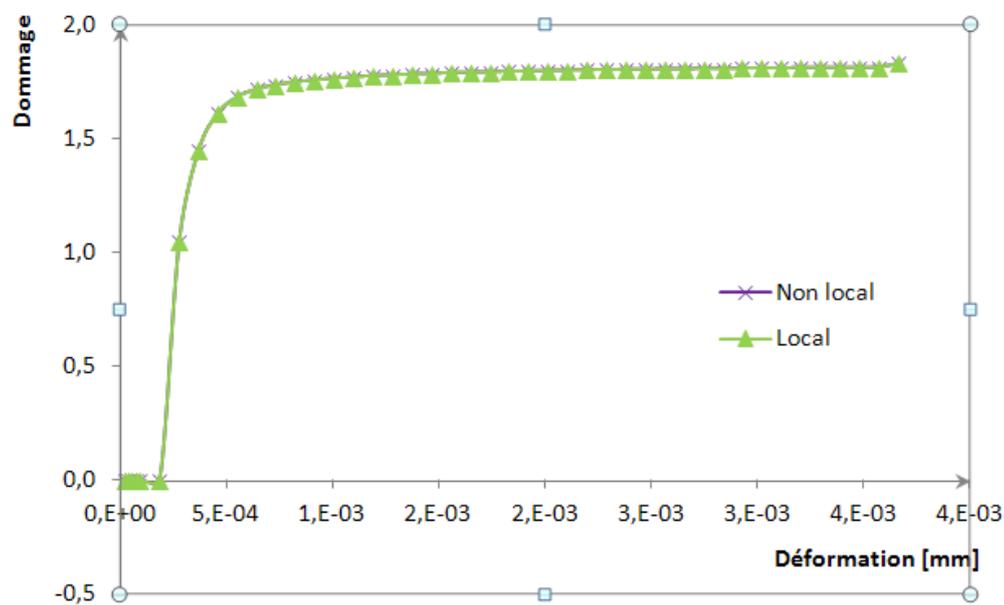


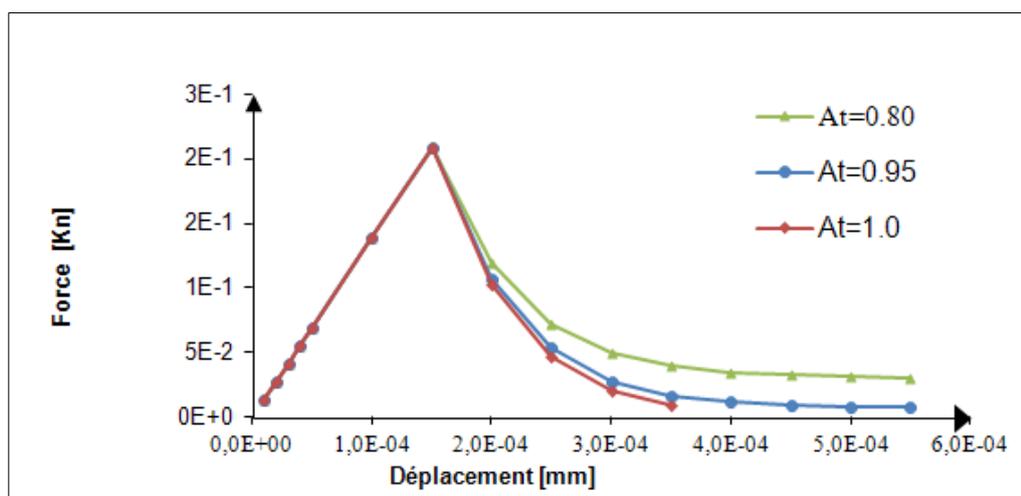
Figure 4.21: Réponse globale Force- Déplacement au nœud n°4.

L'évolution du dommage en fonction de la déformation équivalente est donnée sur la figure 4.22.



**Figure 4.22:** Evolution du dommage en fonction de la déformation équivalente au point de Gauss N°4.

L'influence du paramètre  $A_t$  sur la réponse locale est donnée sur la figure 4.23, et L'influence du paramètre  $A_t$  sur la réponse non locale est donnée sur la figure 4.24.



**Figure 4.23:** Influence du paramètre  $A_t$  dans le cas local.

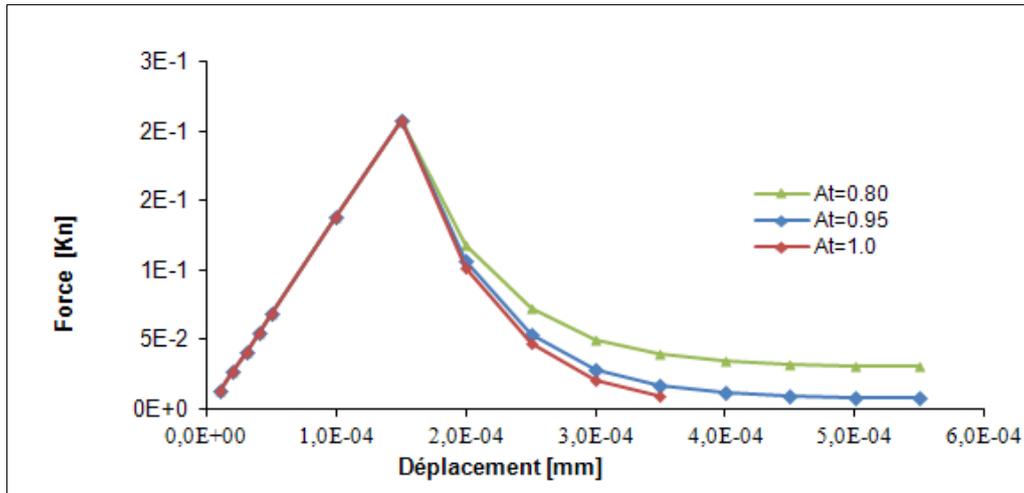


Figure 4.24: Influence du paramètre  $A_t$  dans le cas non local.

L'influence du paramètre  $B_t$  sur la réponse locale est donnée sur la figure 4.25, et L'influence du paramètre  $B_t$  sur la réponse non locale est donnée sur la figure 4.26.

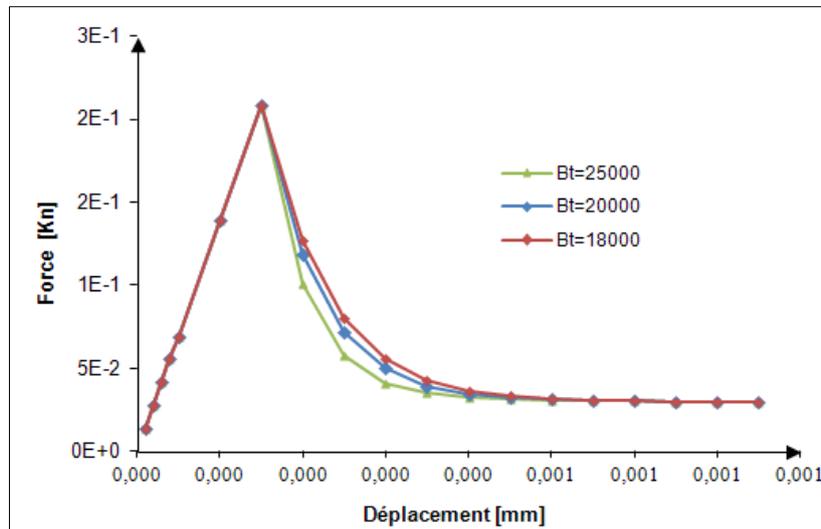


Figure 4.25: Influence du paramètre  $B_t$  dans le cas local.

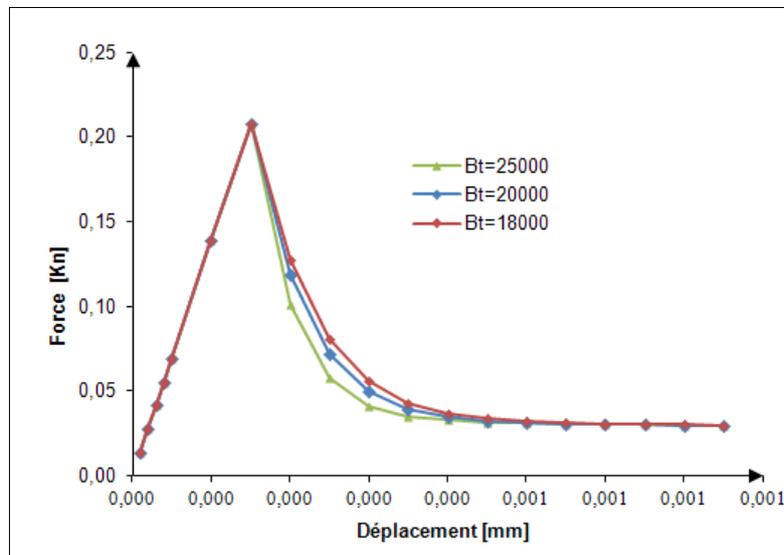


Figure 4.26: Influence du paramètre  $B_t$  dans le cas non local.

La réponse globale de l'essai de traction - compression est donnée sur la figure 4.27.

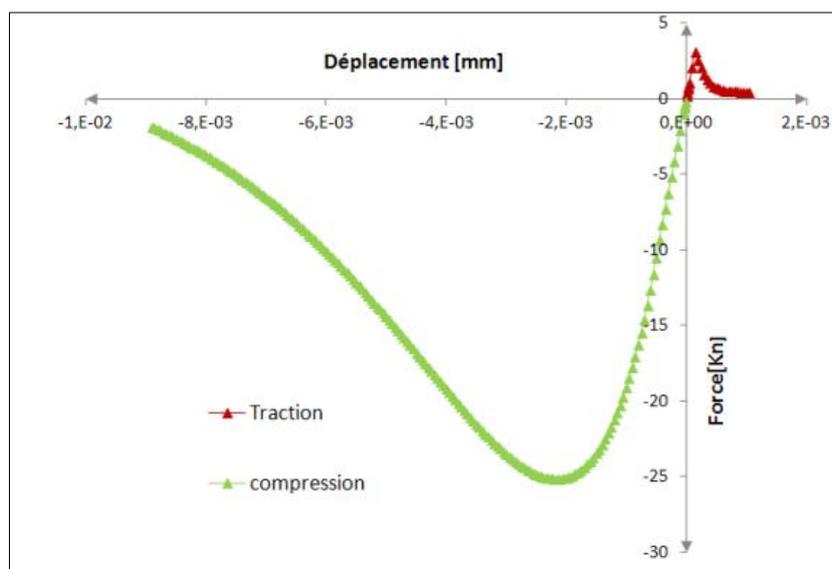
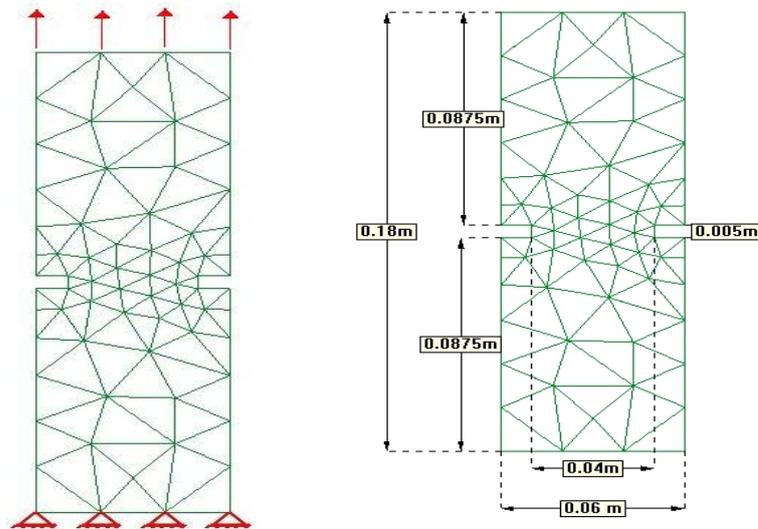


Figure 4.27: Réponse globale de l'essai de traction – compression.

### 4.8.2 Application à une éprouvette en traction

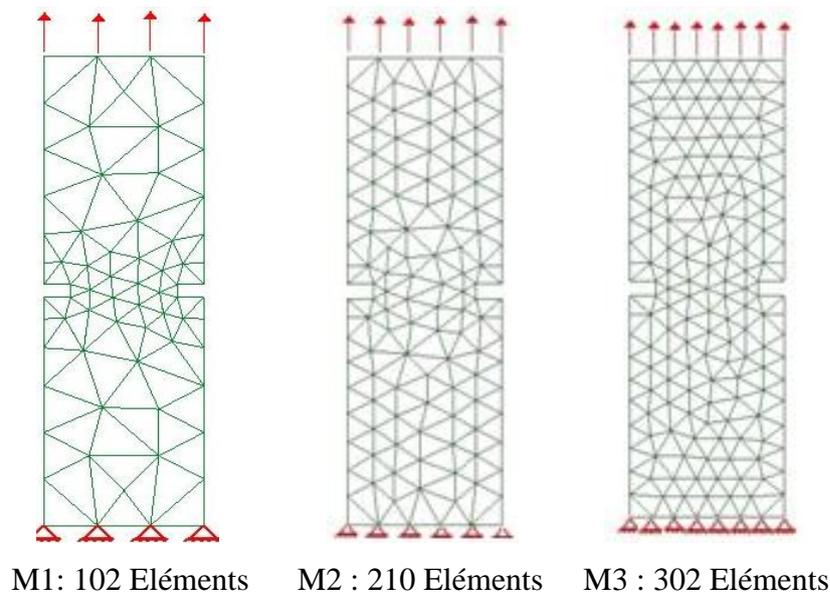
Le maillage est réalisé par des éléments triangulaires à trois nœuds avec un point d'intégration de Gauss. Une condition limite d'encastrement est appliquée d'un côté, et un déplacement est imposé sur l'autre.

Les dimensions, le chargement, et les conditions aux limites de l'éprouvette sont représentés sur la figure 4.28.



**Figure 4.28** : Dimensions, chargement et conditions aux limites de l'éprouvette en traction.

Les différents maillages utilisés pour cet essai sont représentés sur la figure 4.29.



**Figure 4.29**: Représentation des différents maillages utilisés.

### 4.8.2.1 Etude selon les différents pas d'allongements

Les paramètres du modèle sont définis dans le tableau 4.3 :

E (MPa)	$\nu$	$A_t$	$B_t$	$\varepsilon_{D_0}$	$A_c$	$B_t$	R
21000	0.2	0.8	20000	0.0001	1.4	1800	0.03

**Tableau 4.3:** Paramètres du modèle pour une éprouvette en traction.

La distribution du dommage, de la contrainte de von Mises, et de la déformation équivalente est représentée sur les figures 4.30, 4.31, 4.32, pour les différents maillages M1, M2 et M3 respectivement, et cela pour trois pas d'allongements correspondants, à l'initiation du dommage, à la propagation du dommage et à la rupture de la plaque.

Au cours de la phase de propagation, nous constatons que le dommage évolue dans la partie centrale de l'éprouvette. La rupture de la plaque se traduit par l'incapacité de la plaque à supporter des contraintes. On remarque également l'apparition d'une bande de plus en plus fine du dommage correspondant aux différents types du maillage utilisé M1 (102 éléments), M2 (210 éléments) et M3 (302 éléments).

La rupture s'annonce à un déplacement ( $U=1,76.10^{-5}$ mm) pour le maillage M1, à un déplacement ( $U=1,53.10^{-5}$ mm) pour le maillage M2 et à un déplacement ( $U=1,65.10^{-5}$ mm) pour le maillage M3.

