

République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou
Faculté du Génie de la Construction
Département de Génie Mécanique

Thèse de Doctorat en Sciences De l'Ingénieur
Spécialité : Génie Mécanique

Sujet

Optimisation des structures mécaniques composites en vibrations

Par
SLIMANI Mohand

Le jury proposé :

Mr BOUHRAOUA	Ali	Prof.	UMMTO (Tizi-Ouzou)	Président
Mr BOUAZZOUNI	Amar	Prof.	UMMTO (Tizi Ouzou)	Directeur
Mr TAAZOUNT	Mustapha	H.D.R.	UBP (Clermont Ferrand, France)	Co-Directeur
Mr NECIB	Brahim	Prof.	UMC (Constantine)	Examineur
Mr BRARA	Ahmed	DR	CNERIB, (Alger)	Examineur
Mr ASMA	Farid	M.C.A.	UMMTO (Tizi-Ouzou)	Examineur
Mr BILEK	Ali	Prof.	MMTO (Tizi-Ouzou)	Invité

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de Laboratoire mécanique structures énergétique (LMSE) sous la direction de monsieur Amar BOUZZOUNI. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour sa patience, ses conseils et ses encouragements durant toute la durée de mon travail.

Ma gratitude va aussi à monsieur Mustapha TAAZOUNT, le co-directeur de ma thèse, pour l'intérêt avec lequel il a suivi ma thèse. Ses conseils précieux, le partage de ses compétences scientifiques m'ont beaucoup aidé à bien mener ce travail à terme.

Je remercie tous mes amis et collègues pour la motivation que leur amitié m'a apportée. Leur soutien, leur enthousiasme et leur sens de l'humour m'ont permis d'aller au bout de cette aventure qu'est la thèse.

Un grand merci à mon épouse, mes enfants et toute ma famille pour tout ce qu'ils ont subi durant toute cette période.

J'adresse mes remerciements anticipés aux membres de jury de m'avoir honoré en acceptant d'examiner cette thèse.

SOMMAIRE

Introduction générale	1
Etude bibliographiques	
Introduction	3
1. Aspect général sur les composites	3
1.1. Constitution et intérêt des composites à matrice organique (CMO) pour la conception des structures	4
1.1.1. Constitution des matériaux composites	4
1.1.2. Performances et particularités des CMO pour la conception des structures	5
1.2. Des approches multi échelles pour des comportements complexes	6
1.2.1. Capture d'influence de l'empilement sur le comportement élastique du stratifié	7
1.3. La théorie classique des stratifiés	7
1.3.1. Approche monocouche équivalente	9
a) Modèle classique de Love-Kirchhoff	9
b) Modèle classique de Reissner-Mindlin	12
c) Modèles d'ordre supérieur	13
1.3.2. Théorie des poutres :	14
1.3.2.1. Théorie classique de poutre	15
1.3.2.2. Théories de déformation de cisaillement	16
1.3.2.3. Théories de déformation de cisaillement de premier ordre	16
1.3.2.4. Théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur	17
2. Identification des structures mécaniques composites	18
2.1. L'analyse dynamique non linéaire	19
2.1.1 Mode normal non linéaire.....	24
2.1.1.1. Définitions du mode normal	24
Approche de Rosenberg	25
Approche de Shaw et Pierre	26
2.1.1.2 Méthodes de calcul du mode normal	28
Les méthodes de perturbation	28
Les méthodes de type Galerkin	28
Les techniques asymptotiques	29
Méthodes de tir	29
2.2. Identification des systèmes mécaniques vibratoires	30

2.2.1 Identification des systèmes mécaniques linéaires	31
a) Domaine temporel	31
b) Méthodes des sous-espaces	31
c) Domaine fréquentiel	32
d) Domaine temps-fréquence	32
2.2.2.2. Identification des systèmes mécaniques non linéaires	33
a) Domaine temporel	33
b) Domaine fréquentiel	34
c) Domaine temps-fréquence	34
2.3. Dynamique des structures non linéaires géométriques	35
Conclusion	37
Chapitre I	
I.1. Introduction.....	39
I.2. Méthode des éléments finis hiérarchiques	40
I.2.1. Enoncé de la méthode des éléments finis hiérarchiques.....	41
I.2.2. Génération des éléments	41
I.2.2.1. Eléments unidimensionnels	41
I.2.2.1.1. Polynômes de Legendre	42
I.2.2.1.2. Modes-bulle	43
I.2.2.1.3. Fonctions de formes hiérarchiques	44
I.2.2.2. Eléments 2-D quadrangulaires	45
I.2.2.2.1. Espaces polynomiaux	45
I.2.2.2.2. Fonctions de forme hiérarchiques	46
I.2.2.3. Elements 2-D triangulaires	46
I.3. Evolution des méthodes des éléments finis pour la modélisation des composites	48
I.3. 1. Eléments finis et facteurs de correction du CT	49
I.3.2. Synthèse bibliographique sur les théories d'ordre supérieur	50
I.3.2.1. Aspects généraux	50
I.4. Modélisation d'une poutre épaisse multi-couches	51
I.4.1. Formulation de base dans le cas non linéaire	51
I.4.1.1. Champ de déplacement	52
I.4.1.2. Champ de déformation	53

I.4.1.3. Matériau composite en-dehors de ses axes principaux	55
I.4.1.4. Energie de déformation	58
I.4.1.5. Développement des intégrales	60
I.4.1.6. Fonctions de forme utilisées	62
I.4.1.7. Energie cinétique	62
I.5. Modélisation d'une plaque épaisse multicouches	65
I.5.1. Formulation de base	65
I.5.1.1. Champ de déplacement	65
I.5.1.2. Champ de déformation	65
I.5.1.3. Relation contraintes-déformation	67
I.5.1.4. Efforts et moments résultants	69
I.5.1.5. Fonctions de forme utilisées	70
I.5.1.6. Energie potentielle	71
I.5.1.7. Energie cinétique	77
Conclusion	79
Chapitre II	
Introduction	80
II.2. Analyse modale linéaire	81
II.2.1. Historique de l'analyse modale	81
II.1.3. Méthodes de l'analyse modale et calcul des paramètres modaux	82
II.1.4. Valeurs et vecteurs propres	82
II.1.4.1. Algorithme QR	84
II.1.4.2. Algorithme QR pratique	84
II.1.4.3. Algorithme QR implicite	85
II.1.4.4. Interprétation de la convergence	85
II.4. Validation numérique linéaire	86
II.2. 1. Premier cas : Poutre épaisse multicouches	86
II.2. 2. Deuxième cas : Plaque épaisse multicouches	90
Conclusion	94
Chapitre III	
Introduction	95

III.1. Généralités sur le comportement non linéaire	96
III.2. Méthodes analytiques de résolution des équations différentielles non-linéaires	97
III.2.1. Méthode d'intégration	97
III.2.2. Méthodes approchées	98
a. Méthode de Poincaré	98
b. Méthode de la balance harmonique	99
c. Méthode de linéarisation harmonique	100
d. Méthode de la valeur moyenne	100
e. Méthode du Plan de Phase	101
f. Méthode de Krilov- Bogoloubov	102
g. Méthode de la linéarisation harmonique améliorée	102
III.2.3. Système forcé à élasticité non linéaire	103
III.2.4. Amplitude de la réponse	106
Conclusion	108
 Chapitre IV	
Introduction.....	109
 Erreur ! Signet non défini.	
IV.1. Projection modale	110
IV.2. Méthode de la linéarisation asymptotique	111
IV.3. Validations de la méthode	115
IV.4. Application de la méthode sur une poutre orthotrope	121
IV.5. Conclusion	129

LISTE DES FIGURES

Etude bibliographique

Figure 1. Echelles des constituants d'un composite stratifié.	23
Figure 2. Exemple d'empilement symétrique quasi-isotrope [-45/90/45/0] _s	26
Figure 3. Hauteurs de plis, repère global (x,y,z) et repère local (1,2,3) associé au plis supérieur orienté à -45°.	27
Figure 4. Hypotheses de Kirchhoff-Love.	29
Figure 5. Hypotheses de Reissner-Mindlin.	31

Chapitre I

Figure I-1 : Fonctions de forme	44
Figure I-2 : Elément quadrangulaire de référence	45
Figure I-3 : famille "Serendipity"	45
Figure I-4 : famille "Lagrange"	45
Figure I-5 : Elément triangulaire équilatéral de référence	46
Figure I-6 : Approximations de la contrainte du CT : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur).	49
Figure I-7 : Poutre composite.	52
Figure I-8 : Elément poutre composé de k couches en composite stratifié.	60
Figure I-9 : Elément de plaque	69

Chapitre II

Figure II-1 : Configuration des différents modes de vibrations de la poutre.	93
Figure II-2 : Configuration des différents modes de vibrations de la plaque simplement appuyée.	93
Figure II-3 : Configuration des différents modes de vibrations de la plaque encastree.	94

Chapitre III

Figure III-1. Variation d'amplitude en fonction de la fréquence d'excitation d'un système non linéaire non amorti.	106
Figure III-2. Variation d'amplitude en fonction de la fréquence d'excitation d'un système non linéaire non amorti. Cas d'un ressort mou et d'un ressort dur.	107
Figure III-3. Variation d'amplitude en fonction de la fréquence d'excitation d'un système non linéaire amorti, dans le cas d'un ressort mou et d'un ressort dur :	108
a) Ressort mou	

b) Ressort dur

Chapitre IV

Figure IV-1. Amplitude de la fréquence fondamentale non-linéaire ($\epsilon=0.1$).115

Figure IV-2. Amplitude de vibrations-temps ($\epsilon=0.1$).116

Figure IV-3. Amplitude de la fréquence fondamentale non-linéaire ($\epsilon=0.5$).117

Figure IV-4. Amplitude de vibrations-temps à l'ordre 1 ($\epsilon=0.5$).117

Figure IV-5. Amplitude de vibrations-temps à l'ordre 2 ($\epsilon=0.5$).117

Figure IV-6. Amplitude de vibrations-temps à l'ordre 3 ($\epsilon=0.5$).118

Figure IV-7. Amplitude de la fréquence fondamentale non-linéaire ($\epsilon=1$).118

Figure IV-8. Time- Vibration amplitude à l'ordre 1 ($\epsilon=1$).118

Figure IV-9. Time- Vibration amplitude à l'ordre 2 ($\epsilon=1$).119

Figure IV-10. Time- Vibration amplitude à l'ordre 3 ($\epsilon=1$).119

Figure IV-11. Amplitude de la fréquence fondamentale non-linéaire ($\epsilon=1.5$).119

Figure IV-12. Amplitude de vibrations-temps à l'ordre 1 ($\epsilon=1.5$).120

Figure IV-13. Amplitude de vibrations-temps à l'ordre 2 ($\epsilon=1.5$).120

Figure IV-14. Amplitude de vibrations-temps à l'ordre 3 ($\epsilon=1.5$).120

Figure IV-15. La fréquence non linéaire en fonction de (w_{max}/h) A-A ($0^{\circ}/0^{\circ}/0^{\circ}$)s.124

Figure IV-16. La fréquence non linéaire en fonction de (w_{max}/h) H-H ($0^{\circ}/90^{\circ}/90^{\circ}$)s. ...125

Figure IV-17. La fréquence non linéaire en fonction de (w_{max}/h) A-A ($90^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}$)s.125

Figure IV-18. La fréquence non linéaire en fonction de (w_{max}/h) A-A (Croisés).125

Figure IV-19. La fréquence non linéaire en fonction de (w_{max}/h) E-E ($0^{\circ}/0^{\circ}/0^{\circ}$)s126

Figure IV-20. La fréquence non linéaire en fonction de (w_{max}/h) E-E ($0^{\circ}/90^{\circ}/90^{\circ}$)s.126

Figure IV-21. La fréquence non linéaire en fonction de (w_{max}/h) E-E ($90^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}$)s.126

Figure IV-22. La fréquence non linéaire en fonction de (w_{max}/h) E-E (Croisés).127

Figure IV-23. La fréquence non linéaire en fonction de (w_{max}/h) E-A ($0^{\circ}/0^{\circ}/0^{\circ}$)s.127

Figure IV-24. La fréquence non linéaire en fonction de (w_{max}/h) E-A ($0^{\circ}/90^{\circ}/90^{\circ}$)s.127

Figure IV-25. La fréquence non linéaire en fonction de (w_{max}/h) E-A ($90^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}$)s. ...128

Figure IV-26. La fréquence non linéaire en fonction de (w_{max}/h) E-A (Croisés).128

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre II

Tableau II-1. Les conditions aux frontières considérées d'une poutre épaisse composite avec les contraintes axiales $u(0)=u(L)=0$87

Tableau II-2. Comparaison des fréquences naturelles linéaires (en kHz) pour une poutre simplement appuyée (S-S) avec l'orientation $\theta = (0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ)$87

Tableau II-3. Comparaison des fréquences naturelles linéaires adimensionnelles $\left(\omega L^2 \sqrt{\rho / E_1 h^2} \right)$ pour une poutre simplement appuyée (S-S) avec $\theta=(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$. .88

Tableau II-4. Comparaison des fréquences naturelles linéaires adimensionnelles $\left(\omega L^2 \sqrt{\rho / E_1 h^2} \right)$ pour une poutre encastree libre (C-F) avec $\theta = (0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$88

Tableau II-5. Comparaison de la fréquence fondamentale (ω_L en Hz) pour différentes conditions aux frontières et l'orientation $\theta = (0^\circ/0^\circ/0^\circ)_S$88

Tableau II-6. Comparaison de la fréquence fondamentale (ω_L en Hz) pour différentes conditions aux frontières et l'orientation $\theta = (0^\circ/90^\circ/90^\circ)_S$89

Tableau II-7. Comparaison de la fréquence fondamentale (ω_L en Hz) pour différentes conditions aux frontières et l'orientation $\theta = (90^\circ/90^\circ/0^\circ)_S$89

Tableau II-8. Comparaison de la fréquence fondamentale (ω_L en Hz) pour différentes conditions aux frontières et l'orientation $\theta = (0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$89

Tableau II-9. Comparaison des fréquences naturelles linéaires adimensionnelles $\left((\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D_0} \right)$ pour une plaque à trois couches.91

Tableau II-10. Comparaison des fréquences naturelles linéaires adimensionnelles $\left((\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D_0} \right)$ pour une plaque à cinq couches.....91

Tableau II-11. Comparaison des fréquences naturelles linéaires adimensionnelles $\left((\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D_0} \right)$ pour une plaque à huit couches.....92

Chapitre IV

Tableau IV-1. Solution asymptotique dans l'espace modal réel 114

Tableau IV-2. Conditions aux limites considérées pour une poutre composite :
déplacement axial $u(0)=u(L)=0$ 122

Tableau IV-3. Comparaison de (ω_{NL}/ω_L) pour différentes conditions aux limites et orientation $\theta = (0^\circ/0^\circ/0^\circ)_S$ pour $w_{max}/h=1$ 122

Tableau IV-4. Comparison de (ω_{NL}/ω_L) pour différentes conditions aux limites et orientation $\theta = (0^\circ/90^\circ/90^\circ)_S$ pour $w_{max}/h=1$123

Tableau IV-5. Comparison de (ω_{NL}/ω_L) pour différentes conditions aux limites et orientation $\theta = (90^\circ/90^\circ/0^\circ)_S$ pour $w_{max}/h=1$123

Tableau IV-6. Comparison de (ω_{NL}/ω_L) pour différentes conditions aux limites et orientation $\theta = (0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ pour $w_{max}/h=1$123

NOMENCLATURE

$P_n(x)$: Polynômes de Legendre orthogonaux.
$\phi_j(x)$: Modes-bulle.
$N_1(\xi) ; N_2(\xi)$: Fonctions de forme hiérarchique nodales.
$N_i(\xi) \quad i = 3, 4, \dots, p + 1$: Fonctions de forme hiérarchique internes.
$\xi ; \eta$: Coordonnées normalisées.
$N_i(\xi, \eta) ; L_i$: Fonctions de forme nodales.
$N_i^{(j)}(\xi, \eta)$: Fonctions de forme de côté i .
$\varphi_i(x)$: Polynômes de Lobatto définis à partir des modes-bulle.
$f_s(z)$: Frontière de cisaillement.
x, y, z	: Coordonnées du référentiel de la plaque.
U, V, W	: Composantes de déplacement suivant (x, y, z) .
u, v, w	: Composante du déplacement du plan neutre ($z=0$) suivant (x, y, z) .
θ, ψ	: Angles de rotation du plan moyen autour des axes y, x respectivement.
$q = \{q^u, q^w, q^\theta, q^\psi\}$: Composantes de déplacement et de rotation aux nœuds suivant (x, y, z) .
$N^u, N^w, N^\theta, N^\psi$: Fonctions de formes suivant les déplacements u, w et les rotations θ, ψ .
$(\dots)_x$: Différentielle par rapport à x .
$\delta(\dots)$: Dérivée par rapport au déplacement.
ε_p	: Vecteur de déformation de la plaque.
ε_m	: Vecteur de déformation de membrane.
ε_l	: Vecteur de déformation linéaire.
ε_{nl}	: Vecteur de déformation non linéaire.
ε_b	: Vecteur de déformation de déflexion.
$\varepsilon_{j,k}$: Champ de déformation de Green.
ε_x	: Déformation suivant x .
$\varepsilon_{xx}^{(k)}$: Déformation suivant x dans le référentiel relatif à la couche k .
ε_{xx}	: Déformation suivant x dans le référentiel de base.
γ_{xz}, γ_{yz}	: Cisaillements dans les plans xz et yz .
γ	: Déformation de cisaillement.
$\gamma_{xz}^{(k)}, \gamma_{yz}^{(k)}$: Cisaillements dans les plans xz et yz et le référentiel relatif à la couche k .
$\langle \dots \rangle$: Vecteur ligne.
$\{ \dots \}$: Vecteur colonne.
B_l	: Matrice de rigidité linéaire.
B_{nl}	: Matrice de rigidité non linéaire.
$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: Coordonnées du référentiel de base.
$(\vec{e}_x^{(k)}, \vec{e}_y^{(k)}, \vec{e}_z^{(k)})$: Coordonnées du référentiel relatif à la couche k .
σ_{ij}	: Contrainte dans le référentiel de base.
σ_p	: Vecteur de contrainte de la plaque.

σ_{xx}	: Contrainte dans le référentiel de base.
$\sigma^{(k)}$: Vecteur contraintes du $k^{\text{ème}}$ couche du matériau.
$\sigma_{xx}^{(k)}$: Contrainte suivant x dans le référentiel relatif à la couche k.
τ_{xz}, τ_{yz}	: Contraintes de cisaillement dans les plans x,z et yz.
$\tau_{xz}^{(k)}, \tau_{yz}^{(k)}$: Contraintes de cisaillement dans les plans x,z et yz et dans le référentiel relatif à la couche k.
$\tau^{(k)}$: Vecteur des contraintes de cisaillement du $k^{\text{ème}}$ couche du matériau.
T_σ	: Matrice de passage des contraintes.
T_ε	: Matrice de passage des déformations.
$\overline{Q}^{(k)}$: Matrice d'élasticité du $k^{\text{ème}}$ couche du matériau.
$\overline{Q}_{ij} (i,j=1,2,4,5,6)$: Contraintes d'élasticité du $k^{\text{ème}}$ couche.
$E_1^{(k)}, E_2^{(k)}$: Modules de Young du $k^{\text{ème}}$ couche dans les directions principales d'orthotrope du matériau 1 et 2 respectivement.
$G_{23}^{(k)}, G_{13}^{(k)}, G_{12}^{(k)}$: Modules de cisaillement dans les plans (2-3), (1-3), (1-2) du $k^{\text{ème}}$ couche respectivement.
$\overline{C}_s^{(k)}$: Matrice d'élasticité de cisaillement transversal du $k^{\text{ème}}$ couche du matériau.
$\nu_{ij}^{(k)}$: Coefficient de poisson défini comme le rapport de déformation transversal dans la direction j à la déformation axial dans la direction i .
θ_k	: Angle entre les coordonnées principales de la plaque et les coordonnées principales d'orthotropie du matériau.
χ_1, χ_2	: Facteurs de correction du cisaillement.
C	: Matrice d'élasticité.
Ed	: Energie de déformation.
Ed_l	: Energie de déformation linéaire.
${}_i Ed_{nl}$: $i^{\text{ème}}$ énergie de déformation non linéaire.
K_l	: Matrice de rigidité
${}_i k_l$: $i^{\text{ème}}$ matrice de rigidité linéaire.
${}_i K_{nl}$: $i^{\text{ème}}$ matrice de rigidité non linéaire.
${}_i k_s$: $i^{\text{ème}}$ matrice de rigidité de cisaillement.
d	: Distance du centre d'une couche k par rapport au référentiel.
h_i	: Epaisseur de la couche k.
H	: Epaisseur de la plaque.
I_z^k	: Moment d'inertie par rapport à l'axe z d'une couche k par rapport au référentiel.
A_k	: Section d'une couche k .
$f_i (i=1,2)$: Fonctions de formes nodales de type Legendre de classe C^0 .
f_r	: Fonctions de formes internes de type Legendre de classe C^0
$g_i (i=1,2,3,4)$: Fonctions de formes nodales de type Legendre de classe C^1 .
g_r	: Fonctions de formes internes de type Legendre de classe C^1 .
Ec	: Energie cinétique.
$\rho^{(k)}$: Masse volumique de la couche k.

M	: Matrice de masse de la structure.
K_L	: Matrice de rigidité linéaire de la structure.
K_{NL}	: Matrice de rigidité non linéaire de la structure.
\mathcal{T}	: Vecteur forces de cisaillement transversal de la plaque.
\mathcal{N}	: Vecteur force normale.
\mathcal{M}	: Vecteur moment de flexion.
A	: Matrice d'élasticité en extension.
D	: Matrice d'élasticité en flexion.
B	: Matrice d'élasticité d'accouplement extension-flexion.
C_s	: Matrice d'élasticité en cisaillement transversal.
Ed_c	: Energie de déformation transversale.
Φ	: vecteur propre modal.
$R(t)$: vecteur de la réponse temporelle.
δ_{ij}	: symbole de Kronecker.
Ω	: Fréquence des vibrations angulaires non linéaires.
w_i^2	: Valeur propre du mode i.
$r_i(t)$: réponse temporelle du mode i.
h_i	: Fonction non linéaire du mode i.
a_0	: Amplitude des vibrations non linéaires.
φ_0	: la phase.

INTRODUCTION GENERALE

L'industrie mécanique est toujours en perpétuelles mutations soumise à des innovations en continu. La conception actuelle procède à la fabrication de structures de plus en plus minces et légères basée sur des matériaux composites de natures multiples et variées.

La plus grande utilisation des poutres et plaques stratifiées multicouches dans l'industrie, en tant qu'éléments mobiles dans des machines exigent la connaissance de leurs fréquences normales quand les conditions dynamiques externes induisent un comportement non linéaire géométrique de la structure. Une analyse plus précise basée sur les modèles numériques tridimensionnels peut entraîner des coûts de programmation et de calcul élevés, d'où le besoin de développer de nouvelles méthodes numériques basées sur des théories bidimensionnelles (ou tridimensionnelles) précises adaptées aux cas de plaques épaisses multicouches. L'application de diverses théories évoluées pour les vibrations à haute fréquence de poutres et plaques a récemment attiré l'attention de plusieurs investigateurs. Ces théories sont utilisées pour évaluer les caractéristiques du comportement vibratoire non linéaire de poutres et de plaques composites stratifiées dans diverses conditions : temporelle, fréquentielle, géométriques, ..., etc.

La formulation mathématique d'un problème dynamique non linéaire conduit à un système d'équations généralement couplées. L'amplitude des vibrations varie en fonction des fréquences et la projection dans l'espace modal des équations dynamiques n'aide pas habituellement à surmonter cette difficulté pour avoir des solutions immédiates. Par conséquent, l'idée fondamentale pour approcher les fréquences non linéaires est de soumettre la structure à des excitations uni-modales (ou normales). Ce procédé permet d'utiliser la méthode de perturbation pour évaluer les fréquences non linéaires en fonction de l'amplitude de vibration. Pour une structure multidimensionnelle, ce procédé peut être effectué soit dans l'espace modal normalisé ou dans l'espace temporel réel. Le travail dans l'espace modal normalisé mène à une solution dynamique fortement influencée par le paramètre de perturbation qui devrait demeurer plus petit que l'unité. En outre, les vraies non-linéarités mécaniques peuvent se traduire par la récupération de fréquences dynamiques parasites qui perturbent les solutions dynamiques. Ce phénomène soulève un problème théorique en mathématique qui se place au-delà des limites de ces travaux. Le développement d'une solution asymptotique de la réponse dynamique dans l'espace temporel réel a été privilégiée parce qu'elle permet d'éviter cette contrainte.

Dans ce travail, nous étudions le comportement dynamique des structures poutres et plaques composites dans le cas de grandes déformations, en tenant compte de la non linéarité géométrique. Cette non-linéarité se trouve dans les expressions des déplacements ce qui en conséquence affecte les expressions des champs de déformations. Une modélisation par éléments finis hiérarchiques (MEFH) (ou Polynomiale MEFP) de poutres et plaques stratifiées épaisses non-linéaires est adoptée. Les fonctions de forme employées sont hiérarchiques (ou Polynomiale), basées sur les polynômes de Legendre [13] ou sur des fonctions réelles de type « sinus ».

Une méthode semi-analytique dans l'espace modal temporel réel basée sur la méthode des perturbations est développée pour déterminer l'évolution des fréquences en fonction des amplitudes de vibrations. Cette méthode est appliquée sur le comportement dynamique non-linéaire des poutres composites.

Le rapport de thèse comporte une étude bibliographique suivie de quatre chapitres.

Avant d'entamer l'étude bibliographique sur l'étude dynamique des structures géométriquement non linéaires, nous donnons d'abord un bref rappel sur l'aspect général des matériaux composites dont un but de donner une bibliographie générale sur les problèmes abordés dans cette thèse et de définir toutes les notations et définitions des différents paramètres.

Le premier chapitre est dédié à la présentation de la méthode des éléments finis hiérarchiques (polynomiales), la construction des fonctions de formes à partir des polynômes de Legendre et de la fonction « sinus » ainsi que les modélisations théoriques de comportement mécanique d'une poutre et d'une plaque. En tenant compte des termes géométriquement non-linéaires, la modélisation mathématique est obtenue en utilisant l'expression du champ de déformation basé sur l'hypothèse d'Euler-Bernoulli pour la section transversale des poutres et celle de Reissner-Mindlin pour les plaques, considérées comme épaisses. Nous terminons ainsi par la présentation des développements ayant conduit aux équations de mouvement.

Dans le chapitre deux, nous présentons la solution de l'équation linéaire de mouvements dynamiques. Pour l'étude non linéaire constituant le thème de notre recherche, nous montrons qu'un choix adéquat de la fonction de forme permet d'obtenir une meilleure approximation mathématique. Pour cela, une étude linéaire comparative est effectuée entre deux choix de fonctions de forme l'une obtenue à partir des polynômes de Legendre et l'autre est dérivée de la fonction trigonométrique réelle « sinus ». Les résultats obtenus par nos développements sont confrontés à ceux de littérature.

Pour une bonne compréhension de la partie non-linéaire, le troisième chapitre fait un bref rappel sur les méthodes de résolution des équations non linéaires.

Le quatrième chapitre présente les études réalisées en comportement dynamique non-linéaire. Nous décrivons la procédure de résolution de l'équation différentielle non-linéaire de mouvement. Une application test numérique est ensuite considérée pour montrer l'avantage de notre méthode par rapport à celles utilisées dans d'autres travaux de recherche. L'application concerne le cas de poutres composites multicouches épaisses sous différentes conditions aux limites et pour différentes orientations de l'orthotropie des plis (fils) des matériaux.

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

INTRODUCTION

En bureau d'études, l'ingénieur traitant de la conception des structures et des éléments structuraux est souvent confronté à des problèmes de comportements dynamiques non-linéaires des structures mécaniques. Cependant, on distingue plusieurs types de non-linéarités : des non-linéarités dues aux matériaux, des non-linéarités dues aux conditions aux limites et des non-linéarités de type géométrique. Généralement, afin d'aboutir à une conception adéquate et sûre, il est nécessaire de mener une étude mécanique approfondie pour appréhender leurs comportements non-linéaires.

Lorsque la structure non-linéaire se compose d'éléments « poutre », l'étude de son comportement dynamique global peut être prise indépendamment de la structure, et leur comportement peut être étudié par rapport aux états aux frontières appropriés. C'est qu'une fois que nous sommes en mesure de comprendre le comportement dynamique non-linéaire de structures simples telles qu'une poutre composite que nous pourrions appréhender le comportement dynamique de structures composites complexes.

Le but de ce travail est de contribuer aux efforts consacrés à l'analyse dynamique non-linéaire des structures poutres composites employées couramment dans la conception mécanique. L'analyse et la conception des poutres composites peuvent être très compliquées quand elles sont soumises à de grandes déformations, ou quand le matériau est soumis à une contrainte dépassant sa limite d'élasticité conduisant à sa plastification, son écrouissage ou simplement sa rupture. Par conséquent, ce type de problèmes mérite une considération particulière.

1. Aspect général sur les composites

Les poutres, plaques et coques stratifiées composites sont utilisées dans différents domaines de la conception mécanique : automobile, aéronautique, navale, ponts et chaussées, bâtiment, ..., etc.

Les structures composites offrent les avantages de la légèreté et de la résistance comparées à celles réalisées avec les matériaux classiques (acier, aluminium, bois, ..., etc). Ces avantages, ajoutés à la possibilité de permettre des conceptions particulières et spécifiques, leur ont donné un avantage concurrentiel sur les matériaux utilisés habituellement dans la technologie et ont mené à la démocratisation de leur utilisation.

On remarque cependant, depuis les années 1980, l'utilisation des matériaux composites dans l'industrie s'est remarquablement accélérée. En conséquence, les problèmes scientifiques d'optimisation ont commencé à se faire ressentir. Ainsi, on distingue des études sur l'analyse vibratoire des poutres et plaques stratifiées et la propagation d'ondes réalisées par Kapania et Raciti [1] en 1989. Un passage en revue de la recherche sur l'analyse statique, dynamique et la stabilité des barres de torsion et des poutres réalisé par Rosen [2] en 1991. De même, on trouve une analyse sur les vibrations des barres incurvées, poutres, anneaux et voûtes de forme arbitraire réalisée par Chidamparam et Leissa [3] en 1993. Il y a lieu également, de signaler l'existence de plusieurs ouvrages dans la littérature dont le contenu est consacré à ces problèmes scientifiques. Nous citons, à titre d'exemple, la référence [4] dont le contenu a été consacré à la vibration des poutres, des plaques et des coques composites.

1.1. Constitution et intérêt des composites à matrice organique (CMO) pour la conception des structures

De façon générale, il existe trois grandes familles de matériaux composites : Composites à Matrice Céramique (CMC), essentiellement utilisés pour les applications à hautes températures ; Composites à Matrice Métallique (CMM) et Composites à Matrice Organique (CMO).

1.1.1. Constitution générale des matériaux composites

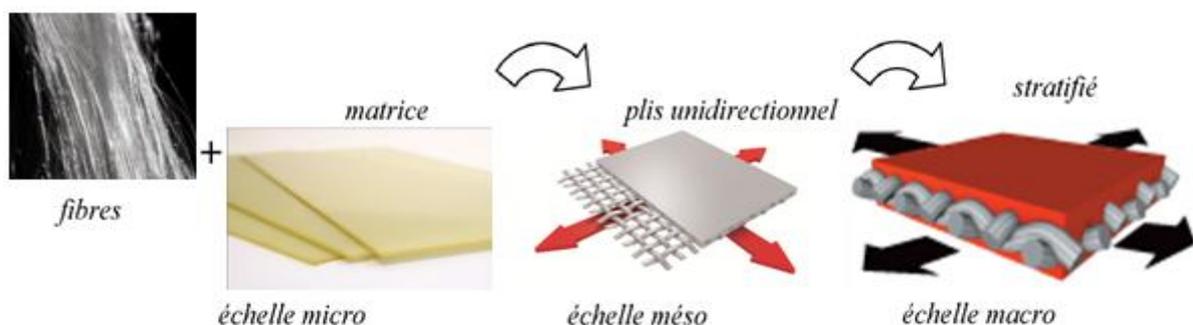


Figure 1 : Les échelles des constituants d'un composite stratifié.

Un matériau composite résulte de l'assemblage naturel ou industriel d'au moins deux matériaux de natures différentes, non miscibles, se complétant et permettant d'obtenir

un matériau unique dont les performances globales sont améliorées pour un besoin spécifique par rapport à celles de ses constituants élémentaires.

Les composites les plus employés pour la conception des structures froides dans le domaine aéronautique sont constitués de résines organiques et de fibres et constituent la classe des CMO. Les fibres (le plus souvent de carbone dans le domaine aéronautique, ou parfois de verre) assurent dans leur direction essentielle une rigidité et une résistance au matériau final.

Ces fibres peuvent être continues et nous parlons alors de fibres longues (les plus courantes dans le domaine d'application qui concerne ce travail) ou discontinues (fibres coupées ou fibres courtes). La matrice (colle, fusion chimique, fusion mécanique, ..., etc) assure la cohésion du matériau et permet le transfert des efforts entre les fibres. Les procédés de fabrication usuels conduisent généralement à l'élaboration de pièces composites stratifiées constituées d'un empilement de plis unidirectionnels (UD, voir Figure 1) ou tissés.

Nous nous positionnons dans la suite de ces travaux dans le cadre de l'étude des stratifiés à base de plis unidirectionnels, réalisés en CMO de hautes performances à fibres de carbone continues.

1.1.2. Performances et particularités des CMO pour la conception des structures

Le succès croissant des CMO est avant tout lié à leurs excellentes caractéristiques mécaniques spécifiques dans le sens des fibres. Ces matériaux présentent de surcroît une faible sensibilité à la fatigue et à la corrosion leur conférant donc une longévité accrue.

De façon générale, la conception de structures composites débute par une première optimisation du matériau qui consiste en pratique à choisir le couple fibre/matrice, puis le taux de fibres unidirectionnels. Il existe une multitude de fibres et de matrices envisageables. Le choix de la matrice dépend principalement de la gamme de température de fonctionnement désirée. Les fibres peuvent être à module et résistance hautes ou intermédiaires cela en fonction du compromis entre rigidités et résistances recherchées. Ces considérations sont toutefois mises en balance pour des considérations de coût et de chaîne d'approvisionnement, mais c'est en finale la qualification du matériau vis-à-vis des organismes de certification aéronautique qui s'avère être la plus contraignante.

La fabrication des stratifiés offre en outre la possibilité d'adapter le comportement du matériau aux conditions de chargement attendues. Le matériau est conçu, optimisé et réalisé simultanément avec la pièce. Il constitue en lui-même une structure à part entière, architecturée par l'arrangement des fibres en couches successives. C'est dans la gestion de l'empilement, constituant ainsi un degré de liberté supplémentaire par rapport à la conception métallique, que réside la spécificité de l'optimisation composite. Par "empilement", on entend ici le nombre de plis et l'orientation de chacun.

Sauf mention contraire, on ne considère dans la suite que des empilements de plis identiques. Dans les configurations les plus simples, une plaque par exemple, la minimisation de la masse est donc directement liée à la minimisation du nombre de plis. Finalement, pour toute pièce composite, l'empilement est susceptible d'être optimisé :

- soit pour maximiser les performances mécaniques de la pièce à nombre de plis constant ;
- soit pour minimiser le nombre de plis tout en assurant les performances mécaniques spécifiées dans le cahier des charges.

Cet aspect de la conception composite reste toutefois largement sous-exploité à l'heure actuelle dans le monde industriel, faute d'outils « *ad-hoc* ». Les méthodes actuelles de dimensionnement sont en effet largement dérivées des méthodes développées pour les matériaux métalliques, inadaptées à la gestion des empilements et à la complexité des mécanismes régissant le comportement, l'endommagement et la rupture des stratifiés bien que les modèles et les outils de calcul nécessaires existent. La section suivante est ainsi consacrée à la présentation des approches multi-échelles dédiées aux matériaux composites stratifiés.

1.2. Des approches multi échelles pour des comportements complexes

La description de l'architecture du stratifié permet de mettre en évidence trois échelles pour l'analyse de son comportement (Figure 1) :

- Microscopique : fibre et matrice ;
- Mésoscopique pour le comportement homogénéisé du pli ;
- Macroscopique pour le comportement homogénéisé du stratifié.

Dans le cadre d'un problème de conception composite, travailler uniquement à l'échelle macroscopique est sans intérêt puisqu'on ne peut rendre compte de l'influence des

modifications d'empilement. Partir de l'échelle microscopique semble *a priori* idéal, puisque, en plus de capturer l'influence de l'empilement, ce type d'approche permet de prendre en compte les modifications de nuance du matériau (changement de matrice, de fibre ou du taux de fibre). Cette démarche se heurte toutefois à de grandes difficultés d'identification des paramètres des matériaux des constituants. En conception aéronautique, le matériau est ainsi le plus souvent caractérisé à l'échelle du pli. Pour étudier l'influence de l'empilement sur le comportement de la structure stratifiée, l'échelle mésoscopique constitue donc un niveau de détails au-dessous duquel nous ne descendons pas.

1.2.1. Prise en compte de l'influence de l'empilement sur le comportement élastique du stratifié

Nomenclature des stratifiés :

nous désignons les stratifiés par l'orientation des fibres de chaque pli par rapport à un repère global arbitraire (x,y,z) , l'axe x correspondant le plus souvent à la direction du chargement. Un pli orienté à 0° présente des fibres dirigées selon l'axe x alors qu'un pli orienté à 90° présente des fibres dirigées selon y . Un stratifié quelconque de N plis est ainsi désigné par le N -uplet des orientations de ses plis dans le sens des z croissants. Pour condenser l'écriture, on note sous forme d'indice le nombre de plis adjacents de même orientation ainsi que le nombre de répétitions d'une même séquence de plis. L'indice " s " correspond à un stratifié symétrique pour lequel on ne renseigne que la moitié de l'empilement, de la surface au plan de symétrie miroir. La Figure 2 présente l'exemple d'un empilement symétrique [90/45/0].

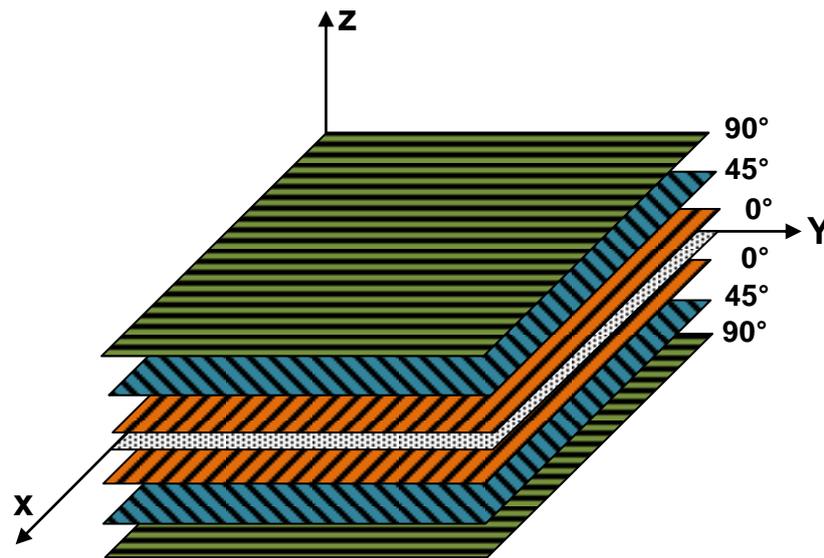


Figure 2 : Exemple d'empilement symétrique quasi-isotrope [90/45/0].

1.3. La Théorie Classique des Stratifiés

La *Théorie Classique des Stratifiés* (ou *CLT*, l'acronyme anglais de *Classical Lamination Theory*) constitue la méthode de changement d'échelle méso-macro la plus largement utilisée dans les approches multi échelles analytiques publiées. Cette méthode simple permet d'estimer, à partir du chargement macroscopique appliqué (flux d'efforts membranaires et de moments de flexion et de torsion), les champs de contraintes et de déformations à l'échelle du pli. Pour une description complète de la CLT, il est possible de se référer à l'un, quelconque, des ouvrages de référence cités dans la thèse de L. BOUYAYA [5]. On se contente ici d'en rappeler les principales hypothèses et les aspects marquants.

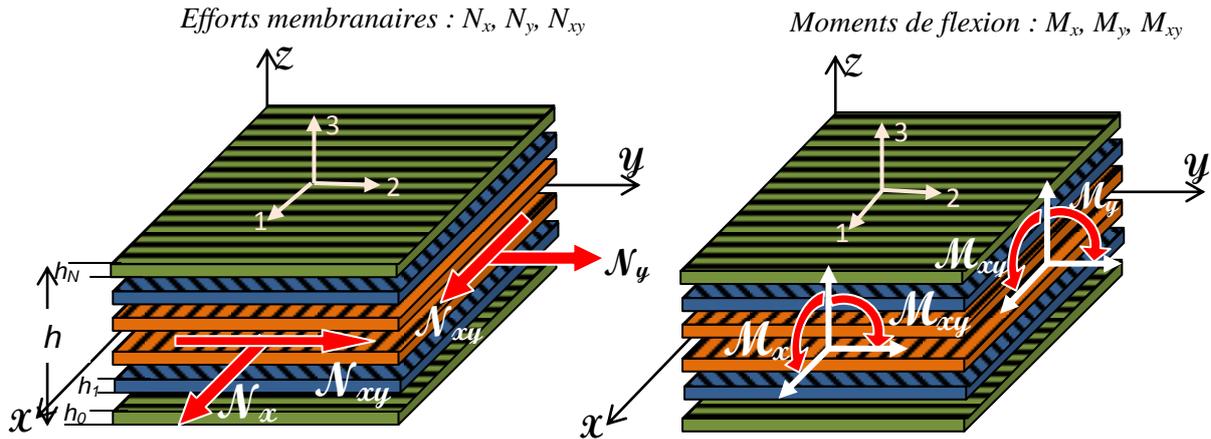


Figure 3 : Hauteurs de plis, repère global (x,y,z) et repère local $(1,2,3)$ associé au pli supérieur orienté à -45° .

A l'échelle microscopique, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, les plis unidirectionnels sont supposés :

- présenter un comportement élastique isotrope transverse, ainsi le sens radial est confondu avec le sens tangentiel,
-
- travailler en contraintes planes ($\sigma_3 = \sigma_5 = (\tau_3) = \sigma_4 = (\tau_{23}) = 0$).
- Le matériau est ainsi caractérisé à l'échelle du pli par ses propriétés élastiques E_1, E_2, ν_{12} et G_{12} . La relation entre contraintes et déformations s'écrit, dans les axes d'orthotropes du pli, notés $(1,2,3)$, (voir Figure 3) sous la forme (notations de Voigt) :

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_1 \\ \bar{\epsilon}_2 \\ \bar{\epsilon}_6 \end{bmatrix} \quad (1)$$

où les termes non nuls de la matrice de rigidité réduite du pli dans ses axes matériau s'écrivent :

$$\bar{Q}_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \bar{Q}_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \bar{Q}_{12} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \text{ et } \bar{Q}_{66} = G_{12}$$

Pour le passage à l'échelle macroscopique, la *Théorie Classique des Stratifiés* est basée sur l'approche monocouche équivalente décrite dans le paragraphe suivant.

1.3.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre de degrés de liberté ne dépend pas du nombre de couches. Le cisaillement transverse peut être pris en compte à travers l'inclinaison de la section transverse.

a) Modèle classique Love-Kirchhoff

Le modèle classique Love-Kirchhoff se base sur l'hypothèse que :

- Les déplacements et déformations restent petits (hypothèse de petites perturbations) ;
- Les interfaces entre les plis sont parfaites ;
- La section de la plaque reste normale au plan moyen au cours du chargement (Figure 4), ce qui implique la nullité des déformations transverses de cisaillement ($\bar{\epsilon}_5 = \gamma_{13} = \bar{\epsilon}_4 = \gamma_{23} = 0$).

Le champ de déplacement d'une plaque de Love-Kirchhoff s'écrit :

$$\begin{aligned} U_\alpha(x_1, x_2, z) &= U_\alpha(x_1, x_2) - zW_{,\alpha}(x_1, x_2) \quad \alpha = 1,2 \\ U_3(x_1, x_2, z) &= W(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2)$$

avec :

1,2 : directions dans le plan de la plaque ;

3 : normale à la plaque ;

U_α : déplacement membranaire dans la direction α ;

W : flèche de la plaque ;

$W_{,\alpha}$: rotation due à la flexion (sans cisaillement).

