

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT AUTOMATIQUE

THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : Automatique

par

Amar SI Ammour

Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire

Devant le jury constitué de :

Mohamed AIDENE	Professeur Université de Tizi-Ouzou	Président
Saïd DJENNOUNE	Professeur Université de Tizi-Ouzou	Rapporteur
Maamar BETTAYEB	Professeur Université de Sharjah (EAU)	Examineur
Mohamed Seghir BOUCHERIT	Professeur Ecole Nationale Polytechnique d'Alger	Examineur
Abdelfatah CHAREF	Professeur Université de Constantine	Examineur
Rachid MANSOURI	Maître de Conférences A Université de Tizi-Ouzou	Examineur

04/ 07/ 2011

A ma famille

A mes amis

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Conception et de Conduite des Systèmes de Production (L2CSP), au sein de l'équipe Commande des Systèmes Continus, sous la direction scientifique de Monsieur le Professeur Saïd Djennoune que je tiens à remercier très vivement de son enthousiasme envers mon travail, de sa disponibilité et de son soutien scientifique et humain. Ce travail n'aurait vu le jour sans votre confiance et votre générosité.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Maamar Bettayeb, Professeur à l'université de Sharjah (Emirats Arabes Unis), qui m'a accueilli durant mes stages de formation, pour les nombreuses discussions enrichissantes et collaborations que nous avons eues.

Je suis très honoré que Monsieur Mohamed Aidene, Professeur et Directeur du Laboratoire L2CSP, ait accepté de présider le jury de cette thèse. Je le remercie aussi pour les moyens nécessaires mis à notre disposition pour mener à bien notre travail.

J'exprime également mes remerciements à Messieurs Mohammed Seghir Boucherit, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, et Abdelfatah Charef, Professeur à l'Université de Constantine, d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je remercie également Monsieur Rachid Mansouri, Maîtres de Conférences A et membre du Laboratoire L2CSP, pour ses encouragements, pour sa disponibilité et d'avoir accepté d'être examinateur de cette thèse.

Mes remerciements vont également à tous les collègues et amis de la Faculté de Génie Electrique et d'Informatique et en particulier à ceux du Laboratoire L2CSP.

Je termine cet avant propos en remerciant ma famille et en particulier ma femme et mes enfants pour m'avoir accompagné, aidé et soutenu dans les moments difficiles

Table des matières

Notations.....	4
Liste des figures et Liste des tableaux.....	5
Introduction générale.....	7
1 Systèmes et commandes d'ordre fractionnaire.....	13
1.1 Introduction au calcul fractionnaire.....	13
1.2 Quelques fonctions utilisées dans le calcul fractionnaire.....	14
1.2.1 La fonction Gamma.....	14
1.2.2 La fonction de Mittag-Leffler.....	15
1.3 Opérateurs d'ordre non entier, définitions et propriétés.....	16
1.3.1 Intégration non entière.....	16
1.3.2 Dérivation non entière.....	17
1.3.2.1 Définition de Riemann-Liouville.....	17
1.3.2.2 Définition de Caputo.....	17
1.3.2.3 Définition de Grünwald-Letnikov.....	18
1.3.3 Propriétés de l'opérateur d'ordre non entier.....	19
1.4 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire.....	19
1.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale non entière.....	20
1.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée non entière.....	20
1.5 Systèmes d'ordre fractionnaire.....	21
1.5.1 Modèles et représentations.....	21
1.5.2 Représentation d'état des systèmes non entiers.....	22
1.5.2.1 Forme canonique commandable.....	24
1.5.2.2 Forme canonique observable.....	24
1.5.2.3 Forme canonique modale.....	25
1.5.3 Solution de l'équation d'état des systèmes d'ordre commensurable.....	25
1.5.3.1 Méthode de la transformation inverse de Laplace.....	26
1.5.3.2 Méthode de Jordan.....	27
1.6 Evaluation numérique de la dérivée fractionnaire.....	27
1.7 Commandabilité, Observabilité et Stabilité.....	29
1.7.1 Critère de commandabilité.....	29

1.7.2	Critère d'observabilité.....	29
1.7.3	Analyse de la stabilité.....	29
1.8	Commande robuste d'ordre fractionnaire.....	31
1.8.1	Fonction de transfert idéale de Bode.....	33
1.8.2	Le contrôleur CRONE.....	35
1.8.3	Contrôleur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ d'ordre fractionnaire.....	35
1.9	Implémentation des correcteurs d'ordre non entier.....	38
1.9.1	Méthode basée sur l'expression analytique de la sortie.....	39
1.9.2	Méthodes basées sur l'approximation par un modèle rationnel discret.....	40
1.9.3	Méthodes basées sur l'approximation par un modèle rationnel continu.....	41
1.10	Conclusion.....	41
2	Sur la théorie de la commande par modes glissants.....	42
2.1	Introduction.....	42
2.2	Généralités.....	43
2.2.1	Structures de base.....	43
2.2.1.1	Structure par commutation d'une contre réaction d'état.....	44
2.2.1.2	Structure par commutation au niveau de l'organe de commande.....	45
2.2.1.3	Structure avec ajout de la commande équivalente.....	45
2.3	Principe de la commande par modes glissants.....	46
2.3.1	Définition du régime glissant.....	47
2.3.2	Méthode de la commande équivalente.....	48
2.3.3	Choix de la Surface de glissement.....	49
2.3.4	Synthèse de la loi de commande.....	50
2.4	Robustesse des modes glissants.....	51
2.5	Exemple illustratif.....	51
2.5.1	Modèle mathématique.....	52
2.5.2	Synthèse de la commande.....	53
2.5.3	Résultats de simulation.....	54
2.6	Conclusion.....	54
3	Les systèmes à retards.....	56
3.1	Introduction.....	56
3.2	Définition.....	57
3.3	Modélisation.....	58
3.3.1	Systèmes de type retardé.....	58

3.3.2	Systèmes de type neutre.....	59
3.4	Choix de la norme.....	61
3.5	Stabilité des systèmes à retards.....	61
3.6	Généralités sur la commande des systèmes à retards.....	63
3.7	Commandabilité des systèmes à retards.....	65
3.8	Définitions	65
3.9	Synthèse de la commande par modes glissants des systèmes à retards.....	66
3.9.1	Système linéaire à état retardé.....	67
3.9.1.1	Conception de la surface de commutation.....	67
3.9.1.2	Calcul de la commande globale.....	67
3.9.2	Système linéaire à entrée retardée.....	68
3.9.2.1	Réduction de système.....	68
3.9.2.2	Synthèse de la commande.....	68
3.10	Conclusion.....	69
4	Commande par modes glissants d'ordre fractionnaire des systèmes fractionnaires	
4.1	Introduction.....	70
4.2	Commande par modes glissants des systèmes fractionnaires sans retard.....	71
4.2.1	Synthèse de la commande par modes glissants.....	72
4.2.2	Existence du mode de glissement.....	74
4.2.3	Analyse de la stabilité.....	75
4.3	Commande par modes glissants des systèmes avec retard sur l'état.....	77
4.3.1	Synthèse de la surface de commutation.....	78
4.3.2	Synthèse de la commande.....	79
4.4	Commande par modes glissants des systèmes avec retard sur l'entrée.....	80
4.4.1	Synthèse de la loi de commande et analyse de la stabilité.....	82
4.5	Exemples illustratifs.....	83
4.6	Commande par modes glissants d'un système fractionnaire incertain et retardé .87	
4.6.1	Système en mode de glissement.....	88
4.6.2	Analyse de la stabilité sans incertitude.....	89
4.6.3	Analyse de la stabilité avec incertitude.....	90
4.7	Exemple.....	92
4.8	Conclusion	94
	Conclusion générale et perspectives.....	96
	Bibliographie.....	98

Notations

- R : ensemble des nombres réels.
- R^+ : ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
- R^n : ensemble vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
- $[a, b)$: intervalle semi ouvert de R d'extrémité a et b
- $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-h, 0]; R^n)$: ensemble des fonctions continues de $[-h, 0]$ dans R^n
- $|\cdot|$: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
- $\|\cdot\|$: une norme sur R^n
- $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$: norme sur \mathcal{C} définie par $\forall \varphi \in \mathcal{C} : \|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|$
- D^α : opérateur de dérivation d'ordre non entier α
- \mathcal{L} : opérateur de Laplace
- $x \in R^n$: vecteur de composantes x_i
- $x(t, t_0, \varphi_0)$: vecteur de R^n représentant l'état instantané du système à l'instant t , avec pour l'état initial $\varphi_0 \in \mathcal{C}$ à l'instant t_0
- $\Gamma(\cdot)$: fonction Gamma d'Euler
- E_α : fonction de Mittag-Leffler
- $I^\alpha f(t)$: intégration non entière d'ordre α
- ${}^{RL}D_t^\alpha f(t)$: dérivée d'ordre α de la fonction $f(t)$ selon la définition de Riemann-Liouville
- ${}^C D_t^\alpha f(t)$: dérivée d'ordre α selon la définition de Caputo
- ${}^{GL}D_t^\alpha f(t)$: dérivée d'ordre α selon Grünwald-Letnikov
- $\|A\|$: norme euclidienne de la matrice A
- $\lambda_{max}(\cdot)$: désigne la plus grande valeur singulière de la matrice (\cdot)

Liste des figures

- 1.1 Régions de stabilité pour un système d'ordre fractionnaire
- 1.2 Système de référence de Bode
- 1.3 Tracé de la fonction idéale de Bode
- 1.4 Tracé de Bode de la fonction en boucle fermée pour différentes valeurs de α
- 1.5 Système de commande à retour unitaire
- 1.6 $PI^\lambda D^\mu$ vs PID, ordre entier et ordre fractionnaire
- 2.1 Changement de structure par commutation d'une contre réaction d'état
- 2.2 Changement de structure par commutation au niveau de l'organe de commande
- 2.3 Changement de structure avec ajout de la commande équivalente
- 2.4 Différents modes de convergence pour la trajectoire d'état
- 2.5 Phénomène de réticence
- 2.6 Schéma de convertisseur DC – AC
- 2.7 Courbe de référence et sortie du système
- 2.8 écart entre la sortie et la référence
- 2.9 Courbe de la commande
- 2.10 Courbe de la commande équivalente
- 2.11 Courbe de référence et sortie du système en fonction de la résistance
- 3.1 Stabilité au sens de Lyapunov autour d'un point d'équilibre
- 4.1 Courbe des états x pour le système fractionnaire sans retard
- 4.2 Courbe de la surface de glissement pour le système fractionnaire sans retard
- 4.3 Courbe de la commande pour le système fractionnaire sans retard
- 4.4 Courbe des états x pour le système fractionnaire avec retard sur l'état
- 4.5 Courbe de la surface de commutation pour le système fractionnaire avec retard sur l'état
- 4.6 Courbe de la commande pour le système fractionnaire avec retard sur l'état
- 4.7 Courbe des états x pour le système fractionnaire avec retard sur l'entrée
- 4.8 Courbe des états z pour le système fractionnaire avec retard sur l'entrée
- 4.9 Courbe de la surface de commutation pour le système fractionnaire avec retard sur l'entrée
- 4.10 Courbe de la commande pour le système fractionnaire avec retard sur l'entrée

Liste des Figures et Liste des Tableaux

- 4.11 Courbe des états x en fonction du retard sur l'entrée et l'ordre de dérivation ($\alpha = 0.7$ et $\tau = 0.6$)
- 4.12 Courbe des états x en fonction du retard sur l'entrée et l'ordre de dérivation ($\alpha = 0.2$ et $\tau = 1$)
- 4.13 Courbe des états pour un système fractionnaire incertain et retardé
- 4.14 Courbe de la commande pour un système fractionnaire incertain et retardé
- 4.15 Courbe de la surface de commutation pour un système fractionnaire incertain et retardé

Liste des tableaux

- Tab 1.1 Approximation de l'opérateur s^α en temps discret

Introduction Générale

L'automatique a été définie comme étant une science qui utilise des méthodes théoriques et des moyens technologiques pour la conception et la construction de systèmes automatisés. Fondée sur la notion de contre réaction, son objectif principal est de synthétiser des correcteurs afin d'assurer au système un certain niveau de performance. Le plus souvent, le comportement d'un système est évalué à l'aide d'une quantité mesurée par un capteur, c'est donc une sortie du système. La réalisation de cette tâche fait intervenir trois étapes essentielles. La première est la modélisation qui consiste à déterminer les relations mathématiques liant les différentes variables constituant le système. Une fois établi le modèle, il est ensuite nécessaire d'analyser son comportement et d'établir ses propriétés : C'est la phase d'analyse. Une fois l'analyse effectuée, vient enfin la phase de commande dont le rôle est de déterminer le correcteur permettant d'y remédier aux insuffisances des performances du système. Dans le cas des systèmes linéaires et non linéaires d'ordre entier temps invariant, plusieurs travaux portant sur la stabilité et la stabilisation ont été publiés et différents correcteurs ont été implantés avec succès sur ces systèmes. On peut citer les correcteurs PID, les correcteurs à structure variable, les correcteurs H_∞ , commande par retour d'état, etc. Ces différentes commandes ont été étendues au cas des systèmes à retards constants ou variables. Or, beaucoup de systèmes dynamiques peuvent être mieux modélisés par un modèle dynamique non entier, basé sur la notion de différentiation ou d'intégration d'ordre non entier appelée également dérivation et intégration fractionnaires. Il est donc légitime de s'intéresser à ces systèmes en vue de leur synthétiser des commandes adéquates pour rendre compte de leur comportement.

Sur le calcul fractionnaire et la commande d'ordre fractionnaire

Dans le cas du calcul ordinaire (ordre entier), la dérivée d'ordre n ou la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une fonction $f(x)$, à savoir $D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$, est bien définie lorsque n est un entier positif. En 1695, L'Hopital demanda à Leibniz quel sens pourrait-on attribuer à $D^n f(x)$ si n était une fraction. Depuis ce temps, le calcul fractionnaire a attiré l'attention de nombreux mathématiciens de renommée tels qu'Euler, Laplace, Fourier, Abel, Riemann, et Laurent. De nombreuses définitions ont été alors données sur la dérivation et l'intégrale d'ordre non entier ou fractionnaire [36], [55], [63]

Le comportement de nombreux systèmes physiques peut être correctement décrit par des équations différentielles à dérivées non entières, C'est le cas de certains systèmes thermiques [71], électrochimiques [86]. L'utilisation de modèles classiques basés sur la dérivation entière n'est donc pas appropriée. Des modèles basés sur des équations à dérivées non entières ont, à cet effet, été développés. La raison de l'utilisation des modèles entiers est due principalement à l'absence d'outils mathématiques permettant l'analyse, la simulation et la réalisation de ces systèmes fractionnaires. Des recherches ont été entamées dans ce sens et actuellement, il existe plusieurs méthodes d'approximations de la dérivée et de l'intégrale fractionnaires, dans le cas continu et dans le cas discret [12], [65], [85].

Les outils fractionnaires apparaissent aussi en automatique et en robotique, notamment au travers d'applications en modélisation, identification, commande et commande robuste [52], [57], [71]. Compte tenu de l'intérêt sans cesse croissant donné à la dérivation d'ordre non entier en organisant des conférences internationales (IEEE, CDC, IFAC, CIFA, Numéros spéciaux, symposiums, workshops on Fractional Differentiation and its Application (FDA)), certaines universités, à l'image de Bordeaux (France), ont intégré l'étude des systèmes d'ordre non entier et leurs applications dans leur cursus.

Dans la commande des systèmes dynamiques, le système à contrôler et/ou le régulateur sont régis par des équations différentielles fractionnaires. L'idée d'utiliser

des régulateurs d'ordre fractionnaire pour la commande de ces systèmes revient à Oustaloup, qui a développé le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier), décrit dans son ouvrage [56] avec des applications dans divers domaines. Oustaloup avait notamment démontré l'avantage du régulateur CRONE par rapport au PID classique. Podlubny [64] a proposé plus tard le régulateur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ utilisant des actions dérivées et intégrales d'ordre non entier. En 2003, Calderon [8] a élargi le calcul fractionnaire à la commande par modes glissants.

Sur la commande par modes glissants

Le réglage par mode de glissement est un mode de fonctionnement particulier des systèmes à structure variable. Un système à structure variable est un système pouvant changer de structure en faisant commuter sa commande entre deux valeurs, suivant le signe d'une fonction des coordonnées du système dans l'espace de phase. Le principe repose donc sur le choix à priori de cette fonction qui définit une hypersurface ou une surface de commutation sur laquelle et sous certaines conditions, les trajectoires du système sont maintenues dans l'espace de phase. Le système est dit alors en régime glissant ou en mode de glissement sur l'hypersurface considérée. Dans ce cas, le système bouclé devient insensible à certaines perturbations. Quand l'état du système évolue sur la surface choisie, la dynamique du système est dite plongée dans l'état d'un système réduit et libre, c'est-à-dire que le système évolue sur une variété de dimension inférieure d'une unité à la dimension du système.

La commande par modes glissants a été longtemps limitée dans ses applications à cause du caractère discontinu de sa commande, qui engendre des oscillations autour de la surface de commutation : C'est le phénomène de réticence ou chattering en anglais. Depuis 1980, plusieurs solutions ont été proposées pour y remédier à cet inconvénient [41] et par la suite, beaucoup d'applications ont utilisé cette technique de commande dans le cas des systèmes linéaires et non linéaires d'ordre entier [6],[7],[29]. Dans le cas fractionnaire, la première application utilisant la technique des modes glissants d'ordre fractionnaire revient à Calderon [8], [9] sur un convertisseur électrique continu-continu. Les auteurs ont défini des surfaces de commutation basées sur les structures des

correcteurs PID et PI d'ordre fractionnaire. D'autres techniques ont été aussi utilisées récemment [21], [62], [75].

Sur les systèmes à retards

Dans le domaine de l'automatique, l'état d'un système représente l'ensemble des variables présentes permettant de déterminer le comportement futur du système. Dans le cas des systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires, on suppose que l'évolution du système à l'instant $t+\Delta t$ ne dépend que de la valeur de ses variables à l'instant t . Donc, les états antérieurs n'y interviennent pas et ces équations où le passé ne se distingue pas de l'avenir sont inapplicables aux êtres vivants (prédiction de la population d'un pays dans le futur). Pour ces systèmes à retards, l'état n'est plus un ensemble fini de valeurs, mais une fonction définie sur un intervalle de la longueur du retard.

Le retard peut être négligeable dans un système en boucle ouverte, mais peut devenir important dans une boucle fermée, par l'intermédiaire des temps de réaction des capteurs, par exemple. La présence du retard dans de nombreux domaines tels que la technologie, la biologie, les transports, etc., a renforcé leur importance dans les théories modernes des systèmes dynamiques et de contrôle. En automatique, l'étude des systèmes à retards (pour lesquels, existent plusieurs dénominations possibles : Systèmes héréditaires, systèmes de dimension infinie, systèmes décrits par des équations différentielles fonctionnelles, etc.) a reçu une attention considérable. C'est ainsi que plusieurs méthodes de synthèse de contrôleurs et de critères de stabilité ont été développés [14], [44], [45]. Parmi les différentes méthodes développées pour la commande des systèmes à retards, la commande par modes glissants a été largement utilisée et a été appliquée avec succès. Dans [26], [31], [67], des conditions suffisantes de stabilité ont été développées pour les systèmes à retards et incertains.

De nombreux systèmes physiques réels sont caractérisés par des équations à dérivations fractionnaires retardées [30], [16], [46]. De plus, les systèmes à retards d'ordre fractionnaire utilisant un contrôleur d'ordre fractionnaire ont été présentés dans [28]. Cependant, l'examen sur la technique de la commande par modes glissants pour

ces systèmes, n'a pas reçu suffisamment d'attention. Seulement quelques résultats sont disponibles [22], [75].

Contributions et organisation de la thèse

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'utilisation des propriétés des opérateurs intégrò-différentiels d'ordre fractionnaire en vue de contribuer au développement de schémas de commande par modes glissants d'ordre fractionnaire des systèmes linéaires à dérivations non entières sans retards et avec retards.

Le premier chapitre qui sera divisé en deux parties, fera l'objet d'une étude bibliographique du calcul fractionnaire et des systèmes de commande d'ordre fractionnaire. Dans la première partie, nous donnerons les définitions de base de la dérivation et de l'intégration d'ordre non entier, quelques propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire, les différentes représentations des systèmes fractionnaires et enfin les conditions de commandabilité, d'observabilité et de stabilité de ces systèmes. La deuxième partie retracera d'une manière succincte la chronologie des commandes d'ordre fractionnaire ainsi que quelques méthodes d'approximation en vue de simulations et de réalisations de correcteurs fractionnaires.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons la théorie des systèmes à structure variable et les modes glissants associés, formalisée dans le contexte classique. Nous donnerons les relations de base et la condition d'existence des modes glissants.

Le chapitre trois sera dévolu à quelques notions relatives aux systèmes à retards d'ordre entier, qui seront utiles à la compréhension de la suite de notre travail. Ce chapitre présentera les principaux modèles de systèmes à retards, les différents types de retards usuellement considérés, la méthode de stabilité au sens de Lyapunov, les différentes lois de commande appliquées et enfin la méthode de synthèse de la loi commande par modes glissants des systèmes à entrée retardée après avoir défini un prédictor d'état pour compenser l'effet du retard

Le chapitre quatre, qui est le dernier chapitre de notre mémoire, englobera nos contributions. La première contribution porte sur la forme de la surface de commutation d'ordre fractionnaire basée sur la définition l'intégrale de Riemann-Liouville. La deuxième est le développement d'un prédicteur d'état fractionnaire basé sur la fonction de Mittag-Leffler. Dans ce chapitre, nous présenterons la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire des systèmes linéaires fractionnaires avec et sans retards. Nous commencerons par un modèle fractionnaire sans retard pour lequel on synthétise une loi de commande qui satisfera la condition d'existence du mode de glissement, un théorème sur la stabilité est développé. Ensuite, un modèle à état retardé pour lequel nous montrerons l'atteignabilité du régime glissant, et enfin, un prédicteur d'état fractionnaire est proposé pour transformer un système fractionnaire à entrée retardé en un système dit libre, indépendant du retard. Pour terminer le chapitre, nous étudierons la stabilité pratique en temps fini d'un système fractionnaire incertain à retard sur l'état. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer les développements théoriques de ces méthodes.

