

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

En vu de l'obtention d'un diplôme de Master en Recherche Opérationnelle

Thème

*Contrôle optimal et application au
problème de GODDARD*

Présenté par :

BENHADDAD Hicham

HADJAR Abderrahim

Président : M. Aidene Mohamed
Proposé par : M. Merakeb Abdelkader
Examineur : Mme. Moussouni Dehbia

U.M.M. Tizi-Ouzou.
U.M.M. Tizi-Ouzou.
U.M.M. Tizi-Ouzou.

Tizi-Ouzou, Juin 2016.

✱ *Remerciements* ✱

”Bismi’llah” Tout d’abord, nous remercions Dieu le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience de réaliser ce travail.

Nous tenons à exprimer ici toute notre reconnaissance à *M^r* MERAKEB pour l’honneur qu’il nous a fait en assurant la direction et le suivi scientifique et technique du présent mémoire. On le remercie pour sa grande contribution malgré ses nombreuses préoccupations. Qu’il trouve ici notre profonde gratitude.

On exprime nos sincères remerciements au président et aux membres du jury, qui nous ont fait l’honneur d’étudier et juger ce travail.

On ne peut oublier de remercier tous les membres de nos familles pour leurs soutiens et leurs encouragements, particulièrement nos chères parents. On remercie aussi tout ceux qui nous ont aidé et soutenus de près ou de loin tout au long de notre parcours.

✱ *Dédicaces* ✱

Il m'est un énorme plaisir de dédier ce travail à :

- La mémoire de mon grand père le Moudjahed Hadjar Hadj Ali, c'est grâce à dieu puis à lui que je suis arrivé là, que je suis ce que je suis aujourd'hui. C'est avec une affection, de précieux conseils et une grande sagesse qui m'a appris à affronter la vie, que dieu l'accueille dans son vaste paradis.
- Mes chère parents, qui m'ont élevé avec leur plus grand amour, que dieu les garde et les protège de tous les malheurs.
- Mon unique frère Yacine, mon épaule et soutient dans la vie.
- Ma grand mere, à mon oncle Hocine qui m'a toujours soutenu.
- Celle qui berce mon coeur, à ma bien aimée Lynda.
- Tous mes cousins, tout particulièrement, Samir, Karim, Islam et Noredine.
- Mes chers amis, Said, Hamid, Mazigh, Ghiles et Hakim, sans oublier mon binôme Hicham, qui a montré un dévouement et une volonté de fer.
- Tous les enseignant et étudiants de la promotion **RO** des Universités de Beiaia et de Tizi-Ouzou.
- Toutes mes connaissances de près ou de loin qui ont marqué mon parcours.

Rahim

✧ *Dédicaces* ✧

Je dédie ce modeste travail à :

★ Ceux qui ont attendu avec impatience le fruit de leur bonne éducation, Ma **mère** et Mon **père**, je n'oublierai jamais leurs conseils et leurs encouragements, que dieu les garde et les protège.

★ Mes chers **grands parents** adorés.

★ Mon frère **Salim** et son épouse.

★ Ma soeur **Sonia**.

★ Mes amis avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliable, je leur souhaite de ma part la réussite : **Said, Hakim ,Amazigh, hamid, ferdjellah**, sans oublier mon *binôm* **Abderrahim**.

★ Toute ma famille.

★ Toute la promotion "**RO**".

Hicham

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	iii
Introduction générale	1
1 Equations différentielles ordinaires	2
1.1 Introduction	2
1.2 Définitions	2
1.2.1 Problème de Cauchy	3
1.3 Réduction à une équation du premier ordre	4
1.4 Quelques types d'équations différentielles	4
1.4.1 Equations linéaire du 1 ^{er} ordre	4
1.4.2 Equations à variables séparables	5
1.4.3 Equations de Bernoulli	5
1.4.4 Equations de Riccati	6
1.5 Méthodes numérique de résolution des équations différentielles	6
1.5.1 Formulation générale	6
1.5.2 Méthode d'Euler	7
1.5.3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2	7
1.5.4 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	8
1.6 Programmation des méthodes sur MATLAB	9
1.6.1 Méthode d'Euler	9
1.6.2 Méthode de Runge-Kutta 2	10
1.6.3 Méthode de Runge-Kutta 4	11
2 Notions de contrôle optimal	14
2.1 Théorie du contrôle optimal	14

2.1.1	Structuration d'un problème de contrôle optimal	15
2.1.2	Définitions	15
2.2	Contrôlabilité des systèmes de contrôle	16
2.2.1	Notion de contrôlabilité	16
2.2.2	Ensemble d'accessibilité	17
2.2.3	Contrôlabilité des systèmes linéaires	17
2.2.4	Contrôlabilité des systèmes linéaires autonome	18
2.2.5	Contrôlabilité des systèmes non-linéaires	19
2.3	Position de problème	19
2.3.1	Problème de Lagrange	20
2.3.2	Problème de Mayer	20
2.3.3	Problème de Mayer-Lagrange	21
2.4	Principe du maximum de Pontryagin	21
2.5	Méthodes numériques en contrôle optimal	23
2.5.1	Méthodes directes :	23
2.5.2	Méthodes indirectes :	24
2.5.3	Comparaison entre les deux Méthodes	27
3	Contrôle optimal du problème de GODDARD	28
3.1	Introduction	28
3.2	Généralités sur le vol d'une fusée	29
3.2.1	La fusée	29
3.2.2	Les phases du vol	29
3.2.3	Pression atmosphérique :	31
3.2.4	Les forces en présence	31
3.3	Position du problème	31
3.4	Application du principe du maximum de Pontryagin	35
3.4.1	Implémentation de la méthode de tir sous MATLAB	40
3.5	Simulation via la méthode directe	42
3.5.1	Discussion des résultats	45
	Conclusion générale	46
	Bibliographie	47

Table des figures

1.1	Solution par la méthode d'Euler.	10
1.2	Solution par la méthode Runge-kutta 2.	11
1.3	Solution par la méthode Runge-Kutta 4.	12
1.4	Comparaison des Solutions sous Matlab.	13
2.1	Schéma de la méthode de Newton.	25
3.1	Illustration des phases d'un vol.	30
3.2	Solution optimale obtenu par la méthode directe.	44

Introduction générale

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est à dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères : c'est l'étape de réalisation de la commande. Historiquement, la théorie du contrôle est liée d'une part au calcul des variations[8] et d'autre part à la résolution des équations différentielles ordinaires.

Le problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : Pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut savoir d'abord si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité. Il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, apparue dans les années soixante avec les travaux de R. E. Kalman[6]. Pour les systèmes non linéaires, le problème de contrôlabilité est beaucoup plus difficile.

Une fois le problème de contrôlabilité est résolu, il faut chercher parmi toutes les trajectoires possibles celle qui donne le coût minimum (maximum) et pour ce faire, on dispose de deux grandes classes de méthodes à savoir la méthode directe et la méthode indirecte.

Le plan de notre manuscrit est le suivant :

Le premier chapitre sera consacré aux notions de résolution numérique des equations différentielles qui sont la base fondamentale du contrôle optimal. Nous avons défini quelques méthodes de résolution des équations différentielles du premier ordre les plus utilisées telles que la méthode d'Euler et celle de Rung-Kutta.

Au second chapitre on s'intéresse au fondements théorique du contrôle optimal ainsi que quelques méthodes de résolution à savoir la méthode indirecte découlant du principe du maximum de Pontryagin et la méthode directe basée sur les techniques de discrétisation. La modélisation du problème de Goddard ainsi que sa résolution par les deux méthodes directe et indirecte feront l'objet du troisième chapitre.

Enfin nous terminons le manuscrit par une conclusion générale.

Equations différentielles ordinaires

1.1 Introduction

Les équations différentielles jouent un rôle important dans différents domaines tels qu'en chimie, en biologie, en physique, ... etc. Ces équations ont rarement des solutions exactes, autrement dit, la résolution analytique de ces équations différentielles n'est pas toujours possible.

Une équation différentielle en mathématique est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leur dérivées, ces équations ne s'intègrent pas d'une manière exacte, on fait appel dans ce cas à des méthodes numériques afin de trouver des solutions approchées.

1.2 Définitions

Définition 1.2.1. (Equations différentielles ordinaires)

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation entre la variable réelle t et une fonction inconnue $t \rightarrow y(t)$ et ses dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$ au point t définie par :

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

on notera :

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

La fonction F est prescrite et le problème est de déterminer les fonctions y qui satisfont l'équation donnée. L'équation s'appelle ordinaire, car la fonction à déterminer est une fonction d'une seule variable.

On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 1.2.2. Une **solution** de l'équation différentielle sur un intervalle I est une fonction Φ telle que :

$$f(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \dots, \phi^{(n)}(t)) = 0$$

Définition 1.2.3. (Equations différentielles ordinaire du premier ordre)

On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre, une équation de type :

$$F(t, y, y') = 0$$

1.2.1 Problème de Cauchy

Soit I_0 désignant un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point et t_0 un point fixé dans I_0 . On se donne une fonction f définie et continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^m$ à valeur dans \mathbb{R}^m , ainsi qu'un élément y_0 de \mathbb{R}^m , et on cherche à trouver une fonction y continue et dérivable sur l'intervalle I_0 , à valeur dans \mathbb{R}^m , telle que

$$\forall t \in I_0, y'(t) = f(t, y(t)) \quad (1.1)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (1.2)$$

Ce problème s'appelle problème de Cauchy pour le système différentiel (1.1), la condition (1.2) s'appelle condition initiale. Une fonction y qui vérifie les équations (1.1) est appelée intégrale du système différentiel (1.1), (1.2). Nous nous intéresserons plus particulièrement au cas où I_0 est de la forme $[t_0, T]$ telle que t représente le temps, l'instant t_0 est alors appelé instant initial.

Théorème de Cauchy-Lipchitz

Théorème 1.2.1. [3] *Considérons le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^p, \end{cases} \quad (1.3)$$

avec $f : (t, y) \in I \times \mathbb{R}^p \rightarrow f(t, y) \in \mathbb{R}^p$.

f est continue sur \mathbb{R}^p .

f est lipchitzienne localement en y c'est à dire :

$\exists L > 0$ telle que :

$$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in v_{\mathbb{R}^p}(y_0) : \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|.$$

Alors le problème de Cauchy (1.3) possède une unique solution. Cette solution est définie sur un intervalle contenant t .

1.3 Réduction à une équation du premier ordre

Considérons l'EDO d'ordre n , ($n \geq 2$) :

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où, y est à valeurs dans \mathbb{R}^m et

$$F : \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{n+1 \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}^p$$

On fait le changement d'inconnues $Z = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$. On aura $Z \in (\mathbb{R}^m)^n$. On note $Z = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ où $z_i = y^{(i-1)} \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, n$. On obtient alors les relation entre les z_i .

$$\begin{cases} z'_i - z_{i+1} = 0, i = 1, \dots, n-1 \\ F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

On se ramène alors à une équation du premier ordre à une seule variable et n inconnues du type :

$$G(t, z_1, z_2, \dots, z_n, z'_1, z'_2, \dots, z'_{(n)}) = 0$$

Par exemple, en particulier pour $n = 2$ et pour F scalaire :

$$F(y, y', y'') = 0$$

Cette équation peut se ramener à une équation du premier ordre à deux inconnues z_1, z_2

$$\begin{cases} z'_1 - z_2 = 0, \\ F(t, z_1, z_2, z'_1, z'_2) = 0 \end{cases}$$

1.4 Quelques types d'équations différentielles

1.4.1 Equations linéaire du 1^{er} ordre

Définition 1.4.1. Une équation différentielle est linéaire du premier ordre si et seulement si elle est de la forme :

$$a(t)y' + b(t)y = c(t). \quad (1.4)$$

Où $a(t)$, $b(t)$ sont les coefficients et $c(t)$ le second membre de l'équation différentielle.