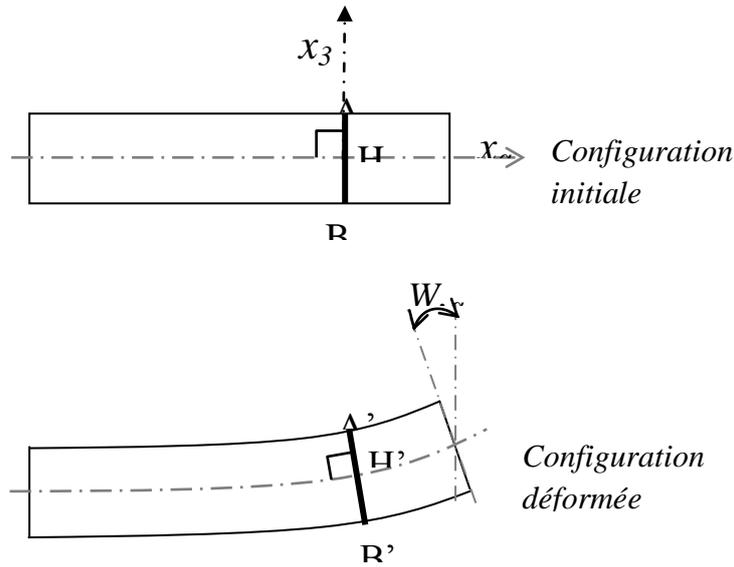


Figure 4: Hypotheses de Kirchhoff-Love.

Par conséquent, les déformations totales, exprimées dans le repère global, sont supposées linéaires dans l'épaisseur du stratifié et s'écrivent :

$$\varepsilon(z) = \varepsilon^0 + zk^0 \quad (3)$$

où ε^0 et k^0 correspondent respectivement aux vecteurs des déformations et des courbures du plan moyen. Par définition, les flux d'effort résultants se déduisent des contraintes dans les plis par les relations intégrales suivantes :

$$N = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(z) dz \text{ (efforts linéiques)}, \quad M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(z) z dz \text{ (moments linéiques)}. \quad (4)$$

Nous déduisons facilement des équations 3 et 4 les relations classiques de la théorie des stratifiés dans le cas de l'élasticité :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_{xy}^0 \end{bmatrix}, \text{ c'est à dire } [N] = [ABD][\varepsilon] \quad (5)$$

$$\text{où } \begin{cases} A = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q^{(k)} \\ B = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q^{(k)} \\ D = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q^{(k)} \end{cases}$$

Sous cette écriture, l'analyse de la matrice de rigidité assemblée du stratifié (la matrice ABD) permet de mettre en évidence certains comportements élastiques caractéristiques des stratifiés :

- le bloc A correspond au comportement de membrane,
- le bloc B correspond au comportement de flexion,
- le bloc D correspond aux termes de couplage entre les phénomènes de membrane et de flexion.

Ainsi, si B n'est pas nul, un effort de traction dans le plan moyen entraîne une flexion du stratifié.

Toutefois d'autres couplages existent à l'intérieur même des comportements de membrane et de plaque :

- les termes A_{16} et A_{26} correspondent aux couplages plans entre traction et cisaillement ;
- les termes D_{16} et D_{26} quantifient les couplages entre flexion et torsion de la plaque stratifiée.

Le plus souvent ces couplages constituent une difficulté supplémentaire de la conception en matériau composite.

Par exemple, lors du dimensionnement d'une plaque, les termes de couplages peuvent s'avérer pénalisants en engendrant une dépendance en plus du cisaillement. L'attitude classique consiste à annuler ces couplages lorsque cela est possible, les minimiser sinon. Les règles industrielles de conception des séquences d'empilement préconisent ainsi l'usage :

- de stratifiés symétriques par rapport à leur plan moyen afin d'annuler les couplages entre comportements de membrane et flexion ($B = 0$) ;

- d'empilements équilibrés, c'est-à-dire présentant autant de plis orientés à $+\theta^\circ$ que plis orientés à $-\theta^\circ$, où $\theta \in]0,90[$, afin d'annuler les termes de couplage plan ($A_{16} = A_{26} = 0$).

L'équation (5) permet de mettre en évidence que si le comportement de membrane du stratifié dépend uniquement des propriétés élastiques et de l'épaisseur des plis qui le composent, les blocs B et D dépendent largement de l'ordre d'empilement des plis. Jouer sur les rigidités de flexion et de couplage du composite à rigidité de membrane fixée constitue ainsi un problème combinatoire (de permutation des plis) spécifique de la mécanique des stratifiés.

b) Modèle classique de Reissner-Mindlin

Pour introduire le cisaillement transversal, on fait l'hypothèse cinématique [5] que la section reste plane mais n'est plus normale à la section moyenne dans la configuration déformée (Fig.1.5). Le champ de déplacements de la plaque de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{aligned} U_\alpha(x_1, x_2, z) &= U_\alpha(x_1, x_2) - z\phi_\alpha(x_1, x_2) \quad \alpha = 1,2 \\ U_3(x_1, x_2, z) &= W(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (6)$$

avec :

U_α : Le déplacement membranaire de la direction α ;

W : La flèche de la plaque ;

ϕ_α : La rotation de la normale autour des axes x_α .

U_3 est constant en z et donc ε_{13} et ε_{23} sont constants en z . Ainsi, σ_{13} et σ_{23} sont constants par couches.

De plus, $\varepsilon_{33} = 0$ ce qui est incompatible avec l'hypothèse classique de plaque faite dans le modèle, à savoir $\sigma_{33} = 0$. Ceci fait que le modèle prédit très mal le comportement en cisaillement transverse et qu'il faut introduire la notion de coefficient correcteur pour mieux prendre en compte les effets de cisaillements transversaux [5].

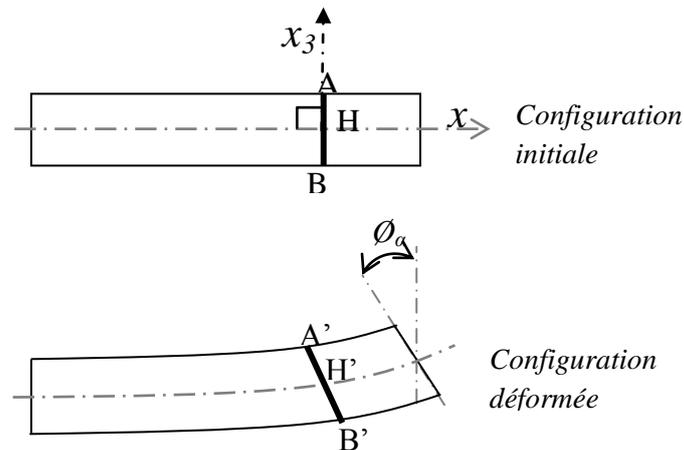


Figure 5: Hypothèses de Reissner-Mindlin.

c) Modèles d'ordre supérieur

Pour dépasser les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories d'ordre supérieur où la distribution des champs dans l'épaisseur est non-linéaire. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilise un développement en série de Taylor des champs de déplacement pour approcher la théorie tridimensionnelle. Le déplacement est donc assumé de la forme :

$$U_i(x_1, x_2, z) = U_i(x_1, x_2) + z\phi_i^{(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{(3)}(x_1, x_2) + \dots \quad (7)$$

avec $i = 1 \dots 3$.

Le comportement mécanique et dynamique d'un stratifié est fortement dépendant des directions et des densités des fibres ; pour ces raisons, le stratifié devrait être conçu pour répondre aux exigences spécifiques de chaque application particulière afin d'obtenir le maximum d'avantages de ces matériaux.

Ce travail s'inscrit dans cette continuité et est une contribution au problème de vibrations nuisibles et l'objectif principal présenté dans cette thèse est de montrer comment, en utilisant une méthode d'optimisation, agir sur les fréquences des modes gênants des structures stratifiées en les repoussants hors du champ de résonance. Nous allons rigidifier le stratifié pour trouver la fréquence maximale en faisant varier les orientations et les densités de ses fibres, en respectant ses paramètres géométriques.

Le contenu de ce travail présent : la modélisation et identification des structures mécaniques composites

Les poutres, plaques et coques composites sont de plus en plus utilisées dans l'industrie mécanique et en particulier l'industrie du transport (l'aéronautique, la construction navale, la construction automobile ou encore la construction ferroviaire).

Un des problèmes importants dans la conception des structures composites est l'analyse de vibration des poutres composites. Les poutres composites en tant que structures légères supportent des charges dans divers applications. Les travaux de recherche sur les poutres composites peuvent être trouvés dans beaucoup de conférences et de journaux scientifiques.

1.3.2. Théorie des poutres

Les poutres sont généralement considérées en modélisation tridimensionnelle (3D). Les équations 3D de l'élasticité sont inutilement compliquées une fois écrites pour une poutre. Les chercheurs simplifient de telles équations en assurant des conditions pour des applications particulières. Presque toutes les théories de poutre réduisent le problème d'élasticité 3D en un problème unidimensionnel.

Il y a deux problèmes typiquement rencontrés dans l'analyse des poutres unidimensionnelles. Le premier concerne la question de couplage des paramètres et de trouver comment inclure les divers paramètres de couplage ignorés pour réduire le problème 3D en un problème 1D. Une démarche appropriée pour inclure des paramètres de couplage est de redéfinir des paramètres de rigidité de telle sorte qu'ils incluent d'autres paramètres de couplage.

Le problème de couplage peut être résolu en employant des paramètres équivalents de rigidité au lieu de la définition usuelle des A_{11} , de B_{11} , et de D_{11} .

Kaw [6] a suggéré pour définir les paramètres de rigidité basés sur la matrice de flexibilité (l'inverse de la matrice ABD). Rios et al [7] ont proposé une autre formulation basée sur la matrice inverse de ABD. Ecsedi et al [8] ont analysé le comportement statique et dynamique des poutres courbées non homogènes et des anneaux fermés. Les équations du champ de déplacements et les conditions aux limites sont formulées en coordonnées cylindriques.

Quelques autres chercheurs [9-12] ont traité le problème des poutres composites stratifiées comme étant des poutres homogènes isotropes où les paramètres de flexion (EI), de torsion (GJ), et de rigidité axiale (EA) sont pris constants. A la connaissance des auteurs,

aucun de ces modèles n'est généralement suffisamment précis dans l'analyse des poutres stratifiées. Hajianmaleki et Qatu [13] ont montré l'utilisation du module d'élasticité équivalent de chaque couche du matériau. Ils peuvent généralement obtenir des résultats précis pour des analyses statiques et dynamiques des poutres stratifiées généralement avec n'importe quel genre de couplage.

1.3.2.1. Théorie classique des poutres

Si l'épaisseur d'une poutre est inférieure à $1/20$ de la longueur d'onde du mode de déformation, la théorie classique des poutres ou la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli est généralement acceptable pour la détermination des basses fréquences.

Qatu [14] et Qatu et Elsharkawi [15] ont employé la théorie classique des poutres pour étudier les vibrations des poutres stratifiées droites et courbes à plis croisés. Ils ont employé la méthode de Ritz pour résoudre les équations du mouvement. Qatu et Iqbal [16] ont utilisé la théorie classique des poutres pour résoudre la vibration des arbres de transmission composites à plis croisés et joint intermédiaire.

Mei [17] a étudié l'effet de couplage entre la déformation de flexion et celle de la torsion sur des vibrations des poutres composites d'Euler-Bernoulli pour l'onde vibratoire. Le mode de torsion a été trouvé affecté par le couplage matériel aux basses fréquences seulement. Les modes de flexion peuvent être affectés par couplage matériel au-dessus de toute la bande des fréquences. Mei [18] a également étudié la transmission d'onde locale et les caractéristiques de réflexion pour diverses discontinuités sur les poutres composites. Gunda et al [19] ont étudié les vibrations de grandes amplitudes des poutres composites stratifiées avec des orientations symétriques et asymétriques des couches et des déplacements axiaux des extrémités fixées. Ils ont employé la théorie classique des poutres et ont résolu les équations par la méthode de Rayleigh-Ritz. Ils ont considéré la non-linéarité géométrique du type von-Karman. Hajianmaleki et al [20] ont utilisé les paramètres de rigidité dans une formulation de la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement pour étudier la vibration transversale des deux-segments d'un axe stratifié.

1.3.2.2. Les théories de déformation de cisaillement

La théorie classique des stratifiés basé sur l'hypothèse de Kirchhoff, permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et déformations dans les matériaux

composites stratifiés peu épais. Par contre, dans le cas de stratifiés épais, la théorie classique devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique. Une première amélioration consiste à tenir compte du cisaillement transversal, avec une théorie des plaques de premier degré. Une deuxième amélioration consiste à modifier cette théorie, en introduisant un facteur de correction au module de cisaillement transversal. Beaucoup de chercheurs ont introduit ces théories dans leurs travaux de recherches. Nous pouvons citer le travail de Vijay K. Goyal et al [21] où ils ont modélisé un élément à 21 de degrés de libertés, basé sur le premier ordre de déformation de cisaillement, est décrit pour étudier la réaction des structures composites stratifiées asymétriques dues aux problèmes statiques et dynamiques. Dans le modèle de premier ordre de déformation de cisaillement utilisé ici, ils ont utilisé un modèle précis pour obtenir le facteur de correction de cisaillement transversal. Abramovich [22] a étudié la vibration libre des poutres composites symétriques prenant en compte les effets de cisaillement et l'inertie de rotation négligées dans les équations de Timoshenko. Un modèle de couple de contraintes modifié pour l'analyse de la flexion des poutres stratifiées composite avec le premier ordre de déformation de cisaillement est présenté par Wanji Chen et al [23]. Dans le même contexte mais à l'ordre supérieur, Song Xiang et al [24] ont étudié une théorie de déformation de cisaillement à n-ordre pour les vibrations libres des plaques composites sandwich et un matériau fonctionnellement gradué. Cortinez et al [25] ont développé un modèle théorique pour l'analyse dynamique des poutres composites à parois minces de sections transversales ouvertes ou fermées. Leur modèle a introduit la flexibilité de cisaillement aussi bien qu'un état de contraintes initiales.

Lee et al [26] ont dérivé l'équation régissant les vibrations libres des poutres courbés élastiques asymétriques en coordonnées cartésiennes, prenant en compte l'effet de l'inertie de torsion. Ils ont numériquement calculé les fréquences et les formes modales des poutres courbés paraboliques dans le cas où les deux extrémités sont encastées et les deux extrémités articulées. Dans une autre recherche [27] ils ont inclus les effets d'allongement axial, de déformation de cisaillement, et d'inertie de rotation.

Pour l'étude du comportement mécanique, Karama et al [28] ont proposé un modèle des structures composites stratifié multicouches utilisant une fonction exponentielle comme fonction de contrainte de cisaillement. Ils ont validé le modèle pour différents cas : flexion, flambement et vibrations libres de stratifiés à plis croisés.

Mei [29] a présenté l'effet du couplage des déformations de flexion et torsion sur les vibrations des poutres composites symétriques de Timoshenko au point de vue vibrations d'ondes. Il a constaté que les modes de torsion à basses fréquences et à fréquence de coupure transitoire ne dépendent pas de couplage matériel. L'analyse de vibrations d'ondes dues aux forces axiales du couplage flexion-torsion des structures composites des poutres de Timoshenko est également présentée par Mei [30].

1.3.2.3. Théories des déformations de cisaillement du premier ordre

Des méthodes de la théorie du premier ordre des déformations de cisaillement (TPODC) ont été employées par beaucoup de chercheurs. Les travaux de Chandrashekhara et al [31], Krishnaswamy et al [32], Abramovich et al [33, 34] ont été validés pour des stratifiés croisés symétriques n'ayant aucun couplage de déformation. Dans le modèle TPODC de Teboub et al [35] pour des poutres composites symétriques ayant des fibres unidirectionnelles ont été considérées.

Bert et al [36] ont proposé une méthode TPODC pour prévoir la vitesse critique d'un cisaillement déformable, d'un arbre d'entraînement en composite. Ils ont modélisé un arbre comme une poutre de Bresse-Timoshenko (TPODC tenant compte l'effet de l'inertie de rotation aussi que l'effet gyroscopique) généralisée pour inclure le couplage de la flexion et de la torsion. Les modèles TPODC de Eisenberger et al [37] et Qatu [38] pour les poutres courbées ont été également validés pour des stratifiés à plis croisés.

1.3.2.4. Théories des déformations de cisaillement d'ordre supérieur

Certains auteurs ont développé des méthodes de la théorie d'ordre supérieur de déformation de cisaillement (TOSDC) pour l'analyse des poutres composites. Carrera et al [39] ont réussi à développer des théories d'étude d'ordre plus élevés pour les poutres. Ils ont conclu que le modèle cinématique le plus adapté au problème particulier est déterminé par la géométrie de la section croisée et le type de chargement. Khdir et al [40] ont déterminé des fréquences naturelles par la théorie au troisième ordre, au deuxième ordre, au premier ordre ainsi que la théorie classique des poutres archées stratifiées à plis croisés. Dans une autre recherche, ils ont développé les solutions analytiques plus précises pour l'étude du comportement vibratoire libre des poutres stratifiées à plis croisés rectangulaires dans le cas de conditions aux limites arbitraires. Ils ont prouvé que le

désaccord entre les différentes théories de déformation de cisaillement est moindre devant le désaccord de chacune de celles-ci et la théorie d'Euler-Bernoulli [41].

Suresh et al [42] ont proposé une méthode TOSDC pour l'analyse statique et dynamique des poutres composites creuses à parois minces et des sections transversales ouvertes et fermées. Leur méthode a été validée par comparaison aux résultats analytiques et expérimentaux de flexion statique de poutres composites à couches symétrique et antisymétrique. Song et Waas [43] ont étudié le flambement et les vibrations libres des poutres composites stratifiées multicouches en utilisant des termes TOSDC en supposant une distribution de champ de déplacement cubique à travers l'épaisseur. Les résultats ont été comparés avec ceux de la théorie classique des poutres et la méthode TPODC et ils n'ont pas donné des différences significatives par rapport à ceux obtenus pour une large gamme de géométrie de poutres et de propriétés matérielles.

Marur et al [44] ont proposé trois modèles d'ordre supérieur en déplacement pour l'analyse des vibrations libres de poutres composites sandwich. Par tous les modèles d'ordre supérieur, les fréquences calculées par ces méthodes étaient numériquement plus élevées que celles de TPODC dans le cas des poutres minces considérées. Dans le cas des poutres sandwichs épaisses, les théories d'ordre supérieur donnent des fréquences sensiblement inférieures à celles obtenues par la théorie de Timoshenko. Kant et al [45] ont proposé un modèle d'ordre supérieur analytique en utilisant des fonctions continues pour les stratifiés symétriques.

Matsunaga [46] a étudié les vibrations et le flambement des poutres stratifiées à plis croisés par la méthode TOSDC. Subramanian [47] a proposé le deuxième ordre et deux approches de méthodes des éléments finis et les valider pour les poutres stratifiées symétriques et les différents rapports dimensionnelle.

Machado et al [48] ont considéré la déformation de cisaillement dans l'étude de la stabilité dynamique des poutres composites à parois minces soumises à une force externe axiale. Ils ont employé la méthode de Galerkin pour discrétiser l'équation de mouvement et la méthode du Bolotin pour déterminer les régions d'instabilité dynamique dans le cas d'une poutre simplement appuyée. Les résultats numériques ont montré que la vibration longitudinale a une large influence lorsque la fréquence forcée approche la fréquence longitudinale normale obtenue dans des régions à plus grande instabilité.

Emam et al [49] ont proposé une solution analytique pour la déformation post-flambement en fonction de la charge axiale appliquée, supérieure à la charge critique de flambement. Ils ont résolu d'une manière exacte le problème linéaire de vibration autour de la première configuration de voilement. EL Fatmi et al [50] ont proposé une méthode TOSDC basée sur une cinématique basée sur la forme exacte des déplacements de Saint-Venant pour des sections transversales symétriques.

2. Identification des structures mécaniques composites

En pratique, les structures mécaniques composites sont souvent forcées à vibrer avec de grandes amplitudes induisant alors des non-linéarités géométriques significatives. Ces dernières sont à l'origine de phénomènes d'instabilités complexes. L'analyse de ces problèmes devient alors délicate. En effet, une non-linéarité géométrique peut induire des problèmes de points limites, de multiplicité de solutions ; nous parlons alors de bifurcation. La présence d'instabilités nécessite des outils de calculs performants pour une meilleure simulation numérique. La dimension du système à résoudre double par rapport au problème initial. Ceci peut engendrer des difficultés de résolution numérique (opérateurs de grande taille, temps de calcul ...).

Dans cette partie, nous donnons un aperçu général sur l'étude dynamique des structures incluant des non-linéarités géométriques. Un des objectifs de ce chapitre est d'abord de faire une étude bibliographique sur ce type de problème et de définir toutes les notions facilitant la lecture du manuscrit. Ensuite, il est présenté la modélisation mathématique des structures composites dans le cas linéaire et non-linéaire. Nous suivons alors par le développement d'une méthode semi-analytique dans l'espace modal réel, basé sur la méthode de perturbation pour déterminer l'évolution des fréquences en fonction de l'amplitude de vibrations.

2.1. Analyse dynamique non-linéaire

L'étude du comportement dynamique de structures comportant des non-linéarités géométriques a fait l'objet de plusieurs recherches. Pour son étude, il nous faut disposer de méthodes numériques efficaces, notamment des méthodes de continuation et de perturbation présentées par A. H. Nayfeh et D. T. Mook [51], afin de déterminer précisément les courbes de réponses.

Dans le cas de non-linéarités dynamiques, la fréquence de vibration des oscillations libres dépend de l'amplitude de vibration. Diverses théories sont utilisées pour évaluer les caractéristiques vibratoires non-linéaires de plaques et poutres composites stratifiées en grandes déformations pour des conditions initiales données.

La plupart des études présentées dans la littérature ([52], [53], [54]), sont basées sur des modèles numériques itératifs utilisant des formes modales dynamiques d'amplitudes de vibrations variables. La formulation habituelle en dynamique non-linéaire est de rechercher des solutions par la méthode de séparation des variables exprimées en fonction de la fréquence modale [55-58].

P. Malekzadeh et al [59] ont présenté une méthode numérique itérative employée pour l'étude de poutres composites dont les bases reposent sur des appuis élastiques non-linéaires. Le comportement dynamique des poutres composites épaisses est affecté par plusieurs facteurs. Différentes approches ont été explorées pour leur étude. Une étude basée sur la modélisation par éléments finis où les effets dynamiques de l'inertie de rotation ainsi que les déformations de cisaillement ont été considérées par Moshe Eisenberger et al [60] et Haim Abramovich et al [61]. Samir A. Emam et al [62] ont étudié les vibrations non-linéaires de poteaux en flambement sous excitation externe harmonique.

La majorité des travaux portant sur les structures géométriquement non-linéaires utilisent soit les méthodes d'intégration directe pour résoudre les équations non-linéaires dynamiques du mouvement soit les méthodes d'équilibrage harmonique pour transformer les équations dynamiques en équations statiques équivalentes. La plupart des travaux scientifiques dans ce domaine sont orientés vers le comportement dynamique des plaques stratifiées [63, 64, 65]. En ce qui concerne l'utilisation des méthodes d'intégration directe, nous pouvons citer le travail de M. Sathyamoorthy [66] qui a étudié des plaques circulaires soumises à des vibrations d'amplitudes modérément grandes. Les équations de mouvement sont développées en utilisant les coordonnées polaires cylindriques en incluant l'effet de cisaillement transversal et les inerties de rotation. En employant une approche à un seul mode, les solutions sont obtenues par la procédure de Galerkin et la technique d'intégration numérique de Runge-Kutta.

M.K. Singha et al [67] ont étudié le comportement vibratoire en flexion de grande amplitude de plaques composites laminées en utilisant la méthode des éléments finis. La

formulation est faite en tenant compte des effets de cisaillement, des inerties longitudinales et de rotation.

P. Ribeiro [68] a développé une version- p de méthode des éléments finis hiérarchiques pour l'étude de plaques isotropes modérément épaisses en vibrations libres. Dans son approche, les effets de l'inertie de rotation, du cisaillement transversal et de non-linéarité géométrique, dus aux grands déplacements, sont pris en compte. Les équations du mouvement de vibration libre dans le domaine temporel sont obtenues en appliquant le principe des travaux virtuels et leurs solutions sont tracées dans le domaine fréquentiel en utilisant la méthode d'équilibrage harmonique. Les équations résultantes du domaine fréquentiel sont résolues par une méthode d'indicateur/correcteur. Les propriétés de convergence de l'élément, l'influence de l'épaisseur et de la largeur ainsi que la flèche de la courbure sur les formes des modes non-linéaires sont étudiées. Les auteurs ont introduit la non-linéarité géométrique basée sur des hypothèses de Von Kármán. Les équations non-linéaires du mouvement obtenues en employant la méthode de Galerkin sont résolues par une technique itérative directe. La réponse vibratoire temporelle non-linéaire est également obtenue en utilisant le schéma d'intégration numérique de Newmark pour examiner l'exactitude des équations de mouvement.

C.-S. Chen et al [69] ont présenté les équations différentielles partielles non-linéaires décrivant le mouvement vibratoire d'une plaque isotrope soumise à une condition de contrainte initiale. Les équations de mouvement contiennent des termes de perturbation, déformation de cisaillement transversal, inertie de rotation et condition de contraintes initiales non uniformes.

Dans l'étude de Metin Aydogdu [70], une nouvelle théorie de déformations de plaques composites stratifiées comportant des termes d'ordre supérieur dus au cisaillement est proposée. Elle est construite à partir des solutions d'élasticité de flexion à trois dimensions en employant une méthode inverse. Cette théorie satisfait exactement les contraintes de conditions aux limites sur les faces supérieures et inférieures de la plaque.

Plusieurs auteurs ont employé soit la technique des perturbations, la méthode de Galerkin ou la méthode de Runge-Kutta pour résoudre le problème non-linéaire. H.-X. Lu et J.-Y. Li [71] ont utilisé une méthode d'intégration pour étudier les plaques rectangulaires simplement appuyées. Cette méthode, contrairement à la méthode traditionnelle des différences finies, donne des résultats numériques très précis.

Dans le même contexte, certains travaux se basent sur l'équilibrage harmonique pour transformer le problème dynamique en un problème statique équivalent. R. Lewandowski [72] a présenté dans son article une formulation générale de calcul des structures géométriquement non-linéaires excitées par des forces harmoniques. Il a utilisé les méthodes de Galerkin et de Ritz ainsi que la méthode de l'équilibrage harmonique. Dans la deuxième partie de son l'article [73], l'auteur décrit l'algorithme numérique de calcul ainsi qu'un exemple d'application.

Dans le travail de Geoffrey M. C et al [74], une théorie de flexion d'ordre élevé est développée pour des poutres composites stratifiés et sandwichs ainsi que l'extension de la récente théorie du premier et deuxième ordre pour inclure le troisième ordre des effets axiaux sans introduire de variables cinématiques supplémentaires. Dans cette théorie, ils ont pris en compte le cisaillement transversal et les déformations transversales normales. Une solution analytique au problème de flexion cylindrique est développée et comparée à la solution d'élasticité exacte correspondante.

Certains auteurs ont comparé les deux méthodes précédentes (intégration en temps et équilibrage harmonique). R. Lewandowski [75] a ainsi comparé un schéma d'intégration temporelle (Newmark) et la méthode de l'équilibrage harmonique dans le cas d'une résolution par la méthode des éléments finis d'un problème de vibrations non-linéaires de poutre.

Dans le cadre de la famille des modèles basés sur les fonctions « sinus », P. Vidal et al [76] ont présenté un nouvel élément fini poutre à trois nœuds conçus pour l'analyse de poutres stratifiées. Il est basé sur une distribution sinusoïdale avec le raffinement de couche. La contrainte de cisaillement transversale est obtenue en utilisant une fonction cosinus pour éviter l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. Cette cinématique explique les conditions de continuité aux interfaces entre les couches, et les conditions aux limites sur les faces inférieure et supérieure de la poutre. Une approche éléments finis est effectuée en utilisant les interpolations de Lagrange et d'Hermite. Il est important de noter que le nombre d'inconnues est indépendant du nombre de couches. Des essais en charge statique et vibrations mécaniques pour les poutres minces et épaisses sont présentés afin d'évaluer la robustesse de ce nouvel élément fini en ce qui concerne l'élasticité ou par rapport aux solutions obtenues en utilisant des éléments finis de

référence. Ils concluent que la vitesse, la convergence et le temps de calcul sont très satisfaisants.

Dans leurs travaux en ce qui concerne la prise en compte de l'amortissement L. Duigou [77] et E.M. Daya et al [78] se sont limités au cas des vibrations linéaires des structures, les conduisant alors à un problème aux valeurs propres complexes. Dans la littérature, différents types d'amortissement sont considérés dans les problèmes à non-linéarité géométrique. Certains auteurs ont combiné la non-linéarité géométrique et l'amortissement viscoélastique; M. Ganapathi et al [79] ont par exemple déterminé le facteur de perte d'une poutre sandwich avec une couche centrale viscoélastique en utilisant la méthode des éléments finis et une approche itérative. Des poutres composites comportant une ou plusieurs couches amorties ont été étudiées numériquement par R.F. Kristensen et al [80]. Le travail est basé sur un modèle semi-analytique utilisant la théorie des poutres de Timoshenko et un modèle d'élément fini intégral 2D. Pour le système matériel, l'étude prouve que l'effet de l'amortissement de la couche est fortement influencé par la présence d'une couche à forte contrainte, ce qui induit des contraintes de cisaillement de grandes amplitudes. L'épaisseur de la couche d'amortissement en caoutchouc elle-même seule a peu d'influence sur l'amortissement global. E. M. Daya et al [81] se sont intéressés aux vibrations de poutres et plaques sandwichs à couche centrale viscoélastique. Ils ont proposé une équation d'amplitude basée sur la méthode d'équilibrage harmonique et la procédure de Galerkin. Cette approche a été étendue par E. H. Boutyour et al [82] à l'analyse d'anneaux sandwichs circulaires. Des auteurs tels que P. Ribeiro et al ([83], [84], [85]) ont étudié l'amortissement de type hystérétique. Ils ont employé la méthode des éléments finis hiérarchique pour étudier précisément la réponse non-linéaire des plaques rectangulaires complètement encastées. Dans ces trois derniers articles cités, les auteurs ont considéré l'amortissement hystérétique proportionnel à la masse. Dans le document de C.M.A. Vasques et al [86] sont proposées une formulation analytique et une modélisation par éléments finis d'une contrainte active d'amortissement d'une couche arbitraire pour l'étude des poutres. Une théorie partielle de multicouches est employée pour définir le champ de déplacement de poutres ayant un nombre arbitraire de couches élastiques, viscoélastiques et piézoélectriques. Une théorie de couplage électromécanique est considérée pour modéliser le comportement des couches piézoélectriques. L'amortissement des couches visco-élastiques est modélisé par une approche de modes

complexes. Les formes faibles de la formulation analytique régissant l'équilibre de mouvement et de la charge électrique sont présentées. Un modèle d'élément fini unidimensionnel basé sur les formes faibles est développé, avec pour degrés de liberté mécaniques nodaux les déplacements axial, transversal et rotation du plan moyen de la poutre et les rotations des différentes couches, et pour degrés de liberté élémentaires électriques la différence de potentiel électrique de chaque couche piézoélectrique.

P. Ribeiro a employé, une approche similaire dans [87] pour étudier la réponse forcée des poutres et des plaques en utilisant les théories des corps minces et des corps épais et dans [88] a considéré des plaques rectangulaires isotropes sur appuis immobiles en ses bords. Dans ces deux travaux, l'auteur a considéré l'amortissement proportionnel à la rigidité.

Dans les travaux de certains autres auteurs, un amortissement visqueux linéaire est considéré. C'est le cas de M. Amabili ([89] et [90]) qui a étudié expérimentalement et numériquement les vibrations des plaques à amortissement visqueux soumises à une excitation harmonique. Il a également étudié numériquement des comportements de panneaux cylindriques à amortissement visqueux [91]. C. Touzé et al [92] ont établi des modèles réduits pour l'étude de systèmes géométriquement non-linéaires amortis. Ils ont particulièrement considéré un amortissement visqueux modal.

2.1.1 Mode Normal Non-linéaire

En vibration linéaire, une réponse libre d'un système mécanique linéaire est déterminée en superposant les réponses de chaque mode de vibration (ou réponses modales). Les réponses modales sont invariantes sous les hypothèses de normalisation des matrices masses et de rigidités, c'est-à-dire pour des conditions initiales qui excitent un seul mode. De plus, les paramètres modaux du système tels que la fréquence propre et la forme modale ne varient pas au cours du temps. Il en est tout autre des propriétés de système non-linéaire. Les propriétés de systèmes linéaires ne sont plus applicables aux systèmes non-linéaires car d'une part, les fréquences varient au cours du temps et d'autre part, les formes modales dépendent de l'amplitude des vibrations.

Ainsi, depuis une quinzaine d'années, des recherches sont menées afin d'étendre les notions de modes définies dans le cas de structures linéaires aux cas de structures non-linéaires. C'est ce qui a donné le concept de mode normal non-linéaire. La présente

section est donc consacrée à mettre au point les définitions et la méthode de calcul du mode normal non-linéaire.

2.1.1.1. Définitions du mode normal

Le concept de vibration en mode normal pour un système dynamique linéaire à n degrés de liberté est bien connu depuis LAGRANGE et s'identifie avec les solutions fondamentales du système d'équations différentielles de NEWTON. Ces solutions possèdent la propriété essentielle de constituer une base de l'espace vectoriel des solutions du système différentiel.

Lorsque l'on passe à des systèmes dynamiques non-linéaires, les méthodes de l'algèbre linéaire deviennent inopérantes. Pourtant, il est à noter que certaines des solutions de tels systèmes présentent, en ce qui concerne l'aspect qualitatif du mouvement, de nombreuses similitudes avec l'oscillation en mode normal d'un système dynamique linéaire, bien que le principe de superposition ne soit plus valable.

Cette situation a conduit R. M. ROSENBERG à adopter une nouvelle définition du concept d'oscillation en mode normal d'un système dynamique qui, permet d'une part de retrouver univoquement les solutions normales classiques d'un système linéaire et de caractériser d'autre part, les mouvements particuliers, de système non-linéaire.

Plusieurs définitions du mode normal non-linéaire ont été proposées. Nous nous intéressons à deux définitions souvent utilisées :

a) Approche de Rosenberg

Les modes normaux non-linéaires d'un système conservatif composé de n -masses reliées par des ressorts non-linéaires sont définis comme "vibration accordées", i.e. les vibrations dans lesquelles toutes les masses atteignent leurs valeurs maximales au même instant et passent par leurs positions d'équilibre au même instant. Suivant cette définition donnée par Rosenberg [93], les mouvements des masses peuvent s'exprimer en fonction du mouvement de l'une d'entre elles. Rosenberg a également donné une définition des "lignes modales" qui sont, dans l'espace de configuration, des trajectoires des modes normaux. Dans le cas où le rapport entre les déplacements des masses est constant, les modes normaux non-linéaires sont appelés "modes similaires" et les lignes modales sont des droites. Un mode similaire ne dépend pas de l'amplitude de vibration. Dans le cas général,

ce rapport n'est plus constant et les modes normaux non-linéaires correspondants sont appelés "modes non-similaires". Les lignes modales sont alors des courbes tangentes au point d'équilibre stable (point zéro) au mode linéaire associé représenté, comme nous l'avons dit ci-dessus, par une droite passant par l'origine. A noter que l'approche de Rosenberg ne s'applique qu'à des systèmes discrets, conservatifs, avec des forces internes non-linéaires qui sont des fonctions polynomiales impaires des composantes des déplacements.

A partir de la forme générale de la réponse libre des systèmes linéaires non amorties, Bouc et Bellizzi [94] ont proposé une nouvelle formulation sur l'existence et le calcul des modes normaux non-linéaires de type Rosenberg pour des systèmes mécaniques non-linéaires discrets, conservatifs et autonomes. Un mode normal non-linéaire est défini par la donnée de deux fonctions respectivement de type "fréquence" et "forme modale" dépendant de deux variables appelées respectivement amplitude et phase. Ces fonctions, devant être périodiques par rapport à la variable phase, sont supposées avoir une forme trigonométrique par rapport à cette variable. La période des vibrations ne dépend que de l'amplitude des oscillations. La méthode de résolution numérique de Galerkin a été proposée pour calculer les modes normaux non-linéaires. Deux formulations ont été proposées par [94] pour le cas de systèmes possédant ou non des non-linéarités symétriques par rapport au déplacement. Dans le travail de A. F. VAKAKIS [95], après avoir discuté le concept de mode normal non-linéaire "MNN" et fourni ensuite quelques définitions à titre introductif, l'application de mode normal non-linéaire à la théorie de vibration est considérée. Il est montré comment, dans le cas particulier de résonances forcées des systèmes non-linéaires symétriques, le concept de mode normal non-linéaire peut être un outil valable pour comprendre certains phénomènes dynamiques non-linéaires, ne pouvant pas être analysés par les méthodes conventionnelles de linéarisation. L'application supplémentaire de la MNN à l'analyse modale, la réduction modale, les vibrations et concept d'isolement aux chocs, et la théorie d'oscillations non-linéaires sont également discutées.

Dans un autre travail et toujours dans le cas d'oscillations libres Bouc et al [96], ont proposé une nouvelle approche de calcul des modes non-linéaires complexes de systèmes non-linéaires dissipatifs avec amortissement proportionnel ou non proportionnel. Pourtant, leur approche n'est valable que dans le cas où les non-linéarités sont des fonctions

symétriques en déplacements. A la différence du cas précédent non-amorti, un mode normal non-linéaire est défini par la donnée de quatre variables : deux pour les formes modales associées aux parties réelle et imaginaire des modes complexes, deux pour les fréquences associées aux parties réelle et imaginaire des valeurs propres complexes. Yuri V. Mikhlin [97] a considéré deux conceptions des modes normaux non-linéaires de vibration dans les systèmes conservatifs et quasi conservatifs. La construction du mode normal non-linéaire et les applications dans quelques problèmes mécaniques tels que, le problème non-linéaire de la vibro-absorption, la dynamique non-linéaire de coque cylindrique et la dynamique non-linéaire de la suspension de véhicule sont analysés.

b) Approche de Shaw et Pierre

Shaw et al [98] ont étudié l'invariance de l'espace des phases de dimension $2n$, n étant le nombre de degrés de liberté du système de départ constitué de l'union de l'espace des déplacements et de celui des vitesses. Pour des conditions initiales se trouvant sur une surface invariante d'un mode, les réponses du système restent sur cette surface à tout instant. Pour un système linéaire, cette surface est un plan. A partir des résultats obtenus pour les systèmes linéaires, les auteurs ont proposé une nouvelle définition de modes normaux pour des systèmes non-linéaires discrets [98] et continus [99]. Dans leur approche, un mode est choisi comme mode "maître". Les mouvements et les vitesses de tous les autres DDLs, appelés "esclaves" s'expriment en fonction du couple déplacement-vitesse du mode "maître". Les surfaces invariantes dans le cas non-linéaire sont tangentes, au point zéro, au plan invariant du mode linéaire associé. Pour calculer les modes non-linéaires, des variables "esclaves" sont écrites comme des séries polynomiales en fonction des variables du mode "maître".

Si le système possède une résonance interne, i.e. s'il existe des relations de type : $\omega_i = p\omega_j, \omega_k = p\omega_i \mp q\omega_j, \dots, (p, q)$ étant des entiers, il y a alors transfert d'énergie entre les modes impliqués dans la résonance interne, ou bien dit autrement ces modes sont couplés. Dans ce cas, les approches présentées dans [98] et [99] ne sont plus valables. Boivin et al. [100] ont généralisé le concept de Shaw et Pierre au cas de modes multiples, i.e. les modes "maîtres" choisis étant des modes impliqués dans la résonance interne. A noter que les variables "esclaves" décrivent comme séries polynomiales des variables des modes "maîtres". La résolution des équations différentielles régissant la géométrie des surfaces invariantes proposée dans [100] n'est possible que lorsque les amplitudes de

vibration restent petites. Le domaine de validité, i.e. l'intervalle des amplitudes des réponses modales de la coordonnée "maître", n'est pas connu a priori. Ce domaine est différent d'un système à l'autre.

Se basant sur l'approche de Shaw et Pierre, Pesheck et al. [101] et [102] ont proposé une nouvelle approche de mode normal non-linéaire donnant des solutions précises même si les amplitudes deviennent assez grandes. Dans la formulation de Pesheck, les surfaces invariantes des modes normaux sont paramétrées par un nouveau couple "amplitude et phase" du mode "maître" choisi, au lieu du couple "déplacement-vitesse". Les équations algébriques non-linéaires régissant la géométrie des surfaces invariantes sont ensuite résolues par la méthode de Galerkin.

Jiang et al [103] ont adapté l'approche de Pesheck [101] pour des systèmes dont les forces internes non-linéaires sont continues par morceaux. Les surfaces invariantes des modes normaux sont à nouveau paramétrées par les variables amplitude et phase.

Combinant les approches de Boivin [100] et Pesheck [101], Jiang et al [104] ont généralisé l'approche de Pesheck au cas de systèmes présentant des résonances internes entre les modes. Le calcul des modes normaux de tels systèmes est toutefois très coûteux en temps.

Récemment, Jiang et al [105] ont proposé une méthode de calcul des modes normaux des systèmes vibratoires sous excitation harmonique. Dans leur approche, l'excitation considérée comme variable complémentaire et les deux autres variables amplitude et phase régissent la géométrie des surfaces invariantes des modes normaux non-linéaires.

Dans sa thèse, Apiwattan Nalungarn [106] a simulé les deux types d'approche de Shaw et Pierre : celle de type amplitude-phase et celle de type déplacement-vitesse. Il a montré que dans le cas de grande amplitude, l'approche "amplitude-phase" donne des solutions meilleures que celles obtenues par l'approche "déplacement-vitesse". Par contre, l'approche "amplitude-phase" est beaucoup plus coûteuse en temps de calcul.

2.1.1.2 Méthodes de calcul du Mode Normal

Les méthodes de perturbation

La méthode de Poincaré est la plus ancienne méthode pour résoudre des équations différentielles non-linéaires. Elle a été proposée par Henri Poincaré en 1892 pour résoudre certains problèmes de mécanique céleste. Elle consiste à chercher des solutions

périodiques aux équations différentielles non-linéaires sous forme d'une série de puissances croissantes d'un paramètre ε associé aux termes non-linéaires. Elle est à l'origine du développement de plusieurs méthodes : méthode des échelles multiples, méthode de Krylov-Bogoloubov, méthode de la moyenne, etc.

Toutes ces méthodes ont l'avantage permettant d'obtenir des solutions analytiques et de bien comprendre des phénomènes importants de la dynamique non-linéaire comme l'apparition des subharmoniques, la stabilité des solutions. Par contre, plus l'ordre de grandeur du paramètre ε augmente, plus le temps de calcul devient plus long et complexe. De plus, la convergence n'est assurée que pour un petit paramètre ε , ce qui exclut les systèmes possédant une forte non-linéarité.

Méthodes de type Galerkin

Nous pouvons trouver plusieurs versions de ce type de techniques : méthodes de Galerkin, méthodes de la balance harmonique, etc. (voir le livre de Szemplinska [107] pour plus de détails). Des solutions supposées périodiques sont développées sous la forme de séries de Fourier tronquées. L'équation de la dynamique est ensuite projetée sur une base de Galerkin, i.e. une base constituée par des termes sinusoïdaux et cosinusoidaux, afin de déterminer les coefficients situés dans les séries de Fourier. Le système d'équations algébriques résultant est usuellement résolu par des méthodes numériques.

Lewandowski [108] montre une équivalence entre les méthodes de Galerkin et les méthodes de balance harmonique. Pour la résolution numérique du système algébrique obtenu par la méthode de Galerkin, l'auteur propose une méthode utilisant la technique de continuation des branches de solutions suivant un paramètre du chemin choisi : la longueur d'arc, par exemple. Cette méthode est très efficace pour l'étude de la stabilité des réponses et la construction de nouvelles branches de réponses aux points de bifurcation.

Notons que la méthode de Galerkin a été utilisée aussi bien dans l'approche de Bouc et al ([109], [96] et [94]) et dans les approches de Shaw et al [102], [110] pour trouver la géométrie de la surface invariante de phase.

Techniques asymptotiques

Dans leurs premiers travaux, Shaw et al [98] ont proposé un développement asymptotique pour calculer directement les sous-espaces invariants. Comme dans la

section précédente, les mouvements des coordonnées "esclaves" sont recherchés sous la forme de séries polynomiales d'un couple des variables de phase (déplacement-vitesse) du mode "maître" choisi. La détermination des coefficients des séries se fait par la mise à zéro de tous les termes ayant une même puissance par rapport aux variables du mode "maître". Boivin et al. [100] ont également utilisé cette technique asymptotique pour le calcul des sous-espaces invariants de phase pour des dimensions supérieures à 2 dans le cas où il existe des résonances internes.

Méthodes du tir

Il est évident que la précision des résultats obtenus par les méthodes de type Galerkin dépend du nombre de termes harmoniques choisi. Plus ce nombre est important, plus les résultats sont meilleurs. Cependant, le nombre d'équations algébriques différentielles à résoudre devient grand. Cela implique un coût de calcul très important.

La méthode du tir présente beaucoup d'avantages dans le calcul des réponses périodiques. Elle consiste à intégrer directement l'équation différentielle de la dynamique sur une période de vibration " T " en utilisant des méthodes d'intégration temporelle numérique comme Runge-Kutta, Newmark, ..., etc. Un système de N équations (N étant le nombre de degrés de liberté du système) à $N + 1$ inconnues est obtenu. L'inconnue supplémentaire est la période qui n'est pas connue a priori. Cette inconnue peut être la période, la fréquence ou le niveau d'énergie mécanique, ..., etc.