Enfin, nous concluons sur ce travail de thèse et les perspectives qu'il permet d'ouvrir

Chapitre 1

Systemes et Commandes d'Ordre Fractionnaire

1.1 Introduction au calcul fractionnaire

Les operateurs fractionnaires integro-differentiels (calcul fractionnaire) est une generalisation de l'integration et de la differentiation des operateurs d'ordre non entier. La question des derivees fractionnaires est abordee des 1695 par Leibniz dans une lettre adreesee a l'Hopital, mais lorsque celui-ci lui demande quelle pourrait etre la derivee d'ordre un demi de la fonction $x(t)$, par rapport a la variable t , Leibniz repond que cela mène a un paradoxe dont on tirera profit, un jour, d'utiles consequences : Le calcul fractionnaire est alors ne.

On peut generaliser les operateurs d'integration et de differentiation en un seul operateur fondamental ${}_a D_t^\alpha$ ou a et t sont les limites de l'operation. L'operateur integro-differentiel continu est defini comme suit :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \alpha < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

ou $\alpha \in R$, est l'ordre de l'operation

Plusieurs mathématiciens ont contribué à l'élaboration de la théorie de la dérivation d'ordre non entier et différentes définitions de l'opérateur fractionnaire ont vu le jour [55]. Les plus familières sont celles de Riemann-Liouville, de Caputo et de Grünwald-Letnikov. Pour la compréhension de ces définitions, nous présentons quelques fonctions utilisées dans le calcul fractionnaire.

1.2 Quelques Fonctions utilisées dans le calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présenterons deux fonctions qui sont très utilisées et qui permettent en général de fournir des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma d'Euler et de la fonction de Mittag-Leffler.

1.2.1 La fonction Gamma [18]

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler. Son interprétation est simplement la généralisation du factoriel n ($n!$) et elle permet à n de prendre des valeurs non entières.

La définition intégrale de la fonction Gamma est donnée par (1.2)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z > 0 \quad (1.2)$$

Elle est plus souvent utilisée même si elle est restreinte aux valeurs positives de z .

L'intégration par partie de (1.2) conduit à la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (1.3)$$

Puisque $\Gamma(1) = 1$, en utilisant la relation (1.3), nous obtenons pour $z = 1, 2, 3 \dots$

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3!$$

.....

$$\Gamma(n + 1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n - 1)! = n! \quad (1.4)$$

L'autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle possède des pôles simples pour $z = 0, -1, -2, -3, \dots$

Son expression est :

$$\Gamma(z) = \varphi(z) + \frac{(-1)^0}{0!} \frac{1}{0+z} + \frac{(-1)^1}{1!} \frac{1}{1+z} + \frac{(-1)^2}{2!} \frac{1}{2+z} + \dots \quad (1.5)$$

avec :

$$\varphi(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Ceci signifie que pour des valeurs entières négatives, la fonction Gamma tend asymptotiquement vers l'infini.

1.2.2 Fonction de Mittag-Leffler [18]

La fonction de Mittag-Leffler est une fonction importante dans le monde du calcul fractionnaire. Son rôle est analogue à celui joué par la fonction exponentielle dans le cas du calcul entier.

La définition standard de cette fonction à un paramètre est donnée par :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (\alpha > 0) \quad (1.6)$$

Cette fonction a été introduite par Mittag-Leffler en 1903. [18]

La fonction exponentielle usuelle correspond pour une valeur de $\alpha = 1$

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (1.7)$$

Il est aussi courant de représenter la fonction de Mittag-Leffler avec deux paramètres α et β , comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (1.8)$$

Cette fonction a été introduite par R.P. Agarwal et Erdelyi en 1953-1954[18]

1.3 Opérateurs d'intégration et de dérivation non-entiers : Définitions et propriétés [36], [55]

Dans ce paragraphe, nous présenterons les opérateurs d'ordre non entier. Une définition unique de l'intégration non entière et plusieurs définitions de la dérivée non entière sont considérées.

1.3.1 Intégration non entière

Définition 1.1: Soit $\alpha \in R^+$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, \infty)$.

L'intégrale d'ordre α de f de borne inférieure t_0 définie par :

$${}_{t_0}I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.9)$$

est appelée intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville.

Avec $\Gamma(\alpha)$ la fonction Gamma d'Euler

Quand on s'intéresse aux systèmes dynamiques, la fonction $f(t)$ est une fonction causale, alors l'intégrale d'ordre non entier est définie comme suit :

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \alpha \in R^+ \quad (1.10)$$

Dans (1.10), nous pouvons voir que l'intégrale d'ordre fractionnaire peut être exprimée sous forme de produit de convolution de la forme suivante :

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t), \quad \alpha \in R^+ \quad (1.11)$$

Avec:

$$\phi_\alpha(t) = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \alpha \in R^+ \text{ et } t_+^{\alpha-1} = 0 \text{ pour } t < 0; t_+^{\alpha-1} = t^{\alpha-1} \text{ pour } t \geq 0 \quad (1.12)$$

1.3.2 Dérivation non entière

1.3.2.1 Définition de Riemann-Liouville (R-L) : Soient $\alpha \in R^+$, n un entier positif, $t_0 \in R$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, \infty)$. La dérivée d'ordre α de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}^{RL}D_{t_0}^\alpha f(t) \triangleq \frac{d^n}{dt^n} \left({}_{t_0}I_t^{(n-\alpha)} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.13)$$

avec $(n - 1) < \alpha < n$

1.3.2.2 Définition de Caputo :

Caputo a reformulé la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire comme suit :

$${}^cD_{t_0}^\alpha f(t) \triangleq I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1.14)$$

où $n - 1 < \alpha < n$, $n \in N$

Pour $t_0 = 0$, entre les deux définitions (1.13) et (1.14), il existe les deux relations suivantes :

$${}^{RL}D^\alpha f(t) = {}^C D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (1.15)$$

$${}^{RL}D^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) = {}^C D^\alpha f(t) \quad (1.16)$$

1.3.2.3 Définition de Grünwald-Letnikov (G-L)

Elle est basée sur la généralisation de la dérivée classique d'une fonction $f(t)$ d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la forme :

$$D^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \quad (1.17)$$

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (1.18)$$

En remplaçant l'entier n par $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$), l'expression (1.18) s'écrit

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j! \Gamma(\alpha-j+1)} \quad (1.19)$$

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de G-L est donc [55]

$${}^G D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-\alpha}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (1.20)$$

où $[x]$ dénotes la partie entière de x , h le pas d'échantillonnage et $\binom{\alpha}{j}$ sont appelés coefficient binomiaux. Cette définition sera utilisée pour la simulation et l'évaluation numérique de la dérivée fractionnaire.

Remarque 1.1 : Ces différentes définitions nous montrent que la dérivée d'ordre non entier prend en compte les valeurs de $f(t)$ à tous les instants passés grâce à l'intégration qui y apparait. Elle fournit donc une caractérisation globale de $f(t)$. C'est cet effet « mémoire » qui fait de l'opérateur de dérivation non entière un excellent outil de modélisation des phénomènes de diffusion connus pour être à « mémoire longue »

1.3.3 Propriétés de l'opérateur ${}_a D_t^\alpha$ [18]

Certaines propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires sont :

- 1) Si $f(z)$ est une fonction analytique en z , alors sa dérivée fractionnaire ${}_a D_z^\alpha f(z)$ est une fonction analytique en z et α .
- 2) Pour $\alpha = n$, où n est un nombre entier, l'opérateur ${}_a D_z^\alpha$ produit le même résultat que la dérivation classique d'ordre entier.
- 3) Pour $\alpha = 0$, l'opérateur ${}_a D_z^\alpha$ est l'opérateur identité :

$${}_a D_z^0 f(z) = f(z)$$

- 4) La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires

$${}_a D_z^\alpha \{bf(z) + cg(z)\} = b {}_a D_z^\alpha f(z) + c {}_a D_z^\alpha g(z)$$

1.4 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire

La méthode de la transformée de Laplace est souvent utilisée comme étant un outil pour la résolution des problèmes posés en ingénierie [10], [53]. Dans ce paragraphe, nous

donnerons les transformées des opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier définis précédemment.

1.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale non entière

La transformée de Laplace de l'opérateur d'intégration non entier défini par (1.9) est donnée par [53]

$$\mathcal{L} \{ {}_0I_t^\alpha f(t) \} = \frac{F(s)}{s^\alpha}, \alpha > 0 \quad (1.21)$$

où s représente la variable de Laplace et $n - 1 < \alpha < n$

1.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée non entière

- **Au sens de Riemann-Liouville**

$$\mathcal{L} \{ {}_0^{RL}D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0^{RL}D^{\alpha-1-k} f(t)]_{t=0} \quad (1.22)$$

Les conditions initiales apparaissant dans (1.22) sont données en fonction d'une dérivée non entière évaluée à l'origine.

- **Au sens de Caputo**

$$\mathcal{L} \{ {}_0^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (1.23)$$

Les conditions initiales apparaissant dans (1.23) sont données en fonction d'une dérivée entière évaluée à l'origine

- **Au sens de Grünwald-Letnikov**

$$\mathcal{L} \{ {}_0^{GL}D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) \quad (1.24)$$

Remarque1.2 : Les transformées de Laplace des dérivées d'ordre non entier de Riemann-Liouville et de Caputo sont équivalentes si et seulement si le système est au repos pour $t < 0$. Elles se réduisent à :

$$\mathcal{L} \{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t) \} = \mathcal{L} \{ {}^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) \quad (1.25)$$

Remarque 1.3 : La transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue. Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des conditions initiales.

1.5 Systèmes d'ordre fractionnaire

1.5.1 Modèles et représentations

Plusieurs systèmes dynamiques temps continu peuvent être modélisés par des équations différentielles comprenant des dérivées d'ordre fractionnaire. Un système d'ordre non entier linéaire monovarié temps invariant d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est décrit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) \\ = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \end{aligned} \quad (1.26)$$

où $a_k, b_k \in R$.

Si tous les ordres de dérivation sont des multiples entiers de l'ordre de base α , c'est-à-dire, $\alpha_k, \beta_k = k\alpha, \alpha \in R^+$, le système est dit d'ordre commensurable et l'équation (1.26) devient :

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{k\alpha} u(t) \quad (1.27)$$

Si dans (1.27) $\alpha = 1/q, q \in Z^+$, le système sera d'ordre rationnel.

En appliquant la transformée de Laplace à de telles équations, et en supposant les conditions initiales nulles, nous obtenons des fonctions de transfert avec des puissances d'ordre non entier de la variable complexe de Laplace s .

Dans le cas continu, la fonction de transfert d'un système d'ordre commensurable est donnée par l'équation (1.28) [10]

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k} \quad (1.28)$$

qui peut être considérée comme étant une fonction pseudo-rationnelle, $H(\lambda)$, de la variable $\lambda = s^\alpha$,

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k} \quad (1.29)$$

1.5.2 Représentation d'état des systèmes non entiers

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons uniquement aux systèmes linéaires continus temps invariant et d'ordre commensurable.

Considérons un système multivariable linéaire temps invariant. Sa représentation d'état peut être de la forme suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.30)$$

où $0 < \alpha < 1$, $u \in R^m$ est le vecteur colonne d'entrée, $x \in R^n$ est le vecteur colonne d'état, $y \in R^p$ est le vecteur colonne de sortie, $A \in R^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B \in R^{n \times m}$ est la matrice d'entrée, $C \in R^{p \times n}$ est la matrice de sortie, et $D \in R^{p \times m}$ est la matrice de transmission directe.

En appliquant la transformée de Laplace et la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo, l'équation (1.30) devient :

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow$$

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1}BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1}s^{\alpha-1}x(0) \quad (1.31)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (1.32)$$

Notons que la définition de Caputo est nécessaire si nous voulons que les conditions initiales soient exprimées comme les valeurs des états à l'instant $t = 0$. Dans le cas où les conditions initiales sont nulles, l'équation (1.31) devient :

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1}BU(s) \quad (1.33)$$

et l'équation (1.32) s'écrit :

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D \quad (1.34)$$

Où I est la matrice identité de dimension $n \times n$ et $G(s)$ représente la matrice fonction de transfert de dimension p lignes et m colonnes. Son numérateur et son dénominateur sont des polynômes exprimés en termes de puissances entières de s^α .

Considérons un système de fonction de transfert (1.28). On se restreint au cas d'un système à une entrée et une sortie.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k}, \quad a_n = 1, \quad m \leq n \quad (1.35)$$

Il est possible de construire très simplement trois représentations canoniques ou formes standard de ce système en le décomposant en sous-systèmes élémentaires : des systèmes d'ordre un mis en série ou en parallèle. Ces représentations sont similaires aux représentations classiques développées pour les systèmes d'ordre entier.

1.5.2.1 Forme canonique commandable

La fonction de transfert (1.35) est équivalente à la représentation d'état suivante, appelée forme canonique commandable.

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_{n-2} \\ D^\alpha x_{n-1} \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.36)$$

$$y = [b_0 - b_n a_0, b_1 - b_n a_1, \dots, b_{n-1} - b_n a_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (1.37)$$

où $b_i = 0$, pour $m < i \leq n$

1.5.2.2 Forme canonique observable

La fonction de transfert (1.35) est équivalente à la représentation d'état suivante, connue sous le nom de forme canonique observable.

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ D^\alpha x_3 \\ \vdots \\ D^\alpha x_{n-1} \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} - b_n a_{n-2} \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} u \quad (1.38)$$

$$y = [0, \dots, 0, 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u, \quad (1.39)$$

où $b_i = 0$, pour $m < i \leq n$.

1.5.2.3 Forme canonique modale

Décomposons la fonction de transfert (1.35) en fractions partielles contenant les fonctions s^α . Supposons que le premier pôle p_1 est de multiplicité r et que les autres pôles sont simples, il est possible de réécrire (1.35) de la manière suivante :

$$G(s) = b_n + \frac{c_1}{(s^\alpha - p_1)^r} + \dots + \frac{c_{n-1}}{(s^\alpha - p_1)^2} + \frac{c_n}{s^\alpha - p_1} + \sum_{i=r+1}^n \frac{c_i}{s^\alpha - p_i} \quad (1.40)$$

Ceci est équivalent à la représentation d'état suivante, connue comme étant la forme canonique modale :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_r \\ D^\alpha x_{r+1} \\ \vdots \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{r+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.41)$$

$$y = [c_1, c_2, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u, \quad (1.42)$$

où $b_n = 0$ si $m < n$.

1.5.3 Solution de l'équation d'état des systèmes linéaires continus temps invariant et d'ordre commensurable

Nous présentons dans cette section deux méthodes de résolution de l'équation d'état des systèmes linéaire fractionnaires temps invariant. Ces deux méthodes sont nécessaires pour la compréhension de notre travail.

1.5.3.1 Méthode de la transformation inverse de Laplace

Considérons un système SISO (single input-single output) représenté par l'équation d'état fractionnaire de la forme (1.30). Sa solution est déterminée en utilisant la transformée de Laplace inverse de l'équation (1.31) :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s^\alpha I - A)^{-1}BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1}s^{\alpha-1}x(0)\} \quad (1.43)$$

Soit : $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s^\alpha I - A)^{-1}s^{\alpha-1}\}$ et $\hat{\phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s^\alpha I - A)^{-1}\}$,

Pour $t \geq 0$, nous pouvons écrire que : $\phi(t) = \hat{\phi}(t) * \xi_{\alpha-1}(t)$

$$\xi_{\alpha-1}(t) = \mathcal{L}^{-1}(s^{\alpha-1}) = \begin{cases} t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha), & \alpha < 1 \\ \delta(t), & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.44)$$

où $\delta(t)$ est la fonction de Dirac. En appliquant la transformée de Laplace relative à un produit de convolution, on aura :

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t)x(0) + \hat{\phi}(t) * [Bu(t)] \\ &= \phi(t)x(0) + \int_0^t \hat{\phi}(t-h)Bu(h)dh, \quad \alpha \leq 1 \end{aligned} \quad (1.45)$$

où $\phi(t)$ peut être interprétée comme étant la matrice d'état de transition et le produit $\phi(t)x(0)$ peut s'écrire :

$$\phi(t)x(0) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} \right) x(0) = E_{\alpha,1}(At^\alpha)x(0) \quad (1.46)$$

On voit apparaître la fonction de Mittag-Leffler, qui joue ici le même rôle que celui effectué par la fonction exponentielle pour les systèmes d'ordre entier. La matrice

exponentielle e^{At} est juste un cas particulier de la matrice exponentielle généralisée, $E_{\alpha,1}(At^\alpha)$, que l'on peut appeler fonction matrice de Mittag-Leffler. Elle constitue la matrice de transition pour les systèmes fractionnaires.

Notons que cette matrice de transition correspondant à la solution de (1.30) en utilisant la transformée inverse de Laplace au sens de Riemann-Liouville de (1.31), est donnée par l'expression suivante [25].

$$\phi(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) = e_\alpha^{At} \quad (1.47)$$

1.5.3.2 Méthode de Jordan

Il s'agit de décomposer la matrice A en une matrice diagonale, en utilisant la méthode de Jordan. Soit $A = V\Lambda V^{-1}$ où $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. En substituant cette expression dans l'équation (1.46), nous obtenons :

$$\phi(t) = V \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} \right) V^{-1} \quad (1.48)$$

En utilisant la définition de Mittag-Leffler, l'expression précédente de $\phi(t)$ s'écrit :

$$\phi(t) = V \text{diag} \left(E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha), E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha), \dots, E_{\alpha,1}(\lambda_n t^\alpha) \right) V^{-1} \quad (1.49)$$

Pour plus de détail, voir [53].

1.6 Evaluation numérique de la dérivée fractionnaire

Pour l'évaluation numérique des intégrales et dérivées d'ordre fractionnaire, l'approche la plus répandue est celle basée sur l'approximation de la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov définie à la section 1.3.2.3

$${}^a G^L D_t^\alpha f(t) = \frac{{}_a \Delta_h^\alpha f(t)}{h^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (1.50)$$

Pout une fonction causale $f(t)$, et pour $t = kh$, nous aurons l'approximation suivante :

$${}^a G^L D_t^\alpha f(kh) \equiv \frac{{}_a \Delta_h^\alpha f(kh)}{h^\alpha} = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(kh - jh) \quad (1.51a)$$

où $\binom{\alpha}{j}$ sont des coefficients binomiaux et $c_j^\alpha = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ ($j = 0, 1 \dots$)

Le calcul des coefficients se fait par la formule de récurrence suivante:[53], [64].

$$c_0^\alpha = 1, \quad c_j^\alpha = \left(1 - \frac{1 + \alpha}{j}\right) c_{j-1}^\alpha \quad (1.51b)$$

De même pour une fonction causale $f(t)$, et pour $t = kh$, l'approximation de l'intégrale est donnée par [63]

$$I^\mu(kh) = D^{-\mu} f(kh) \equiv h^\mu \sum_{j=0}^k c_j^{(-\mu)} f(kh - jh) \quad (1.52a)$$

où les coefficients $c_j^{(-\mu)}$ sont des coefficients binomiaux qui peuvent être calculés par la formule de récurrence suivante, pour $j = 1, 2, \dots, k$

$$c_0^{(-\mu)} = 1, \quad \text{et} \quad c_j^{(-\mu)} = \left(1 - \frac{1 - \mu}{j}\right) c_{j-1}^{(-\mu)} \quad (1.52b)$$

1.7 Commandabilité, Observabilité et Stabilité des systèmes fractionnaires

Les conditions de commandabilité et d'observabilité pour les systèmes fractionnaires d'ordre commensurable sont données avec démonstration dans [53]. Elles sont identiques à celles des systèmes d'ordre entier [51]

1.7.1 Critère de commandabilité

Le système d'ordre fractionnaire donné par (1.30) est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité

$$C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \quad (1.53)$$

(où n est le nombre des états) est de rang plein.

1.7.2 Critère d'observabilité

Le système d'ordre fractionnaire donné par (1.30) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

(où n est le nombre des états) est de rang plein.

1.7.3 Analyse de la stabilité

Les conditions de stabilité des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant sont différentes de celles des systèmes linéaires d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires peuvent avoir des racines dans le demi-plan droit du plan complexe, contrairement aux systèmes linéaires dont les racines sont à partie réelle strictement

négative. Désignons par λ_i les valeurs propres de la matrice A . Le système (1.30) est dit stable si la condition

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \pi/2, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.55)$$

est satisfaite pour toutes les valeurs propres de A [50]

Remarque 1.4 : 1) Pour $\alpha = 1$, on retrouve la condition de stabilité des systèmes d'ordre entier.

2) Pour la représentation fonction de transfert (1.34), désignons par p_i les pôles du système. Ces pôles sont définis comme étant solutions de l'équation $\det(s^\alpha I - A) = 0$. Ils sont donnés par l'expression (1.56)

$$p_i = \lambda_i^{1/\alpha} \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.56)$$

Alors, la condition de stabilité dans le sens entrée bornée- sortie bornée est réalisée si la condition

$$|\arg(p_i)| > \pi/2 \quad (1.57)$$

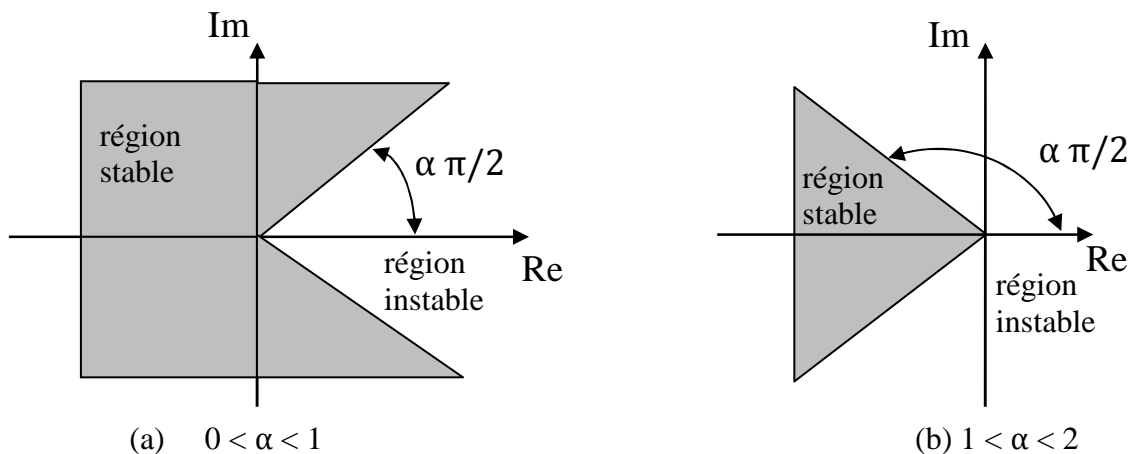


Figure 1.1 : Régions de stabilité pour un système d'ordre fractionnaire dans le plan s^α

1.8 Commande robuste d'ordre fractionnaire

La robustesse d'un système peut être définie comme sa capacité à conserver les propriétés spécifiées en présence de variations ou d'incertitudes prévues ou imprévues. Les modèles des procédés étant par nature incertains, la robustesse des méthodes de synthèse de commande constitue depuis deux décennies un objectif fondamental. Cette notion de robustesse définit l'insensibilité ou la quasi-insensibilité de la commande aux variations paramétriques ou aux dynamiques non modélisées du procédé. On ne considère pas uniquement la robustesse en stabilité mais aussi la robustesse en performance, qui est beaucoup plus générale. L'analyse de la robustesse en stabilité consiste à établir si le système demeure stable malgré les variations attendues des paramètres. L'analyse de la stabilité en performance cherche à établir si le système maintient les performances prévues pour les variations attendues des paramètres.