On associe à l'équation différentielle (1.4), l'équation dite homogène ou sans second membre

$$a(t)y' + b(t)y = 0$$

qui est une équation différentielle à variables séparables.

1.4.2 Equations à variables séparables

Ce sont des équations du premier ordre sous forme normale données par l'équation, $y' = f(t, y)$.

On peut regrouper t, dt d'une part et y, dy d'autre part. Le but est d'exprimer $f(t, y)$ sous la forme $g(t).h(y)$. Ce qui permettra de résoudre une équation du type :

$$y' = g(t).h(y)$$

Définition 1.4.2. (Equation à variables séparées)

On appelle une équation à variables séparées toute équation de la forme :

$$a(y)y' = b(t)$$

où a et b sont deux fonctions définies respectivement sur des intervalles J et K de \mathbb{R} .

1.4.3 Equations de Bernoulli

Définition 1.4.3. Une équation différentielle de Bernoulli est une équation de la forme :

$$y' + a(t)y = b(t)y^m \tag{1.5}$$

Où a et b sont des fonctions en t données et m une constante réelle différente de 0 et 1.

Méthode de résolution :

En divisant les deux membres de l'équation par y^m on obtient :

$$\frac{y'}{y^m} + a(t)\frac{1}{y^{m-1}} = b(t). \tag{1.6}$$

En effectuant le changement de fonction

$$z = \frac{1}{y^{m-1}} \Rightarrow z' = (1 - m)\frac{y'}{y^m}$$

l'équation (1.6) devient :

$$\frac{1}{m-1}z' = a(t)z = b(t).$$

Donc l'équation (1.5) se ramène à une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre en z

1.4.4 Equations de Riccati

Définition 1.4.4. Une équation différentielle de Riccati est une équation de la forme :

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t) \quad (1.7)$$

où a , b et c sont des fonctions en t données.

Méthode de résolution :

On ne peut résoudre ce type d'équation que si l'on connaît une solution particulière y_1 . Avec le changement de fonction $y = y_1 + z$ et sachant que y_1 est solution particulière.

$$y_1' = a(t)y_1^2 + b(t)y_1 + c(t)$$

l'équation (1.7) devient :

$$z' = a(t)z^2 + [2a(t)y_1 + b(t)]z. \quad (1.8)$$

Donc, l'équation (1.7) se ramène à une équation de Bernoulli (1.5) avec $m = 2$ en z .

1.5 Méthodes numérique de résolution des équations différentielles

Les schémas numériques de résolution d'équations différentielles ordinaires sont nombreux. On se contente dans ce chapitre de présenter les schémas à un pas parmi elles la méthode d'Euler et la méthode de Runge-Kutta.

1.5.1 Formulation générale

On commence en remarquant qu'une solution formelle de l'équation :

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t))$$

est obtenue en intégrant de t_0 à t :

$$\begin{aligned} \int_{y(t_0)}^{y(t)} dy &= \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \\ y(t) - y(t_0) &= \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \end{aligned}$$

donc la solution $y(t)$ s'écrit

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

où $y_0 \equiv y(t_0)$. Le problème avec cette solution formelle est que l'inconnue $y(t)$ se trouve sous une intégrale.

1.5.2 Méthode d'Euler

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I = [0, T] \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.9)$$

Les méthodes basées sur la série de Taylor se prêtent bien à des traitements numériques. Commençons par subdiviser l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ en N sous intervalles de même longueur h et appelons t_n les points de subdivision. Nous avons donc :

$$0 = t_0 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = T \quad (1.10)$$

et posons :

$$h_n = t_{n+1} - t_n, 0 \leq n \leq N \quad (1.11)$$

La solution de (1.9) vérifié pour $0 \leq n \leq N$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds \quad (1.12)$$

On construit par récurrence une approximation y_n et $y(t_n)$ en remplaçant la relation précédente par :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (1.13)$$

Ce qui revient à approcher, pour $s \in]t_n, t_{n+1}[$, $f(s, y(s))$ par $f(t_n, y_n)$.

1.5.3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes d'analyse numérique d'approximation de solutions des équations différentielles, elles ont été nommées ainsi en l'honneur des mathématiciens Carl Runge(1856-1927) et Martin Wilhelm Kutta(1867-1944) lesquels élaborèrent la méthode en 1901.

Ces méthodes reposent sur le principe de l'itération, c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation plus précise et ainsi de suite.

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I = [0, T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On cherche à discrétiser ce problème par rapport à une subdivision :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = T.$$

L'idée est de calculer par récurrence les points : $(t_n, y(t_n))$.

posons :

$$h_n = t_{n+1} - t_n, \quad h = \max h_n, \quad 0 \leq n \leq N.$$

La méthode de Runge-Kutta correspondante est définie par l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} k_1 = h \times f(t_{n-1}, y(t_{n-1})), \\ k_2 = h \times f(t_{n-1} + h/2, y(t_{n-1}) + K_1/2), \\ y(t_n) = y(t_{n-1}) + K_2. \end{cases}$$

1.5.4 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

La technique Runge-Kutta à l'ordre 4 intervient dans la plupart des programmes EDO (Equations différentielles ordinaires) comme ceux utilisés par Matlab et Octave. La formule Runge-Kutta à l'ordre 4 est de loin la plus utilisée, elle a une forme assez symétrique définie comme suit :

$$\begin{cases} k_1 = h \times f(t_{n-1}, y(t_{n-1})), \\ k_2 = h \times f(t_{n-1} + \frac{1}{2}h, y(t_{n-1}) + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 = h \times f(t_{n-1} + \frac{1}{2}h, y(t_{n-1}) + \frac{1}{2}k_2), \\ k_4 = h \times f(t_{n-1} + h, y(t_{n-1}) + k_3), \\ y(t_n) = y(t_{n-1}) + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\frac{1}{6}. \end{cases}$$

L'interprétation géométrique des variantes k_1, k_2, k_3, k_4 :

k_1 : la pente au début de l'intervalle.

k_2 : la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente k_1 pour calculer la valeur de y au point $t_n + h/2$ par le biais de la méthode d'Euler.

k_3 : de nouveau, la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente k_2 pour calculer y .

k_4 : la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur y calculée en utilisant k_3 .

y_{n+1} : le schéma de la méthode RK4, ou-bien la moyenne des quatre pentes en affectant des poids plus grands à celles des points milieu.

1.6 Programmation des méthodes sur MATLAB

Soit l'exemple d'équation différentielle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = t - y(t), \\ y(t_0) = y_0 = 1, \quad t_0 = 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

la solution analytique de l'équation (1.14) est obtenue par les techniques habituelles de résolution d'équations différentielles à coefficients constants :

$$y(t) = (y_0 + 1)e^{-t} + t - 1$$

avec la condition initiale $(0, 1)$ i.e. $y(t_0 = 0) = 1$,

1.6.1 Méthode d'Euler

on peut facilement programmer la méthode d'euler sur MATLAB :

```
[1] function [t,y]=Euler(tmin,tmax,Nint,y0) % Méthode d'Euler.
% Nint - nombre de sous intervalles N
% tmin - temps t0
% tmax - temps t0 + T
% f est une fonction avec comme arguments t et y(t) : f(t,y(t))
% y0 contient les valeurs des conditions limites  $y_{(0)} = y(t_0)$ 
[2] h = (tmax-tmin)/Nint; % valeur du pas
[3] t = linspace(tmin,tmax,Nint+1); % vecteur de t discrétisé t=[tmin,tmax]
[4] y(1) = y0; % initialisation  $y(1) = y(t_0) = y_0$ 
[5] for i = 2 : Nint + 1
[6] y(n)=y (n-1)+ h*f ( t (n-1), y (n-1) ); % calcule d'euler
[7] end
[8] plot(t,y,'c'); hold on;
[9] function v = f(t,y)
[10] v= t-y;
```


Le résultat d'exécution sous MATLAB est donnée par la figure suivante :

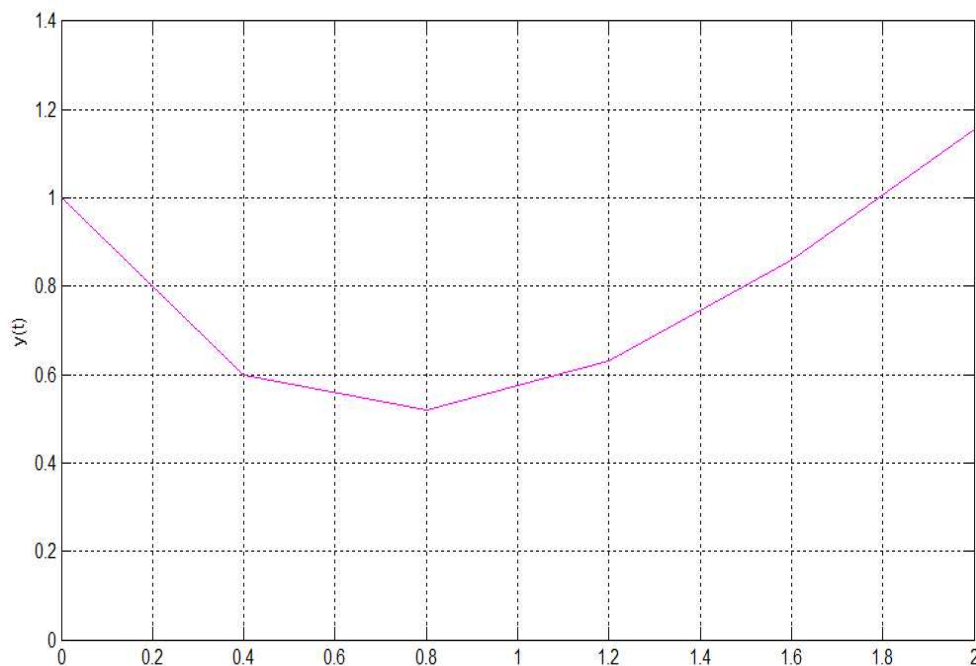


FIG. 1.1 – Solution par la méthode d'Euler.