En donnant une valeur fixée à cette inconnue, le système de N équations peut être résolu. Il est préférable d'associer à la méthode du tir une méthode de continuation suivant un paramètre de contrôle afin de mener une étude de stabilité et de bifurcation sur les branches des solutions.

La combinaison de ces deux méthodes a été utilisée avec succès par Sundararajan et al. [111] dans le calcul des réponses périodiques des systèmes non-linéaires soumises à des excitations périodiques.

2.2. Identification des systèmes mécaniques vibratoires

L'identification modale consiste à identifier les caractéristiques dynamiques des systèmes mécaniques à partir des réponses vibratoires. Depuis les années 80, un certain nombre d'auteurs se sont investis et continuent toujours de rechercher à améliorer des

méthodes existantes, à en développer de nouvelles afin d'augmenter la précision et la fiabilité des résultats identifiés, réduire le coût de calcul et enfin faciliter l'utilisation de la méthode.

Dans la littérature, il existe beaucoup de méthodes d'identification. Il est difficile d'effectuer une classification détaillée qui tienne compte de toutes les méthodes existantes. Nous pouvons les classer en se fondant sur les critères donnés par E. Balmès :

- Le type de représentation,
- Le nombre de degrés de liberté,
- La nature (globale/locale) des paramètres estimés,
- Le nombre d'entrées et sorties, i.e. le nombre d'excitations et des réponses mesurées simultanément : Les méthodes du type : SISO (Une entrée - Une sortie), les méthodes SIMO (Une entrée - Multiples Sorties), les méthodes MIMO (Multiples Entrées - Multiples Sorties).
- Les données de référence : les données temporelles sont les plus utilisées car elles contiennent les informations exactes. Elles sont souvent très bruitées comme par exemple les réponses de structures sous excitations ambiantes : les excitations dues au vent, au trafic, etc.
- Le domaine de travail : le domaine temporel, fréquentiel ou temps-fréquence.

Maxime PEETERS. [112] a donné une classification globale des méthodes d'analyse modale qui possède beaucoup de similitudes vis-à-vis des critères énoncés ci-dessus. De plus, sa classification utilise un critère supplémentaire direct/indirect. Les méthodes directes sont relatives au modèle spatial du système, i.e. l'équation de mouvement du système. En revanche, les méthodes indirectes travaillent sur les paramètres modaux du système : fréquences propres, amortissements et déformées modales.

2.2.1 Identification des systèmes mécaniques linéaires

Les méthodes d'identification des systèmes linéaires sont classées en trois groupes, en relation avec leur domaine de travail : le domaine temporel, le domaine fréquentiel et le domaine temps-fréquence. Comme les méthodes d'identification sont abondantes, nous ne présentons dans ce qui suit quelques-unes des méthodes les plus utilisées.

a) Domaine temporel

Le comportement d'un système dynamique est régi par un ensemble d'équations aux dérivées partielles découlant des relations d'équilibre. Certains des coefficients de ces équations aux dérivées partielles peuvent varier en fonction du temps. Les méthodes dites temporelles sont des méthodes qui permettent d'analyser directement dans le temps le phénomène dynamique, à partir des équations différentielles le régissant, de ses conditions aux frontières et de ses conditions initiales. La résolution du problème se fait en fonction de la variable temporelle, pas à pas, suivant un schéma temporel discret donné, c'est-à-dire que l'état du système à un instant donné est évalué à partir de l'état du système déjà évalué aux instants précédents. Pour chaque pas de temps, la solution est calculée simultanément pour l'ensemble des points du domaine considéré.

b) Méthodes des sous-espaces

Comme dans les deux méthodes précédentes, une représentation discrète de l'état du système est également utilisée dans les méthodes des sous-espaces. La matrice de Hankel s'établit par des covariances entre les états d'un système définis à deux instants consécutifs. Différentes de celles obtenues par les deux méthodes précédentes, les matrices d'observabilité et de contrôlabilité se déterminent par une technique de *Décomposition en Valeurs Singulières*. Les paramètres modaux s'obtiennent à travers les matrices d'observabilité et de contrôlabilité. Plusieurs méthodes de calcul de ces matrices ont été proposées par Lardies ([113], [114]), et Liu [115]. Afin d'éliminer les modes parasites, Lardies [114] a proposé une procédure qui permet de choisir l'ordre du modèle qui n'est pas connu a priori.

c) Domaine fréquentiel

La Méthode de Peak Picking est une méthode classique et très souvent utilisée grâce à sa simplicité. Elle consiste à identifier des paramètres modaux de la structure à partir des Fonctions de Réponses en Fréquence (FRF) sous l'hypothèse que les modes sont suffisamment découplés et que les amortissements sont faibles. Les fréquences propres correspondent aux pics de résonance et les amortissements sont déterminés à l'aide de la méthode de la largeur de bande. Les résultats identifiés ne sont généralement pas exacts. Il est conseillé de n'utiliser ce type de méthode que pour obtenir une estimation initiale des paramètres modaux de la structure.

Les méthodes polynomiales sont des méthodes qui consistent à représenter les FRFs (ou des densités spectrales en aléatoire) sous la forme de fractions rationnelles. Les coefficients du numérateur et du dénominateur de ces fractions se calculent par la résolution au sens des moindres carrés en minimisant l'écart entre la FRF du modèle et la FRF mesurée. Il est à noter que les méthodes polynomiales sont très sensibles au bruit.

d) Domaine temps-fréquence

Quand nous travaillons dans le domaine fréquentiel, nous perdons la notion temporelle et vice versa. Par contre, l'analyse temps-fréquence des réponses de structures permet de combler cette lacune. L'analyse temps-fréquence est récente et robuste pour l'identification des systèmes mécaniques. Elle a été utilisée à partir des années 90. Le livre de Carmona et al. [116] donne un aperçu global sur l'analyse temps-fréquence des réponses vibratoires. Deux types de transformations sont abordés : la transformation continue de Gabor et la transformation continue en ondelettes ainsi que leurs versions discrètes. On peut citer ici les contributions de Staszewski [117], Ruzzene et al [118], Argoul et al. [119], Le et al. [120], Bontezar et al. [121], Lardies et al. [122], etc...

Staszewski et al. [123] ont proposé trois méthodes utilisant la transformation en ondelettes (T.O) pour la détermination des amortissements : La TO pour une valeur donnée de la dilatation, l'enveloppe des réponses impulsionnelles, la recherche d'ossature en ondelettes. Cette dernière méthode donne les résultats les plus exacts que les deux premières dans le cas de signaux même bruités.

Une procédure basée sur l'entropie de Shannon permettant de choisir un paramètre optimal des ondelettes de Morlet a été présentée par Lardies et al. [122]. Erlicher et Argoul [124] se sont intéressés au cas où l'amortissement est non proportionnel. Ils ont proposé d'utiliser l'indice de non-proportionnalité donné par Adhikari [125] pour caractériser l'ampleur de la non-proportionnalité de l'amortissement modal pour des systèmes linéaires possédant des modes complexes.

Le mode complexe, obtenu par la normalisation proposée dans [125], peut être considéré comme le mode complexe normalisé optimal le plus proche du mode normal associé.

2.2.2.2. Identification des systèmes mécaniques non-linéaires

Comme mentionné dans la section sur les *modes normaux non-linéaires*, les systèmes non-linéaires ne possèdent pas les propriétés des systèmes linéaires :

- Le principe de superposition modale ne peut pas être appliqué.
- Des surharmoniques/sous-harmoniques peuvent être générées.
- La fréquence des oscillations varie au cours du temps et bien évidemment en fonction des amplitudes des réponses.
- La dépendance des réponses vis-à-vis de l'excitation.

Pour ces raisons, nous rencontrons en pratique beaucoup de difficultés dans l'identification des systèmes non-linéaires. Nous présentons ici seulement quelques-unes des méthodes les plus souvent utilisées.

a) Domaine temporel

Décomposition en Modes Propres Orthogonaux (DMPO)

Cette méthode, aussi appelée la décomposition de Karhunen-Loeve (K-L), consiste à extraire des informations spatiales à partir des données temporelles disponibles dans un domaine. L'identification des paramètres d'un système non-linéaire se base sur la minimisation d'une fonction coût représentant la différence entre la *DMPO* mesurée et la *DMPO* simulée. La technique a été validée par Lenaerts et al. [126] sur un système constitué d'une poutre couplée et une lame mince. Les résultats identifiés ont été comparés avec ceux obtenus en utilisant la méthode de chemin inverse conditionné [127]. Cette technique peut être utilisée aussi bien dans le cas de systèmes non-linéaires continus que dans celui des systèmes à plusieurs degrés de libertés (MDDLs).

b) Domaine fréquentiel

Les Fonctions de Réponses en Fréquence (FRF, ou DSP) d'ordre élevé, sont définies en supposant que des réponses du système non-linéaire peuvent être développées en séries de Volterra (voir la thèse de Ferreira [128] pour plus de détails).

c) Domaine temps-fréquences

Les techniques d'identification dans le domaine temps-fréquences permettent d'obtenir la variation temporelle des caractéristiques dynamiques du système.

De plus, l'analyse temps-fréquences donne la possibilité de découpler chaque composante modale et l'identifier de façon séparée. Cependant, le principe de superposition modale n'est plus valable pour des systèmes non-linéaires. Par conséquent, afin d'utiliser l'analyse temps-fréquence pour l'identification des paramètres des systèmes non-linéaires par des auteurs tels que Staszewski [117], Bellizzi et al. [129], Argoul et al. [119] font l'hypothèse que la réponse libre d'un système MDDLs faiblement non-linéaire s'exprime comme une combinaison linéaire des composantes modales.

Staszewski [117] utilise la transformée de Gabor pour déterminer la fréquence instantanée, l'amplitude instantanée et l'amplitude en fonction de la fréquence. La technique a été appliquée à la réponse libre d'un oscillateur à non-linéarité cubique et amortissement de type Coulomb. Les paramètres du système sont identifiés par la minimisation au sens des moindres carrés de la différence d'amplitudes mesurée et analytique (modèle).

L'expression analytique de la fréquence du modèle est obtenue en résolvant l'équation de vibration de l'oscillateur non-linéaire cubique par la méthode asymptotique de Krylov-Bogoliubov.

L'identification des systèmes non-linéaires fondée sur la transformation de Gabor à été aussi abordée par Bellizzi et al. [129]. L'auteur a introduit la notion des Modes Non-linéaires Couplées (MNCs). La réponse totale est alors définie comme une combinaison linéaire des réponses modales. Les résultats analytiques calculés en utilisant cette notion des MNCs sont comparés avec ceux obtenus par l'application de la transformation de Gabor.

Ta et al. [130], ainsi que Lardies et al. [131] ont proposé des solutions analytiques dans le cas d'un oscillateur non-linéaire avec certaines formes de non-linéarités aussi bien d'amortissement que de rigidité. Les caractéristiques dynamiques sont ensuite extraites à l'aide de la transformation en ondelettes de Morlet.

2.3. Dynamique des structures non-linéaires géométriques

Les problèmes mécaniques industriels comportent souvent de nombreux types de non-linéarités. A partir de données expérimentales seules, il est en général très difficile de caractériser quels types de non-linéarités sont présents dans le comportement dynamique de la structure.

Généralement, les non-linéarités caractéristiques en vibration des structures sont classées en trois grandes familles : Non-linéarités géométriques, non-linéarités matérielles, non-linéarités de contact.

- *Non-linéarités géométriques :*

Celles-ci sont liées à l'apparition de grandes amplitudes dans le comportement des structures. Comme nous nous trouvons dans le cas de grands déplacements, la relation entre la déformation et le déplacement n'est plus linéaire. Les structures de type poutres, plaques et coques auxquelles l'industrie fait de nos jours très souvent appel, sont très rapidement sujettes aux grands déplacements. La prise en compte des non-linéarités géométriques dues aux grandes amplitudes dans la modélisation du comportement des structures est actuellement un domaine de recherche extrêmement actif.

- *Non-linéarités matérielles :*

Elles trouvent leur origine dans des dislocations au sein même du matériau. La relation entre la contrainte et la déformation n'est plus linéaire. On peut citer des lois de comportement élasto-plastiques, viscoélastiques non-linéaires, ..., etc.

- *Non-linéarités de contact :*

Elles apparaissent à la jonction entre solides. Elles dépendent des phénomènes de contact, de frottement, de jeu au niveau des liaisons entre solides.

Les structures minces possédant particulièrement des non-linéarités géométriques, sont aujourd'hui largement utilisées dans de nombreux domaines : le génie civil, l'aéronautique, etc. L'atténuation et le contrôle des vibrations de telles structures deviennent un enjeu important afin d'éviter des phénomènes pouvant être dangereux lors de l'utilisation normale de ces structures.

L'étude des vibrations des structures à non-linéarité géométrique peut être abordée de différentes manières :

- modélisation par la méthode des éléments finis ou la méthode de Ritz,
- résolution des équations de vibration par les méthodes asymptotiques, la méthode de balance harmonique, la méthode de tir, ... , etc.,
- calcul des modes non-linéaires par l'utilisation des notions de modes normaux de Shaw et al ou bien de Bouc al, etc.,
- nature des oscillations : libre ou forcée.

Nous soulignons dans les quelques références suivantes, la démarche retenue pour la modélisation des vibrations de structures minces avec des non-linéarités géométriques ainsi que la résolution des équations du mouvement.

Lewandowski [108]-[132] utilise la méthode de Galerkin (ou de balance harmonique) pour transformer les équations différentielles régissant le comportement vibrations des structures à non-linéarités géométriques en un système d'équations algébriques. Ce dernier est résolu par la méthode de continuation qui permet à l'auteur d'étudier la stabilité des réponses stationnaires en utilisant la théorie de Floquet.

Ribeiro [133] étudie les vibrations périodiques des plaques et poutres non-linéaires géométriques en régime forcé. La méthode des éléments finis est d'abord utilisée pour la modélisation. La résolution des équations de la dynamique est fondée sur une méthode de tir. Grâce à elle, l'auteur a pu obtenir certaines branches de solutions non accessibles par la méthode de balance harmonique.

Pesheck et al. [101] s'intéresse aux vibrations d'une hélice d'hélicoptère représentée par une poutre mince avec des non-linéarités géométriques. Il utilise la méthode de Rayleigh-Ritz pour modéliser son comportement vibratoire. Les modes non-linéaires de cette poutre sont calculés en appliquant l'approche de Shaw et Pierre en termes d'amplitude et de phase.

Jiang et al. [104] étend l'approche de Shaw et Pierre pour le cas de modes multiples avec possibilité de prendre en compte des résonances internes. Son approche est validée au travers de l'étude de l'hélice d'hélicoptère précédente. Touzé et al. [134] utilise la théorie de la forme normale pour calculer les MNS des structures non-linéaires géométriques. Pourtant, comme la méthode se base sur une approche asymptotique, son domaine de validité reste assez limité. Les résultats ne sont plus fiables lorsque l'amplitude de vibration devient importante.

Azrar et al. [135] propose d'utiliser la méthode asymptotique numérique pour calculer les réponses des plaques à non-linéarités géométriques soumis à deux types d'excitation harmonique, répartie et concentrée. Il s'agit d'utiliser la méthode de balance harmonique et la méthode des éléments finis pour obtenir un système d'équations non-linéaires algébriques. La résolution se fait par une technique de perturbation, i.e. la solution est développée en une série polynomiale de puissances. Cette dernière permet de transformer le système d'équations non-linéaires en une séquence de problèmes linéaires qui ont une

même matrice de rigidité. La précision des résultats dépend bien évidemment de l'ordre de la série polynomiale caractérisant la solution. L'avantage de la méthode asymptotique numérique réside dans le fait qu'elle ne nécessite pas beaucoup de temps de calcul même si l'ordre de la série est assez important.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons fait une synthèse des travaux consacrés à la dynamique non-linéaire des systèmes et particulièrement l'identification des paramètres caractérisant le comportement dynamique des structures mécaniques.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux définitions et à la présentation de l'analyse dynamique non-linéaire ainsi que le mode normal non-linéaire, en mettant l'accent sur le champ d'application et le domaine de validité de chacune d'entre elles. Il est apparu qu'une comparaison des approches des MNNs ainsi que des techniques pour déterminer le domaine de validité de chacune des approches est nécessaire. Quelques méthodes de calcul du mode normal utilisées ont été aussi présentées.

Ensuite, à partir des réponses libres ou des réponses sous excitations, différentes techniques d'identification de systèmes linéaires et non-linéaires utilisées dans la plupart des travaux, ont été présentées. Elles permettent d'obtenir une vision générale sur les techniques d'identification. Une attention particulière est portée sur l'utilisation de l'analyse temps-fréquence par la transformation en ondelettes utilisé ces dernières années, à des fins d'identification.

Puis, après une classification de diverses formes des non-linéarités rencontrées en vibration, quelques références bibliographiques concernant la dynamique des structures avec non-linéarités géométriques ont été données.

Pour nous permettre de modéliser les structures composites, nous avons rappelé l'aspect général sur les composites ainsi que leurs théories.

A travers cette étude, nous avons orienté notre travail vers l'identification des structures mécaniques pour contribuer comme l'ont fait beaucoup d'autres auteurs présentés plus haut, aux avancées scientifiques réalisées sur le même sujet. Nous avons présenté une méthode semi-analytique de résolution des équations dynamiques non-linéaires qui apporte un plus par rapport aux autres méthodes asymptotiques utilisées par la plupart des travaux de la littérature et qui présentent des inconvénients dans quelques cas de la

dynamique. Les détails des développements et de l'application de la méthode sont présentés dans le chapitre IV.

CHAPITRE I

FORMULATION THEORIQUE

I.1. Introduction

Depuis les années soixante, l'augmentation des performances des ordinateurs a contribué à la généralisation des méthodes numériques. Parmi celles-ci, la méthode des éléments finis s'est imposée par sa robustesse et sa flexibilité ; elle est actuellement utilisée pour résoudre des problèmes très variés tel que ceux de l'élasticité, de la mécanique des fluides, de la thermique, de l'électromagnétisme, ..., etc.

Pour résoudre un problème physique par la méthode des éléments finis, l'ingénieur doit faire une série d'hypothèses et d'approximations afin de transformer l'objet réel en un modèle numérique discret. La discrétisation ainsi obtenue, définie par un maillage et par les degrés d'approximation des éléments, permet alors d'obtenir une solution approchée. Deux questions se posent à l'utilisateur :

- Quelle est la qualité de la solution obtenue ?
- Comment modifier la discrétisation pour garantir une précision acceptable tout en minimisant les coûts de calcul ?

L'objet de l'automatisation des calculs est d'apporter une réponse à ces deux questions ; elle combine les techniques d'évaluation et d'amélioration de la qualité de la solution. La méthode d'éléments finis hiérarchiques (ou polynomiale) désigne une stratégie de contrôle de l'erreur qui consiste à faire varier le degré d'interpolation des éléments tout en conservant la taille des éléments et leurs degrés d'interpolation.

Dans ce chapitre, un modèle élément fini hiérarchique est développé pour les vibrations géométriquement non-linéaires des poutres et plaques stratifiées composites. Le modèle est présenté dans le domaine temporel.

I.2. Méthode des éléments finis hiérarchiques

Un problème d'ingénieur est généralement représenté par un modèle mathématique des équations aux dérivées partielles sur un domaine géométrique avec des conditions aux limites aux frontières de ce domaine. De plus, étant un problème continu, il possède une infinité de Degrés De Liberté « DDL ». A l'exception de quelques cas ayant une géométrie très simple, il est très difficile voire impossible de trouver une solution analytique au problème et d'étudier son comportement en une seule opération. Pour pouvoir trouver une solution, l'ingénieur est donc amené à remplacer le système continu par un système discret équivalent ayant un nombre fini de degrés de liberté. Pour ce, il a le

choix entre deux méthodes : la méthode des différences finis et la méthode des éléments finis. La méthode des différences finis est très attrayante par sa simplicité quand il s'agit de problèmes à géométrie régulière. Par contre, elle est très difficile à généraliser aux problèmes à géométrie complexe et conditions aux limites quelconques. De nos jours, elle est supplantée par la méthode des éléments finis dans presque toutes les applications en ingénierie.

La méthode des éléments finis consiste donc à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent. La discrétisation se fait sur deux fronts. D'une part, le domaine géométrique est subdivisé en sous domaines de géométrie simple, appelés éléments, sur lesquels l'étude du problème peut se faire en une seule opération, et d'autre part, les équations aux dérivées partielles sont remplacées par des équations algébriques à l'aide du calcul variationnel ou des méthodes de minimisation de l'erreur comme les méthodes des résidus pondérés. La solution finale s'obtient en résolvant un système d'équations global formé en assemblant les équations algébriques des différents DDL obtenues pour les éléments constituant le domaine.

Pour améliorer significativement la solution, certaines techniques, telle que la méthode-r [136] consistent à modifier la taille des mailles tout en conservant les fonctions d'approximation du champ de déplacement et la connectivité des éléments. Le défaut majeur particulièrement de cette méthode est que l'amélioration potentielle de la précision est limitée par le nombre de degrés de liberté du maillage de départ. La méthode-h [137] procéde par une augmentation du nombre de degrés de liberté. Une des manières d'y parvenir est de raffiner le maillage tout en conservant le degré des éléments.

Une autre manière d'améliorer la précision est d'augmenter le degré d'approximation des éléments tout en conservant la topologie du maillage. Si les fonctions d'approximation de tous les éléments finis ont le même degré, il s'agit d'une méthode-p uniforme [138] ; dans le cas contraire, il s'agit de la méthode-p adaptative. Les méthodes-h et -p peuvent être combinées, on parlera alors de la méthode-hp [139]. Sous certaines conditions, le taux de convergence de la méthode-p [138] pouvant être exponentiel et que même lorsqu'il est algébrique, il est toujours supérieur ou égal au taux de convergence observé dans le cadre d'une méthode-h.

I.2.1. Enoncé de la méthode des éléments finis hiérarchiques

Dès l'apparition de la méthode des éléments finis, beaucoup de chercheurs ont testé des éléments finis de degré de fonctions d'approximation élevé. Ces éléments sont de formulation totale, c.-à-d. que chaque fonction de forme est physiquement rattachée à un nœud, ce qui ne permet pas d'en tirer un profit maximum. Il a fallu attendre l'introduction de la formulation hiérarchique pour réellement voir la naissance d'une méthode-p efficace. Une approximation éléments finis $U_h = \sum_{i=1}^n N_i a_i$ est dite hiérarchique si le passage de n à $n+1$ n'altère pas les fonctions de forme N_i ($i=1 \dots n$).

Cette formulation présente certains avantages :

- La généralisation d'une discrétisation initiale peut être mise à profit pour le calcul des solutions raffinées ;
- Le système d'équations est mieux conditionné ;
- Les solutions obtenues sont moins sensibles aux imprécisions numériques.

I.2.2. Génération des éléments

La procédure définissant le système éléments finis requiert la construction de la matrice de raideur et du vecteur des forces généralisées. Cette procédure est appelée génération des éléments.

I.2.2.1. Eléments unidimensionnels

Pour un modèle cinématiquement admissible, le champ des déplacements doit être continu. Par conséquent, les fonctions de formes doivent l'être aussi. Pour faciliter les traitements numériques, il faut choisir des fonctions relativement simples, par exemple des polynômes. De plus, pour réduire l'erreur numérique, il faut que le système d'équations d'équilibre du modèle éléments finis soit bien conditionné, et ce surtout pour les problèmes à grand nombre de degrés de liberté.

Toutes ces conditions impliquent un choix de fonctions de forme construites à partir de fonctions polynomiales simples possédant certaines propriétés d'orthogonalité telles que les polynômes de Legendre.

I.2.2.1.1. Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre orthogonaux $P_i(x)$ définis entre $[-1, +1]$ sont donnés par I-1 :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (\text{I-1})$$

Ils sont solutions de l'équation différentielle suivante pour $n=1,2,3,\dots$:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (\text{I-2})$$

Ces polynômes présentent les propriétés suivantes :

1. *Orthogonalité* :

$$(P_n, P_j) = \int_{-1}^{+1} P_n(x) \cdot P_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq j \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } n = j \end{cases}$$

2. *Symétrie* :

$$P_n(-x) = (-1)^n \cdot P_n(x)$$

3. *Formule de récurrence*

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

4. *Normalisation* :

$$P_n(1) = 1$$

5. *Encadrement* :

$$|P_n(x)| \leq 1 \quad \text{pour } -1 \leq x \leq +1$$

6. *Récurrence pour les dérivées* :

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

I.2.2.1.2. Modes-bulle

A partir des polynômes de Legendre, il est possible de construire un ensemble de modes-bulle définis comme suit :

$$\emptyset_j(x) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^x P_{j-1}(t) dt \quad j = 2, 3, \dots \quad (\text{I-3})$$

Par conséquent :

$$\frac{d\phi_j(x)}{dx} = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} P_{j-1}(x)$$

et :

$$\phi_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} [P_j(x) - P_{j-2}(x)] \quad (\text{I-4})$$

Ces modes-bulle ont les propriétés suivantes :

1. *Nullité aux extrémités :*

$$\phi_j(-1) = \phi_j(+1) = 0 \quad j = 2, 3, \dots$$

2. *Orthonormalité des dérivées premières :*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

3. *Symétrie :*

$$\phi_j(-x) = (-1)^j \phi_j(x) = 0$$

4. *Nullité des intégrales de degré impaire :*

$$\int_{-1}^{+1} \phi_j(x) dx = 0, \quad j = 3, 5, 7, \dots$$

5. *Quasi-orthogonalité :*

$$\int_{-1}^{+1} \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{(2i+1)(2i-3)} & j = i \\ -\frac{1}{(2i-3)\sqrt{(2i-1)(2i-5)}} & j = i-2 \\ -\frac{1}{(2i-3)\sqrt{(2i-1)(2i+3)}} & j = i+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

I.2.2.1.3. Fonctions de formes hiérarchiques

La propriété de nullité aux extrémités des modes-bulle permet l'introduction des fonctions de formes hiérarchiques :

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}; \quad N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}; \quad N_i(\xi) = \phi_{i-1}(\xi) \quad i = 3, 4, \dots, p+1 \text{ et } \xi \in [-1, +1];$$

où N_1 et N_2 sont les fonctions de forme nodales ou externes ou encore modes externes.

Les fonctions $N_i, i = 3, 4, \dots$ sont des fonctions de forme internes ou modes internes ou encore modes-bulle. Les modes externes permettent de se connecter avec d'autres éléments pour assurer la continuité des déplacements, tandis que les modes internes permettent d'enrichir le champ de déplacement à l'intérieur de l'élément. La figure I-1 montre les fonctions de forme hiérarchiques.

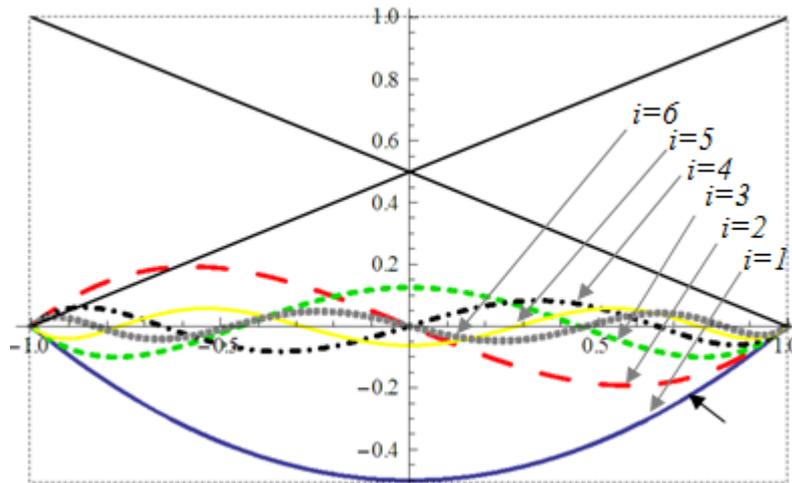


Figure I-1 : Fonctions de forme

Le terme hiérarchique est utilisé car l'ensemble des fonctions de forme de degré p inclut ceux des degrés inférieurs $p-1, p-2, \dots, 1$ comme sous-ensemble. Le champ des déplacements discrétisé à l'intérieur de l'élément est :

$$u_h = \sum_{j=1}^{p+1} N_j(\xi) q_j \quad (\text{I-5})$$

où q_1 et q_2 sont des déplacements nodaux, tandis que q_3, \dots, q_{p+1} ne représentent pas des déplacements réels mais plutôt des amplitudes des modes internes ou déplacements relatifs (hiérarchiques). Leur nature est différente de celle des éléments finis en formulation globale.

Dans ce dernier cas, q_3, \dots, q_{p+1} sont réellement des déplacements aux nœuds internes.

I.2.2.2. Eléments 2-D quadrangulaires

I.2.2.2.1. Espaces polynomiaux

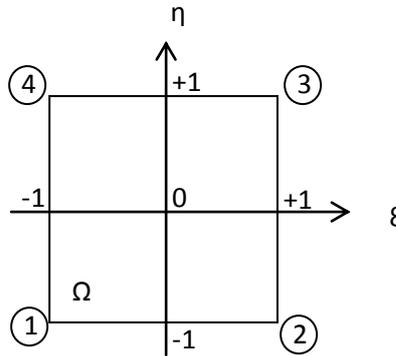


Figure I-2 : Elément quadrangulaire de référence

Pour un domaine carré $\Omega = \{(\xi, \eta) : -1 \leq \xi, \eta \leq +1\}$ tel que celui de la figure I-2, il existe trois espaces polynomiaux bidimensionnels fréquemment utilisés.

a) Espace $S^p(\Omega)$ ou famille "Serendipity" figure I-3 :

Il correspond à l'ensemble de tous les monômes ξ^i, η^j avec $i, j = 0, 1, \dots, p$ et $i+j = 0, 1, \dots, p$. Avec en plus, si $p=1$, les monômes ξ, η et, si $p \geq 2$, les monômes ξ^p, η et ξ, η^p . Ces monômes supplémentaires n'augmentent pas le degré polynomial sur les côtés de l'élément de référence.

b) Espace $S^{p,q}(\Omega)$ ou famille de "Lagrange" figure I-4 :

Il correspond à l'ensemble des monômes ξ^i, η^j avec $i = 0, 1, \dots, p$ et $j = 0, 1, \dots, q$.

c) Espace $\tilde{S}^{p,q}(\Omega)$ ou famille mixte :

Il est composé de l'ensemble des monômes communs à $S^p(\Omega)$ et à $S^{p,q}(\Omega)$; formellement : $\tilde{S}^{p,q} = S^p(\Omega) \cap S^{p,q}(\Omega)$.

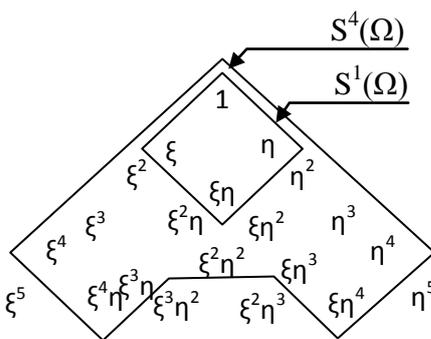


Figure I-3 : Famille "Serendipity"

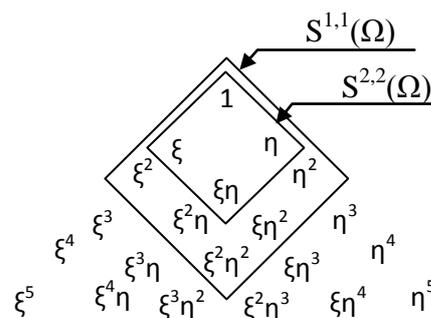


Figure I-4 : Famille "Lagrange"

I.2.2.2.2. Fonctions de forme hiérarchiques

Les fonctions de forme hiérarchiques sont généralement choisies dans l'espace de Serendipity [140] ; elles diffèrent de celles introduites par Peano car elles sont définies à partir des polynômes de Legendre. Ces fonctions de forme peuvent être classées en trois catégories :

- *Fonctions de forme nodales*

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (\text{I-6})$$

- *Fonctions de forme de côté*

$$\text{Côté 1 : } N_i^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)\phi_i(\xi) \quad i = 2, \dots, p \quad (\text{I-7})$$

$$\text{Côté 2 : } N_i^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)\phi_i(\eta) \quad i = 2, \dots, p \quad (\text{I-8})$$

$$\text{Côté 3 : } N_i^{(3)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)\phi_i(\xi) \quad i = 2, \dots, p \quad (\text{I-9})$$

$$\text{Côté 4 : } N_i^{(4)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)\phi_i(\eta) \quad i = 2, \dots, p \quad (\text{I-10})$$

- *Fonctions de forme internes*

$$N_k^{(0)}(\xi, \eta) = \phi_i(\xi)\phi_j(\eta) \quad k = 1, \dots, \frac{1}{2}(p-2)(p-3) \quad (\text{I-11})$$

avec $i, j = 2, \dots, p-2$; $i+j = 4, \dots, p$ et $p \geq 4$.

I.2.2.3. Eléments 2-D triangulaires

Le domaine de référence Ω est un triangle équilatéral (Figure I-5). Comme pour les quadrangulaires, l'espace polynomial généralement adopté est l'espace $S^p(\Omega)$ qui correspond à l'ensemble des monômes $\xi^i \eta^j$ avec $i, j = 0, 1, \dots, p$ et $i+j = 0, 1, \dots, p$.

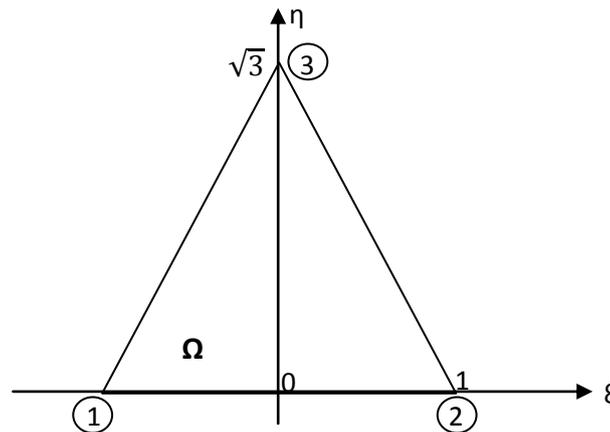


Figure I-5 : Elément triangulaire équilatéral de référence

Les fonctions de forme hiérarchiques peuvent être classées en trois catégories :

- Fonctions de forme nodales

$$\begin{cases} L_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \\ L_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \\ L_3 = \frac{\eta}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (\text{I-12})$$

Ces fonctions sont aussi appelées coordonnées barycentriques du triangle ; leurs sommes vaut toujours 1 sur tout le domaine.

- Fonctions de forme de côté

$$\text{Côté 1 : } N_i^{(1)}(\xi, \eta) = L_1 L_2 \varphi_i(L_1 - L_2) \quad i = 2, \dots, p \quad (\text{I-13})$$

$$\text{Côté 2 : } N_i^{(2)}(\xi, \eta) = L_2 L_3 \varphi_i(L_3 - L_2) \quad i = 2, \dots, p \quad (\text{I-14})$$

$$\text{Côté 3 : } N_i^{(3)}(\xi, \eta) = L_3 L_1 \varphi_i(L_1 - L_3) \quad i = 2, \dots, p \quad (\text{I-15})$$

où les fonctions $\varphi_i(x)$ sont les polynômes de Lobatto définis à partir des modes-bulle (éq. I-3).

$$\phi_j(x) = \frac{1}{4} (1 - x^2) \varphi_{j-2}(x) \quad (\text{I-16})$$

- Fonctions de forme internes

Dans l'espace de Serendipité, il y en a $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ avec $p \geq 3$.

Pour $p=3$, elle s'écrit :

$$N_1^{(0)} = L_1 L_2 L_3$$

Pour $p=4$, il y en a deux supplémentaires :

$$N_1^{(0)} = L_1 L_2 L_3 P_1(L_2 - L_1)$$

$$N_2^{(0)} = L_1 L_2 L_3 P_1(2L_3 - 1)$$

où $P_1(x)$ est un polynôme de Legendre de degré 1.

Pour $p \geq 5$, elles s'écrivent :

$$N_j^{(0)} = L_1 L_2 L_3 P_{i-j-2}(L_2 - L_1) P_{j-1}(2L_3 - 1)$$

$$j = 1, 2, \dots, i-2.$$

$$i = 5, \dots, p.$$

où P_n sont les polynômes de Legendre de degré n .

I.3. Evolution des théories aux éléments finis pour la modélisation des composites

Il est rare de trouver une théorie qui soit applicable à tous les cas possibles (matériau composite, anisotrope, isotrope, grand nombre de couches, stratification sandwich etc...) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui de plus soit simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul.

La théorie la plus ancienne est celle de Kirchoff [141], [142] qui annule l'effet de cisaillement transversal (CT). Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces. La théorie du premier ordre communément associée à Mindlin [143] qui fût l'un des premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du cisaillement transversal à travers l'épaisseur.

Elle conduit, de part l'hypothèse des « sections droites restant droites » à un vecteur des contraintes de CT constant dans l'épaisseur, en contradiction avec une représentation quadratique classiquement obtenue pour les poutres de Timoshenko ou les plaques en flexion par rapport au CT. Pour corriger cette insuffisance, des facteurs dits de correction du CT sont introduits. Les éléments finis formulés en déplacement basés sur la théorie du premier ordre donnent généralement de bons résultats pour les structures isotropes et orthotropes. Ils deviennent peu précis une fois appliqués aux matériaux composites contenant plusieurs couches avec une anisotropie très différente d'une couche à une autre, auquel cas il faudrait imposer des conditions de continuité sur les interfaces [144]. Certes, les facteurs de correction du CT, une fois introduits dans les modèles du 1er ordre en déplacement, ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leurs évaluations dépendent malheureusement du nombre de stratifiés ou du problème à résoudre. Pour écarter à jamais ce type de contrainte, des théories d'ordre supérieur ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney [145], qui a supposé un champ de déplacement d'ordre supérieur à 3. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique ; elle exige en effet un grand nombre de paramètres. D'autres théories sont apparues par la suite, chacune d'elles présentant des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents

selon le domaine d'application. Une synthèse sur l'aspect « éléments finis » et le lien avec les théories du premier ordre et d'ordre supérieur est développée dans la section suivante.

I.3. 1. Eléments finis et facteurs de correction du CT

Les matériaux composites multicouches sont le plus souvent modélisés par éléments finis afin d'obtenir une estimation des contraintes et des déformations dues aux efforts extérieurs. En raison de leurs différentes applications industrielles, les éléments finis ont attiré l'attention d'un grand nombre de groupes de recherche. Ceci a conduit à une amélioration considérable de leurs caractéristiques.

Le calcul des éléments finis consiste d'une part à déterminer le déplacement des points de la structure sous diverses sollicitations, et d'autre part à bien formuler la variation de l'énergie, ce qui permet de déduire les contraintes et les déformations. Ainsi, les chercheurs ont étudié le choix du champ de déplacement, ainsi que la formulation de la variation de l'énergie. Plusieurs théories ont été dégagées. Nous en citerons les plus intéressantes.

Un premier choix du champ de déplacement est basé sur la théorie du premier ordre [146,147,148]. En optant pour ce choix, les auteurs considèrent que les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur d'une structure composite. Dans le cas réel, ceci n'est pas vrai. En effet, les contraintes de cisaillement sont quadratiques à travers l'épaisseur (Figures I-6). Pour corriger les contraintes de cisaillement transversal, dont l'expression est issue de la théorie du premier ordre, des facteurs de correction doivent être introduits, comme cela a été souligné précédemment.

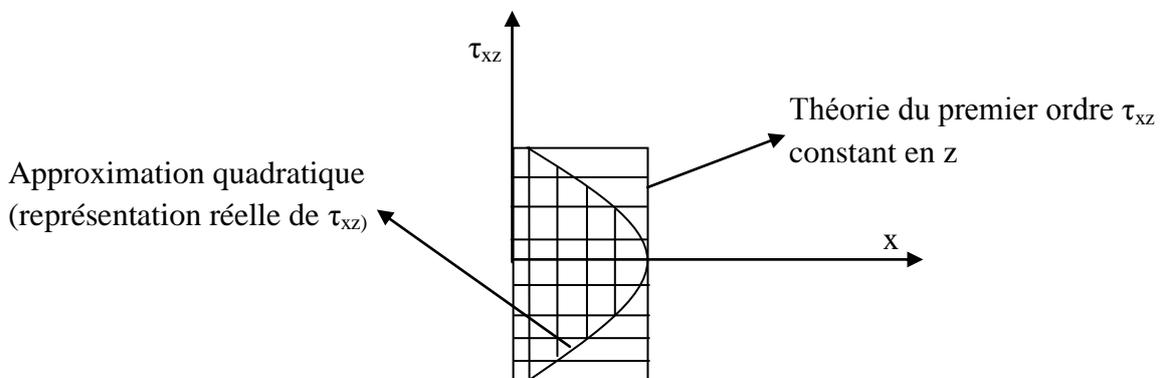


Figure I-6 : Approximations de la contrainte du CT : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur).

Les facteurs de correction sont calculés par comparaison de l'énergie de cisaillement transverse du 1er ordre et celle d'ordre supérieur [149, 150, 151]. Un calcul plus exact [149] des facteurs de correction est obtenu en comparant l'énergie de cisaillement du 1er ordre avec l'énergie de cisaillement par contraintes de cisaillement. Ces contraintes sont déduites des équations d'équilibre. Pour un matériau isotrope ($k_1=k_2=5/6$) [152],[149], nous obtenons en général $U_{\text{shear}} = k\tilde{U}_{\text{shear}}$ (\tilde{U}_{shear} est l'énergie de cisaillement obtenue en utilisant les équations d'équilibres et U_{shear} est de l'énergie cisaillement obtenue par la théorie du premier ordre (Mindlin)).

Pour les matériaux composites, deux facteurs de correction k_1 et k_2 sont introduits :

$$U_{\text{shear1}} = k_1\tilde{U}_{\text{shear1}} \text{ et } U_{\text{shear2}} = k_2\tilde{U}_{\text{shear2}}$$

$\tilde{U}_{\text{shear1}}$ et U_{shear1} sont les énergies suivant l'axe x. $\tilde{U}_{\text{shear2}}$ et U_{shear2} sont les énergies suivant l'axe y.

Dans le cas de la théorie du premier ordre, le coefficient k permet d'estimer à priori la sensibilité des poutres au cisaillement transversal. Dans une section composite, cela permet d'optimiser les orientations des fibres, quand il s'agit de matériau unidirectionnel, où les épaisseurs relatives des différentes couches dans les autres cas. Batoz [153] a utilisé la même méthode d'équivalence entre l'énergie exacte et celle récupéré du modèle. Il a introduit le gauchissement dans la déformation de membrane.

I.3.2. Synthèse bibliographique sur les théories d'ordre supérieur

I.3.2.1. Aspects généraux :

Les facteurs de correction du CT dépendent du nombre de couches ou de stratifications présentes dans une plaque ou une coque composite. Pour éviter d'utiliser ces facteurs, certains auteurs ont adopté des théories dites d'ordre supérieur où le champ de déplacements est en général défini par une série de Taylor de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_1^0(x_1, x_2) + z\varnothing_1^{0(1)} + z^2\varnothing_2^{0(2)} + z^3\varnothing_3^{0(3)} + z^4\varnothing_4^{0(4)} + \dots \quad (\text{I-17})$$

Partant de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3^{ème} ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité [154], [155], [156]. La valeur $\varnothing_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\varnothing_j^{0(i)} = 0$ pour $j=2, 3, 4 \dots$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement de (I-17) est utilisé avec $\phi_i^{0(4)} = \phi_i^{0(3)} = \phi_i^{0(2)} = \phi_3^{0(1)} = 0$. Le champ de déplacement (I-17) devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{I-18})$$

Selon l'expression de la frontière de cisaillement $f_s(z)$, quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan [157] avec ;

$$f_s(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{I-19})$$

- L'approche de Reissner [158] et Panc[159] avec ;

$$f_s(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{I-20})$$

- L'approche de Murthy 1981 [160] et Reddy [161] avec ;

$$f_s(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{I-21})$$

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre supérieur, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

I.4. Modélisation d'une poutre épaisse multicouche

I.4.1. Formulation de base dans le cas non-linéaire

Une poutre stratifiée anisotrope de largeur b , d'épaisseur h et de longueur L est considérée. Il est supposé que chaque couche de la poutre stratifiée est homogène,

orthotrope et les couches sont linéairement élastiques et l'interface est parfaite. L'élément de structure poutre est présenté sur la Figure I-7.

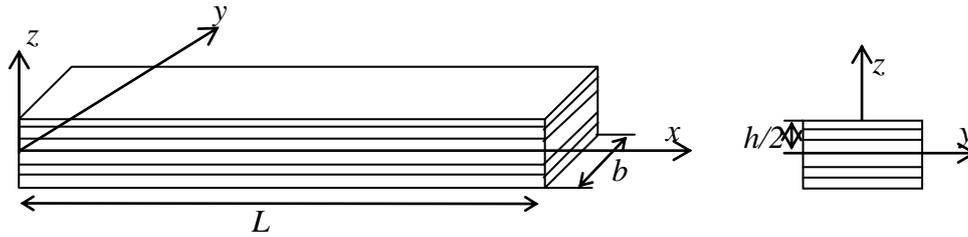


Figure I-7 : Poutre composite.