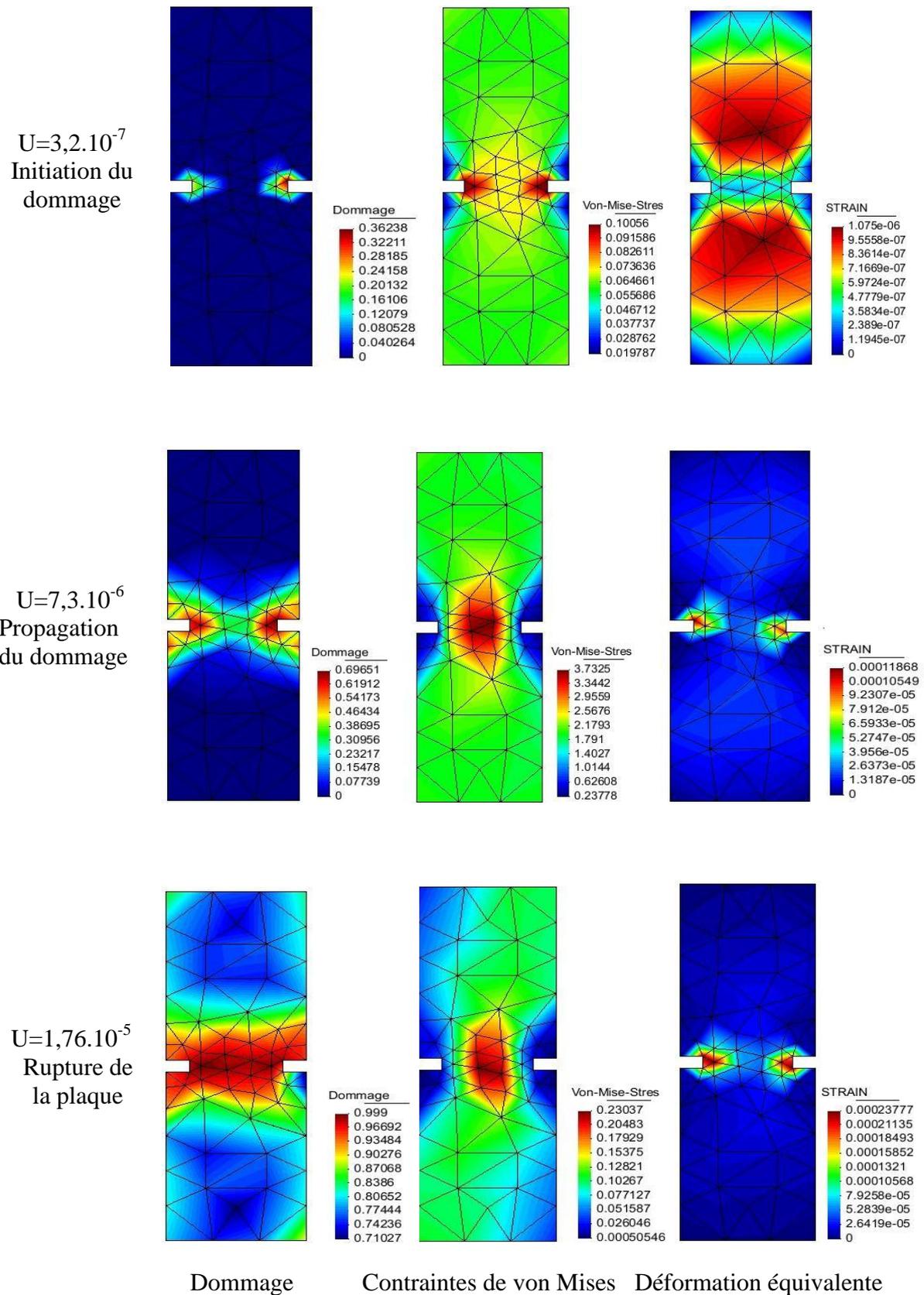


Figure 4.30: Représentation des isovaleurs pour le maillage M1 à 102 éléments.

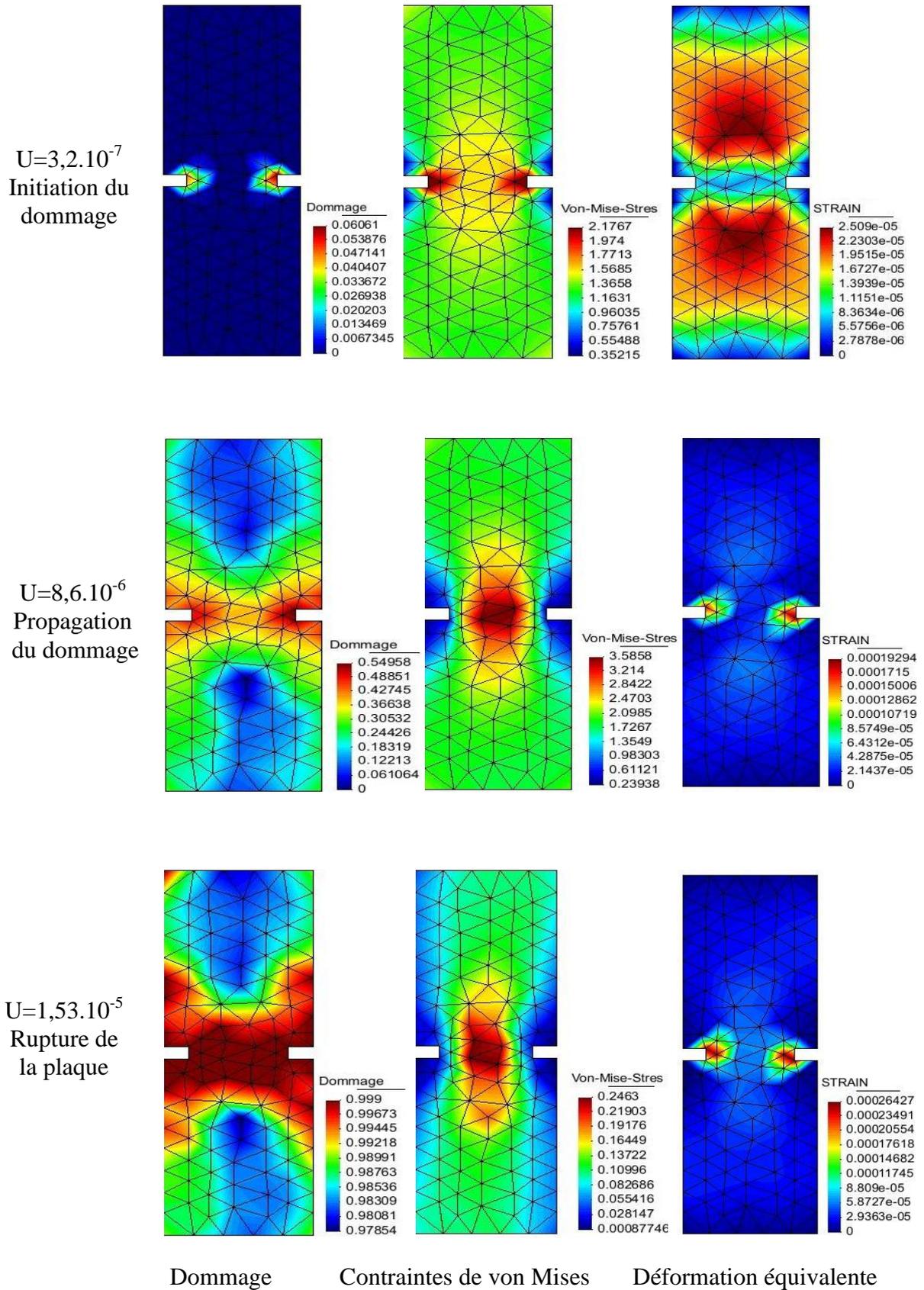


Figure 4.31: Représentation des isovaleurs pour le maillage M2 à 210 éléments.

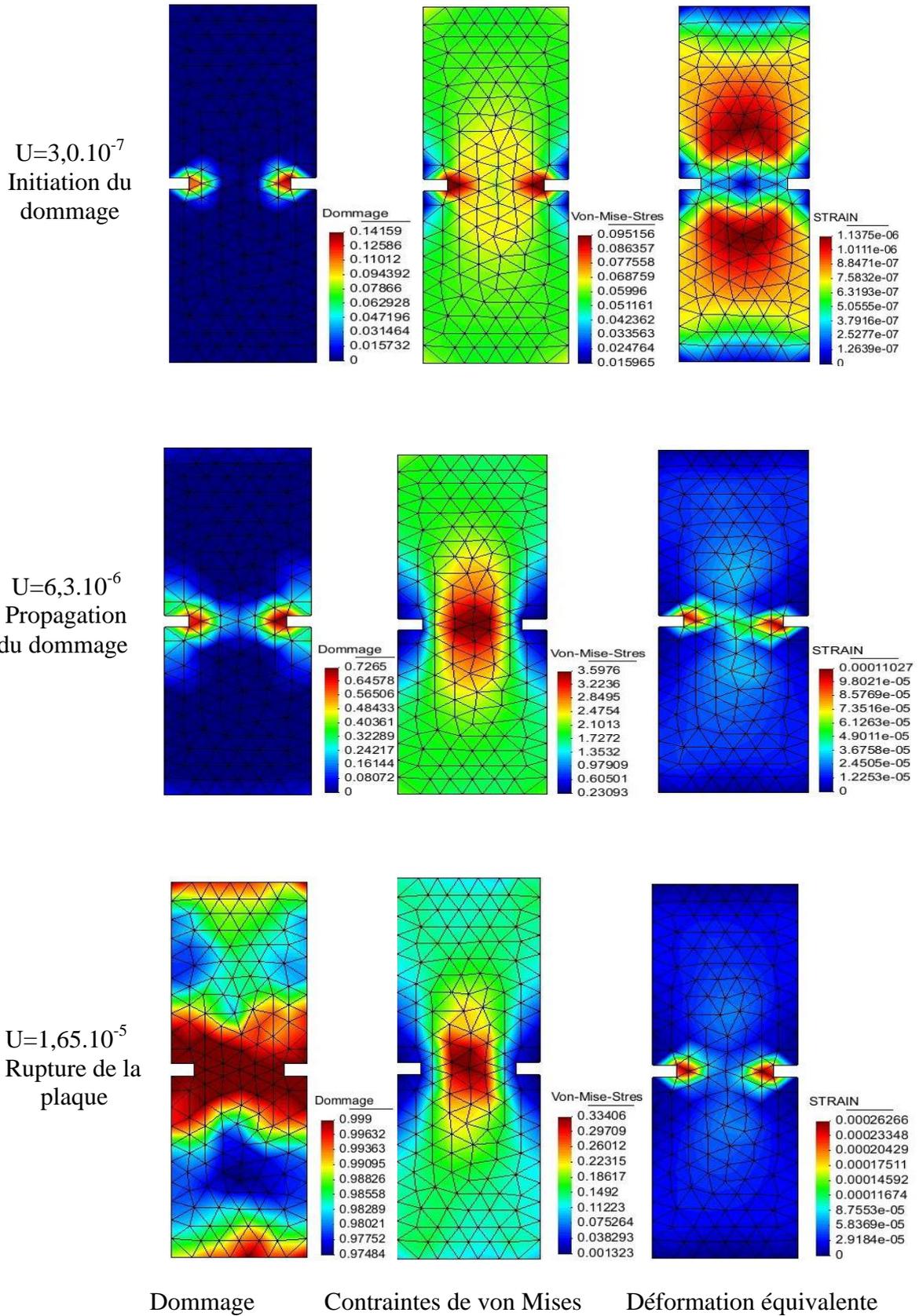
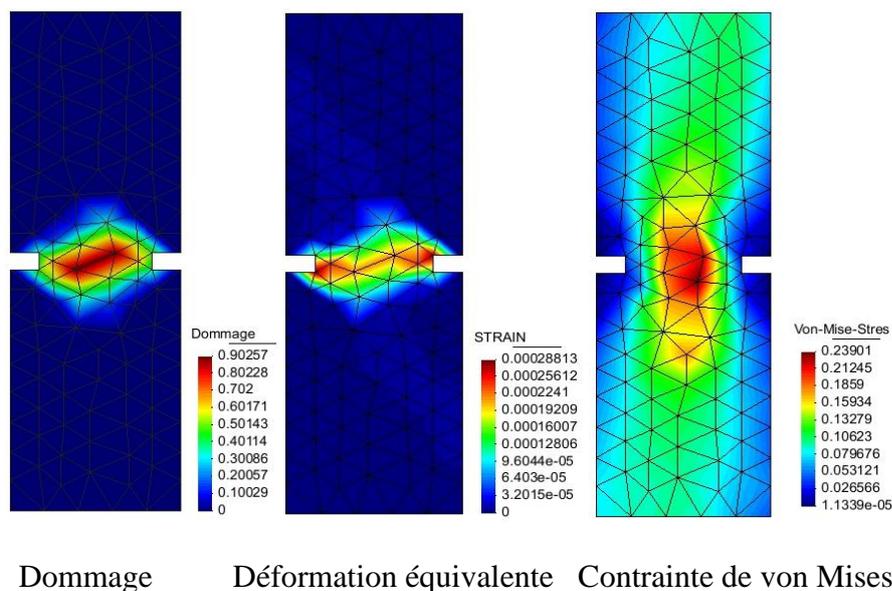


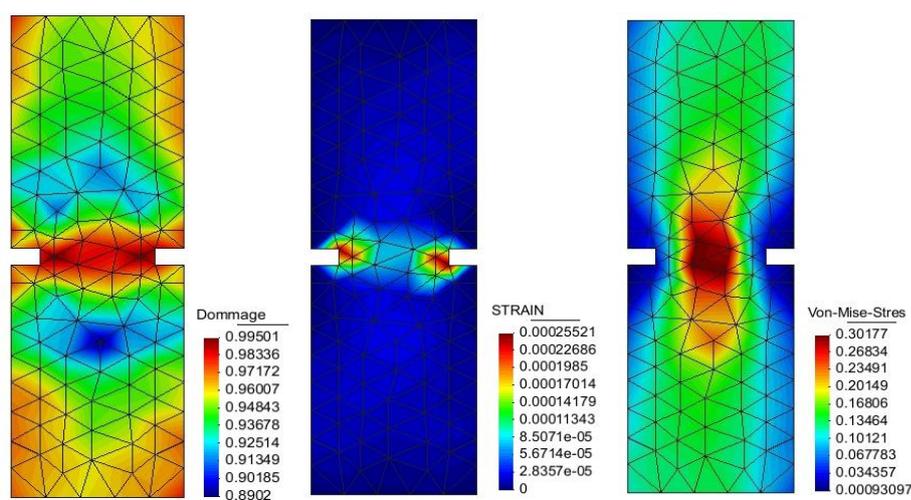
Figure 4.32: Représentation des isovaleurs pour le maillage M3 à 302 éléments.

### 4.8.2.2 Influence du rayon d'intégration R sur la réponse de la structure

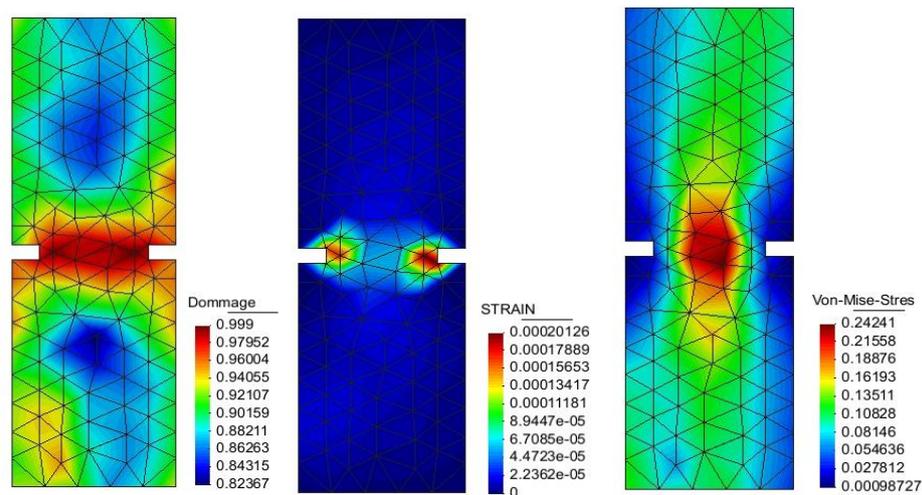
Le calcul non local est réalisé pour trois valeurs de :  $R=0.03\text{mm}$ ,  $R=0.04\text{mm}$ , et  $R=0.05\text{mm}$ , alors que le calcul local est fait à  $R=0$ . On montre la distribution du dommage D, de la déformation équivalente, et de la contrainte de von Mises dans le cas local sur la figure 4.33, et dans le cas non local sur les figures 4.34, 4.35, et 4.36 pour les différentes valeurs de R.



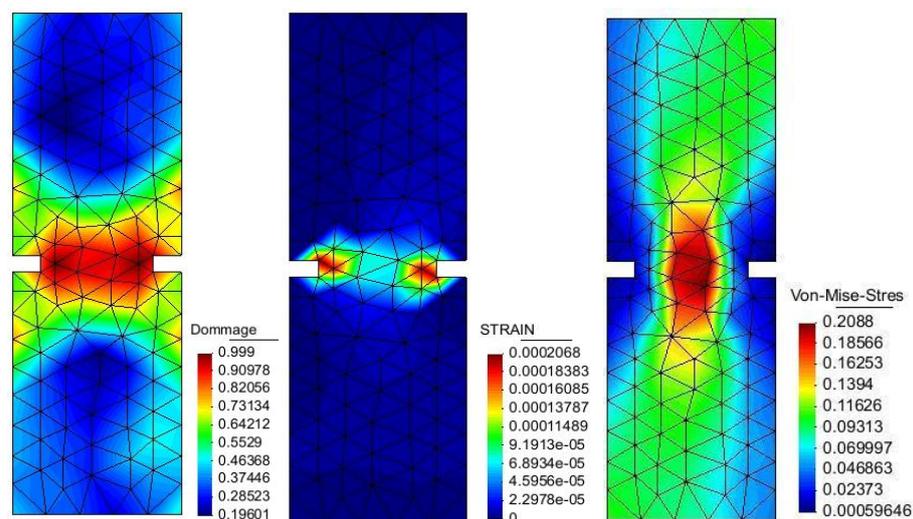
**Figure 4.33** : Distribution du dommage local, de la déformation équivalente et de la contrainte de von Mises ( $R = 0$ ).



**Figure4.34** : Distribution du dommage non local, de la déformation équivalente, et de la contrainte de von Mises ( $R=0,03 \text{ mm}$ ).