Les avantages du calcul fractionnaire ont été décrits et mentionnés dans les dernières décennies par de nombreux auteurs. Il a été montré que les modèles d'ordre fractionnaire des systèmes réels sont régulièrement plus appropriés que ceux utilisés habituellement par les modèles entiers. Les applications de ces modèles fractionnaires se trouvent dans de nombreux domaines, comme par exemple, la mécanique, la physique, la robotique et dans beaucoup d'autres. Les contrôleurs fractionnaires sont ceux qui renferment des systèmes d'ordre fractionnaire dans leur conception. Ils peuvent être conçus à la fois par des systèmes d'ordre entier et d'ordre non entier.

La signification de commande d'ordre fractionnaire, du point de vue ingénierie, est une généralisation de la théorie de la commande d'ordre entier classique. Son intérêt majeur est d'améliorer les performances des systèmes en utilisant les concepts de la dérivation non entière et des systèmes d'ordre non entier. Les systèmes dynamiques et les contrôleurs d'ordre fractionnaire, qui sont basés sur le calcul fractionnaire, ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs. Les structures de commande d'ordre fractionnaire les plus connues sont les suivantes :

- Le correcteur CRONE (Commande Robuste d'Ordre non Entier), proposé par Oustaloup au début des années 90[56]. Oustaloup a étudié les algorithmes

d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes dynamiques et a montré la supériorité des performances de la commande CRONE sur le PID. Notons qu'il y'a eu 3 générations de commande CRONE.

- Le Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire proposé par Podlubny [64] en 1999. Ce correcteur est une généralisation du correcteur PID classique. Il comprend un intégrateur d'ordre λ et un dérivateur d'ordre μ et donne une meilleure réponse que le PID lorsqu'il est utilisé pour la commande des systèmes d'ordre non entier.
- Le correcteur avance–retard de phase d'ordre fractionnaire, étudié dans [53]. Ce correcteur est une généralisation du correcteur avance–retard de phase classique.

Les concepts du calcul fractionnaire sont étendus à d'autres types de stratégies de commande robuste d'ordre fractionnaire différentes de celle du PID: La commande \mathcal{H}_2 et la commande \mathcal{H}_∞ dont peu de travaux ont été effectués. Une stratégie de commande adaptative d'ordre fractionnaire a été étudiée avec succès [38]. L'auteur a montré, à travers des exemples, les avantages par rapport à la commande adaptive classique. Et enfin, la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire, qui elle aussi, a fait son apparition récemment. Notre contribution s'inscrit justement dans cette optique, car motivés par les qualités de robustesse vis-à-vis des perturbations (paramétriques ou externes) de la commande par modes glissants développée dans le chapitre un, nous proposons alors, une nouvelle technique de commande par régime glissant d'ordre fractionnaire, basée sur une surface de commutation fractionnaire [75].

Dans ce chapitre, nous ne nous étalerons pas sur toutes les structures de commande fractionnaire, mais nous donnerons un aperçu sur les commandes les plus utilisées actuellement, i.e. la commande CRONE ou contrôleur CRONE, le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire et quelques techniques de réglage de ce correcteur. Mais avant cela, nous présentons d'abord la fonction de transfert idéale de Bode. Quant à la technique de réglage par mode de glissement d'ordre fractionnaire, elle fera l'objet du chapitre quatre.

1.8.1 Fonction de transfert idéale de Bode

Dans son travail sur les amplificateurs à réaction, en 1945, Bode a proposé une forme idéale de la fonction de transfert de la boucle de commande, dont le tracé de Nyquist est une ligne droite passant par l'origine donnant une marge de phase invariante aux variations du gain de l'amplificateur. Clairement, ce système idéal est un intégrateur fractionnaire de fonction de transfert en boucle ouverte $G(s) = K/s^\alpha$, appelée fonction de transfert idéale de Bode, où K désigne un gain et $0 < \alpha < 2$. Compte tenu de ses propriétés, ce système est pris comme un système de référence. La fonction de transfert en boucle fermée avec retour unitaire négatif est :

$$F(p) = \frac{K}{s^\alpha + K}, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (1.58)$$

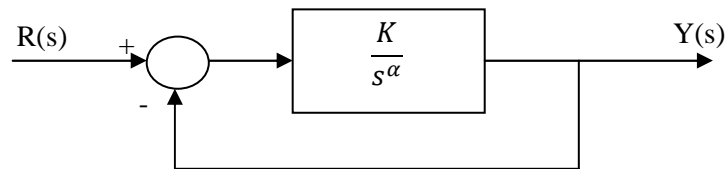


Figure 1.2 : Système de référence

Les caractéristiques générales de la fonction de transfert de Bode sont les suivantes :

- 1) En boucle ouverte :
 - La courbe de gain a une pente constante de $-20\alpha dB/dec$.
 - La fréquence de passage à $0dB$ dépend de K .
 - Le diagramme de phase est une droite horizontale de valeur $-\alpha\pi/2$.
 - Le diagramme de Nyquist est une ligne droite qui part de l'origine avec un argument de $-\alpha\pi/2$.

2) En boucle fermée :

- La marge de gain est infinie.
- La marge de phase est constante avec la valeur $\varphi_m = \pi(1 - \alpha/2)$.
- La réponse indicielle est de la forme

$$y(t) = Kt^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-Kt^\alpha)$$

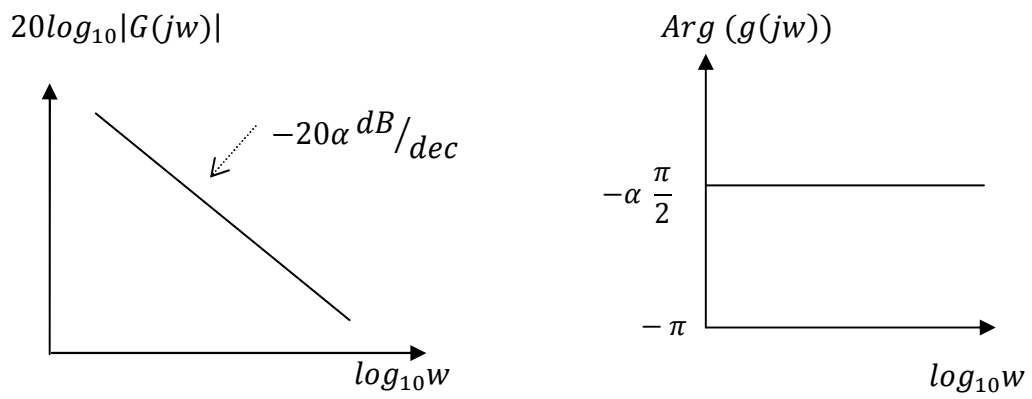


Figure1.3 : Tracé de la fonction idéale de Bode

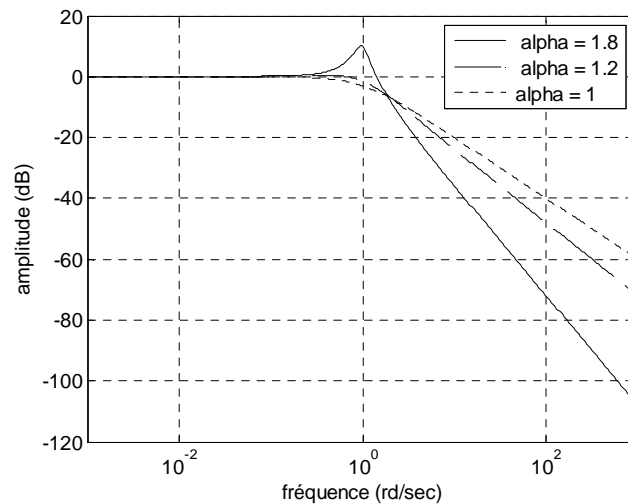


Figure1.4 : Tracé de Bode (K=1) de la fonction $F(jw)$ pour différentes valeurs de α

1.8.2. Le contrôleur CRONE

Il a été proposé par Oustaloup au début des années 90[56]. Oustaloup a étudié les algorithmes d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes dynamiques et a montré la supériorité des performances de la commande CRONE sur le PID. L'idée développée pour la synthèse du contrôleur CRONE dans le domaine fréquentiel, vient sans doute des caractéristiques de robustesse que possède la fonction de transfert idéale de Bode, prise comme modèle de référence. L'objectif est alors d'obtenir en boucle ouverte une marge de phase constante autour de la fréquence de transition (fréquence au gain unité) et par conséquent un dépassement constant des réponses temporelles aux variations de gain du système. Ce correcteur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. Trois stratégies bien distinctes assurant d'excellentes performances de robustesse ont fait l'objet de développements théoriques et technologiques importants. Chacune d'elles définit une génération de la commande CRONE, 1^{ère}, 2^{ème} et 3^{ème} génération [56], [57].

1.8.3 Contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

Considérons le système de commande à retour unitaire suivant :

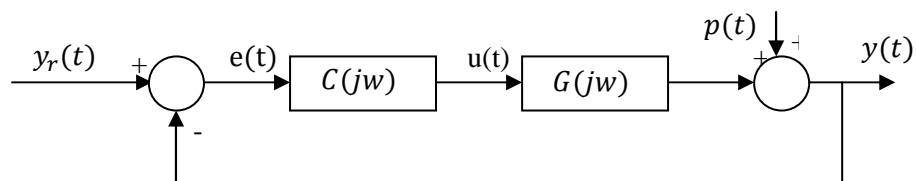


Figure 1.5 : Système de commande à retour unitaire

Le régulateur standard le plus utilisé dans l'industrie est le régulateur PID (proportionnel intégral dérivé). La structure classique du correcteur PID avec actions P, I, et D sur l'erreur e , est décrite par la figure 1.5. La commande $u(t)$, dans sa forme classique est donnée par

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (1.59)$$

Elle est la somme de trois termes dont les paramètres sont le gain proportionnel K_p , le temps intégral T_i , et le temps dérivatif T_d . Ces paramètres influencent la réponse du système de la manière suivante :

Lorsque K_p augmente, le temps de montée est plus court mais il y a un dépassement important. Le temps de réponse varie peu et l'erreur statique est améliorée. L'augmentation du terme intégral ($1/T_i$) a pour conséquence de réduire le temps de montée mais d'avoir un dépassement important et un temps de réponse assez lent. Par contre l'erreur statique est nulle. Donc plus ce paramètre est élevé, plus la réponse du système est ralentie. L'action intégrale rend le système moins stable. Lorsque le terme T_d augmente, le dépassement diminue et le temps de réponse est meilleur. L'action dérivée permet donc d'atténuer les oscillations et rend le système plus stable.

Notons que dans le domaine fréquentiel, ces effets se traduisent par une courbe d'amplitude de pente nulle ($0dB$) et une phase nulle pour le terme proportionnel, une pente de $-20dB/déc$ et une phase de $-\pi/2$ pour le terme intégral et une pente de $+20dB/déc$ et une phase de $+\pi/2$ pour le terme dérivé. La stabilité du système dépend du réglage de ces trois paramètres. Au-delà d'un seuil trop élevé de réglage, ceci a pour effet d'engendrer une oscillation du système de plus en plus importante menant à l'instabilité. Pour avoir un bon système, il faut un bon compromis entre la rapidité, la stabilité et l'erreur statique. Pour l'analyse des systèmes avec un correcteur PID, il existe plusieurs méthodes de réglage dans la littérature. On peut citer la méthode de Ziegler-Nichols, la méthode d'identification par modèle de Broïda, la méthode par approximations successives, etc.

Le contrôleur PID, de part sa simplicité, est très utilisé dans le monde industriel, néanmoins, ses performances deviennent insuffisantes en raison par exemple de la présence d'un retard non négligeable dans le modèle du procédé ou lorsque les paramètres du procédé varient. Dans ce cas, on fait appel à d'autres algorithmes de réglage tels que, le réglage par retour d'état, le réglage par modèle interne, le réglage

par régime glissant, etc. Mais récemment, Podlubny, pour améliorer le comportement du correcteur PID, a proposé le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire, comportant un intégrateur d'ordre λ et un différentiateur d'ordre μ , où λ et μ appartiennent à l'ensemble des nombres réels.

L'équation de sortie du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire dans le domaine temps est donnée sous la forme

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} D^{-\lambda}(e(t)) + T_d D^\mu(e(t)) \right] \quad (1.60)$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (1.60) avec les conditions initiales nulles, la fonction de transfert de ce correcteur peut être exprimée par

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (1.61)$$

où les gains d'intégration K_i et de dérivation K_d sont liés aux paramètres de la forme classique par les relations suivantes :

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (1.62)$$

$$K_d = K_p T_d \quad (1.63)$$

Si l'élément différentiel n'est pas considéré, le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ est transformé en contrôleur PI^λ dont la fonction de transfert est

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} \quad (1.64)$$

En choisissant $\lambda = 1$ et $\mu = 1$ dans l'équation (1.60), on obtient le correcteur PID classique. $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ donnent respectivement les correcteurs PI et PD classiques, et $\lambda = 0$ et $\mu = 0$ donnent un gain. Tous ces types de correcteurs PID classiques sont des cas particuliers du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire donné par

l'équation (1.60). Ainsi, comme le montre la figure 1.6, le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ généralise le correcteur PID classique.

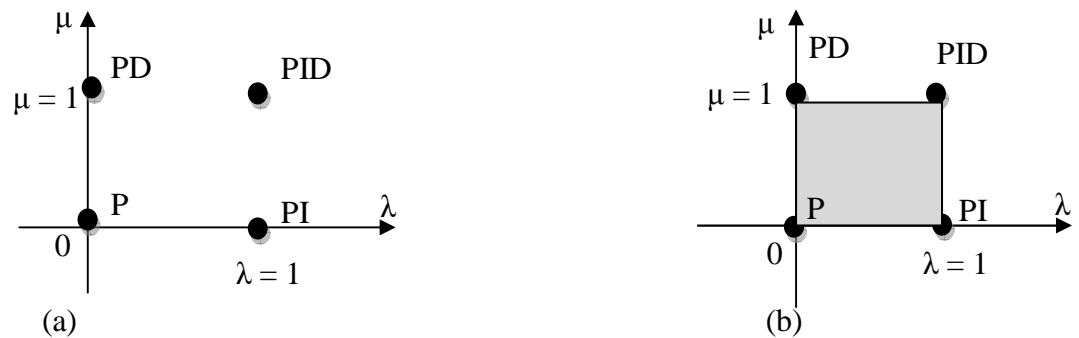


Figure 1.6 : $PI^\lambda D^\mu$ vs PID, (a): ordre entier, (b): ordre fractionnaire

En plus de K_p , K_i et K_d , le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ possède deux autres paramètres de réglage λ et μ . Ceci le rend plus flexible et donne une opportunité pour mieux ajuster les propriétés dynamiques des systèmes de commande d'ordre fractionnaire. S'inspirant de l'idée du correcteur $PI^\lambda D^\mu$, plusieurs travaux sur les techniques de réglage sont actuellement publiés. Pour plus de détail, se référer à [53].

1.9 Implémentation des correcteurs d'ordre non entier

Les fonctions de transfert telles que (1.28) rendent difficile l'implémentation des contrôleurs d'ordre fractionnaire. La mise en œuvre de ces contrôleurs nécessite l'utilisation de fonctions de transfert d'ordre entier à dimension finie. Pour le terme simple s^α avec α un nombre réel, il y a plusieurs schémas d'approximations qui sont proposés. En général, nous avons des réalisations analogiques et des réalisations numériques [85]. Ce paragraphe décrit différentes méthodes d'approximations ou mises en œuvre des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire. Elles se distinguent selon que le modèle entier obtenu est continu ou discret. Dans le domaine 's', on parle d'approximations continues ou approximations dans le domaine des fréquences, alors

que dans le domaine 'z', on parle d'approximations discrètes ou d'approximations dans le domaine temps. La plupart des méthodes de simulation sont basées sur l'approximation dans le domaine fréquentiel ou temporel de l'opérateur de dérivation s^α .

La problématique est la suivante : Comment évaluer la sortie d'un système d'ordre non entier connaissant son entrée ? Pour résoudre ce problème, trois solutions sont alors proposées :

- Méthode analytique, elle est basée sur l'expression analytique de la sortie du système
- Méthodes basées sur les modèles discrets, c'est l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel discret.
- Méthodes basées sur les modèles continus, c'est l'approximation du modèle d'ordre fractionnel par un modèle rationnel continu.

1.9.1 Méthode basée sur l'expression analytique de la sortie

A la section 1.5.2, nous avons donné la forme modale de la fonction de transfert d'un système d'ordre fractionnaire, soit $G(s)$.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{k=0}^n \frac{r_k}{s^\alpha - \lambda_k}, 0 < \alpha < 1 \quad (1.65)$$

L'utilisation de cette forme nous conduit à calculer la sortie du système.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{r_k}{s^\alpha - \lambda_k} \right\} * u(t) = g(t) * u(t) \quad (1.66)$$

où * dénote le produit de convolution

La réponse indicielle est donnée par l'équation suivante :

$$y(t) = \sum_{k=0}^n r_k t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(\lambda_k t^\alpha) \quad (1.67)$$

1.9.2 Méthodes basées sur l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel discret

Dans ce cas on utilise des fonctions génératrices notées $w(z^{-1})$. La méthode consiste à remplacer l'opérateur de Laplace s du modèle non entier par la fonction $w(z^{-1})$ de la variable z . On obtient ainsi un modèle discret équivalent au modèle non entier continu.

Dans le cas d'une fonction de transfert déduite de l'équation (1.26), on a :

$$G(z) = \frac{b_0(w(z^{-1}))^{\beta_0} + b_1(w(z^{-1}))^{\beta_1} \dots b_m(w(z^{-1}))^{\beta_m}}{a_0(w(z^{-1}))^{\alpha_0} + a_1(w(z^{-1}))^{\alpha_1} + \dots a_n(w(z^{-1}))^{\alpha_n}} \quad (1.68)$$

Quatre fonctions génératrices sont proposées à partir desquelles découlent quatre méthodes

<p><i>Euler(Grünwald)</i>: $(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{1}{T}(1 - z^{-1})\right)^\alpha = \frac{1}{T^\alpha} \left(1 - \alpha z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} z^{-2} \dots\right)$</p>
<p><i>Tustin</i>: $(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^\alpha = \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha (1 - 2\alpha z^{-1} + 2\alpha^2 z^{-2} + \dots)$</p>
<p><i>Simpson</i> :</p> <p>$(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{3}{T} \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})^\alpha}{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}\right)^\alpha = \left(\frac{3}{T}\right)^\alpha (1 - 4\alpha z^{-1} + 2\alpha(4\alpha + 3)z^{-2} + \dots)$</p>
<p><i>Al - Alaoui</i>:</p> <p>$(w(z^{-1}))^\alpha = \frac{8}{7T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}/7}^\alpha = \left(\frac{8}{7T}\right)^\alpha \left(1 - \frac{8}{7}\alpha z^{-1} + \left(-\frac{24}{49}\alpha + \frac{32}{49}\alpha^2\right)z^{-2} + \dots\right)$</p>

Tab 1.1 : Approximation de l'opérateur s^α en temps discret

Remarque 1.5 : Récemment, de nouvelles formules de discrétisation sont apparues et qui sont des interpolations pondérées entre Euler-Tustin, Tustin-Simpson. Par exemple, $\frac{3}{4}$ de l'opérateur d'Euler avec $\frac{1}{4}$ de l'opérateur de Tustin donne l'opérateur Al-Alaoui. Notons que le modèle discret équivalent obtenu est irrationnel, il doit être approximé par un modèle rationnel de dimension finie.

1.9.3 Méthodes basées sur l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel continu

Dans le domaine fréquentiel on cherche à approximer l'opérateur de dérivation non entière s^n par une transmittance dont les pôles et zéros sont liés par des relations de récurrence. L'approximation de s^n par un modèle entier nécessite trois étapes :

- a) Approximation de l'opérateur non entier sur une bande de fréquence $[w_A \ w_B]$ avec un modèle non entier $s^n_{[w_A \ w_B]}$
- b) Approximation du modèle non entier obtenu par un modèle entier.
- c) Calcul du modèle entier global et / ou la sortie du modèle.

Les méthodes généralement utilisées sont celles de Charef [12] et d'Oustaloup [57]

1.10 Conclusion

Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans la première partie, nous avons introduit certaines fonctions utiles telles que les fonctions de Gamma Euler, Mittag-Leffler et les différentes définitions et propriétés de l'opérateur fractionnaire. Ensuite, nous avons rappelé les différentes représentations des systèmes fractionnaires : équation différentielle, fonction de transfert et représentation d'état (ou pseudo-représentation d'état, dans le cas des systèmes fractionnaires) et pour finir cette partie, les conditions de commandabilité, d'observabilité et de stabilité sont énoncées. Enfin, pour terminer ce chapitre, nous avons présenté un état de l'art sur la commande d'ordre fractionnaire en commençant par le correcteur CRONE jusqu'au correcteur à structure variable.

Chapitre 2

Sur la Théorie de la Commande par Modes Glissants

2.1 Introduction

La commande par modes glissants est une commande à structure variable VSS (Variable Structure System dans la littérature anglo-saxonne). Les premiers travaux sur ce type de commande ont été menés dans l'ancienne U.R.S.S à partir des années soixante. Elle est basée essentiellement sur la résolution des équations différentielles à second membre discontinu, initiée par le mathématicien soviétique A.G. Filippov [23]. Le véritable essor de l'utilisation de cette technique date de la parution des livres d'Itkis [32] et d'Utkin [81].