I.4.1.1. Champ de déplacement

Contenu de la théorie des déformations transversales au premier ordre des poutres composites stratifiés, les composantes de déplacement U et W dans les directions x et z de l'élément composite peuvent être exprimé en fonction des composantes de déplacement du plan moyen u et w et des rotations θ et ψ du plan moyen autour des axes y et x respectivement.

$$\begin{aligned} U(x, z, t) &= u(x, t) - z\theta(x, t). \\ V(x, z, t) &= z\psi(x, t). \\ W(x, z, t) &= w(x, t). \end{aligned} \quad (\text{I-22})$$

Les déplacements du plan moyen u et w et des rotations θ et ψ du plan moyen autour des axes y et x respectivement sont :

$$\begin{pmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}. \quad (\text{I-23})$$

L'approximation du champ de déplacement u et w ainsi que les rotations θ et ψ sont exprimées dans l'espace discret par la combinaison des fonctions de forme nodales et hiérarchiques des déplacements généralisés $\{q\} = \{q^u, q^w, q^\theta, q^\psi\}$.

$$\begin{pmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle N^u \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle N^w \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle N^\psi \rangle \end{pmatrix} \{q\}$$

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle N^u \rangle & 0 & -z\langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z\langle N^\psi \rangle \\ 0 & \langle N^w \rangle & 0 & 0 \end{pmatrix} \{q\}$$

I.4.1.2. Champ de déformation

Pour l'analyse des grandes déformations, la relation qui donne le champ de déformation proposé par Green de chaque point de la poutre est :

$$\varepsilon_{j,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_l}{\partial x_j} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) \quad (I-24)$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Déformations linéaires :

$$\varepsilon_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ -\theta + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle N^u \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle N^w \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle N^\psi \rangle \end{pmatrix} \{q\}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle N^u \rangle}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial \langle N^\theta \rangle}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \langle N^w \rangle}{\partial x} & -\langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle N^\nu \rangle \end{pmatrix} \{q\}$$

La dérivée de la déformation est donnée par :

$$\delta \varepsilon_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle N^u \rangle}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial \langle N^\theta \rangle}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \langle N^w \rangle}{\partial x} & -\langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle N^\nu \rangle \end{pmatrix} \delta \{q\}$$

$$B_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle N^u \rangle}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial \langle N^\theta \rangle}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \langle N^w \rangle}{\partial x} & -\langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle N^\nu \rangle \end{pmatrix} \quad (I-25)$$

Déformations non-linéaires :

$$\varepsilon_{nl} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial W}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [A] \{\Theta\} \quad (I-26)$$

$$\{\Theta\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ z \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle N^u \rangle}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial \langle N^\theta \rangle}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \frac{\partial \langle N^w \rangle}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial \langle N^w \rangle}{\partial x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \{q\}$$

La dérivée de la déformation non-linéaires est donnée par :

$$\delta \Theta = \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle N^u \rangle}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial \langle N^\theta \rangle}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \frac{\partial \langle N^w \rangle}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial \langle N^w \rangle}{\partial x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta \{q\}$$

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial W}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{nl} = \frac{1}{2} [A] \{\Theta\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle N^u \rangle}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial \langle N^\theta \rangle}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \frac{\partial \langle N^w \rangle}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial \langle N^w \rangle}{\partial x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \{q\}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \langle N^w \rangle}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \{q\}$$

$$\delta \varepsilon_{nl} = [A] \delta \{\Theta\} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \langle N^w \rangle}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \{\delta q\}$$

$$B_{Nl} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \langle N^w \rangle}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I-27})$$

I.4.1.3. Matériau composite en-dehors de ses axes principaux

Les stratifiés étaient élaborés par couches successives, dont la direction des fibres ou de la chaîne et décalée d'une couche à l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est alors nécessaire de prendre un système d'axes de référence pour l'ensemble du stratifié, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

Changement de base :

Les relations entre les contraintes σ_{ij} exprimées dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et les contraintes $\sigma_{ij}^{(k)}$ exprimées dans la base $(\vec{e}_x^{(k)}, \vec{e}_y^{(k)}, \vec{e}_z^{(k)})$, obtenue par rotation autour de la direction \vec{e}_z , peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \\ \tau_{yz}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij}^{(k)} = T_\sigma \sigma_{ij} \quad (\text{I-28})$$

La même chose pour les relations entre les déformations ε_{ij} exprimées dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et les déformations $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ exprimées dans la base $(\vec{e}_x^{(k)}, \vec{e}_y^{(k)}, \vec{e}_z^{(k)})$:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \gamma_{xz}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{ij}^{(k)} \quad (\text{I-29})$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij} = T_\varepsilon^{-1} \varepsilon_{ij}^{(k)}$$

Relation contrainte-déformation dans un système d'axes quelconques :

Appliquant la loi de Hook dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$\sigma_{ij} = C \varepsilon_{ij}$$

Dans la base $(\vec{e}_x^{(k)}, \vec{e}_y^{(k)}, \vec{e}_z^{(k)})$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = T_{\sigma} \sigma_{ij} = T_{\sigma} C \varepsilon_{ij}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij}^{(k)} = T_{\sigma} C T_{\varepsilon}^{-1} \varepsilon_{ij}^{(k)}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij}^{(k)} = D \varepsilon_{ij}^{(k)}$$

$$D = T_{\sigma} C T_{\varepsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{14}^{(k)} & A_{15}^{(k)} \\ A_{14}^{(k)} & A_{44}^{(k)} & A_{45}^{(k)} \\ A_{15}^{(k)} & A_{45}^{(k)} & A_{55}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (\text{I-30})$$

d'où l'écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \\ \tau_{yz}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{14}^{(k)} & A_{15}^{(k)} \\ A_{14}^{(k)} & A_{44}^{(k)} & A_{45}^{(k)} \\ A_{15}^{(k)} & A_{45}^{(k)} & A_{55}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \gamma_{xz}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (\text{I-31})$$

Pour un matériau orthotrope :

$$A_{11}^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \cos^4 \theta_k + Q_{22}^{(k)} \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k$$

$$A_{14}^{(k)} = 0$$

$$A_{15}^{(k)} = 0$$

$$A_{44}^{(k)} = \chi_2 (Q_{44}^{(k)} \cos^2 \theta_k + Q_{55}^{(k)} \sin^2 \theta_k)$$

$$A_{45}^{(k)} = \sqrt{\chi_1 \chi_2} (Q_{55}^{(k)} - Q_{44}^{(k)}) \cos \theta_k \sin \theta_k$$

$$A_{55}^{(k)} = \chi_1 (Q_{55}^{(k)} \cos^2 \theta_k + Q_{44}^{(k)} \sin^2 \theta_k)$$

où χ_i est le facteur de correction du cisaillement.

Dans le cas de contraintes planes dans les matériaux orthotropes, le facteur de correction du cisaillement est évalué à $\frac{5}{6}$.

$$Q_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}};$$

$$Q_{12}^{(k)} = \frac{\nu_{12}^{(k)} E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}};$$

$$Q_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}$$

$$Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)};$$

$$Q_{44}^{(k)} = G_{23}^{(k)};$$

$$Q_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)}.$$

I.4.1.4. Energie de déformation

$$Ed = \frac{1}{2} \int_v \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & A_{44}^{(k)} & A_{45}^{(k)} \\ 0 & A_{45}^{(k)} & A_{55}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} dv = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon^T D \varepsilon dv \quad (I-32)$$

$$Ed = \int_v \varepsilon D \varepsilon dv = \int_v (\varepsilon_l + \varepsilon_{nl}) D (\varepsilon_l + \varepsilon_{nl}) dv$$

$$= \int_v (\varepsilon_l D \varepsilon_l + \varepsilon_l D \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl} D \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} D \varepsilon_{nl}) dv$$

$$= \int_v (\varepsilon_l D \varepsilon_l) dv + \int_v (\varepsilon_l D \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl} D \varepsilon_l) dv + \int_v (\varepsilon_{nl} D \varepsilon_{nl}) dv$$

$$= Ed_l + {}_1Ed_{nl} + {}_2Ed_{nl}$$

$$\delta Ed = \int_v \delta \varepsilon D \varepsilon dv = \int_v \delta (\varepsilon_l + \varepsilon_{nl}) D (\varepsilon_l + \varepsilon_{nl}) dv \quad (I-33)$$

$$= \int_v (\delta \varepsilon_l D \varepsilon_l + \delta \varepsilon_l D \varepsilon_{nl} + \delta \varepsilon_{nl} D \varepsilon_l + \delta \varepsilon_{nl} D \varepsilon_{nl}) dv$$

$$= \int_v \delta \varepsilon_l D \varepsilon_l dv + \int_v \delta \varepsilon_l D \varepsilon_{nl} dv + \int_v \delta \varepsilon_{nl} D \varepsilon_l dv + \int_v \delta \varepsilon_{nl} D \varepsilon_{nl} dv$$

$$Ed_l = \int_v \delta \varepsilon_l D \varepsilon_l dv \quad (I-34)$$

$$\delta Ed_l = \int_v \delta \varepsilon_l^T D \varepsilon_l dv = \{\delta q\}^T \int_{L-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} B_l^T D B_l dy dz dx \{q\}$$

$$= \{\delta q\}^T \int_{L-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \begin{pmatrix} \{N_{,x}^u\} & 0 & 0 \\ 0 & \{N_{,x}^w\} & 0 \\ -z\{N_{,x}^\theta\} & -\{N^\theta\} & 0 \\ 0 & 0 & \{N^\psi\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & A_{44}^{(k)} & A_{45}^{(k)} \\ 0 & A_{45}^{(k)} & A_{55}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle N_{,x}^u \rangle & 0 & -z\langle N_{,x}^\theta \rangle & 0 \\ 0 & \langle N_{,x}^w \rangle & -\langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle N^\psi \rangle \end{pmatrix} dz dy dx \{q\}$$

$$= \{\delta q\}^T \int_{L-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} A_{11}^k \langle N^u \rangle \langle N^u \rangle & 0 & -z A_{11}^k \langle N^u \rangle \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & A_{44}^k \langle N^w \rangle \langle N^w \rangle & -A_{44}^k \langle N^w \rangle \langle N^\theta \rangle & A_{45}^k \langle N^w \rangle \langle N^\psi \rangle \\ -z A_{11}^k \langle N^\theta \rangle \langle N^u \rangle & -A_{44}^k \langle N^\theta \rangle \langle N^w \rangle & A_{44}^k \langle N^\theta \rangle \langle N^\theta \rangle + z^2 A_{11}^k \langle N^u \rangle \langle N^\theta \rangle & -A_{45}^k \langle N^\theta \rangle \langle N^\psi \rangle \\ 0 & A_{45}^k \langle N^\psi \rangle \langle N^w \rangle & -A_{45}^k \langle N^\psi \rangle \langle N^\theta \rangle & A_{55}^k \langle N^\psi \rangle \langle N^\psi \rangle \end{pmatrix} dz dy dx \{q\}$$

$${}_1 Ed_{nl} = \int_v \delta \varepsilon_l D \varepsilon_{nl} dv + \int_v \delta \varepsilon_{nl} D \varepsilon_l dv \quad (I-35)$$

$$\delta {}_1 Ed_{nl} = \int_v (\delta \varepsilon_l D \varepsilon_{nl} + \delta \varepsilon_{nl} D \varepsilon_l) dv = \{\delta q\}^T \int_{L-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{1}{2} B_l^T D B_{nl} + B_{nl}^T D B_l \right) dy dz dx \{q\}$$

$$= \{\delta q\}^T \frac{1}{2} \int_{L-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \langle N^u \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle N^w \rangle & 0 \\ -z \langle N^\theta \rangle & -\langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle N^\psi \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & A_{44}^{(k)} & A_{45}^{(k)} \\ 0 & A_{45}^{(k)} & A_{55}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \langle N^w \rangle w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dy dz dx \{q\}$$

$$+ \{\delta q\}^T \int_{L-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \langle N^w \rangle w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & A_{44}^{(k)} & A_{45}^{(k)} \\ 0 & A_{45}^{(k)} & A_{55}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle N^u \rangle & 0 & -z \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & \langle N^w \rangle & -\langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle N^\psi \rangle \end{pmatrix} dy dz dx \{q\}$$

$$= \{\delta q\}^T \frac{1}{2} \int_{L-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} 0 & A_{11}^k \langle N^u \rangle \langle N^w \rangle w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z A_{11}^k \langle N^\theta \rangle \langle N^w \rangle w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dy dz dx \{q\}$$

$$+ \{\delta q\}^T \int_{L-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{11}^k \langle N^w \rangle \langle N^u \rangle w_{,x} & 0 & -z A_{11}^k \langle N^w \rangle \langle N^\theta \rangle w_{,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dy dz dx \{q\}$$

$$= \{\delta q\}^T \frac{1}{2} \int_{L-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} 0 & A_{11}^k \langle N^u \rangle \langle N^w \rangle w_{,x} & 0 & 0 \\ 2A_{11}^k \langle N^w \rangle \langle N^u \rangle w_{,x} & 0 & -2z A_{11}^k \langle N^w \rangle \langle N^\theta \rangle w_{,x} & 0 \\ 0 & -z A_{11}^k \langle N^\theta \rangle \langle N^w \rangle w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dy dz dx \{q\}$$

$${}_2Ed_{nl} = \int_v \delta \varepsilon_{nl} D \varepsilon_{nl} dv \tag{I-36}$$

$$\begin{aligned} \delta {}_2Ed_{nl} &= \int_v \delta \varepsilon_{nl} D \varepsilon_{nl} dv = \{ \delta q \}^T \int_{L-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} B_{nl}^T D B_{nl} dy dz dx \{ q \} \\ &= \{ \delta q \}^T \int_{L-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \{ N_{,x}^w \} w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & A_{44}^{(k)} & A_{45}^{(k)} \\ 0 & A_{45}^{(k)} & A_{55}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \langle N_{,x}^w \rangle w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dy dz dx \{ q \} \\ &= \{ \delta q \}^T \int_{L-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11}^k \{ N_{,x}^w \} \langle N_{,x}^w \rangle w_{,x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dy dz dx \{ q \} \end{aligned}$$

I.4.1.5. Développement des intégrales :

Nous savons que : N, u, w, θ ne change pas en fonction de z .

Il nous reste les integrales de $Q_1^{(k)}$ et $Q_5^{(k)}$ par $z^n ; n = (1..k)$ voir figure I-8.

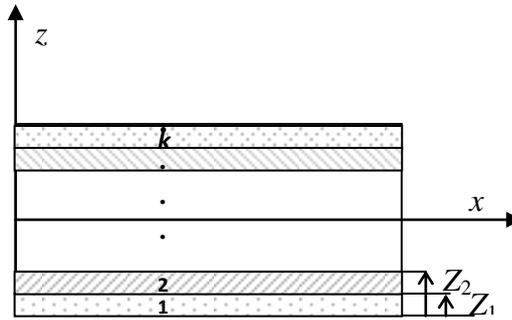


Figure I-8 : Elément poutre composé de k couches en composite stratifié.

Par changement de référentiel, nous avons:

$$d = \left(\frac{h_k}{2} + \sum_{i=1}^k h_{i-1} \right) - \frac{H}{2} : \text{Distance du centre d'une couche } k \text{ par rapport au référentiel.}$$

$I_z^k = \left(\frac{bh_k^3}{12} + d_k^2 bh_k \right) : \text{Moment d'inertie par rapport à l'axe } z \text{ d'une couche } k \text{ par rapport au référentiel.}$

$A_k = bh_k$: Section d'une couche k .

$$\bar{Q}_{11} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A_{11}^{(k)} dydz = \sum_{k=1}^n A_{11}^{(k)} bh_k = \sum_{k=1}^n A_{11}^{(k)} A_k \quad (\text{I-37})$$

$$\bar{Q}_{12} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A_{11}^{(k)} z dydz = \sum_{k=1}^n A_{11}^{(k)} d_k bh_k = \sum_{k=1}^n A_{11}^{(k)} d_k A_k \quad (\text{I-38})$$

$$\bar{Q}_{22} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A_{11}^{(k)} z^2 dydz = \sum_{k=1}^n A_{11}^{(k)} \left(\frac{bh_k^3}{12} + d_k^2 bh_k \right) = \sum_{k=1}^n A_{11}^{(k)} I_z^k \quad (\text{I-39})$$

$$\bar{Q}_{55} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A_{55}^{(k)} dydz = \sum_{k=1}^n A_{55}^{(k)} bh_k = \sum_{k=1}^n A_{55}^{(k)} A_k \quad (\text{I-40})$$

$$\bar{Q}_{45} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A_{45}^{(k)} dydz = \sum_{k=1}^n A_{45}^{(k)} bh_k = \sum_{k=1}^n A_{45}^{(k)} A_k \quad (\text{I-41})$$

$$\bar{Q}_{44} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A_{44}^{(k)} dydz = \sum_{k=1}^n A_{44}^{(k)} bh_k = \sum_{k=1}^n A_{44}^{(k)} A_k \quad (\text{I-42})$$

L'énergie de déformation s'écrit :

$$\delta Ed_l = \{\delta q\}^T \int_L \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} \{N_{,x}^u\} \langle N_{,x}^u \rangle & 0 & -\bar{Q}_{12} \{N_{,x}^u\} \langle N_{,x}^\theta \rangle & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{44} \{N_{,x}^w\} \langle N_{,x}^w \rangle & -\bar{Q}_{44} \{N_{,x}^w\} \langle N_{,x}^\theta \rangle & \bar{Q}_{45} \{N_{,x}^w\} \langle N_{,x}^\psi \rangle \\ -\bar{Q}_{12} \{N_{,x}^\theta\} \langle N_{,x}^u \rangle & -\bar{Q}_{44} \{N_{,x}^\theta\} \langle N_{,x}^w \rangle & \bar{Q}_{44} \{N_{,x}^\theta\} \langle N_{,x}^\theta \rangle + \bar{Q}_{22} \{N_{,x}^\theta\} \langle N_{,x}^\theta \rangle & -\bar{Q}_{45} \{N_{,x}^\theta\} \langle N_{,x}^\psi \rangle \\ 0 & \bar{Q}_{45} \{N_{,x}^\psi\} \langle N_{,x}^w \rangle & -\bar{Q}_{45} \{N_{,x}^\psi\} \langle N_{,x}^\theta \rangle & \bar{Q}_{55} \{N_{,x}^\psi\} \langle N_{,x}^\psi \rangle \end{pmatrix} dx \{q\} \quad (\text{I-43})$$

La rigidité linéaire de la structure poutre est :

$$K_l = \int_L \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} \{N\}_x^u \langle N \rangle_x^u & 0 & -\bar{Q}_{12} \{N\}_x^u \langle N \rangle_x^\theta & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{44} \{N\}_x^w \langle N \rangle_x^w & -\bar{Q}_{44} \{N\}_x^w \langle N \rangle_x^\theta & \bar{Q}_{45} \{N\}_x^w \langle N \rangle_x^\psi \\ -\bar{Q}_{12} \{N\}_x^\theta \langle N \rangle_x^u & -\bar{Q}_{44} \{N\}_x^\theta \langle N \rangle_x^w & \bar{Q}_{44} \{N\}_x^\theta \langle N \rangle_x^\theta + \bar{Q}_{22} \{N\}_x^\theta \langle N \rangle_x^\theta & -\bar{Q}_{45} \{N\}_x^\theta \langle N \rangle_x^\psi \\ 0 & \bar{Q}_{45} \{N\}_x^\psi \langle N \rangle_x^w & -\bar{Q}_{45} \{N\}_x^\psi \langle N \rangle_x^\theta & \bar{Q}_{55} \{N\}_x^\psi \langle N \rangle_x^\psi \end{pmatrix} dx \quad (\text{I-44})$$

$${}_1\delta Ed_{nl} = \{\delta q\}^T \frac{1}{2} \int_L \begin{pmatrix} 0 & \bar{Q}_{11} \{N_{,x}^u\} \langle N_{,x}^w \rangle w_{,x} & 0 & 0 \\ 2\bar{Q}_{11} \{N_{,x}^w\} \langle N_{,x}^u \rangle w_{,x} & 0 & -2\bar{Q}_{12} \{N_{,x}^w\} \langle N_{,x}^\theta \rangle w_{,x} & 0 \\ 0 & -\bar{Q}_{12} \{N_{,x}^\theta\} \langle N_{,x}^w \rangle w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \{q\} \quad (I-45)$$

La première rigidité non-linéaire de la structure poutre est :

$${}_1K_{nl} = \frac{1}{2} \int_L \begin{pmatrix} 0 & \bar{Q}_{11} \{N_{,x}^u\} \langle N_{,x}^w \rangle w_{,x} & 0 & 0 \\ 2\bar{Q}_{11} \{N_{,x}^w\} \langle N_{,x}^u \rangle w_{,x} & 0 & -2\bar{Q}_{12} \{N_{,x}^w\} \langle N_{,x}^\theta \rangle w_{,x} & 0 \\ 0 & -\bar{Q}_{12} \{N_{,x}^\theta\} \langle N_{,x}^w \rangle w_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \quad (I-46)$$

$$\delta({}_2Ed_{nl}) = \{\delta q\}^T \frac{1}{2} \int_L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{11} \{N_{,x}^w\} \langle N_{,x}^w \rangle w_{,x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \{q\} \quad (I-47)$$

La deuxième rigidité non-linéaire de la structure poutre est :

$${}_2K_{nl} = \frac{1}{2} \int_L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{11} \{N_{,x}^w\} \langle N_{,x}^w \rangle w_{,x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \quad (I-48)$$

I.4.1.6. Fonctions de formes utilisées :

ζ est la coordonnée normalisée de l'élément poutre, exprimée :

$$\zeta = \frac{2x}{L} \cdot \quad -1 \leq \zeta \leq 1$$

Les fonctions de formes sont de types de Legendre de classe C^0 :

$$f_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\zeta + \frac{1}{4}\zeta^3 \quad (I-49)$$

$$f_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{1}{4}\zeta^3 \quad (I-50)$$

$$f_r = \sum_{n=0}^{INT(\frac{\zeta}{5})} \frac{(-1)^n (2r-2n-5)!!}{2^n n!(r-2n-1)!} \zeta^{r-2n-1}, r > 2. \quad (I-51)$$

I.4.1.7. Energie cinétique

$$Ec = \frac{1}{2} \int_v \rho^{(k)} \left(\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2 \right) dv = \frac{1}{2} \int_v \rho^{(k)} \begin{pmatrix} \dot{U} & \dot{V} & \dot{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{pmatrix} dv \quad (\text{I-52})$$

$$= \frac{1}{2} \int_v \rho^{(k)} \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{w} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_v \rho^{(k)} \{ \dot{q} \}^T \begin{pmatrix} \{N^u\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{N^w\} \\ -z\{N^\theta\} & 0 & 0 \\ 0 & z\{N^w\} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle N^u \rangle & 0 & -z\langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z\langle N^\psi \rangle \\ 0 & \langle N^w \rangle & 0 & 0 \end{pmatrix} dv \{ \dot{q} \}$$

$$\delta Ec = \frac{1}{2} \int_v \rho^{(k)} \left(\delta \dot{U}^2 + \delta \dot{V}^2 + \delta \dot{W}^2 \right) dv = \int_v \rho^{(k)} \left(\delta U \ddot{U} + \delta V \ddot{V} + \delta W \ddot{W} \right) dv \quad (\text{I-53})$$

$$= \int_v \rho^{(k)} (\delta U \quad \delta V \quad \delta W) \begin{pmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{V} \\ \ddot{W} \end{pmatrix} dv$$

$$= \{ \delta q \}^T \int_v \rho^{(k)} \begin{pmatrix} \{N^u\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{N^w\} \\ -z\{N^\theta\} & 0 & 0 \\ 0 & z\{N^w\} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle N^u \rangle & 0 & -z\langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z\langle N^\psi \rangle \\ 0 & \langle N^w \rangle & 0 & 0 \end{pmatrix} dv \{ \ddot{q} \}$$

$$= \{ \delta q \}^T \int_v \rho^{(k)} \begin{pmatrix} \{N^u\} \langle N^u \rangle & 0 & -z\{N^u\} \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & \{N^w\} \langle N^w \rangle & 0 & 0 \\ -z\{N^\theta\} \langle N^u \rangle & 0 & z^2 \{N^\theta\} \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \{N^w\} \langle N^w \rangle \end{pmatrix} dv \{ \ddot{q} \}$$

nous avons :

$$\rho_{11} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^{(k)} dy dz = \sum_{k=1}^n \rho^{(k)} b h_k = \sum_{k=1}^n \rho^{(k)} A_k \quad (\text{I-54})$$

$$\rho_{12} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^{(k)} z dy dz = \sum_{k=1}^n \rho^{(k)} d_k b h_k = \sum_{k=1}^n \rho^{(k)} d_k A_k \quad (\text{I-55})$$

$$\rho_{22} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^{(k)} z^2 dy dz = \sum_{k=1}^n \rho^{(k)} \left(\frac{b h_k^3}{12} + d_k^2 b h_k \right) = \sum_{k=1}^n \rho^{(k)} I_z^k \quad (\text{I-56})$$

L'Energie cinétique s'écrit :

$$\delta Ec = \{\delta q\}^T \int_L \begin{pmatrix} \rho_{11} \{N^u\} \langle N^u \rangle & 0 & -\rho_{12} \{N^u\} \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & \rho_{11} \{N^w\} \langle N^w \rangle & 0 & 0 \\ -\rho_{12} \{N^\theta\} \langle N^u \rangle & 0 & \rho_{22} \{N^\theta\} \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{22} \{N^w\} \langle N^w \rangle \end{pmatrix} dx \{\ddot{q}\} \quad (\text{I-57})$$

La matrice de masse de la structure poutre est :

$$M = \int_L \begin{pmatrix} \rho_{11} \{N^u\} \langle N^u \rangle & 0 & -\rho_{12} \{N^u\} \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & \rho_{11} \{N^w\} \langle N^w \rangle & 0 & 0 \\ -\rho_{12} \{N^\theta\} \langle N^u \rangle & 0 & \rho_{22} \{N^\theta\} \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{22} \{N^w\} \langle N^w \rangle \end{pmatrix} dx \quad (\text{I-58})$$

Principe de Hamilton qui exprime la stationnarité du principe des travaux virtuels, est :

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} \delta (Ec - Ed) dt = 0 \\ \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{I-59})$$

Où $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ sont les déplacements de frontière.

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\frac{1}{2} M \dot{q}^2(t) - \frac{1}{2} K q^2(t) \right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \dot{q}^T M \dot{q}(t) - \delta q^T K q(t) \right) dt \\ &= \left[\delta q^T M \dot{q}(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(-\delta q^T M \ddot{q}(t) - \delta q^T K q(t) \right) dt = -\delta q^T \int_{t_1}^{t_2} \left(M \ddot{q}(t) + K q(t) \right) dt = 0 \\ \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = \delta \dot{q}(t_1) = \delta \dot{q}(t_2) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{I-60})$$

L'équation dynamique du mouvement est obtenue par l'application du théorème de Hamilton pour les énergies cinétique et potentielle. En tenant compte de la forme de condensation de chacune des matrices de masse et de rigidité tel que le vecteur d'état

$$q = \begin{pmatrix} q_r \\ q_w \end{pmatrix}, \text{ avec } q_r = \begin{pmatrix} q_u \\ q_\theta \\ q_\psi \end{pmatrix} \text{ nous obtenons :}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} M_{rr} & 0 \\ 0 & M_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_1K_{rr} & {}_1K_{rw} \\ {}_1K_{wr} & {}_1K_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r \\ q_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & {}_2K_{rw} \\ {}_2K_{wr} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r \\ q_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_3K_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r \\ q_w \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ q_w(t=0) &= q_{w0} \end{aligned} \right. \quad (\text{I-61})$$

où M est la matrice de masse, ${}_1K$ matrice de rigidité linéaire; ${}_2K$, ${}_3K$ sont des matrices de rigidités non-linéaires, sachant que ${}_2K_{wr} = {}_2K_{rw}$. La matrice ${}_2K$ est linéaire en q_w et ${}_3K$ est quadratique en q_w . Pour des raisons d'homogénéités dynamiques, nous considérons les conditions initiales suivantes, $q_w(t=0) = q_{w0}$.

Comme nous sommes intéressés uniquement par le déplacement transversal, et que la direction de l'excitation est suivant q_w , alors on déduit de l'équation condensée (I-61) ce qui suit :

$$q_r = -{}_1K_{rr}^{-1} [{}_1K_{rw} + {}_2K_{rw}] q_w \quad (\text{I-62})$$

Finalement, l'équation de vibrations transversales pour de grands déplacements d'une poutre épaisse multicouches peut être écrite comme suit:

$$\left\{ \begin{aligned} M \ddot{q}(t) + [K_L + K_{NL}(q(t))] q(t) &= 0 \\ q(t=0) &= q_0 \end{aligned} \right. \quad (\text{I-63})$$

où $q(t) = q_w(t)$

$$K_{NL} = \left\{ \left[{}_3 K_{ww} \right] - \left(\left[{}_1 K_{rw}^T + {}_2 K_{wr} \right] \left[{}_1 K_{rr} \right]^{-1} \left[{}_1 K_{rw} + {}_2 K_{rw} \right] \right) \right\} \quad (\text{I-64})$$

avec la transformation (I-62), la matrice de rigidité linéaire K_{NL} est cubique en q^w .

I.5. Modélisation d'une plaque épaisse multi-couches

I.5.1. Formulation de base

I.5.1.1. Champ de déplacement

Conte tenu de la théorie des déformations transversales au premier ordre des plaques composites stratifiés, les composantes de déplacement U , V et W dans les directions x , y , z de l'élément composite peuvent être exprimées en fonction des composantes de déplacement du plan moyen u , v et w et de rotation θ , ψ du plan moyen autour des axes y et x respectivement.

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\theta(x, y, t). \\ V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z\psi(x, y, t). \\ W(x, y, z, t) &= w(x, y, t). \end{aligned} \quad (\text{I-65})$$

I.5.1.2. Champ de déformation

Pour l'analyse des grandes déformations de Green, les déformations de chaque point de la plaque sont :

$$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] \right] \\ \left[\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] \right] \\ \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right] \end{array} \right\} \quad (\text{I-66})$$

Substituant l'équation (I-65) dans (I-66) en considérant la supposition de Van Karman pour les grandes déformations :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{I-67})$$

Le vecteur de cisaillement transversal est donné par :

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} + \theta \\ \frac{\partial W}{\partial y} - \psi \end{Bmatrix} \quad (\text{I-68})$$

Nous pouvons écrire $\boldsymbol{\varepsilon}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (\text{I-69})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} {}_m \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ {}_m \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} \\ {}_m \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} ; \quad (\text{I-70})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{Bmatrix} {}_b \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ {}_b \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} \\ {}_b \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{I-71})$$

et aussi : $\boldsymbol{\varepsilon}_m = \boldsymbol{\varepsilon}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_{nl}$.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = \begin{Bmatrix} {}_L \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ {}_L \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} \\ {}_L \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} ; \quad (\text{I-72})$$

$$\varepsilon_{nl} = \begin{Bmatrix} NL \varepsilon_{xx} \\ NL \varepsilon_{yy} \\ NL \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (I-73)$$

ε peut être rendu linéaire en annulant le terme non-linéaire ε_{nl} : $\varepsilon_m = \varepsilon_l$.

I.5.1.3. Relation contraintes-déformation

Pour la $k^{\text{ème}}$ couche du matériau composite la relation contraintes-déformations est sous la forme:

$$\sigma^{(k)} = \bar{Q}^{(k)} \varepsilon ; \tau^{(k)} = \bar{C}_s^{(k)} \gamma. \quad (I-74)$$

$$\sigma^{(k)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} ; \bar{Q}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} ; \tau^{(k)} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} ;$$

$$\bar{C}_s^{(k)} = \begin{bmatrix} \chi_1 \bar{Q}_{55} & \sqrt{\chi_1 \chi_2} \bar{Q}_{45} \\ \sqrt{\chi_1 \chi_2} \bar{Q}_{45} & \chi_2 \bar{Q}_{44} \end{bmatrix}.$$

où χ_1, χ_2 sont les facteurs de correction de cisaillement.

$$\bar{Q}_{11}^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22}^{(k)} \sin^4 \theta_k ; \quad (I-75)$$

$$\bar{Q}_{12}^{(k)} = (Q_{11}^{(k)} + Q_{22}^{(k)} - 4Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{12}^{(k)} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) ; \quad (I-76)$$

$$\bar{Q}_{22}^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22}^{(k)} \cos^4 \theta_k ; \quad (I-77)$$

$$\bar{Q}_{16}^{(k)} = (Q_{11}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k + (Q_{12}^{(k)} - Q_{22}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k ; \quad (I-78)$$

$$\bar{Q}_{26}^{(k)} = (Q_{11}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k + (Q_{12}^{(k)} - Q_{22}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k ; \quad (I-79)$$

$$\bar{Q}_{66}^{(k)} = (Q_{11}^{(k)} + Q_{22}^{(k)} - 2Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{66}^{(k)} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) ; \quad (I-80)$$

$$\bar{Q}_{44}^{(k)} = Q_{44}^{(k)} \cos^2 \theta_k + Q_{55}^{(k)} \sin^2 \theta_k ; \quad (I-81)$$

$$\bar{Q}_{45}^{(k)} = (Q_{55}^{(k)} - Q_{44}^{(k)}) \cos \theta_k \sin \theta_k ; \quad (I-82)$$

$$\bar{Q}_{55}^{(k)} = Q_{44}^{(k)} \sin^2 \theta_k + Q_{55}^{(k)} \cos^2 \theta_k. \quad (\text{I-83})$$

avec :

$$Q_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} ; Q_{12}^{(k)} = \frac{\nu_{12}^{(k)} E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} ; Q_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} ;$$

$$Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)} ; Q_{44}^{(k)} = G_{23}^{(k)} ; Q_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)}$$

Pour les plaques composites nous pouvons écrire la relation contraintes-déformations

par :

$$\sigma_p = C_p \varepsilon_p ; T = C_s \gamma \quad (\text{I-84})$$

avec :

$$\sigma_p = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} ; \quad (\text{I-85})$$

$$C_p = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} ; \quad (\text{I-86})$$

$$\varepsilon_p = \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_b \end{Bmatrix} ; \quad (\text{I-87})$$

$$T = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}. \quad (\text{I-88})$$

$$\mathcal{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} ; \quad (\text{I-89})$$

$$\mathcal{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (\text{I-90})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix};$$

$$C_s = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 C_{55}^o & \sqrt{\chi_1 \chi_2} C_{45}^o \\ \sqrt{\chi_1 \chi_2} C_{45}^o & \chi_2 C_{44}^o \end{bmatrix}.$$

I.5.1.4. Efforts et moments résultants

Nous considérons comme élément de volume élémentaire, dans la couche (k), un parallélépipède de hauteur z , épaisseur totale du stratifié, et de base $dx \, dy$.

L'action de répartition de contraintes sur une facette latérale quelconque, est équivalente à celle des éléments de réduction du torseur des efforts au centre de la facette. L'état des efforts intérieurs plans est caractérisé par six efforts définis dans le plan moyen de la plaque non déformée est obtenu par intégration des contraintes dans l'épaisseur.

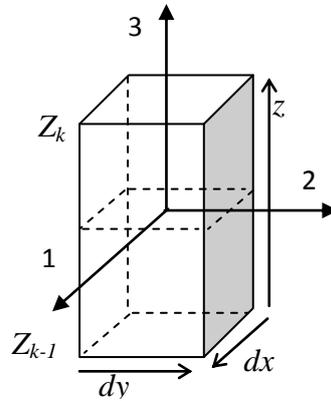


Figure I-9 : Elément de la plaque

$$\mathcal{N} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma\} dz; \quad \mathcal{M} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma\} z dz; \quad \mathcal{Q} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\tau\} dz. \quad (\text{I-91})$$

A partir de l'équation (I-69) et (I-91), nous obtenons :

$$\{\mathcal{N}\} = [A]\{\varepsilon_m\} + [B]\{\varepsilon_b\}; \quad \{\mathcal{M}\} = [B]\{\varepsilon_m\} + [D]\{\varepsilon_b\}; \quad \{\mathcal{Q}\} = [C]\{\gamma\}. \quad (\text{I-92})$$

$$[A] = \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}] dz; \quad [B] = \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}] z dz; \quad [D] = \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}] z^2 dz.$$

où :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}); \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2); \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3); \quad (ij = 1, 2, 6).$$

$$C_{ij}^o = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}); \quad (ij = 4, 5).$$

Où z_{k-1} et z_k sont les coordonnées suivant (z) respectivement de la face supérieure et inférieure de la $k^{\text{ème}}$ couche du matériau.

La formule matricielle de la relation efforts- déformations est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m \varepsilon_{xx} \\ m \varepsilon_{yy} \\ m \gamma_{xy} \\ b \varepsilon_{xx} \\ b \varepsilon_{yy} \\ b \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I-93})$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (\text{I-94})$$

I.5.1.5. Fonctions de formes utilisées :

$$\{N\} = \{f_i(\zeta) f_j(\eta)\} \text{ et } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\{N^w\} = \{g_i(\zeta) g_j(\eta)\} \text{ et } i, j = 1, 2, \dots, n_w.$$

$$\{N^\theta\} = \{\theta_i(\zeta) \theta_j(\eta)\} \text{ et } i, j = 1, 2, \dots, n_x.$$

$$\{N^\psi\} = \{\psi_i(\zeta) \psi_j(\eta)\} \text{ et } i, j = 1, 2, \dots, n_y.$$

Les fonctions $f(x)$, $g(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$ sont respectivement les fonctions de formes nodales et hiérarchiques des déplacements plans, transversaux et des rotations autour des axes x et y ; n , n_w , n_x et n_y sont les nombres des fonctions de formes employés pour les déplacements plans, transversaux et des rotations autour des axes x et y . Les fonctions de forme $f(x)$, $g(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$ sont de type de classe C^0 . ζ et η sont les coordonnées normalisées de l'élément plaque, exprimées :

$$\zeta = \frac{2x}{a} \text{ et } \eta = \frac{2y}{b} \quad . \quad -1 \leq \zeta, \eta \leq 1$$

$$f_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\zeta + \frac{1}{4}\zeta^3 \quad (\text{I-95})$$

$$f_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{1}{4}\zeta^3 \quad (\text{I-96})$$

$$f_r = \sum_{n=0}^{INT(r/2)} \frac{(-1)^n (2r-2n-5)!!}{2^n n! (r-2n-1)!} \zeta^{r-2n-1}, \quad r > 2 \quad (\text{I-97})$$

$$g_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\zeta + \frac{1}{4}\zeta^3 \quad (\text{I-98})$$

$$g_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{1}{4}\zeta^3 \quad (\text{I-99})$$

$$g_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\zeta - \frac{1}{4}\zeta^3 \quad (\text{I-100})$$

$$g_4 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\zeta + \frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{1}{4}\zeta^3 \quad (\text{I-101})$$

$$g_r = \sum_{n=0}^{INT(r/2)} \frac{(-1)^n (2r-2n-7)!!}{2^n n! (r-2n-1)!} \zeta^{r-2n-1}, \quad r > 4 \quad (\text{I-102})$$