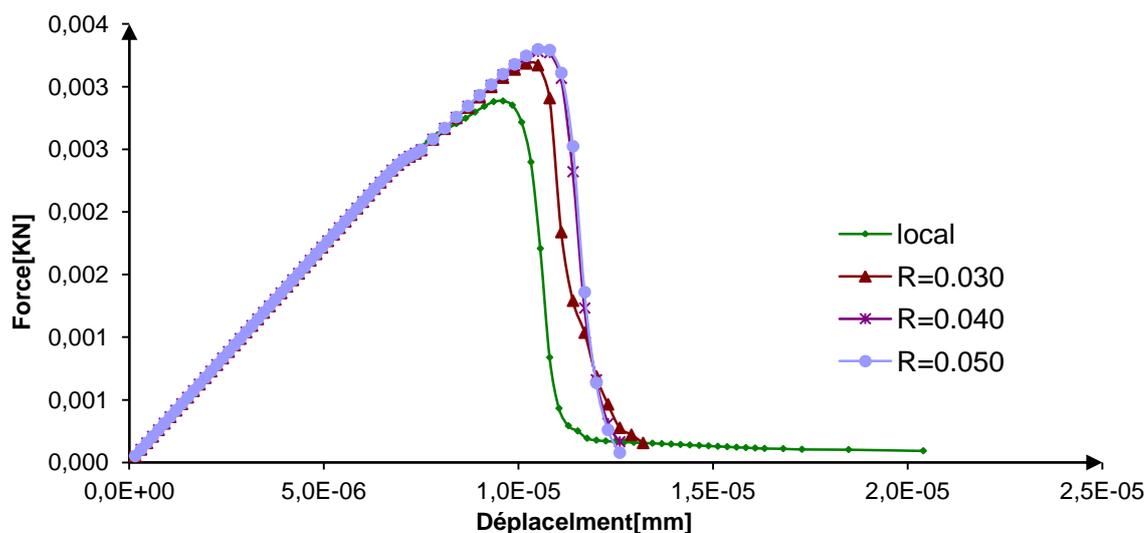
**Figure 4.35 :** Distribution du dommage non local, de la déformation équivalente, et de la contrainte de von Mises ( $R=0,04$  mm).



**Figure 4.36:** Distribution du dommage non local, de la déformation équivalente, et de la contrainte de von-Mises ( $R=0,05$  mm).

L'analyse des isovaleurs montre pratiquement que l'étendue, et la forme de la zone de localisation dans le cas local ( $R = 0$ ), se fait sur une rangée d'éléments, par contre dans le cas non local ( $R = 0.03$ ,  $R = 0.04$  et  $R = 0.05$ ), on constate que l'étendue et la forme de la zone de localisation forme un nuage de points autour de la partie centrale de la plaque. Le volume de la zone de localisation dépend donc de la valeur de  $R$ . En augmentant la valeur de  $R$ , on constate que l'étendue de la zone de localisation augmente.

La figure 4.37 représente la courbe force-déplacement selon les différentes valeurs de  $R$  (cas local et cas non local).



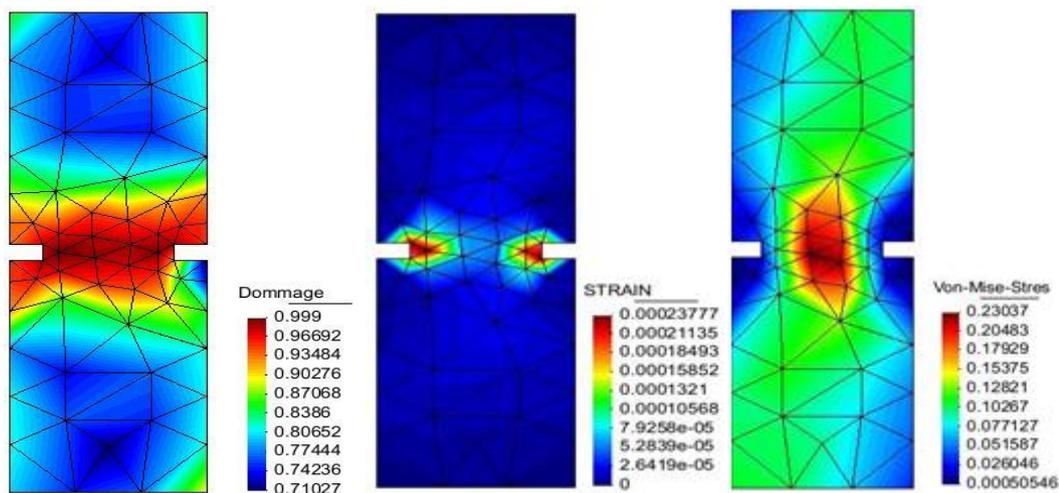
**Figure 4.37** : Courbe Force-Déplacement pour différentes valeurs de " R ".

Nous constatons que la déformation à rupture augmente avec la valeur de R. Nous remarquons aussi que durant la phase d'adoucissement, les courbes forces-déplacements se superposent d'autant mieux que la valeur de R est élevée. Ceci montre que les valeurs non nulles de R assurent l'indépendance de la solution vis-à-vis du maillage, et grâce à cette formulation non locale nous avons pu augmenter la charge à rupture, ce qui constitue l'un des inconvénients majeur des formulations non locales. Nous constatons également que les courbes se superposent pour  $R = 0.04$  et  $R = 0.05$ . Nous signalons aussi que la gestion du pas de chargements est plus stable dans le cas non local que dans le cas local.

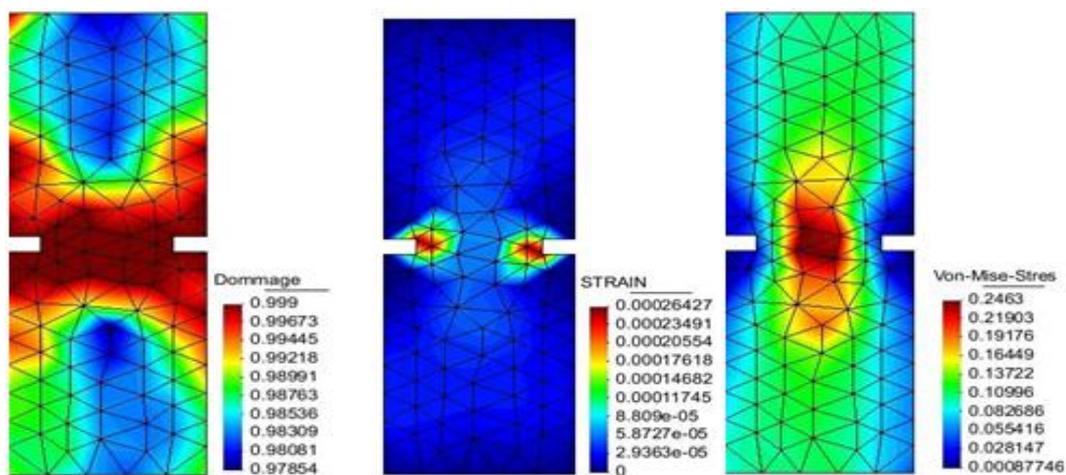
### 4.8.2.3 Sensibilité au maillage

Trois maillages réguliers sont utilisés avec une taille d'élément au voisinage de la fissure qui est de  $h=0.019\text{m}$  pour le maillage M1,  $h=0.011\text{m}$  pour le maillage M2, et  $h=0.0088\text{m}$  pour le maillage M3. Le calcul non local est réalisé pour une seule valeur de  $R=0.05$ . Les différents maillages utilisés sont représentés sur la figure 4.29.

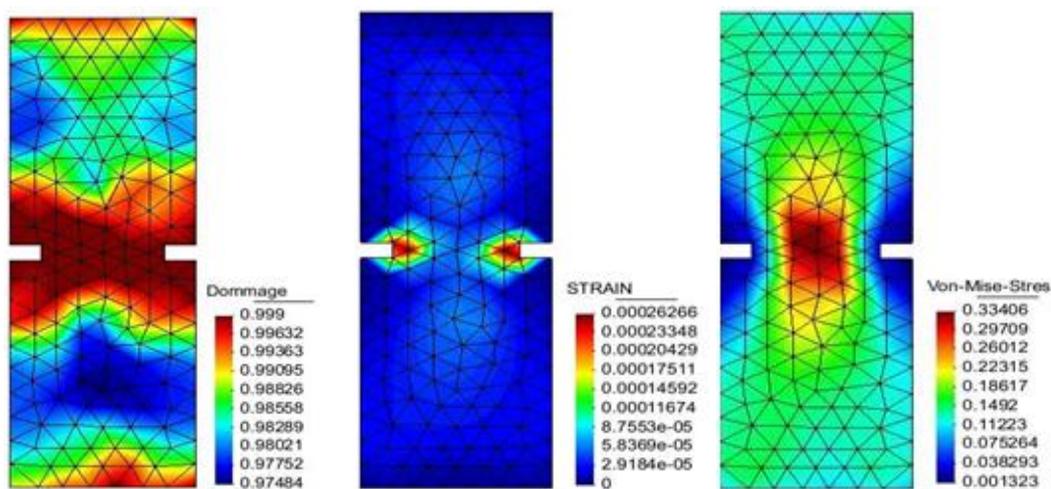
On montre sur la figure 4.38, la distribution du dommage D, de la déformation équivalente, et de la contrainte de von Mises respectivement pour les différents maillages M1, M2 et M3.



M1: 102 Eléments



M2: 210 Eléments



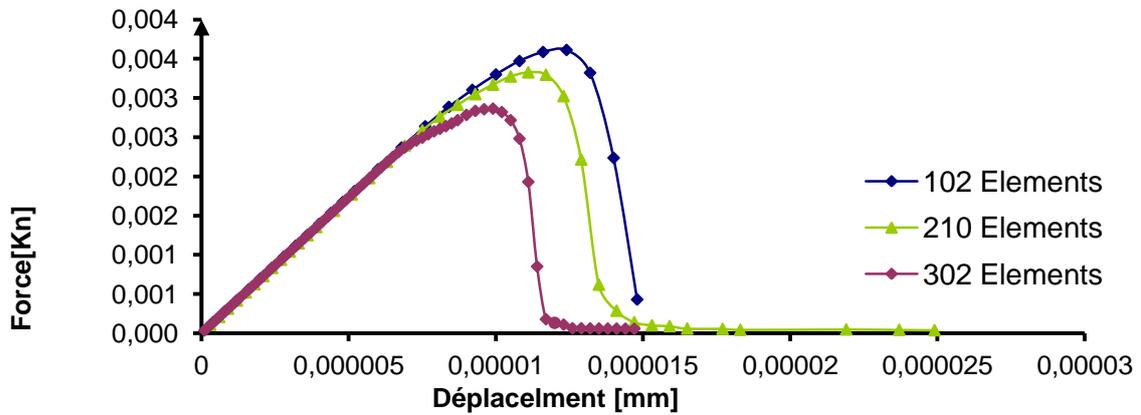
M3: 302 Eléments

**Figure 4.38:** Distribution du dommage non local, de la déformation équivalente, et de la contrainte de von Mises pour les différents maillages.

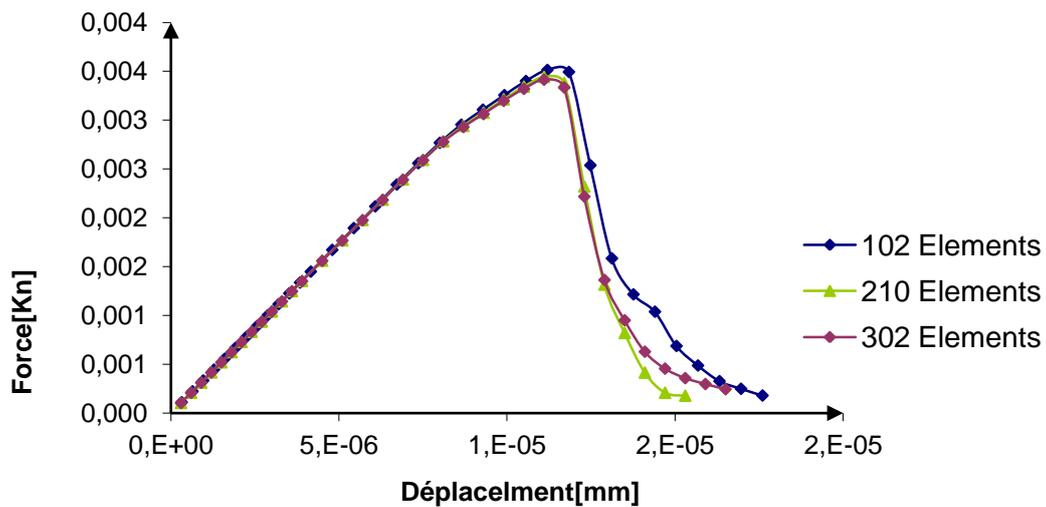
L'analyse des isovaleurs montre que l'étendue, et la forme de la zone de localisation dans le cas local ( $R = 0$ ), se fait sur une rangée d'éléments, et ceci quel que soit le maillage considéré. La localisation se fait comme observé précédemment, toujours sur une rangée d'éléments. La largeur de cette bande est liée directement à la discrétisation spatiale, ce qui nous ramène à dire que, si l'on prend des pas de  $h$  (taille d'élément) très faible, on aura une largeur de bande presque nulle (**Saanouni 1988, Almansba & al. 2009**), par contre dans le cas non local, et pour une valeur de  $R$  donnée, on remarque que la zone de localisation est quasiment identique sur les trois maillages (Figure 4.38). La valeur de  $R = 0,04$  semble être représentatif d'une zone où le dommage est correctement capturée par l'approche considérée dans ce travail. En effet, Hall et Hayhurst ont observé que de nombreux matériaux ont au niveau microstructural un volume caractéristique où la répartition des dommages est presque uniforme (**Hall & Hayhurst 1991**). La dimension de ce volume caractéristique est liée à la microstructure du matériau. Par conséquent, le bon choix de la valeur de ce paramètre ne peut être accessible que par la combinaison de la recherche numérique et expérimentale (**De Vree & al. 1995**).

La figure 4.39, présente la courbe force-déplacement dans le cas local pour les différents maillages M1, M2 et M3. Les courbes efforts/ déplacement sont différentes selon les maillages utilisés. La conséquence du phénomène de localisation au plan numérique est immédiate. C'est le maillage qui contrôle la taille de la zone de localisation de l'endommagement. Le calcul devient instable et toute la déformation se localise dans un seul élément. En raffinant le maillage, on modifie la réponse globale de la structure (qui dépend explicitement du nombre d'éléments). En outre, l'énergie dissipée pour rompre la plaque tend vers zéro quand on raffine le maillage : à la limite la barre se rompt sans consommer d'énergie, comme annoncé précédemment. Autant dire que les résultats obtenus numériquement ne sont pas représentatifs de la réponse réelle d'une structure. En fait, la solution de calcul dépend pathologiquement de la taille des éléments, mais aussi plus généralement de leur forme, de leur orientation, du degré d'interpolation, en un mot, de l'espace d'approximation.

La figure 4.40, présente la courbe force-déplacement dans le cas non local, et selon les différents maillages M1, M2 et M3. On peut noter l'objectivité de ces résultats. Il n'y a pas d'influence du maillage sur la réponse globale de la structure. On peut aussi noter que la résistance maximale de la plaque est identique pour les trois maillages, ce qui nous permet de dire que l'objectif attendu de la formulation non locale est atteint.



**Figure 4.39** : Courbe force – déplacement dans le cas local, et selon les différents maillages M1, M2 et M3.



**Figure 4.40** : Courbe force-déplacement dans le cas non local, et selon les différents maillages M1, M2 et M3

## Conclusion

Dans ce chapitre un modèle élastique isotrope couplé à un endommagement non local est développé pour reproduire le comportement structurel du béton.

Il est bien connu que les formulations classiques par la méthode des éléments finis présentant un caractère adoucissants sont fortement dépendantes des paramètres de discrétisation dans la phase post critique et sont à l'origine de la localisation : la forte dépendance de la structure vis-à-vis du maillage. La progression de l'endommagement est influencée par la discrétisation spatio-temporelle. L'hypothèse de la mécanique locale est alors remise en cause. Afin de palier aux défaillances de la méthode des éléments finis et de résoudre les problèmes de dépendance aux maillages, un modèle d'endommagement non local est présenté.

Pour effectuer des calculs non-locaux, il est nécessaire de choisir la variable à délocaliser. Dans notre travail, nous avons choisi de délocaliser la variable d'endommagement "D" sous forme d'une intégrale de Gauss " ". Ce modèle décrit la dégradation continue d'un milieu, supposé initialement vierge de toute fissure et/ou cavité.

L'objectif de cette techniques de régularisation, est d'enrichir la description mécanique du milieu de manière à pouvoir décrire des états non homogènes de déformation, afin d'éviter la sensibilité de la solution au maillage durant la phase d'adoucissement. Ce modèle non local devrait contribuer à la compréhension de processus physiques majeurs qui gouvernent les mécanismes de dégradation du béton. De ce fait une attention particulière doit être portée au comportement du matériau pour pouvoir reproduire correctement les différents phénomènes mis en jeu lors de sa dégradation.

Comme application nous avons choisi de faire l'étude de l'influence de la formulation sur une éprouvette en traction. L'application montre que les résultats obtenus par le modèle non local sont quasiment indépendants du maillage. Nous avons, grâce au modèle non local montré que les courbes de traction se superposent, et on a pu éliminer les problèmes de convergence et de stabilité dans les calculs. Ce qui atteint l'objectif fixé pour ce type de modèle.