Cette technique de commande a reçu un intérêt sans cesse croissant en raison de sa simplicité d'élaboration et de ses applications dans divers domaines de l'automatique ou de l'électronique de puissance.

Le principe de cette technique de commande est de contraindre le système à atteindre une surface prédéfinie et d'y rester par la suite malgré d'éventuelles perturbations. La surface choisie (représentant un ensemble de relations, statiques, entre les variables d'état) est alors désignée comme étant la surface de glissement ou de commutation. Le comportement dynamique résultant appelé régime glissant, est complètement déterminé par les paramètres de la surface.

Un des avantages de la commande par modes glissants est notamment la robustesse par rapport aux perturbations intervenant de façon colinéaire avec l'entrée (conditions de recouvrement ou matching condition).

Dans la pratique, l'utilisation de cette technique de commande a été longtemps limitée par les oscillations liées aux commutations de la commande : des oscillations à hautes fréquences apparaissent dans un voisinage de la surface, connues sous le nom de réticence ou chattering en anglais. Ce phénomène peut en outre exciter des dynamiques non modélisées conduisant à des situations d'instabilité. Ceci a conduit certains chercheurs à proposer des solutions en vue de supprimer ou du moins réduire ce phénomène indésirable [41]. [59].

La commande par modes glissants a été largement appliquée dans le cas des systèmes linéaires et non linéaires et a été étendue et étudiée avec un certain succès sur les systèmes d'ordre entier à retards [66], [87] et récemment, sur les systèmes fractionnaires (d'ordre non entier) avec et sans retards [22], [75].

Dans ce chapitre, nous présenterons les concepts classiques utilisés en régime glissant d'ordre un, nécessaires à la compréhension de cette technique de commande. Nous nous sommes intéressés à la classe des systèmes non-linéaires affine en l'entrée. Mais les résultats obtenus peuvent être appliqués à d'autres classes de systèmes et en particulier aux systèmes linéaires que nous avons considérés dans notre mémoire.

2.2 Généralités

Dans cette partie de généralités, nous décrivons les différentes structures de base d'un système à structure variable et le principe de la commande par modes glissants.

2.2.1 Structures de base

Dans les systèmes à structure variable utilisant la commande par mode de glissement, on peut distinguer trois configurations de base pour la synthèse des différentes commandes [7], [84]. La première correspond à un changement de structure par commutation d'une contre réaction d'état variable, La seconde change la structure au niveau de l'organe de commande, et enfin, la troisième configuration change aussi la

structure au niveau de l'organe de commande mais avec ajout d'une commande dite « commande équivalente ».

2.2.1.1. Structure par commutation d'une contre réaction d'état.

La configuration de la structure par commutation d'une réaction d'état est représentée à la figure 2.1

Selon la position du commutateur, le vecteur d'état x est mis en contre-réaction d'état soit par $-k_1$ soit par $-k_2$. Ceci se fait à l'aide de la loi de commutation $s(x)$.

$$\begin{cases} u = -k_1^T(x) \text{ si } s(x) > 0 \\ u = -k_2^T(x) \text{ si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Le comportement dynamique du système Σ est déterminé par $s(x) = 0$.

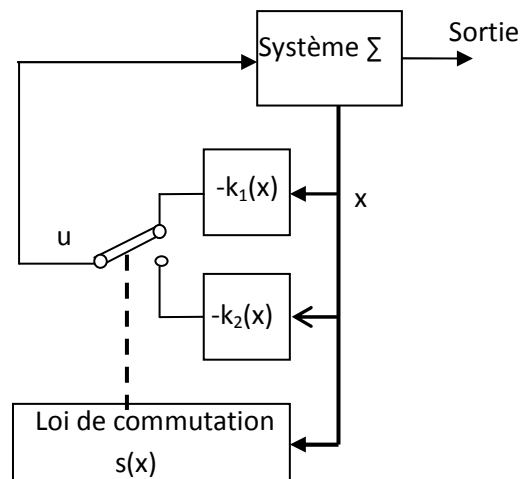


Fig. 2.1 - Changement de structure par commutation d'une contre-réaction d'état

2.2.1.2. Structure par commutation au niveau de l'organe de commande

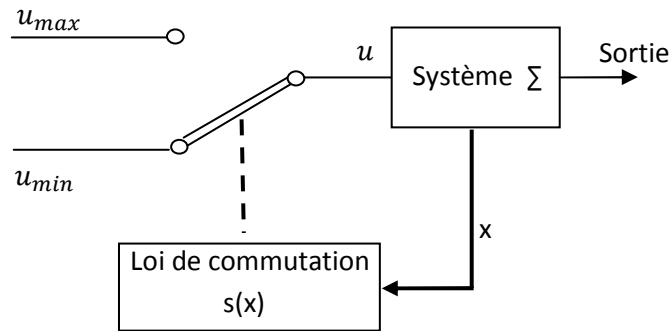


Fig. 2.2 - Changement de structure par commutation au niveau de l'organe de commande

Dans ce cas de configuration, la loi de commutation est donnée par :

$$u = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } s(x) > 0 \\ u_{\min} & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

En mode de glissement (ou régime glissant), la dynamique du système Σ est donnée par $s(x) = 0$.

Cette configuration s'adapte bien pour la commande de convertisseurs électriques dont l'organe de commande est un interrupteur [6].

2.2.1.3. Structure par commutation au niveau de l'organe de commande, avec ajout de la commande équivalente.

Le schéma d'une telle structure est représenté à la figure 2.3. Cette structure de commande est simple à réaliser et a été utilisée dans beaucoup d'applications [7], [29]. L'ajout de la commande équivalente permet de pré-positionner le système dans un état désiré stable et en plus de réduire le phénomène de chattering

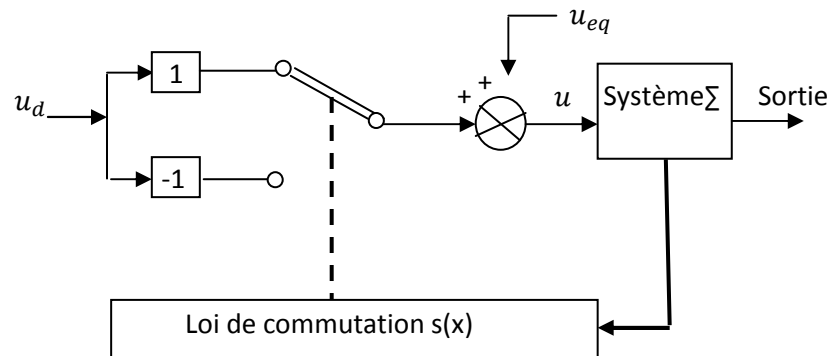


Fig. 2.3 - Changement de structure avec ajout de la commande équivalente

Le terme de commutation u_d assure principalement la convergence des trajectoires du système vers l'état désiré et assure son maintien. La loi de commutation est donnée par :

$$u = \begin{cases} u_{eq} + u_d \text{ si } s(x) > 0 \\ u_{eq} - u_d \text{ si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

C'est cette forme d'écriture de la loi de commande que nous avons retenue pour la suite de notre étude.

2.3 Principe de la commande par modes glissants

Le principe de la commande par modes glissants est de contraindre le système à atteindre une surface donnée appelée surface de glissement en fonction des objectifs de commande, fixant la dynamique en boucle fermée : c'est le mode de convergence, puis par la synthèse d'une commande discontinue qui permet aux trajectoires du système à atteindre et, ensuite, à rester sur cette surface : c'est le mode de glissement.

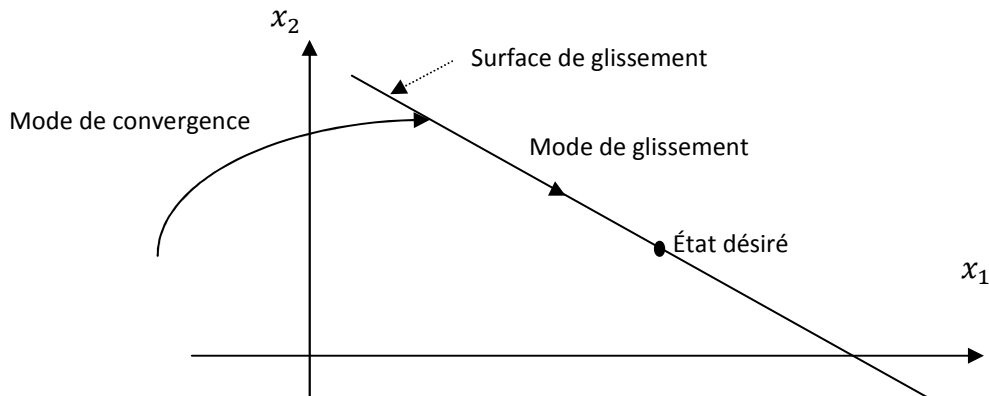


Fig. 2.4 - Différents modes de convergence pour la trajectoire d'état

2.3.1 Définition du régime glissant

Nous considérons une classe de système non-linéaire affine en la commande, c'est-à-dire des systèmes dont l'évolution est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.4)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ appartient à \mathcal{X} , un ouvert R^n est le vecteur d'état. $u : R^m \rightarrow R$ est l'entrée de commande qui est une fonction éventuellement discontinue $f(x)$ et $g(x)$ sont des champs de vecteur suffisamment différentiables, définis sur \mathcal{X} .

Soit s une fonction continue, $s : \mathcal{X} \times R^+ \rightarrow R$. L'ensemble

$$S = \{x \in \mathcal{X} : s(x, t) = 0\} \quad (2.5)$$

définit une sous variété de dimension $(n - 1)$, appelée surface de glissement ou de commutation. La fonction $s(x, t)$ est appelée fonction de glissement ou fonction de commutation. Elle sépare l'espace d'état en deux parties disjointes $s(x, t) > 0$ et $s(x, t) < 0$.

La commande u est une commande à structure variable, qui change la structure du système en utilisant des commandes différentes dans chacune des parties de l'espace d'état du système.

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } s(x, t) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } s(x, t) < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Où u^+ et u^- sont des fonctions continues, avec $u^+ \neq u^-$.

Cette commande u de nature discontinue, va contraindre les trajectoires du système à atteindre la surface de glissement et d'y rester au voisinage de celle-ci malgré la présence de perturbations. En d'autres termes, la commande doit rendre cette surface de glissement localement attractive. Un régime glissant existe alors à chaque fois que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \quad (2.7)$$

Cette condition (2.7) peut être écrite de façon simplifiée :

$$s\dot{s} < 0 \quad (2.8)$$

Les trajectoires du système sur la surface s ne sont pas définies puisque la commande u n'est pas définie pour $s = 0$. Deux méthodes ont été proposées pour la détermination de la trajectoire d'état en régime glissant. La méthode de Fillipov [23] et la méthode d'Utkin [81], appelée méthode de la commande équivalente que nous avons d'ailleurs utilisée dans notre travail à cause de sa simplicité.

2.3.2 Méthode de la commande équivalente

Lorsque le système est en régime glissant, la trajectoire restera sur la surface de commutation. Cela peut être exprimé par

$$s(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{s}(x, t) = 0 \quad (2.9)$$

La condition (2.9) est appelée condition d'invariance de la surface de glissement

Pour la suite de notre travail, nous prenons $s(x, t) = s(x(t)) = s(x)$

$$\dot{s} = 0 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial x} (f(x) + g(x)u_{eq}) = 0$$

u_{eq} , appelé commande équivalente, est associée au système nominal, elle est déterminée de façon unique par les conditions d'invariance (2.9). En supposant que $\frac{\partial s}{\partial x} g(x) \neq 0$, la commande équivalente est donnée par le scalaire :

$$u_{eq} = - \left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(x) \quad (2.10)$$

Physiquement, la commande équivalente représente la valeur moyenne de la commande u , qui maintient l'état du système sur la surface de glissement $s(x) = 0$.

L'équation du régime glissant idéal est obtenue en portant l'expression de u_{eq} dans (2.4) :

$$\dot{x} = f(x) - g(x) \left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(x) \quad (2.11)$$

$\frac{\partial s}{\partial x}$ étant non nul sur \mathcal{X} , ceci implique que l'on peut exprimer m états en fonction des $(n-m)$ autres. Ainsi, en régime glissant, les dynamiques du système évoluent sur un espace d'état réduit de dimension $(n-m)$. On aura donc m valeurs propres nulles et $(n-m)$ valeurs propres non nulles.

2.3.3 Choix de la Surface de glissement

La surface de glissement peut être linéaire ou non linéaire. Elle est construite de telle sorte que le système ait toujours une dynamique désirée et, est généralement choisie avec un degré relatif égal à un (i.e. la dérivée de la surface $s(x)$ par rapport au temps, fait apparaître explicitement la commande u). Pour les systèmes d'ordre entier, plusieurs formes d'écriture de la surface ont été proposées [77]. Pour les systèmes à

dérivée fractionnaire (systèmes d'ordre non entier), nous avons proposé dans notre étude, une forme d'écriture originale de la surface de commutation [74], [75].

2.3.4 Synthèse de la loi de commande

Nous avons mentionné (section 2.2.1.3.) que la loi de commande qui sera utilisée dans notre mémoire est composée du terme continu u_{eq} et d'un terme discontinu u_d .

$$u = u_{eq} + u_d \quad (2.12)$$

Pour certains auteurs, cette commande est la somme d'un terme de basse fréquence u_{eq} et d'un terme de haute fréquence u_d . Le terme u_{eq} a été déjà défini par l'équation (2.10), quant au terme u_d , différentes formes sont proposées dans la littérature [24],[29] Toutes les formes proposées donnent un terme discontinu. La forme simple qui est généralement utilisée est : $u_d = -K \text{sign}(s)$ où K est une constante positive et sign est la fonction signe classique,

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} +1 & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Notons que dans le chapitre quatre de notre mémoire, nous allons utiliser la forme suivante : $u_d = -Gs - K\text{sign}(s)$

Le terme u_d force les dynamiques à converger vers la surface et assure l'insensibilité du système vis-à-vis des incertitudes et des perturbations. Par exemple, Pour des paramètres mal connus, le système ne glisse pas parfaitement sur la surface, il quitte celle-ci, mais le terme discontinu l'y ramène car la surface est attractive. C'est pour cette raison que la commande par modes glissants est dite robuste.

Concernant le phénomène de réticence, qui se caractérise par de fortes oscillations autour de la surface, il constitue un inconvénient non négligeable pour la commande par modes glissants d'ordre un. Pour réduire ce phénomène, différentes solutions sont proposées dans la littérature. Pour notre travail, nous avons choisi celle de la commande équivalente.

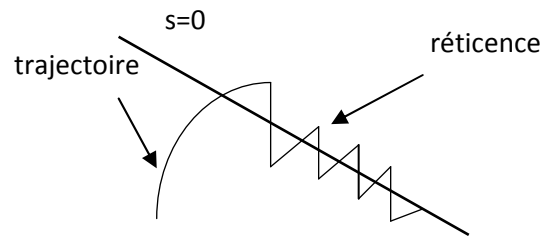


Fig. 2.5 - Phénomène de rétissance

2.4 Robustesse des modes glissants [82].

Considérons le système perturbé suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + p \quad (2.14)$$

Où p représente l'effet des incertitudes paramétriques sur le terme $f(x)$ ou des perturbations externes indépendantes de l'état.

Théorème 2.1 : Le régime glissant sur s , du système perturbé (2.14), est invariant vis-à-vis de p , si et seulement si le vecteur de perturbation p est engendré par $g(x)$. Cette condition est appelée condition de recouvrement ou « matching condition »

Notons que le système est insensible à de telles perturbations seulement en régime glissant,

2.5 Exemple illustratif

Afin d'illustrer les développements théoriques énoncés précédemment, on prend comme exemple un convertisseur électrique continu-alternatif avec charge résistive. Le choix de la commande par modes glissants est entièrement justifié par la présence dans le circuit électrique des organes de commande ayant un comportement discontinu. Le convertisseur est représenté à la figure 2.6. Il est utilisé pour suivre une tension sinusoïdale. La tension continue E est transformée en tension alternative à l'aide du

signal de commande déterminant le régime de fonctionnement des commutateurs $I1, I2, I3$ et $I4$.

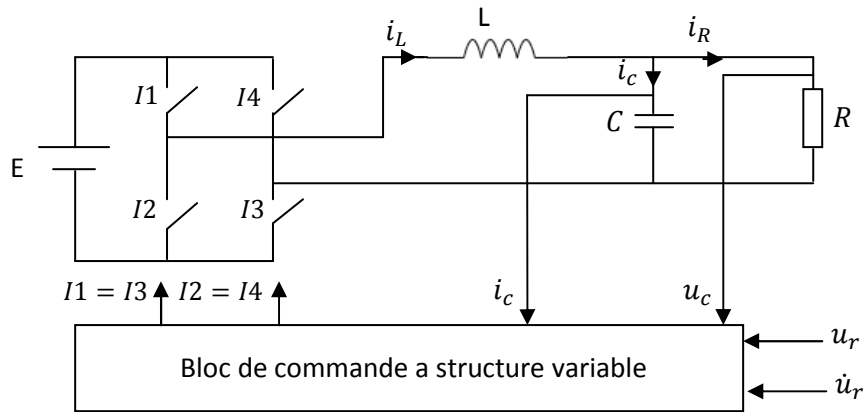


Fig. 2.6 – Schéma du convertisseur

La référence sinusoïdale est obtenue à partir d'un système analogique en boucle fermée.

2.5.1 Modèle mathématique

Le convertisseur présente deux modes de fonctionnement de topologies différentes :

- ($I1 I3$) fermés et ($I2 I4$) ouverts

$$E = L \frac{di_L}{dt} + u_c \quad (2.15)$$

$$i_L = i_c + i_R = C \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{R} \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow E = LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du_c}{dt} + u_c \quad (2.17)$$

- ($I2 I4$) fermés et ($I1 I3$) ouverts

$$-E = LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du_c}{dt} + u_c \quad (2.18)$$

L'équation entrée sortie du système est alors représentée par l'équation différentielle suivante :

$$u = LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du_c}{dt} + u_c \quad (2.19)$$

La commande u représentant l'état ouvert ou fermé des interrupteurs se manifeste par un changement brusque de la topologie du circuit. La commande u prend une des deux valeurs suivantes, $u \in (+E, -E)$. La représentation du système sous la forme $\dot{x} = Ax + Bu$, nous conduit au modèle dynamique (2.21).

Nous choisissons comme variables d'état, la tension aux bornes du condensateur u_c (tension de sortie) et le courant qui le traverse i_c .

Soit :

$$\begin{cases} x_1 = u_c \\ x_2 = \frac{i_c}{C} = \frac{du_c}{dt} \end{cases} \quad (2.20)$$

D'où la représentation d'état du système sous la forme $\dot{x} = Ax + Bu$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.21)$$

2.5.2 Synthèse de la commande

Comme on l'a déjà mentionné à la section 2.2.1.3, la commande de type $u = u_{eq} + u_d$ est une des solutions pour réduire le chattering. La surface de commutation est choisie comme étant une combinaison des états du système

$$s(x) = Sx \quad (2.22)$$

où les coefficients S_i sont choisis de façon à avoir un système stable

En annulant la dérivée de $s(x)$, on obtient l'expression de la commande équivalente

$$u_{eq} = -(SB)^{-1} SAx \quad (2.23)$$

La commande discontinue u_d est choisie sous sa forme la plus simple :

$$u_d = -K \operatorname{sign}(s) \quad (2.24)$$

où K est un coefficient positif choisi d'une façon appropriée par rapport à l'amplitude d'une éventuelle perturbation.

2.5.3 Résultats de simulation

Les résultats de simulation du convertisseur sont obtenus pour les valeurs suivantes :

$E = 355 \text{ V}$, $C = 220 \mu\text{F}$, $L = 0.806 \text{ mH}$, $R = 12 \Omega$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2.66 \text{ msec}$, $K = 10$
et $u_r = 200\sqrt{2} \cos(100\pi t)$.

Les figures 2.7 et 2.8 montrent respectivement la réponse du système à la tension de référence sinusoïdale et l'erreur de sortie $u_c - u_r$.

Les courbes de la commande et de la commande équivalente sont représentées respectivement par les figures 2.9 et 2.10

Pour vérifier la robustesse de la loi de commande, nous avons fait varier la résistance de charge de 50% de sa valeur nominale (de 12Ω à 6Ω et de 12Ω à 18Ω) et la tension de sortie reste insensible à cette variation, figure 2.11. Notons qu'un régime glissant s'établit après environ 15msec

2.6 Conclusion

Ce chapitre est un rappel sur la théorie des systèmes à structure variable et les modes glissants associés. Nous avons effectué une synthèse des principaux résultats des modes glissants d'ordre un. C'est ainsi que différentes structures sont rappelées pour comprendre le fonctionnement du régulateur à structure variable et que la notion de commande équivalente a été étudiée pour montrer son importance dans la synthèse de la

loi de commande globale qui permet au système d'atteindre la surface de commutation et d'y glisser jusqu'au point d'équilibre. Pour clôturer ce chapitre, nous avons illustré par un exemple, les qualités de la loi de commande par modes glissants.