1.6.2 Méthode de Runge-Kutta 2

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 est programmée sur Matlab comme suit :

```
[1] function [t,y]=RK2 (tmin,tmax,Nint,y0) % Méthode de Runge Kutta d'ordre 2.
% Nint - nombre de sous intervalles
% tmin - temps t0
% tmax - temps t0 + T
% f est une fonction avec comme arguments t et y : f(t,y(t))
% y0 contient les valeurs des conditions limites
[2] h = (tmax-tmin)/Nint; valeur du pas
[3] t = linspace(tmin,tmax,Nint+1); % vecteur de t discrétisé t=[tmin,tmax]
[4] y(1) = y0; % y contient les solutions de y(tn); n=1,...,Nint+1
[5] for i = 2 : Nint + 1
[6] k1= h*f ( t (n-1), y (n-1) );
[7] k2= h*f ( t (n-1)+ h/2, y (n-1)+ k1/2);
[8] y(n)= y (n-1) + k2;
```

```

[9] end
[10] plot(t,y,'g'); hold on;
[11] function v = f(t,y)
[12] v= t-y;

```

Le résultat d'exécution de la méthode Runge-kutta 2 sous MATLAB est donnée par la figure suivante :

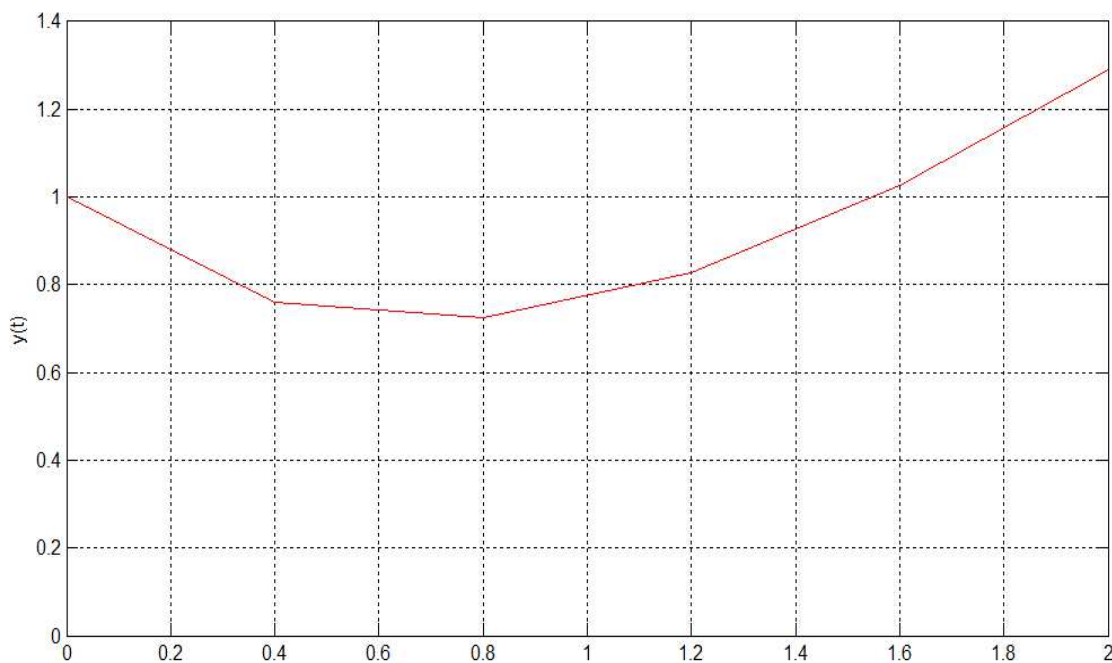


FIG. 1.2 – Solution par la méthode Runge-kutta 2.

1.6.3 Méthode de Runge-Kutta 4

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est programmée sur Matlab comme suit :

```

[1] function [t,y]=RK4 ( tmin , tmax, Nint, y0)
% Nint - nombre de sous intervalles
% tmin - temps t0
% tmax - temps t0 + T
% f est une fonction avec comme arguments t et y : f(t,y(t))
% y0 contient les valeurs des conditions limites
[2] h = ( tmax-tmin )/Nint; % valeur du pas
[3] t = linspace( tmin,tmax,Nint+1 ); %vecteur de t discrétisé t=[tmin,tmax]

```

```

[4] y(1) = y0; % y contient les solutions de y(tn); n=1,...,Nint+1
[5] for i = 2 : Nint + 1
[6] k1= h* f( t(n-1), y(n-1));
[7] k2= h* f( t(n-1)+ h/2, y(n-1)+ k1/2);
[8] k3= h* f( t(n-1)+ h/2, y(n-1)+ k2/2);
[9] k4= h* f( t(n-1)+ h, y(n-1)+ k3);
[10] y(n)= y(n-1)+ ( k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
[11] end
[12] plot(t, y, 'r'); hold on;
[13] function v=f(t,y)
[14] v= t-y;

```

Le résultat d'exécution de la méthode Runge-Kutta 4 sous MATLAB est donnée par la figure suivante :

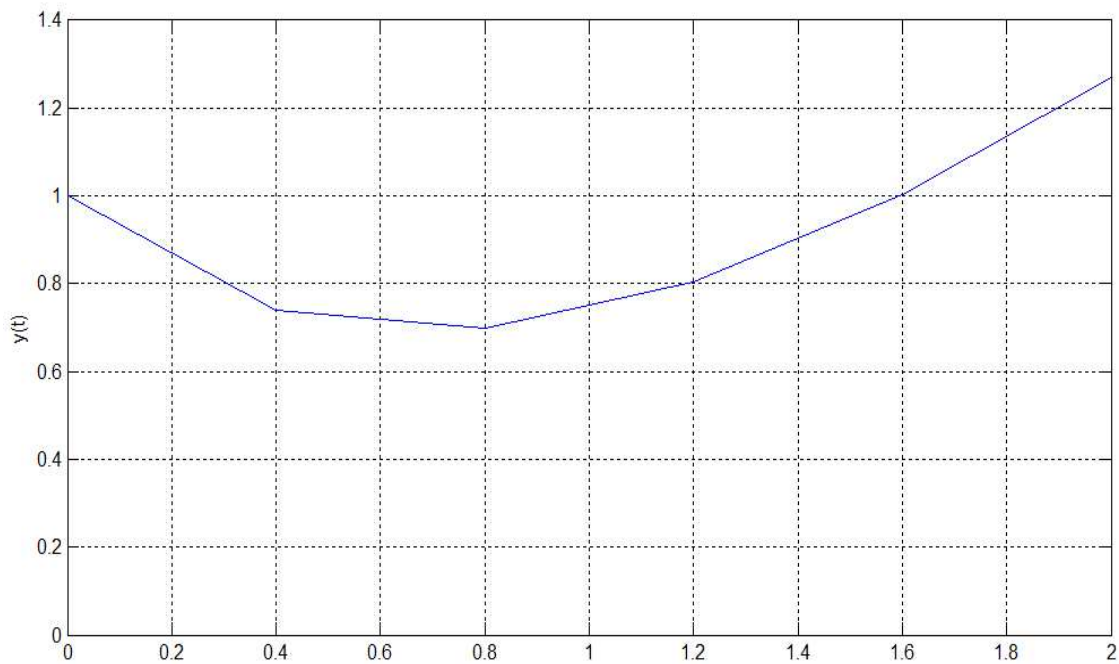


FIG. 1.3 – Solution par la méthode Runge-Kutta 4.

Comparaison des méthodes

La comparaison de la solution exacte avec les solutions issus des méthodes de Runge-Kutta (2 et 4) et d'Euler est donnée par la figure suivante :

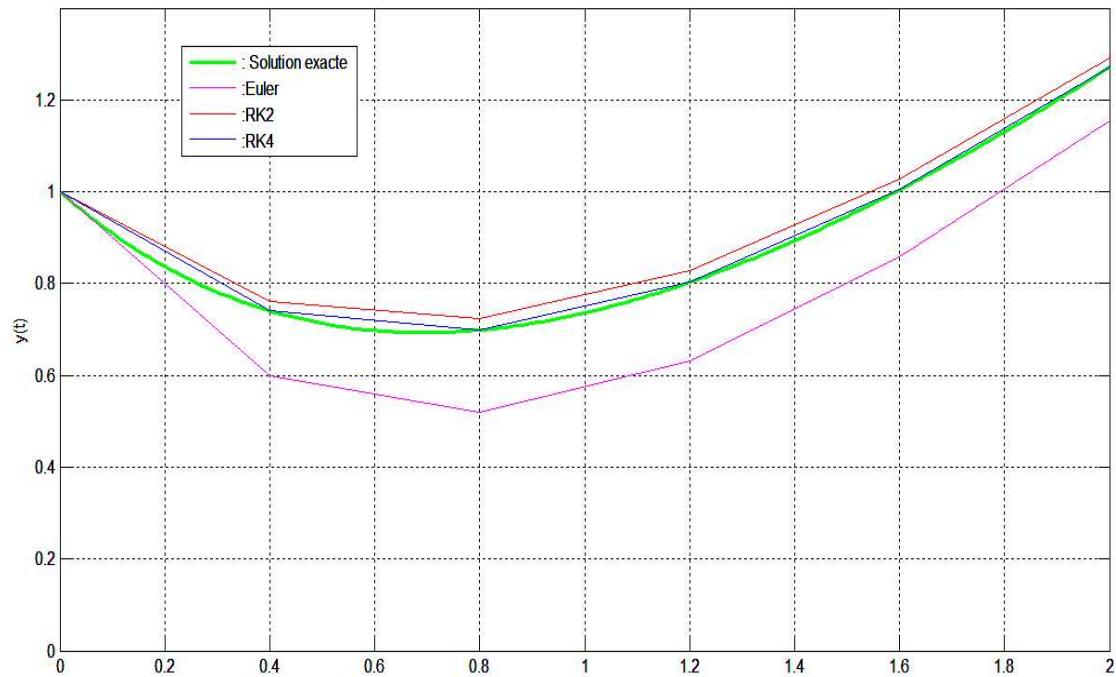


FIG. 1.4 – Comparaison des Solutions sous Matlab.

Remarque 1.6.1. On remarque que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est plus précise (proche de la solution exacte) que celle de Runge-Kutta 2 et d'Euler.

Notions de contrôle optimal

Ce chapitre est consacré aux notions de base de la théorie de contrôle et la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires en utilisant les différentes méthodes de résolution des problèmes de contrôle optimal.

2.1 Théorie du contrôle optimal

En mathématique, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations, elle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... etc. Quant à leurs origines, elles sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie...etc.

Cette méthode est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique. La formalisation de cette théorie a posé de nouvelles questions, par exemple, dans la théorie des équations différentielles ordinaires, elle a motivé un concept de solutions généralisées et a engendré de nouveaux résultats d'existence de trajectoires optimales.

La théorie du contrôle optimal est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes de Fermat, de Huygens, les équations d'Euler-Lagrange ...etc.

2.1.1 Structuration d'un problème de contrôle optimal

Les aspects importants lors de la formulation d'un problème de contrôle optimal exigent :

- Description mathématique (modélisation) du processus à contrôler.
- Déclaration des contraintes physiques.
- Spécification des critères de performance.

La partie la moins triviale d'un problème de contrôle est la modélisation du processus.

Le but est d'obtenir une description mathématique simple qui prévoit de manière anticipée la réponse du système pour tout contrôle admissible.

2.1.2 Définitions

Définition 2.1.1.

- Les variables nommées variables d'état seront notées x_i , $i = 1, \dots, n$.
Les systèmes considérés évoluent dans le temps, donc les x_i sont des fonctions de temps notées : $x_i(t)$, $t \in [0, T]$.
- Les variables de contrôle, appelées aussi variables d'entrée, seront notées $u_j(t)$, $j = 1, \dots, m$.
Elles doivent être intégrables par rapport à t , chose qui est bien souvent trop restrictive car ces fonctions peuvent être continues par morceaux ou de type Bang-Bang.
- Les n variables d'état vont être gouvernées par n équations différentielles du premier ordre nommées équations d'état de la forme :

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [0, T]. \quad (2.1)$$

ou \dot{x} est le vecteur dérivé par rapport au temps t de toutes les composantes de x .

- L'ensemble U est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut être non bornée, bornée ou du type Bang-Bang.

Définition 2.1.2. (Commande bornée). la commande $u_j(t)$ est dite commande bornée si elle peut être minorée et majorée par des constantes a_j et b_j , par la forme suivante : $a_j \leq u_j(t) \leq b_j$, $j = 1, \dots, m$, $t \in [0, T]$.

Définition 2.1.3. (Commande Bang-Bang). Un contrôle $u \in U$ est appelée contrôle Bang-Bang, si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$, on a $|u_j(t)| \leq 1$.