# Conclusion et perspectives

La conception et la surveillance des ouvrages en béton nécessitent la mise en œuvre de simulations de comportement performantes. On a assisté ces vingt dernières années au développement de recherches visant d'une part à mieux connaître les performances mécaniques du béton et, d'autre part, à améliorer les techniques de simulations numériques de ce matériau.

Ces différents travaux ont montré que le phénomène principal, qui conditionne le comportement du matériau, est la dégradation par microfissuration sous charge. La complexité de la microstructure du matériau fait que la description fine de tous les mécanismes qui sont réellement mis en jeu reste difficilement abordable. Par ailleurs, l'utilisation industrielle d'un modèle de comportement nécessite la mise en place de concepts faciles à manipuler dont les fondements ont été, et sont encore dans une large mesure, ceux de l'élasticité linéaire.

L'objectif de ce travail est de proposer une modélisation numérique, la plus fine possible, du comportement du béton pour le calcul de structures, dans le cadre d'une description du comportement par la mécanique de l'endommagement. Cette procédure débouche sur un outil aux prétentions industrielles.

Après une première partie consacrée à l'analyse expérimentale du comportement, à partir de résultats et de concepts issus de la littérature sur ce sujet, on s'est intéressé aux grandes familles de modèles conçus pour ce matériau.

Par la suite un modèle d'endommagement anisotrope est proposé, implanté dans le code de calcul éléments finis prenant en compte différentes propriétés du béton comme la dissymétrie traction/compression, l'anisotropie de l'endommagement qui permet de représenter un état de fissuration orienté par le chargement, les déformations permanentes, et la refermetures des fissures (effet unilatéral). Et de privilégier les modèles d'endommagements (sans plasticité donc).

Une caractéristique est commune à la majorité de ces modèles : l'utilisation d'une relation de comportement de type "adoucissant", c'est-à-dire avec un pic en contrainte et une rigidité tangente négative après cette valeur ("strain softening").

Ce type de modèle nécessite un traitement particulier tant au niveau de l'identification qu'au niveau du traitement numérique en vue de calcul des structures.

Le problème essentiel est la localisation des déformations qui conduit :

- Sur le plan de l'expérimentation à une mauvaise adaptation des essais traditionnels vis-à-vis des hypothèses du modèle, liée à l'apparition précoce d'une localisation qui ne permet pas l'identification du modèle continu. Ce résultat ne doit pas être pour autant utilisé comme un argument sur la non existence du comportement adoucissant mais plutôt comme une insuffisance éventuelle de l'essai à mettre en jeu le phénomène que le modèle décrit.
- Sur le plan de calcul à des problèmes d'objectivité et de représentativité des résultats numériques.

Il est bien connu que ces formulations classiques, présentant un caractère adoucissants, sont fortement dépendantes des paramètres de discrétisation dans la phase post critique. L'hypothèse de la mécanique locale est alors remise en cause. Il est donc nécessaire de disposer de justifications physiques permettant de modéliser où et quand un endommagement significatif apparaît au sein du matériau. Dans ce but, nous avons utilisé le cadre standard de la thermodynamique des processus irréversibles avec variables internes pour formuler une loi de comportement couplé à un endommagement non local.

Le potentiel thermodynamique, défini à partir de la thermodynamique des phénomènes irréversibles, a permis de définir la force thermodynamique nécessaire pour produire le dommage. Quant à l'hypothèse du potentiel de dissipation et à la fonction seuil d'endommagement, elles nous ont conduit à la loi d'évolution du dommage. Malheureusement, cette formulation n'a pu être implémentée dans un code de calcul industriel (Abaqus) en raison de l'inaccessibilité de certaines données, même avec une subroutine utilisateur VUEL, pour remédier à cette initiation nous avons utilisé un programme de calcul en élastoplasticité à écrouissage isotrope linéaire qui a été étendu au cas d'un comportement élastique isotrope et au cas d'un comportement élastique anisotrope couplé à un endommagement local.

Nous avons montré tout d'abord que la solution est toujours liée à la discrétisation spatiale, ce qui constitue un inconvénient majeur de ce genre de formulations. Ce modèle laisse donc apparaître un certain nombre de difficultés rendant les techniques de résolution par éléments finis mal adaptées. Ceci est dû au fait qu'au cours de l'évolution du chargement, la description locale tient compte de l'évolution de la déformation, et éventuellement du dommage uniquement au point choisi sans prendre en considération les points voisins. Ceci entraîne une sous-estimation de la résistance ultime du matériau. Ces constatations ne sont pas nouvelles.

Le modèle d'endommagement local permet donc de reproduire le comportement adoucissant du béton, observé expérimentalement. L'adoucissement, qui se traduit par le fait que la matrice tangente cesse d'être définie positive, reflète au niveau macroscopique l'apparition de micro-fissures au sein du matériau. La contrainte pour un matériau adoucissant réduit alors graduellement à mesure que les micro-fissures se développent pour finalement atteindre zéro quand celles-ci coalescent en une macro-fissure visible. En conséquence, les solutions des équations différentielles qui gouvernent le comportement du matériau perdent leur unicité. On distingue le cas statique où ces équations perdent leur ellipticité et deviennent hyperboliques, et le cas dynamique où elles deviennent elliptiques. Le problème à résoudre devient alors mal posé. Les résultats des simulations numériques dépendent de la discrétisation.

Les limites de ces théories locales apparaissent aussi bien au plan physique, numérique ou mathématique. Dès que le critère de localisation est satisfait, la déformation devient discontinue. On ne sait pas a priori où sera satisfait ce critère. De ce fait, les éléments finis usuels isoparamétriques (qui imposent la continuité à l'intérieur des éléments) sont incapables de rendre compte d'une telle discontinuité. Des problèmes de convergences lors du calcul éléments finis apparaissent. Le critère de localisation apparaît comme la limite de fiabilité des calculs par éléments finis "usuels". Après la localisation, il suffit, alors, d'une faible perturbation numérique pour obtenir des résultats complètement différents. Ceci explique, en partie, la "non-objectivité" de la réponse éléments finis. Une méthode de régularisation devient donc nécessaire.

Le travail de recherche est en grande partie dédié à ce phénomène, son origine, sa mise en évidence numérique et surtout aux moyens de s'affranchir des difficultés qu'il engendre.

Une régularisation du modèle élastique isotrope couplée à un endommagement non local est donc présentée. Cette formulation qui consiste à délocaliser la variable d'endommagement "D". Le choix qui a été fait, est d'introduire dans le modèle de local une évolution non locale de l'endommagement compatible avec la thermodynamique. On tient ainsi compte de l'interaction entre les différents éléments de volume contrairement aux théories locales qui négligent totalement cette question. Un tel concept est applicable à tout type de modèles. Seule la variable responsable de l'adoucissement est considérée comme non locale, c'est-à-dire, selon le modèle utilisé, l'endommagement, la déformation plastique, etc. Par conséquent, la contrainte en un point d'intégration ne dépend pas seulement de la déformation au même point, mais également de la déformation dans un certain voisinage décrit par un volume représentatif.

La modélisation est implémentée dans un code de calcul éléments finis en se basant sur la formulation intégrale. Comme applications, nous avons choisi de faire l'étude de l'influence de la formulation sur des éprouvettes en traction. L'application montre que les résultats obtenus par le modèle non local sont quasiment indépendants du maillage. Nous avons, grâce au modèle montré que les courbes de traction se superposent quand la différence du maillage n'est pas importante, et on a pu éliminer les problèmes de convergence et de stabilité dans les calculs. Ce qui atteint l'objectif fixé pour ce type de modèle. Elle évoque également la validation des calculs à partir de la comparaison avec des résultats de la littérature. Des comparaisons calculs/expériences montrent les capacités et possibilités de cette nouvelle formulation, et celles-ci sont satisfaisantes dans leur ensemble.

Cependant, des perspectives de ce travail existent, et sont même nombreuses. Nous ne citerons que celles que nous envisageons à moyen terme :

- Tout d'abord, l'utilisation des milieux micromorphiques ou de Cosserat reste un domaine ouvert qui commence à faire son apparition dans la régularisation des modèles locaux,
- l'utilisation également d'autres formes de non localité du dommage peuvent être envisagées dans le convexe du dommage,
- établir une procédure claire d'identification des paramètres supplémentaires introduits dans le modèle,
- une extension à des modèles non locaux anisotropes reste à faire,

- et enfin, transporter ce travail, dans un code commercial de calculs pour mieux exploiter les modèles développés, et prévoir ainsi des calculs de structures plus complexes.

# Bibliographie

**ABAQUS, 1989**, "*Theory manuel*", Versio. 4.8, Hibbit, Karlson et Sorensen.

**ABEYARATNE R., & TRIANTAFYLLIDIS N., 1984**, "*An investigation of localization in a porous elastic material using homogenization theory*", Journal of Applied Mechanics - Vol.51 - pp.481-486.

**ACKER P., 1987**, "*Comportement mécanique du béton : apports de l'approche physico-chimique* ", Thèse de Doctorat ENPC.

**ADINA - ANDERSON A. C., FUGELSO E.D., & BUTTLER A.T., 1982**, "*Triaxial concrete constitutive models and their application to the nonlinear analysis of nuclear plant structures*", In: Nonlinear numerical analysis of R.C., presented at the winter annual meeting of A.S.M.E., Phoenix Arizona.

**AIFANTIS E. C., 1984**, "*On the microstructural origin of the inelastic models*", J. Engrg. Math. Tech. Vol. 106, pp. 326-331.

**AIFANTIS E.C., 1987**, "*The physics of plastic deformation*". Int. J. Plas., Vol. 3, pp. 211-247.

**AI-GHADIB A., ASAD-UR-RAMAN K., & BALUCH M., 1998**, "*CDM based finite element code for concrete in 3-D*", Computers and structures, 67: 451-462.

**ALLIX O., & DEÛ J.F., 1997**, "*Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading*", Engineering Transactions 45, 29-46.

**ALMANSBA M., 2011**, "*Modélisation des structures élastoplastiques généralisées (Approches locale et non locale appliquées aux matériaux élastoplastiques endommageables)*", Thèse de doctorat, université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

**ALMANSBA M., SAANOUNI K., & HANNACHI N. E., 2009**, "*Régularisation d'un modèle élastoplastique par introduction d'un gradient d'endommagement*", XIX<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, CFM'09, France, du 24 au 28 Aout.

**AMOUSSOU Ch., & ROUSSEAU T., 1997**, "*Modélisation numérique de l'endommagement fragile: 1.-Intégration numérique d'une loi de comportement avec discontinuités, 2.- Développement d'un élément fini avec discontinuités*", rapport EDF/ DER, Dpt IMA/MMN.

**ANDRIEAX S., BAMBERGER Y., & MARIGO J.J., 1986**, "*Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches*", Journal de Mécanique théorique et appliquée, Vol. 5, No. 3, pp. 471-513.

**ANDRIEUX S., 1981**, "*Un modèle de matériau microfissuré avec frottement*", C.R. Acad. Sci. Paris 293, P.329332.

**ASKES H., 2000**, "*Advanced spatial discretisation strategies for localisation failure. Mesh adaptivity and meshless Methods*", Thèse de doctorat, Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering and Geo science.

**AUVRAY J., 2003**, "*Elaboration et caractérisation à haute température de bétons réfractaires à base d'alumine à spinelle*", Thèse de doctorat, Université de Limoges.

**BADEL P.B., 2001**, "*Contributions à la simulation numérique de structures en béton armé*", Thèse de doctorat, Université de Paris VI.

**BADEL P., GODARD V., & LEBLOND J.B., 2007**, "*Application of some anisotropic damage to the prediction of the failure of some complex industrial concrete structure*", International Journal of Solids and Structures, 44.

**BALMER G.G., 1949**, "*Shearing strength of concrete under high triaxial stress-computation of Mohr's envelope as curve*", Struct. Res. Lab., SP-23, p 1-10.

**BARON J., & SAUTERAY R., 1982**, "*Le béton hydraulique. Connaissance et pratique*", Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris.

**BASCOUL A., & MASO J.C., 1974**, "*Influence de la contrainte intermédiaire sur le comportement mécanique du béton en compression biaxiale*", Matériaux et Constructions n°42, pp. 411-419.

**BASCOUL A., 1974**, "*Etude du comportement mécanique du béton en compression biaxiale*", Thèse de doctorat, Université de Toulouse.

**BASTE S., & GERARD A., 1994**, "*A constitutive relation for micro cracked materials including the effects of micro crack opening-closing*", Int. J. Eng., vol. 32(4): 557-567.

**BATDORF S. B., & BUDIANSKI S., 1949**, "*A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip*". NACA Tech Note TN.

**BATOZ J. L., & DHATT G., 1990**, "*Modélisation des structures par éléments finis*", Ed. Hermes, Vol.1, PP 2-3.

**BAZANT Z. P. 1986**, "*Mechanics of distributed cracking*", Appl Mach rev, N°5, May.

**BAZANT Z. P., & KIM S., 1979**, "*Plastic Fracturing theory of concrete*", J. of the Eng. Mechanics Division, pp 407-428, June.

**BAŽANT Z. P., & LIN F.P., 1988**, "*Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture*", Journal of Structural Engineering, ASCE, 114(12):2493–2510.

- BAŽANT Z. P., & OŽBOLT J., 1990**, "*Nonlocal microplane model for fracture, damage and size effect in structures*", *Journal of Engineering Mechanics*, 116(11):2485–2505.
- BAŽANT Z. P., 1985**, "*Microplane model for progressive fracture of concrete and rock*", *Journal of Engineering Mechanics*, 11:559–582.
- BAZANT Z. P., 1986**, "*Mechanics of distributed cracking*", *Appl Mach rev*, N°5, May.
- BAZANT Z.P. & OH B.H. 1983**, "*Crack band theory for fracture of concrete*", *Materials and Structures*", vol 16, n° 94, p155-177.
- BAZANT Z.P., & OH P.H, 1985**, "*Microplane model for progressive fracture of concrete and rock*", *J. Engng. Mech. ASCE*, Vol. 111, pp. 559-582.
- BAZANT Z.P., & PIGAUDIER-CABOT G., 1987**, "*Nonlocal Damage Theory*", *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 113, N° 10, pp. 1512-1533.
- BAZANT Z.P., & PIJAUDIER-CABOT G., 1988**, "*Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence*", *J. Appl. Mech.* 55, 287–293.
- BAZANT Z.P., & PIJAUDIER-CABOT G., 1989**, "*Measurement of characteristic length of non local continuum*", *J. Engng. Mech., ASCE*, Vol. 115, No. 4, pp. 755-767.
- BAZANT Z.P., & PRAT P., 1988**, "*Microplane model for brittle plastic materials, I: Theory, II: Verification*", *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 114, pp. 1672-1702.
- BAZANT Z.P., 1976**, "*Instability, ductibility and size effects in strain softening*", *J. Engineering Mechanics* Vol 102.
- BAZANT Z.P., 1984**, "*Size effect in blunt fracture: Concrete, rock, metal*", *J. of Engrn. Mechanics, ASCE*, vol. 110, pp. 518-535.
- BAZANT Z.P., 1990**, "*Why continuum Damage is Nonlocal: Michromechanics Arguments*", *J. Engng. Mech. ASCE*, vol. 117, pp. 1070 – 1087.
- BAZANT Z.P., 1990**, "*Why continuum Damage is Nonlocal: Michromechanics Arguments*", *J. Engng. Mech. ASCE*, vol. 117, pp. 1070 – 1087.
- BAŽANT Z.P., BELYTSCHKO T.B., & CHANG T.P., 1984**, "*Continuum theory for strain softening*", *Journal of Engineering Mechanics* 110 (12), 1666–1692.
- BAZANT Z.P., PIJAUDIER-CABOT G., & PAN J., 1987**, "*Ductility, Snapback, Size effect and Redistribution in softening Beams and Frames*", *J. Struct. Eng., ASCE*, Vol. 113, No. 12, pp. 2348-2364.
- BAŽANT Z.P., PIJAUDIER-CABOT G., 1988**, "*Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence*", *Journal of Applied Mechanics ASME*, vol.55, pp.287–294.