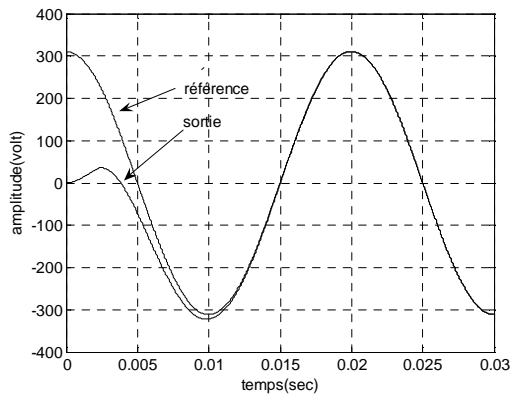


Fig.2.7 - Référence et sortie du système

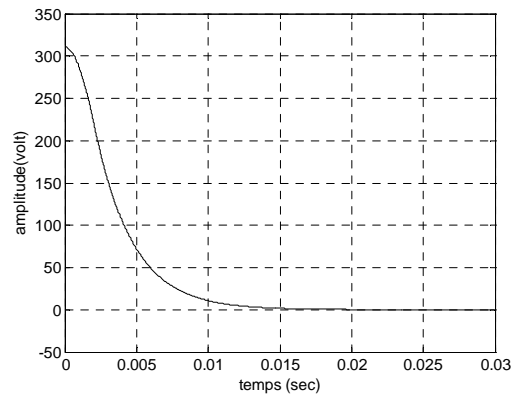


Fig.2.8 – Ecart entre sortie et référence

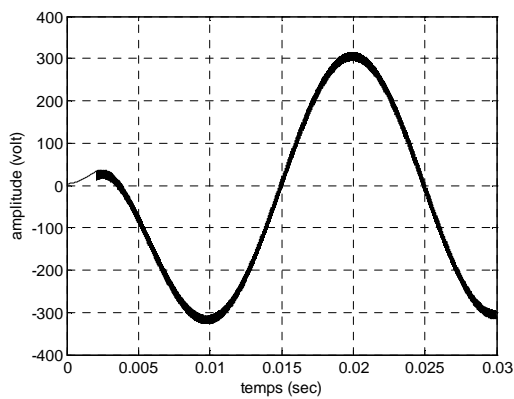


Fig.2.9 - Courbe de la commande

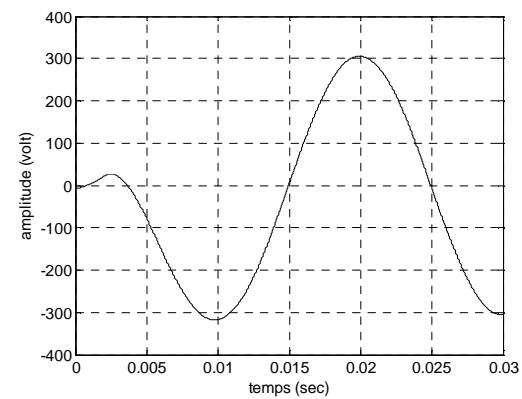


Fig.2.10 - Commande équivalente

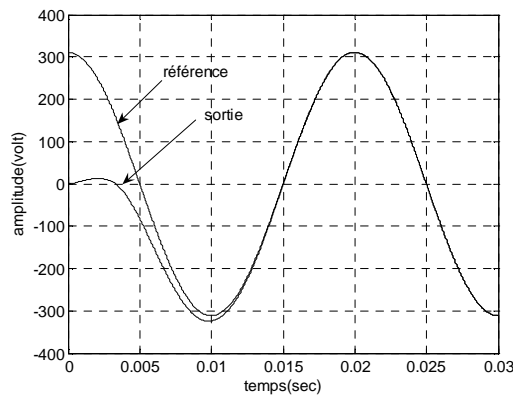


Fig.2.11 - Référence et sortie du système pour $R=6 \Omega$ et 18Ω

Chapitre 3

Les Systèmes à Retards

3.1 Introduction

Le principe de causalité selon lequel l'évolution de l'état d'un système n'est déterminée que par l'état présent, donc, indépendante de son état passé, n'est qu'une approximation de la réalité. Le comportement de ces systèmes est décrit généralement par des équations différentielles ordinaires (EDO). Or, toute dynamique de l'état d'un système dépend au moins d'une partie de l'histoire de ce système. Dans ce cas-là, on parle de systèmes à retards. De nombreux travaux sont alors portés sur la modélisation de systèmes dynamiques de la forme d'équations différentielles incluant le retard. Parmi plusieurs formalismes qui sont alors définis, le plus utilisé actuellement est celui des équations différentielles fonctionnelles. Le retard apparaît souvent dans de nombreux systèmes physiques, tels que, les systèmes chimiques, économiques, biologiques, de télé-opération, les réseaux de communication, etc.

Aussi, dans les systèmes possédant un dispositif de contrôle, apparaissent des retards dans leur chaîne d'action et/ou de mesure. Ces retards apparaissent par exemple, par l'intermédiaire des temps de réaction des actionneurs ou des capteurs, des temps de transmission des informations ou des temps de calcul [73].

La présence d'un retard dans une boucle de régulation est souvent la source de détérioration des performances ou de l'instabilité de la boucle de régulation. Cependant, malgré que dans certains cas, le retard peut être bénéfique pour le fonctionnement du système, les chercheurs ont axé leurs travaux sur les effets indésirables des retards.

Dans la littérature abondante sur les systèmes à retards, on peut relever généralement deux types de retards : les retards constants et les retards variables. Le retard constant est défini par un nombre réel positif $h \in R^+$, alors que le retard variable est défini par une fonction continue du temps $h(t) \geq 0$. Ces cas de retards constants et variable ont été étudiés par de nombreux auteurs[72],[73],[89].

En automatique, l'étude des systèmes à retards a fait l'objet de nombreux travaux en vue de développer des méthodes d'analyse et de synthèse de la commande [52]. On présente dans ce chapitre les principaux résultats relatifs à la modélisation, à l'analyse et à la commande des systèmes à retards.

3.2. Définition

Plus généralement, les systèmes à retards (appelés aussi systèmes héréditaires, ou systèmes de dimension infinie) sont des systèmes dont la dynamique dépend non seulement de l'état présent, mais aussi de l'état passé.

Cette définition peut être traduite sous la forme de la représentation suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - h)), \quad (3.1)$$

où f est une fonction qui dépend de la valeur de l'état x à l'instant t et $t - h$, h désigne le retard.

Supposons que le retard est nul, $h = 0$, et soit l'équation $\dot{x}(t) = -x(t)$. Dans ce cas, l'état x à tout instant t est déterminé par la seule connaissance de sa valeur à l'instant t_0 . Etant donné que l'on a besoin d'une seule condition initiale, le système est de dimension 1.

Si l'on rajoute maintenant un retard h à l'équation, on aura : $\dot{x}(t) = -x(t - h)$. La dérivée \dot{x} en $t = t_0$ est égale à la valeur de x en $t = t_0 - h$. La dérivée de \dot{x} en $t = 0$ est égale à la valeur de x en $t = -h$.

Donc, la résolution de cette équation nécessite la connaissance de la valeur de x à chaque instant sur l'intervalle $[t_0 - h, t_0]$ de longueur égale au retard étudié, c'est-à-dire h . On a besoin maintenant d'un nombre infini de conditions initiales : la dimension du système est alors infinie. Dans ce cas, l'état à l'instant t est décrit par une fonction, notée x_t , définie par $x_t : [-h, 0] \rightarrow R^n$, avec $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ pour tout θ variant dans $[-h, 0]$. Comme exemple de système à retards, on peut citer les systèmes commandés en réseau (en anglais : Networked Control System) qui font actuellement l'objet d'une recherche intense sur la stabilité sous l'effet des délais (retards) de communication. Ces retards peuvent varier en fonction du type de réseau utilisé et constituent une source de dégradation des performances.

3.3 Modélisation

Comme nous l'avons expliqué dans ce qui précède, les systèmes à retards font partie de la famille des systèmes de dimension infinie. L'état du système à l'instant t est défini par une fonction notée x_t dans l'intervalle $[-h, 0]$. Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à la modélisation par les équations différentielles fonctionnelles. On distingue deux types de systèmes à retards :

- Systèmes de type retardé, modélisés sous forme d'équations différentielles fonctionnelles retardées
- Systèmes de type neutre, modélisés sous forme d'équations différentielles fonctionnelles neutres.

3.3.1 Systèmes de type retardé : Ils sont décrits par un modèle de la forme : [27]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, u_t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0} = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-h, 0] \\ u_{t_0} = \vartheta(\theta) \text{ pour } \theta \in [-h, 0] \end{cases} \quad (3.2)$$

où h représente le retard positif. φ et $\vartheta : [t_0 - h, t_0] \rightarrow R^n$, représentent les conditions initiales et sont des fonctions supposées continues par morceau. x_t et u_t appartiennent à $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-h, 0], R^n)$ ensemble des fonctions continues de $[-h, 0]$ dans R^n . Ces fonctions désignent respectivement l'état et l'entrée de commande du système. Elles sont définies par :

$$x_t : \begin{cases} [-h, 0] \rightarrow R^n, \theta \in [-h, 0] \\ x_t(\theta) = x(t + \theta) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$u_t : \begin{cases} [-h, 0] \rightarrow R^n, \theta \in [-h, 0] \\ u_t(\theta) = u(t + \theta) \end{cases} \quad (3.4)$$

3.3.2 Systèmes de type neutre

Ils sont régis par les équations de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, \dot{x}_t, u_t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0} = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-h, 0] \\ u_{t_0} = \vartheta(\theta) \text{ pour } \theta \in [-h, 0] \end{cases} \quad (3.5)$$

Par rapport aux équations différentielles fonctionnelles retardées, ces modèles sont fonction de la dérivée de l'état x_t et, par conséquent des dérivées retardées de x_t . Pour plus de détails, voir [73]

Le retard intervient sous différentes formes. L'exemple suivant nous montre un modèle de systèmes à retards, défini par les équations différentielles fonctionnelles à états retardés discrets (ponctuels) et distribués.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + A_d(t)x(t - h_1) + B(t)u(t) + B_d(t)u(t - h_2) \\ &\quad + \int_{t-h}^t (M(\theta)x(\theta) + N(\theta)u(\theta))d\theta \\ y(t) &= C(t)x(t) + C_d(t)x(t - h_1) + D(t)u(t) + D_d(t)u(t - h_2) \end{aligned}$$

A partir de ces équations, nous pouvons en tirer différentes représentations de systèmes linéaires à retards, utilisées souvent par des chercheurs du domaine.

- Systèmes linéaires retardés avec un retard discret sur l'état

La représentation d'état de cette classe est donnée par l'équation suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.6 a)$$

avec la condition initiale :

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-h, 0] \quad (3.6 b)$$

où $x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état, $y(t) \in R^p$ est la sortie du système, $u(t) \in R^m$ est l'entrée de commande, $h > 0$ est le retard (constant), A, A_d, B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées

- Systèmes linéaires retardés avec un retard discret sur l'entrée

Le modèle est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_d u(t-h) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.7 a)$$

avec la condition initiale

$$u(t_0 + \theta) = \vartheta(\theta) \text{ pour } \theta \in [-h, 0] \quad (3.7 b)$$

- Systèmes linéaires à état retardé et à entrée retardée

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h_1) + Bu(t) + B_d u(t-h_2) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.8 a)$$

Avec la condition initiale

$$\begin{cases} x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-h_1, 0] \\ u(t_0 + \theta) = \vartheta(\theta) \text{ pour } \theta \in [-h_2, 0] \end{cases} \quad (3.8 b)$$

Signalons que dans notre mémoire, notre travail concerne surtout les systèmes à entrée retardée et à retard constant.

3.4 Choix de la norme

Une norme sert à définir une distance. Le choix d'une norme est important pour pouvoir comparer deux fonctions. Dans ce qui précède, l'état du système était un élément de l'ensemble \mathcal{C} . Dans cet espace, la norme d'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}$ s'écrit :

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\| \quad (3.9)$$

3.5 Stabilité des systèmes à retards

On peut définir la stabilité comme étant la capacité d'un système à résister à toute petite influence inconnue. C'est une propriété importante pour les systèmes avec ou sans retards. L'analyse de la stabilité des équations différentielles retardées est possible en utilisant des généralisations de la théorie de la stabilité de Lyapunov. Dans cette section, nous nous intéressons particulièrement à la stabilité interne au sens de Lyapunov.

Stabilité au sens de Lyapunov

Intuitivement, la stabilité est la capacité d'un système à se maintenir autour d'un point de fonctionnement. L'étude de la stabilité au sens de Lyapunov consiste en l'étude des trajectoires du système quand l'état initial est "près" d'un état d'équilibre. Les trajectoires de son état sont dites stables si elles restent dans un certain voisinage appelé domaine de stabilité (cf Figure 3.1). La stabilité asymptotique indique que les trajectoires rejoignent exactement le point d'équilibre après un temps éventuellement infini. Cette propriété fait que cette notion de stabilité est très utilisée en pratique.

Considérons le modèle général suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t), \quad t \geq t_0 \\ x_{t_0}(\theta) &= \varphi(\theta) \end{aligned} \quad (3.10)$$

où $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ et $\varphi \in \mathcal{C}([-h, 0], R)$ est la condition initiale fonctionnelle. Nous supposons également que $x(t) = 0$ est la solution triviale de (3.10). f est une fonction continue de $R \times \mathcal{C} \rightarrow R^n$, localement lipschitzienne en son second argument et telle que $f(t, 0) \equiv 0$, nous introduisons les définitions suivantes.

Définition 3.1 : L'origine du système (3.10) est dite :

- Stable si, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tel que :

$$\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} < \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, \varphi_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

- Asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe $b_0(t_0) > 0$ tel que :

$$\|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} < b_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, \varphi_0) = 0,$$

où $x(t, t_0, \varphi_0)$ est la trajectoire du système

D'autres définitions peuvent être ajoutées afin de préciser le type de stabilité (uniformité, globalité). Dans notre travail, nous nous limiterons uniquement à la stabilité asymptotique.

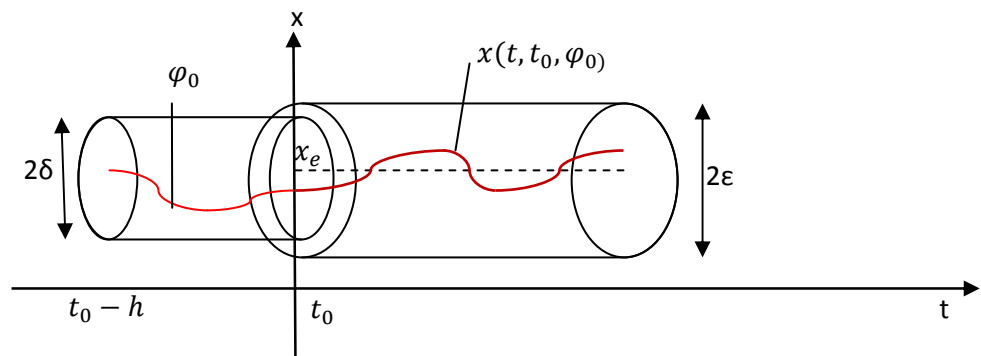


Fig. 3.1 : Stabilité au sens de Lyapunov autour d'un point d'équilibre x_e

Remarque 3.1

Notons aussi que la stabilité des systèmes à retards est analysée via les techniques basées sur deux extensions de la seconde méthode de Lyapunov et qui sont développées par Krasovskii et Razumikhin. Ces deux approches appelées Lyapunov-Krasovskii et Lyapunov-Razumikhin utilisent respectivement les fonctionnelles de Lyapunov et les fonctions classiques de Lyapunov. Dans le cas des systèmes linéaires, l'utilisation des outils mathématiques de Krasovskii et de Razumikhin conduit à résoudre un problème de Riccati ou d'inégalités matricielles linéaires, en anglais Linear Matrix Inequality (LMI), Ceci relève donc d'un problème d'optimisation qui se traduit par les notions de stabilité indépendante du retard et de stabilité dépendante du retard [13] [42] [44] [67]. Définissons ces deux approches :

La stabilité indépendante du retard : Elle permet d'analyser le comportement du système pour n'importe quelle valeur du retard de 0 à l'infini

La stabilité dépendante du retard : Elle permet d'analyser le comportement du système pour tout retard inférieur à une valeur maximale

3.6 Généralités sur la commande des systèmes à retards

Comme nous l'avons mentionné, la présence d'un retard dans une boucle de commande conduit généralement à de mauvaises performances. Le problème de commande des systèmes à retards a reçu une attention considérable au cours de ces dernières années. Il a été traité par un nombre de techniques différentes, parmi lesquelles nous citerons :

- *Les approximations rationnelles du retard* [3]

Ces méthodes d'approximations telles que celles de Padé et de Laguerre, par exemple, présentent un inconvénient important : Pour une meilleure approximation du système réel, la dimension du système approximé doit être élevée, ce qui rend la conception du régulateur difficile.

- *La commande par retour d'état :*
En général, il y a La commande par retour d'état sans mémoire (méthode classique où le retard n'intervient pas) et avec mémoire (présence du retard dans la loi de commande). Cette commande se base particulièrement sur les méthodes de Lyapunov-Krasovski et Lyapunov-Razumikhin débouchant sur les conditions LMI [4] [14] [34].

- *La commande avec observateurs :*
On sait que la construction d'une loi de commande est aisée lorsqu'on dispose d'information sur l'état complet du système. Or, pour des raisons technologiques ou économiques, on ne dispose que d'une partie de l'état. D'où le recours à des observateurs pour reconstruire certains états du système, qui seront utilisés pour la synthèse de la commande. Parmi les observateurs utilisés, On peut citer les observateurs à modes glissants qui sont connus pour leur robustesse.

- *Commande par prédiction :*
 - ✓ Prédicteur de Smith : Le principe de commande par prédiction a été introduit pour la première fois par Smith à la fin des années 50. L'objectif de la méthode de Smith était de compenser l'effet du retard dans la boucle de commande. Il transforme ainsi le schéma classique de commande de la sortie à l'instant présent, par la commande de la sortie à l'instant futur.
 - ✓ Prédicteur d'état : La commande basée sur un prédicteur d'état est utilisée pour stabiliser des systèmes linéaires à entrée retardée. Elle permet un placement de pôles des systèmes en boucle fermée par attribution de spectre fini (en anglais « Finite Spectrum Assignment ») [37]. Une autre méthode basée sur le prédicteur d'état est la méthode de réduction des systèmes [5], [31] Elle permet la transformation d'un système linéaire à commande

retardée en un système différentiel commandé d'une manière ordinaire. Ceci nous offre la possibilité sur le choix de la structure de la loi commande.

- *Commande par modes glissants :*

Plusieurs travaux concernant la commande par modes glissants des systèmes à retards existent dans la littérature. Cette commande est intéressante du fait de sa robustesse vis-à-vis des variations de certains paramètres du système et des perturbations extérieures.

3.7 Commandabilité des systèmes à retards [54]

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux systèmes linéaires à entrée retardée de la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_d u(t - h) \quad (3.11 a)$$

Avec les conditions initiales

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad u(t) = \vartheta(t), \quad t \in [-h, 0] \quad (3.11 b)$$

où $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, représentent respectivement l'état et la commande du système, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $B_d \in R^{n \times m}$, $h > 0$ est le retard, et $\vartheta(t)$ est une fonction continue.

Nous allons donner quelques définitions de commandabilité utiles pour la compréhension du comportement du système

3.8 Définitions

Définition 3.2 : L'état complet du système (3.11) au temps t est l'ensemble $\{x(t), u_t(s)\}$ où $u_t(s) = u(t + s)$, $s \in [-h, 0]$.

Définition 3.3 : Le système (3.11) est dit commandable sur $[t_0, t_1]$ s'il existe une commande u telle que $x(t_1) = 0$.

Définition 3.4: Le système (3.11) est dit absolument commandable sur $[t_0, t_1]$ s'il existe une commande u telle que l'état complet à l'instant t_1 soit nul ($x(t_1) = 0$ et $u_{t_1}(s) = 0$).

Théorème 3.1 : Le système (3.11) est absolument commandable sur $[t_0, t_1]$ si et seulement si le système ordinaire $(A, B + e^{-Ah}B_d)$ est commandable sur $[t_0, t_1 - h]$.

Interprétations :

- La première définition précise que : A part l'état présent $x(t)$, les valeurs passées de la commande doivent être prises en compte.
- Absolument commandable dans la définition 3.4, signifie que n'importe quelle condition initiale x_0 peut être transférée vers $x(t_1) = 0$ par une commande nulle sur l'intervalle $[t_1 - h, t_1]$. D'où, sans une commande additionnelle, l'état du système restera à zéro s'il n'est pas perturbé.
- Le théorème signifie que la commandabilité absolue du système peut être étudiée en utilisant le critère algébrique usuel de commandabilité, i.e. $\text{rang}[\tilde{B}, A\tilde{B}, \dots, A^{n-1}\tilde{B}] = n$ où $\tilde{B} = B + e^{-Ah}B_d$.

Remarque 3.2

D'après les définitions précédentes, la commande doit être connue sur l'horizon $[t - h, t]$ avant l'instant d'initialisation du système (t_0). Alors, pour plus de simplicité, nous considérerons pour la suite de notre étude que ces valeurs précédant l'initialisation sont nulles et que les conditions initiales du système se réduisent ainsi à $x(t_0) = x_0$. Ceci nous permet d'appliquer les notions classiques de commandabilité.

3.9 Synthèse de la commande par modes glissants des systèmes à retards

Nous allons décrire la méthodologie de synthèse de la commande par modes glissants d'ordre un pour les systèmes linéaires à état retardé et à entrée retardée

3.9.1 Système linéaire à état retardé

Considérons le système linéaire à état retardé suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h) + Bu(t) \quad (3.12 a)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h, 0] \end{cases} \quad (3.12 b)$$

où $x(t) \in R^n$ est l'état, $u(t) \in R^m$ est l'entrée de commande, et A, A_d, B sont des matrices constantes de dimensions appropriées, $h > 0$ représente le retard et $\varphi(s)$ une fonction continue. On suppose que la paire (A, B) est complètement commandable, $m < n$.

3.9.1.1 Conception de la surface de commutation

Etant donné que le système (3.12) est linéaire, il est commode de choisir la surface de commutation

$$S(x) = Cx(t) \quad (3.13)$$

où $C \in R^{m \times n}$ est une matrice à déterminer. Les valeurs de C déterminent la dynamique du système en boucle fermée.

3.9.1.2 Calcul de la commande globale

La loi de commande choisie est de la forme suivante :

$$u = u_{eq} + u_d \quad (3.14)$$

où u_{eq} désigne la commande équivalente, elle est donnée par (2.10)

$$u_{eq} = -(CB)^{-1}(CAx(t) + CA_d x(t - h)) \quad (3.15)$$

où la matrice CB est supposée inversible

u_d est une commande discontinue dont la forme la plus simple est $-K \text{sign}(S)$ avec $K > 0$ et $\text{sign}(S)$ la fonction signe classique bien connue (cf. chap2).

La dynamique du système en mode glissant est

$$\dot{x}(t) = A_{eq}x(t) + A_{deq}x(t - h) \quad (3.16)$$

où

$$\begin{cases} A_{eq} = (I - B(CB)^{-1}C)A \\ A_{deq} = (I - B(CB)^{-1}C)A_d \end{cases} \quad (3.17)$$

3.9.2 Système linéaire à entrée retardée

3.9.2.1 Réduction de système

Reprenons le système (3.11) et considérons une transformation linéaire de $x(t)$ et $u(s), s \in [t - h, t]$ à $z(t)$

$$z(t) = x(t) + \int_{t-h}^t e^{At} e^{-A(s+h)} B_d u(s) ds \quad (3.18)$$

Pour un signal de commande arbitraire et borné, le système (3.11) est transformé en un système équivalent sans retard, ou système réduit (3.19)

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \tilde{B}u(t) \quad (3.19)$$

où $\tilde{B} = B + e^{-Ah}B_d$

Cette réduction permet l'utilisation des méthodes de stabilisation bien connues pour les systèmes linéaires sans retards. Alors, la stabilité du système original (3.11) est assurée par la stabilité du système transformé (3.19).