I.5.1.6. Energie potentielle :

$$Ed = U_{m,b} + U_s = \frac{1}{2} \int_A \varepsilon_p^T \sigma_p dA + \frac{1}{2} \int_A \gamma^T T dA = \frac{1}{2} \int_A \varepsilon_p^T C_p \varepsilon_p dA + \frac{1}{2} \int_A \gamma^T C_s \gamma dA. \quad (\text{I-103})$$

$$= \frac{1}{2} \int_A (\varepsilon_l + \varepsilon_{nl} + \varepsilon_b)^T C_p (\varepsilon_l + \varepsilon_{nl} + \varepsilon_b) dA + \int_A \gamma^T C_s \gamma dA$$

$$= \frac{1}{2} \int_A (\varepsilon_l^T [A] \varepsilon_l + \varepsilon_l^T [B] \varepsilon_b + \varepsilon_b^T [B] \varepsilon_l + \varepsilon_b^T [D] \varepsilon_b) dA + \frac{1}{2} \int_A \gamma^T C_s \gamma dA$$

$$+ \frac{1}{2} \int_A (\varepsilon_l^T [A] \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^T [A] \varepsilon_l + \varepsilon_{nl}^T [B] \varepsilon_b + \varepsilon_b^T [B] \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^T [A] \varepsilon_{nl}) dA.$$

$$\delta Ed_l = \frac{1}{2} \int_A (\delta \varepsilon_l^T [A] \varepsilon_l + \varepsilon_l^T [A] \delta \varepsilon_l + \delta \varepsilon_l^T [B] \varepsilon_b + \varepsilon_l^T [B] \delta \varepsilon_b + \delta \varepsilon_b^T [B] \varepsilon_l \quad (\text{I-104})$$

$$+ \varepsilon_b^T [B] \delta \varepsilon_l + \delta \varepsilon_b^T [D] \varepsilon_b + \varepsilon_b^T [D] \delta \varepsilon_b) dA.$$

$$= \int_A (\delta \varepsilon_l^T [A] \varepsilon_l + \delta \varepsilon_l^T [B] \varepsilon_b + \delta \varepsilon_b^T [B] \varepsilon_l + \delta \varepsilon_b^T [D] \varepsilon_b) dA.$$

$$\begin{aligned}
\delta E d_{nl} = & \frac{1}{2} \int_A \left(\delta \varepsilon_l^T [A] \varepsilon_{nl} + \varepsilon_l^T [A] \delta \varepsilon_{nl} + \delta \varepsilon_{nl}^T [A] \varepsilon_l + \varepsilon_{nl}^T [A] \delta \varepsilon_l \right. \\
& + \delta \varepsilon_{nl}^T [B] \varepsilon_b + \varepsilon_{nl}^T [B] \delta \varepsilon_b + \delta \varepsilon_b^T [B] \varepsilon_{nl} + \varepsilon_b^T [B] \delta \varepsilon_{nl} \\
& \left. + \delta \varepsilon_{nl}^T [A] \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^T [A] \delta \varepsilon_{nl} \right) dA
\end{aligned} \quad (I-105)$$

$$\varepsilon_l^p = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,x} + u_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \langle N_{,\zeta} \rangle & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \langle N_{,\eta} \rangle \\ \frac{1}{b} \langle N_{,\eta} \rangle & \frac{1}{a} \langle N_{,\zeta} \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = [B_0] \{q_p\} \quad \{q_p\} = \begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \end{Bmatrix}. \quad (I-106)$$

$$\varepsilon_l^b = \begin{Bmatrix} \theta_{,x} \\ -\psi_{,y} \\ \theta_{,y} - \psi_{,x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \langle N^{\theta}_{,\zeta} \rangle & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} \langle N^{\psi}_{,\eta} \rangle \\ \frac{1}{b} \langle N^{\theta}_{,\eta} \rangle & -\frac{1}{a} \langle N^{\psi}_{,\zeta} \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \psi_i \end{Bmatrix} = [B_1] \{q_b\} \quad \{q_b\} = \begin{Bmatrix} q_{\theta} \\ q_{\psi} \end{Bmatrix}. \quad (I-107)$$

$$\varepsilon_{nl} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (w_{,x})^2 \\ (w_{,y})^2 \\ 2(w_{,x} + w_{,y}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2a^2} \langle q_w \rangle \langle N^w_{,\zeta} \rangle \langle N^w_{,\zeta} \rangle \\ \frac{1}{2b^2} \langle q_w \rangle \langle N^w_{,\eta} \rangle \langle N^w_{,\eta} \rangle \\ \frac{1}{ab} \langle q_w \rangle \langle N^w_{,\zeta} \rangle \langle N^w_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} \{w_i\} = [A_0] \{q_w\}. \quad (I-108)$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} w_{,x} + \theta \\ w_{,y} - \psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \langle N^w_{,\zeta} \rangle & \langle N^{\theta} \rangle & 0 \\ \frac{1}{b} \langle N^w_{,\eta} \rangle & 0 & -\langle N^{\psi} \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ \psi_i \end{Bmatrix} = [C_0] \begin{Bmatrix} q_w \\ q_b \end{Bmatrix}. \quad (I-109)$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \langle N^w_{,\zeta} \rangle \\ \frac{1}{b} \langle N^w_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} \{q_w\} + \begin{bmatrix} \langle N^{\theta} \rangle & 0 \\ 0 & -\langle N^{\psi} \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \psi_i \end{Bmatrix} = [C_0^w] \{q_w\} + [C_0^b] \{q_b\}.$$

$$\begin{aligned}
\delta E d_l = & \langle \delta q_p \rangle \int_A [B_0]^T [A] [B_0] \{q_p\} dA + \langle \delta q_p \rangle \int_A [B_0]^T [B] [B_1] \{q_b\} dA \\
& + \langle \delta q_b \rangle \int_A [B_1]^T [B] [B_0] \{q_p\} dA + \langle \delta q_b \rangle \int_A [B_1]^T [D] [B_1] \{q_b\} dA.
\end{aligned} \quad (I-110)$$

$${}_1 k_l = \int_A [B_0]^T [A] [B_0] dA. \quad (I-111)$$

Les matrices de rigidité de la structure plaque sont :

$$\begin{aligned}
{}_1k_l &= \int_A \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\langle N, \zeta \rangle & 0 \\ 0 & \frac{1}{b}\langle N, \eta \rangle \\ \frac{1}{b}\langle N, \eta \rangle & \frac{1}{a}\langle N, \zeta \rangle \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\langle N, \zeta \rangle & 0 \\ 0 & \frac{1}{b}\langle N, \eta \rangle \\ \frac{1}{b}\langle N, \eta \rangle & \frac{1}{a}\langle N, \zeta \rangle \end{bmatrix} dA \\
&= \int_A \left[\begin{aligned} &\frac{A_{11}}{a^2}\langle N, \zeta \rangle\langle N, \zeta \rangle + \frac{A_{16}}{ab}\langle N, \zeta \rangle\langle N, \eta \rangle + \frac{A_{16}}{ab}\langle N, \eta \rangle\langle N, \zeta \rangle + \frac{A_{66}}{b^2}\langle N, \eta \rangle\langle N, \eta \rangle \\ &\frac{A_{12}}{ab}\langle N, \eta \rangle\langle N, \zeta \rangle + \frac{A_{26}}{b^2}\langle N, \eta \rangle\langle N, \eta \rangle + \frac{A_{16}}{a^2}\langle N, \zeta \rangle\langle N, \zeta \rangle + \frac{A_{66}}{ab}\langle N, \zeta \rangle\langle N, \eta \rangle \\ &\frac{A_{12}}{ab}\langle N, \zeta \rangle\langle N, \eta \rangle + \frac{A_{16}}{a^2}\langle N, \zeta \rangle\langle N, \zeta \rangle + \frac{A_{26}}{b^2}\langle N, \eta \rangle\langle N, \eta \rangle + \frac{A_{66}}{ab}\langle N, \eta \rangle\langle N, \zeta \rangle \\ &\frac{A_{22}}{b^2}\langle N, \eta \rangle\langle N, \eta \rangle + \frac{A_{26}}{ab}\langle N, \eta \rangle\langle N, \zeta \rangle + \frac{A_{26}}{ab}\langle N, \zeta \rangle\langle N, \eta \rangle + \frac{A_{66}}{a^2}\langle N, \zeta \rangle\langle N, \zeta \rangle \end{aligned} \right] dA. \\
{}_2k_l &= \int_A [B_0]^T [B][B_1] dA \tag{I-112}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_2k_l &= \int_A \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\langle N, \zeta \rangle & 0 \\ 0 & \frac{1}{b}\langle N, \eta \rangle \\ \frac{1}{b}\langle N, \eta \rangle & \frac{1}{a}\langle N, \zeta \rangle \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\langle N^\theta, \zeta \rangle & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b}\langle N^\psi, \eta \rangle \\ \frac{1}{b}\langle N^\psi, \eta \rangle & -\frac{1}{a}\langle N^\theta, \zeta \rangle \end{bmatrix} dA \\
&= \int_A \left[\begin{aligned} &\frac{B_{11}}{a^2}\langle N, \zeta \rangle\langle N^\theta, \zeta \rangle + \frac{B_{16}}{ab}\langle N, \zeta \rangle\langle N^\psi, \eta \rangle + \frac{B_{16}}{ab}\langle N, \eta \rangle\langle N^\theta, \zeta \rangle + \frac{B_{66}}{b^2}\langle N, \eta \rangle\langle N^\psi, \eta \rangle \\ &\frac{B_{12}}{ab}\langle N, \eta \rangle\langle N^\theta, \zeta \rangle + \frac{B_{26}}{b^2}\langle N, \eta \rangle\langle N^\psi, \eta \rangle + \frac{B_{16}}{a^2}\langle N, \zeta \rangle\langle N^\theta, \zeta \rangle + \frac{B_{66}}{ab}\langle N, \zeta \rangle\langle N^\psi, \eta \rangle \\ &-\frac{B_{12}}{ab}\langle N, \zeta \rangle\langle N^\psi, \eta \rangle - \frac{B_{16}}{a^2}\langle N, \zeta \rangle\langle N^\theta, \zeta \rangle - \frac{B_{26}}{b^2}\langle N, \eta \rangle\langle N^\psi, \eta \rangle - \frac{B_{66}}{ab}\langle N, \eta \rangle\langle N^\theta, \zeta \rangle \\ &-\frac{B_{22}}{b^2}\langle N, \eta \rangle\langle N^\psi, \eta \rangle - \frac{B_{26}}{ab}\langle N, \eta \rangle\langle N^\theta, \zeta \rangle - \frac{B_{26}}{ab}\langle N, \zeta \rangle\langle N^\psi, \eta \rangle - \frac{B_{66}}{a^2}\langle N, \zeta \rangle\langle N^\theta, \zeta \rangle \end{aligned} \right] dA \\
{}_3k_l &= \int_A [B_1]^T [B][B_0] dA = ({}_2k_l)^T \tag{I-113}
\end{aligned}$$

$${}_4k_l = \int_A [B_1]^T [D][B_1] dA \tag{I-114}$$

$${}_4k_l = \int_A \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\langle N^\theta, \zeta \rangle & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b}\langle N^\psi, \eta \rangle \\ \frac{1}{b}\langle N^\psi, \eta \rangle & -\frac{1}{a}\langle N^\theta, \zeta \rangle \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\langle N^\theta, \zeta \rangle & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b}\langle N^\psi, \eta \rangle \\ \frac{1}{b}\langle N^\psi, \eta \rangle & -\frac{1}{a}\langle N^\theta, \zeta \rangle \end{bmatrix} dA$$

$$= \int_A \left[\begin{aligned} & \frac{D_{11}}{a^2} \{N^\theta, \varsigma\} \langle N^\theta, \varsigma \rangle + \frac{D_{16}}{ab} \{N^\theta, \varsigma\} \langle N^\psi, \eta \rangle + \frac{D_{16}}{ab} \{N^\psi, \eta\} \langle N^\theta, \varsigma \rangle + \frac{D_{66}}{b^2} \{N^\psi, \eta\} \langle N^\psi, \eta \rangle \\ & - \frac{D_{12}}{ab} \{N^\psi, \eta\} \langle N^\theta, \varsigma \rangle - \frac{D_{26}}{b^2} \{N^\psi, \eta\} \langle N^\psi, \eta \rangle - \frac{D_{16}}{a^2} \{N^\theta, \varsigma\} \langle N^\theta, \varsigma \rangle - \frac{D_{66}}{ab} \{N^\theta, \varsigma\} \langle N^\psi, \eta \rangle \\ & - \frac{D_{12}}{ab} \{N^\theta, \varsigma\} \langle N^\psi, \eta \rangle - \frac{D_{16}}{a^2} \{N^\theta, \varsigma\} \langle N^\theta, \varsigma \rangle - \frac{D_{26}}{b^2} \{N^\psi, \eta\} \langle N^\psi, \eta \rangle - \frac{D_{66}}{ab} \{N^\psi, \eta\} \langle N^\theta, \varsigma \rangle \\ & + \frac{D_{22}}{b^2} \{N^\psi, \eta\} \langle N^\psi, \eta \rangle + \frac{D_{26}}{ab} \{N^\psi, \eta\} \langle N^\theta, \varsigma \rangle + \frac{D_{26}}{ab} \{N^\theta, \varsigma\} \langle N^\psi, \eta \rangle + \frac{D_{66}}{a^2} \{N^\theta, \varsigma\} \langle N^\theta, \varsigma \rangle \end{aligned} \right] dA$$

$$\begin{aligned} \delta Ed_{nl} = & \frac{1}{2} \left\{ 2 \{ \delta q_p \}^T \int_A [B_0]^T [A] [A_0] \{q_w\} dA + 2 \{ \delta q_w \}^T \int_A [A_0]^T [A] [B_0] \{q_p\} dA \right. \\ & + 2 \{q_p\}^T \int_A [B_0]^T [A] [\delta A_0] \{q_w\} dA + 2 \{ \delta q_b \}^T \int_A [B_1]^T [B] [A_0] \{q_w\} dA \\ & + 2 \{ \delta q_w \}^T \int_A [A_0]^T [B] [B_1] \{q_b\} dA + 2 \{q_b\}^T \int_A [B_1]^T [B] [\delta A_0] \{q_w\} dA \\ & \left. + 2 \{ \delta q_w \}^T \int_A [A_0]^T [A] [A_0] \{q_w\} dA + 2 \{q_w\}^T \int_A [\delta A_0]^T [A] [A_0] \{q_w\} dA \right\} \end{aligned} \quad (I-115)$$

$$\begin{aligned} \delta Ed_{nl} = & \{ \delta q_p \}^T \left\{ \int_A [B_0]^T [A] [A_0] dA + \int_A [B_1]^T [B] [A_0] dA \right\} \{q_w\} \\ & + 2 \{ \delta q_w \}^T \left\{ \int_A [A_0]^T [A] [B_0] dA \{q_p\} + \int_A [A_0]^T [B] [B_1] dA \{q_b\} + \int_A [A_0]^T [A] [A_0] dA \{q_w\} \right\} \end{aligned}$$

$${}_1 k_{nl} = \int_A [B_0]^T [A] [A_0] dA \quad (I-116)$$

$${}_1 k_{nl} = \int_A \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \langle N, \varsigma \rangle & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \langle N, \eta \rangle \\ \frac{1}{b} \langle N, \eta \rangle & \frac{1}{a} \langle N, \varsigma \rangle \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2a^2} \langle q_w \rangle \{N^w, \varsigma\} \langle N^w, \varsigma \rangle \\ \frac{1}{2b^2} \langle q_w \rangle \{N^w, \eta\} \langle N^w, \eta \rangle \\ \frac{1}{ab} \langle q_w \rangle \{N^w, \varsigma\} \langle N^w, \eta \rangle \end{bmatrix} dA$$

$$\begin{aligned} {}_1 k_{nl} = & \int_A \left[\frac{A_{11}}{2a^3} \{N, \varsigma\} \langle q_w \rangle \{N^w, \varsigma\} \langle N^w, \varsigma \rangle + \frac{A_{12}}{2ab^2} \{N, \varsigma\} \langle q_w \rangle \{N^w, \eta\} \langle N^w, \eta \rangle + \frac{A_{16}}{a^2 b} \{N, \varsigma\} \langle q_w \rangle \{N^w, \varsigma\} \langle N^w, \eta \rangle \right. \\ & \left. + \frac{A_{16}}{2a^2 b} \{N, \eta\} \langle q_w \rangle \{N^w, \varsigma\} \langle N^w, \varsigma \rangle + \frac{A_{22}}{2b^3} \{N, \eta\} \langle q_w \rangle \{N^w, \eta\} \langle N^w, \eta \rangle + \frac{A_{66}}{ab^2} \{N, \eta\} \langle q_w \rangle \{N^w, \varsigma\} \langle N^w, \eta \rangle, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{A_{26}}{2ba^2} \{N, \eta\} \langle q_w \rangle \{N^w, \varsigma\} \langle N^w, \varsigma \rangle + \frac{A_{22}}{2b^3} \{N, \eta\} \langle q_w \rangle \{N^w, \eta\} \langle N^w, \eta \rangle + \frac{A_{26}}{ab^2} \{N, \eta\} \langle q_w \rangle \{N^w, \varsigma\} \langle N^w, \eta \rangle \right. \\ & \left. + \frac{A_{16}}{2a^3} \{N, \varsigma\} \langle q_w \rangle \{N^w, \varsigma\} \langle N^w, \varsigma \rangle + \frac{A_{26}}{2b^2 a} \{N, \varsigma\} \langle q_w \rangle \{N^w, \eta\} \langle N^w, \eta \rangle + \frac{A_{66}}{a^2 b} \{N, \varsigma\} \langle q_w \rangle \{N^w, \varsigma\} \langle N^w, \eta \rangle \right] dA \end{aligned}$$

$${}_2k_{nl} = 2 \int_A [A_0]^T [A] [B_0] dA = 2({}_1k_{nl})^T. \quad (\text{I-117})$$

$${}_3k_{nl} = \int_A [B_1]^T [B] [A_0] dA \quad (\text{I-118})$$

$${}_3k_{nl} = \int_A \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \langle N^\theta, \zeta \rangle & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} \langle N^\psi, \eta \rangle \\ \frac{1}{b} \langle N^\psi, \eta \rangle & -\frac{1}{a} \langle N^\theta, \zeta \rangle \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2a^2} \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \\ \frac{1}{2b^2} \langle q_w \rangle \langle N^w, \eta \rangle \langle N^w, \eta \rangle \\ \frac{1}{ab} \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \eta \rangle \end{bmatrix} dA$$

$${}_3k_{nl} = \int_A \left[\frac{B_{11}}{2a^3} \langle N^\theta, \zeta \rangle \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \zeta \rangle + \frac{B_{12}}{2ab^2} \langle N^\theta, \zeta \rangle \langle q_w \rangle \langle N^w, \eta \rangle \langle N^w, \eta \rangle + \frac{B_{16}}{a^2b} \langle N^\theta, \zeta \rangle \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \eta \rangle \right.$$

$$+ \frac{B_{16}}{2a^2b} \langle N^\psi, \eta \rangle \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \zeta \rangle + \frac{B_{22}}{2b^3} \langle N^\psi, \eta \rangle \langle q_w \rangle \langle N^w, \eta \rangle \langle N^w, \eta \rangle - \frac{B_{66}}{ab^2} \langle N^\psi, \eta \rangle \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \eta \rangle,$$

$$\left(-\frac{B_{26}}{2ba^2} \langle N^\psi, \eta \rangle \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \zeta \rangle - \frac{B_{22}}{2b^3} \langle N^\psi, \eta \rangle \langle q_w \rangle \langle N^w, \eta \rangle \langle N^w, \eta \rangle - \frac{B_{26}}{ab^2} \langle N^\psi, \eta \rangle \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \eta \rangle \right.$$

$$\left. - \frac{B_{16}}{2a^3} \langle N^\theta, \zeta \rangle \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \zeta \rangle - \frac{B_{26}}{2b^2a} \langle N^\theta, \zeta \rangle \langle q_w \rangle \langle N^w, \eta \rangle \langle N^w, \eta \rangle - \frac{B_{66}}{a^2b} \langle N^\theta, \zeta \rangle \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \eta \rangle \right)] dA$$

$${}_4k_{nl} = 2 \int_A [A_0]^T [B] [B_1] dA = 2({}_3k_{nl})^T \quad (\text{I-119})$$

$${}_5k_{nl} = 2 \int_A [A_0]^T [A] [A_0] dA \quad (\text{I-120})$$

$${}_5k_{nl} = \int_A \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \\ \frac{1}{b^2} \langle q_w \rangle \langle N^w, \eta \rangle \langle N^w, \eta \rangle \\ \frac{2}{ab} \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \eta \rangle \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2a^2} \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \\ \frac{1}{2b^2} \langle q_w \rangle \langle N^w, \eta \rangle \langle N^w, \eta \rangle \\ \frac{1}{ab} \langle q_w \rangle \langle N^w, \zeta \rangle \langle N^w, \eta \rangle \end{bmatrix} dA$$

$$\begin{aligned}
 {}_5k_{nl} = & \int_A \left(\frac{A_{11}}{2a^4} \langle q_w \rangle \{N_{,\zeta}^w\} \langle N_{,\zeta}^w \rangle \langle q_w \rangle \{N_{,\zeta}^w\} \langle N_{,\zeta}^w \rangle + \frac{A_{12}}{2a^2b^2} \langle q_w \rangle \{N_{,\zeta}^w\} \langle N_{,\zeta}^w \rangle \langle q_w \rangle \{N_{,\eta}^w\} \langle N_{,\eta}^w \rangle \right. \\
 & + \frac{A_{16}}{a^3b} \langle q_w \rangle \{N_{,\zeta}^w\} \langle N_{,\zeta}^w \rangle \langle q_w \rangle \{N_{,\zeta}^w\} \langle N_{,\eta}^w \rangle + \frac{A_{12}}{2a^2b^2} \langle q_w \rangle \{N_{,\eta}^w\} \langle N_{,\eta}^w \rangle \langle q_w \rangle \{N_{,\zeta}^w\} \langle N_{,\zeta}^w \rangle \\
 & + \frac{A_{22}}{2b^4} \langle q_w \rangle \{N_{,\eta}^w\} \langle N_{,\eta}^w \rangle \langle q_w \rangle \{N_{,\eta}^w\} \langle N_{,\eta}^w \rangle + \frac{A_{26}}{ab^3} \langle q_w \rangle \{N_{,\eta}^w\} \langle N_{,\eta}^w \rangle \langle q_w \rangle \{N_{,\zeta}^w\} \langle N_{,\eta}^w \rangle \\
 & + \frac{A_{16}}{2ba^3} \langle q_w \rangle \{N_{,\zeta}^w\} \langle N_{,\eta}^w \rangle \langle q_w \rangle \{N_{,\zeta}^w\} \langle N_{,\zeta}^w \rangle + \frac{A_{26}}{2ab^3} \langle q_w \rangle \{N_{,\zeta}^w\} \langle N_{,\eta}^w \rangle \langle q_w \rangle \{N_{,\eta}^w\} \langle N_{,\eta}^w \rangle \\
 & \left. + \frac{A_{66}}{a^2b^2} \langle q_w \rangle \{N_{,\zeta}^w\} \langle N_{,\eta}^w \rangle \langle q_w \rangle \{N_{,\zeta}^w\} \langle N_{,\eta}^w \rangle \right) dA \\
 \delta Ed_c = & \frac{1}{2} \int_A (\delta \gamma^T [C_s] \gamma + \gamma^T [C_s] \delta \gamma) dA = \int_A \delta \gamma^T [C_s] \gamma dA. \tag{I-121}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta Ed_c = & \int_A \left(\{ \delta q_w \}^T [C_0^w]^T + \{ \delta q_b \}^T [C_0^b]^T \right) [C_s] \left([C_0^w] \{ q_w \} + [C_0^b] \{ q_b \} \right) dA \cdot \\
 \delta Ed_c = & \{ \delta q_w \}^T \int_A [C_0^w]^T [C_s] [C_0^w] dA \{ q_w \} + \{ \delta q_w \}^T \int_A [C_0^w]^T [C_s] [C_0^b] dA \{ q_b \} \\
 & + \{ \delta q_b \}^T \int_A [C_0^b]^T [C_s] [C_0^w] dA \{ q_w \} + \{ \delta q_b \}^T \int_A [C_0^b]^T [C_s] [C_0^b] dA \{ q_b \} \\
 {}_1k_s = & \int_A [C_0^w]^T [C_s] [C_0^w] dA \tag{I-122}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_1k_s = & \int_A \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \langle N_{,\zeta}^w \rangle \\ \frac{1}{b} \langle N_{,\eta}^w \rangle \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \langle N_{,\zeta}^w \rangle \\ \frac{1}{b} \langle N_{,\eta}^w \rangle \end{bmatrix} dA \\
 = & \int_A \left(\frac{C_{55}}{a^2} \{ N_{,\zeta}^w \} \langle N_{,\zeta}^w \rangle + \frac{C_{45}}{ab} \{ N_{,\zeta}^w \} \langle N_{,\eta}^w \rangle + \frac{C_{45}}{ab} \{ N_{,\eta}^w \} \langle N_{,\zeta}^w \rangle + \frac{C_{44}}{b^2} \{ N_{,\eta}^w \} \langle N_{,\eta}^w \rangle \right) dA \\
 {}_2k_s = & \int_A [C_0^w]^T [C_s] [C_0^b] dA \tag{I-123}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_2k_s = & \int_A \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \langle N_{,\zeta}^w \rangle \\ \frac{1}{b} \langle N_{,\eta}^w \rangle \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & -\langle N^\psi \rangle \end{bmatrix} dA \\
 = & \int_A \left[\frac{C_{55}}{a} \{ N_{,\zeta}^w \} \langle N \rangle + \frac{C_{45}}{b} \{ N_{,\eta}^w \} \langle N \rangle \right] \begin{bmatrix} \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & -\langle N^\psi \rangle \end{bmatrix} dA \\
 {}_3k_s = & \int_A [C_0^b]^T [C_s] [C_0^w] dA = ({}_2k_s)^T \tag{I-124}
 \end{aligned}$$

$${}^4k_s = \int_A [C_0^b]^T [C_s] [C_0^b] dA \quad (\text{I-125})$$

$$\begin{aligned} {}^4k_s &= \int_A \begin{bmatrix} \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & -\langle N^\psi \rangle \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & -\langle N^\psi \rangle \end{bmatrix} dA \\ &= \int_A \begin{bmatrix} C_{55} \{N\} \langle N \rangle & -C_{45} \{N\} \langle N \rangle \\ -C_{45} \{N\} \langle N \rangle & C_{44} \{N\} \langle N \rangle \end{bmatrix} dA \end{aligned}$$

La matrice de rigidité linéaire de la structure plaque est :

$$K_l = \begin{bmatrix} [k_l^1] & 0 & [k_l^2] \\ 0 & [k_s^1] & [k_s^2] \\ [k_l^3] & [k_s^3] & [k_l^4] + [k_s^4] \end{bmatrix}$$

La première matrice de rigidité non-linéaire de la structure plaque est :

$${}^1K_{nl} = \begin{bmatrix} 0 & [k_{Nl}^1] & 0 \\ [k_{Nl}^2] & 0 & [k_{Nl}^4] \\ 0 & [k_{Nl}^3] & 0 \end{bmatrix}$$

La deuxième matrice de rigidité non-linéaire de la structure plaque est :

$${}^2K_{nl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k_{Nl}^5] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I.5.1.7. Energie cinétique

$$Ec = \frac{1}{2} \int_v \rho (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) dv \quad (\text{I-126})$$

$$\delta Ec = \int_v \rho (\delta U \ddot{U} + \delta V \ddot{V} + \delta W \ddot{W}) dv \quad (\text{I-127})$$

$$= \int_v \rho [(\delta u + z \delta \theta)(\ddot{u} + z \ddot{\theta}) + (\delta v - z \delta \psi)(\ddot{v} - z \ddot{\psi}) + \delta w \ddot{w}] dv$$

$$= \int_A \langle \delta u \quad \delta v \rangle \left(\rho_p \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} + \rho_{pb} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} \right) dA + \int_A \langle \delta \theta \quad \delta \psi \rangle \left(\rho_{pb} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} + \rho_b \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} \right) dA + \int_A \langle \delta w \rangle \rho_p \{ \ddot{w} \} dA$$

$$\rho_p = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \rho(z) dz ; \quad \rho_{pb} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \rho(z) z dz ; \quad \rho_b = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \rho(z) z^2 dz.$$

$$\rho_p = \sum_{i=1}^n \rho_i (z_{i+1} - z_i) ; \quad \rho_{pb} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i (z_{i+1}^2 - z_i^2) ; \quad \rho_b = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \rho_i (z_{i+1}^3 - z_i^3).$$

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N \rangle & 0 \\ 0 & \langle N \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u \\ q_v \end{Bmatrix} = [\bar{N}] \{ q_p \}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N^\theta \rangle & 0 \\ 0 & -\langle N^\psi \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \psi_i \end{Bmatrix} = [C_s^b] \{ q_b \}$$

$$\{ w_0 \} [N^w] \{ q_w \}.$$

$$\delta Ec = \{ \delta q_p \}^T \int_A \rho_p [\bar{N}]^T [\bar{N}] dA \{ \ddot{q}_p \} + \{ \delta q_p \}^T \int_A \rho_{pb} [\bar{N}] [C_s^b] dA \{ \ddot{q}_b \} + \{ \delta q_b \}^T \int_A \rho_{pb} [C_s^b] [\bar{N}] dA \{ \ddot{q}_p \}$$

$$+ \{ \delta q_b \}^T \int_A \rho_b [C_s^b] [C_s^b] dA \{ \ddot{q}_b \} + \{ \delta q_w \}^T \int_A \rho_p [N^w]^T [N^w] dA \{ \ddot{q}_w \}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_p = \int_A \rho_p [\bar{N}]^T [\bar{N}] dA \\ M_{pb} = \int_A \rho_{pb} [\bar{N}]^T [C_s^b] dA \\ M_{bp} = (M_{pb})^T \\ M_b = \int_A \rho_b [C_s^b]^T [C_s^b] dA \\ M_w = \int_A \rho_p [N^w]^T [N^w] dA \end{cases} . \quad (I-128)$$

La matrice de masse de la structure plaque est :

$$M = \begin{bmatrix} [M_p] & 0 & [M_{pb}] \\ 0 & [M_w] & 0 \\ [M_{bp}] & 0 & [M_b] \end{bmatrix}$$

Par le principe de Hamilton :

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} \delta (Ec - Ed) dt = 0 \\ \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \end{cases} \quad (I-129)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} [M_p] & 0 & [M_{pb}] \\ 0 & [M_w] & 0 \\ [M_{bp}] & 0 & [M_b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{q}_p\} \\ \{\ddot{q}_w\} \\ \{\ddot{q}_b\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [k_l^1] \\ [k_{NI}^2] \\ [k_l^3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [k_{NI}^1] \\ [k_{NI}^5] + [k_s^1] \\ [k_{NI}^3] + [k_s^3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [k_l^2] \\ [k_{NI}^4] + [k_s^2] \\ [k_l^4] + [k_s^4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_p\} \\ \{q_w\} \\ \{q_b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} [M_p] & 0 & [M_{pb}] \\ 0 & [M_w] & 0 \\ [M_{bp}] & 0 & [M_b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{q}_p\} \\ \{\ddot{q}_w\} \\ \{\ddot{q}_b\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [k_l^1] & 0 & [k_l^2] \\ 0 & [k_s^1] & [k_s^2] \\ [k_l^3] & [k_s^3] & [k_l^4] + [k_s^4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_p\} \\ \{q_w\} \\ \{q_b\} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & [k_{NI}^1] & 0 \\ [k_{NI}^2] & 0 & [k_{NI}^4] \\ 0 & [k_{NI}^3] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_p\} \\ \{q_w\} \\ \{q_b\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k_{NI}^5] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q_p\} \\ \{q_w\} \\ \{q_b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I-130)$$

Le système (I-130) est le système d'équations de mouvement non-linéaire à résoudre pour trouver les paramètres dynamiques

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé les formulations mathématiques de la modélisation par éléments finis hiérarchiques de poutres et de plaques épaisses multicouches après un bref rappel sur la construction des éléments finis. La formulation mathématique est basée sur la théorie des poutres épaisses de Timoshenko et la théorie des plaques épaisses de Reissner-Mindlin avec la prise en charge de la non-linéarité géométrique. Dans cette partie, nous avons détaillé les développements, de la formulation du déplacement jusqu'à l'équation différentielle en tenant compte de la construction des fonctions de formes à partir des polynômes de Legendre. A la fin de cette partie, nous avons retrouvé l'équation différentielle qui régit le mouvement qui est à résoudre premièrement dans le cas linéaire sans la prise en compte des termes des perturbations, puis dans le cas non-linéaire avec la prise en compte de tout ses paramètres. Ces deux solutions sont développées en détail dans les chapitres II et IV.

CHAPITRE II

ETUDE LINEAIRE

Introduction

Les techniques de calcul des structures ont connu ces vingt dernières années un développement considérable, motivé par les besoins des industries de pointe et soutenu par les progrès effectués dans le domaine informatique. Ainsi la méthode des éléments finis est-elle communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse mécanique des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie. Avec les performances croissantes de l'outil informatique et des équipements de tests, un grand pas a été franchi dans le domaine de la conception et de l'analyse des structures mécaniques. Ceci peut être observé par le nombre important des différents ouvrages et rapports d'études expérimentales et analytique sur l'évolution des propriétés dynamiques.

Ces propriétés seront déterminée par l'intermédiaire des méthodes numériques, nous citons bien sûre la méthode de éléments finis qui reste l'une des plus puissantes méthodes pour la résolution des problèmes dynamiques.

Afin de passer à la validation de la méthode asymptotique proposée dans le cas de l'étude non-linéaire de la section suivante, basée sur le choix de la fonction de forme dans la discrétisation par la méthode des éléments finis hiérarchiques, nous allons d'abord valider nos développements mathématiques et choisir une fonction de forme plus convergente.

Pour cela, nous présentons dans ce travail, les résultats de la modélisation linéaire d'une poutre et une plaque épaisse multicouches orthotropes en matériaux composites avec différentes orientations de l'orthotropie des plis. En général les éléments de plaques et poutres jouent un rôle très important dans l'analyse de nombreux types de structures. La construction d'un modèle numérique simple et performant traduisant le comportement de ces éléments connaît une activité de recherche très importante. La modélisation est effectuée à l'aide des éléments finis hiérarchiques et une solution numérique est appliquée pour résoudre l'équation de mouvement. Pour l'obtention des valeurs et vecteurs propres, nous avons utilisé une méthode numérique basée sur la factorisation QR que nous rappelons ci-dessous.

II.1. Analyse modale linéaire :

II.1.1. Définition de l'analyse modale :

L'analyse modale permet d'établir un modèle du comportement vibratoire d'une structure mécanique en basses fréquences.

En identifiant à partir de la mesure, les valeurs propres et vecteurs et ainsi que les amortissements modaux d'un système, nous pouvons construire un modèle analytique qui peut être employé en simulation pour prédire le comportement dynamique de la structure dans d'autres situations pratiques. En moyennes et hautes fréquences la densité modale devient si importante que cette méthode nécessite d'être améliorée pour être applicable. Ces considérations de moyennes et hautes fréquences dépendent du problème étudié. Pour une simple poutre ou plaque, le domaine d'utilisation de l'analyse modale est beaucoup plus large que dans le cas d'une navette aérospatiale ou d'un bateau par exemple.

L'analyse modale expérimentale est basée sur certaines hypothèses :

- Le système est linéaire dans la gamme des amplitudes étudiées ;
- Si la structure est continue, elle peut être représentée par un système discret où les paramètres sont exprimés en chaque nœud du maillage (nombre de degré de liberté total = nombre de nœuds) ;
- L'amortissement est supposé proportionnel à la masse et la rigidité.

II.1.2. Historique de l'analyse modale :

D'un point de vue historique, Rayleigh fut l'un des premiers, en 1877 à formuler la théorie des vibrations telle que nous la connaissons aujourd'hui. Il a introduit le concept fondamental d'oscillations d'un système linéaire autour d'une position d'équilibre, et la notion de fréquences et de modes propres, montrant leur existence pour des systèmes discrets ou continus.

Ensuite, au cours des années 1920, les besoins de structures légères en aéronautique ont permis de développer l'étude des problèmes de vibration et de dynamique. Il s'agissait entre autres de prédire le comportement aéroélastique des avions. Ainsi pendant une quarantaine d'années, on développa des méthodes plutôt analytiques avec des structures définies par un petit nombre de degrés de liberté (Rayleigh-Ritz ...), en linéaire [163].

Puis, la naissance et le développement de l'informatique au cours des années 1960 a entraîné l'apparition des méthodes matricielles (discrétisation d'expressions

vibrationnelles) puis le développement de codes éléments finis, s'adaptant à l'augmentation constante de la taille des systèmes traités. Ainsi nous sommes aujourd'hui capables d'élaborer des modèles numériques performants pour prédire le comportement de structures en dynamique. De même, l'informatique a beaucoup apporté au traitement de résultats expérimentaux, avec entre autres le développement de techniques d'analyse modale (depuis 1960) et celui de logiciels dédiés à l'analyse vibratoire expérimentale de structures.

Cependant, la limitation de l'étude au cas linéaire occulte de nombreux phénomènes physiques ; pour certains systèmes, la prise en compte des non-linéarités s'avère nécessaire si nous souhaitons en modéliser correctement leur comportement réel.

II.1.3. Méthodes de l'analyse modale et calcul des paramètres modaux

Pour les problèmes linéaires élastiques qui sont correctement mis en place, les matrices de rigidité et de masse sont symétriques et définies positives. Ces matrices sont les plus faciles à traiter parce que les méthodes numériques couramment utilisées garantissent la convergence vers une solution.

Après l'identification non-paramétrique, vient l'évaluation des caractéristiques dynamiques d'un système, et l'extraction des paramètres modaux à partir des données expérimentales. Le choix des données de départ, impose clairement certaines contraintes au processus d'identification.

II.1.4. Valeurs et vecteurs propres

Les premiers vecteurs et valeurs propres viennent des équations différentielles établie par Lagrange en 1759, dans son ouvrage sur la théorie du son, la théorie des perturbations séculaires des orbites des 6 planètes de Lagrange 1781, et les axes principaux d'inertie d'un corps solide (Euler 1758, Lagrange 1788). De nos jours, la théorie des valeurs et vecteurs propres, formalisée par Cayley 1858, est indispensable dans divers branches de la science. En particulier, pour la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires, la diagonalisation des formes quadratiques et opérateurs auto adjoints, en théorie de stabilité pour les questions de convergence de processus itératifs, et en physique et chimie (mécanique, circuits, cinétique chimique, équation de Schrödinger) [165].

Les valeurs propres ont une grande importance dans nombreux problèmes physiques. La stabilité d'un avion, par exemple, est déterminée par la position dans le plan complexe des

valeurs propres d'une certaine matrice. La fréquence naturelle de vibration d'une poutre est en fait une valeur propre d'une matrice. Le calcul des valeurs propres présente un intérêt théorique pour la résolution d'un système d'équations aux dérivées ordinaires, l'étude du comportement d'une suite A, A^2, A^3, \dots de puissances d'une matrice (de telles suites apparaissent dans la résolution itérative de systèmes d'équations).

Souvent ne nous intéressons qu'à une seule ou quelques une seulement des valeurs propres. Les méthodes se basent dans ce cas sur l'observation suivante. Considérons une suite de vecteurs

$$z, Az, A^2z, A^3z, \dots \quad (\text{II-1})$$

Supposons que le vecteur z puisse être écrit comme une somme de vecteurs propres de la matrice A

$$z = y_1 + y_2 + \dots + y_r$$

où $Ay_i = \lambda_i y_i$. Le $m^{\text{ème}}$ terme de la suite aura la forme

$$A^m z = \lambda_1^m y_1 + \lambda_2^m y_2 + \dots + \lambda_r^m y_r. \quad (\text{II-2})$$

Les méthodes numériques pour le problème

$$Ax = \lambda x$$

utilisent trois catégories d'algorithmes :

1. méthodes directes de la tri-diagonalisation suivie par QR : Cette méthode constitue un des grands algorithmes de l'algèbre linéaire numérique. Les raisons pour sa suprématie sont :
 - sa simplicité ;
 - sa rapidité ;
 - son utilisation de matrices orthogonales ;
 - sa stabilité exceptionnelle.

La méthode est efficace pour le calcul de toutes les valeurs propres d'une matrice de taille moyenne, soit $n < 100$.

2. méthodes semi-directes de l'algorithme de Lanczos : Cette méthode est particulièrement adaptée au calcul de quelques valeurs propres d'une grande matrice creuse. Elle est une méthode semi-directe basée sur la suite (II-1), mais elle utilise plus d'information que la méthode de puissance.

3. méthodes itératives des puissances : La méthode des puissances pour le calcul de la valeur propre la plus grande (en valeur absolue) est basée sur la dernière expression (II-2).

Nous présentons dans ce qui suit la méthode QR que nous utilisons dans notre application.

II.1.4.1. L'algorithme QR

En algèbre linéaire, la décomposition QR aussi appelée, factorisation QR d'une matrice A est une décomposition de la forme :

$$A=QR \quad (II-3)$$

Où Q est une matrice orthogonale ($Q^T Q=I$), et R une matrice triangulaire supérieure.

Ce type de décomposition est souvent utilisé pour le calcul de solutions de systèmes linéaires surdéterminés, notamment pour déterminer le pseudo-inverse d'une matrice.

L'algorithme QR est un algorithme de calcul des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice. La transformation QR a été développée à la fin des années 1950 par John GF Francis et par Vera N. Kublanovskaya, travaillant indépendamment. L'idée de base est d'effectuer une décomposition QR, écrire la matrice comme un produit d'une matrice orthogonale par une matrice triangulaire supérieure [164].

II.1.4.2. L'algorithme QR pratiques

Soit A la matrice dont nous voulons calculer les vecteurs propres, et que $A_0 = A$ à la $k^{ème}$ étape (en commençant par $k=0$). Nous calculons la décomposition QR de $A_k = Q_k R_k$ où Q_k est une matrice orthogonale ($Q^T=Q^{-1}$) et R_k est une matrice triangulaire supérieure. Nous formons alors $A_{k+1} = R_k Q_k$ tel que :

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^{-1} Q_k R_k Q_k = Q_k^{-1} A_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k \quad (II-4)$$

Si tous les A_k sont similaires, alors ils ont les mêmes valeurs propres. L'algorithme est numériquement stable, car il procède par une transformée orthogonale similaire.

Sous certaines conditions, la matrice A_k converge vers une matrice triangulaire. Les éléments diagonaux de cette dernière sont alors les valeurs propres recherchées. Les itérations à partir de la matrice initiale sont relativement couteuses.

Le taux de convergence dépend de la séparation entre valeurs propres. Un algorithme pratique doit utiliser un décalage, explicite ou implicite, pour augmenter la séparation et

accélérer la convergence. Un algorithme de type symétrique QR isole chaque valeur propre (pour réduire donc la taille de la matrice) en une ou deux itérations seulement. Ce qui rend l'algorithme efficace et robuste.

II.1.4.3. L'algorithme QR implicite

Dans la pratique informatique moderne, l'algorithme QR est effectué dans une version implicite ce qui rend l'utilisation de plusieurs décalages plus facile à introduire.

La matrice est d'abord portée à la forme supérieure de Hessenberg $A_0 = QR^TQ$ comme dans la version explicite ; puis, à chaque étapes, la première colonne de A_k transformée par une petite taille de transformation de Householder similaire à la première colonne de $P(A_k)$ où $P(A_k)$, de degré r , est le polynôme qui définit la stratégie de transfert (souvent $p(x) = (x - \lambda)(x - \bar{\lambda})$, où λ et $\bar{\lambda}$ sont les deux valeurs propres. Ensuite les transformations successives de Householder de taille $r+1$ sont effectuées afin de retourner le travail de la matrice A_k à la forme supérieure de Hessenberg.

Cette opération est connue sous le nom *Asbulge Chasing*, en raison de la forme particulière de la non-nuls de la matrice le long des opérations de l'algorithme. Comme dans la première version, la déflation est effectuée dès que l'un des sous-diagonaux de A_k est suffisamment faible.

II.1.4.4. Interprétation de la convergence

L'algorithme QR peut être considéré comme une variante plus sophistiquée de la méthode des puissances de base de calcul des valeurs propres. Rappelons que l'algorithme itératif des puissances multiplie une fois de façon répétée un seul vecteur, normalisé après chaque itération. Le vecteur converge vers un vecteur propre de la plus grande valeur propre. Au lieu de cela, l'algorithme QR travaille avec une base complète de vecteurs, en utilisant QR décomposition renormaliser (et orthogonaliser). Pour une matrice symétrique A , sur la convergence, $AQ = QA$, où A est la matrice diagonale des valeurs propres à laquelle A a convergé, et où Q est un composite de tous les transformations orthogonales similaires nécessaire pour l'obtenir. Ainsi, les colonnes de Q sont les vecteurs propres.

II.2. Validation Numérique Linéaire

Dans cette application, nous étudions deux cas de structures. La première est une poutre épaisse multicouches et la seconde est une plaque épaisse multicouches. L'étude est effectuée pour différentes orientations de l'orthotropie des couches et différentes conditions aux frontières ainsi que différents nombres de couches. Les résultats obtenus sont comparés avec des résultats publiés.

II.2. 1. Premier cas : Poutre épaisse multicouches

La première structure est une poutre stratifiée orthotrope (graphite-époxy). Toutes les couches de la poutre ont les mêmes épaisseurs et propriétés mécaniques : $E_1 = 144,8$ GPa, $E_2 = 9,65$ GPa, $G_{12} = G_{13} = 4,14$ GPa, $G_{23} = 3,45$ GPa, $\nu_{12} = 0,3$, $\rho = 1389,23$ kg/m³ avec la longueur $L = 0,381$ m et $L/h = 15$. Le facteur de correction de cisaillement $\chi = 5/6$ tel que donné dans les références [7, 8, 10].

Le premier exemple considéré concerne une poutre simplement appuyée avec une orientation de l'orthotropie des plis de (0°). Les résultats présentés dans le Tableau II-2 correspondant aux trois premières fréquences naturelles en (kHz) de vibrations transversales de la poutre sont comparés aux résultats obtenus dans [8].

Le deuxième exemple, est la poutre de mêmes caractéristiques mécaniques, avec une orientation de l'orthotrope des plis ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) dans les cas de conditions aux frontières, simplement appuyée et encastree-libre. Les fréquences adimensionnelles \bar{w}_L de la poutre en vibrations transversales sont illustrées dans le Tableau II-3, II-4 et II-5.

$$\bar{w}_L = \left(w L^2 \sqrt{\rho / E_1 h^2} \right) \quad (\text{II-5})$$

Dans le troisième exemple, nous avons étudié la fréquence fondamentale d'une poutre en vibrations transversales, en employant des fonctions de forme hiérarchiques dérivées des polynômes de Legendre, avec différentes conditions aux frontières présentées dans le Tableau II-1. Les orientations symétriques et asymétriques des couches sont présentées dans les différents Tableaux (II-5, II-6, II-7, II-8) et les caractéristiques mécaniques des poutres sont : $E_1 = 155$ GPa, $E_2 = 12,1$ GPa, $G_{12} = G_{13} = 4,4$ GPa, $\nu_{12} = 0,248$, $\rho = 1570$ kg/m³ avec la longueur de 0,25 m, la largeur 0,01 m et la hauteur 0,001 m [5].

L'essentiel des conditions aux limites considérées dans cette étude sont mentionnées dans le Tableau II-1.

Tableau II-1 : Conditions aux frontières considérées pour les deux cas de structure, poutre et plaque épaisses composites avec contraintes axiales $u(0) = u(L) = 0$.

Frontières configurées	Conditions aux frontières
-----Poutre-----	
H-H	$w(0) = w(L) = 0$
C-C	$w(0) = w(L) = \theta(0) = \theta(L) = 0$
C-H	$w(0) = w(L) = \theta(0) = 0$
H-G	$w(0) = \theta(L) = 0$
C-G	$w(0) = \theta(0) = \theta(L) = 0$
-----Plaque-----	
SSSS	$w = 0, \theta_x \neq 0, \theta_y = 0$
CCCC	$w = 0, \theta_x = 0, \theta_y = 0$

Tableau II-2 : Comparaison des fréquences naturelles linéaires (en kHz) pour une poutre simplement appuyée (S-S) avec l'orientation $\theta = (0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ)$.

Réf.	Présente étude							
	r = 6		r = 10		r = 14		Erreur relative %	
Mode R. Ruotolo (2004)	Legendre	Sinus	Legendre	Sinus	Legendre	Sinus	Legendre	Sinus
1 0.7551	0.7563	0.7569	0.7562	0.756	0.7562	0.7562	0.15	0.15
2 2.5479	2.5625	2.5718	2.5554	2.5572	2.5554	2.5559	0.29	0.31
3 4.7160	5.2737	4.7625	4.7309	4.7346	4.7308	4.7319	0.31	0.34

Tableau II-3 : Comparaison des fréquences naturelles linéaires adimensionnelles $(wL^2 \sqrt{\rho / E_1 h^2})$ pour une poutre simplement appuyée (S-S) avec $\theta = (0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$.

Réf.	Présente étude							
	r = 6		r = 10		r = 14		Erreur relative %	
Mode R. Ruotolo(2004)	Legendre	Sinus	Legendre	Sinus	Legendre	Sinus	Legendre	Sinus
1 2.5002	2.515	2.5177	2.5152	2.5156	2.5152	2.5153	0.60	0.60
2 8.4764	8.574	8.6067	8.5509	8.5569	8.5509	8.5526	0.88	0.90
3 15.751	17.763	16.018	15.909	15.921	15.908	15.912	1.00	1.02

Tableau II-4 : Comparaison des fréquences naturelles linéaires adimensionnelles $\left(\omega L^2 \sqrt{\rho / E_1 h^2} \right)$ pour une poutre encastree libre (C-F) avec $\theta = (0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$.

Mode	Réf. R. Ruotolo(2004)	Présente étude							
		r = 6		r = 10		r = 14		Erreur relative %	
		Legendre Sinus		Legendre Sinus		Legendre Sinus		Legendre Sinus	
1	0.9240	0.9278	0.9355	0.9278	0.9291	0.9278	0.9282	0.41	0.45
2	4.8891	4.9390	4.9861	4.9350	4.9422	4.9350	4.9372	0.94	0.98
3	11.435	11.713	11.676	11.566	11.582	11.566	11.571	1.15	1.19

Tableau II-5 : Comparaison de la fréquence fondamentale (ω_L en Hz) pour différentes conditions aux frontières et l'orientation $\theta = (0^\circ/0^\circ/0^\circ)_S$.

	Réf. Jagadish Babu					
	Gunda. (2010)		Présente étude par (HFEM)			
	R-R	FEM	r = 6	r = 10	r = 14	r = 20
H-H	454.038	455.490	452.225	452.094	452.094	452.094
C-C	1048.55	1032.54	1027.14	1023.71	1023.71	1023.71
C-H	720.646	711.563	706.583	705.914	705.914	705.914
H-G	113.509	113.872	113.047	113.047	113.047	113.047
C-G	262.139	258.136	256.194	256.194	256.194	256.194

Tableau II-6 : Comparaison de la fréquence fondamentale (ω_L en Hz) pour différentes conditions aux frontières et l'orientation $\theta = (0^\circ/90^\circ/90^\circ)_S$.