Définition 2.1.4. Le contrôle $u(t)$, $t \in [0, T]$ est dit **admissible** s'il satisfait les contraintes :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), & x(0) = x_0 \\ d_* \leq u(t) \leq d^* \end{cases} \quad (2.2)$$

Définition 2.1.5. Une fonction réelle $u(t)$, $t_0 \leq t \leq T$ est dite continue par morceaux, notée $u \in \hat{C}[t_0, T]$ s'il existe une partition $t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = T$ tel que u peut être considérée comme une fonction continue dans $[t_k, t_{k+1}]$ pour chaque $k = 0, 1, \dots, N$.

2.2 Contrôlabilité des systèmes de contrôle

2.2.1 Notion de contrôlabilité

La contrôlabilité est l'un des concepts centraux de la théorie du contrôle optimale, c'est la possibilité d'influencer l'état du système (sortie) en manipulant les entrées (commandes). Pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial M_0 à une cible M_1 , il faut d'abord vérifier si cette cible est atteignable : c'est le problème de contrôlabilité. La question à poser est : Existe-t-il un contrôle u tel que la trajectoire associée x conduit le système de M_0 à M_1 en un temps t fini ?.

La notion de contrôlabilité a été inventée en 1960 par Kalman [6] à propos des systèmes linéaires de la forme $\dot{x} = Ax + Bu$. L'état x évolue dans un espace vectoriel réel E , de dimension n .

On dit que $\dot{x} = Ax + Bu$ est contrôlable, si l'on peut joindre deux points de l'espace d'état, c'est à dire si et seulement si, étant donnés deux points $x_0, x_1 \in E$ et deux instants t_0, t_1 avec $t_0 < t_1$, il existe une commande u , définie sur $[t_0, t_1]$, tel que : $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

2.2.2 Ensemble d'accessibilité

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in I = [0, T]. \quad (*)$$

Définition 2.2.1. L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en temps final T est :

$$Acc(x_0, T) = \{x_u(T), u \in U\}.$$

ou $x_u(\cdot)$ est la solution du système (*) associée au contrôle u . Autrement dit $Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (*), en temps T lorsque le contrôle u varie.

Définition 2.2.2. Le système (*) est dit contrôlable en temps T si :

$$Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n.$$

Définition 2.2.3. Le contrôle u est dit extrême sur $[0, T]$, si la trajectoire du système $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ associée à u vérifie :

$$x(t) \in \partial Acc(x_0, T), \quad t \in I = [0, T]. \quad (2.3)$$

2.2.3 Contrôlabilité des systèmes linéaires

La formulation mathématique d'un système de contrôle linéaire est la suivante :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in I = [0, T]. \quad (2.4)$$

Où I est un intervalle de \mathbb{R} . A , B et r sont trois applications localement intégrales sur I à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$ et (\mathbb{R}^n) . l'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeurs dans un sous ensemble $U \subset \mathbb{R}$.

Soit $M(\cdot) : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, définie par :

$$\begin{cases} \dot{M} = A(t)M(t), \\ M(0) = Id. \end{cases}$$

où Id est la matrice identité.

Pour tout contrôle u le système $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$, $x(0) = x_0$ admet une unique solution $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue donnée par :

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t [M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s) + r(s)]ds, \quad t \in I = [0, T]. \quad (2.5)$$

Si $r = 0$ et $x_0 = 0$, alors la solution du système s'écrit :

$$x(t) = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u(s) ds. \quad (2.6)$$

Elle est linéaire en u .

le théorème suivant donne une condition générale pour la contrôlabilité des systèmes linéaires :

Théorème 2.2.1. [10] *Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice :*

$$C(t_f) = \int_0^T M(t)^{-1} B(t) B(t)' M(t)^{-1} dt \quad (2.7)$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

Où $B(t)'$ est la transposée de $B(t)$ et $M(t)^{-1}$ est l'inverse de $M(t)$.

Cette condition ne dépend pas de x_0 , c'est à dire que si un système linéaire est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en temps T depuis tout point.

2.2.4 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonome

Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est dit autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t . Dans ce cas, la matrice $M(t) = e^{tA}$.

La solution du système associée au contrôle u s'écrit, pour tout $t \in I$:

$$x(t) = e^{tA}(x_0 + \int_0^t e^{-As}(Bu + r(s))ds). \quad (2.8)$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas sans contrainte sur le contrôle.

Théorème 2.2.2. [10] *On suppose que $U = \mathbb{R}^m$.*

Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice :

$$C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

est de rang n .

Remarque 2.2.1. C est une matrice à n lignes et $n \times m$ colonnes, elle est appelée matrice de Kalman. La condition $\text{rang } C = n$ est appelée condition de Kalman.

2.2.5 Contrôlabilité des systèmes non-linéaires

La contrôlabilité est un concept clé pour la compréhension des propriétés structurelles et qualitatives, comme la stabilisation.

L'extension de la contrôlabilité au cas non-linéaire de dimension finie et de dimension infinie a suscité depuis près de cinquante ans une littérature considérable, qui n'a en rien épuisé ce sujet riche et varié.

Les auteurs, dans leur quasi-totalité, ont considéré des généralisations naturelles de :

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Le résultat suivant donne une condition sur la contrôlabilité locale des systèmes non-linéaires :

Proposition 2.2.1. [10] *Considérons le système $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $x(0) = x^0$, avec $f(x^0, u^0) = 0$. On note $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, u^0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^0, u^0)$.*

Si $\text{rang } C = [B|AB|..|A^{n-1}B|] = n$, alors le système est localement contrôlable en x^0 .

En général, le problème de contrôlabilité globale est difficile. Cependant, il existe des techniques qui permettent de déduire la contrôlabilité locale dans le cas des systèmes linéarisés.

2.3 Position de problème

La formulation du problème de contrôle optimal est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt \rightarrow \min, & (1) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & (2) \\ x(0) = x^0 \in M_0, & (3) \\ x(T) = x^1 \in M_1, & (4) \\ u \in U, t \in I = [0, T]. & (5) \end{array} \right. \quad (2.9)$$

où M_0 (ensemble de départ) et M_1 (ensemble d'arrivée) sont des sous ensembles de \mathbb{R}^n , I un intervalle de \mathbb{R} , $x^0 = x(0)$ est la position initiale du système (2.9), $x(T) = x^1$ est sa position terminale. En pratique, la position du système peut représenter la vitesse, la position, la température,... etc.

$u(\cdot)$ est la commande du système (2.9). U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans $\Omega \in \mathbb{R}^n$

On distingue trois formes de problèmes importantes :

2.3.1 Problème de Lagrange

On cherche des conditions nécessaires d'optimalité pour le système, le problème simplifié est le suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (2.10)$$

où les contrôles $u(.) \in U$ sont définis sur $[0, T]$ et les trajectoires associées doivent vérifier $x(0) = x^0$ et $x(T) = x^1$, le problème est de minimiser un coût de la forme :

$$C(u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt. \quad (2.11)$$

où T est fixé. Associons au système (2.10) le système augmenté suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ \dot{x}_t(0) = f^0(t, x(t), u(t)), \end{cases} \quad (2.12)$$

et notons $\tilde{x} = (x, x_0)$, $f = (f, \tilde{f})$.

Le problème revient donc à chercher une trajectoire qui sera solution de (2.12) joignant les points $\tilde{x}^0 = (x^0, 0)$ et $\tilde{x}^1 = (x^1, x_0(T))$, et minimisant la dernière coordonnée $x_0(T)$.

2.3.2 Problème de Mayer

Lorsque $f_0 \equiv 0$ dans l'expression de la fonctionnelle J , on parlera d'un problème de Mayer. on aura donc l'expression :

$$J(u) = F(t_0, x(t_0), T, x(T)). \quad (2.13)$$

$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ étant une fonction réelle. Egalement, il sera supposé que $J(u) = F(t_0, x(t_0), T, x(T))$ et ses dérivées partielles par rapport à x , existent et sont continues sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

2.3.3 Problème de Mayer-Lagrange

On modifie le problème précédent en introduisant le coût

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(st, x_u(t), u(t))dt + g(T, x_u(T)). \quad (2.14)$$

et où le temps final T n'est pas fixé. Soit M_1 une variété de R^n . Le problème de contrôle optimal est alors de déterminer une trajectoire solution de :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x^0. \quad (2.15)$$

où les contrôles $u(\cdot)$ sont dans l'ensemble U des contrôles admissibles, tel que $x(T) \in M_1$, et de plus $x(\cdot)$ minimise sur $[0, T]$ le coût (2.14).

Remarque 2.3.1. La forme de Mayer, de Lagrange et de Bolza sont théoriquement équivalentes.

2.4 Principe du maximum de Pontryagin

On considère que la théorie moderne du contrôle optimal a commencé à la fin des années 1950 avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations.

D'une manière générale, un système dynamique à contrôler est un processus comprenant des entrées et des sorties. Les entrées du système (les contrôles) sont choisies de manière à optimiser un critère de performance.

Définition 2.4.1. Un contrôle $u^0(t)$, $t \in [0, T]$ est dit optimal si $u^0(\cdot)$ est extrémal et $J(u^0(t)) < J(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [0, T]$.

Théorème 2.4.1. [10] *Considérons le système linéaire suivant :*

$$\forall t \in I, \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x^0 \quad (2.16)$$

Supposons que le domaine de contraintes noté Ω est compact, Soit $T > 0$.

Le contrôle u est extrémal sur $I = [0, T]$ si et seulement si, il existe une solution non triviale $p(t)$, $t \in I$, de l'équation $\dot{p}(t) = -p^0(t)A(t)$ telle que :

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v \quad (2.17)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$.

Théorème 2.4.2. [10] *Considérons le système de contrôle dans R^n :*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)). \quad (2.18)$$

où $f : R \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$ de classe C^1 , les contrôles sont des applications mesurables bornées à valeurs dans $\Omega \in R^m$. Soit M_0 et M_1 deux ensembles de R^n . Notons par U l'ensemble des contrôle admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final M_1 en temps T , par ailleurs on définit le coût d'un contrôle u sur $[0, T]$:

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(st, x_u(t), u(t))dt + g(T, x_u(T)). \quad (2.19)$$

où $f^0 : IR \times IR^n \times IR^m \rightarrow IR$ et $g : IR \times IR^n \times IR$ sont de classe C^1 , et $x(.)$ est la trajectoire solution de (2.19) associée au contrôle u .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(.)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(.) : [0, T] \rightarrow IR^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(.), p^0)$ est non trivial et pour presque tout $t \in [0, T]$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial P}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \end{cases} \quad (2.20)$$

où $H(t, x, p, p^0, u) = p'(t)f(t, x, u) + p^0 f^0(t, x, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x, p, p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v). \quad (2.21)$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M^1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T .

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)) \quad (2.22)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de R^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités.

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0 \quad (2.23)$$

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)}M_1 \quad (2.24)$$

Théorème 2.4.3. [10] Si la variété M_1 s'écrit sous la forme :

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid G_1(x) = \dots = G_p(x) = 0\} \quad (2.25)$$

où les G_i sont des fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^n , alors la condition (2.24) se met sous la forme :

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \mid P(T) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla G_i(x(T)) + p_0 \frac{\partial F}{\partial x}(t_0, T, x(T)). \quad (2.26)$$

2.5 Méthodes numériques en contrôle optimal

Dans la littérature, on trouve deux approches de résolution des problèmes de contrôle optimal :

- Les méthodes directes
- Les méthodes indirectes

2.5.1 Méthodes directes :

C'est la méthode la plus simple lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal. En discrétisant l'état et le contrôle, on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie de la forme :

$$\min_{y \in C} F(y) \quad (2.27)$$

où $y = (x^1 \dots x^N, u^1 \dots u^N)$, et $C = \{y, g_i(y) \leq 0, h_j(y) = 0, i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, p\}$. On considère donc une subdivision de l'intervalle $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Selon cette subdivision, on considère (par exemple) des contrôles constants par morceaux, c'est à dire sur chaque sous intervalle $[t_{i-1}, t_i]$, la valeur du contrôle u_i , $i = 1, \dots, N$ est constante.