3.9.2.2 Synthèse de la commande

Comme dans le cas précédent, la structure de la loi de commande est

$$u = u_{eq} + u_d$$

Le calcul de cette commande globale passe par le calcul de la commande équivalente qui est solution de l'équation $\dot{S}(z) = C\dot{z}(t) = 0$

$$u_{eq} = -(C\tilde{B})^{-1}CAz(t) \quad (3.20)$$

où la matrice $C\tilde{B}$ est supposée inversible

La commande u_d qui est discontinue, assure la convergence des trajectoires vers la surface de commutation ou de glissement. L'équation d'état en régime glissant (sliding mode en anglais) est déterminée en remplaçant l'expression de la commande équivalente dans l'équation (3.19). On aura :

$$\dot{z}(t) = (A - \tilde{B}(C\tilde{B})^{-1}CA)z(t) = A_{eq}z(t) \quad (3.19)$$

Le vecteur C est calculé pour assurer la stabilité du système (3.19) et donc du système original (3.11). Dans ce cas, les valeurs propres de la matrice A_{eq} doivent avoir leur partie réelle strictement négative, d'où :

$$Re\lambda_i(A_{eq}) < 0, \quad i = 1, \dots, n - m$$

3.10 Conclusion

Dans ce chapitre, quelques notions générales sur les systèmes à retards sont présentées. Après avoir présenté les modèles de systèmes à retards et les types de retards, nous avons rappelé la définition de la stabilité au sens de Lyapunov, mais sans aborder sa seconde méthode qui est très utilisée pour l'étude de la stabilité des systèmes à retards car ceci ne fait pas l'objet de notre travail.

Chapitre 4

Commande par modes glissants d'ordre fractionnaire des systèmes linéaires fractionnaires

4.1 Introduction

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, les systèmes d'ordre entier à retards sont généralement décrits par des équations différentielles fonctionnelles. La présence du retard dans la dynamique d'un système pourrait être la source d'instabilité et de mauvaises performances. Le problème de la stabilisation de tels systèmes a été alors un vrai challenge et a reçu une attention considérable. En dépit des nombreuses méthodes de commande développées pour ces systèmes, la commande par régime glissant est considérablement utilisée en raison des qualités qu'elle offre. Afin de compenser l'effet du retard (pour un système à entrée retardée), une fois le système en mode de glissement, plusieurs auteurs ont traité le problème de commande via un prédicteur d'état. Notre travail consiste justement à développer une technique de commande par modes glissants pour les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire à retards, en se basant sur la théorie des systèmes à retards d'ordre entier. La nouveauté

Chapitre 4. Commande par Modes Glissants d'Ordre Fractionnaire des S.L.F

dans notre mémoire, est l'approche proposée pour résoudre le problème de stabilisation d'un système d'ordre fractionnaire avec retard sur l'état et sur l'entrée, par une surface de commutation fractionnaire et un prédicteur d'état fractionnaire.

Ce chapitre est divisé en deux parties. La première partie est consacrée à la synthèse d'une loi de commande par régime glissant d'ordre fractionnaire pour un système linéaire d'ordre fractionnaire avec et sans retards. Premièrement, nous considérons un système d'ordre non entier sans retard pour lequel nous développons une surface de commutation fractionnaire et une loi de commande qui satisfait la condition d'existence du mode glissant. Les conditions de stabilité du système en boucle fermée seront aussi étudiées. Avec la même surface de commutation, nous allons étudier un système fractionnaire avec état retardé. Enfin, nous terminons cette partie, avec l'étude d'un système à entrée retardée avec compensation du retard en utilisant un prédicteur et quelques exemples pour illustrer ces développements théoriques.

La deuxième partie traitera de la stabilité en temps fini d'un système fractionnaire à état retardé en mode de glissement. En s'inspirant de l'article présenté par [39], nous développons un théorème de stabilité pour un système fractionnaire à état retardé et perturbé.

4.2 Commande par modes glissants d'ordre fractionnaire des systèmes d'ordre fractionnaire sans retards

Considérons le système linéaire d'ordre fractionnaire suivant :

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

Avec les conditions initiales

$$D^{(\alpha-1)}x(t_0) = x_0 \quad (4.2)$$

Chapitre 4. Commande par Modes Glissants d'Ordre Fractionnaire des S.L.F

où $x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ est l'entrée de commande, $A \in R^{n \times n}$ et $B \in R^{m \times m}$ sont deux matrices constantes. $D^\alpha x(t)$ représente la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in R$, définie comme suit :

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (4.3)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma

Le système (4.1) est commensurable et nous supposons que $0 < \alpha < 1$. Nous prenons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 :

1. La matrice B est de rang plein
2. La paire (A, B) est commandable

Nous proposons une surface de commutation fractionnaire de dimension m définie comme suit :

$$\sigma(x) = CI^{1-\alpha}x(t) \quad (4.4)$$

où $I^{1-\alpha}x(t)$ est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $1 - \alpha$, donnée par :

$$I^{1-\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (4.5)$$

$C \in R^{m \times n}$ est la matrice de synthèse choisie pour que le système dynamique ait un comportement désiré en boucle fermée et doit aussi satisfaire l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2. CB est non singulière.

4.2.1 Synthèse de la commande par modes glissants

La structure de commande choisie est la suivante :

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_d(t) \quad (4.6)$$

où $u_{eq}(t)$ est la commande équivalente du système (4.1) et $u_d(t)$ la commande discontinue. La commande équivalente est obtenue en annulant la dérivée par rapport au temps de l'équation (4.4)

$$\dot{\sigma}(x) = C \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} x(t) = CD^\alpha x(t) = CAx(t) + CBu(t) = 0 \quad (4.7)$$

Nous obtenons :

$$u_{eq}(t) = -(CB)^{-1}CAx(t) = -K_{eq}x(t) \quad (4.8)$$

Afin de contraindre le système à atteindre la surface de commutation prédéfinie $\sigma(x)$, la commande discontinue $u_d(t)$ est choisie comme suit[87] :

$$u_d(t) = -(CB)^{-1}\rho\sigma(x) - (CB)^{-1}v \text{sign}(\sigma(x)) \quad (4.9)$$

où $\rho \in R^{m \times m}$ et $v \in R^{m \times m}$ sont des matrices diagonales à éléments positifs, i.e. :

$$\rho = \text{diag}(\rho_1 \rho_2 \dots \rho_m), v = \text{diag}(v_1 v_2 \dots v_m), \rho_i > 0, v_i > 0, i = 1, \dots, m$$

$$\text{sign}(\sigma(x)) = [\text{sign}(\sigma_1(x)) \text{sign}(\sigma_2(x)) \dots \text{sign}(\sigma_m(x))]^T$$

$$\text{sign}\sigma_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_i > 0 \\ 0 & \text{si } \sigma_i = 0 \\ -1 & \text{si } \sigma_i < 0 \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m$$

Finalement, la loi de commande suivante est obtenue

$$u(t) = -K_{eq}x(t) - (CB)^{-1}\rho\sigma(t) - (CB)^{-1}v \text{sign}(\sigma(x)) \quad (4.10)$$

En substituant (4.10) dans (4.7), nous obtenons

$$\dot{\sigma}(x) = -\rho\sigma(x) - v \text{sign}(\sigma(x)) \quad (4.11)$$

Chapitre 4. Commande par Modes Glissants d'Ordre Fractionnaire des S.L.F

Le terme proportionnel à $\sigma(x)$ dans (4.11) est ajouté pour réduire le temps nécessaire pour atteindre la surface de commutation [31]

Les trajectoires en boucle fermée sont alors régies par l'équation (4.12)

$$D^\alpha x(t) = (A - BK_{eq})x(t) - B(CB)^{-1}\rho\sigma(x) - B(CB)^{-1}v \text{sign}(\sigma(x)) \quad (4.12)$$

Après que les trajectoires du système atteignent la surface de commutation, le mouvement de glissement sur la surface de commutation est gouverné par l'équation suivante :

$$D^\alpha x(t) = (A - BK_{eq})x(t) \quad (4.13)$$

La synthèse d'une commande par modes glissants est possible si (i) il existe K_{eq} qui garantit la stabilité de (4.13) et (ii) il existe une loi de commande qui rend la surface de commutation attractive et invariante.

4.2.2 Existence du mode de glissement

L'analyse de l'existence d'un mode de glissement dans le cas actuel où le système est d'ordre fractionnaire ne diffère pas fondamentalement du cas des systèmes d'ordre entier. Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^T(x)\sigma(x) \quad (4.14)$$

alors

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma^T(x)\dot{\sigma}(x)$$

En utilisant l'équation (4.11), nous aurons :

$$\dot{V}(\sigma) \leq -\rho_{min}\|\sigma(x)\|^2 - v_{min}\|\sigma(x)\| \leq 0 \quad (4.15)$$

où $\rho_{min} = \min_{i=1,m} \rho_i$ et $\nu_{min} = \min_{i=1,m} \nu_i$. Ceci garantit l'existence du mode glissant pour toute valeur de $\rho_{min} > 0$ et $\nu_{min} > 0$. Par conséquent, les trajectoires du système (4.1) avec la loi de commande (4.10), rejoignent la surface de commutation.

4.2.3 Analyse de la stabilité

En régime glissant, le système est régi par l'équation (4.13). On sait que la stabilité asymptotique de ce système est satisfaite si les valeurs propres de la matrice $A_{eq} = A - BK_{eq}$ satisfont le critère de stabilité suivant [49], [50]

$$\min_i |\arg \lambda_i(A_{eq})| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.16)$$

Il s'ensuit que la matrice C doit être calculée de telle sorte que la condition (4.16) soit respectée. Notons que qu'un critère de stabilité pour $1 < \alpha < 2$ a été établi dans [2]. Si l'état se trouve dans une couche limite du mode de glissement, la dynamique du mouvement est gouvernée par le système en boucle fermée (4.12) dont La solution de cette équation est donnée par [36].

$$x(t) = e_{\alpha}^{A_{eq}t} x_0 + \int_0^t e_{\alpha}^{A_{eq}(t-s)} B_1 \sigma(s) ds + \int_0^t e_{\alpha}^{A_{eq}(t-s)} B_2 \text{sign}(\sigma(s)) ds \quad (4.17)$$

avec

$$B_1 = -B(CB)^{-1}\rho; \quad B_2 = -B(CB)^{-1}\nu$$

$$e_{\alpha}^{A_{eq}t} = t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_{eq}^k \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha)} \quad (4.18)$$

Cette équation (4.18) est la fonction α -Exponentielle et représente la matrice de transition du système (4.12). Dans la suite, nous utilisons la définition suivante de la stabilité.

Définition 4.1

Le système (4.12) est dit stable si pour toute condition initiale x_0 bornée, la solution $x(t)$ est bornée pour tout $t \geq 0$.

Théorème 4.1

Supposons que la surface de commutation est bornée par un hyper plan, i.e. il existe une constante finie $\eta > 0$ telle que $\|\sigma(t)\| \leq \eta\|x(t)\|$, alors si la matrice C est choisie de sorte que les valeurs propres de la matrice d'état A_{eq} en boucle fermée satisfassent (4.16), le système en boucle fermée (4.12) est stable, i.e. $\|x(t)\| \leq \varepsilon$, pour tout $t \geq 0$ et pour toute condition initiale finie x_0 où ε est une constante positive.

Démonstration 4.1:

De l'expression (4.17), nous avons :

$$\|x(t)\| \leq \|e_{\alpha}^{A_{eq}t}\| \|x_0\| + \eta \int_0^t \|e_{\alpha}^{A_{eq}(t-s)}\| \|B_1\| \|x(s)\| ds + \int_0^t \|e_{\alpha}^{A_{eq}(t-s)}\| \|B_2\| ds \quad (4.19)$$

Utilisant la relation suivante :

$$\int_0^t e_{\alpha}^{A_{eq}(t-s)} B_2 ds = A_{eq}^{-1} (E_{\alpha,1}(A_{eq}t^{\alpha}) - I_n) B_2 \quad (4.20a)$$

où :

$$E_{\alpha,1}(A_{eq}t^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{eq}^k \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \quad (4.20b)$$

Si les valeurs propres de A_{eq} sont telles que l'équation (4.16) soit satisfaite, alors

$\lim_{t \rightarrow \infty} E_{\alpha,1}(A_{eq}t^{\alpha}) = 0$ [49], il s'ensuit :

$$\|e_{\alpha}^{A_{eq}t}\| \|x_0\| \leq k_1 \quad (4.21a)$$

$$\int_0^t \|e_\alpha^{Aeq(t-s)}\| ds \leq k_2$$

où k_1 et k_2 sont des constantes positives. Alors :

$$\|e_\alpha^{Aeq t}\| \|x_0\| + \int_0^t \|e_\alpha^{Aeq(t-s)}\| \|B_2\| ds \leq k \quad (4.21b)$$

k est une constante positive

En substituant (4.21b) dans (4.19), nous obtenons :

$$\|x(t)\| \leq k + \eta \int_0^t \|e_\alpha^{Aeq(t-s)}\| \|B_1\| \|x(s)\| ds \quad (4.22)$$

L'utilisation de l'inégalité bien connue de Gronwall-Bellman [33] dans (4.22), donne

$$\|x(t)\| \leq k \exp \left\{ \eta \int_0^t \|e_\alpha^{Aeq(t-s)} B_1\| ds \right\} \leq k \exp \{ \eta \cdot k_2 \cdot \|B_1\| \} = \varepsilon \quad (4.23)$$

Alors, nous avons $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$, ce qui complète le résultat.

4.3 Commande par modes glissants d'ordre fractionnaire des systèmes fractionnaires à état retardé

Dans [22], les auteurs ont étudié la commande par modes glissants d'un système fractionnaire à état retardé. Ils ont utilisé une surface de commutation de type intégrale pour réduire l'effet du retard. Dans notre cas, la surface de commutation déjà proposée (4.4) peut être encore utilisée.

Considérons un système d'ordre fractionnaire à état retardé décrit par l'équation suivante :

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + Bu(t) \quad (4.24)$$

Chapitre 4. Commande par Modes Glissants d'Ordre Fractionnaire des S.L.F

où $x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ est l'entrée de commande, A, A_d , et B sont des matrices constantes connues de dimensions appropriées et h est le retard du système, supposé positif et constant. Définissons $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ pour $\theta \in [-h, 0]$ et admettons que la condition initiale est donnée par $x_{t_0} = \varphi(\theta)$ pour $\theta \in [-h, 0]$ où φ représente une fonction continue sur le domaine $[-h, 0]$.

Pour le développement de la commande à structure variable, il est nécessaire d'exiger que la paire (A, B) soit contrôlable.

Le problème auquel on s'intéresse est de stabiliser les états du système en deux temps. Premièrement, La détermination d'une surface de commutation de façon à ce que le système en régime glissant ait les propriétés désirées, puis, une loi de commande discontinue est synthétisée de façon à rendre la surface invariante et attractive. Comme il est nécessaire de stabiliser le système (4.24) utilisant la commande discontinue en boucle fermée, les conditions de stabilité du système fractionnaire à état retardé suivant :

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + A_d x(t - h) \quad (4.25)$$

deviennent essentielles pour sa stabilisation en mode de glissement. Cependant, le problème reste ouvert pour plus d'investigations [16].

Il a été montré aussi dans [16] que la région de stabilité d'un système d'ordre entier sans retard $\dot{x}(t) = Ax(t)$, est un sous ensemble de la région de stabilité du système fractionnaire $D^\alpha x(t) = Ax(t)$ qui lui correspond. Par conséquent, on peut dire que tout algorithme de commande de stabilisation d'un système d'ordre entier équivalent décrit par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h) + Bu(t) \quad (4.26)$$

garantit la stabilité du système fractionnaire (4.24) où $0 < \alpha < 1$ [22].

4.3.1 Synthèse de la surface de commutation

La surface de commutation est donnée par (4.4). La matrice C est calculée de telle sorte que les états du système soient stables en mode de glissement. En dérivant l'équation

(4.4) par rapport au temps et en la faisant égale à zéro, on obtient la commande équivalente.

$$\dot{\sigma}(x(t)) = CAx(t) + CA_d x(t-h) + CBu(t) \quad (4.27)$$

$$\dot{\sigma}(x(t)) = 0 \Rightarrow u_{eq}(t) = -(CB)^{-1}CAx(t) - (CB)^{-1}CA_d x(t-h) \quad (4.28)$$

Pour garantir l'existence de la commande équivalente dans (4.28), (CB) doit être non singulière.

En substituant (4.28) dans (4.24), on obtient le système nominal équivalent d'ordre fractionnaire ou équation d'état en mode de glissement de la forme :

$$D^\alpha x(t) = A_{eq}x(t) + A_{deq}x(t-h) \quad (4.29)$$

où :

$$A_{eq} = A - B(CB)^{-1}CA \quad (4.30)$$

$$A_{deq} = A_d - B(CB)^{-1}CA_d \quad (4.31)$$

Ainsi, sous les hypothèses énoncées précédemment, la stabilité asymptotique du système (4.29) est garantie par la stabilité asymptotique de son système entier équivalent.

4.3.2 Synthèse de la commande

L'étape suivante consiste à concevoir un contrôleur à commutations telles que les trajectoires d'état du système soient attirées à la surface de commutation définie en (4.4).

Utilisant la fonction de Lyapunov $V(\sigma(x(t))) = 0.5 \sigma(x(t))^T \sigma(x(t))$, l'objectif est d'obtenir une loi de commande qui satisfait $\dot{V}(\sigma(x(t))) < 0$ pour $\sigma(x(t)) \neq 0$.

Chapitre 4. Commande par Modes Glissants d'Ordre Fractionnaire des S.L.F

La loi de commande est celle donnée en (4.6). Elle consiste en une partie continue, qui est la commande équivalente, et une autre discontinue, assurant la convergence en temps fini vers la surface

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{eq}(t) + u_d(t) \\ &= -K_{eq}x(t) - K_{deq}x(t-h) - (CB)^{-1}\rho\sigma(t) - (CB)^{-1}v \operatorname{sign}(\sigma(x)) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\text{avec : } K_{eq} = (CB)^{-1}CA, \text{ et } K_{deq} = (CB)^{-1}CA_d \quad (4.33)$$

La substitution de l'équation (4.32) dans (4.27) donne :

$$\dot{\sigma}(x) = -\rho\sigma(x) - v \operatorname{sign}(\sigma(x)) \quad (4.34)$$

D'où : $\dot{V}(\sigma) = \sigma^T(-\rho\sigma - v \operatorname{sign}(\sigma)) < -\rho\|\sigma\|^2 - v\|\sigma\| < 0$ pour $\rho > 0$ et $v > 0$

Alors, les trajectoires d'état du système rejoignent la surface de commutation en un temps fini. Le système (4.24) avec $\alpha = 1$, utilisant la commande globale (4.32) est globalement asymptotiquement stable [22].

4.4 Commande par modes glissants d'ordre fractionnaire des systèmes fractionnaires à entrée retardée

Considérons maintenant un système fractionnaire à entrée retardée décrit par l'équation suivante

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_d u(t-\tau) \\ u_{t_0} = \vartheta(\theta), \quad \theta \in (-\tau, 0] \end{cases} \quad (4.35)$$

où τ est un retard constant et positif, u_{t_0} est la condition initiale et ϑ une fonction continue sur le domaine $[-\tau, 0]$.

Dans le cas des systèmes d'ordre entier, nous avons vu dans le chapitre 3 qu'un prédicteur d'état est utilisé pour compenser l'effet du retard et transformer le système en

Chapitre 4. Commande par Modes Glissants d'Ordre Fractionnaire des S.L.F

un système dont l'entrée est indépendante du retard [5], [37]. Dans notre cas, nous proposons un prédicteur d'état d'ordre fractionnaire défini dans le lemme suivant [75].

Lemme 4.1 Considérons la transformation d'état

$$z(t) = x(t) + \int_{t-\tau}^t e_{\alpha}^{A(t-\theta-\tau)} B_d u(\theta) d\theta \quad (4.36)$$

Alors, le nouveau système dont l'entrée est indépendante du retard est donné par :

$$D^{\alpha} z(t) = Az(t) + \hat{B}u(t) \quad (4.37)$$

Avec :

$$\hat{B} = B + e_{\alpha}^{-A\tau} B_d \quad (4.38)$$

Démonstration 4.2:

La dérivée d'ordre α par rapport au temps de l'équation (4.36) donne

$$\begin{aligned} D^{\alpha} z(t) &= D^{\alpha} x(t) + D^{\alpha} \int_{t-\tau}^t e_{\alpha}^{A(t-\theta-\tau)} B_d u(\theta) d\theta \\ &= Ax(t) + Bu(t) + B_d u(t - \tau) - D^{\alpha} \int_0^{t-\tau} e_{\alpha}^{A(t-\theta-\tau)} B_d u(\theta) d\theta \\ &\quad + D^{\alpha} \int_0^t e_{\alpha}^{A(t-\theta-\tau)} B_d u(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (4.39)$$

En utilisant la formule de Leibniz de la dérivée fractionnaire [36], on peut écrire :

$$D^{\alpha} \int_0^t e_{\alpha}^{A(t-\theta-\tau)} B_d u(\theta) d\theta = A \int_0^t e_{\alpha}^{A(t-\theta-\tau)} B_d u(\theta) d\theta + e_{\alpha}^{-A\tau} B_d u(t) \quad (4.40a)$$

$$D^{\alpha} \int_0^{t-\tau} e_{\alpha}^{A(t-\theta-\tau)} B_d u(\theta) d\theta = A \int_0^{t-\tau} e_{\alpha}^{A(t-\theta-\tau)} B_d u(\theta) d\theta + B_d u(t - \tau) \quad (4.40b)$$

En substituant (4.40a) et (4.40b) dans (4.39), on obtient (4.37). Ce qui complète la démonstration.

4.4.1 Synthèse de la loi de commande et analyse de la stabilité

Comme dans les sections précédentes, la surface de commutation est

$$\sigma(z) = CI^{1-\alpha}z(t) = 0 \quad (4.41)$$

A la suite des développements donnés à la section précédente 4.2, la loi de commande par modes glissants pour le système (4.37) est :

$$u(t) = -K_{eq}z(t) - (C\hat{B})^{-1}\rho\sigma(z) - (C\hat{B})^{-1}v \operatorname{sign}(\sigma(z)) \quad (4.42)$$

où $K_{eq} = (C\hat{B})^{-1}CA$

La matrice C est choisie telle que le système en mode de glissement

$D^\alpha z(t) = Az(t) + \hat{B}u(t)$ soit stable, i.e. les valeurs propres de la matrice $(A - \hat{B}K_{eq})$ satisfassent le critère de stabilité

$$\min_i |\operatorname{arg} \lambda_i (A - \hat{B}K_{eq})| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.43)$$

Le résultat de stabilité établi dans le cas des systèmes d'ordre entier [2], est étendu ci-dessous pour les cas d'ordre fractionnaire.