	Réf. Jagadish Babu					
	Gunda (2010)		Présente étude par (HFEM)			
	R-R	FEM	r = 6	r = 10	r = 14	r = 20
H-H	387.087	388.325	388.946	388.313	388.313	388.313
C-C	893.939	880.291	882.505	879.540	879.540	879.540
C-H	614.382	606.639	606.979	606.401	606.401	606.401
H-G	96.7718	97.0814	97.0931	97.0931	97.0931	97.0931
C-G	223.484	220.072	220.054	220.054	220.054	220.054

Tableau II-7 : Comparaison de la fréquence fondamentale (w_L en Hz) pour différentes conditions aux frontières et l'orientation $\theta = (90^\circ/90^\circ/0^\circ)_S$.

	Réf. Jagadish Babu		Présente étude par (HFEM)			
	Gunda (2010)					
	R-R	FEM	r = 6	r = 10	r = 14	r = 20
H-H	152.093	152.580	151.524	151.479	151.479	151.479
C-C	351.244	345.882	344.516	343.343	343.343	343.343
C-H	241.401	238.359	236.855	236.626	236.626	236.626
H-G	38.0233	38.1450	37.8707	37.8706	37.8706	37.8706
C-G	87.8111	86.4705	85.8459	85.8458	85.8458	85.8458

Tableau II-8 : Comparaison de la fréquence fondamentale (w_L en Hz) pour différentes conditions aux frontières et l'orientation $\theta = (0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$.

	Réf. Jagadish Babu		Présente étude par (HFEM)			
	Gunda (2010)					
	R-R	FEM	r = 6	r = 10	r = 14	r = 20
H-H	331.419	332.378	335.872	335.768	335.768	335.768
C-C	746.008	734.619	746.834	744.314	744.314	744.314
C-H	515.266	508.482	515.537	515.038	515.038	515.038
H-G	82.8548	83.0945	83.9517	83.9516	83.9516	83.9516
C-G	186.502	183.654	186.181	186.181	186.181	186.181

II.2. 2. Deuxième cas : Plaque épaisse multicouches

La deuxième structure est une plaque stratifiée orthotrope (boron/epoxy). Toutes les couches de la plaque ont les mêmes épaisseurs et propriétés mécaniques : $E_1/E_2=E_1/E_3=40$, $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.25$, $G_{12}=G_{13}=0.6E_2$, $G_{23}=0.5E_2$.

La longueur $a=1\text{m}$; Epaisseur $b=1\text{m}$ et $a/h=1000$; masse volumique $\rho=1630$. Le facteur de correction de cisaillement $\chi=5/6$ tel que donné les Réf. [162].

Dans la première application de la plaque à trois couches et orientation de l'orthotropie des plis de $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$, les bords sont d'abord considérés simplement appuyés puis encastés. Les résultats présentés dans le Tableau II-9 correspondent aux trois premières fréquences naturelles linéaires adimensionnelles \bar{w} des vibrations transversales de la

plaque dont l'expression est donnée par (II-6). Les résultats sont comparés avec ceux de la littérature [162].

$$\bar{w} = \left((wb^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D_0} \right) \tag{II-6}$$

$$\text{où } D_0 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}$$

La deuxième application, la plaque a cinq couches de mêmes caractéristiques mécaniques, avec l'orientation de l'orthotropie des plis (0°/90°/0°/90°/0°) et deux cas de conditions aux frontières : simplement appuyés et encastrés. Les fréquences adimensionnelles de la plaque en vibrations transversales obtenues par les fonctions de forme hiérarchiques dérivées des polynômes de Legendre sont illustrées dans le Tableau II-10.

Dans la troisième application, nous avons étudié une plaque à huit couches avec l'orientation de l'orthotropie des plis à (0°/90°/0°/90°), dans les mêmes conditions aux limites et les mêmes caractéristiques matérielles. Les résultats sont montrés dans le tableau II-11.

Tableau II-9 : Comparaison des fréquences naturelles linéaires adimensionnelles $\left((wb^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D_0} \right)$ pour une plaque à trois couches.

Mode	Réf. K. M.LIEW	Présente étude pour l'orientation $\theta = (0^\circ/09^\circ/0^\circ)$							
		Conditions aux limites 'SSSS'							
		r = 6		r = 10		r = 14		Erreur relative %	
		Legend	Sinus	Legend	Sinus	Legend	Sinus	Legend	Sinus
1	6.625	6.855	7.198	6.706	7.042	6.650	6.977	0.37	5.31
2	9.447	10.328	10.845	9.743	10.230	9.535	9.994	0.93	5.79
3	16.205	21.595	22.675	17.815	18.706	16.608	17.409	2.48	7.42
Conditions aux limites 'CCCC'									
1	14.666	16.016	16.817	15.124	15.880	14.808	15.516	0.96	5.79
2	17.614	20.398	21.418	18.493	19.418	17.853	18.714	1.35	6.42
3	24.511	37.193	39.052	27.697	29.081	25.261	26.479	3.05	8.02

Tableau II-10 : Présentation des fréquences naturelles linéaires adimensionnelles
$$\left(\frac{\omega b^2}{\pi^2} \sqrt{\rho h / D_0} \right)$$
 de la plaque à cinq couches.

L'orientation $\theta = (0^\circ/09^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$						
Conditions aux limites 'CCCC'						
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
Réf.K. M.LIEW	14.667	23.159	36.164	39.582	40.777	52.404
Présente étude	14.7792	23.5465	36.9108	41.0619	41.6313	54.0428
Conditions aux limites 'SSSS'						
Réf.K. M.LIEW	6.625	13.757	23.039	26.499	28.212	36.773
Présente étude	6.6455	13.9014	23.3188	26.8246	28.9695	37.5625

Les Figures II-1 à II-3 montrent les différentes configurations aux frontières de la poutre et la plaque considérées dans la présente étude et leurs conditions aux frontières associées sont données par le Tableau II-1. Il y a deux études de convergences impliqués dans l'étude actuelle de p-FEM formulation. La première est la convergence des paramètres des fréquences linéaires en respectant le nombre de fonctions de formes. Les fréquences naturelles linéaires et les fréquences adimensionnelles linéaires sont présentées dans les Tableaux II-2, II-3, II-4. La deuxième est la convergence des paramètres des fréquences linéaires et non-linéaires obtenues en utilisant la procédure analytique pour le nombre donné de fonctions de formes.

Tableau II-11 : Présentation des fréquences naturelles linéaires adimensionnelles
$$\left(\frac{\omega b^2}{\pi^2} \sqrt{\rho h / D_0} \right)$$
 de la plaque à huit couches.

L'orientation $\theta = (0^\circ/09^\circ/0^\circ/90^\circ)_s$						
Conditions aux limites 'CCCC'						
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
Réf.K. M.LIEW	14.667	35.970	34.203	40.779	46.442	56.554
Présente étude	14.7796	26.4405	34.8990	41.6336	48.2458	58.4610
Conditions aux limites 'SSSS'						
Réf.K. M.LIEW	6.625	15.823	21.672	26.499	33.494	40.213
Présente étude	6.6455	15.9993	21.9330	26.8250	34.4109	41.1474

Les valeurs de w_L et les différentes orientations de l'orthotrope des plis pour les configurations aux frontières de la poutre considérés sont présentés dans les Tableaux II-5 à II-8, pour $w_{max}/h = 1$ avec le nombre de fonctions de formes égale à 6, 10, 14 et 20.

Nous voyons que le nombre de fonctions de formes de Legendre nécessaire est de 10 pour toutes les conditions aux frontières et toutes les orientations considérées. Contrairement aux fonctions sinusoïdales qui sont moins convergentes.

Dans le cas linéaire, pour certaines orientations $\theta = (0^\circ/0^\circ/0^\circ)_s$ et $(0^\circ/90^\circ/90^\circ)_s$ et pour les conditions aux frontières de la poutre, H-G et C-G, la convergence est très bonne et réalisable même avec six fonctions de forme. Pour les autres conditions aux frontières et d'autres orientations, dix fonctions de forme de Legendre donnent une excellente convergence. Nous notons une très bonne concordance entre la formulation mathématique actuelle comparativement à la formulation de la littérature [5, 8].

Par contre, pour les plaques, nous avons constaté dans le tableau II-9 que la convergence dans le cas de l'utilisation des fonctions de formes de Legendre au lieu des fonctions de formes sinusoïdales n'est atteinte que lorsque nous utilisons un nombre important de ces fonctions de formes.

Dans les tableaux II-10 et II-11, nous enregistrons des résultats pratiquement similaires à ceux de la littérature [162].

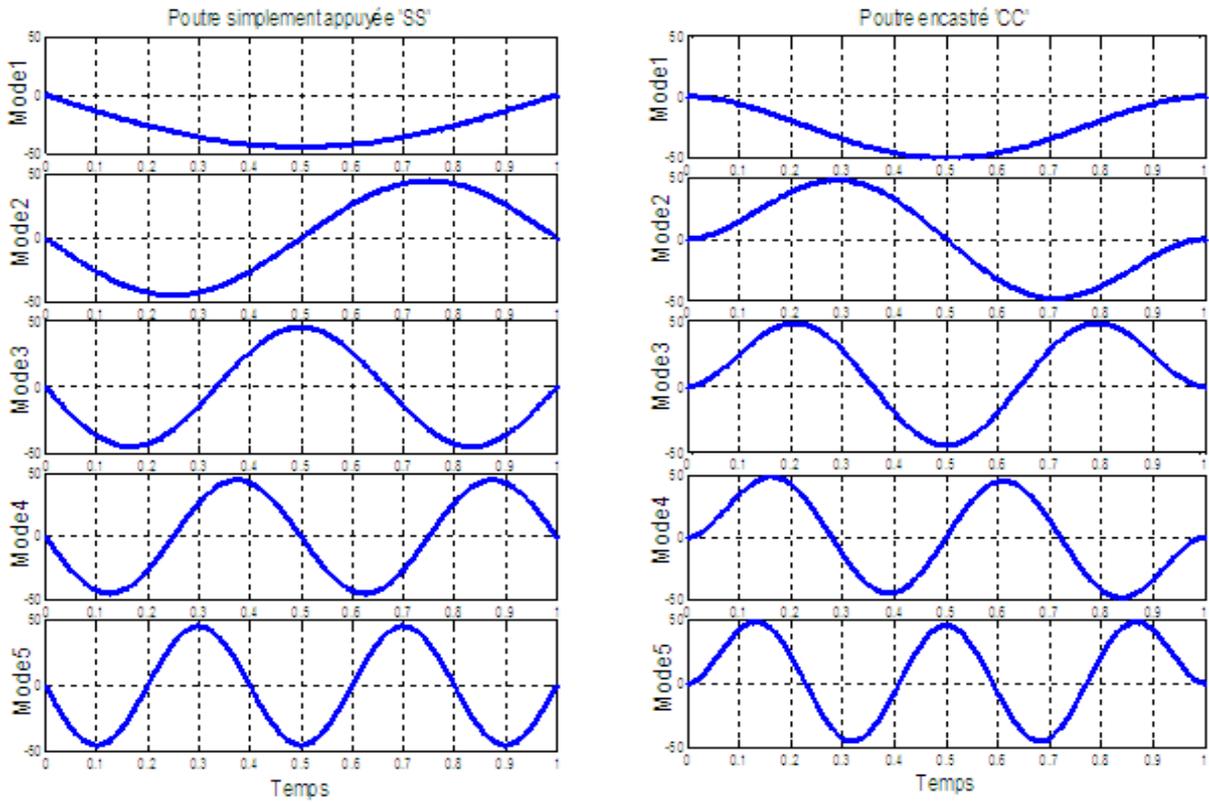


Figure II-1 : Configuration des différents modes de vibrations de la poutre.

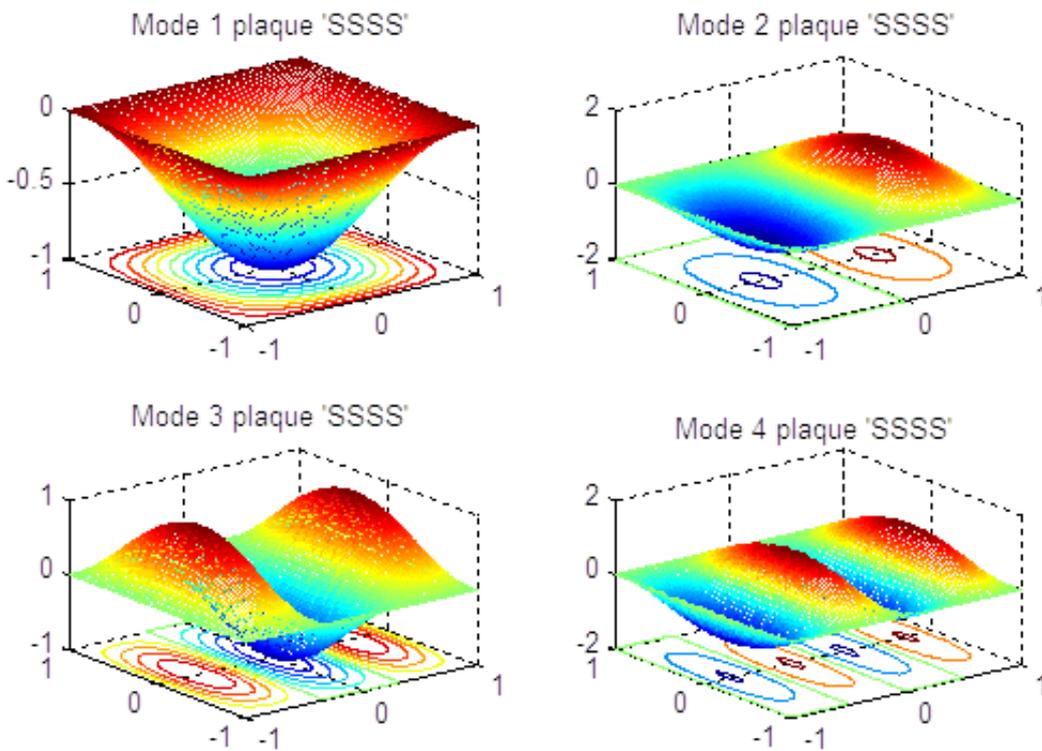


Figure II-2 : Configuration des différents modes de vibrations de la plaque simplement appuyée.

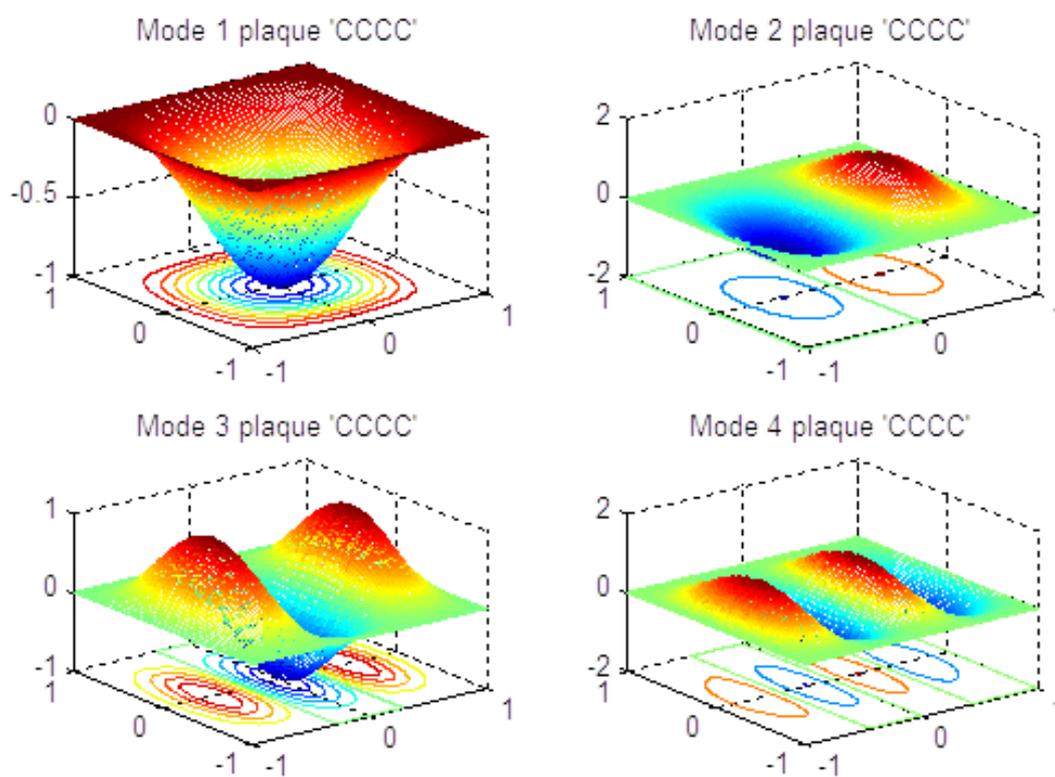


Figure II-3 : Configuration des différents modes de vibrations de la plaque encastree.

Conclusion

Pour un bon choix de la fonction de forme afin de parvenir à une meilleure modélisation, nous avons étudié dans ce chapitre, le comportement vibratoire linéaire des structures poutres et plaques par une modélisation mathématique en utilisant les éléments finis classique et hiérarchiques. L'étude est basée sur une comparaison entre les deux méthodes de modélisations et plus particulièrement sur la convergence des fonctions de formes, éléments finis et celle de Legendre et sinus. Après avoir soumis les deux structures, la poutre et la plaque, aux vibrations libres avec les différentes orientations de l'orthotropie et de conditions aux frontières, nous avons fait un contrôle comparatif des résultats avec ceux de la littérature.

Nous avons conclu que la modélisation par la méthode des éléments finis hiérarchiques à l'aide des fonctions de formes de Legendre est mieux convergente par rapport aux autres méthodes.

CHAPITRE III

*METHODES DE RESOLUTION
DES PROBLEMES
DYNAMIQUES NON-LINEAIRES*

Introduction

Résoudre le système non-linéaire (I-62), c'est chercher la solution q qui vérifie au mieux cette équation : solution approchée dont le résidu doit être une très petite valeur. Pour cela, il existe différents algorithmes de résolution et le choix doit tenir compte de plusieurs facteurs :

- Le type de non-linéarité : localisée ou répartie, prépondérante ou non ;
- L'existence d'une ou de plusieurs solutions ;
- La disponibilité d'une méthode de construction d'une solution approchée ;
- La précision et la rapidité de convergence désirées ;
- Le risque de divergence, ..., etc.

En pratique, il n'existe pas de méthode générale satisfaisant tous ces facteurs. La stratégie de résolution doit s'adapter, par expérience, à une classe de problèmes donnés. La résolution du système d'équations dynamiques non-linéaires (I-62) se fait, soit par les procédures d'intégration, soit par la méthode de superposition modale ou par les méthodes itératives après transformation du système en une forme algébrique indépendante du temps en utilisant par exemple la méthode d'équilibrage harmonique.

III.1. Généralités sur le comportement non-linéaire

Généralement, les structures sont en réalité non-linéaires jusqu'à un certain degré de non-linéarité tolérable, certaines structures peuvent toujours être étudiées en utilisant la théorie des structures linéaires. Pour les structures fortement non-linéaires, l'hypothèse de la linéarité n'est plus applicable. Une analyse adaptée est alors nécessaire pour étudier leur non-linéarité. Cette dernière peut généralement être considérée comme une erreur de modélisation.

L'étude de la non-linéarité est très complexe, ceci est dû au fait que le principe de la superposition n'est plus valable dans le cas de systèmes non-linéaires pour obtenir la réponse du système. En conséquence, les caractéristiques dynamiques des structures non-linéaires deviennent dépendantes de l'excitation. Comme la non-linéarité rencontrée dans les structures vibrantes est souvent difficile à identifier et

plus difficile à quantifier, la nécessité des méthodes mathématiques spécifiques pour l'étude de ce cas de structure est donc incontestable.

Différentes méthodes théoriques ont été initiées pour les systèmes dont nous connaissons les équations analytiques de mouvement. Le principe fondamental de l'analyse repose sur une linéarisation des paramètres du système non-linéaire ou de sa réponse vibratoire.

Il y a actuellement un grand nombre de méthodes disponibles pour analyser le comportement vibratoire d'un système non-linéaire. A titre d'exemple, nous pouvons citer la méthode de petites oscillations, dont l'approche consiste à remplacer le terme non-linéaire dans les équations différentielles d'un système non-linéaire par son développement en série de Taylor par rapport au déplacement et à la vitesse. La méthode quasi-harmonique consiste à obtenir une solution périodique pour un système non-linéaire sous la forme d'une série de puissance de ε . La méthode de Krylov et Bogolyubov suppose que la solution de l'équation d'un système vibratoire non-linéaire a toujours la même forme que celle d'un système linéaire, sauf que l'amplitude et la phase varient en fonction du temps, ..., etc. Une brève discussion de ces méthodes est donnée ci-après.

III.2. Méthodes analytiques de résolution des équations différentielles non-linéaires

Nous avons deux types de méthodes de résolution analytique d'un système d'équations différentielles non-linéaires: par intégration directe ou par des méthodes approchées [166].

III.2.1. Méthode d'intégration

Il est impossible d'obtenir une solution exacte pour tous les problèmes non-linéaires. Néanmoins, dans certains cas particuliers, il est possible de trouver une forme exacte de la solution. Considérons le cas d'un système vibratoire libre, non amorti et dont la force de rappel n'est pas linéaire. L'équation générale du mouvement est de la forme:

$$\ddot{y} + \omega^2 f(y) = 0 \quad \text{(III-1)}$$

Elle peut aussi être écrite sous la forme suivante:

$$\frac{d(\dot{y}^2)}{dy} + 2\omega^2 f(y) = 0$$

ou :

$$d(\dot{y}^2) + 2\omega^2 f(y) dy = 0 \quad (\text{III-2})$$

Intégrant cette équation, nous obtenons:

$$\dot{y}^2 = 2\omega^2 \int_y^{y_0} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (\text{III-3})$$

La période de vibration est alors donnée par :

$$t - t_0 = \frac{1}{\omega\sqrt{2}} \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{\int_\eta^{y_0} f(\zeta) d\zeta}} \quad (\text{III-4})$$

Cette méthode dite exacte dans le sens où la solution obtenue sous la forme (III-4), est une expression qui peut être évaluée par les méthodes d'intégration numérique telles que la méthode des Trapèzes, Simpson, Gauss, ..., etc.

III.2.2. Méthodes approchées

a. Méthode de Poincaré

La méthode de Poincaré est la plus ancienne des méthodes de résolution d'équations différentielles non-linéaires. Elle a été développée par Henri Poincaré en 1892 pour résoudre certains problèmes de la mécanique. Elle consiste à chercher la solution d'une équation différentielle non-linéaire sous la forme d'une série de puissances croissantes d'un paramètre ε associé aux termes non-linéaires.

Cette méthode porte différentes appellations telles que la méthode du petit paramètre ε , méthode des perturbations, ..., etc.

Considérons une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\ddot{y} + \omega^2 y + f(t) = \varepsilon F(t, y, \dot{y}, \varepsilon) \quad (\text{III-5})$$

Lorsque $\varepsilon = 0$, l'équation (III-5) décrit les oscillations d'un système vibrant non amorti et forcé.

Dans le cas contraire, la période de la solution de l'équation (III-5) doit dépendre du petit paramètre ε . En vertu de cette dépendance continue par rapport au paramètre ε , nous chercherons une solution périodique de l'équation (III-5) sous la forme d'une série de puissances en ε .

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots \quad (\text{III-6})$$

De la même manière, nous poserons :

$$F(t, y, \dot{y}, \varepsilon) = F_1 + \varepsilon F_2 + \varepsilon^2 F_3 + \dots \quad (\text{III-7})$$

En remplaçant dans l'équation différentielle (III-5) et en identifiant les termes de même puissance en ε , nous obtenons le système d'équation suivant:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + \omega^2 y_0 + f(t) &= 0 \\ \ddot{y}_i + \omega^2 y_i &= F_i \quad (i = 1, n) \end{aligned} \quad (\text{III-8})$$

La solution générale sera donnée par l'équation:

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \dots$$

$$y(t) = A \cos \omega t + \frac{\varepsilon A^3}{32\omega^2} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) + \dots \quad (\text{III-9})$$

Le paramètre ε doit être assez petit pour assurer la convergence de la série vers la solution de l'équation. Il est choisi généralement positif et sans dimension pour garder un sens physique des termes qui composent la réponse.

L'intérêt de cette méthode réside dans le fait qu'elle s'appuie sur un théorème d'existence, et donc les limitations de la convergence de la série vers la solution de l'équation différentielle non-linéaire résident dans deux points:

- La longueur et la lourdeur des calculs: en effet, dès que nous dépassons la deuxième itération, les systèmes deviennent plus complexes.

- La convergence n'est assurée que pour un petit paramètre, ce qui exclut les systèmes possédant une forte non-linéarité.

b. Méthode de la balance harmonique

Elle est connue aussi sous l'appellation de l'équivalent harmonique. Cette méthode est basée sur l'utilisation des séries de Fourier. L'idée principale de cette méthode est de minimiser une intégrale dite résidu sous la forme suivante:

$$\int_0^T \varepsilon^2(t) dt = \int_0^T (y(t) - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ci} \cos i\omega t - \sum_{i=1}^{\infty} a_{si} \sin i\omega t)^2 dt \quad (\text{III-10})$$

Elle consiste à intégrer une équation non-linéaire de la forme

$$\ddot{y} + F(y, \dot{y}) = f(vt) \quad (\text{III-11})$$

La solution recherchée est de forme:

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_{ci} \cos i\omega t + a_{si} \sin i\omega t) \quad (\text{III-12})$$

où i est l'indice de l'harmonique.

La balance des deux termes de l'équation différentielle est possible pour $v = i\omega$. Ce qui nous permet de poser :

$$F(y, \dot{y}) = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (F_{ci} \cos i\omega t + F_{si} \sin i\omega t) \quad (\text{III-13})$$

$$f(vt) = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{ci} \cos i\omega t + f_{si} \sin i\omega t) \quad (\text{III-14})$$

L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que les équations obtenues sont transcendantes, ce qui rend leur résolution plus compliquée. De plus, il est impossible d'affirmer que la solution approximative (III-12) correspond au comportement d'un système mais il faut deviner la forme de la solution d'après l'expérience. L'application de la méthode exige que nous ayons déjà quelques idées sur la solution $y(t)$.

c. Méthode de linéarisation harmonique

Cette méthode est un cas particulier de la balance harmonique. Dans ce cas, le développement en série de Fourier ne tient compte que de la première harmonique, d'où la forme de la solution de l'équation différentielle (III-11):

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_{ci} \cos i \omega t + a_{si} \sin i \omega t) \quad (\text{III-15})$$

L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode de la balance harmonique est dans l'élimination des équations transcendantes. En revanche, l'inconvénient de ne considérer que la première harmonique peut écarter la solution obtenue par rapport à la solution exacte du système réel. De plus, rien ne peut affirmer que c'est la première harmonique qui influe plus sur le système mécanique.

d. Méthode de la valeur moyenne

Elle est dite aussi, méthode de variation des constantes. Elle s'applique dans la théorie des équations différentielles linéaires. Dans les problèmes non-linéaires, elle est applicable aux systèmes dont les oscillations varient lentement avec le temps.

Nous considérons une équation différentielle de la forme:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \varepsilon F(y, \dot{y}) \quad (\text{III-16})$$

et nous cherchons une solution ayant la forme suivante:

$$y(t) = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{III-17})$$

La particularité principale de cette méthode tient du fait de considérer que l'amplitude 'a' et la phase 'φ' initiales sont des fonctions lentement changeantes en fonction du temps, c'est à dire: $a = a(t)$ et $\varphi = \varphi(t)$.

e. Méthode du Plan de Phase

La notion de Plan de Phase a été introduite par H. Poincaré pour traiter les problèmes de mécanique céleste linéaire et non-linéaire. Plusieurs variantes de cette méthode ont été utilisées. Liénard [167] a proposé des représentations graphiques de cette méthode d'où l'appellation méthode d'intégration graphique.

Soit un système mécanique régi par une équation différentielle de la forme:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = F(y, \dot{y}, t) \quad (\text{III-18})$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{y} = G(y, \dot{y}, t) \quad (\text{III-19})$$

Si nous imposons le changement de variable : $\dot{y} = x$, nous obtenons un système d'équations différentielles équivalent :

$$\dot{y} = x \quad (\text{III-20})$$

$$\dot{x} = G(y, x, t)$$

Ce système est un cas particulier du système général:

$$\dot{y} = f(y, x, t) \quad (\text{III-21})$$

$$\dot{x} = g(y, x, t)$$

où f et g sont des fonction linéaire ou non-linéaire définies.

A chaque instant l'état du système est défini par les coordonnées x et y . Nous appelons vecteur d'état du système le vecteur $\vec{OM} = (x, y)$.

En suivant le déplacement du point M de coordonnées (x, y) sur sa trajectoire graduée en unité du temps t , nous aurons l'idée du comportement du système dans le temps.

Cette méthode est facile à exploiter par les méthodes numériques existantes notamment, les différences finies, Euler et Rung-Kutta.

f. Méthode de Krilov- Bogoloubov

Cette méthode se base principalement sur les travaux de N. Krilov et N. Bogoloubov publiés en 1943 et les travaux de N. Bogoloubov et Y. Metropolski publiés en 1963 et 1974. Elle consiste à intégrer une équation différentielle non-linéaire du type :

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = \varepsilon F(y, \dot{y}) \quad (\text{III-22})$$

Krilov-Bogoloubov ont proposé une solution sous la forme:

$$y(t) = a \cos \Phi + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k U_k(a, \Phi) \quad (\text{III-23})$$

en tenant compte des restrictions suivantes:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a_1(a) + \varepsilon^2 a_2(a) + \dots \quad (\text{III-24})$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) + \dots \quad (\text{III-25})$$

Les fonctions U_k sont des fonctions périodiques dépendant des variables Φ et a .

Pour définir la solution de l'équation différentielle, il faut connaître l'amplitude a , et la phase Φ ainsi que les fonctions U_k .

g. Méthode de la linéarisation harmonique améliorée

La méthode de Krilov-Bogoloubov ne tient pas compte des pulsations nulles des systèmes mécaniques. La pulsation nulle se traduit physiquement par le mouvement uniforme du système mécanique (translation ou rotation). Pour résoudre ce type de problèmes, les auteurs de cette méthode [168] ont proposé une solution à l'équation différentielle non-linéaire (III-35) sous la forme:

$$y(t) = Z(a, \Phi) + a \cos \Phi + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k U_k(a, \Phi) \quad (\text{III-26})$$

où :

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a_1(a) + \varepsilon^2 a_2(a) + \dots \quad (\text{III-27})$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) + \dots \quad (\text{III-28})$$

$$\frac{dZ}{dt} = \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1(a, \Phi) + \varepsilon^2 \Omega_2(a, \Phi) + \dots \quad (\text{III-29})$$

$Z(a, \Phi)$ est dite fonction du mouvement uniforme dû à la pulsation nulle du système. Ω_0 est la vitesse uniforme du mouvement.

Cette méthode est une synthèse des méthodes approchées. Elle se base sur la méthode du petit paramètre de Poincaré en tenant compte des variations de l'amplitude et de la phase (moyennisation, variation de la constante) et fait un compromis entre les méthodes de la balance harmonique et la linéarisation harmonique en ne considérant généralement que des trois à six premières harmoniques.

III.2.3. Système forcé à élasticité non-linéaire

Parmi toutes les méthodes approchées citées précédemment pour résoudre un système d'équations différentielles non-linéaires, nous utilisons la méthode de Poincaré, vu sa simplicité et son utilisation large. Considérons le cas d'un système à oscillation forcée et à rigidité cubique non-linéaire définie par l'équation différentielle de Duffing suivante:

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y \pm \varepsilon y^3 = \frac{f_0}{m} \cos \omega t \quad (\text{III-30})$$

Le double signe \pm du 3^{iem} terme du membre gauche de l'équation intervient afin de faire une différence entre un ressort mou et un ressort dur. C'est-à-dire que si le troisième terme de l'équation (III-30) est donné avec un signe (+) la rigidité augmente avec le déplacement (ressort dur) et s'il est donné avec le signe contraire (-) la rigidité diminue avec le déplacement (ressort mou).

Si une solution par la méthode des perturbations est recherchée au voisinage de la résonance, il serait approprié d'associer le terme ε à la fonction force excitatrice et de rechercher la solution de l'équation suivante:

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y - \varepsilon y^3 = \varepsilon F_0 \cos \omega t \quad (\text{III-31})$$

avec $F_0 = f_0/m$.

où ω_n est la pulsation naturelle du système, ε est une constante associée au degré de non-linéarité.

En utilisant la méthode analytique dite des perturbations lorsque la constante " ε " est supposée faible. La solution approximative de l'équation différentielle (III-31) est recherchée sous la forme suivante :

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots \quad (\text{III-32})$$

En outre, lorsque la solution approchée est connue, il est raisonnable d'accepter que la pulsation naturelle du système non-linéaire varie avec l'amplitude A.

$$\omega = \omega_n + \varepsilon \omega_1(A) + \varepsilon^2 \omega_2(A) + \varepsilon^3 \omega_3(A) + \dots \quad (\text{III-33})$$

qui peut être aussi écrite de sous la forme :

$$\omega^2 = \omega_n^2 + \varepsilon \alpha_1(A) + \varepsilon^2 \alpha_2(A) + \varepsilon^3 \alpha_3(A) + \dots \quad (\text{III-34})$$

Si nous ne considérons que les deux premiers termes de l'équation (III-32) et (III-34), et les substituons dans l'équation (III-31) nous aurons:

$$\ddot{y}_0 + \varepsilon \ddot{y}_1 + (\omega^2 - \varepsilon \alpha_1)(y_0 + \varepsilon y_1) - \varepsilon(y_0^3 + 3\varepsilon y_0^2 y_1 + \dots) = \varepsilon F_0 \cos \omega t \quad (\text{III-35})$$

Il suffit alors d'identifier les coefficients des différentes puissances du paramètre non-linéaire ε . Ceci nous conduit à un système d'équations pouvant être résolu comme suit :

$$\ddot{y}_0 + \omega^2 y_0 = 0 \quad (\text{III-36})$$

$$\ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 = \alpha_1 y_0 + y_0^3 + F_0 \cos \omega t$$

...

...

En se limitant à la solution globale du 1^{er} ordre, la solution de la première équation, déduite des conditions initiales suivantes :

$$y_0(0) = A \text{ et } \dot{y}_0(0) = 0$$

est de la forme :

$$y_0 = A \cos \omega t \quad (\text{III-37})$$

En remplaçant y_0 par sa valeur dans la deuxième équation de (III-36), nous aurons la solution de la deuxième équation.

$$\ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 = (\alpha_1 + \frac{3}{4}A^2 + \frac{F_0}{A})A \cos \omega t + \frac{1}{4}A^3 \cos 3\omega t \quad (\text{III-38})$$

Pour vérifier la condition de la périodicité supposée pour y , nous avons : $y(\omega t + 2\pi) = y(2\pi)$ pour $t=0$, nous imposons la condition suivante pour y_1 .

$$(\alpha_1 + \frac{3}{4}A^2 + \frac{F_0}{A}) = 0 \quad (\text{III-39})$$

L'équation (III-38) prend la forme suivante :

$$\ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 = \frac{1}{4}A^3 \cos 3\omega t \quad (\text{III-40})$$

Pour des conditions initiales $y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$

$$y_1 = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + c_3 \cos 3\omega t \quad (\text{III-41})$$

$$y_1 = \frac{A^3}{32\omega^2} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \quad (\text{III-42})$$

La substitution des solutions y_0 et y_1 dans l'équation (III-32), nous donne la solution générale approchée au voisinage de résonance.

$$y = A \cos \omega t + \frac{\varepsilon A^3}{32\omega^2} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \quad (\text{III-43})$$

La pulsation ω du système est donnée par la relation suivante:

$$\omega^2 = \omega_n^2 + \frac{3\varepsilon A^2}{4} \quad (\text{III-44})$$

III.2.4. Amplitude de la réponse

Dans ce type de problème, l'amplitude subit un saut discontinu brusque proche de la fréquence de résonance. Nous pouvons constater ce phénomène en remplaçant α_1 dans l'équation (III-39) par:

$$(\omega^2 - \omega_n^2) \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{III-45})$$

Nous obtenons la relation amplitude-fréquence :

$$(\omega^2 - \omega_n^2) \frac{1}{\varepsilon} + \frac{3}{4} A^2 + \frac{F_0}{A} = 0 \quad (\text{III-46})$$

Qui peut également être écrite sous la forme:

$$\frac{3}{4} \varepsilon \frac{A^3}{\omega_n^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) A - \frac{\varepsilon F_0}{\omega_n^2} \quad (\text{III-47})$$

La solution de cette équation peut être visualisée par la figure III-1.

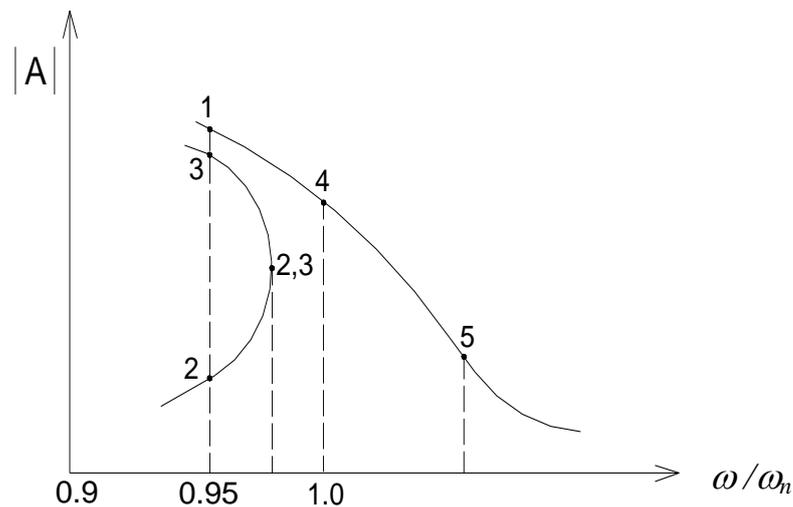


Figure III-1: Variation d'amplitude en fonction de la fréquence d'excitation d'un système non-linéaire non amorti.

Dans la figure III-1, nous donnons la variation d'amplitude en fonction de la fréquence d'excitation (force harmonique).

- Pour $\omega/\omega_n < 0.98$, la courbe à trois points d'intersections (1, 2, 3), et lorsque le rapport ω/ω_n augmente les points 2 et 3 se rapproche l'un de l'autre.
- Pour $\omega/\omega_n = 1$ ou $\omega/\omega_n > 1$, il y aura qu'un seul point d'intersection (4 ou 5).

Ce phénomène peut être décrit de la manière suivante:

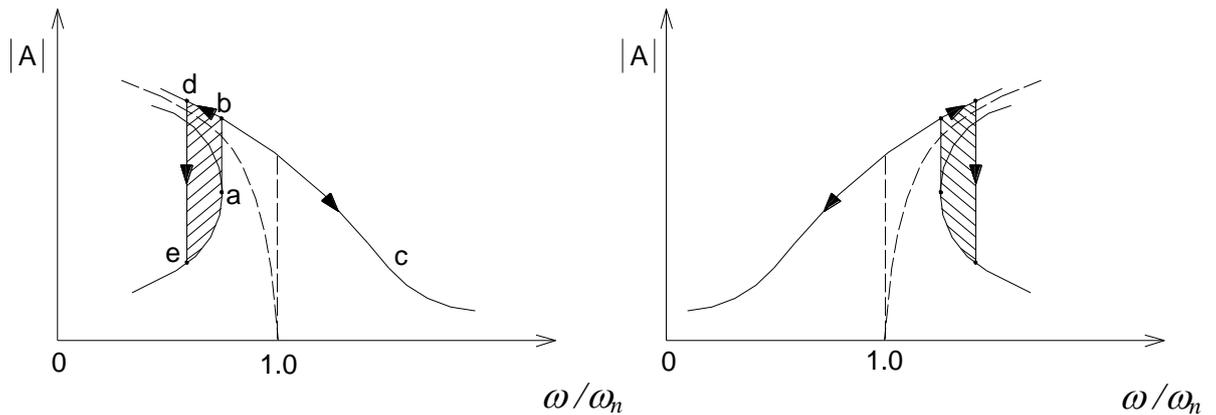


Figure III-2: Variation d'amplitude en fonction de la fréquence d'excitation d'un système non-linéaire non amorti, dans le cas d'un ressort mou et d'un ressort dur.

Sur le diagramme de l'amplitude nous remarquons qu'en augmentant la fréquence d'excitation, l'amplitude augmente graduellement jusqu'au point (a), puis elle saute au point (b) puis elle diminue pour atteindre le point (c). En diminuant la fréquence en arrivant au point (c), l'amplitude augmente de point (b) vers (d), et soudainement elle saute vers la plus petite valeur (e). L'analyse de la stabilité montre que la zone hachurée est instable, et que c'est dans cette dernière que se produit le phénomène de saut. Elle dépend de plusieurs facteurs, tel que l'amortissement, le taux d'incrément de la fréquence de l'excitation, ..., etc.

En présence d'amortissement, les courbes de la figure III-2 obéissent à une équation différentielle de Duffing de la forme (III-48).

L'allure de la courbe d'amplitude dans les 2 cas de rigidité est donnée dans la figure III-3.

$$\ddot{y} + f \dot{y} + \omega_n^2 y \pm \epsilon y^3 = F_0 \cos \omega t \quad \text{(III-48)}$$

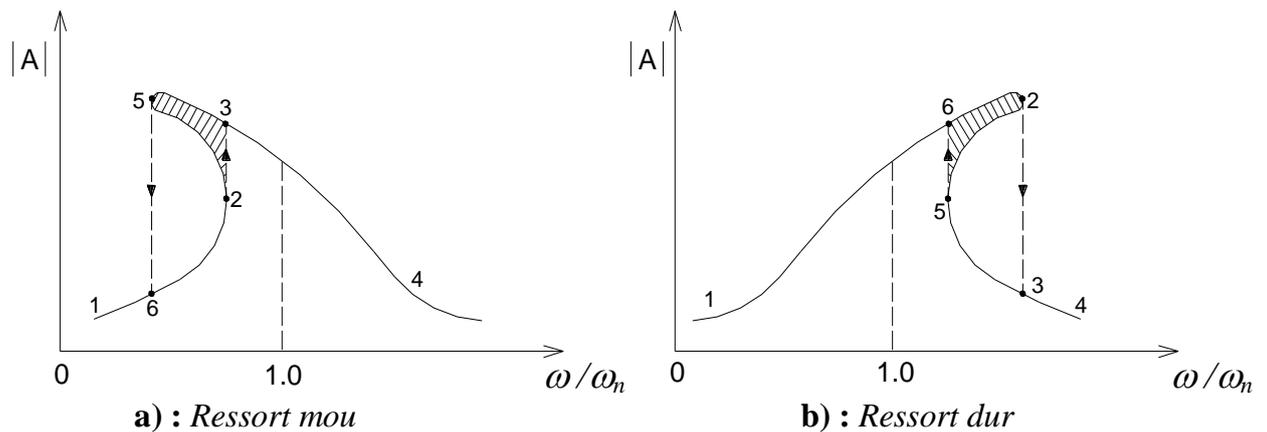


Figure III-3: donnons la variation d'amplitude en fonction de la fréquence d'excitation non-linéaire amortie, dans le cas d'un ressort mou et d'un ressort dur.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait un rappel sur les principes fondamentaux de certaines méthodes de résolution des équations non-linéaires les plus souvent utilisées dans le domaine de la dynamique. La plupart de ces méthodes, utilisent une approche asymptotique basée sur la normalisation du paramètre temporel. Ces méthodes sont rapidement convergentes et l'approche de leurs solutions obtenues dépend de l'ampleur du paramètre de perturbation autrement dit du paramètre non-linéaire et de l'amplitude de vibrations. Leur inconvénient majeur c'est que le paramètre de perturbation non-linéaire des équations à résoudre doit être très petit sinon la solution obtenue diverge. Le travail présenté dans le chapitre suivant, donnera plus de détail sur ce sujet avec un exemple mathématique et apportera un complément à ces méthodes.

CHAPITRE IV

ETUDE NON-LINEAIRE

Introduction

Dans l'étude des systèmes vibratoires non-linéaires, le choix de la méthode de résolution de l'équation de mouvement dépend du type de la non-linéarité. En ce qui concerne la détermination de la fréquence de vibration, les systèmes faiblement non-linéaires utilisent la méthode des perturbations dans l'espace modal normalisé. Ces méthodes mènent à une solution dynamique fortement influencée par le paramètre de perturbation ε , qui doit demeurer plus petit que l'unité. Ce qui exclue donc leur utilisation dans le cas de systèmes fortement non-linéaires. Pour ces dernières, la solution est obtenue par les méthodes itératives.

Le développement d'une solution asymptotique de la réponse dynamique dans l'espace temporel réel permet d'éviter cette contrainte.