Par ailleurs, on choisit une discrimination de l'équation différentielle. il en existe plusieurs, la plus basique étant la méthode d'Euler explicite donnée par la formule :

$$x^i = x^{i-1} + h_i f(t_{i-1}, x^{i-1}, u^i) \quad (2.28)$$

qui représente la version discrète de l'équation d'état $\dot{x} = f(x, t, u)$, avec $h_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1 \dots N$

Une autre méthode directe est la méthode de résolution par l'approche de la programmation linéaire, qui est la méthode adaptée appelée aussi méthode du support seulement cette méthode résout les problèmes linéaires. Elle permet d'avoir une solution approchée ou une solution exacte.

2.5.2 Méthodes indirectes :

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Portryagin, qui donne une condition nécessaire d'optimalité et dont les trajectoires sont calculées numériquement suivant une méthode dite de **tir**. Le choix de cette méthode s'explique par son avantage à savoir, la rapidité de convergence et sa grande précision dans le traitement numérique.

Rappels sur la méthode de Newton

On veut résoudre l'équation $f(x) = 0$, ou f est une fonction satisfaisant les deux Hypothèses suivantes :

la fonction $f : [a, b] \rightarrow R$ est continue.

l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine notée x^1 qui est dans l'intervalle $]a, b[$.

Autrement dit : $f(a) * f(b) < 0$.

Soit I un intervalle de R et $f : I \rightarrow R$ une application dérivable. Pour déterminer une approximation numérique des solutions de l'équation $f(x) = 0$, la méthode de Newton part d'une solution approchée x^0 et remplace l'équation $f(x) = 0$ par l'équation approchée.

$$f(x^0) + (x - x^0)f'(x^0) = 0. \quad (2.29)$$

d'où la solution :

$$x = x^0 - f(x^0)/f'(x^0). \quad (2.30)$$

Bien entendu, cette formule n'a un sens que si $f'(x_0) \neq 0$. Par récurrence, on obtient :

$$x^{n+1} = x^n - f(x^n)/f'(x^n), x^0 \in I. \quad (2.31)$$

d'où le schéma de Newton est le suivant :

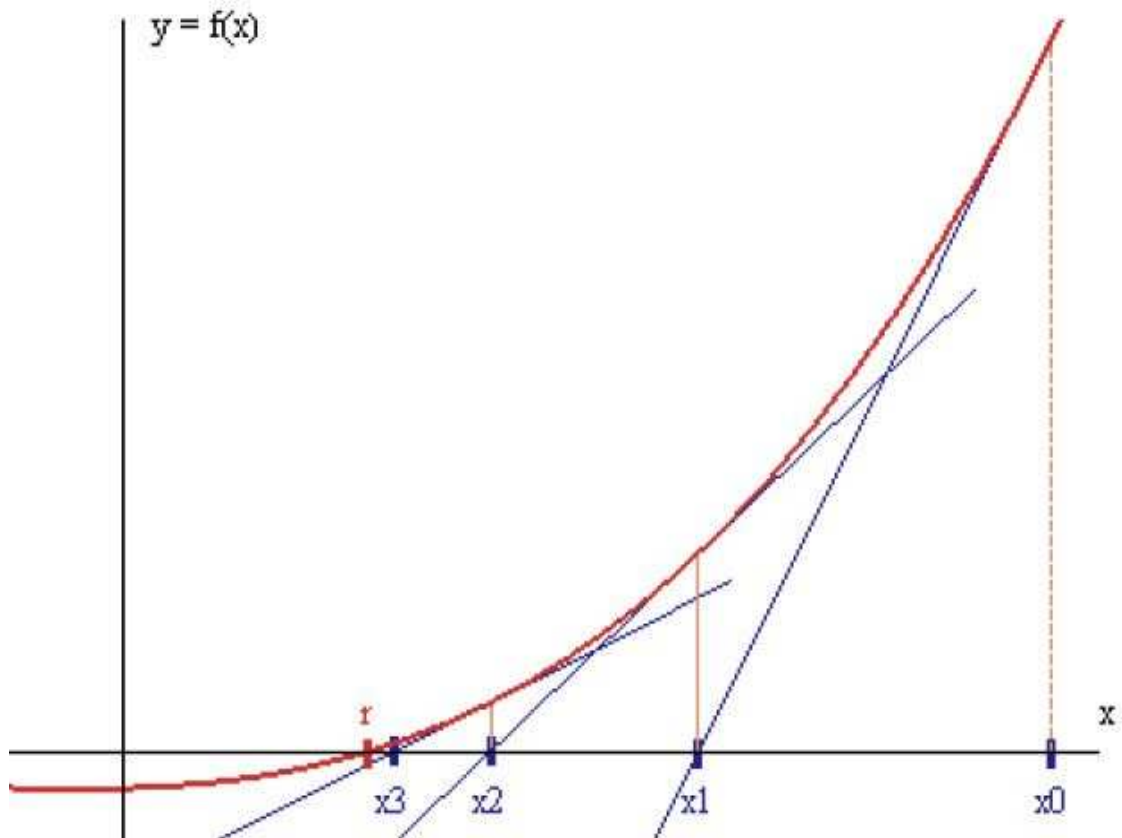


FIG. 2.1 – Schéma de la méthode de Newton.

Méthode de tir simple

Considérons le problème de contrôle optimal

$$\begin{cases} \min_{t,x,u} J(x, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ x(0) = x^0 \in M_0, x(T) = x^1 \in M_1, \\ u \in U, t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.32)$$

et supposons dans un premier temps que le temps final T est fixé. Si l'on est capable, à partir de la condition du maximum du hamiltonien, d'exprimer le contrôle optimal en fonction de $x(t)$ et de $p(t)$, $u = h(x, p)$, alors le système différentiel d'état et d'état adjoint peut s'écrire sous la forme $\dot{y}(t) = F(t, y(t))$, où $y(t) = (x(t), p(t))$. Les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité se mettent sous la forme :

$$R(y(0), y(T)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_1(y(0)) = 0, \\ R_2(y(T)) = 0, \end{cases} \quad (2.33)$$

On obtient alors le problème aux deux bouts (valeurs limites) suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ R(y(0), y(T)) = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y^0. \end{cases} \quad (2.35)$$

On note $y(t, y^0)$ la solution du problème de Cauchy dépendant de y^0 .

La fonction de tir est alors définie par :

$$S(y^0) = R(y^0, y(T, y^0)). \quad (2.36)$$

La résolution du problème aux deux bouts est alors équivalent à la recherche d'un zéro de la fonction de tir $S(y^0)$, c'est à dire $S(y^0) = 0$ qu'on peut résoudre par la méthode de Newton.

2.5.3 Comparaison entre les deux Méthodes

voici un récapitulatif de la comparaison des avantages et inconvénients des deux méthodes présentée si-dessus :

Méthode directe

1. Avantages :

- ▶ Mise en oeuvre simple sans connaissance a priori de la solution.
- ▶ Facilité de la prise en compte des contraintes sur l'état.
- ▶ Peu sensibles au choix de la condition initiale.

2. Inconvénients :

- ▶ Précision numérique basse ou moyenne.
- ▶ Efficaces en basse dimension.
- ▶ Gourmandise en mémoire.

Méthode indirecte

1. Avantages :

- ▶ Très grande précision numérique.
- ▶ Efficaces en toute dimension.
- ▶ Calculs parallélisables.

2. Inconvénients :

- ▶ Connaissance a priori de la structure de la trajectoire optimale.
- ▶ Difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état.
- ▶ Très sensibles au choix de la condition initiale.

Contrôle optimal du problème de GODDARD

3.1 Introduction

Au cours des années 1920, en Europe comme aux États-Unis, le désir de conquérir les espaces interplanétaires devient de plus en plus vif. Pour parvenir à cette fin, il faut disposer d'une fusée puissante utilisant des ergols liquides, plus énergétiques que les poudres, employées jusqu'alors. Cette problématique a inspiré plusieurs chercheurs. L'Américain Robert Hutchings Goddard (1882-1945) [4] en était l'un des premiers à avoir créé et développé les fusées à carburant liquide. C'est à Auburn (Massachusetts, USA) un 16 mars 1926 où se fut le premier lancement d'une fusée propulsée grâce à un mélange d'essence et d'oxygène liquide. En 2.5 secondes de vol seulement l'engin atteint une altitude de 12,50 mètres avec une vitesse de 100 km/h. Ce premier essai encouragea Goddard à façonner ses travaux et perfectionner le système de propulsion de ses fusées, la voie était dès lors ouverte à la réalisation d'engins plus puissants et plus performants.

Le problème de Goddard a été formulé en 1919 [4] qui consiste à maximiser l'altitude finale d'une fusée lancée dans la direction verticale sous l'influence de la pression atmosphérique et de la pesanteur. Ce problème devient aussitôt une référence dans la théorie du contrôle optimal en raison de la structure du modèle relativement simple, ce qui rend la fusée de Goddard un objet d'étude idéal.

Dans ce chapitre nous allons présenter le modèle simplifié de ce problème, nous procédons dans un premier temps à sa résolution par la méthode indirecte en se basant sur le principe du maximum de Pontryagin via la méthode de tir implémentée sous MATLAB, puis dans un second temps nous passerons à la méthode directe via les techniques de discrétisation suivie de son code MATLAB.

Le présent chapitre s'appuie sur les références suivantes([4], [11], [7], [5], [2])

3.2 Généralités sur le vol d'une fusée

3.2.1 La fusée

Une fusée en astronautique est un véhicule qui se déplace dans l'espace grâce à un moteur-fusée en emportant à la fois le combustible et le carburant nécessaires à son fonctionnement.

3.2.2 Les phases du vol

Le vol d'une fusée est un processus qu'on peut décomposer en deux phases importantes :

- **La phase propulsée**
- **La phase balistique**
- **La phase de décente sous parachute**

La période s'écoulant de l'instant de la mise à feu des réacteurs jusqu'à la fin de combustion du carburant est appelée **la phase propulsée**.

Dès l'extinction du propulseur commence **la phase balistique** pendant laquelle la fusée livrée à elle même, uniquement soumise à son poids et à la résistance de l'air, exploite la vitesse déjà acquise pendant la propulsion pour atteindre son altitude maximale.

Après que la fusée atteint son point de culmination (apogée) elle commence à retomber, on est dans **la phase de décente** qui sera marquée par l'ouverture du parachute jusqu'à ce qu'elle atterrisse saine et sauve sur le sol.