- BELYTSCHKO T., LU Y.Y., & GU L., 1994**, "*Element-free galerkin methods*", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37:229–256.
- BENAIJA E.H., TORRETI J.M., & BOULAY C., 1990**, "*Localisation des déformations dans le béton en compression: influence des conditions limites*", 25 colloque du G.F.R.-Grenoble.
- BENALLAL A., & COMI C., 1994**, "*Closed form solutions to localization conditions for ratein dependent materials*", RA.S., T.318, Serie II PP. : 7-14.
- BENALLAL A., BILLARDON R., & GEYMONAT G., 1989**, "*Conditions de bifurcation à l'intérieur et aux frontières pour une classe de matériaux non standard*", C. R. Acad. Sci. - t.308 - Série H - pp.393-398.
- BENALLAL A., BILLARDON R., & GEYMONAT G., 1993**, "*Bifurcation and rate-independent materials*", In CISM Lecture Notes 327, éditeur : Bifurcation and stability of dissipative systems, pages 1–44.Springer.
- BENALTA E.H., 1992**, "*Application de la stéréophotogrammétrie au béton: cas de la compression simple*", Thèse du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
- BENNETT E.W. 1974**, "*Fatigue in concrete*", Concrete May.
- BERTACCHI P., & BELOTTI R. 1972**, "*Experimental research on deformation and failure of concrete under triaxial loads*", Proceeding Int. Symposium RILEM, pp. 35-38, Cannes.
- BERTHAUD Y., 1988**, "*Mesure de l'endommagement du béton par une méthode ultrasonore*", Thèse d'état. Univ. Paris VI.
- BERTHAUD Y., MAZARS J., & RAMTANI S., 1988**, "*The unilateral behaviour of damaged concrete*", Proceedings of International conference on FDCR, Vienne.
- BERTHAUD Y., TORRETI J.M., & BENAIJA E.H., 1994**, "*Experimental investigations of the localization zones in quasi-brittle materials*", In bazant, Fracture and damage in quasi brittle structures , E and FN SPON, PP419-426.
- BESHARA F.B.A., & VIRDI K.S., 1989**, "*Nonlinear finite element dynamic analysis of two dimensional concrete structures*", CIVIL-COMP 89. Proceedings of the 4th. International Conference on Civil and Structural Engineering Computing.
- BESHARZ F.B.A., 1989**, "*Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures to blast loading*", Ph. D. Thesis, City University, London.
- BESSON J., CAILLETAUD G., CHABOCHE J. L., & FOREST S. 2001**, "*Mécanique non-linéaire des matériaux*", Hermès Science Europe Ltd, Paris.
- BICANIC N., 1978**, "*Nonlinear finite element transient response of concrete structures*", Ph.D. Thesis, C/Ph/50178, University College of Swansea, Wales.

- BICANIC N., & ZIENKIEWICZ O.C., 1982**, "*Constitutive model for concrete under dynamic loading*", Report C/R/402/82. Institute for Numerical Methods in Engineering, University College Of Swansea, Wales.
- BILLARDON R., 1989**, "*Etude de la rupture par la mécanique de l'endommagement*", Thèse de Doctorat d'Etat - Paris VI.
- BILLARDON R., & DOGHRI, 1989**, "*Prévision de l'amorçage d'une macro-fissure par localisation de l'endommagement*", C. R. Acad. Sci. - t.308 - Série H - pp.347-352.
- BILLARDON R., 1989**, "*Etude de la rupture par la mécanique de l'endommagement*", Thèse d'Etat, Université Paris VI.
- BODE L., 1994**, "*Stratégies numériques pour la prévision de la ruine des structures du génie-civil*", Laboratoire de Mécanique et de Technologie (E.N.S de Cachan/C.N.R.S/Université Paris 6), CACHAN (France).
- BOUDON-CUSSAC D., 1996**, "*De l'anisotropie des bétons renforcés de fibres courtes en acier*", Thèse de doctorat, ENS-Cachan.
- BREYSSE D., 1988**, "*A probabilistic model for damage of concrete structures*", Proc. of Brittle Matrix Composites 2, CEZZYNA-POLLAND.
- BRÜHWILER J., & SAMBRIDGE M., 1996**, "*A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids*", Nature, 379:655–660.
- BRUNET M., SABOURIN F. & MAGNIL TOUSHAL S., 1996**, "*The Prediction of Necking and Failure in 3D Sheet Forming Analysis Using Damage Variable*", Journal de Physique III, Vol. 6, PP. 473-482.
- BURLION N., 1997**, "*Etude du couplage hydraulique-mécanique dans le béton endommagé*", Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- BUYUKOZTURK O., & SHAREEF S.S., 1985**, "*Constitutive modeling of concrete in F.E. analysis*", Computers and Structures. Vol. 21, n° 3, pp. 581-610.
- CAST3M 2012**, "*Guide de l'utilisateur cast3m*", <http://www-cast3m.cea.fr>. CEA Saclay, France.
- CASTEM - AYINA O., COMBESCURE A., & FOUJNET A., 1988**, "*Modélisation du comportement du béton : le modèle de Chen A.C.T. et Chen W.F.*", Proceeding, International Conference on modeling and simulation. Istanbul.
- CHABOCHE J.L., 1993**, "*Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage*", Int. J. Damage mech., vol. 2, October, technomic publishing, Co. Inc.
- CHABOCHE J.L., 1977**, "*Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement*", thèse de Doctorat Es-Science, Paris VI.

**CHABOCHE J.L., 1978**, "Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description du comportement viscoplastiques et de la rupture par endommagement", Symp. Franco-Polonais de Rhéologie et Mécanique, Cracovie.

**CHABOCHE J.L., 1979**, "Sur l'utilisation des variables d'état internes pour la description de la viscoplasticité cyclique avec endommagement", Problèmes non linéaires de mécanique, pp.137-159.

**CHABOCHE J.L., 1974**, "Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire", Rev. Française de Mécanique 50-51.

**CHABOCHE J.L., & LESNE P.M., 1988**, "A non-linear continuous fatiguedamage model", Fatigue Fract. Engng Mater. Struct, 11 :1-17.

**CHALLAMEL N., LANOS C., & CASADJIAN C., 2005**, "Strain-based anisotropic damage modelling and unilateral effects", International Journal of Mechanical Sciences, 47:459-473.

**CHAMBART M., 2009**, "Endommagement anisotrope et comportement dynamique des structures en béton armé jusqu'à la ruine", Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.

**CHEN E.S., & BUYUKOZTURK O., 1983**, "Damage model for concrete in multiaxial cyclic stress", Cambridge (Massachusetts) : Department of civil engineering, M.I.T.

**CHEN J.S., WU C.T., & BELYTSCHKO T., 2000**, "Regularisation of material instabilities by mesh free approximations with intrinsic length scales", Int. J. Num. Meth. Engrg, Vol. 47, PP 1303-1322.

**CHEN T.C.A. & CHEN W.F., 1975**, "Constitutive relations for concrete", Journal of Engineering Mech. Div., A.S.C.E., Vol. 101. N° EM4, pp. 465481.

**CHEN W.F., 1982**, "Plasticity in reinforced concrete", New York: Mc Graw-Hill Bookstore, 465p.

**CHEN W.F., 2010**, "Fracturation électrique des géomatériaux Etude de l'endommagement et de la perméabilité", Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

**CHERUKURI H.P., & SHAWKIT. G., 1995**, "An energy-based localization theory", I Basic Fram work.

**CHIBAB A., & DRAGON A., 1987**, " Tensorial damage evolution and coupled plasticity-damage framework", Proc. of the IUTAM Symp. On Yielding Damage and Failure of Anisotropic Solids, VILLARDS-DE-LANS-FRANCE, ed. by BOEHEL J.P.

**CHOW C.L., & WANG J., 1982**, "An anisotropic theory for continuum damage mechanics", International Journal of Fracture, 33:3-16.

**COLSON A., 1984**, "Modélisation des conditions aux limites de liaisons et d'assemblages en mécanique des structures métalliques", Thèse de doctorat d'état, Université Paris VI.

- COMI C., 2001**, "A non-local model with tension and compression damage mechanisms", Eur. J. Mech. A/Solids 20, 1–22, Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. S0997-7538(00)01111-6/FLA
- COMI C., MARIANI S., & PEREGO U., 2004**, "An extended finite element strategy for the analysis of crack growth in damaging concrete structures", In Proceedings of European Congress on computational methods in Applied Sciences and Engineering.
- COMI C., & PEREGO U., 2000**, "Numerical aspects of non local damage analyses of concrete structures", Revue européenne des éléments finis, Vol X-N° X.
- COON D.M., & EVANS J.R., 1972**, "Incremental constitutive laws and their associated failure criteria with application to plain concrete", International Journal Solids and Structures. Vol. 8. n°9, September, pp. 1169-1183.
- CORDEBOIS J.-P., & SIDOROFF J., 1982**, "Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité", J.M.T.A. - Numéro Spécial, 45-60.
- CORDEBOIS J.P., & SIDOROFF F., 1979**, "Anisotropie élastique induite par endommagement", Colloque Euromech 115, comportement mécanique des solides anisotropes, Grenoble.
- CORDEBOIS J.P., & SIDOROFF F., 1979**, "Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité", Journal de Mécanique appliquée, 25: 45-60.
- COSSERAT E., & COSSERAT F., 1909**, "Théorie des corps déformables", Hermann, Paris.
- COWIN S.C., & NUNZIATO J.W., 1983**, "Linear elastic materials with voids", J. Elasticity Vol.13, PP.: 125-147.
- DAL MASO G., 1993**, "An introduction to convergence. progress in non linear differential equations and their applications", Birkhäuser.
- DARVE F., HICHER P.Y., & REYNOUARD J. M., 1995**, "Mécanique des géomatériaux", Ed. Hermès PP103-121.
- DARWIN D., & PECKANOLD A.D., 1977**, "Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete", Journal of Eng. Mech. Div.. A.S.C.E., Vol. 103. n° EM2. Proc. pap. 12839, April. pp. 229-241.
- DARWIN D., & PECKNOLD A.D., 1976**, "Analysis of R.C. shear panels under cyclic loading", Journal of Structures Div.. A.S.C.E, Vol. 103. N° ST2, pp. 355-369.
- DAVENNEL L., SAOURIDIS G., & PIAU J.M., 1989**, "Un code de calcul pour la prévision du comportement de structures endommageables en béton, en béton armé ou en béton de fibre", Annale de l'I.T.B.T.P. N° 478 série; Technologie générale de la construction 199. PP. : 38-54.

**DE BORST R., & MÜHLHAUS H.B., 1992,** "*Gradient -dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects*", International Journal for Numerical Methods in Engineering - Vol.35 - pp.521-539.

**DE BORST R., 1991,** " Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum", Engineering Computations, 8:317–332.

**DE BORST R., 1994,** "*Gradient damage for quasi-brittle materials*", Master's thesis R.H.J. Peerlings - Report WFW 94.132 - Eindhoven.

**DE BORST R., MUEHLHAUS H.B., PAMIN J., & SLUYS L.J., 1992,** "*Computational modelling of localisation of deformation*", In: Computational Mechanics, Owen and Hinton (Eds.), \*\*\*\*, 483-508.

**De BORST R., REMMERS J. J.C., NEEDLEMAN A., & ABELLAN M.A., 2003,** "*Discrete vs smeared crack models for concrete fracture : bridge the gap*", In Proceedings EUROCC 2003, pages 3–17.

**DE VREE J.H.P., BREKELMANS W.A.M., & VAN GILS M.A.J., 1995,**"*Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics*", Computers & Structures, 55, 581-588.

**DESMORAT R., & GATUINGT F., 2007,**" *Introduction of an internal time in non local integral theories*", Rapport technique, Rapport interne LMT-Cachan n°268.

**DESMORAT R., GATUINGT F., & RAGUENEAU F., 2007,** "*Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials*", Engineering Fracture Mechanics, 74:1539–1560.

**DESOYER T., LEROUX S., 1994,** "*Etude de la localisation pour une loi de comportement élastique-endommageable avec gradients de déplacement d'ordre supérieur*", C.R.A.S. Paris, t 318 série II, P.277-282.

**DESRUES J., & CHAMBON R., 1985,**"*Bifurcation par localisation de la déformation : étude expérimentale et théorique à l'essai biaxial sur sable*", Colloque international de CNRS, Déformations finies des agrégats : bases physiques et modélisations.

**DESRUES J., 1983,** "*Initialisation et propagation des surfaces de rupture dans les matériaux granulaires*", 6° Congrès Français de Mécanique - Lyon.

**DHAT G., TOUZOT G., 1984,** "*Une présentation de la méthode des éléments finis*", Maloine Editeurs.

**DI LUZIO G., 2007,**" *A symmetric over-nonlocal microplane model m4 for fracture in concrete*", International Journal of Solids and Structures, 44:4418–4441.

**DOUGIL J. W., 1983,** "*Constitutive relations for concrete and rock. Applications and extension of elasticity and plasticity theory*", Preprints W. Prager symp on mech og geomaterials, Rocks, concrete, soils. North western univ, Evanston III.

**DOUGILL J.W., 1976,** " *On stable progressively fracturing solids*", ZAMP 27 (4), pp. 423-437.

**DRUCKER D.C., & PRAGER W., 1952,**" Soil mechanics and plasticity analysis of limit design", 10(2):157– 162.

**DUBE J.F., 1994,** "*Modélisation simplifiée et comportement visco-endommageable des structures en béton, Applications aux séismes et aux chocs des ouvrages en béton armé*", Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan.

**DUFAILLY J., 1980,** "*Modélisation mécanique et identification de l'endommagement plastique des métaux*", thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Paris.

**DUFLOT M., 2004,**" *Applications de la méthode sans maillage à la mécanique de la rupture*", PhD thesis, Université de Liège.

**DUVAUT G., & LIONS J., 1972,**" *Les inéquations en mécanique et en physique*", Dunod.

**ECKIE F., & ONAT E., 1981,**"*Tensorial nature of damage measuring internal variables*", J. Hult and J. Lemaitre, Editors, Physical non-linearities in structural analysis, Springer, Berlin.

**ELWI A.A., & MURRAY W.D., 1976,**"*A3D hypoelastic concrete constitutive relationship*", Journal Eng. Mech. Div.. A.S.C.E., Vol. 105, n° EM4. proc. pap. 14746, August. pp. 623-641.

**ENGELEN R.A.B., 2005,** "*Plasticity-induced Damage in Metals*", PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven.

**ERINGEN A., & EDELEN D., 1972,**" *On non-local elasticity*", Int. J. of Eng. Sci, Vol 10 N° 3.

**ERINGEN A., 1970,**" *Balance laws of micromorphic mechanics*", Int. J. of Eng. Sci, Vol 8 N 10.

**FARDIS MN., AUBE B. & TASSOULAS J.L., 1983,** "*Monotonic and cyclic constitutive law for concrete*", Journal of Eng. Mech. Vol. 109, n 2.

**FARIA R., & OLIVER X., 1993,** "*A rate dependant plastic-damage constitutive model for large scale computations in concrete structures*", International Center for Numerical Methods in Engineering. Barcelona.

**FAUCHET B., 1991,**"*Analyse poroplastique des barrages en béton et de leurs fondations. Rôle de la pression interstitielle*", Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

**FEENSTRA P.H., 1993,** "*Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete*", PhD Dissertation : Delft University of Technology, The Netherlands, 149p.

**FERRARA L., 1998,** "*Numerical simulation of Mixed-Mode Fracture in concrete via A Non-Local damage modele* ", 2<sup>nd</sup> int. Ph D Symposium in civil engineering; Budapest.

- FICHANT S., 1996,** " *Endommagement et anisotropie induite du béton de structure. Modélisation approchée*", Thèse de doctorat, ENS de Cachan.
- FICHANT S., PIJAUDIER-CABOT G., & LABORDERIE C., 1997,** " *Continuum damage modelling: Approximation of crack induced anisotropy*", Mechanics Research Communications, 24(2): 109-114.
- FLECK N.A., & HUTCHINSON J.W., 1993,** " *A phenomenological theory of strain gradient plasticity*", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 41, PP./ 1825-1857.
- FLECK N.A., MULLER G.M., ASHBY M.F., & HUTCHINSON J.W., 1994,** " *Strain gradient plasticity -theory and experiment*", Acta Metallurgica Et Materialia, 42(2) :475{487, February.
- FOREAU S., & MILLARD A., 1994,** " *Mise en œuvre d'un élément fini enrichi pour modéliser les bandes de localisation*", Rapport interne CEA/DMT 94-021.
- FOREST S., 1996,** " *Description de la déformation hétérogène des monocristaux dans le cadre de la mécanique des milieux continus généralisés*", In. Mécanismes et mécanique de grandes déformations, colloque national Mécamat, Aussois.
- FRANCFORT G., & MARIGO J. J., 1993** " *Stable damage evolution in brittle continuous medium*", Eur. J. Mech., A/Solids, 12 N°2, PP. 149-189.
- FRANÇOIS M., 2008,** " *A new yield criterion for the concrete materials. Comptes Rendus Mécanique*", 336(5):417-421.
- FRANTZESKAKIS C., 1987,** " *Contribution à la modélisation des structures en béton armé par la méthode des éléments finis*". Thèse de doctorat, ENPC.
- FREMOND M., & NEDJAR B., 1993,** " *Endommagement et principe des puissances virtuelles*", C.R.A.S.T.317 Série II PP. : 857-867.
- FREUDENTHALL A.M., 1968,** " *Statistical approach to brittle fracture*", Fracture-an advanced treatise, ed. by LIEBOWITZ, Vol. II, pp. 596-618.
- GATUINGT F., 1999,** " *Prévision de la rupture des ouvrages en béton sollicités en dynamique rapide*", Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan année.
- GELIN J.C., 1985,** " *Modèles numériques et expérimentaux en grande déformations plastiques et endommagement de rupture ductile*" Thèse d'état univ. Pierre et Marie Curie. Paris.
- GERMAIN N., BESSON J., & FEYEL F., 2005,** " *Méthodes de calcul non local. Application aux structures composites*", Giens, France, 17-20, 7iem colloque national en calcul de structures GIENS.
- GERMAIN P., 1973,** " *Cours de mécanique des milieux continus*", T.1, Ed. Masson Paris.
- GERSTLE K.H., 1981,** " *Simple formulation of biaxial concrete behavior*", A.C.I. Journal,

vol. 78, N° & .P.62.