L'objectif de ce chapitre concerne la modélisation par éléments finis hiérarchiques (HFEM) de poutres stratifiées épaisses non-linéaires. Les fonctions de forme employées dites hiérarchiques, sont dérivées des polynômes de Legendre. Les non-linéarités concernent les limites non-linéaires des déplacements affectant les champs de déformations. Une méthode semi-analytique dans l'espace modal temporel réel basée sur la méthode des perturbations est employée pour déterminer l'évolution des fréquences en fonction des amplitudes de vibrations. Dans cette étude, nous sommes concernés par le développement de la formulation mathématique du comportement dynamique non-linéaire des poutres composites. Les résultats non-linéaires obtenus pour différentes configurations de conditions aux limites de la poutre stratifiée sont comparés à ceux trouvés dans la littérature.

IV.1. Projection Modale

Dans ce paragraphe, nous projetons le système d'équations non-linéaires (I.62) dans l'espace modal où il doit être résolu, (voir la référence [15]). Dans le cas linéaire $q(t) = \Phi R(t)$.

$$R(t) = \{r_1(t), r_2(t), \dots, r_m(t)\}^T. \quad (\text{IV-1})$$

où $r_i(t)$ est la réponse temporelle du mode i .

Substituant $q(t)$ dans l'équation (I.62), et en tenant en compte de la condition de normalisation

$$\Phi^T M \Phi = I ; \Phi^T K \Phi = \Omega^2 = w_i^2 \delta_{ij} \quad (IV-2)$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} \ddot{r}_i(t) + w_i^2 r_i(t) + h_i(r_j(t)) = 0; & i, j = 1, \dots, m \\ R(t=0) = \Phi^T M q_0 \end{cases} \quad (IV-3)$$

$$\Phi^T K_{NL} (\Phi r_i(t)) \Phi r_i(t) = H(t) = \{h_1(t), h_2(t), \dots, h_m(t)\}^T \quad (IV-4)$$

La fonction non-linéaire $h_i(t)$ est projetée seulement sur le mode concerné et dépend seulement de la réponse modale $r_i(t)$. Ce qui se traduit physiquement par la négligence du couplage entre modes non-linéaires. Dans (IV-3), nous remplaçons $r_i(t)$ par $r(t)$, w_i par w et $\{\Phi_i\}$ par $\{\Phi\}$, dans l'équation (IV-5) ce qui donne :

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) + w^2 r(t) + h(r(t)) = 0 \\ r(t=0) = \Phi^T M \Phi = 1 \end{cases} \quad (IV-5)$$

Par les formules données dans (I.62), (I.63) et (IV-4), nous pouvons écrire :

$$h(r(t)) = \beta r^3(t) \quad (IV-6)$$

où $\beta \in \mathfrak{R}$ est obtenu par un calcul numérique.

La réponse de l'équation (IV-5) est stationnaire, et le terme non-linéaire dépend uniquement du déplacement modal $r(t)$. Dans ce qui suit, nous allons chercher la solution de chaque mode de vibration $r(t)$ par la méthode de linéarisation asymptotique dans l'espace réel.

IV.2. Méthode de la Linéarisation Asymptotique

Dans cette partie, nous développons l'application de la technique des perturbations dans l'espace modal temporel réel. Nous remplaçons la formule (IV-6) dans l'équation (IV-5) et ω par ω_0 , nous obtenons :

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) + \omega_0^2 r(t) + \varepsilon r^3(t) = 0 \\ r(t=0) = 1 \end{cases} \quad (\text{IV-7})$$

où, $\varepsilon = \beta$, $\varepsilon \in \mathfrak{R}$.

La solution cherchée de l'équation (IV-7) s'écrit sous la forme d'une série entière de ε comme suit :

$$\begin{cases} r(t) = \sum_{n=0}^{N_a} \varepsilon^n r_n(t) \\ \Omega^2 = \sum_{n=0}^{N_a} \varepsilon^n \omega_n^2 \end{cases} \quad (\text{IV-8})$$

où $N_a \in \mathbb{N}$ représente l'ordre d'approximation.

Substituons l'équation (IV-8) dans (IV-7) et par identification de la somme des termes de puissance de ε , on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon^0: \frac{d^2 r_0}{dt^2} + \Omega^2 r_0 = 0 \\ \varepsilon^1: \frac{d^2 r_1}{dt^2} + \Omega^2 r_1 = \omega_1^2 r_0 - r_0^3 \\ \varepsilon^2: \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \Omega^2 r_2 = \omega_1^2 r_1 + \omega_2^2 r_0 - 3r_0^2 r_1 \\ \varepsilon^3: \frac{d^2 r_3}{dt^2} + \Omega^2 r_3 = \omega_1^2 r_2 + \omega_2^2 r_1 + \omega_3^2 r_0 - 3r_0^2 r_2 - 3r_0 r_1^2 \end{cases} \quad (\text{IV-9})$$

et ainsi de suite.

Il convient de noter que les solutions $r(t)$ sont de période 2π . La solution de la première équation du système (IV-9) est sous la forme :

$$r_0 = a_0 \cos(\psi); \quad \psi = \Omega t + \varphi_0 \quad (\text{IV-10})$$

où a_0 , Ω et φ_0 sont respectivement l'amplitude, la fréquence angulaire non-linéaire et la phase des vibrations.

Les solutions de chacune d'équations (IV-9) pour différents ordres d'approximation sont comme suit :

Tenant compte de (IV-10) dans la deuxième équation du système (IV-9) et sur la base de l'équation ci-dessous, nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{d^2 r_1}{dt^2} + \Omega^2 r_1 = \omega_1^2 a_0 \cos(\psi) - \frac{1}{4} a_0^3 (\cos 3\psi + 3 \cos \psi) \\ \frac{d^2 r_1}{dt^2} + \Omega^2 r_1 = \left(\omega_1^2 a_0 - \frac{3}{4} a_0^3 \right) \cos \psi - \frac{1}{4} a_0^3 \cos 3\psi \end{cases} \quad (\text{IV-11})$$

avec :

$$\cos^3(\psi) = \frac{1}{4} \cos 3\psi + \frac{3}{4} \cos \psi$$

Par la condition d'éviter les termes séculaires, nous trouvons :

$$\omega_1^2 = \frac{3}{4} a_0^2, \quad (\text{IV-12})$$

A ce niveau (avec le premier ordre d'approximation), la pulsation non-linéaire est donnée sous la forme :

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4} a_0^2. \quad (\text{IV-13})$$

Par l'application des conditions initiales $a_1 = \varphi_1 = 0$, nous obtenons :

$$r_1(t) = \frac{1}{32} \frac{a_0^3}{\Omega^2} \cos 3\psi. \quad (\text{IV-14})$$

Tenons compte de (IV-10), (IV-12) et (IV-14) dans l'équation trois du système d'équations (IV-8) et la base trigonométrique :

$$\cos^2(\psi) \cos 3\psi = \frac{1}{4} (\cos \psi + 2 \cos 3\psi + \cos 5\psi).$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \Omega^2 r_2 = \omega_2^2 a_0 \cos(\psi) - \frac{3}{128} \frac{a_0^5}{\Omega^2} (\cos \psi + \cos 3\psi + \cos 5\psi) \\ \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \Omega^2 r_2 = \left(\omega_2^2 - \frac{3}{128} \frac{a_0^4}{\Omega^2} \right) a_0 \cos \psi - \frac{3}{128} \frac{a_0^5}{\Omega^2} (\cos 3\psi + \cos 5\psi) \end{cases} \quad (\text{IV-15})$$

De (IV-15) nous obtenons la deuxième approximation de la fréquence fondamentale non-linéaire :

$$\omega_2^2 = \frac{3}{128} \frac{a_0^4}{\Omega^2}. \quad (\text{IV-16})$$

La pulsation non-linéaire avec le deuxième ordre d'approximation est donnée sous la forme :

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4} a_0^2 + \varepsilon^2 \frac{3}{128} \frac{a_0^4}{\omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4} a_0^2}. \quad (\text{IV-17})$$

De la même manière, nous appliquons les conditions initiales $a_2 = \varphi_2 = 0$, nous obtenons :

$$r_2(t) = \frac{1}{3072} \frac{a_0^5}{\Omega^4} (9 \cos 3\psi + 3 \cos 5\psi) \quad (\text{IV-18})$$

Nous procédons de même pour l'approximation trois, tout en introduisant (IV-10), (IV-12), (IV-14), (IV-16) et (IV-18) dans l'équation quatre du système (IV-9), et nous obtenons :

$$\frac{d^2 r_3}{dt^2} + \Omega^2 r_3 = \left(\omega_3^2 - \frac{15}{4096} \frac{a_0^6}{\Omega^4} \right) a_0 \cos \psi - \frac{3}{4096} \frac{a_0^7}{\Omega^4} (3 \cos 3\psi + 5 \cos 5\psi + 2 \cos 7\psi) \quad (\text{IV-19})$$

Nous obtenons alors la troisième approximation :

$$\omega_3^2 = \frac{15}{4096} \frac{a_0^6}{\Omega^4}. \quad (\text{IV-20})$$

La pulsation non-linéaire au troisième ordre d'approximation décrit :

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4} a_0^2 + \varepsilon^2 \frac{3}{128} \frac{a_0^4}{\omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4} a_0^2} + \varepsilon^3 \frac{15}{4096} \frac{a_0^6}{\left(\omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4} a_0^2 + \varepsilon^2 \frac{3}{128} \frac{a_0^4}{\omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4} a_0^2} \right)^2}. \quad (\text{IV-21})$$

$$\Rightarrow r_3(t) = \frac{1}{196608} \frac{a_0^7}{\Omega^6} (54 \cos 3\psi + 30 \cos 5\psi + 3 \cos 7\psi) \quad (\text{IV-22})$$

La solution approximée de l'équation (IV-8) est récapitulée dans le *Tableau IV-1*.

Tableau IV-1. Solution asymptotique dans l'espace modal réel

n	$r_n(t)$	ω_n^2
0	$r_0(t) = a_0 \cos(\psi)$	ω_0^2
1	$r_1(t) = \frac{1}{32} \frac{a_0^3}{\Omega^2} \cos(3\psi)$	$\frac{3}{4} a_0^2$
2	$r_2(t) = \frac{1}{3072} \frac{a_0^5}{\Omega^4} (9 \cos(3\psi) + 3 \cos(5\psi))$	$\frac{3}{128} \frac{a_0^4}{\sum_{m=0}^1 \varepsilon^m \omega_m^2}$
3	$r_3(t) = \frac{1}{196608} \frac{a_0^7}{\Omega^6} (54 \cos(3\psi) + 30 \cos(5\psi) + 3 \cos(7\psi))$	$\frac{15}{4096} \frac{a_0^6}{\sum_{m=0}^2 \varepsilon^m \omega_m^2}$

Limitant l'ordre d'approximation à un, les pulsations fondamentales non-linéaires ainsi que la solution de l'équation $r(t)$ sont données sous la forme :

$$\begin{cases} \Omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \frac{3}{4} a_0^2. \\ r(t) = r_0(t) + \varepsilon r_1(t). \end{cases} \quad (IV-23)$$

Tous les autres termes d'ordres d'approximation supérieurs à un sont négligeables devant le premier ordre. Avec ce résultat, la méthode converge rapidement. D'une part, ce n'est pas le même cas que dans l'espace modal normalisé où les termes supérieurs au premier ordre d'approximation ne sont pas négligeables.

Les méthodes asymptotiques dans l'espace normalisé telle que la méthode des perturbations ou la méthode de la balance harmonique sont basées sur l'hypothèse que dans les équations considérées l'influence de la partie non-linéaire est petite comparativement à celle de la partie linéaire, c.-à-d. que l'amplitude d'oscillation est petite [15]. Ces méthodes fonctionnent seulement pour le paramètre de perturbation ε et des amplitudes d'oscillation limités aux faibles valeurs.

IV.3. Validations de la méthode

Pour aller au-delà de ces limitations, dans ce travail, la technique de perturbation est utilisée dans l'espace modal réel pour le cas d'un système conservatif libre à un-degré-de-liberté.

Pour évaluer la performance de cette méthode, nous avons effectué une étude illustrative paramétrique comparative de la méthode asymptotique dans l'espace modal normalisé et réel avec la méthode numérique itérative de Runge-Kutta de quatrième-ordre dans l'espace physique pour différentes valeurs de ε et d'amplitudes. L'équation paramétrique (IV-24) utilisée est non-linéaire.

$$y'' + y + \varepsilon y^3 = 0 \quad (\text{IV-24})$$

Les variations de la fréquence fondamentale non-linéaire et du déplacement en fonction du paramètre de perturbation et l'amplitude des oscillations sont données sur les figures IV-1 à IV-14 respectivement.

Dans cette section, la performance de la méthode de perturbation dans l'espace modal réel est étudiée en fonction de trois paramètres importants : le paramètre de perturbation ε , l'amplitude de vibration et l'ordre d'approximation de la méthode.

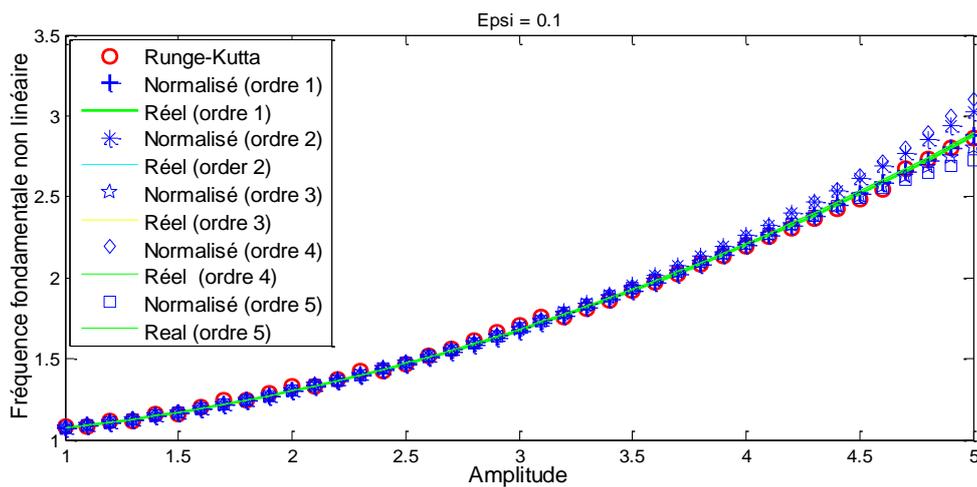


Figure IV-1. Amplitude de la fréquence fondamentale non-linéaire ($\varepsilon=0.1$).

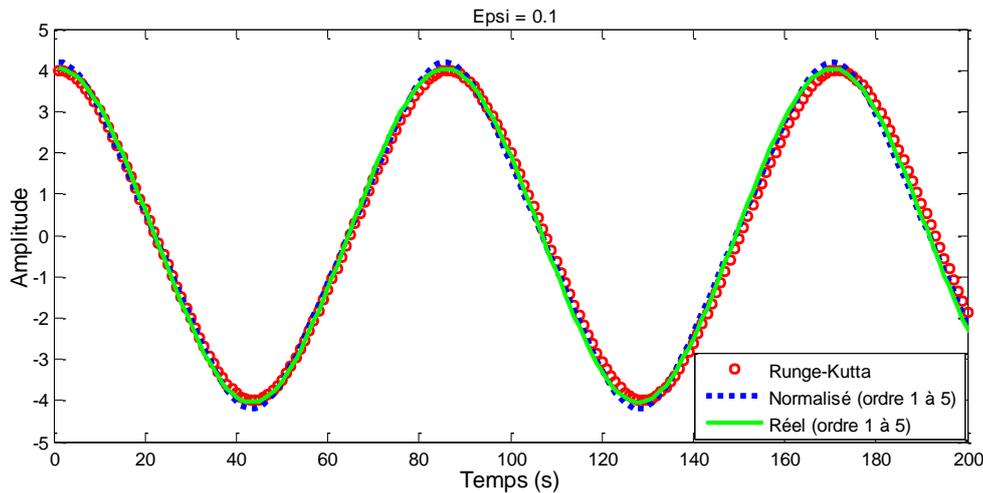


Figure IV-2. Amplitude de vibrations-Temps ($\varepsilon=0.1$).

Pour des valeurs très faibles du paramètre de perturbation c.-à-d. $\varepsilon \leq 0.1$, l'étude comparative des trois méthodes montre (voir figure IV-1), une bonne convergence de toutes les pulsations non-linéaires obtenues par les deux méthodes de perturbation dans l'espace modal réel et normalisé et celles de la méthode itérative de Runge-Kutta quel que soit l'ampleur de l'amplitude de vibration et l'ordre d'approximation. Les résultats sont confirmés dans la figure IV-2 qui donne une superposition des trois courbes des déplacements en fonction du temps données par les trois méthodes.

Dans les figures IV-3, IV-7 et IV-11, nous avons augmenté la valeur du paramètre de perturbation ε ($\varepsilon = 0.5, 1$ et 1.5), la convergence des pulsations non-linéaires retrouvées par la méthode de perturbation dans l'espace modal réel reste toujours la même par rapport à celles données par la méthode itérative de Runge-Kutta quel que soit l'ampleur de l'amplitude de vibration et l'ordre d'approximation.

Il est de même pour les pulsations non-linéaires approximées au premier ordre par la méthode de perturbation dans l'espace modal normalisé. Par contre, les pulsations non-linéaires approximées au deuxième ordre sont plus divergentes à partir d'une certaine valeur limitée d'amplitude qui diminue en augmentant la valeur de ε .

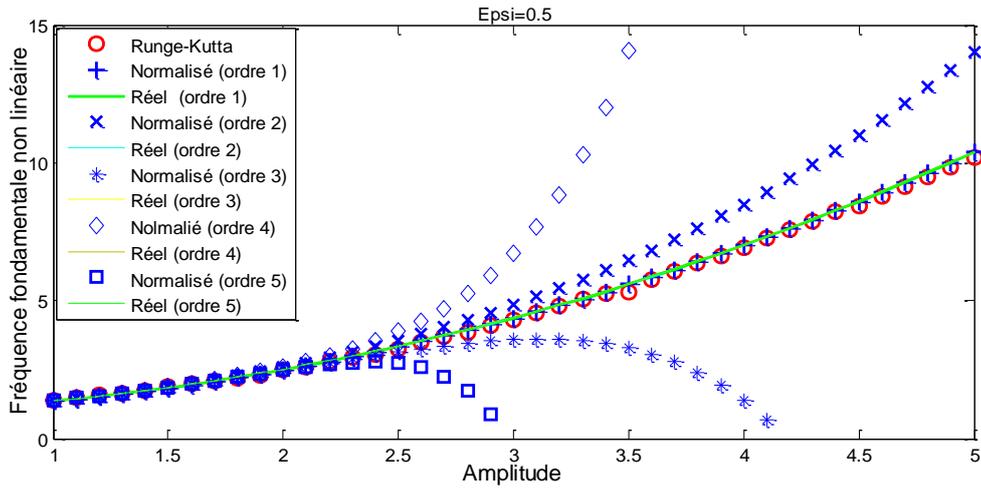


Figure IV-3. Amplitude de la fréquence fondamentale non-linéaire ($\epsilon=0.5$).

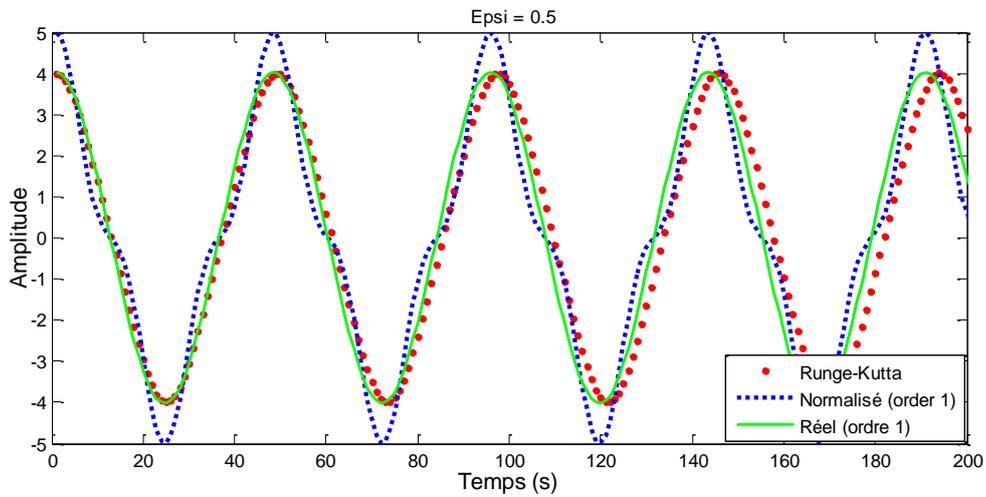


Figure IV-4. Amplitude de vibrations-Temps à l'ordre 1 ($\epsilon=0.5$).

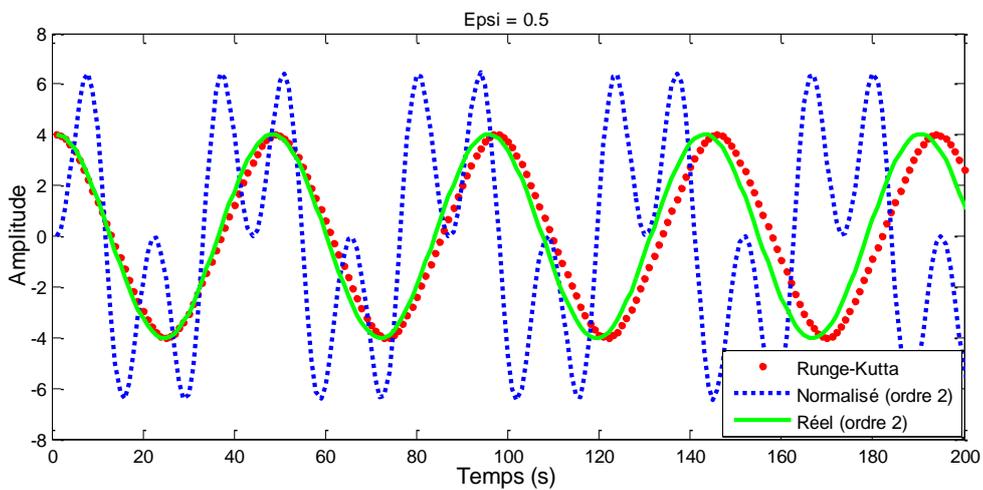


Figure IV-5. Amplitude de vibrations-Temps l'ordre 2 ($\epsilon=0.5$).

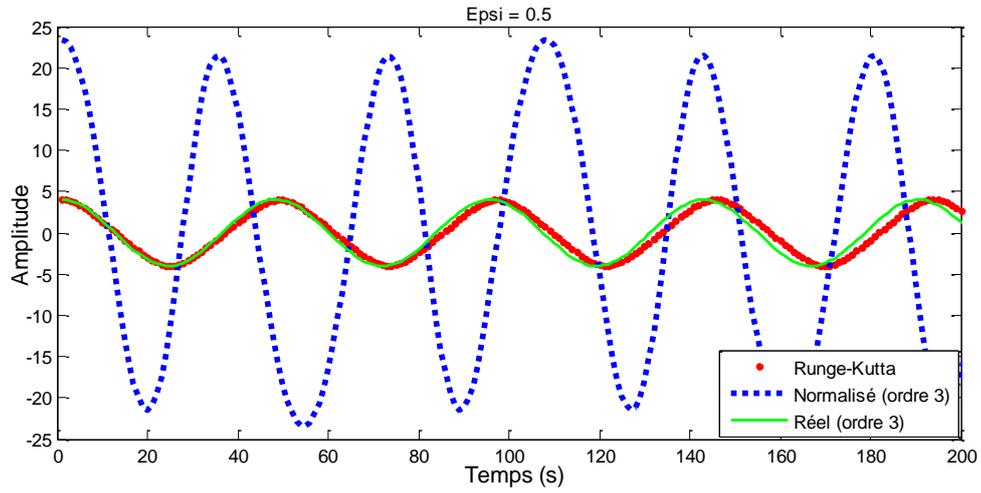


Figure IV-6. Amplitude de vibrations-Temps à l'ordre 3 ($\epsilon=0.5$).

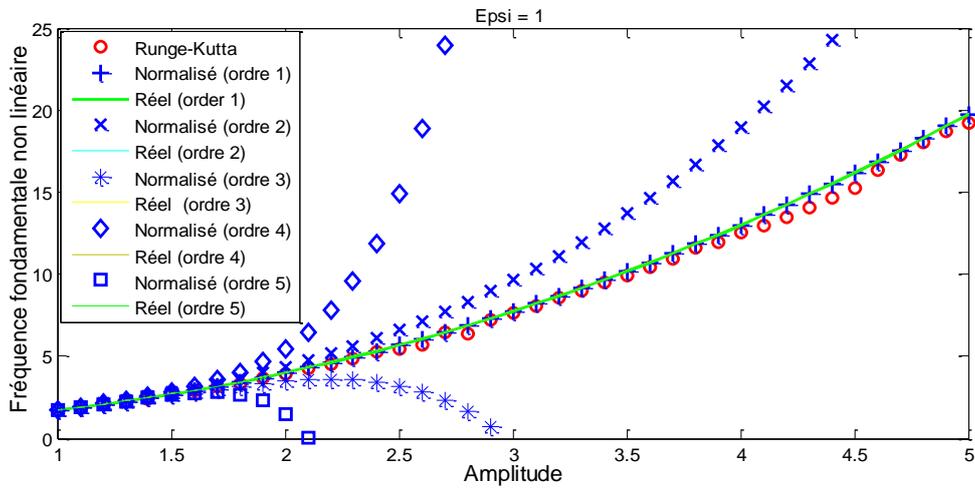


Figure IV-7. Amplitude de la fréquence fondamentale non-linéaire ($\epsilon=1$).

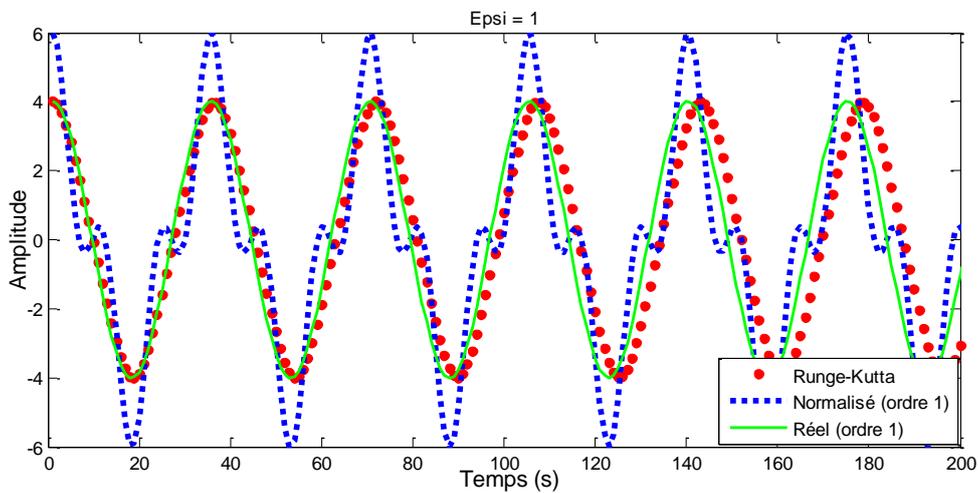


Figure IV-8. Amplitude de vibrations-Temps à l'ordre 1 ($\epsilon=1$).

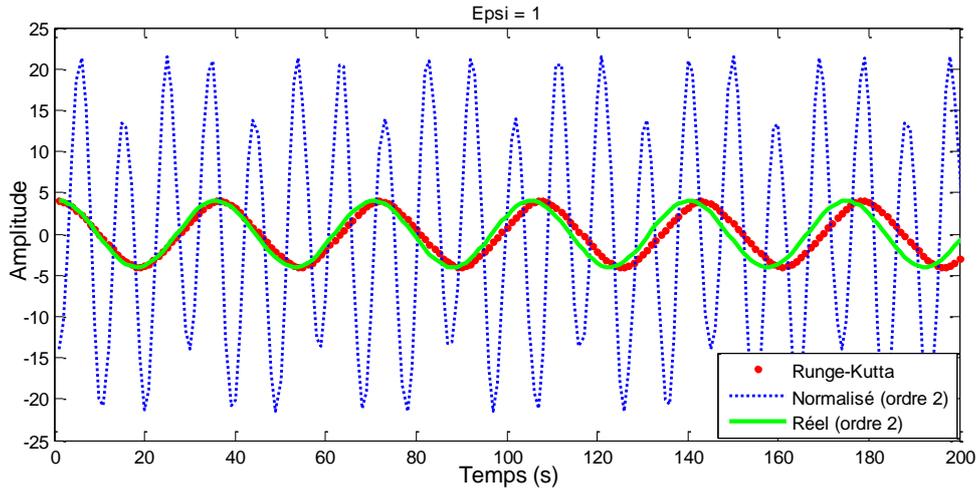


Figure IV-9. Time Amplitude de vibrations-Temps à l'ordre 2 ($\epsilon=1$).

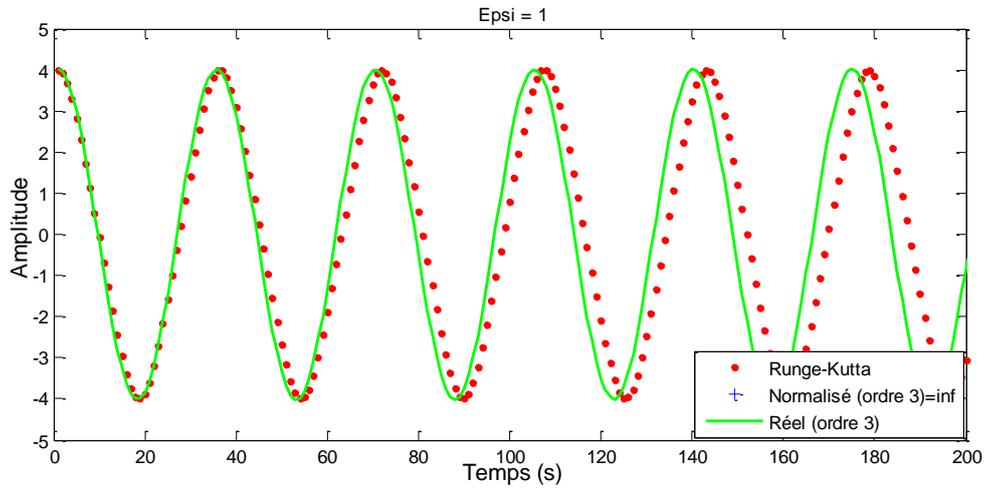


Figure IV-10. Amplitude de vibrations-Temps à l'ordre 3 ($\epsilon=1$).

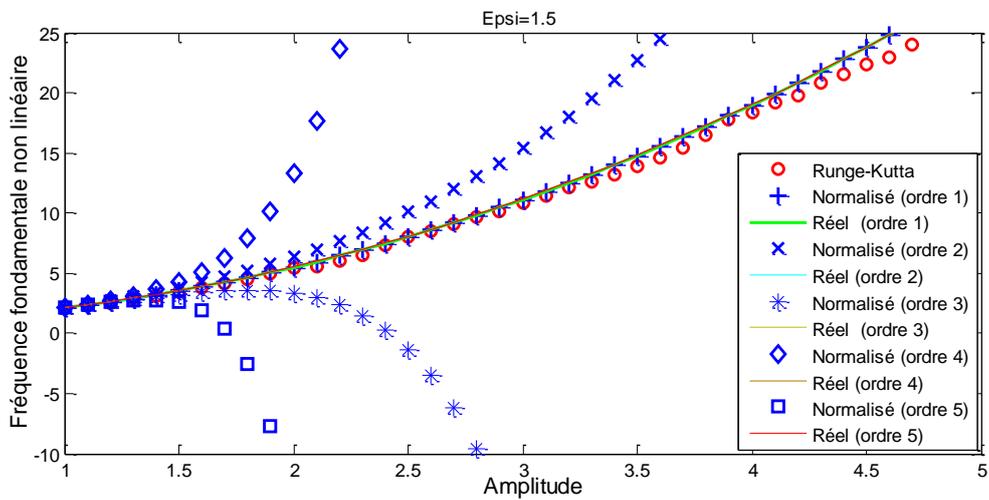


Figure IV-11. Amplitude de la fréquence fondamentale non-linéaire ($\epsilon=1.5$).

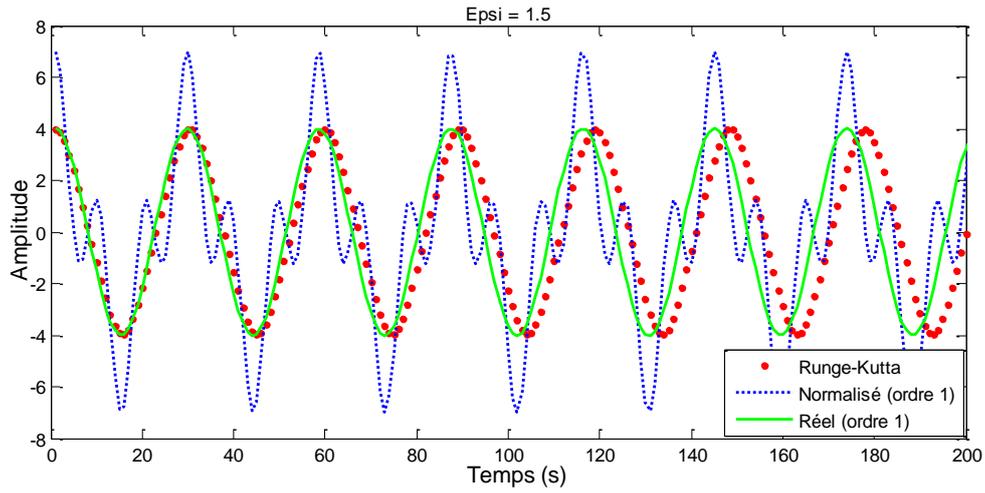


Figure IV-12. Amplitude de vibrations-Temps à l'ordre 1 ($\epsilon=1.5$).

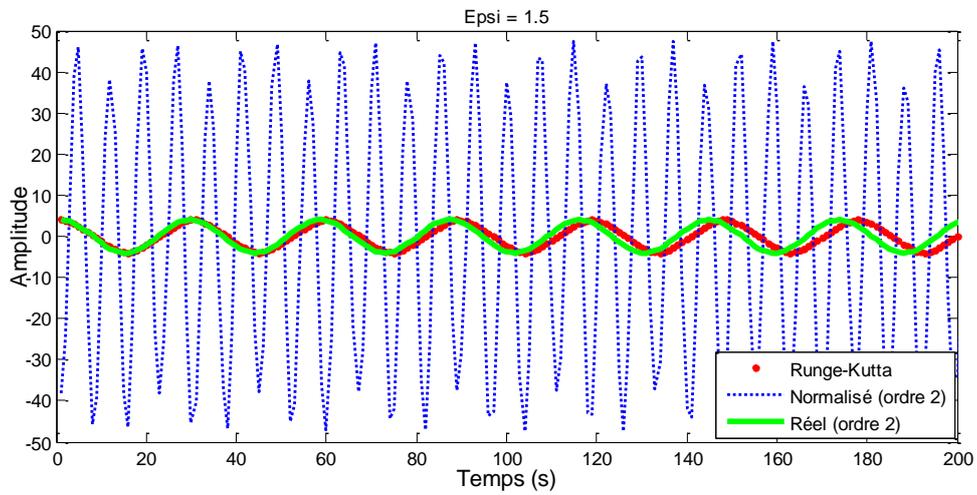


Figure IV-13. Amplitude de vibrations-Temps à l'ordre 2 ($\epsilon=1.5$).

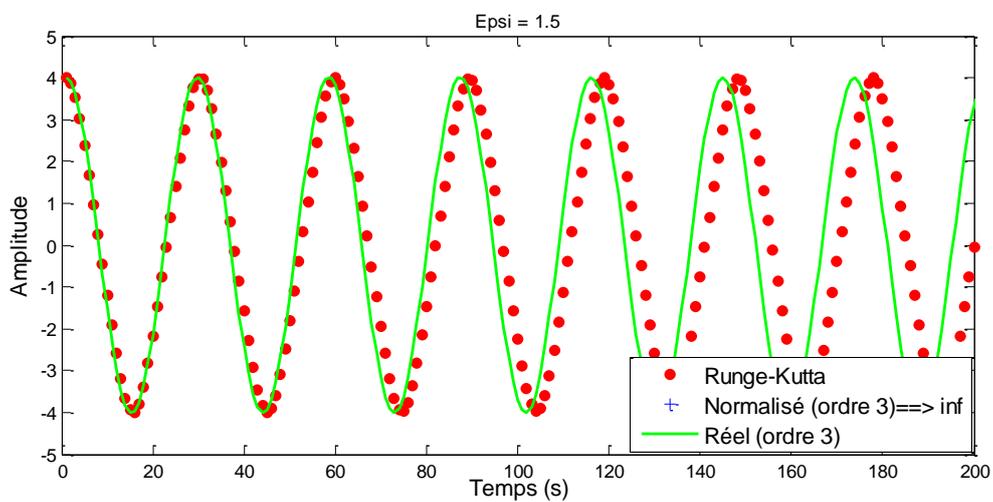


Figure IV-14. Time Amplitude de vibrations-Temps à l'ordre 3 ($\epsilon=1.5$).

Dans la figure IV-4, nous avons représenté les trois courbes de l'approximation des déplacements à l'ordre un (1) obtenues par les trois méthodes. Les résultats donnent une bonne concordance entre la courbe obtenue dans l'espace réel et celle obtenue par l'itération de Runge-Kutta. La troisième courbe obtenue dans l'espace normalisé n'est pas très concluante même si elle est proche des autres mais elle commence à s'éloigner.

Dans les autres figures, IV-5, IV-6, IV-8, IV-9, IV-10, IV-12, IV-13 et IV-14, l'approximation des déplacements est de l'ordre supérieur à deux (2). La croissance de la dissimilitude de la courbe obtenue dans l'espace normalisé avec l'ordre d'approximation est remarquable par rapport aux deux autres qui sont toujours pratiquement superposées quel que soit l'ordre d'approximation et l'ampleur de l'amplitude.

A travers ces résultats, dans l'espace normalisé, les termes supérieurs à un (1) des approximations des fréquences non-linéaires et les déplacements ne sont pas négligeables.

Au-delà de la première approximation, les résultats deviennent divergents. Dans l'espace réel, tous les termes des approximations des fréquences non-linéaires et les déplacements supérieurs à un, sont négligeables, ce qui donne une superposition des courbes de toutes les approximations représentées.

IV.4. Application de la méthode sur une poutre orthotrope

Dans cette partie, nous allons mettre en application cette technique proposée sur un cas test de simulation numérique d'une poutre épaisse multicouche, avec la prise en compte de la partie non-linéaire de son équation de mouvement de vibration.

Nous allons étudier la variation de la fréquence fondamentale des vibrations des poutres transversales en utilisant des fonctions de forme hiérarchiques dérivées des polynômes de Legendre. La méthode de la linéarisation asymptotique basée sur la solution semi-analytique de perturbation dans l'espace modal réel, est employée pour estimer les grandes amplitudes des poutres épaisses en vibrations libres. Pour évaluer la large applicabilité de la méthode de la linéarisation asymptotique, diverses orientations de l'orthotropie des couches et de conditions aux frontières sont considérées.

Dans le tableau IV-2, sont données les configurations des frontières de la poutre considérées dans ce travail. Les caractéristiques mécaniques des couches sont : $E_1=155$ GPa, $E_2=12.1$ GPa, $G_{12}=G_{13}=4,4$ GPa, $\nu_{12}=0,248$, $\rho=1570$ kg/m³ avec la longueur 0.25 m, la largeur 0.01 m et l'épaisseur 0.001m [5]. Les fréquences non-linéaires obtenues et

celles de la référence présentées dans la littérature, pour différentes couches et configurations des frontières, sont présentées dans les Tableaux (IV-3, IV-4 et IV-5).

Tableau IV-2. Conditions aux limites considérées pour une poutre composite avec le déplacement axial $u(0)=u(L)=0$.

Configuration aux limites	Conditions aux limites
Appuyée-Appuyée	$w(0)=w(L)=0$
Encastrée-Encastrée	$w(0)=w(L)=\phi(0)=\phi(L)=0$
Encastrée-Appuyée	$w(0)=w(L)=\phi(0)=0$

Dans les quatre tableaux suivants, nous avons présenté les valeurs des rapports entre les fréquences fondamentales non-linéaires et linéaires pour différentes orientations d'orthotropie des couches et les conditions aux frontières. Le rapport de la déflexion maximal de la poutre par rapport à l'épaisseur des couches est $w_{max}/h = 1$. Les résultats obtenus par la méthode de perturbation proposée, dans l'espace modal réel, sont comparés à ceux obtenus par la méthode itérative basée sur la théorie de Rayleigh–Ritz formulée par les éléments finis simples proposée par Jagadish Babu Gunda et la méthode itérative de Han et al, toutes dans l'espace physique. L'ordre des fonctions de forme hiérarchiques utilisé dans les éléments finis (HFEM) est $r = 14$.

Tableau IV-3. Comparison of (ω_{NL}/ω_L) for various boundary conditions and orientation $\theta = (0^\circ/0^\circ/0^\circ)_S$ for $w_{max}/h=1$.

Modeling	Ref. Babu Gunda (2010)		Ref. Han and Petyt (1995)	Present study	Relative error (%)
	R-R	FEM	HFEM (r = 14)	HFEM (r = 14)	
Appuyée-Appuyée	2.000	2.000	2.000	2.060	3.0
Encastrée-Encastrée	1.322	1.303	1.299	1.333	2.3
Encastrée-Appuyée	1.668	1.584	1.545	1.609	1.5

Tableau IV-4. Comparison of (ω_{NL}/ω_L) for various boundary conditions and orientation $\theta = (0^\circ/90^\circ/90^\circ)_S$ for $w_{max}/h=1$.

Modeling	Ref. Babu Gunda (2010)		Ref. Han and Petyt (1995)		Present study	Relative error (%)
	R-R	FEM	HFEM (r = 14)		HFEM (r = 14)	
Appuyée-Appuyée	1.609	1.609	1.633		1.673	3.9
Encastrée-Encastrée	1.182	1.173	1.179		1.197	2.0
Encastrée-Appuyée	1.394	1.384	1.337		1.372	0.86

Tableau IV-5. Comparison of (ω_{NL}/ω_L) for various boundary conditions and orientation $\theta = (90^\circ/90^\circ/0^\circ)_S$ for $w_{max}/h=1$.

Modeling	Ref. Babu Gunda (2010)		Ref. Han and Petyt (1995)		Present study	Relative error (%)
	R-R	FEM	HFEM (r = 14)		HFEM (r = 14)	
Appuyée-Appuyée	3.360	3.360	3.057		3.164	5.8
Encastrée-Encastrée	1.890	1.841	1.680		1.778	3.4
Encastrée-Appuyée	2.667	2.489	1.798		2.326	6.5

Tableau IV-6. Comparison of (ω_{NL}/ω_L) for various boundary conditions and orientation $\theta=(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ for $w_{max}/h=1$.

Modeling	Ref. Babu Gunda (2010)		Ref. Han and Petyt (1995)		Present study	Relative error (%)
	R-R	FEM	HFEM (r = 14)		HFEM (r = 14)	
Appuyée-Appuyée	1.791	1.793	1.803		2.065	15.1
Encastrée-Encastrée	1.341	1.322	1.313		1.349	2.0
Encastrée-Appuyée	1.631	1.557	1.622		1.631	4.7

Excepté le résultat représenté par d'orientation de l'orthotropie des couches $\theta=(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ et les conditions aux frontières H-H qui est un peu plus élevé comparativement aux autres résultats de la référence, sinon nous pouvons observer dans

les tableaux IV-3 à IV-6, les valeurs de la fréquence fondamentale non-linéaire obtenues par les trois méthodes, sont généralement similaires quel que soit la configurations des frontières considérés.

La validation des résultats de la méthode sur une structure composite exige la vérification de certains paramètres qui peuvent modifiez les caractéristiques dynamiques telles : l'orientation de l'orthotropie des couches et les conditions aux frontières. Pour cela, nous avons étudié la variation de la fréquence fondamentale non-linéaire $\bar{\Omega}$ avec la déflexion centrale w_{max}/h en considérant le premier ordre d'approximation par rapport à ε .

Les résultats de cette étude, présentés dans les figures suivantes, sont comparés à ceux présentés dans les références bibliographiques [4] et [5] qui présentent la méthode de Rayleigh–Ritz et deux méthodes itératives basées sur les éléments finis de version- h classique et la version- p hiérarchiques.