Théorème 4.2 : Admettons que le système transformé (4.37) rejoigne la surface de commutation et il est asymptotiquement stable sur cette surface, alors le système fractionnaire à entrée retardée (4.35) avec l'état $x(t)$ est asymptotiquement stable sur cette surface.

Démonstration 4.3:

Si $z(t)$ atteint la surface de glissement, la loi de commande est réduite à la commande équivalente $u_{eq} = -K_{eq}z(t)$. Par conséquent, les trajectoires de l'état $x(t)$ sur cette surface sont données par

$$x(t) = z(t) + \int_{t-\tau}^t e_\alpha^{A(t-\theta-\tau)} B_d K_{eq} z(\tau) d\theta \quad (4.44)$$

De l'expression (4.44), comme $z(t) \rightarrow 0$, donc $x(t) \rightarrow 0$. Ce qui prouve le résultat.

4.5 Exemples illustratifs

4.5.1 Exemple 1. On considère le système fractionnaire (4.1) avec un ordre de dérivation $\alpha = 0.7$, avec des conditions initiales $x_0 = [1 \ -2 \ 1]$ et les paramètres suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le calcul des valeurs propres de la matrice A_{eq} en régime glissant a donné une valeur propre nulle et deux autres non nulles, comme on l'a expliqué à la section 2.3.2. Ces valeurs propres sont placées en $\{0 \ -2 \ -3\}$. Ainsi, les coefficients C de la surface de commutation sont choisis égaux à $[6 \ 5 \ 1]$ et les valeurs de ρ et v sont respectivement égales à 1 et 0.2. Les résultats de simulation sont présentés à la figure 4.1, à la figure 4.2 et à la figure 4.3.

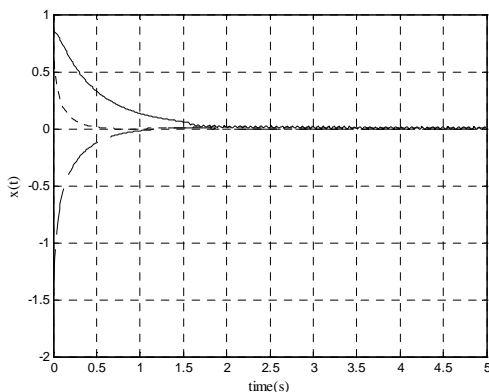


Fig.4.1 – courbes des états — x1 ;
 --- x2 ; x3.

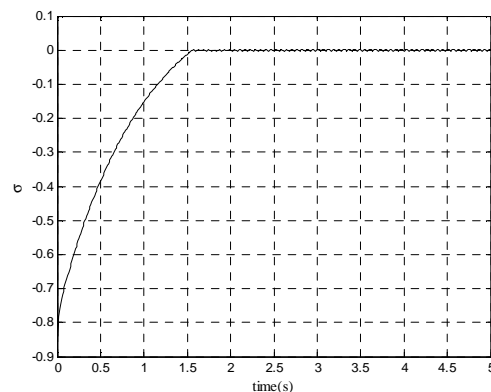


Fig.4.2 – Courbe de la surface de
 commutation

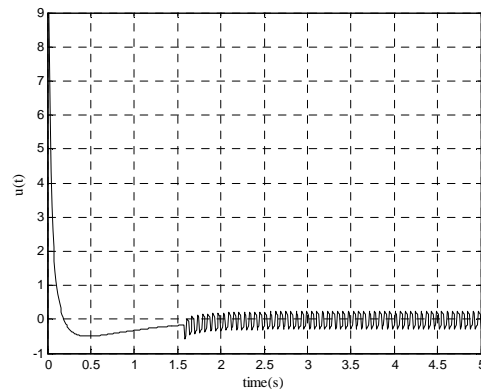


Figure 4.3 - Courbe de la commande

La Figure 4.1 montre l'évolution des états en fonction du temps et confirme la stabilité asymptotique du système. Comme on s'y pouvait attendre, le phénomène de réticence (chattering) est observé en mode de glissement. Ceci est dû à la présence du terme discontinu dans la loi de commande globale donnée en (4.10). L'analyse de la trajectoire de la surface de commutation, Figure 4.2 montre l'existence du mode de glissement. La loi de commande qui amène les trajectoires d'état du système à la surface de glissement est représentée à la Figure 4.3. Notons qu'un régime glissant prend place à partir d'un temps d'environ 1.5 sec

4.5.2 Exemple 2. Cet exemple concerne le système d'ordre fractionnaire à état retardé décrit en (4.24), avec le retard $h = 1$, avec un ordre de dérivation $\alpha = 0.7$, les conditions initiales sont données par $x_{t_0} = [1 \ -2 \ 1]$ et les paramètres suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comme dans l'exemple précédent, les valeurs de la matrice C sont égales à $[6 \ 5 \ 1]$, ainsi, les valeurs propres de $(A_{eq} + A_{deq})$ sont placées en

Chapitre 4. Commande par Modes Glissants d'Ordre Fractionnaire des S.L.F

$\{0 \quad -2.35 + 0.93i \quad -2.35 - 0.93i\}$. Les résultats de simulation présentés par les figures suivantes sont obtenus pour des valeurs de ρ et v égales respectivement à 1 et 0.2.

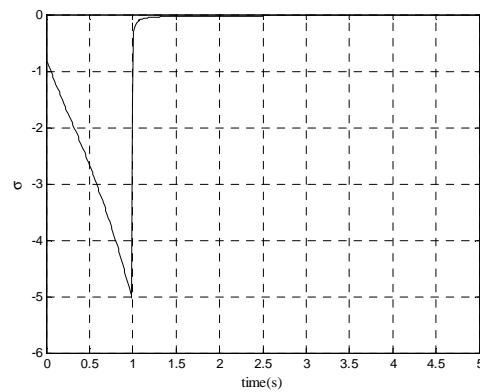
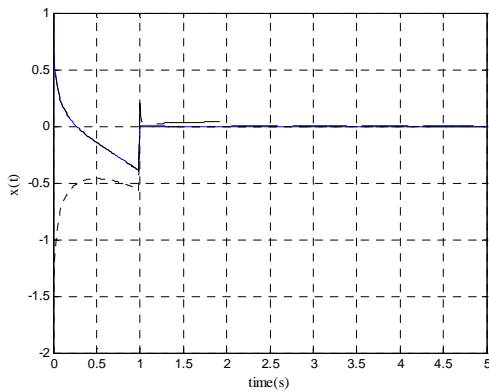


Fig.4.4 – Courbe des états x : — x_1 ;
- - - - x_2 ; - · - · - x_3

Fig.4.5 – Courbe de la surface de
commutation

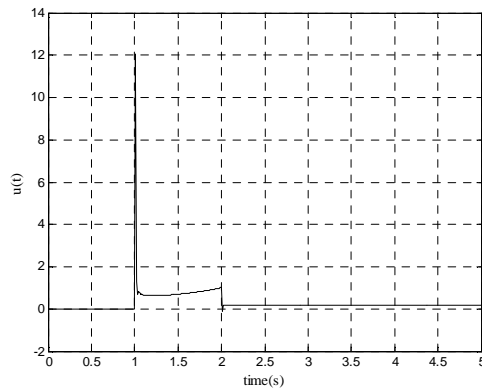


Fig.4.6 – Courbe de la commande

L'analyse de ces figures montre que le signal de commande est appliqué après une seconde. Ce temps est justement la valeur du retard. L'allure de ces courbes confirme la stabilité asymptotique du système, ce qui indique le bon choix de la surface de commutation.

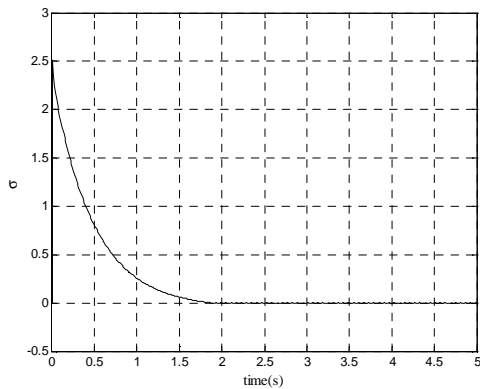


Fig.4.9 – Surface de commutation

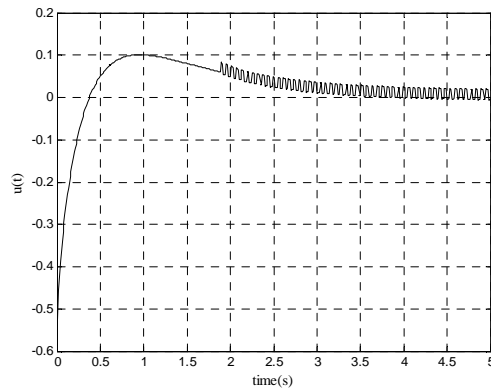


Fig.4.10 – Commande

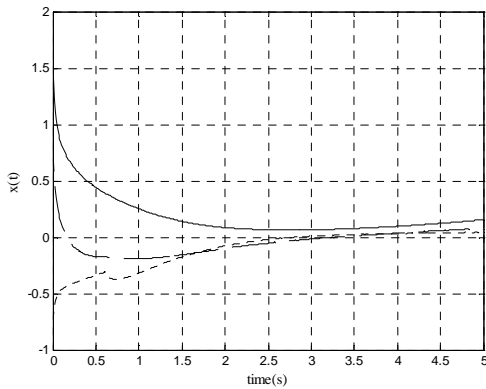


Figure 4.11 - Courbe des états pour $\alpha = 0.7$ et $\tau = 0.6$

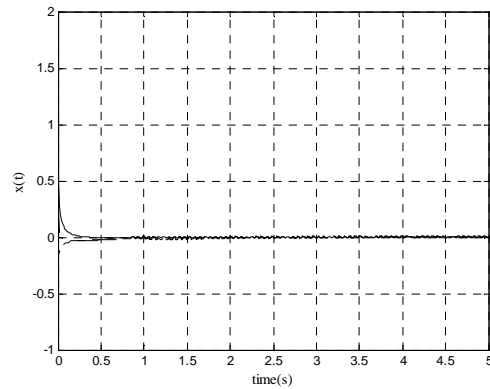


Fig.4.12 - Courbe des états pour $\alpha = 0.2$ et $\tau = 1$

4.6 Commande par modes glissants d'ordre fractionnaire d'une classe de systèmes linéaires fractionnaires incertains et à état retardé.

Dans cette deuxième partie de ce chapitre, nous nous intéressons d'abord au problème de synthèse d'une loi de commande par modes glissants pour un système linéaire fractionnaire avec retard sur l'état déjà étudié à la section (4.3), mais comportant une incertitude sur ses états. Ensuite, nous analysons la stabilité sur un intervalle de temps

fini de ce système fractionnaire en mode de glissement. C'est une nouvelle approche de stabilité qui est différente de celle présentée par Lyapunov. Ainsi, nous cherchons à garantir que l'état du système se trouve à l'intérieur d'un domaine plus ou moins grand et connu, et ceci, sur un intervalle de temps fini. Pour ce faire, nous avons utilisé les travaux de Lazarević [39], développés pour la commande d'ordre fractionnaire d'un robot.

4.6.1 Système en mode de glissement

Considérons le système linéaire fractionnaire incertain à état retardé suivant :

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + Bu(t) + f(x(t), t) \quad (4.45)$$

où $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, (A, A_d) sont deux matrices $n \times n$, B est une matrice $n \times m$, $t \geq 0$, h est le retard constant > 0 , et $f(x(t), t)$ est une incertitude dépendant de l'état.

En plus, les conditions initiales sont données par :

$D^{\alpha-1}x(t_0) = x_{t_0} = \varphi(\theta)$ pour $\theta \in [-h, 0]$ où φ représente une fonction continue sur le domaine $[-h, 0]$.

Il est également supposé que

$(A + A_d, B)$ est contrôlable

$$\|f(x(t), t)\| \leq \beta \|x\|, \quad \beta > 0 \quad (4.46)$$

La synthèse de la loi de commande par modes glissants a été déjà effectuée à la section (4.3). En mode de glissement, nous savons que la commande est réduite à la commande équivalente, i.e. $u(t) = u_{eq}(t)$. Il s'ensuit que la dynamique du système (4.45) est donnée par cette expression

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + Bu_{eq}(t) + f(x(t), t) \quad (4.47)$$

où $u_{eq}(t)$ est donnée par (4.28), alors en régime glissant on a :

$$D^\alpha x(t) = A_{eq}x(t) + A_{deq}x(t-h) + f(x(t), t) \quad (4.48)$$

où :

$$\begin{aligned} A_{eq} &= A - B(CB)^{-1}CA \\ A_{deq} &= A_d - B(CB)^{-1}CA_d \end{aligned}$$

4.6.2 Analyse de la stabilité sans incertitude

Le système est décrit par

$$D^\alpha x(t) = A_{eq}x(t) + A_{deq}x(t-h) \quad (4.49)$$

avec la fonction associée des conditions initiales

$$x_{t_0} = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0] \quad (4.50a)$$

ou bien

$$D^{\alpha-1} x(t_0) = x_{t_0} = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0] \quad (4.50b)$$

Définition 4.2 : [39]: Le système donné par (4.49) satisfaisant la condition initiale (4.50a) est dit stable en temps fini si et seulement si pour $\varepsilon > 0$ un réel donné, il existe deux réels positifs δ ($\delta < \varepsilon$) et T tels que $\|\varphi\|_c < \delta$ implique $\|x(t)\| < \varepsilon$, quel que soit $t \in J$.

où J désigne l'intervalle de temps $J = [t_0, t_0 + T], J \subset \mathbb{R}$ et t_0 le temps initial d'observation du système

Théorème 4.3 [39] : Le système donné par (4.49) satisfaisant la condition initiale (4.50a) est dit stable en temps fini en ce qui concerne $\{\delta, \varepsilon, h, t_0, J\}$, si la condition suivante est satisfaite :

$$\left(1 + \frac{\lambda_{max}^{Ag}(t-t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \times e^{\frac{\lambda_{max}^{Ag}(t-t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}} \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \forall t \in J \quad (4.51)$$

où $\lambda_{max}(\cdot)$ désigne la plus grande valeur singulière de la matrice (\cdot) .

$$\lambda_{max}^{Ag} = \lambda_{max}(A_{eq}) + \lambda_{max}(A_{deq}) \quad (4.52)$$

4.6.3 Analyse de la stabilité avec incertitude

A partir du théorème 4.3, nous proposons un théorème de stabilité, relatif au système d'ordre fractionnaire avec la présence de l'incertitude $f(x(t), t)$.

Théorème 4.4 : Le système (4.48) en régime glissant, satisfaisant la condition initiale (4.50b) et la condition sur l'incertitude donnée par (4.47), est stable en temps fini, si la condition suivante est satisfaite :

$$\left(\frac{(t - t_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\lambda_{max}^{Ag} + \beta)(t - t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \times e^{\frac{(\lambda_{max}^{Ag} + \beta)(t - t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}} \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \forall t \in J, \quad (4.53)$$

Démonstration 4.4 : Selon la propriété de l'ordre fractionnaire $0 < \alpha < 1$, on peut obtenir une solution sous forme de l'équation intégrale équivalente de Volterra :

$$x(t) = x(t_0) \frac{(t - t_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - s)^{\alpha-1} (A_{eq}x(s) + A_{deq}x(s - h) + f(x(s), s)) ds \quad (4.54)$$

En utilisant la propriété appropriée de la norme $\|(\cdot)\|$ sur l'Eq. (4.54), il s'ensuit :

$$\|x(t)\| \leq \left| \frac{(t - t_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \|x(t_0)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t |(t - s)^{\alpha-1}| \|A_{eq}x(s) + A_{deq}x(s - h) + f(x(s), s)\| ds \quad (4.55)$$

De la même manière, en appliquant la norme $\|(\cdot)\|$ sur l'équation (4.48), on obtient :

$$\begin{aligned}
 D^\alpha x(t) &= \|A_{eq}x(t) + A_{deq}x(t-h) + f(x(t), t)\| \\
 &\leq \|A_{eq}\| \|x(t)\| + \|A_{deq}\| \|x(t-h)\| + \beta \|x(t)\|
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

où $\|A\|$ désigne la norme induite d'une matrice A , et

$$\|x(t-h)\| \leq \sup_{t-h \leq t^* \leq t} \|x(t^*)\| \tag{4.57}$$

En appliquant cette inégalité, l'inégalité (4.56) peut être écrite sous forme :

$$\begin{aligned}
 D^\alpha x(t) &\leq (\lambda(A_{eq})) \|x(t)\| + (\lambda(A_{deq})) \|x(t-h)\| + \beta \|x(t)\| \\
 &\leq (\lambda_{max}^{Ag} + \beta) \sup_{t-h \leq t^* \leq t} \|x(t^*)\|, \quad t > t_0 + h
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

ou bien :

$$\begin{aligned}
 &\|A_{eq}x(t) + A_{deq}x(t-h) + f(x(t), t)\| \\
 &\leq (\lambda_{max}^{Ag} + \beta) \left(\sup_{t-h \leq t^* \leq t} \|x(t^*)\| + \|\varphi\|_c \right), \quad t > t_0
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

En tenant compte de (4.59) et de (4.55), cela donne :

$$\begin{aligned}
 \|x(t)\| &\leq \|x(t_0)\| \frac{(t-t_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t |(t-s)^{\alpha-1}| \left\{ (\lambda_{max}^{Ag} + \beta) \left(\sup_{t-h \leq t^* \leq t} \|x(t^*)\| + \|\varphi\|_c \right) \right\} ds
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Or,

$$\begin{aligned}
 \|x(t)\| &\leq \|\varphi\|_c \left(\frac{(t-t_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\lambda_{max}^{Ag} + \beta)(t-t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \\
 &+ \frac{(\lambda_{max}^{Ag} + \beta)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t |(t-s)^{\alpha-1}| \sup_{t-h \leq t^* \leq t} \|x(t^*)\| ds
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

On introduit la fonction non décroissante

$$\phi(t) = \|\varphi\|_e \left(\frac{(t - t_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\lambda_{max}^{Ag} + \beta)(t - t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \quad (4.62)$$

L'application du lemme bien connu de Gronwall-Bellman donne :

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \sup_{t-h \leq t^* \leq t} \|x(t^*)\| \leq \phi(t) \exp \left(\frac{(\lambda_{max}^{Ag} + \beta)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t |(t-s)^{\alpha-1}| ds \right) \\ &= \phi(t) \exp \left(\frac{(\lambda_{max}^{Ag} + \beta)}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - t_0)^\alpha \right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

et selon la condition $\|\varphi\|_e < \delta$, il s'ensuit :

$$\|x(t)\| \leq \delta \left(\frac{(t - t_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\lambda_{max}^{Ag} + \beta)(t - t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \exp \left(\frac{(\lambda_{max}^{Ag} + \beta)}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - t_0)^\alpha \right) \quad (4.64)$$

Finalement, en utilisant la condition de base du théorème (4.4), à savoir l'équation (4.53), il s'ensuit :

$$\|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in J = [t_0, t_0 + T]$$

Ceci termine la démonstration.

4.7 Exemple

Considérons le système fractionnaire à état retardé et avec une incertitude dépendant de l'état.

$$D^\alpha(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + f(x(t), t)$$

Chapitre 4. Commande par Modes Glissants d'Ordre Fractionnaire des S.L.F

où $\alpha = 0.7$, les coefficients de la surface sont $C = [6 \ 5 \ 1]$, $\rho = 1$, $\nu = 0.2$ et la condition initiale $D^{\alpha-1}x(t_0) = x_{t_0} = \varphi(\theta) = [0.05, 0, 0]'$, pour $\theta \in [-1, 0]$

L'incertitude est prise sous forme suivante :

$$f(x(t), t) = 1 \times x(t) \times \sin(x(t)) \\ = \beta [x_1(t) \sin(x_1(t)) \ x_2(t) \sin(x_2(t)) \ x_3(t) \sin(x_3(t))]'$$

$\varepsilon = 10$, $\delta = 0.07$. A partir des paramètres du système, on peut facilement obtenir

$\|\varphi\| < 0.07$ et $\lambda_{max}(A_{eq}) = 7.8740$, $\lambda_{max}(A_{deq}) = 1.3235$, donc $\lambda_{max}^{Ag} = 9.1975$.

Les résultats de simulation obtenus sous le logiciel Matlab, sont présentés à la figure 4.4. Ces courbes montrent que le système est stable malgré la présence des incertitudes sur les états du système et que le mouvement en mode de glissement est atteint après une durée de retard h . Par conséquent, le régime glissant existe pour un temps $t_s = t_0 + h$. Les oscillations présentes sur les états du système, appelées chattering en anglais, sont dues au terme discontinu de la commande u_d . Lors des simulations, on a constaté que le système devient instable pour une valeur de $\beta > 16.75$.

Pour le cas de la stabilité en temps fini, concernant :

$$\{t_0 = 0, j = \{0,3\}, \delta = 0.07, \varepsilon = 10\}$$

En utilisant le théorème 4.4, il s'ensuit :

$$\left(\frac{(t - t_0)^{-0.3}}{1.2981} + \frac{(9.1975 + 1)(t - t_0)^{0.7}}{0.9086} \right) \exp\left(\frac{9.1975 + 1}{0.9086} (t - t_0)^\alpha \right) \\ = \left(\frac{T_e^{-0.3}}{1.2981} + \frac{(9.1975 + 1)T_e^{0.7}}{0.9086} \right) \exp\left(\frac{9.1975 + 1}{0.9086} T_e^{0.7} \right) \leq \frac{10}{0.07}$$

Ceci donne $T_e \cong 0.18 \text{ sec}$. Or, Dans notre cas, les trajectoires d'état atteignent la surface de glissement au bout d'un temps égal à une seconde, donc, c'est cette valeur qui est prise comme origine. De ce fait, le temps estimé de stabilité est donc 1.18 sec .