**GHRIB F., & TINAWI R., 1995,** " *Non linear behaviour of concrete dams using damage mechanics*", Journal of Engineering Mechanics, 121(4): 513-527.

**GILBERT R.I., & WARNER R.F., 1978,** " *Tension stiffening in reinforced concrete slabs*", Journal Struct. Div., A.S.C.E.. Vol. 104, n ST 12, December, proc. pap. 14211.

**GOPALARATNAM V.S., & SHAH S.P., 1985,** " *Softening response of plain concrete in direct tension*", ACI Materials Journal, vol. 82, n° 3, p 310-323.

**GRENOBLECMIEUX.COM** , [http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier: Frist\\_concrete\\_bridge.JPG](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Frist_concrete_bridge.JPG)

**GURSON A.L., 1977,** " *Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - Yield criteria and flow rules for porous ductile media*", Eng. Materials Technology, Vol. 99, pp. 2-15.

**HADAMARI J., 1903,** " *Leçon sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*", Hermann et cie - Paris.

**HALL F. R., & HAYHURST D. R., 1991,**" *Modelling of grain size effects in creep crack growth using a nonlocal continuum damage approach*", Proc. R. Sot. Land. vol. A 433, pp. 405-421.

**HALM D., & DRAGON A., 1996,**" *A model of anisotropic damage model by mesocracks growth ; unilateral effects*", International Journal of Damage Mechanics, 5:384-402, 1996.

**HANNANT D. J., BUCKLEY K.J., & CROFT J., 1973,** " *The effect of aggregate size on the use of the cylinder spitting test as measure of tensile strength*", Matériaux et Constructions, vol. 6, n° 31.

**HANSEN N.R., 1994,**" *A Thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage*", Int. J. Solids Structures 31, 359-389.

**HANSEN, N.R., & SHREYER, H.L., 1992,** " *Desactivation of damage effects*", AMD-vol132/AMD-vol. 30, Recents advances in damage mechanics and plasticity.

**HASSANZADEH M., 1991,**" *Behaviour of fracture process zones in concrete influenced by simultaneously applied normal and shear displacements*", Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, The Netherlands.

**HAYURST D.R., & LECKIE F.A., 1973,**" *The effect of creep constitutive and damage relationships upon the rupture time of solid circular torsion bar*", J. Mech. Phys. Solids, 21(6): 382-431.

**HERMANN G., & KESTIN J., 1988,**" *On the thermodynamics foundation of a damage theory inelastic solids*", in cracking and damage, J. Mazars and Z.P. Bazant eds.

- HILL R., & HUTCHINSON J.W., 1975**, "*Bifurcation phenomena in the plane tension test*", Journal of Mechanics and Physics of Solids - Vol. 23 - pp.239-264.
- HILL R., 1958**, "*A general theory of uniqueness and stability inelastic-plastic solids*", J. Mech. Phys. Solids, 6:236–249.
- HILL R., 1962**, "*Acceleration waves in solids*", Journal of Mechanics and Physics of Solids - Vol. 10 - pp.1-16.
- HILLERBORG A., 1983**, "*Analysis of one single crack*", *Fracture mechanics of concrete*, edited by Wittmann F. H. Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, pp. 223-249.
- HILLERBORG A., MODÉER M., PETERSSON P.E., 1976**, "*Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*", Cement Concrete Research 6 (6), 773–781.
- HOFSTETTER G., & SIMO J.C., 1993**, "*A modified cap model: closest point solution algorithm*", Comp. Struct.vol. 46, p 203.
- HORDJIK D. A., VAN MIER J. G. , & REINHARDT H. W., 1988**, "*Material properties, chap. 4 in state of the art report on fracture of concrete*", RILEM TC-90, Ed. Elfgrén.
- HORDJIK D.A., 1992**, "*Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete: Experiments, modelling and analyses*", HERON, Delft university of Technology, The Netherlands. 37, n°1.
- HORII H., & NEMAT-NASSER S., 1983**, "*Overd moduli of solids with microcrack; loadinduced anisotropy*", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 31, No. 2, pp. 151 - 171.
- HORII H., & NEMAT-NASSER S., 1985**, "*Compression-induced microcrack growth in brittle solids: axial splitting and shear failure*", J. Geophys. Res., Vol. 90, B4, pp. 3105-3125.
- HUERTA A., & PIJAUDIER-CABOT G., 1994**, "*Discretization Influence on the Regularization by Two Localizations Limiters*", J. of Eng.Mech.ASCE, Vol.120, n°6, pp.1198-1218.
- HULT J., & LEMAITRE J., 1972**, "*Physical non-linearities in structural analysis*", Editors Springer, Berlin.
- IORDACHE M., WILLAM K., & CAROL I., 1995**, "*Failure modes of plastic degradation processes in Cosserat continua*", Computational Plasticity IV.
- JAMET P., MILLARD A., & NAHAS G., 1984**, "*Triaxial behaviour of a micro-concrete complete stress-strain for confining pressures ranging from 0 to 100MPa*", Proc. International conference on concrete under multiaxial conditions, Toulouse (France) : p 1236-1239.
- JIRASEK M., & ROLSHOVEN S., 2003**, "*Comparison of integral-type nonlocal plasticity models for strain softening materials*", International Journal of Engineering Science, 41:1553–1602.

- JIRASEK M., & ZIMMERMANN T., 1998**, "*Analyse or rotating crack model*", Journal of Engineering Mechanics.
- JOHN R., & SHAH S.P., 1986**, "*Fracture of concrete subjected to impact loading*", Cement, concrete and aggregates, 8:24–32.
- JOUSSEMET M., 1997**, "*Sur la construction de modèles d'endommagement avec gradient*", Thèse de Docteur de l'Université de Poitiers.
- JU J.W., 1989**, "*On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects*" Int. J. Solids structure Vol 25 n°7.
- KACHANOV M., 1958**, "*On the time to failure under creep conditions*", Otd. Tekhn. Nauk., 8 :26-31.
- KACHANOV M., 1982**, "*A microcrack model of rock inelasticity, part 1: frictional sliding on microcracks*", Mech. Mater., Vol. 1, pp. 19-27.
- KARSAN P., & JIRSA J.O., 1969**, "*Behavior of concrete under compressive loading*", Journal of the Structural Division, ASCE, 9 : 2543–2563.
- KOSTOVOS M.D., 1979**, "*Fracture process of concrete under generalized stress states*", Matériaux et construction vol 12, n°72, pp 431,432.
- KRAJCIKOVIC D., & FONSEKA G.U., 1981**, "*The continuous damage theory of brittle materials*", parts I and II, J. Appl. Mech., ASME, vol 48: 809-824.
- KUHL E., RAMM E., & DE BORST R., 2000**, "*An anisotropic gradient damage model for quasi brittle materials*", Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 183, 87-103.
- KUNIN I., 1968**, "*Mechanics of generalised continuum*", Springer Verlag.
- KUPFER H.B, HILSDORF H. K., & RUSH H., 1969**, "*Behaviour of concrete under biaxial stresses*", Journal of American Concrete Institute, vol. 66, n°8, pp. 853-866.
- KUPFER H., & GERSTLE K., 1973**, "*Behavior of concrete under biaxial stresses*", J. Eng. Mech., 99:853–856.
- L'HERMITE R., 1973**, "*Influence de la dimension absolue sur la résistance à la flexion*", Annale de l'ITBTP, n°30-310, pp. 39-41.
- La BORDERIE C., 1991**, "*Phénomène unilatéraux dans un matériau endommageable :Modélisation et application a l'analyse de structure*", Thèse de doctorat de l'université Paris6année.
- La BORDERIE C., 2003**, "*Stratégies et modèles de calculs pour les structures en béton* ", Thèse présentée pour l'obtention de L'habilitation à diriger les recherches année ; Université de Pau et des Pays de l'Adour France.

- LABADI Y., & HANNACHI N.E., 2005**, "*Non linear damage behavior of concrete structures*", *Can. J. Civ. Eng.*, Vol. 32: 765-774.
- LADEVÈZE P., 1992**, "*A damage computational method for composite structures*", *Computers and Structures*, 44 (1-2), 79-87.
- LADEVÈZE P., & LEMAITRE J., 1984**, "*Damage effective stress in quasi unilateral conditions*", In 16th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Lyng by, Denmark,.
- LADEVÈZE P., 1983**, "*On an anisotropic damage theory*", in: J.P. Boehler (Ed.), *Proc. CNRS Int. Coll. 351, Failure Criteria of Structured Media*, Villars-de-Lans, 1983, pp. 355–363.
- LAKES R., 1995**, "*Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua in Mühlhaus, continuum models for materials with microstructure*", Wiley, PP.1-25.
- LASRY D., & BELYTCHKO T., 1988**, "*Localization limiters in transient problems*", *Int. J. Solids and Structures*, 24:581–597.
- LAUTERBACH B., & GROSS D., 1998**, "*Crack growth in brittle solids under compression*", *Mech. Mater.*, Vol. 29, pp. 81-92.
- LEBLOND J.B., PERRIN G., & DEVAUX X., 1994**, "*Bifurcation effects in ductile metals with damage delocalization*", *Journal of Applied Mechanics*, 61:236–242.
- LEMAITRE J., & CHABOCHE J.L., 1985**, "*Mécanique des matériaux solides*", Dunod.
- LEMAITRE J., & DESMORAT R., 2005**, "*Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep Fatigue and Brittle Failures*", Springer.
- LEMAITRE J., 1971**, "*Evaluation of dissipation and damage in metals*", In *Proceedings of ICM Kyoto*.
- LEMAITRE J., 1992**, "*A Course on Damage Mechanics*", Springer-Verlag, Berlin.
- LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., 1978**, "*Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement*", *Journal de mécanique appliquée*, 2:317–365.
- LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., 1988**, "*Mécanique des matériaux solides*", Dunod.
- LESNE P.M. & SAANOUNI K., 1990**, "*Un Modèle de Dommage Non Local pour décrire la fissuration en Fluage dans Le cadre de la mécanique de L'endommagement*", *recherche aérospatiale*, N°1(Janvier-Février), p.23 à 36.
- LI & DRUCKER D. C., 1994**, "*Instability and bifurcation of a non associated extended Mises model in the hardening regime*", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.42 N°12 PP.: 1883-1904.

- LIEBE T., STEINMANN P., & BENALLAL A., 2001**, "*Theoretical and computational aspects of thermodynamically consistent framework for geometrically linear gradient damage*", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, Vol 190, PP: 6555–6576.
- LIENARD C., 1989**, "*Plasticité couplée à l'endommagement en conditions quasi unilatérales pour la prévision de l'amorçage de fissures*", Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.
- LIN C.S., & SCORDELIS A.C., 1975**, "*Nonlinear analysis of R.C. shells of general form.*", *Journal Struct. Div, A.S.C.E.*, Vol. 101, n° ST3. p. 523-538.
- LIU T.C.Y., NILSON A.H., & SLATE F.O., 1972**, "*Biaxial stress-strain relation for concrete*", *Journal of Struct. Div., A.S.C.E.* Vol. 98. n° ST5, P. 1025-1034.
- LORENTZ E., & ANDRIEUX S., 1999**, "*A variational formulation for nonlocal damage*", *INT. J. Plasticity*, Vol: 15, PP 119–138.
- LORENTZ E., & BENALLAL A., 2005**, "*Gradient constitutive relations: numerical aspects and application to gradient damage*", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg*, Vol 194, PP 5191–5220.
- LORENTZ E., 1994**, "*Étude numérique d'un modèle d'endommagement partiel fragile en déformations planes*", Rapport de DEA - Université Paris VI.
- LORENTZ E., 1997a**, "*Evaluation d'une modélisation de l'endommagement des structures par lignes de discontinuités des déplacements*", Note Interne EDF/DER, HI-74/96/012.
- LORRAIN M., 1974**, "*Contribution à l'étude de la micromécanique des matériaux granulaires cohérents - Application au béton*", Thèse Doct. Sciences : Université de Toulouse, 165 p.
- LUBLINER J., OLIVER J., OLLER S., & OÑATE E., 1989**, "*A plastic-damage model for concrete*", *Int. J. Solids Structures*, vol 25, n° 3, p 299-326.
- LIU G.Q., & OWEN D.R.J., 1986**, "*Ultimate load behaviour of reinforced concrete plates and shells under dynamic transient loading*," *Int. Journal for numerical methods in Eng.* Vol. 22, PP. 189-208.
- LIU G.Q., 1985**, "*Nonlinear and transient finite element analysis of general reinforced concrete plates and shells*", Ph. D. Thesis, C/Ph/84/85, University College of Swansea. Wales.
- MAGGIO F. D., & SANDLER I. M., 1971**, "*Material models for granular soils*", *J. Engng. Mech. Div.*, 97:935–950.
- MARCIO J., & CALIXTO F., 2002**, "*Microcracking of High Performance Concrete Subjected to Biaxial Tension - Compression Stresses*", *Mat. Res.*, vol.5, no.3, pp. 295-299.
- MARIGO J.J., 1981**, "*Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique*", *Compte rendus de l'académie des Sciences, Série II*, 292:1309–1312.

- MARIGO J.J., 1985**, "*Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids*", Engineering Fracture Mechanics, 21(4):861 {874, 54.
- MARIGO J.J., 1995**, "*Étude théorique et numérique d'une nouvelle formulation de la Mécanique de la Rupture fragile*", Rapport 5 du contrat de collaboration EDF/LMPTM - n°174/1H740/1MA2321174L17.
- MARKOV K., 1995**, "*On a microstructural model of damage in solids*", Int. J. Eng. Sci., Vol.33,N°1, PP. : 139-150.
- MATALLAH M., & La BORDERIE C., 2006**, "*Modélisation numérique de l'endommagement anisotrope et unilatéral dans les structures en béton*", Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- MATALLAH M., & La BORDERIE C., 2009**, "*Inelasticity damage based model for numerical modeling of concrete cracking*", Engineering Fracture Mechanical, 76(8):1087–1108.
- MATALLAH M., & LABORDERIE C., 2006**, "*Modélisation numérique de l'endommagement anisotrope et unilatéral dans les structures en béton*", In 24<sup>ème</sup> rencontre Universitaires de Génie Civil.
- MAZARS J., & PIJAUDIER-CABOT G., 1989**, "*Continuum damage theory-application to concrete*", Journal of Engineering Mechanics ASCE, 115:345–365.
- MAZARS J., & PIJAUDIER-CABOT G., 1996**, "*From damage to fracture mechanics and conversely: a combined approach*", International Journal of Solids and Structures, 33:3327–3342.
- MAZARS J., 1984**, "*Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*", Thèse Doct. Sciences : Université de Paris 6 E.N.S. de Cachan, 283p.
- MAZARS J., 1985**, "*A model of unilateral elastic damageable material and its application of concrete*", Proc. RILEM Int. Conf. Fracture Mechanics of concrete, Lausanne, Switzerland, Elsevier, New York.
- MAZARS J., 1986**, "*A description of micro- and macroscale damage of concrete structures*", Journal Engineering Fracture of Mechanics, Vol. 25. No. 516: 729-737.
- MAZARS J., 1994**, "*Mechanisms and mechanics of the behaviour and the failure of concrete*", In ALERT, 6th European Autumn School: Constitutive Equations for Geomaterials, Aussois, France. ALERT. 44, 186.
- MAZARS J., 1998**, "*Nouveau concepts dans la modélisation du comportement du béton composite*", Application au calcul des structures " P.P N° 461, Janvier, Béton 252, Association Française du Béton, Ann ITBTP.

- MAZARS J., KOTRONIS P., RAGUENEAU F., & CASAUX G., 2006,** "*Using multifiber beams to account for shear and torsion: Applications to concrete structural elements*", International Journal of Solids and Structures, 195:7264–7281.
- MEHTA, 1986,** "*Concrete, structure, properties and materials*", Englewood Cliff (New Jersey): Prentice Hall, 600p.
- MINDLIN R., & ESHEL N., 1968,** "*On first strain gradient theories in linear elasticity*", Int. J. Solids and Structures, Vol. 4, PP 109.
- MINDLIN R., 1965,** "*Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity*", Int. J. Solids and Structures, Vol. 1, PP 417.
- MOKNI M., 1992,** "*Relations entre déformations en masse et déformations localisées dans les matériaux granulaires*", Thèse de Docteur de 3<sup>e</sup> cycle - Université Joseph Fourier - Grenoble I.
- MONTHEILLET F., & MOUSSY F., 1986,** "*Physique et mécanique de l'endommagement*", Les éditions de physique, 42.
- MOUNAJED G., 2002,** "*Elaboration du nouveau modèle, Béton numérique dans Symphonie, Concept, homogénéisation du comportement thermomécanique des BHP et simulation de l'endommagement thermique*", Cahiers du CSTB 3421.
- MÜHLHAUS H., & AĪFANTIS E., 1991,** "*A variational principle for gradient plasticity*", INT. J. of Struct., Vol 28, PP 845–857.
- MURAKAMI S. & KAMIYA K., 1996,** "*Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on thermodynamics*", International Journal Mechanical Sciences, 39:459–473.
- MURRAY W.D., 1979,** "*Octohedral based incremental stress-strain matrices*", Journal Eng. Mech. Div., A.S.C.E., Vol 105.. n EM4. proc. pap. 14734. August. PP. 501-513.
- NADAI A., 1950,** "*Theory of flow and fracture of solids*", 2 edition. New-York: Mc Graw Hill, Vol. 1.
- NECHNECH W., RAGUENEAU F., & MEFTAH 2001,** "*Modèle thermo-plastique couplé à l'endommagement pour le béton à hautes températures*", Can. J. Civ. Eng. 28: 593–607 CNRC Canada.
- NEDJAR B., 1995,** "*Mécanique de l'endommagement. Théorie du premier gradient et application au béton*", Thèse de doctorat, ENPC.
- NEDJAR B., 2001,** "*Elastoplastic-damage modelling including the gradient of damage: formulation and computational aspects*", Int Journal of solids and structures, Vol 38, PP 5421–5451, 001.
- NEEDLEMAN A., 1988,** "*Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems*", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 67, pp. 69-85.