Le processus de vol est illustré dans la figure suivante :

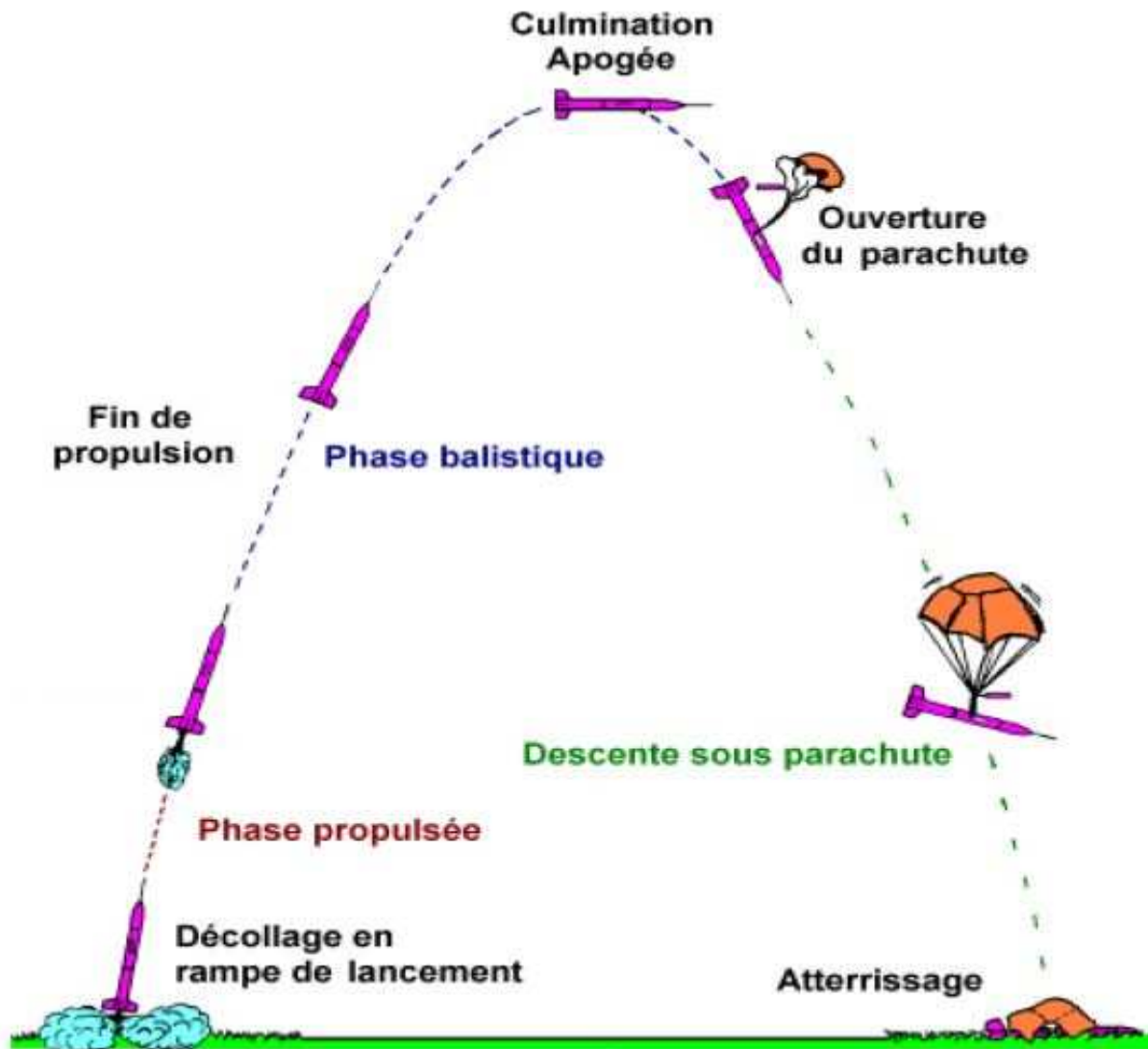


FIG. 3.1 – Illustration des phases d'un vol.

3.2.3 Pression atmosphérique :

La contrainte forte présente lors du vol est la pression atmosphérique souvent notée q exprimée en Pascal (Pa). Physiquement, cela correspond à la pression créée par la vitesse de l'engin par rapport à l'air donnée par :

$$q(h(t), v(t)) = \frac{1}{2} \cdot p_0 \cdot v(t)^2 \cdot \exp(\beta(1 - h(t))).$$

3.2.4 Les forces en présence

Au cours de son vol, la fusée est soumise à trois forces qui sont :

► **La gravité** : Le poids de la fusée soumis à la loi de gravité g devient une force influente négativement (dirigé verticalement vers le bas) sur déplacement de la fusée.

► **La poussée du moteur** : La force de la poussée du moteur exprimé en Newton (N) est le résultat de l'éjection des particules de gaz vers l'arrière de la fusée à une certaine vitesse. En fait, la poussée est la conversion de l'énergie thermique prenant naissance dans la chambre de combustion du moteur qui se transforme en énergie cinétique.

► **La densité de l'air** : Un corps en chute libre ou en déplacement, subit la résistance de l'air, une force qui s'oppose à l'avancement de la fusée. elle dépend donc du vent relatif qui est la somme du vent créé par la vitesse et celui de la météo exprimée par $d(h(t), v(t))$.

3.3 Position du problème

Les deux chapitres précédents ont été consacrés à l'étude des équations différentielles et la théorie du contrôle optimal tandis que ce présent traite le vol d'une fusée dès son lancement jusqu'à atteindre son apogée.

Notre objectif dans cette partie est de maximiser l'altitude finale de cette fusée à ascendance verticale qui est soumise pendant son vol à l'influence de la pression atmosphérique et le carré inverse du champ gravitationnel.

Notons par :

$h(t)$: l'altitude au temps t .

$v(t)$: $t \in [0, T]$ le module de la vitesse.

$m(t)$: la masse de la fusée au temps t .

$u(t)$: est le seule contrôle dans notre problème qui est la poussée appliquée à la fusée.

Equations du système considéré :

- D'après la loi de Newton, la vitesse est issue de la dérivée de la distance qui dans notre cas est la dérivée de la hauteur extrême de notre fusée, la **contrainte sur la hauteur** sera :

$$\dot{h}(t) = v(t). \quad (3.1)$$

- D'après le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton), quand une force résultante s'exerce sur un objet, celui-ci est soumis à une accélération qui a la même direction que la force. La **contrainte sur la vitesse** sera donc :

la somme des forces est égale au produit de la masse m fois l'accélération γ .

$$\sum \vec{F} = m(t) \cdot \vec{\gamma}.$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) - m(t)g - d(h(t), v(t)) = m(t) \cdot \vec{\gamma} = m(t) \cdot \dot{v}(t)$$

on auras :

$$\Downarrow$$

$$\dot{v}(t) = \frac{u(t) - d(h(t), v(t))}{m(t)} - \frac{1}{h^2(t)}. \quad (3.2)$$

tel que :

$d(h(t), v(t))$: la densité de l'air

g : la gravité donnée par $\frac{1}{h^2(t)}$.

- A chaque fois que le temps évolue, la masse $m(t)$ diminue et la poussée $u(t)$ augmente, proportionnelle à l'inverse de la vitesse de combustion du carburant. on aura donc la **contrainte sur la masse** suivante :

$$\dot{m}(t) = \frac{-u(t)}{c} \quad (3.3)$$

Le problème considéré dans ce cas est de maximiser l'altitude finale de notre fusée, la fonction objectif sera donc :

$$K(u(t)) = h(T) \rightarrow \max \quad (3.4)$$

Ce qui est équivalent à :

$$J(u(t)) = -h(T) \rightarrow \min \quad (3.5)$$

Le problème de contrôle optimal obtenu de la modélisation est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u(t)) = -h(T) \rightarrow \min, \\ \dot{h}(t) = v, \\ \dot{v}(t) = \frac{u(t) - d(h(t), v(t))}{m(t)} - \frac{1}{h(t)^2}, \\ \dot{m}(t) = \frac{-u(t)}{c}, \\ 0 \leq u(t) \leq u_{max}, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Avec : $h(0) = 1$; $v(0) = 0$; $m(0) = 1$. et u_{max} : La poussée maximale.

A noter que dans ce modèle les états de l'altitude, de la vitesse, de la masse ainsi que le temps sont normalisés [4].

$d(h(t), v(t))$: la densité de l'air est une fonction qui varie de façon exponentielle avec l'altitude, elle est définie comme suit :

$$d(h(t), v(t)) = q(h(t), v(t)) \frac{C_d A}{M_0 g} \quad (3.7)$$

tel que $q(h(t), v(t))$ est la pression atmosphérique donnée par :

$$q(h(t), v(t)) = \frac{1}{2} p_0 v(t)^2 \exp(\beta(1 - h(t))) \quad (3.8)$$

on remplace (3.8) dans (3.7) on aura :

$$d(h(t), v(t)) = \frac{1}{2} v(t)^2 \exp(\beta(1 - h(t))) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g} \quad (3.9)$$

alors le problème equivalent à (3.6) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u(t)) = -h(T) \rightarrow \min, \\ \dot{h}(t) = v, \\ \dot{v}(t) = \frac{u(t) - \frac{1}{2}v(t)^2 \exp(\beta(1 - h(t)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g}}{m(t)} - \frac{1}{h(t)^2}, \\ \dot{m}(t) = \frac{-u(t)}{c}, \\ 0 \leq u(t) \leq u_{max}, \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Avec : $h(0) = 1$; $v(0) = 0$; $m(0) = 1$.

les paramètres présents dans la modélisation et leurs significations sont données dans le tableau suivant [5] :

paramètre	signification
β	taux de décroissance de la densité de l'air
c	vitesse de combustion du carburant
p_0	densité de l'air au niveau de la mer
C_d	coefficient de la pression atmosphérique
A	Surface frontale de contact
g	la gravité terrestre
m_0	la masse initiale

3.4 Application du principe du maximum de Pontryagin

notre problème initial est :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = -h(T) \rightarrow \min, \\ \dot{h} = v \\ \dot{v} = \frac{u - \frac{1}{2}v^2 \exp(\beta(1-h)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g}}{m} - \frac{1}{h^2}, \\ \dot{m} = \frac{-u}{c}, \\ 0 \leq u \leq u_{max}, \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Avec : $h(0) = 1$; $v(0) = 0$; $m(0) = 1$.

Le Hamiltonien du système s'écrit :

$$H(h, v, m, p, u) = p_h v + \frac{p_v}{m} \left(u - \frac{1}{2} v^2 \exp(\beta(1-h)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g} - \frac{1}{h^2} \right) - p_m \frac{u}{c}$$

On maximise le hamiltonien H en utilisant le PMP on aura :

$$\max_{0 \leq u \leq u_{max}} H = \max_{0 \leq u \leq u_{max}} p_h \times v + p_v \left[\frac{u - \frac{1}{2} v^2 \exp(\beta(1-h)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g}}{m} - \frac{1}{h^2} \right] - p_m \frac{u}{c}$$

Ce qui est équivalent à maximiser :

$$\max_{0 \leq u \leq u_{max}} \left[u \left(\frac{1}{m} p_v - \frac{p_m}{c} \right) \right] \quad (3.12)$$

On obtient un contrôle optimal

$$u^* = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{1}{m} p_v - \frac{p_m}{c} \leq 0 \\ u_{max}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.13)$$

Les vecteurs adjoints

$$\begin{cases} \dot{p}_h = \frac{-\partial H}{\partial h} = -p_v \left[\frac{v^2 \beta}{2m} \exp(\beta(1-h)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g} + \frac{2}{h^3} \right] \\ \dot{p}_v = \frac{-\partial H}{\partial v} = \frac{v}{m} \exp(\beta(1-h)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g} p_v - p_h, \\ \dot{p}_m = \frac{-\partial H}{\partial m} = \left[u - \frac{1}{2} v^2 \exp(\beta(1-h)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g} \right] \frac{p_v}{m^2}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Les conditions de transversalités

supposons la variété M_1 donnée par :

$$\begin{aligned} M_1 &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid G(y) = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^3 \mid G_1(Y) = 0; \ G_2(y) = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_2 = 0; \ y_3 - 0.6 = 0\} \end{aligned}$$