Chapitre 4. Commande par Modes Glissants d'Ordre Fractionnaire des S.L.F

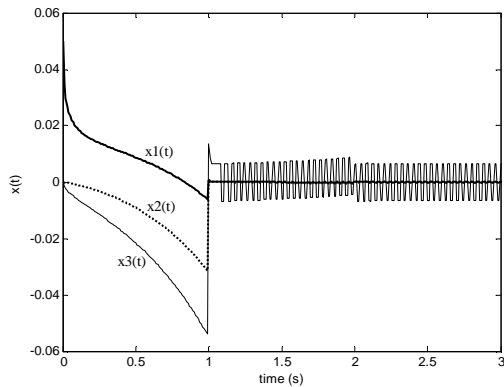


Fig.4.13 – Courbe des états

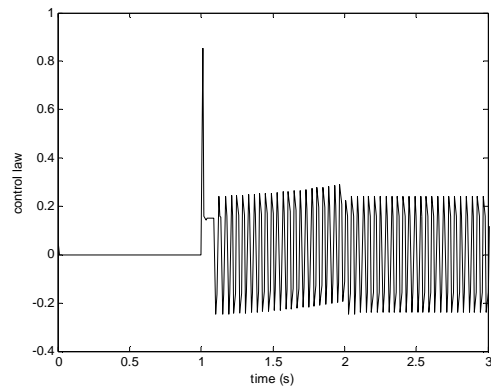


Fig.4.14 – Courbe de la Commande

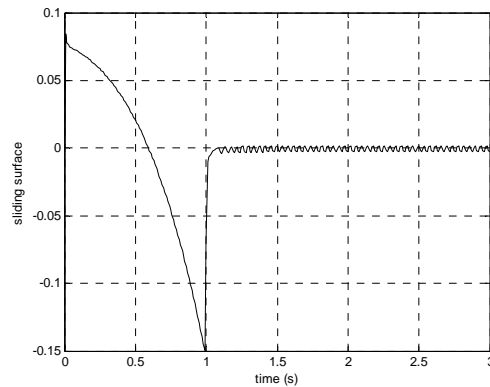


Fig.4.15 - Courbe de la surface de commutation

4.8 Conclusion :

Ce chapitre a vu l'introduction de notions nouvelles qu'il convient de récapituler. Dans un premier temps, nous avons introduit une surface de glissement fractionnaire pour la synthèse de la loi de commande par modes glissants des systèmes d'ordre fractionnaire sans retards et avec retards sur l'état. Ensuite, en utilisant la transformation d'Arstein, nous avons développé un prédicteur d'état pour compenser l'effet du retard sur un système fractionnaire à retards sur l'entrée.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressées à l'analyse de la stabilité pratique dans un intervalle de temps fini, d'un système fractionnaire à état retardé pour lequel nous avons développé un théorème lorsque ce système est en régime glissant.

Chapitre 4. Commande par Modes Glissants d'Ordre Fractionnaire des S.L.F

Nous avons fini par quelques exemples illustrant nos résultats. Ces simulations ont permis de montrer l'efficacité des techniques de commande proposées.

Conclusion générale et Perspectives

Dans ce mémoire, nous avons développé des outils pour la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire des systèmes fractionnaires. Nous avons proposé une surface de commutation de type fractionnaire basée sur la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville et un prédicteur d'état fractionnaire en utilisant la fonction de Mittag-Leffler. Nous les avons ensuite utilisés pour appliquer la loi de commande par modes glissants d'ordre fractionnaire à trois modèles de systèmes fractionnaires, sans retard, avec retard sur l'état et avec retard sur l'entrée de commande.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté des notions de base - qui nous semblent utiles pour la compréhension de notre travail -, relatives au calcul fractionnaire, aux systèmes fractionnaires et à leur commande d'ordre fractionnaire. C'est ainsi que nous avons donné les définitions les plus utilisées de l'opérateur fractionnaire, les représentations des systèmes fractionnaires, leurs propriétés d'analyse et leurs propriétés d'approximation en vue de leur simulation.

Dans le chapitre deux, nous avons exposé les principales caractéristiques de la commande par modes glissants d'ordre un. Nous nous sommes intéressés à présenter la condition d'existence du régime glissant, la notion de commande équivalente qui est une solution de l'équation en mode de glissement et la méthode de synthèse de la loi de commande globale.

Dans le chapitre trois, nous avons présenté quelques notions théoriques des systèmes à retards d'ordre entier, notamment les différents modèles de tels systèmes et différents types de retards que l'on rencontre dans la littérature, ainsi que la notion de

norme utilisée. Nous avons donné quelques définitions relatives à la commandabilité et à la stabilité au sens de Lyapunov et exposé la méthode de synthèse des lois de commande par modes glissants d'ordre un aux systèmes à retards sur l'état et sur l'entrée de commande.

Il serait intéressant à notre avis de développer des critères de stabilité pour les systèmes fractionnaires à retards sur l'état et sur l'entrée.

Enfin, dans la première partie du chapitre quatre, nous avons présenté une application de la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire aux systèmes fractionnaires d'ordre $\alpha, 0 < \alpha < 1$. Nous avons utilisé la surface de glissement proposée afin de synthétiser des lois de commande par modes glissants à deux modèles fractionnaires dont l'un est sans retard et l'autre avec retard sur l'état. Par la suite, nous avons utilisé un compensateur d'ordre fractionnaire pour un système fractionnaire à entrée retardée afin de rendre le système original indépendant du retard et permettre ainsi de synthétiser sans difficulté une loi de commande par modes glissants

La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée à la commande d'un système linéaire fractionnaire retardé et incertain. Après avoir synthétisé la loi de commande en utilisant la surface de commutation fractionnaire, nous avons étudié la stabilité pratique en mode de glissement dans un intervalle de temps fini et un théorème est proposé à ce sujet.

Les résultats de simulation obtenus nous ont permis de mettre en valeur l'efficacité des méthodes proposées. Des simulations ont été effectuées sous le logiciel Matlab et les résultats obtenus nous ont permis de mettre en valeur l'efficacité des méthodes proposées. Néanmoins, nous avons remarqué que la robustesse en mode de glissement dépendait des valeurs de l'ordre de dérivation et du retard. Comme perspective, l'utilité d'établir une relation entre ces deux paramètres serait intéressante. En plus, les commandes obtenues pour les différents modèles ne sont validées que par simulation, elles devraient aussi être implantées concrètement.

Dans notre travail, nous nous sommes basés sur la théorie des modes glissants d'ordre un, l'extension à l'étude de la commande d'ordre supérieur serait souhaitable. D'autre part, la conception de la commande par modes glissants discrets serait intéressante.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ahn, H.-S., Bhambhani, V., Chen, Y. (2009). Fractional-order integral and derivative controller for temperature profile tracking. *Sādhanā*, vol.34, part 5, p.833-850, Indian Academy of Sciences.
- [2] Ahn, H.-S., Chen, Y., Podlubny, I. (2006). Robust stability checking of a class of linear interval fractional order system using Lyapunov inequality. Dans proc.of the 2nd workshop on FDA, Porto.
- [3] Al-Amer, S.H., Al-Sunni, F.M. (2000). Approximation of time-delay systems. Dans Proc. of the American control conference, p.2491-2495, Chicago.
- [4] Al-Shamali, S.A., Cristalle O.D., Lachman, H.A. (2003). An approach to stabilize linear systems with state and input delay. Dans Proc. of the American control conference. Denver, Colorado.
- [5] Artstein, Z. (1982). Linear systems with delayed controls: A reduction. *IEEE Trans. Aut. Control*; 27(4) :869-879.
- [6] Boudjema, F. (1991). *Commande par mode de glissement: Application aux convertisseurs électriques*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse.
- [7] Buhler, H. (1986). *Réglage par mode de glissement*. Presses Polytechniques Romandes.
- [8] Calderon, A.J., Vinagre, B.M., Feliu, V. (2003). Fractional sliding mode of a DC-DC buck converter with application to DC motor drives. Paper presented at the 11th International conference on advanced robotics, University of Coimbra, Portugal.
- [9] Calderon, A.J., Vinagre, B.M., Feliu, V. (2006). Fractional order control strategies for power electronic buck converter, *Signal Processing* 86, p.2803-2819.
- [10] Caponetto, R., Dongola, G., Fortuna, L., Petras, I. (2010). *Fractional order systems: Modeling and control applications*. World Scientific
- [11] Charef, A. (1991). *Analysis and synthesis of fractal systems*. Thesis of Doctor of Philosophy, Faculty of Drexel University, Philadelphia, USA.
- [12] Charef, A., Sun, H.H., Tsao, Y.Y, and Onaral, B. (1992). Fractal systems as represented by singularity function. *IEEE, Trans. Aut. Control* 37 :1465-1470.
- [13] Chen, J. (1994). On sufficient conditions for stability independent of delay. Dans Proc. of the American control conference, p.1929-1933.

- [14] Chen, J., Xu, D., Shafai, B. (1995). On sufficient conditions for stability independent of delay. *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 40 :1675-1678.
- [15] Chen, Y., Ahn, H.S., Podlubny I. (2006). Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties. *Signal processing* 86 :2611-2618.
- [16] Chen, Y., Moore, K.L. (2002). Analytical stability bound for a class of delayed fractional-order dynamic systems. *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, :191-200.
- [17] Chen, Y., Petráš, I., Xue, D. (2009). Fractional order control- A Tutorial. *American Control Conference*, St.Louis, MO, USA.
- [18] Das, S. (2008). *Functional Fractional Calculus for System Identification and Control*. Springer-Verlag Berlin
- [19] Dilaneh, I. (2009). Etude de la commande et de l'observation à distance de systèmes. Thèse de Doctorat, Université de Pontoise
- [20] Dorckák, L. (1994). Numerical models for simulation the fractional order control systems. Technical Report UEF-04-94, Institute of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovak.
- [21] Efe, M.Ö. (2010). Fractional sliding mode control with reaching law approach. *Turk J Elec & Comp Sci*, vol.18, n°5 :1-17.
- [22] EL-Khezali, S.A., Ahmad, W.H. (2006). Variable structure control of fractional time delay systems. Dans *Proc. of the 2nd IFAC, Workshop on fractional differentiation and its applications*, Porto (Portugal).
- [23] Fillipov, A.F. (1960). Differential equations with discontinuous right-hand side. *Amer.Math. Soc.Trans.*62 :199-231
- [24] Floquet, T. (2000). Contributions à la commande par modes glissants d'ordre supérieur. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [25] Fridman, L., Acosta, P., Polyakov, A. (2001). Robust eigenvalue assignment for uncertain delay control systems. Dans *Proc. of the 3rd IFAC International Whorkshop on time delay systems*, Santa Fe, Mexico.
- [26] Gouaisbaut, F., Perruquetti, W., Richard, J.P. (1999). A sliding mode control for linear systems with input and state delays. Dans *Proc. of the 38th CDC (Conf.on Dec. and Control)*, Arizona, USA.
- [27] Hale, J.K. (1977). *Theory of functional differentiel equations*. Springer Verlag, New York

- [28] Hamamci, S.E. (2007). An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers. *IEEE Trans. Aut. Control*, 52(10) :1964-1969.
- [29] Hamerlain, M. (1993). Commande hiérarchisée à modèle de référence et à structure variable d'un robot manipulateur à muscles artificiels. Thèse de Doctorat, INSA, Toulouse.
- [30] Hotzel, R., Fliess, M. (1998). On linear systems with a fractional systems derivation. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol.45 :385-395.
- [31] HU, K.J., Basker, V.R., Cristalle, O.D. (1998). Sliding mode control of uncertain input-delay systems. Dans *Proc. of American Control Conference*, Philadelphia.
- [32] Itkis, U. (1976). *Control systems of variable structure*. J.Wiley, New York.
- [33] Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems*. 3rd ed. Prentice Hall, Inc.
- [34] Kharitonov, V.I., Zhabko, A.P. (2003). Lyapunov-Krasovskii approach to robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica* 39: 15-20
- [35] Khoshkouei, A.J., Zinober, A.S.I. (1996). Sliding mode time-delay systems. Dans *Proc. of the Int. Whorkshop on Variable Structure Systems*, Tokyo.
- [36] Kilbas, A.A., Srisvastava, H.M., Trujillo, J.J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, North-Holland.
- [37] Kwon, W.H., Pearson, A.E. (1980). Feedback stabilization of linear systems with delayed control. *IEEE Trans. Aut. Control*; 25(2) :266-269.
- [38] Ladaci, S. (2007). Contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire. Thèse de Doctorat, Université Mentouri, Constantine, Algérie.
- [39] Lazarević, M.P. (2006). Finite time stability of PD^α fractional control of robotic time-delay systems. *Mechanics Research Communications* 33 :269-279.
- [40] Lazarević, M.P., Spasić, A.M. (2009). Finite-time stability analysis of fractional order time-delay systems: Gronwall's approach. *Mathematical and Computer Modelling* 49 :475-481.
- [41] Levant, A. (2003). Universal higher-order sliding modes, differentiation and output feedback control. *Int. J. of control*, 76. no: 9/10 :924-941.
- [42] LI, X., De Souza, C.E. (1997). Delay-dependent robust stability and stabilisation of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequality approach, *IEEE Trans. Aut. Control*; 42 :869-879.

- [43] Loiseau, J.J. (1998). Algebraic tools for the control and stabilisation of time-delay systems. 1st IFAC Whorkshop on linear time-delay systems, Grenoble, France.
- [44] Loiseau, J.J., Rabah, R. (1997). Analysis and control of time-delay systems. JESA (Journal Européen des Systèmes Automatisés, vol.31, n°6.
- [45] Mahmoud, M.S., Al-Muthairi, N.F. (1994). Design of robust control for time-delay systems. IEEE Trans. Aut. on Control, vol.39: 995-999.
- [46] Manabe, S. (2003). Early developement of fractional-order control. Dans Proc.of DETC'03, ASME 2003, Chicago, USA.
- [47] Mansouri, R. ((2008). Contribution à l'analyse et la synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire par la représentation d'état. Thèse de Doctorat, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou.
- [48] Margin, R-L. (2006). Fractional calculus in bioengineering. Begell House Publisher, Inc. Connecticut.
- [49] Matignon, D. (1996). Stability result on fractional differential equations with applications to control processing. Dans IMACS, IEEE-SMC Proc. Conf. p.963-968, Lille, France
- [50] Matignon, D. (1998). Stability properties for generalized fractional differential systems. Dans Proc. of the colloquium FDS'98: Fractional differential systems: Models, Methods and Applications, n° 5, p.145-158, Paris.
- [51] Matignon, D., Andréa-Novel, B. (1996). Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. Dans IMACS, IEEE-SMC Proc. Conf. p.952-956, Lille, France
- [52] Miller, K.S., Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. A wiley Interscience Publication.
- [53] Monje, A., Chen, Y.Q., Vinagre, B.M., Xue, D., Feliu, V. (2010). Fractional-order Systems and Controls : Fundamentals and Applications. Springer-Verlag, London
- [54] Olbrot, A.W. (1972). On controllability of linear systems with time delays in control. IEEE Trans. Aut. Control, vol.17 :664-666.
- [55] Oldham, K.B., Spanier, J. (1974). The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. Academic Press, Inc.
- [56] Oustaloup, A. (1991). La commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier). Paris, Hermès.

- [57] Oustaloup, A. (1995). La dérivation non entière. Paris, Hermès.
- [58] Palmor, Z. (1980). Stability properties of Smith dead-time composator controllers. *Int.J.Control*, vol. 32 :937-949.
- [59] Perruquetti, W., Barbot, J.P. (2002). Sliding mode control in engineering, Control Engineering Series. Marcel Dekker, New York
- [60] Petráš I., Vinagre, B.M. (2002). Pratical application of digital fractional-order controller to temperature control. *Acta Montanistica Slovaca, Ročník 7 (2002)*,2,131-137.
- [61] Petráš, I. (2009). Stability of fractional-order systems with rational orders : A survey. *An International Journal for Theory and Applications*, vol.12, (n°3) :269-298.
- [62] Pisano, A., Rapaić, M.R., Jeličić, Z.D., and Usai, E. (2010). Sliding mode control approaches to the robust regulation of linear multivariable fractional-order dynamics. *Int. J. Robust Nonlinear Control* 20 :2045-2056.
- [63] Podlubny, I. (1999). Fractional differential equation. Academic Press, San Diego
- [64] Podlubny, I. (1999). Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\mu$ controllers. *IEEE Trans. Aut. Control*, 44(1) :208-214.
- [65] Poinot, T., Trigeassou, J.-C. (2003). A method for modeling and simulation of fractional systems. *Signal Processing* 83 :2319-2333.
- [66] Richard, J.P. (2003). An overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39 :1667-1694.
- [67] Roh, Y.H., Oh, J.H. (1999). Robust stabilization of uncertain input delay systems by sliding mode control with delay compensation. *Automatica*, 35 :1861-1865.
- [68] Roh, Y.H., Oh, J.H. (2000). Sliding mode control for robust stabilization of uncertain input-delay systems. *ICASE 2(2)* :98-103.
- [69] Rousan, A.A., Ayoub, N.Y., Alzoubi, F.Y. et al. (2006). Fractional Calculus & Applied Analysis. *An International Journal for Theory and Applications*, vol.9, (n°1) :33-41.
- [70] Sabatier, J., Cois, O., Oustaloup, A. (2002). Commande de systèmes non entiers par placement de pôles. Conférence Internationale Francophone d'Automatique. Nantes, France.
- [71] Sabatier, Melchior, P., Oustaloup, A. (2005). Réalisation d'un banc d'essai thermique pour l'enseignement des systèmes non entiers. *J3eA, J. sur l'Ens. des Sc. et Tech. de l'Info. et des Syst*, vol.4, hors série 2,14.

- [72] Schoen, G.M. (1995). Stability and stabilization of time-delay systems. Thèse de Doctorat, Institute of Technology Zurich.
- [73] Seuret, A. (2006). Commande et observation des systèmes à retards variables : théorie et applications. Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [74] Si Ammour, A., Djennoune, S., Bettayeb, M. (2008). Variable structure control for uncertain fractional linear systems with state delay. Journal Européen des Systèmes Automatisés, RS-JESA-42/2008: Fractional order systems, p.965-976.
- [75] Si Ammour, A., Djennoune, S., Bettayeb, M. (2009). A sliding mode control for linear fractional systems with input and state delay. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 14, p.2310-2318.
- [76] Sira-Ramirez, H. (1988). Differential geometric methods in variable structure control. Int. J. of Control, 48(4) :1359-1390.
- [77] Slotine, J., LI, W. (1991). Applied nonlinear control. Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J.
- [78] Tenreiro Machado, J.A. (2001). Discrete-time fractional controllers. Fractional Calculus Applied Analysis, vol. 1, p.47-66.
- [79] Travazoei, M.S., Haeri, M. (2009). A note of stability of fractional order systems. Mathematics and Computers in Simulation 79, p.1566-1576.
- [80] Utkin, V.I. (1977). Variable structure systems with sliding mode. IEEE Trans. Aut. Control, 26(2) :212-222.
- [81] Utkin, V.I. (1978). Sliding modes and their application in variable structure systems. Mir, Moscou
- [82] Utkin, V.I. (1992). Sliding modes in control and optimization. Springer, Berlin
- [83] Valério, D. (2005). Fractional robust system control. Ph.D thesis, Instituto Superior Técnico, Universidade técnica de Lisboa.
- [84] Vidal, P.E. (2004). Commande non linéaire d'une machine asynchrone à double alimentation. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- [85] Vinagre, B.M., Podlubny, I., Hernandez, A., Feliu, V. (2000). Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. Fractional Calculus & applied Analysis, vol.3,p.231-248.

Bibliographie

[86] Vinagre, B.M., Feliu, V. (2002). Modeling and control of dynamic systems using fractional calculus: Application to electrochemical processes and flexible structures. Dans Proc. of 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas.

[87] Wiltrant, E. (2005). Stabilisation des systèmes commandés par réseaux. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.

[88] Xia, Y., Han, J., Jia, Y. (2002). A sliding mode control for linear systems with input and state delays. Dans Proc. of 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas.

[89] Yeganefar, N. (2006). Définitions et analyse de stabilités pour les systèmes à retards non linéaires. Thèse de Doctorat, Ecole centrale de Lille.

Résumé :

Un système d'ordre fractionnaire est représenté par des modèles dynamiques à opérateurs de dérivation et d'intégration d'ordre non entier. De nombreux travaux réalisés, ces dernières années, ont développé des méthodes d'analyse et de synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire. Notre travail consiste à contribuer à l'élargissement du champ d'application de la commande fractionnaire aux systèmes fractionnaires et ce en utilisant les concepts des opérateurs intégro-différentiels d'ordre non entier. Nous avons élargi la théorie de la commande par modes glissants aux systèmes d'ordre fractionnaire avec et sans retards. Notre contribution comporte ces propositions :

- Une surface de commutation fractionnaire basée sur l'intégrale de Riemann-Liouville. Cette surface nous permet de synthétiser des lois de commande en mode de glissement pour des modèles fractionnaires sans retard et avec retard sur l'état.
- Un prédicteur d'état fractionnaire basé sur la fonction de Mittag-Leffler. Ce prédicteur sert à compenser l'effet du retard présent sur l'entrée de commande d'un système d'ordre fractionnaire. La loi de commande en régime glissant est déterminée.
- Nous avons obtenu de nouveaux résultats de stabilité pratique dans un intervalle de temps fini d'un système fractionnaire à retard sur l'état et perturbé.

Des simulations numériques ont été effectuées afin d'illustrer les développements théoriques présentés dans notre mémoire.

Mots clés : systèmes d'ordre fractionnaire, modes glissants, systèmes à retard, stabilité.

Abstract:

A fractional order system is represented by dynamical models with non-integer differentiation and integration operators. Numerous realized works, these last years, have developed analysis and synthesis methods of fractional order systems. Our work consists in contributing to extend the field of application of fractional control to fractional-order systems and this, by using the concepts of non-integer order integro-differential operators. We have extended the control theory by sliding-modes to fractional-order systems with and without delays. Our contribution includes these propositions.

- A fractional switching surface based on the Riemann-Liouville integral. This surface enables us to synthesize sliding-mode control laws for non-delay fractional models and with delay on state.
- A fractional state predictor based on Mittag-Leffler's function. This predictor is used to compensate the effect on the delay present at the control input of a fractional-order system. The control law in sliding mode is determined.
- We have obtained new results on practical stability in a finite time-interval for a fractional-order system with delay on state and disturbed.

Numerical simulations have been performed in order to illustrate the theoretical developments presented in our thesis.

Key words: Fractional-order systems, sliding-modes, Delay systems, stability.