**NEMAT-NASSER S., & HORII H., 1993,** "*Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*", North - Holland, Amsterdam.

**NGO D., & SCORDELIS A.C., 1967,** "*Finite elements analysis of reinforced concrete beams*", J.Am. Concrete Inst. 64(14), 152-163.

**NILSSON L., 1979,** "*Impact loading on concrete structures. A constitutive modeling. Finite element analysis and experimental study of nonlinear wave propagation*", Chalmers University of Technology.

**NOORU-MOHAMED A., 1992,** "*Mixed mode fracture of concrete: an experimental approach*", Dissertation, Delft University of Technology, The Netherlands.

**ORTIZ M., & QUIGLEY J.J., 1991,** "*Adaptative mesh refinement in strain localisation problems*", Fcomp. Meth. Appl. Mech. Engrg. Vol. 90, pp. 781 - 804.

**ORTIZ M., 1985,** "*A constitutive theory for the inelastic behaviour of concrete*", Mech. Of Mater. vol4 : 67-93, Elsevier, Science Pubs. North Holland.

**OTTOSEN N.S., & RTJNESSON K., 1991,** "*Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity*. International Journal of Solids and Structures- Vol. 27(4) - pp.401-421.

**OTTOSEN S. N., 1979,** "*A failure criterion for concrete*", J. Engrng Mech., Vol 103, n°EM4, pp. 527-535.

**OWEN D.R.J., HILTON E., 1980,** "*Finite element in plasticity: Theory and practice*", Pineridge Press Ltd, Swansea, England.

**OZBOLT J., & BAŽANT Z. P., 1992,** "*Microplane model for cyclic triaxial behavior of concrete*", Journal of Engineering Mechanics, 118:1365–1386.

**PAPA E., & TALIERCIO A., 1996,** "*Anisotropic model for the multiaxial static and fatigue behaviour of plain concrete*", Eng. Fracture Mechanics, Vol. 55, N°2, pp. 163-179.

**PAPA E., 1993,** "*A damage model for concrete subjected to fatigue loading*", Eur. J. Mech., Solids, 12, n° 3, 429-440.

**PEERLINGS R. H. J., & GEERS M., 2005,** "*Thermodynamical aspects of implicit gradient damage*", 11th International Conference on Fracture, A. Carpinteri.

**PEERLINGS R. H. J., 1999,** "*Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*", Thèse de doctorat, Technische Universiteit Eindhoven.

**PEERLINGS R.H.J., DE BORST R., BREKELMANS W.A.M., & DE VREE J.H.P., 1995,** "*Computational modelling of gradient-enhanced damage for fracture and fatigue problems*", in proceedings Computational Plasticity IV, Owen & Onate eds., pp. 975-986.

**PERREIRA C.J., RICE R.W., SKALNY J.P., & GRACE W.R., 1989,** "*Pore structure and its relationship to properties of materials*", Mat. Res. Symp. Proc., vol 137, p 3-21.

**PERZYNA P., 1966**, "*Fundamental problems in viscoplasticity*", Advances in Applied Mech. and Eng. Vol. 9.

**PIJAUDER-CABOT G., BODE L., & HUERTA A., 1992**, "*Non local continuum damage and adapted solution strategies in computational mechanics*", Eds. P. Ladvèze et Zienkiewicz, Elsevier Science Pubs. : 81-95.

**PIJAUDER-CABOT G., HUERTA A., & BODE L., 1993**, "*Modélisation des matériaux et calculs à la rupture*", J. Mec. Ind. et Matériaux. Vol. 46, N° 2 PP. : 76-79.

**PIJAUDIER- CABOT G., & BAZANT Z.P., & TABBARA M., 1988**, "*Comparison of various models for strain - softening*" , Engrg. Comp. Vol 5, pp 141-150.

**PIJAUDIER-CABOT G., & BAZANT Z. P., 1987**, "*Nonlocal damage theory*", J. Engrng. Mech., Vol113, no 10.

**PIJAUDIER-CABOT G., & BENALLAL A., 1993**, "*Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum*", Int. J. Solids and Structures, Vol. 30 No 13, PP 1761–1775.

**PIJAUDIER-CABOT G., & BODE L., 1992**, "*Localization of damage in non local continuum*", Mech. Resear. Commu., vol 19 (2) : 145 – 153.

**PIJAUDIER-CABOT G., & BURLION N., 1996**, "*Damage and localization in elastic materials with voids*", Mech Coh. Frict. Mat., Vol.: 1, PP.: 905-919.

**PIJAUDIER-CABOT G., & HUERTA A., 1991**, "*Finite element analysis of bifurcation in nonlocal strain softening solids*" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 90:509–919.

**PIJAUDIER-CABOT G., 1985**, "*Caractérisation et modélisation du béton par un essai multiaxial automatique*", Thèse de Génie Civil : Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, LMT, Université de Paris VI, 188p.

**PIJAUDIER-CABOT G., 1987**, "*Non local fracture Characteristics of strains Softening Materials*", PhD Northwestern University USA.

**PIJAUDIER-CABOT G., 1995**, "*Non local damage. In Continuum models for materials with micro structures*", H.B. Muhlhaus ed., Wiley.

**PIJAUDIER-CABOT G., LA BORDERIE C., & FICHANT S., 1994**, "*Damage mechanics for concrete modelling - application and comparisons with plasticity and fracture mechanics*", Computational modelling of concrete structures, Proc. EURO-C, Innsbruck (Austria) : Edited by H. Mang, p17-36.

**PIJAUDIER-CABOT G., MAZARS J., & PULIKOWSKI J., 1991**, "*Steel concrete bond analysis with non local continuous damage*" J. Of D. tr. Engrg. Comp., Vol. 5, PP. : 141-150.

**PITMAN E.B., 1995**, "*Visco-plastic relaxation: convergence and localisation*", eur. J. Mech., A. solids, Vol.14 N°6, PP.: 961-979.

**PONTIROLI C., 1995**, " *Comportement au souffle des structures en béton armé*", Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.

**PONTIROLI C., & ROUQUAND A., 1995**, " *A Damage Model and Crack Localization Phenomena with ABAQUS Explicit*", ABAQUS Users' Conference Proceeding.

**RABOTNOV Y. N., 1969**, " *Creep Problems in Structural Members*", Leckie, F. A. (Ed.), North Holland, Amsterdam.

**RADNIC J. & DESKOVIC N., 1989**, " *Numerical model for dynamic analysis of R./C. structures including the strain rate effects*", Computational Plasticity. Proceeding of the second int. conference. Barcelone. Spain. 18th-22nd.

**RAGUENEAU F., 1999**, " *Fonctionnement dynamique des structures en béton-influence des comportements hystérétiques locaux*", Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan.

**RAGUENEAU F., DESMORAT R., & GATUINGT F., 2008**, " *Anisotropic damage modelling of biaxial behaviour and rupture of concrete structures*", Computers and Structures, 5:417-434.

**RAGUENEAU F., LA BORDERIE CH., & MAZARS J., 2000**, " *Damage Model for Concrete Like Materials Coupling Cracking and Friction, Contribution towards Structural Damping: First Uniaxial Application*", Mechanics Cohesive Frictional Materials, vol. 5, pp 607-625.

**RAMTANI S., 1990**, " *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*", Thèse de Génie Civil : Université de Paris 6 E.N.S. de Cachan, 185p.

**RASHID Y. R., 1968**, " *Analysis prestressed concrete pressure vessels*", Nuclear Engng. and design 7(4), 334-344.

**REINHARDT H.W., & CORNEILLESSEN H.A.W., 1984**, " *Post-peak cyclic behaviour of concrete in uniaxial tensile and alternating tensile and compressive loading*", Cement and Concrete Research, vol. 14, p 1-6.

**REY C., & VIARIS DE LESEGNO P., 1994**, " *Analyse expérimentale d'un problème de localisation de la déformation plastique*", Int. J. mecanet, N°14, PP. : 11-18.

**REYNOUARD J.M., 1974**, " *Structures planes en béton armé. Elaboration d'un modèle du comportement jusqu'à la ruine et résolution numérique*", Thèse de Doctorat, Univ. Claude-Bernard de Lyon.

**RICE J. R., & TRACEY D. M., 1969**, " *On the ductile enlargement of voids in triaxial stress field*", J. Mech. Phys. Solids, PP. : 17-201.

**RICE J.R., 1976**, " *The localization of plastic deformation*", Theoretical and applied mechanics, W. Koiter eds., North-Holland publishing Co., pp. 207-220.

**RICHART F E., BRANDTZAEG A., & BROWN R.L., 1928**, "*A study of the failure of concrete under combined compressive stresses*", Univ. Ill. Eng. Exp. St. Bull. 6 p.

**ROBINSON S.R., 1965**, "*Methods of detecting the formation and propagation of microcracks in concrete*", Proceedings of the Int. Conf. On the structure of concrete, London : 8p.

**RODRIGUEZ-FERAN A., MORATA I., & HUERTA A., 2005**, "*A new damage model based on non-local displacements*", Int. J. Numer. Anal. Math. Geomech., 29:473–493.

**ROELFSTRA P.E., & SADOUKI H., 1986**, "*Fracture Process in Numerical Concrete*", Fracture Toughness and Fracture Energy of concrete, ed.by WITTMANN F.H., ELSEVIER Pubs., pp. 105-116.

**ROSCOE K.H., 1979**, "*The influence of strains in soil mechanics*", Geotechnique 20 - n° 2 - pp. 129-170.

**ROSSI P., 1988**, "*Fissuration du béton : du matériau à la structure. Application de la mécanique de la rupture*", Rapport de recherche LPC n° 150.

**ROSSI P., & RICHER J., 1987**, "*Numerical modelling of concrete cracking based on a stochastic approach*", Materials and Structures, RILEM, Vol. 20, pp. 334-337.

**ROSSLER M., & ODLER I., 1985**, "*Investigations on the relationship between porosity structure and strength of hydrated Portland cement pastes – 1. Effect of porosity*", Cement and Concrete Research, vol 15, n° 2, p 320-330.

**ROSTASY F.S., WEISS R., & WIEDMANN G., 1980**, "*Changes of pore structure of cement mortars due to temperature*", Cement and Concrete Research, vol 10, n° 2, p 157-164.

**ROTS J. C. 1988**, "*Computational Modelling of Concrete Fracture*", Thèse de doctorat, Delft University of Technology.

**RUDNICKI J., & RICE J., 1975**, "*Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials*", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 23(6):371–394.

**SAANOUNI K., 1988**, "*Sur l'analyse de la fissuration des milieux élasto-viscoplastique par la théorie de l'endommagement continue*", Université de Technologie de Compiègne.

**SAANOUNI K., & CHABOCHE J. L., 2000**, "*Computational damage mechanics. Application to metal forming*", Chap. 7 Vol. 3, Numerical and computational Methods, Ed. I. Miline, R.O.

**SAANOUNI K., & CHABOCHE J.L., 2003**, "*Comprehensive Structural Integrity*", ISBN: 0-08-043749-4.

**SAANOUNI K., & LESNE P.M., 1993**, "*Modélisation des déformations irréversibles dues à l'endommagement des matériaux composites élastiques fragiles*", la recherche aérospatiale, 1993-2 : 23-27.

**SAANOUNI K., FORSTER C., & HATIRA F.B., 1994**, "*On the Anelastic Flow With Damage*", J. Damage Mechanics, Vol3, PP 140-169.

**SAANOUNI K., NESNAS K., & HAMMI Y., 2000**, "*Damage modelling in metal forming processes*", Int. J. Dama. Mech., 196-240.

**SAENZ L.P., 1964**, "*Discussion on equation for the stress-strain curve of concrete by Desai end Krishnan*", Journal of Am. concr. Inst., Vol. 61, p. 1229-1235.

**SANTAOJA K., 2004**, "*Gradient theory from the thermomechanics point of view*", Engineering Fracture Mechanics, Vol 71, PP 557–566.

**SAOURIDIS C., 1988**, "*Identification et numérisation objectives des comportements adoucissants - approche multiechelle de l'endommagement du béton*", Thèse de Génie Civil : Université de Paris VI, E.N.S. de Cachan, 129p.

**SEAMAN L., GRAN J., & CURRAN D., 1984**, "*A microstructural approach to fracture of concrete*", Proc. of the NATO AR Workshop on 'Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites', ed. by SHAH S.P., NIJHOFF Pubs., pp. 481-505.

**SHAREEF S.S., & BUYUKOZTURK O., 1983**, "*Constitutive modeling of concrete in finite element analysis*", Cambridge (Massachusetts): M.I.T., 243 p. Research Report R83-16.

**SHEN X. SAANOUNI K., & BESSON J., 2002**, "*A gradient-dependent nonlocal constitutive formulation for thermoelasto- plasticity coupled with isotropic damage*", Technical report, University of Technology of Troyes.

**SIERRA R., 1974**, "*Contribution à l'étude de l'hydratation des silicates calciques hydrauliques*", Rapport de recherche n°39, LCPC.

**SIMO J.C., & JU J.W., 1987**, "*Strain and stress-based continuum damage models*", Parts I and II, Int. Journal of solids structures, 23 (7): 821-869.

**SIMO J.C., & OLIVIER J., 1993**, "*An Analysis of strong discontinuities induced by strains softening in rate independent inelastic solids*", Comp. Mech., Vol.: 12, PP. : 277-296.

**SIMO J.C., 1988**, "*Strain softening and dissipation: a unification of approaches*", In Bazant and Mazars cracking and damage, Elsevier applied science PP 440-461.

**SIMONE A., WELLS G.N., GERSTLE K.H. & SLUYS L.J., 2003**, "*From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192:4581–4607.

**SLUYS L., 1992**, "*Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids*". Thèse de doctorat, TU Delft - The Netherlands.

**STEINMANN P., 1995**, "*Theory and numerics of ductile micropolar elastoplastic damage*", Int. J. Num. Meth. Eng. Vol.38, PP.: 583-606.

- STRÖMBERG L., & RISTINMAA M., 1996**, "*Fe-formulation of a nonlocal plasticity theory*", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136:127–144.
- SUFFIS A., 2004**, "*Développement d'un modèle d'endommagement à taux de croissance contrôlé pour la simulation robuste des structures sous impact*", Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- SUQUET P., 1982**, "*Plasticité et homogénéisation*", thèse d'Etat Université Paris 6.
- SUQUET P., 1981**, "*Approche par homogénéisation d'une forme endommageable*", CRAS, série II, Tome 292.
- TAYLOR G. I., 1938**, "*Plastic strain in metals*", *J. Inst Metals*, London 62, 307-324.
- TERRIEN M., 1980**, "*Emission acoustique et comportement mécanique post-critique*", *Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 105, pp 65-72.
- TORRENTI J.M., 1987**, "*Comportement multiaxial du béton - aspects expérimentaux et modélisation*", Thèse de doctorat, Ecole National des Ponts et Chaussées.
- TORRENTI J.M., 1994**, "*Comportement mécanique du béton - Bilan de 6 années de recherche*", Mémoire d'Habilitation à diriger des travaux de recherches, Université de Paris 6, 158p.
- TRIANAFYLLIDIS N., & AIFANTIS. E. C., 1986**, "*A gradient approach to localization of deformation: I. hyperelastic materials*", *J. Elasticity*, 16:225-237.
- ULM F., 1994**, "*Modélisation élastoplastique avec endommagement du béton de structures. Application aux calculs statiques et dynamiques de structures en béton armé et béton précontraint*", Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- UNG QUOC H., 2003**, "*Théorie de dégradation du béton, développement d'un nouveau modèle d'endommagement pour le béton en formulation incrémentale et tangente. Calcul à la rupture appliqué au cas des chevilles de fixation ancrées dans le béton*", Thèse doctoral, ENPC, Paris.
- VALLAPIAN S., & DOOLAN T.F., 1972**, "*Nonlinear stress analysis of reinforced concrete*". *Journal of struct. Div., A.S.C.E.*, Vol. 98. n ST4, P. 885-897.
- VAN MIER J.G.M., 1984**, "*Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions*", Thèse de doctorat, Eindhoven University of Technology.
- VAN MIER J.G.M., 1984**, "*Complete stress-strain behavior and damaging status of concrete under multiaxial conditions*", *Int. Conf. on concrete under multiaxial conditions*, Vol. 1. Presses de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, France.
- VONK R.A., 1992**, "*Softening of concrete loaded in compression*", PhD Dissertation: Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 163p.