De plus l'espace tangent à M_1 en un point $y \in M_1$ s'écrit :

$$\begin{aligned} T_y M_1 &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid \nabla G_1(y)v = 0; \ G_2(y)v = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3; \ (0, 1, 0) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0; \ (0, 0, 1) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_2 = 0, \ v_3 = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = (v_1, 0, 0)\} \\ T_y M_1 &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = v_1(1, 0, 0)\} \end{aligned}$$

si de plus la cible M_1 est une sous variété de \mathbb{R}^3 , alors il existe des réels λ_1, λ_2 tels que l'on ait au point final $(T, y(T))$:

$$p(T) = \lambda_1 \nabla G_1(y) + \lambda_2 \nabla G_2(y) + p_0 \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc : } p(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Avec $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \ \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Les conditions de transversalité sont alors :

$$\begin{cases} p_h(T) = -\frac{\partial g(u)}{\partial h} = 1, \\ p_v(T) = -\frac{\partial g(u)}{\partial v} \in \mathbb{R}, \\ p_m(T) = -\frac{\partial g(u)}{\partial m} \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.15)$$

Problème aux deux bouts

le PMP nous donne une condition nécessaire d'optimalité et nous conduit à un problème aux deux bouts (TWO points Boundary value problem).

$$(PDB) \begin{cases} \dot{h} = v \\ \dot{v} = \frac{u - \frac{1}{2}v^2 \exp(\beta(1-h)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g}}{m} - \frac{1}{h^2}, \\ \dot{m} = \frac{-u}{c}, \\ \dot{p}_h = -p_v(v^2 \frac{\beta}{2m} \exp(\beta(1-h)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g} + \frac{2}{h^3}) \\ \dot{p}_v = \frac{v}{m} \exp(\beta(1-h)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g} p_v - p_h, \\ \dot{p}_m = (u - \frac{1}{2}v^2 \exp(\beta(1-h)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g}) \frac{p_v}{m^2}. \\ h(0) = 1, \quad h(T) \in \mathbb{R}. \\ v(0) = 0, \quad v(T) = 0. \\ m(0) = 1, \quad m(T) = 0.6. \\ p_h(0) \in \mathbb{R}, \quad p_h(T) = 1. \\ p_v(0) \in \mathbb{R}, \quad p_v(T) \in \mathbb{R}. \\ p_m(0) \in \mathbb{R}, \quad p_m(T) \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.16)$$

avec :

$$u = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{1}{m}p_v - \frac{p_m}{c} \leq 0 \\ u_{max}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.17)$$

En posant $y = (h; v; m; p_h; p_v; p_m) = (y_1; y_2; y_3; y_4; y_5; y_6)$

On aura alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{u - \frac{1}{2}y_2^2 \exp(\beta(1 - y_1)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g}}{y_3(t)} - \frac{1}{y_1^2}, \\ \dot{y}_3 = \frac{-u}{c}, \\ \dot{y}_4 = -y_5 \left(\frac{\beta y_2^2}{2y_3} \exp(\beta(1 - y_1)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g} + \frac{2}{y_1^2} \right), \\ \dot{y}_5 = \frac{s_2}{y_3} \exp(\beta(1 - y_1)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g} y_5 - y_4, \\ \dot{y}_6 = \left(u - \frac{1}{2}s_2^2 \exp(\beta(1 - y_1)) \frac{p_0 C_d A}{m_0 g} \right) \frac{y_5}{y_3^3}, \\ y_1(0) = 1; \quad y_1(T) \in \mathbb{R} \\ y_2(0) = 0; \quad y_2(T) = 0 \\ y_3(0) = 1; \quad y_3(T) = 0.6 \\ y_4(0) \in \mathbb{R}; \quad y_4(T) = 1 \\ y_5(0) \in \mathbb{R}; \quad y_5(T) \in \mathbb{R} \\ y_6(0) \in \mathbb{R}; \quad y_6(T) \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

avec :

$$u = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{1}{y_3}y_5 - \frac{y_6}{c} \leq 0 \\ u_{max}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.19)$$

Donc le problème aux deux bouts est équivalent à $\dot{Y} = F(t, Y)$, avec :

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \end{pmatrix}, \quad Y(T) = \begin{pmatrix} \mathbb{R} \\ 0 \\ 0.6 \\ 1 \\ \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Le problème de cauchy associée au problème est :

$$\dot{y} = F(t, y), \quad y(0) = y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ y_4^0 \\ y_5^0 \\ y_6^0 \end{pmatrix}$$

la solution de notre système s'écrit $y(t, y^0)$, on aimerai qu'elle coïncide avec la fin de la trajectoire $y(T)$ de la manière suivante :

$$y(T, y^0) = y(T) = \begin{pmatrix} \mathbb{R} \\ 0 \\ 0.6 \\ 1 \\ \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

La fonction de tir est définie par :

$$G(y^0) = y(T, y^0) - y(T)$$

Résoudre le problème (PDB) est équivalent à trouver un Zéro de la fonction de tir $G(y^0)$ c'est à dire chercher $y^0/G(y^0) = 0$

3.4.1 Implémentation de la méthode de tir sous MATLAB

Résoudre le système d'équations différentielles revient à trouver le zéro de la fonction de tir $G(y^0)$ en utilisant la commande **fsolve** sous Matlab. L'algorithme d'intégration d'un système différentiel à valeur initial est effectué en utilisant la commande **ode** de Matlab. Les valeurs des paramètres présents dans le modèle à simuler sont données dans le tableau suivant[5] :

paramètre	valeur
β	500
K	0.5
$\frac{p_0 C_d A}{m_0 g}$	620

Le programme suivant nous permet d'afficher les solutions du problème.

Programme :

```
[1] function tirsimple
[2] clear all ; clf ; clc ;
[3] global x0 ; k=620 %(on pose  $k = \frac{p_0 C_d A}{m_0 g}$ )
[4] x0 = [1; 0; 1] ; c=0.5 ; tf=0.18 ; P0 = [0.8164; 0.1072; 0.00460] ;
% =====Calcul du zéro de la fonction de tir (P0f)=====
[5] options = optimset('Display','iter','Algorithm','levenberg - marquardt');
[6] [P0f, FVAL, EXITFLAG]=fsolve(@G,[P0,tf],options) ;
[7] EXITFLAG
% =====Tracé des trajectoires optimales=====
[8] options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;
[9] [t,y]=ode45(@sys,[0;p0tf(4)],[x0;P0tf(1);p0tf(2);p0tf(3)],options) ;
[10] subplot(421) ; plot(t,y(:,1)) ; title('Trajectoire de h(t)') ; grid on
[11] subplot(422) ; plot(t,y(:,2)) ; title('Trajectoire de v(t)') ; grid on
[12] subplot(423) ; plot(t,y(:,3)) ; title('Trajectoire de m(t)') ; grid on
[13] subplot(424) ; plot(t,y(:,4)) ; title('Trajectoire de p1(t)') ; grid on
[14] subplot(425) ; plot(t,y(:,5)) ; title('Trajectoire de p2(t)') ; grid on
[15] subplot(426) ; plot(t,y(:,6)) ; title('Trajectoire de p3(t)') ; grid on
%===== Trajectoire du contrôle optimal=====
[16] if ((1/y(:,3)) * y(:,5) - (1/c) * y(:,6)) <= 0
[17] y(:,7) = 0;
[18] else
[19] y(:,7) = 3.5;
```

```

[20] end
[21] subplot(427);plot(t,y(:,7));title('Trajectoire de u(t)');grid on
%=====Définition de la fonction de tir=====
[22] function Yzero=G(Y)
[23] global x0;
[24] options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[25] [t,y] = ode45(@system,[0;y(4)], [x0;y(1),y(2),y(3)], options);
[26] if((1/y(:,3)) * y(:,5) - (1/c) * y(:,6)) <= 0
[27] hamend = y(end,4) * y(end,2) - (1/2) * y(end,2)^2 * exp(beta - beta * y(end,1)) * k / y(end,3);
[28] else
[29] hamend = y(end,4) * y(end,2) + y(end,5) * 3.5 - (1/2) * y(end,2)^2 * exp(beta - beta *
y(end,1)) * k / y(end,3) - y(end,6) * 3.5 / c;
[30] end
[31] Yzero = [y(end,2)
[32] y(end,3) - 0.6
[33] y(end,4) - 1
[34] hamend];
%=====Système extremal=====
[35] function ydot=sys(t,y)
[36] if (y(5)/y(3) - y(6)/c) <= 0
[37] u=0;
[38] else
[39] u = 3.5;
[40] end
[41] ydot = [y(2)
[42] (u - (1/2) * y(2)^2 * exp(beta - beta * y(1)) * k) * (1/y(3)) - (1/y(1)^2)
[43] -u/c
[44] ((-beta * y(2)^2 / (2 * y(3))) * exp(beta - beta * y(1)) * k - (2/y(1)^3)) * y(5)
[45] ((y(2)/y(3)) * exp(beta - beta * y(1)) * k * y(5)) - y(4)
[46] (u - (1/2) * y(2)^2 * exp(beta - beta * y(1)) * k) * y(5)/y(3)^2];

```

Remarque 3.4.1. La méthode étant sensible à l'initialisation, nous avons pas eu les résultats souhaités, ce qui va nous induire à utiliser la méthode directe.

3.5 Simulation via la méthode directe

Dans notre cas la méthode est évaluée pour un décollage vers une altitude maximale avec un cycle de temps T libre.

Avec une initialisation ($h(0)=1$; $v(0)=0$; $m(0)=1$), et les conditions finales suivantes ($h(tf) = libre$; $v(tf) = 0$; $m(tf) = 0.6$).

Voici la simulation du programme de la méthode directe implémentée sous Matlab :