- VOYIADJIS G. & al., 2004**, "*Thermodynamic framework for coupling of non-local viscoplasticity and non-local anisotropic viscodamage for dynamic localization problems using gradient theory*", INT. J. Plasticity, Vol 20, PP 981–1038.
- VREE J. D., BREKELMANS W., & VAN GILS M., 1995**, "*Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics*", Computers and Structures, 55:581–588.
- WEIBULL W., 1939**, "*A statistical theory of the strength of materials*", Proc. Royal Swedish academy of Eng. Sci., vol. 151, pp. 1-45.
- WEIHE S., KROPLIN B. & DE BORST R., 1998**, "*Classification of smeared crack models based on material and structural properties*", Int. J. Solids Structures, Vol. 35, No. 12, pp. 1289-1308.
- WILLAM K., & WARNKE E., 1975**, "*Constitutive model of the triaxial behavior of concrete*", In IASBE Proceedings
- WILLAM K., BICANIC N., PRAMONO E., & STURE S., 1986**, "*Composite fracture model for strain softening computation of concrete*", Fracture Toughness and fracture Energy of Concrete, ed. by F.H. Wittmann, Elsevier Appl. Sci. Pub.. pp. 149-162.
- ZIENKEWICZ O. C., & PANDRE C. N., 1977-1982**, "*Time-dependant multi-laminate model of rocks –A numerical study of deformation and failure of rock masses*", Int. J. Anal. Methods Gemech 1, 219-247.
- ZIENKIEWICZ O.C., FEJZO R., & BICANC N., 1983**, "*Experience in analysing plain concrete structures using a rue sensitive model with crack monitoring capabilities*", Proceeding Int. Conf. on constitutive law for Engineering Materials. Ed. C.S. Desm. R.H. Gallagher.

# Résumé

*L'adoucissement dû à l'endommagement est à l'origine de la localisation de la déformation dans les matériaux quasi-fragiles tels que les bétons. Il est bien établi que les résultats d'analyse éléments finis de structures impliquant des comportements mécaniques adoucissants souffrent d'une dépendance à la discrétisation spatio-temporelle. Ce travail, à travers une étude non locale, propose d'aider au choix de modèles aptes à assurer l'indépendance vis à vis de la discrétisation. Après une analyse des différentes formes de dépendance au maillage, quelques solutions usuelles existantes sont présentées. De nombreux travaux présentent des formulations non locales à variables régularisées sous forme intégrale ou en gradient de variables internes. Une régularisation d'un modèle élastique isotrope couplée à un endommagement non local est présentée. Cette formulation qui consiste à délocaliser la variable d'endommagement "D" sous forme d'une intégrale de Gauss " $\bar{D}$ ".*

*Dans une autre partie de ce travail, un comportement élastique anisotrope différent en traction et en compression est modélisé dans un cadre thermodynamique. La modélisation de l'endommagement anisotrope est plus complexe. Dans le modèle proposé, on fait intervenir deux variables décrivant l'endommagement, une variable d'endommagement volumique (le scalaire  $\delta$ ), et une variable d'endommagement surfacique (le tenseur  $D$ ). La formulation proposée assure naturellement la continuité du tenseur contraintes et du taux de restitution d'énergie. L'anisotropie est induite par fissuration, le modèle relativement complet peut également rendre compte des déformations permanentes et de l'effet unilatéral observés lors de décharges, et nécessite l'identification de plusieurs paramètres au moyen d'essais complexes. On peut apprécier les performances du modèle en compression axisymétrique, et également l'évolution anisotrope de l'endommagement.*

*Les aspects numériques et l'implémentation dans un code de calcul sont particulièrement détaillés. Pour terminer, les principales conclusions et les perspectives les plus pertinentes de ce travail sont données.*

**Mots clés :** Béton, endommagement, comportement adoucissant, localisation, modèle non local, anisotropie, effet unilatéral.

# Abstract

*Softening due to damage is the source of the strain localization in the materials as concrete. The finite element analysis results of softening materials are well known to show pathological mesh dependency. This work, through a non local study, proposes to help with the choices of models ready to ensure independence with respect to the discretization. After an analysis of the various forms of dependence to the grid some existing usual solutions are presented. Many works presents non-local formulations to variables regularized in integral form or in gradient of internal variables. The adjustment of an isotropic elastic model coupled to non-local damage is presented in order to regularize the associated initial and boundary value problem. To make non-local calculations, it is necessary to choose the variable that will be delocalized. In this work, we have chosen to delocalize the variable "D" in the form of a Gaussian integral " $\bar{D}$ ".*

*In another part of this work, a different anisotropic elastic behaviour in traction and compression is modeling within a thermodynamic framework. The modeling of the anisotropic damage is more complex. In the model suggested, one utilizes two variables describing the damage, a volumic variable of damage (the scalar  $\delta$ ), and a surface variable of damage (the tensor  $D$ ). The formulation suggested naturally ensures the continuity of the tensor forced and the rate of refund of energy. The anisotropy is induced by cracking; the relatively complete model can also account for the permanent deformations and the unilateral effect observed during discharges, and requires the identification of several parameters by means of complex tests. One can appreciate the performances of the model in axisymmetric compression, and also the anisotropic evolution of the damage.*

*The numerical aspects and the implementation in a computer code are particularly detailed. For the end, the principal conclusions and the better developments in prospect are given.*

**Keywords:** Concrete, damage, softening behaviour, localization, non-local model, anisotropy, unilateral effect.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	i
<b>Résumé</b>	ii
<b>Table des matières</b>	iii

<b>Introduction générale</b> .....	1
------------------------------------	---

## Chapitre 1

### Le béton, aspects expérimentaux

Introduction .....	5
1.1 Le béton : structure et comportement .....	8
1.1.1 Les granulats .....	9
1.1.2 Le ciment .....	10
1.1.3 L'eau .....	11
1.2 Comportement macroscopique du béton sous sollicitations mécaniques .....	11
1.2.1 Comportement en compression simple .....	12
1.2.2 Comportement multiaxial .....	16
1.2.3 Comportement en traction .....	19
1.2.3.1 Essais de traction directe .....	19
1.2.3.2 Essais de traction indirects .....	25
1.2.3.3 Anisotropie induite par le chargement .....	26
1.2.3.4 Comportement en fatigue du béton .....	27
1.3 Critères de limite d'élasticité .....	27
1.3.1 Critères écrits en contrainte .....	28
1.3.1.1 Critère de Rankine .....	28
1.3.1.2 Critère de Drucker-Prager .....	28
1.3.1.3 Critère de Willam-Warnke .....	30
1.3.1.4 Critère de Gurson .....	31
1.3.1.5 Critère de François .....	32
1.3.2 Critères écrits en déformation .....	32
1.3.2.1 Critère de De Vree .....	33
1.3.2.2 Critère de Mazars .....	33
1.3.2.3 Critères de Mazars enrichis .....	34
Conclusion .....	35

## Chapitre 2

### Modèles de comportement endommageable du béton

Introduction .....	37
2.1 Approches du comportement du béton .....	38
2.1.1 Approches discontinues .....	38
2.1.2 Approches continues .....	40
2.1.3 Approches mixtes .....	40
2.2 Analyse des modèles théoriques existants pour le béton .....	41
2.2.1 Approches micromécaniques .....	41
2.2.1.1 Utilisation de techniques d'homogénéisation .....	41
2.2.1.2 Modèle "microplan" .....	43
2.2.1.3 Modèles statistiques .....	45
2.2.1.4 Modèles numériques .....	46
2.2.2 Modèles élastiques/plastiques .....	47
2.2.2.1 Modèles non linéaires .....	47
2.2.2.2 Modèles Elastoplastiques .....	48
2.2.2.3 Modèles de fissurations .....	49
2.2.2.4 Modèles dits "dynamiques" .....	54
2.2.3 Modèles d'endommagement .....	55
2.3 Approches mécaniques de l'endommagement .....	56
2.3.1 Formulation thermodynamique de l'endommagement et couplage Comportement- Endommagement .....	60
2.3.2 Potentiel thermodynamique - Lois d'Etat .....	60
2.3.3 Potentiel de dissipation - Loi d'évolution de l'endommagement .....	62
2.4 Modélisation de l'anisotropie .....	63
2.5 Modélisation de l'effet unilatéral - Effet de fermeture des microfissures .....	69
2.6 Modèle d'endommagement avec effet anélastique .....	72
2.6.1 Effet déviatorique au niveau macroscopique .....	73
2.6.2 Effet sphérique au niveau microscopique .....	73
2.7 Modélisation du comportement cyclique du béton .....	74
2.8 Modèles d'endommagement appliqués aux matériaux fragiles et bétons .....	74
2.8.1 Modèle de Mazars (Mazars 1984) .....	74
2.8.2 Modèle utilisant le formalisme classique de la plasticité (Marigo 1981) .....	75
2.8.3 Modèle de De Vree (De Vree 1995) .....	77
2.8.4 Modèle d'endommagement scalaire (Pijaudier-Cabot & Bodé 1992, Pijaudier-Cabot, Huerta & Bodé 1992, Pijaudier-Cabot 1985) .....	77
2.8.5 Modèle isotrope en contrainte (Lemaitre & Chaboche 1978) .....	77
2.8.6 Modèle de Lubliner (Lubliner, Oliver & al. 1989) .....	78
2.8.7 Formulation Lemaitre .....	79
2.8.8 Endommagement anisotrope en changement radial (Hayhurst & Leckie 1973) .....	80
2.8.9 Approche thermodynamique (Chaboche 1979) .....	80
2.8.10 Approche énergétique (Lemaitre & al. 1979, Cordebois & Sidoroff 1979-1982) .....	82
2.8.11 Modèle d'endommagement anisotrope avec un tenseur de dommage du 2 <sup>ème</sup> ordre (Murakami & Ohno 1978) .....	82

2.8.12	Approche énergétique (Ladeveze 1983) . . . . .	83
2.8.13	Modèle d'endommagement unilatéral de Mazars (Mazars 1985) . . . . .	84
2.8.14	Théorie de Ju (Ju 1989) (Anisotropie, effet unilatéral, anélastique tenseur d'endommagement de 4 <sup>ème</sup> ordre, compliqué et non continu) . . . . .	85
2.8.15	Modèle unilatéral (Hansen & Schreyer 1992-1995-1994) . . . . .	87
2.8.16	Modèle de Simo (Simo & al. 1987) . . . . .	87
2.8.17	Modèle de La Borderie (La Borderie 1991) . . . . .	88
2.8.18	Modèle unilatéral isotrope à deux variables (Gerard & Baste 1994) . . . . .	90
2.8.19	Modèle de Ramtani (Modèle de dommage unilatéral avec des tenseurs de dommage d'ordre 2) (Ramtani 1990) . . . . .	91
2.8.20	Modèle d'endommagement anisotrope unilatéral avec l'anélasticité menant à la définition d'une nouvelle variable interne (Matallah & La Borderie 2006) . . . . .	92
2.8.21	Modèle hystérétique uniaxial (La Borderie 2003) . . . . .	93
2.8.22	Modèle thermo-plastique couplé à l'endommagement pour le béton à hautes températures (Nechnech, Ragueneau & Meftah 2001) . . . . .	94
2.8.23	Modèle d'endommagement isotrope à deux surfaces (Comi 2001) . . . . .	95
2.8.24	Modèle avec prise en compte des déformations irréversibles dues à l'endommagement (Lesne & Saanouni 1993) . . . . .	96
2.8.25	Modèle pour le béton couplant endommagement/frottement (Ragueneau 1999) . . . . .	97
	Conclusion . . . . .	98

## Chapitre 3

### Modélisation et implémentation dans le cadre de l'approche locale

	Introduction . . . . .	101
3.1	Modèle d'endommagement de Mazars (Mazars 1984) . . . . .	103
3.2	Modèle d'endommagement isotrope pour le béton . . . . .	109
	3.2.1 Formulation du modèle . . . . .	109
	3.2.2 Déformation permanentes . . . . .	110
	3.2.3 Critère d'endommagement . . . . .	111
	3.2.4 Loi d'évolution de l'endommagement . . . . .	113
	3.2.5 Modélisation des phénomènes de fatigue . . . . .	116
3.3	Modèle d'endommagement anisotrope . . . . .	118
	3.3.1 Couplage élasticité-endommagement . . . . .	121
	3.3.2 Modélisations des déformations anélastiques . . . . .	122
	3.3.3 Modélisation du comportement unilatéral du béton . . . . .	123
	3.3.4 Critère et loi d'évolution de l'endommagement . . . . .	125
	3.3.4.1 Critère et loi d'évolution de l'endommagement en traction . . . . .	125
	3.3.4.2 Critère et loi d'évolution de l'endommagement en compression . . . . .	126
	3.3.4.3 Critère et loi d'évolution de l'endommagement pour la variable $\delta$ . . . . .	126
3.4	Aspect numérique . . . . .	126
	3.4.1 Position du problème d'évolution . . . . .	127
	3.4.2 Modélisation par éléments finis . . . . .	127

3.5	Validation du Programme et résultats issus du modèle isotrope .....	134
3.5.1	Réponse d'un élément de volume sollicité en traction pure .....	134
3.5.2	Réponse d'un élément de volume sollicité en compression pure .....	135
3.5.3	Essai de traction-chargement alterné .....	136
3.5.4	Test de compression homogène-chargement alterné (sans "rentre" en traction) .....	137
3.5.5	Test de traction et de compression (compression-traction, chargement alterné) .....	137
3.5.6	Essai de traction d'une poutre entaillée en béton .....	139
3.5.7	Essai de flexion d'une poutre entaillée en béton plein (effet de l'échelle) .....	140
3.5.8	Simulation d'un cube en béton .....	141
3.5.9	Essai de flexion trois points .....	143
3.5.10	Influence des différents paramètres. ....	147
3.6	Validation du modèle anisotrope et application à des structures en béton .....	152
3.6.1	Essai de traction .....	152
3.6.2	Réponse d'un élément de volume sollicité en compression .....	153
3.6.3	Réponse d'un élément de volume sous chargement cyclique (unilatéralité du modèle) .....	155
	Conclusion .....	156

## Chapitre 4

### Instabilités, dépendance au maillage et formulations non-locales

	Introduction .....	159
4.1	Matériau élastique endommageable et localisation .....	160
4.1.1	Notion de matériau endommageable .....	160
4.1.2	Schématisme usuelle .....	160
4.2	Origine du phénomène de localisation .....	161
4.2.1	Le phénomène de localisation : un fait expérimental .....	161
4.2.2	Perte d'ellipticité des équations en vitesse .....	164
4.2.2.1	Localisation : Mise en évidence avec un système constitué de deux ressorts en série .....	164
4.2.2.2	Localisation : cas général .....	166
4.3	Limites des modèles locaux .....	169
4.3.1	Aspects physiques .....	169
4.3.1.1	Effet d'échelle .....	169
4.3.1.2	Dégradation mécaniques et localisation des déformations .....	170
4.3.2	Aspects numériques .....	171
4.3.2.1	Critère de localisation et approche par analyse de perte de stabilité d'une perturbation linéaire .....	171
4.3.2.2	Conséquences numérique de la localisation .....	172
4.3.3	Aspects mathématiques .....	178
4.4	Traitement du problème de localisation - Trois orientations possibles .....	180
4.4.1	Méthodes numériques spécifiques .....	180
4.4.2	Critères de sélection énergétique .....	181
4.4.3	Régularisation des modèles .....	181
4.4.3.1	Introduction d'une cinématique enrichie .....	182
4.4.3.2	Régularisation par effet retard .....	186

4.4.3.3	Théories à gradients . . . . .	187
4.4.3.4	Théories non locales . . . . .	188
4.5	Admissibilité thermodynamique. . . . .	193
4.6	Quelques propositions figurant dans la littérature. . . . .	194
4.6.1	Régularisation des équations d'équilibre. . . . .	194
4.6.1.1	Principe des puissances virtuelles avec gradients d'endommagement (Frémond & Nedjar 1993) . . . . .	194
4.6.1.2	Théories du second gradient (Triantafyllidis & Aifantis 1986) . . . . .	196
4.6.2	Régularisation des équations de comportement. . . . .	197
4.6.2.1	Modèle avec Laplacien d'endommagement (Peerlings & al. 1995) . . . . .	197
4.6.2.2	Modèle élastique-endommageable avec Gradient d'endommagement d'ordre supérieur (GOS) dans la fonction seuil (Desoyer & Leroux 1994) . . . . .	198
4.7	Développement d'un modèle d'endommagement non-local. . . . .	200
4.7.1	Modèle local. . . . .	200
4.7.2	Délocalisation de la force motrice de l'endommagement . . . . .	200
4.7.3	Fonctions de charge. . . . .	201
4.7.4	Critère de localisation : approche par analyse de perte de stabilité d'une perturbation linéaire . . . . .	202
4.7.5	Résultats numériques. . . . .	203
4.7.6	Formulation thermodynamique et loi d'évolution. . . . .	204
4.7.7	Implantation numérique. . . . .	206
4.8	Validation du programme de calcul. . . . .	210
4.8.1	Etude de la réponse d'un élément de volume en traction . . . . .	210
4.8.2	Application à une éprouvette en traction. . . . .	215
4.8.2.1	Etude selon les différents pas d'allongements. . . . .	216
4.8.2.2	Influence du rayon d'intégration R sur la réponse de la structure. . . . .	220
4.8.2.3	Sensibilité au maillage. . . . .	222
	Conclusion. . . . .	225
	<b>Conclusion et perspectives</b> . . . . .	227
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	232