Programme :

```
[1] function Directe
% Discrétisation directe (en utilisant fmincon) du problème d'altitude maximale
[2] clear all; close all; clc;
w=0.5;  $\beta = 500$ ; s=620;
Umax=3.5;
[3] n = 100;
[4] uinit = 3.5*rand(n,1); % initialisation aléatoire du contrôle
[4] tfinit = 1; xinit = [uinit;tfinit];% point de départ pour fmincon
[5] lb = zeros(n+1,1); lb(n+1) = 0; ub = Umax*ones(n+1,1);ub(n) =50;
% contrainte sur le contrôle  $0 \leq u \leq M$ , et  $0 \leq tf \leq 50$ 
[6].[res,Fval,exitflag]=fmincon(@hfinal,xinit,[],[],[],[],lb,ub,@cond)
exitflag
%=====Calcul des trajectoires optimales=====
[7] tf=res(end); x(1)=1; z(1)=1; y(1)=0;
[8] for i=1 :n+1
[9] k11 = (tf/n) * y(i);
[10] k21 = (tf/n) * (y(i) + k11/2);
[11] k31 = (tf/n) * (y(i) + k21/2);
[12] k41 = (tf/n) * (y(i) + k31);
[13] x(i+1) = x(i) + (k11 + 2 * k21 + 2 * k31 + k41)/6;
[12] k12 = (tf/n) * (((res(i) -  $\frac{1}{2}v^2(t)exp(\beta(1-x(t))s)/z(i)) - 1/x(i)^2$ );
[13] k22 = (tf/n) * (((res(i) -  $\frac{1}{2}v^2(t)exp(\beta(1-x(t))s)/z(i)) - 1/x(i)^2 + k12/2$ );
[14] k32 = (tf/n) * (((res(i) -  $\frac{1}{2}v^2(t)exp(\beta(1-x(t))s)/z(i)) - 1/x(i)^2 + k22/2$ );
[15] k42 = (tf/n) * (((res(i) -  $\frac{1}{2}v^2(t)exp(\beta(1-x(t))s)/z(i)) - 1/x(i)^2 + k32$ );
```

```

[16]  $y(i+1) = y(i) + (k_{12} + 2 * k_{22} + 2 * k_{32} + k_{42})/6;$ 
[17]  $k_{13} = (tf/n) * (-res(i)/w);$ 
[18]  $k_{23} = (tf/n) * ((-res(i)/w) + k_{13}/2);$ 
[19]  $k_{33} = (tf/n) * ((-res(i)/w) + k_{23}/2);$ 
[20]  $k_{43} = (tf/n) * ((-res(i)/w) + k_{33});$ 
[21]  $z(i+1) = z(i) + (k_{13} + 2 * k_{23} + 2 * k_{33} + k_{43})/6;$ 
[22] end

=====

[23] subplot(321); plot(linspace(0,tf,n),x(1:n)); title('Hauteur'); grid;
[24] subplot(322); plot(linspace(0,tf,n),y(1:n)); title('Vitesse'); grid;
[25] subplot(323); plot(linspace(0,tf,n), z(1:n)); title('Masse'); grid;
[26] subplot(324); plot(linspace(0,tf,n), res(1:n)); title('Controle u'); grid;
[27] function [c,ceq] = cond(u) e=0.5; n=length(u)-1;l=620;
[28] c = []; % ou bien c=0
[29] tf= u(end); zf =1; yf=0; xf=1; for i= 1 :n+1; k11=(tf/n)*yf;
[30]  $k_{21} = (tf/n) * (yf + k_{11}/2);$ 
[31]  $k_{31} = (tf/n) * (yf + k_{21}/2);$ 
[32]  $k_{41} = (tf/n) * (yf + k_{31});$ 
[33]  $xf = xf + (k_{11} + 2 * k_{21} + 2 * k_{31} + k_{41})/6;$ 
[34]  $k_{12} = (tf/n) * (((u(i) - \frac{1}{2}yf^2exp(\beta(1 - xf)l)/zf) - 1/xf^2);$ 
[35]  $k_{22} = (tf/n) * (((u(i) - \frac{1}{2}yf^2exp(\beta(1 - xf)l)/zf) - (1/xf^2) + k_{12}/2);$ 
[36]  $k_{32} = (tf/n) * (((u(i) - \frac{1}{2}yf^2exp(\beta(1 - xf)l)/zf) - (1/xf^2) + k_{22}/2);$ 
[37]  $k_{42} = (tf/n) * (((u(i) - \frac{1}{2}yf^2exp(\beta(1 - xf)l)/zf) - (1/xf^2) + k_{32});$ 
[38]  $yf = yf + (k_{12} + 2 * k_{22} + 2 * k_{32} + k_{42})/6;$ 
[39]  $k_{13} = (tf/n) * (-u(i)/e);$ 
[40]  $k_{23} = (tf/n) * ((-u(i)/e) + k_{13}/2);$ 
[41]  $k_{33} = (tf/n) * ((-u(i)/e) + k_{23}/2);$ 
[42]  $k_{43} = (tf/n) * ((-u(i)/e) + k_{33});$ 
[43]  $zf = zf + (k_{13} + 2 * k_{23} + 2 * k_{33} + k_{43})/6;$ 
[43] end
[44]  $ceq = [zf - 0.6, yf];$  % on impose la condition finale zf=0.6
%=====Déclaration de la fonction objectif=====
[45] function val =hfinal(x)
[46] val = x(end);

```

Le résultat d'exécution sous MATLAB est donné par la figure suivante :

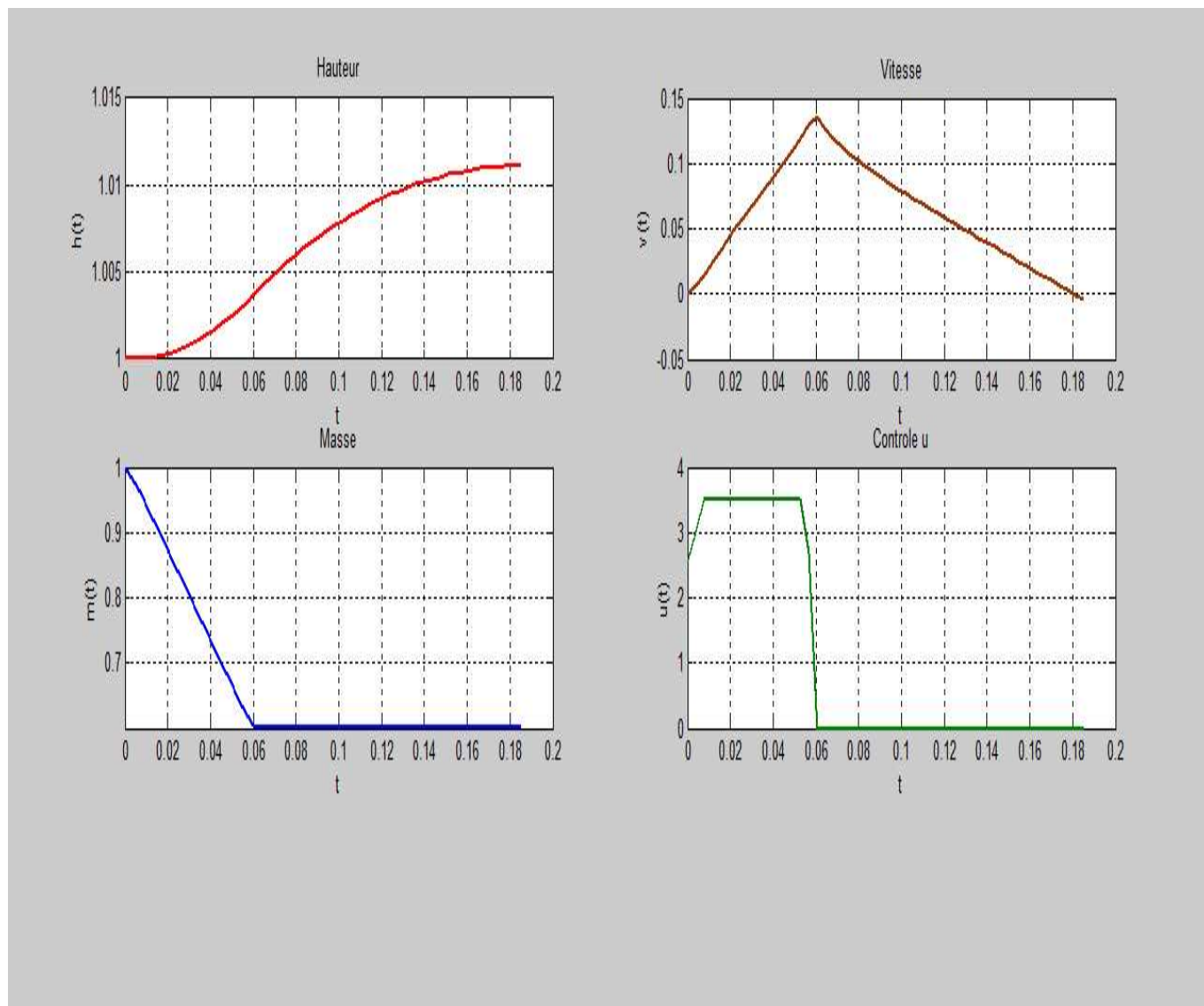


FIG. 3.2 – Solution optimale obtenu par la méthode directe.

3.5.1 Discussion des résultats

Durant la phase propulsée :

- L'accélération reste pratiquement constante jusqu'à ce que la vitesse rend la résistance de l'air plus influente, alors l'accélération décroît. La vitesse augmente mais tout lentement jusqu'à atteindre une vitesse maximale à la fin de propulsion qui coïncide avec l'instant $t = 0.06$ (en temps normalisé)
- La pression atmosphérique est proportionnellement liée au carré de la vitesse, plus la vitesse augmente plus la résistance de l'air est remarquable, elle en restera ainsi jusqu'à la fin de la phase de propulsion.
- La phase propulsée est également marquée par une diminution linéaire du poids totale de la fusée due à la combustion du carburant (éjection de masse) qui représente 40% de la masse de l'engin.
- Après la mise à feu des propulseurs, la force de la poussée appliquée à la fusée croît linéairement en un petit laps de temps jusqu'à atteindre son extrême et reste constante pendant toute la phase propulsée jusqu'à épuisement du carburant.

Durant La phase balistique :

- Cette phase commence par une forte décélération au moment de la fin de combustion, la fusée n'est plus soumise alors qu'à son poids et à la résistance de l'air qui freinent sa progression.

La vitesse décroît et la courbe d'altitude commence à s'infléchir. Le point de culmination (Apogée) est atteint lorsque la vitesse verticale devient nulle, c'est là que l'altitude finale touche à son extrême.

- On remarque que l'altitude croît en fonction du temps, évident puisque la fusée soumise à une poussée dynamique prend une ascendance verticale.

Remarque 3.5.1. .

- Le temps nécessaire pour que la fusée atteigne son extrême altitude est 0.183 (en temps normalisé), cette altitude vaut 1.011 (altitude normalisé) ce qui est équivalent à près de 70 Km au dessus de la terre au bout de 11 minutes.
- La vitesses maximale atteinte par la fusée à la fin de la propulsion est égale à 0.13 (vitesse normalisé) ce qui est équivalent à près de 380 Km/h.

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons considéré un problème de contrôle optimal avec une dynamique non linéaire. Nous avons modélisé le problème de GODDARD [4] dont le but est de maximiser l'altitude finale d'une fusée à ascendance verticale en tenant compte des forces externes qui sont la pression atmosphérique et la pesanteur.

pour la résolution de notre problème nous avons opté pour les deux grandes classes de méthodes de résolution en commençant d'abord par la méthode indirecte où nous avons appliqué théoriquement le principe du maximum de pontryagin qui donne les conditions nécessaire d'optimalité du 1^{er} ordre, puis numériquement en l'implémentant sous MATLAB.

En deuxième lieux et étant donné que la méthode indirecte est très sensible au choix de la condition initiale et étant donné qu'elle nous a pas fournis les résultat souhaités, nous somme passé à la résolution par la méthode directe en discrétisant le problème pour tout instant et se ramener par la suite à un problème d'optimisation non linéaire résolu sous MATLAB via la technique de Runge-Kutta.

Bibliographie

- [1] A.farida A. Merakeb. Cours de controle optimale : Aspects théoriques et numériques. Université Mouloud Mammerie, TIZI-OUZOU, (2014).
- [2] L. Côme. Le vol de la fusée, stabilité et trajectographie. Centre nationale d'études spatiale, Planète sciences v 2.0, (juillet 2008).
- [3] J.P. Demailly. Analyse numérique et équations différentielles. Université de Grenoble.EDP Sciences., (2006).
- [4] R.H. Goddard. A method for reaching extreme altitudes. Smithsonian Int. Misc. Collections 71, (1919).
- [5] Eugene M. Clift Hans Seywald. Goddard problem in presence of a dynamic pressure limit. journal of guidance, control, and dynamics Vol. 16, No. 4, July-August, (1993).
- [6] R.E. Kalman. Mathematical discription of linear dynamical system siam. journal of control, (1963).
- [7] Nicolas Petit Knut Graichen. Solving the goddard problem with thrust and dynamic pressure constraints using saturation functions. Centre Automatique et Systèmes, Ecole des Mines de Paris, 75272 Paris, (2008).
- [8] K. Louadj. *résolution des problèmes paramétrés en controle optimal*. Thèse de doctorat, (2012).
- [9] B. Stout. *Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles*. Université de Provence.Institut Fresnel.case 161 Faculté de St Jérôme.Marseille France, (fevrier 2007).
- [10] E. Trelat. *Controle optimale : Theorie et application*. Université Paris-Sud Laboratoire EN-EDP Mathématique UMR 8628 Bat 425 ; 91405 Orsay Cedex, (2005).
- [11] P. Tsiotras and H.J. Kelley. Goddard problem with constrained time of flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 15, No. 2, 1992, pp. 289-296, (Avril 1992).