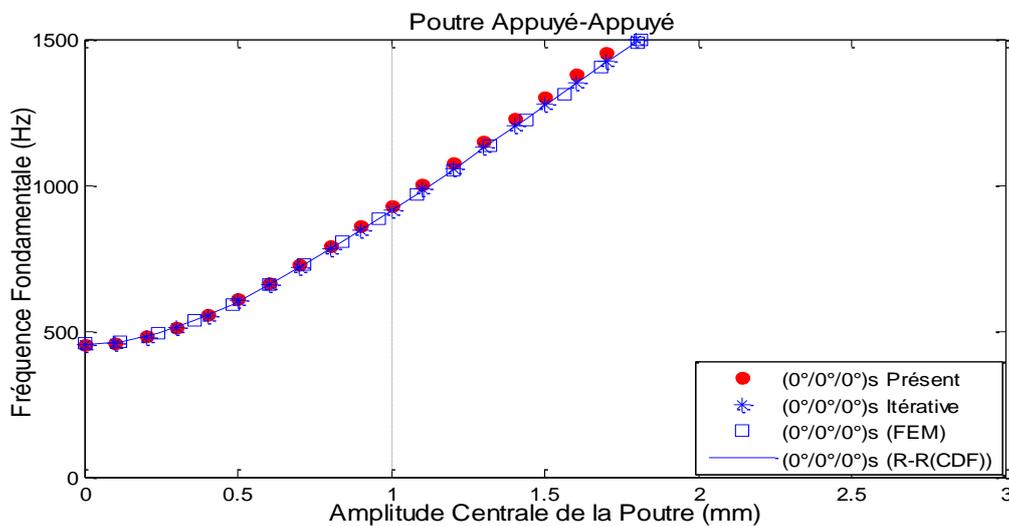


Figure IV-15. La fréquence non-linéaire en fonction de (w_{max}/h) A-A $(0^\circ/0^\circ/0^\circ)_s$.

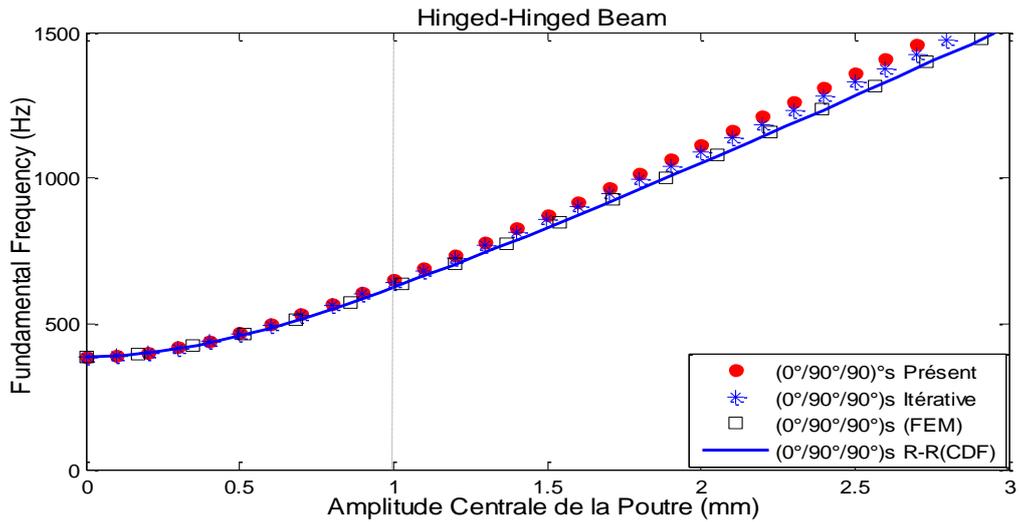


Figure IV-16. La fréquence non-linéaire en fonction de (w_{max}/h) H-H $(0^\circ/90^\circ/90^\circ)$ s.

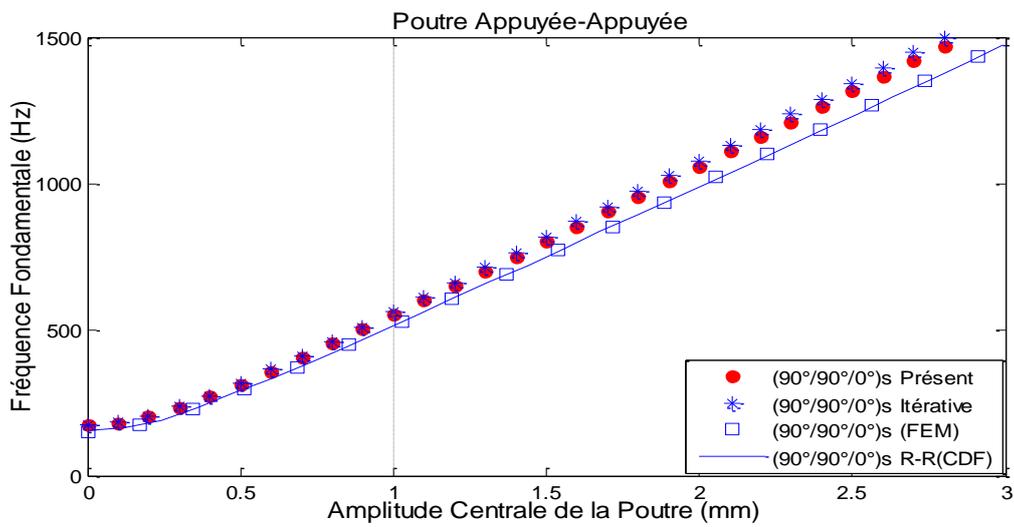


Figure IV-17. La fréquence non-linéaire en fonction de (w_{max}/h) A-A $(90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ s.

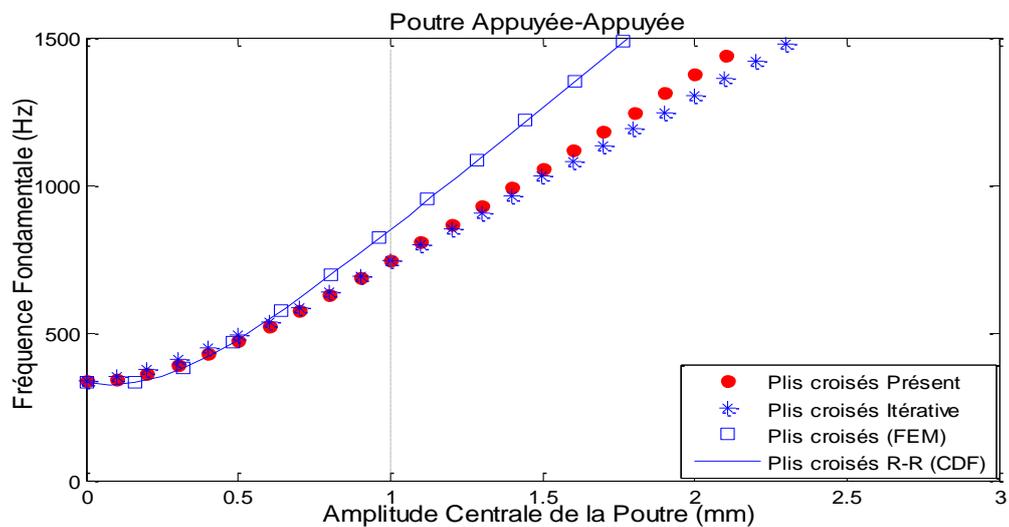


Figure IV-18. La fréquence non-linéaire en fonction de (w_{max}/h) A-A (Croisés).

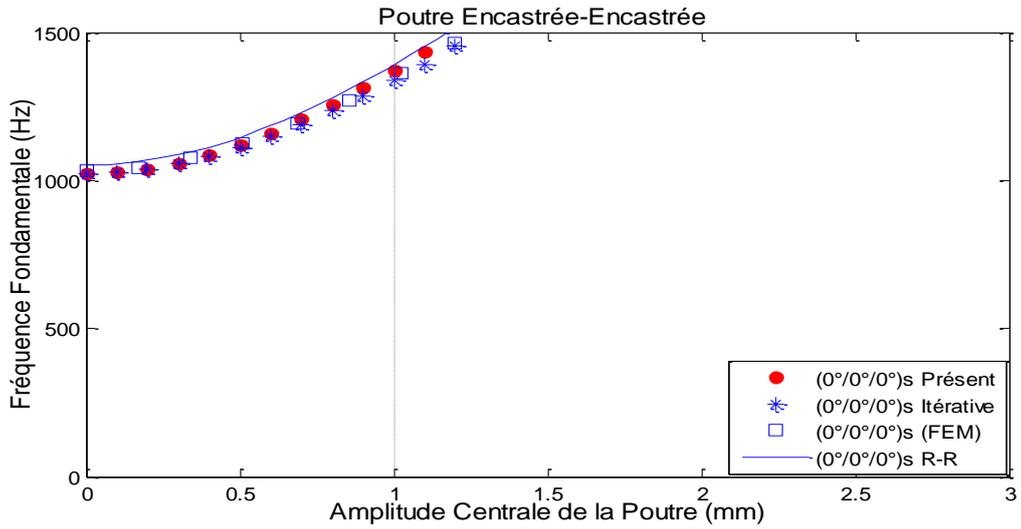


Figure IV-19. La fréquence non-linéaire en fonction de (w_{\max}/h) E-E (0°/0°/0°)s

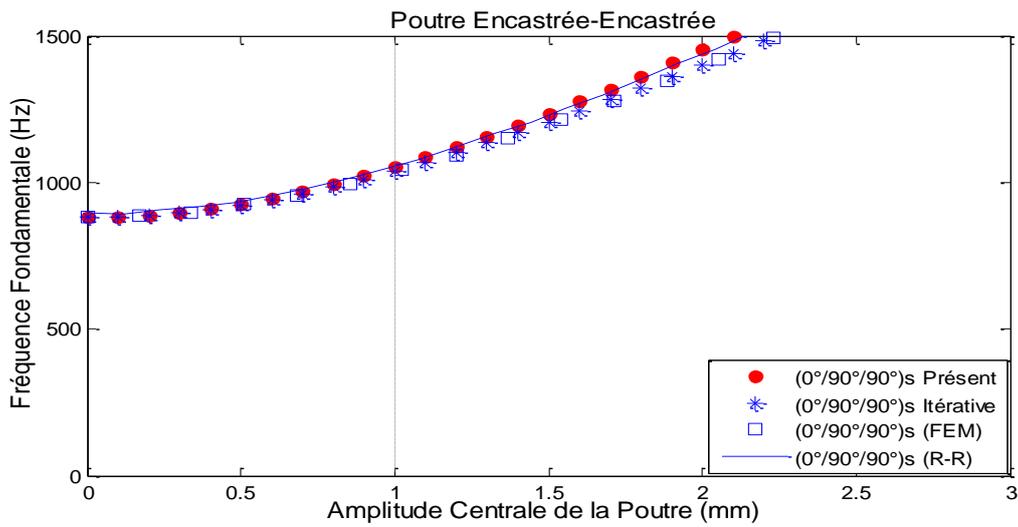


Figure IV-20. La fréquence non-linéaire en fonction de (w_{\max}/h) E-E (0°/90°/90°)s.

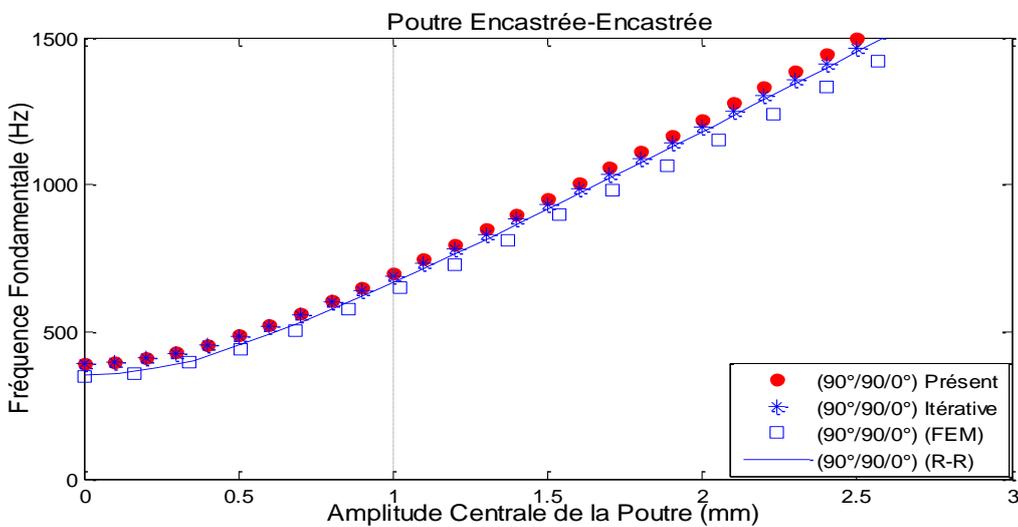


Figure IV-21. La fréquence non-linéaire en fonction de (w_{\max}/h) E-E (90°/90°/0°)s.

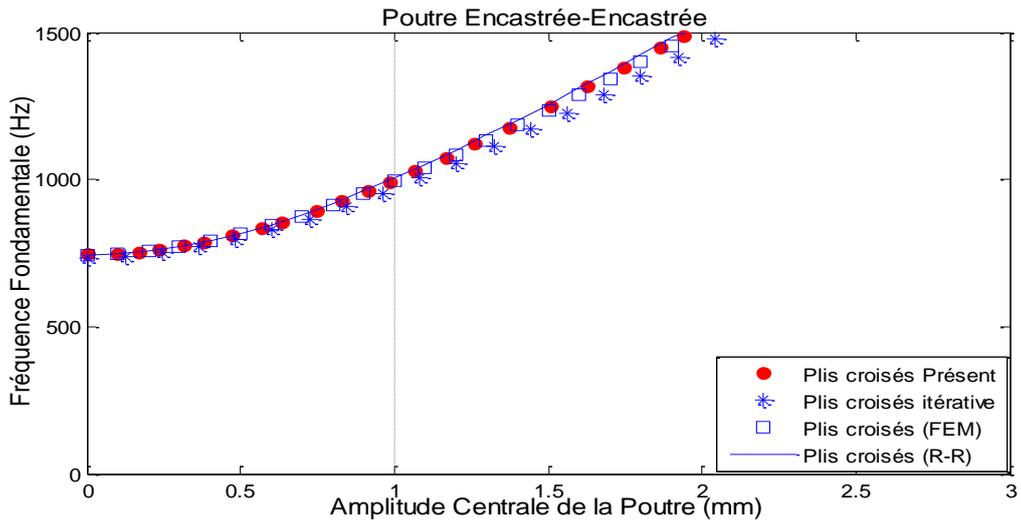


Figure IV-22. La fréquence non-linéaire en fonction de (w_{\max}/h) E-E (Croisés).

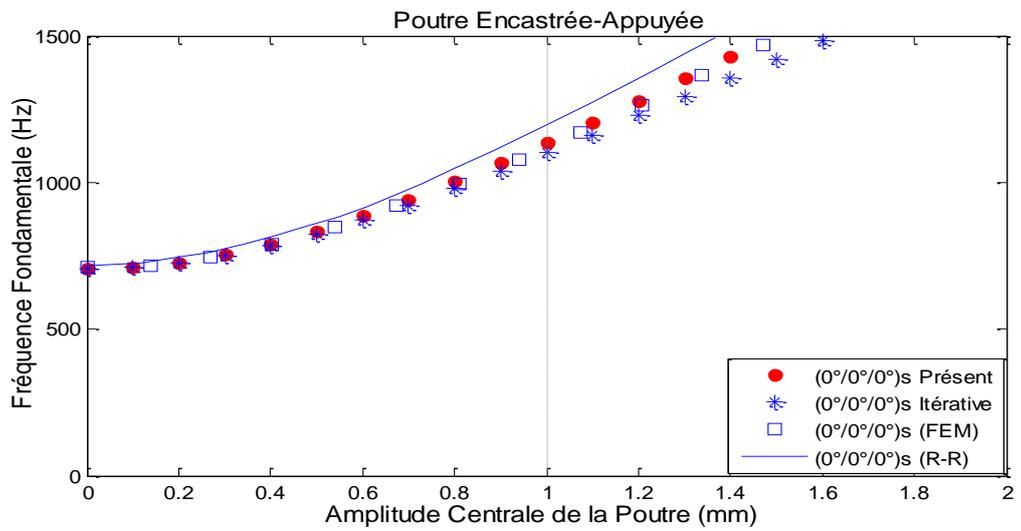


Figure IV-23. La fréquence non-linéaire en fonction de (w_{\max}/h) E-A (0°/0°/0°)s.

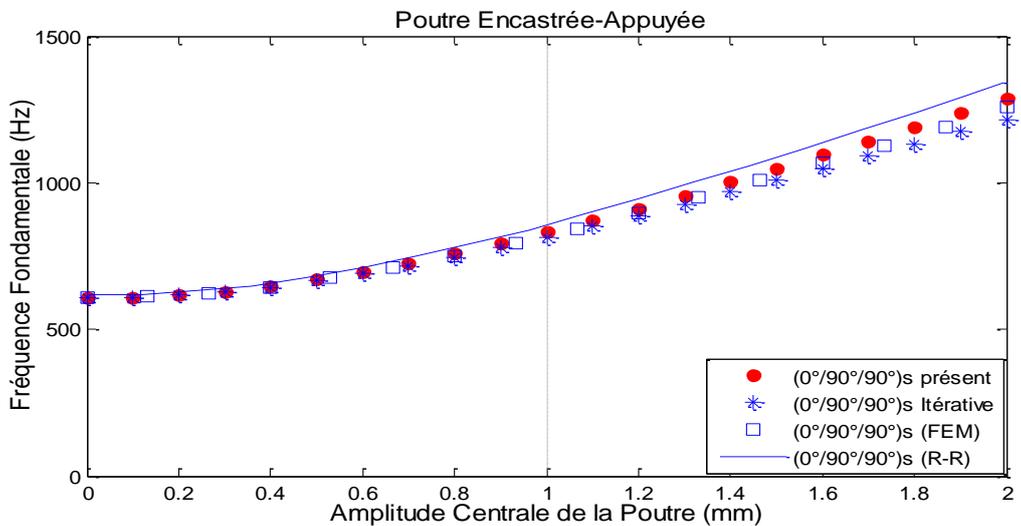


Figure IV-24. La fréquence non-linéaire en fonction de (w_{\max}/h) E-A (0°/90°/90°)s.

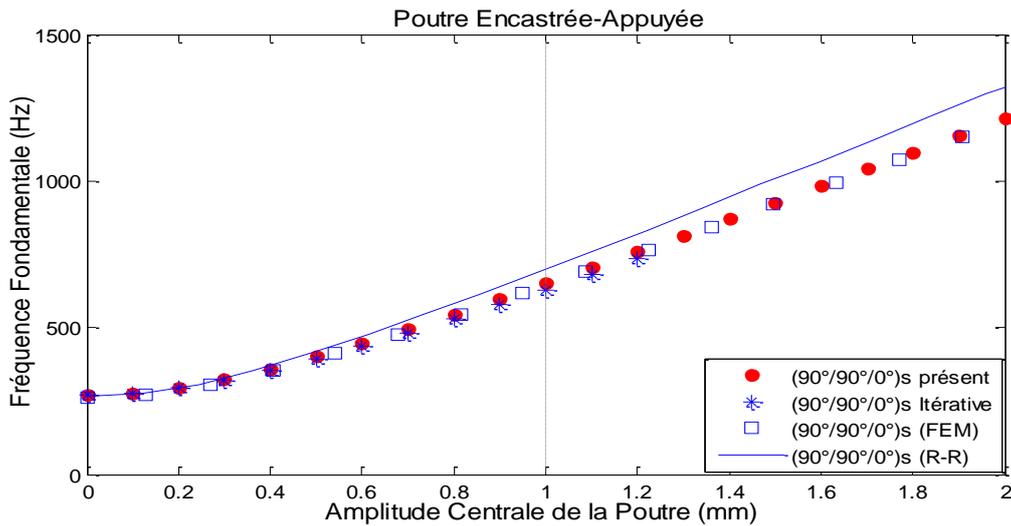


Figure IV-25. La fréquence non-linéaire en fonction de (w_{max}/h) E-A $(90^\circ/90^\circ/0^\circ)_s$.

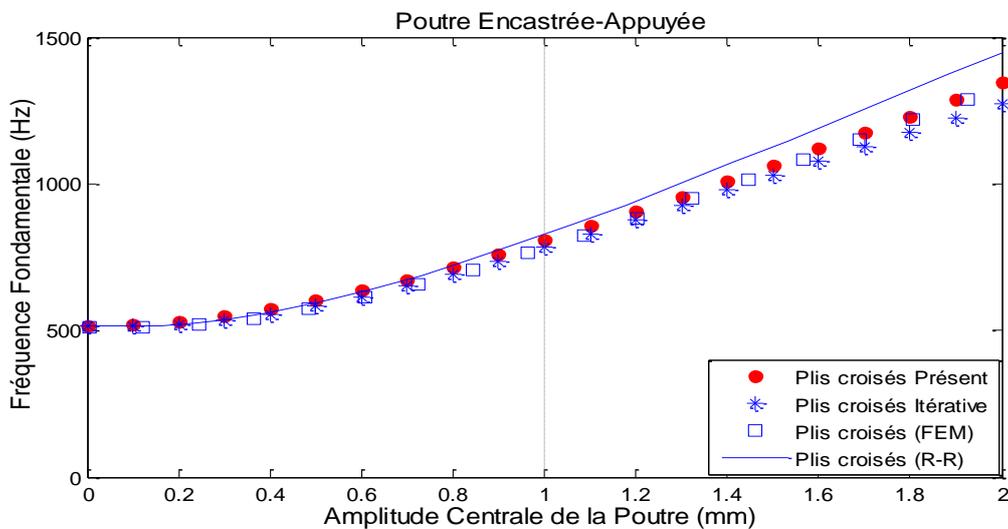


Figure IV-26. La fréquence non-linéaire en fonction de (w_{max}/h) E-A (Croisés).

Les figures IV-15 à IV-26 nous montre clairement que l'orientation de l'orthotropie des couches et les conditions aux frontières affectent de manière significative la non-linéarité de la structure.

Dans la plupart des figures, les résultats obtenus par la méthode de la linéarisation asymptotique dans l'espace réel et ceux des méthodes itératives, basée sur le polynôme de Legendre [4] et celle basée sur les éléments finis simples [5], sont très proches ; nous pouvons même dire que la différence est négligeable. Dans les trois figures IV-17, IV-18 et IV-21, nous constatons un écartement de la courbe donnée par la méthode itérative basée sur les éléments finis simples par rapport à la méthode présentée.

Par contre, les courbes obtenues par la méthode de Rayleigh–Ritz (R-R) sont dans la moitié des cas écartées des autres courbes ; elles sont généralement supérieures à celles obtenues par la méthode proposée et la différence réside au niveau de certaines configurations aux frontières et d'orientations d'orthotropie, comme le cas de la poutre appuyée-appuyée à plis croisés et encastrée-appuyée. Cette différence peut être liée à l'ordre d'approximation considéré.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement dynamique des poutres composites avec la prise en compte de la non-linéarité géométrique. L'influence des conditions aux limites et l'orientation de l'orthotropie des couches est considérée.

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons montré à l'aide d'un exemple paramétrique simple que les techniques de perturbations utilisées par d'autres auteurs, dans l'espace temporel normalisé, sont limitées par deux paramètres : le paramètre de perturbation doit être très petit par rapport à l'unité et l'amplitude de vibration doit être proportionnelle à ce paramètre. Pour se libérer de cette contrainte, nous avons montré, par le même exemple, que la méthode de perturbation peut être appliquée dans l'espace temporel réel et la solution de l'équation dynamique peut être obtenue simplement par le premier ordre d'approximation. Selon les résultats obtenus par cette méthode, les autres termes du deuxième ordre d'approximation et plus sont négligeables dans l'espace temporel réel, ce qui n'est pas le cas dans l'espace temporel normalisé.

Dans la première partie, les applications numériques ont montré que les résultats obtenus par la méthode de perturbation dans l'espace modal temporel réel sont très proches de ceux obtenus par les deux méthodes itératives, basées sur les éléments finis simples et hiérarchiques, appliquées dans l'espace physique. Ceci prouve que la solution de la méthode proposée peut être la plus proche du cas réel ou on peut dire même exacte.

CONCLUSION GENERALE

L'objectif principal de ce travail est de contribuer aux travaux effectués sur l'étude dynamique des structures en générale et en particulier à l'identification des structures mécanique. Le contenu de cette étude est une identification des structures mécaniques composites en vibrations. Pour mener à terme cette étude, nous avons choisi deux types de structures épaisses multicouches, une poutre et une plaque.

Pour parvenir à l'équation différentielle du mouvement, nous avons modélisé les deux structures dans les cas linéaire et non-linéaire par la méthode des éléments finis hiérarchiques. La modélisation est basée sur le choix de la fonction de forme de Legendre ou Sinus et un travail de comparaison est effectué dans le cas linéaire. L'avantage de la méthode des éléments finis hiérarchiques réside dans la désignation d'une stratégie de contrôle de l'erreur qui consiste à faire varier le degré d'interpolation des éléments tout en conservant la taille des éléments et leurs degrés d'interpolation. Cette méthode nous permet de minimiser le nombre d'opérations et donc le temps de calcul. Contrairement à la méthode des éléments finis classiques où la précision passe par le raffinement du maillage donc une augmentation du nombre de degrés de liberté et en conséquence les coûts de calcul.

Afin de vérifier et de confirmer l'exactitude de nos développements, nous avons résolu d'abord l'équation différentielle linéaire obtenue par la méthode de la décomposition QR présentée dans le chapitre II. Nous avons comparé ensuite les résultats obtenues, pour différentes orientations de l'orthotrope des plis et différentes conditions aux limites, avec ceux de la littérature obtenus par la méthode des éléments finis classiques.

Nous avons abouti dans notre choix de fonction de forme à trouver la plus convergente qui améliorer la qualité des résultats recherchés. Nous avons comparé les fréquences naturelles adimensionnelles pour différents ordres d'interpolation des fonctions de formes hiérarchiques. Les résultats obtenus montrent une convergence rapide en utilisant la fonction de forme basée sur les polynômes de Legendre plutôt que la fonction de forme trigonométrique « Sinus ». Les fonctions de Legendre donnent des valeurs stables à un ordre d'interpolation moins élevé comparativement à celui des fonctions de forme de type « Sinus ».

L'application de la méthode des éléments finis hiérarchiques, basée sur les fonctions de formes de Legendre, est mieux adaptée pour l'obtention des paramètres modaux des structures composites.

Dans l'étude non-linéaire des structures mécanique, la recherche des paramètres modaux est effectuée par deux types de méthodes : méthode de continuation et méthode de perturbation. Pour résoudre l'équation dynamique non-linéaire d'une structure poutre ou plaque, nous utilisons les méthodes d'intégration et de balance harmonique.

L'utilisation des techniques de perturbations dans l'espace temporel normalisé, exige que le paramètre de perturbation soit très petit par rapport à l'unité et que l'amplitude de vibration doit être proportionnelle à ce paramètre. L'application de ces méthodes est donc limitée aux systèmes faiblement non-linéaires.

Dans le cas des structures fortement non-linéaires, tel que les plaques et poutres épaisses multicouches, le paramètre de perturbation étant plus important, l'avantage aux méthodes itératives comparativement aux méthodes asymptotiques.

Dans ce cas de structures, nous avons proposé dans le cadre de ce travail, une méthode de ce dernier type qui donne de très bons résultats et qui fait l'objet d'un article [169] publié dans un journal de renommé.

Nous avons montré aussi en comparaison avec la méthode numérique itérative de Runge-Kutta, que la méthode de perturbation peut être appliquée dans l'espace temporel réel permet d'obtenir la solution de l'équation dynamique simplement en utilisant le premier ordre d'approximation de la pulsation propre non-linéaire. Selon les résultats obtenus par cette méthode, les termes d'approximation du second ordre et plus de la pulsation non-linéaire sont négligeables dans l'espace temporel réel, ce qui n'est pas le cas dans l'espace temporel normalisé.

Dans la première partie, les applications numériques ont montré que les résultats obtenus par la méthode de perturbation dans l'espace modal temporel réel sont très proches de ceux obtenus par les deux méthodes itératives ; Han et al [4] et Jagadish Babu Gunda [5] basées sur les éléments finis simples et hiérarchiques, appliquées dans l'espace physique. Ceci prouve que la solution de la méthode proposée peut être la plus proche du cas réel.

PERSPECTIVES :

Les travaux réalisés au cours de cette thèse ouvrent la voie à de nombreux axes de recherche.

Du point de vue expérimental, les résultats présentés dans ce manuscrit ont permis certes de valider la méthode asymptotique proposée par des simulations numériques et comparé avec les résultats de la littérature en particulier dans le cas de vibrations linéaires des structures poutre et plaque composites, et poutre composite uniquement dans le cas des vibrations non-linéaires.

Dans le cadre des vibrations non-linéaires, les données expérimentales sont rares. C'est pourquoi, vu la nature purement théorique des résultats présentés ici, il serait envisageable de mener des essais expérimentaux pour ce type de structure afin de corroborer l'efficacité et l'exactitude des méthodes proposées.

De point de vue théorique, les structures poutres multicouches ont été identifiées dans le cas non-linéaire. Il serait souhaitable d'élargir cette méthode d'identification aux structures de type plaque et coques et tenant compte des courbures afin de modéliser des structures mécaniques plus complexe. De même, pour des conceptions spécifiques, il serait intéressant d'examiner la réponse mécanique avec un couplage des deux méthodes des éléments finis : version-h et version-p. Par ailleurs, il y a lieu de noter qu'un verrou scientifique reste à lever quand à l'utilisation de la méthode HFEM d'une manière explicite sans passer par des calculs matriciels.

Initialement, le travail envisagé dans cette thèse est l'optimisation des structures mécaniques composites en vibration. Cette partie exige une modélisation très rigoureuse en matière de développement éléments finis et une identification efficace et moins couteuse. Le travail présenté dans cette thèse, nous permet de faire aboutir cette partie.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographies

- [1] Kapania RK, Raciti S. *Recent advances in analysis of laminated beams and plates, part II: vibration and wave propagation*. AIAA J 1989;27(7):935–46.
- [2] Rosen A. *Structural and dynamic behavior of pretwisted rods and beams*. Appl Mech Rev 1991;44:483–515.
- [3] Chidamparam P, Leissa AW. *Vibrations of planar curved beams, rings, and arches*. Appl Mech Rev 1993;46(9):467–84.
- [4] Qatu MS. *Vibration of laminated shells and plates*. Netherlands: Elsevier Academic Press; 2004.
- [5] BOUYAYA Lynda. *Analyse Numérique Du Comportement Dynamique De Structures Composites A Renforcement Fibreux*, Thèse Doctorat En Sciences, Université MENTOURI Constantine.
- [6] Kaw AK. *Mechanics of composite materials*. Boca Raton (FL): CRC Press; 2005.
- [7] Rios G, Chan WS. *A unified analysis of stiffened reinforced composite beams*. In: Proceedings of 25th ASC conference, Dayton (OH), 20–23 September 2009.
- [8] Ecsedi I, Dluhi K. *A linear model for the static and dynamic analysis of nonhomogeneous curved beams*. Appl Math Model 2005;29:1211–31.
- [9] Banerjee JR. *Frequency equation and mode shape formulae for composite Timoshenko beams*. Compos Struct 2001;51:381–8.
- [10] Banerjee JR. *Explicit analytical expressions for frequency equation and mode shapes of composite beams*. Int J Solid Struct 2001;38:2415–26.
- [11] Li J, Shen R, Hua H, Jin J. *Bending–torsional coupled dynamic response of axially loaded composite Timoshenko thin-walled beam with closed crosssection*. Compos Structure 2004;64:23–35.
- [12] El Bikri K, El Bekkaye M, Benamar R. *Geometrically nonlinear free vibrations of laminated composite beams: an effective formulation*. Appl Mech Mater 2011;105–107:1681–4.
- [13] Hajianmaleki M, Qatu MS. *Mechanics of composite beams*. Tesinova P, editor. *Advances in composite materials-analysis of naturally and man-made materials*. Croatia: InTech Publishing Company; 2011. p. 527–46.

- [14] Qatu MS. *In-plane vibration of slightly curved laminated composite beams*. J of Sound Vib 1992;159(2):327–38.
- [15] Qatu MS, Elsharkawi AA. *Vibration of laminated composite arches with deep curvature and arbitrary boundaries*. Comput Struct 1993;47(2):305–11.
- [16] Qatu MS, Iqbal J. *Transverse vibration of a two-segment cross-ply composite shafts with a lumped mass*. Compos Struct 2010;92(5):1126–31.
- [17] Mei C. *Effect of material coupling on wave vibration of composite Euler–Bernoulli beam structures*. J Sound Vib 2005;288:177–93.
- [18] Mei C. *Free and forced wave vibration analysis of axially loaded materially coupled composite timoshenko beam structures*. J Vib Acoust 2005;127:519–29.
- [19] Gunda JB, Gupta RK, Janardhan GR, Rao GV. *Large amplitude vibration analysis of composite beams: simple closed-form solutions*. Compos Struct 2011;93:870–9.
- [20] Hajianmaleki M, Qatu MS. *Transverse vibration analysis of generally laminated two-segment composite shafts with a lumped mass using generalized differential quadrature*. J Vib Control 2012.
- [21] Vijay K. Goyala, Rakesh K. Kapania. *Ashear-deformable beam element for the analysis of laminated composites*. Finite Elements in Analysis and Design 43 (2007) 463 – 477.
- [22] Abramovich H. *Shear deformation and rotary inertia effects of vibrating composite beams*. Compos Struct 1992;20(3):165–73.
- [23] Wanji Chen, Li Li, Ma Xu. *A modified couple stress model for bending analysis of composite laminated beams with first order shear deformation*. Composite Structures 93 (2011) 2723–2732.
- [24] Song Xiang, Yao-xing Jin, Ze-yang Bi, Shao-xi Jiang, Ming-sui Yang. *A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates*. Composite Structures 93 (2011) 2826–2832.
- [25] Cortinez VH, Piovan MT. *Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability*. J Sound Vib 2002;258(4):701–23.
- [26] Lee B, Lee T, Ahn T. *Free vibrations of horizontally curved beams with unsymmetric axes in cartesian coordinates*. KSCE J Civ Eng 2003;7(2):147–52.

- [27] Lee B, Lee T, Ahn T. *Free vibrations of arches with inclusion of axial extension, shear deformation and rotatory inertia in Cartesian coordinates*. KSCE J Civ Eng 2004;8(1):43–8.
- [28] Karama M, Afaq KS, Mistou S. *Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity*. Int J Solid Struct 2003;40:1525–46.
- [29] Mei C. *Global and local wave vibration characteristics of materially coupled composite beam structures*. J Vib Control 2005;11:1413–33.
- [30] Mei C. *Effect of material coupling on wave vibration of composite Timoshenko beams*. J Vib Acoust 2005;127:333–40.
- [31] Chandrashekhara K, Krishnamurthy K, Roy S. *Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation*. Compos Struct 1990;14(4):269–79.
- [32] Krishnaswamy A, Chandrashekhara K, Wu WZB. *Analytical solutions to vibration of generally layered composite beams*. J Sound Vib 1992;159(1):85–99.
- [33] Abramovich H, Livshits A. *Free vibrations of non-symmetric cross ply laminated composite beams*. J Sound Vib 1994;176(5):597–612.
- [34] Abramovich H, Eisenberger M, Shulepov O. *Vibrations and buckling of crossply nonsymmetric laminated composite beams*. AIAA J 1996;34(5):1064–9.
- [35] Teboub Y, Hajela P. *Free vibration of generally layered composite beams using symbolic computation*. Compos Struct 1995;33(3):123–34.
- [36] Bert CW, Kim C. *Whirling of composite-material driveshafts including bending–twisting coupling and transverse shear deformation*. J Vib Acoust 1995;117(1):17–21.
- [37] Eisenberger M, Abramovich H, Shulepov O. *Dynamic stiffness analysis of laminated beams using a first order shear deformation theory*. Compos Struct 1995;31(4):265–71.
- [38] Qatu MS. *Theories and analyses of thin and moderately thick laminated composite curved beams*. Int J Solid Structure 1993;30(20):2743–56.
- [39] Carrera E, Petrolo M. *On the effectiveness of higher-order terms in refined beam theories*. J Appl Mech 2011;78(2):17.
- [40] Khدير AA, Reddy JN. *Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions*. Int J Eng Sci 1994;32(12):1971–80.

- [41] Khedier AA, Reddy JN. *Free and forced vibration of cross-ply laminated composite shallow arches*. Int J Solid Struct 1997;34(10):1217–34.
- [42] Suresh JK, Nagaraj VT. *Higher-order shear deformation theory for thin-walled composite beams*. AIAA J Aircr 1996;33(5):978–86.
- [43] Song SJ, Waas AM. *Effects of shear deformation on buckling and free vibration of laminated composite beams*. Compos Struct 1997;37(1):33–43.
- [44] Marur SR, Kant T. *Free vibration analysis of fiber reinforced composite beams using higher order theories and finite element modeling*. J Sound Vib 1996;194(3):337–51.
- [45] Kant T, Marur SR, Rao GS. *Analytical solution to the dynamic analysis of laminated beams using higher order refined theory*. Compos Struct 1998;40(1):1–9.
- [46] Matsunaga H. *Vibration and buckling of multilayered composite beams according to higher order deformation theories*. J Sound Vib 2001;246(1):47–62.
- [47] Subramanian P. *Dynamic analysis of laminated composite beams using higher order theories and finite elements*. Compos Struct 2006;73(3):342–53.
- [48] Machado SP, Filipich CP, Cortinez VH. *Parametric vibration of thin-walled composite beams with shear deformation*. J Sound Vib 2007;305:563–81.
- [49] Emam SA, Nayfeh AH. *Postbuckling and free vibrations of composite beams*. Compos Struct 2009;88(4):636–42.
- [50] El Fatmi R, Ghazouani N. *Higher order composite beam theory built on Saint Venant's solution. Part-I: Theoretical developments*. Compos Struct 2011;93(2):557–66.
- [51] A. H. Nayfeh & D. T. Mook. *Nonlinear oscillations*. Willey Classics Library Edition Published. 1995.
- [52] M.Ganapathi, B.P. Patel, D.P. Makhecha. *Nonlinear dynamic analysis of thick composite/sandwich laminates using an accurate higher-order theory*. Composites: Part B 35 (2004)
- [53] R.K. Gupta, Jagadish Babu Gunda, G. Ranga Janardhan, G. Venkateswara Rao. *Post-buckling analysis of composite beams: Simple and accurate closed-form expressions*. Composite Structures 92 (2010).

- [54] Han, W., Petyt, M.; *Geometrically non linear vibration analysis of thin, rectangular plates using the hierarchical finite element method-I: The fundamental mode of isotropic plates*. Journal of Computers & Structures 63 (2), 309–318 (1997).
- [55] Jagadish Babu Gunda, R.K. Gupta, G. Ranga Janardhan, G. Venkateswara Rao. *Large amplitude vibration analysis of composite beams: Simple closed-form solutions*. Composite Structures. Volume 93, Issue 2 (2011) 870-879.
- [56] Li Jun, Hua Hongxing, Shen Rongying. *Dynamic finite element method for generally laminated composite beams*. International Journal of Mechanical Sciences 50 (2008) 466–480.
- [57] Li Jun, Hua Hongxing. *Dynamic stiffness analysis of laminated composite beams using trigonometric shear deformation theory*. Composite Structures 89 (2009) 433–442.
- [58] R. Ruotolo. *A spectral element for laminated composite beams: theory and application to pyroshock analysis*. Journal of Sound and Vibration 270 (2004) 149–169.
- [59] P. Malekzadeh, A.R. Vosoughi. *DQM large amplitude vibration of composite beams on nonlinear elastic foundations with restrained edges*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 14 (2009).
- [60] Moshe Eisenberger, Haim Abramovich et Oleg Shulepov. *Dynamic stiffness analysis of laminated beams using a first order shear deformation theory*. Composite Structures 31 (1995).
- [61] Haim Abramovich, Moshe Eisenberger, Oleg Shulepov. *Vibrations Of Multi-Span Non-Symmetric Composite beam*. Composites Engineering, (1995).
- [62] Samir A. Emam, Ali H. Nayfeh. *Postbuckling And Free Vibrations Of Composite Beams*. Composite Structures 88 (2009).
- [63] Han, W., Petyt, M.; *Geometrically non linear vibration analysis of thin, rectangular plates using the hierarchical finite element method II: 1st mode of laminated plates and higher modes of isoparametric and laminated plates*. Journal of Computers & Structures 63 (2), 309–318 (1997).
- [64] Houmat, A., *An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations*. Journal of Sound and Vibration 206 (2), 201–215 (2007).

- [65] M. Taazount, A. Zinai, A. Bouazzouni. *Large free vibration of thin plates: Hierarchic finite Element Method and asymptotic linearization*. European Journal of Mechanics A/Solids 28 (2009) 155–165.
- [66] M. Sathyamoorthy. *Influence of transverse shear and rotatory inertia on nonlinear vibrations of circular plates*. Computers & Structures. 60(4), 613-618, 1996.
- [67] M.K. Singha & R. Daripa. *Nonlinear vibration of symmetrically laminated composite skew plates by finite element method*. International Journal of Non-Linear Mechanics 42, 1144 – 1152, 2007.
- [68] P. RIBEIRO. *A Hierarchical Finite Element for Geometrically Non-linear Vibration of Thick Plates*. Meccanica **38**: 115–130, 2003.
- [69] C.-S. Chen & C.-Y. Hsu. *Imperfection sensitivity in the nonlinear vibration oscillations of initially stressed plates*. Applied Mathematics and Computation 190, 465–475, 2007.
- [70] Metin Aydogdu. *A New Shear Deformation Theory For Laminated Composite Plates*. Composite Structures 89 (2009) 94–101.
- [71] H.-X. Lu & J.-Y. Li. *Analysis of an initially stressed laminated plate based on elasticity theory*. Composite Structures 88, 271–279, 2009.
- [72] R. Lewandowski. *Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures. Part 1: Theoretical background*. Int. J. Solids Structures. 35(15), 1925-1947, 1997.
- [73] R. Lewandowski. *Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures. Part 2: Numerical strategy and examples*. Int. J. Solids Structures. 35(15), 1949-1964, 1997.
- [74] Geoffrey M. C and Alexander T. *A {3,2}-order bending theory for laminated composite and sandwich beams*. Composites Part B **29B** (1998) 565–576.
- [75] R. Lewandowski. *Nonlinear steady state vibrations of beams excited by vortex shedding*. Journal of sound and vibration. 252(4). 675-696, 2002.
- [76] P. Vidal, O. Polit. *A family of sinus finite elements for the analysis of rectangular laminated beams*. Composite Structures 84 (2008) 56–72.
- [77] L. Duigou. *Modélisation numérique de l'amortissement passif et actif des tôles sandwich comportant des couches viscoélastiques ou piézoélectriques*. thèse de doctorat de l'université de Metz, 2002.

- [78] E.M. Daya & M. Potier-Ferry. *A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures*. Computers and Structures. 79, 533-541, 2001.
- [79] M. Ganapathi, B. P. Patel, P. Boisse & O. Polit. *Flexural loss factor of sandwich and laminated composite beams using linear and non linear dynamic analysis*. Composites: Part B. 30, 245-256, 1999.
- [80] R.F. Kristensen a, K.L. Nielsen a, L.P. Mikkelsen. *Numerical studies of shear damped composite beams using a constrained damping layer*. Composite Structures 83 (2008) 304–311.
- [81] E. M. Daya, L. Azrar & M. Potier-Ferry. *An amplitude equation for the non-linear vibration of viscoelastically damped sandwich beams*. Journal of Sound and Vibration. 271(3), 789-813, 2003.
- [82] E. H. Boutyour, E. M. Daya & M. Potier-Ferry. *A harmonic balance method for the non-linear vibration of viscoelastic shell*. Comptes Rendus Mécanique. 33, 68–73, 2006.
- [83] P. Ribeiro & M. Petyt. *Non-linear vibration of beams with internal resonance by the hierarchical finite element method*. Journal of Sound and vibration. 224(4), 591-624, 1999.
- [84] P. Ribeiro & M. Petyt. *Nonlinear vibration of plates by the hierarchical finite element and continuation methods*. International Journal of Mechanical Sciences. 41, 437–459, 1999.
- [85] P. Ribeiro & M. Petyt. *Non-linear vibration of composite laminated plates by the hierarchical finite element method*. Composite Structures. 46, 197-208, 1999.
- [86] C.M.A. Vasques a,1, B.R. Mace b, P. Gardonio b, J. Dias Rodrigues. *Arbitrary active constrained layer damping treatments on beams: Finite element modelling and experimental validation*. Computers and Structures 84 (2006) 1384–1401.
- [87] P. Ribeiro. *Non-linear forced vibrations of thin/thick beams and plates by the finite element and shooting methods*. Computers & Structures. 82(17-19), 1413-1423, 2004.
- [88] P. Ribeiro. *Nonlinear vibrations of simply-supported plates by the p-version finite element method*. Finite Elements in Analysis and Design. 41, 911–924, 2005.

- [89] M. Amabili. *Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: theory and experiments*. Computers and Structures. 82, 2587-2605, 2004.
- [90] M. Amabili. *Theory and experiments for large-amplitude vibrations of rectangular plates with geometric imperfections*. Journal of Sound and Vibration. 291, 539–565, 2006.
- [91] M. Amabili. *Nonlinear vibrations of circular cylindrical panels*. Journal of Sound and Vibration. 281, 509–535, 2005.
- [92] C. Touzé & M. Amabili. *Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems: Application to reduced-order modeling of harmonically forced structures*. Journal of Sound and Vibration. 298, 958–981, 2006.
- [93] R.M. Rosenberg. *On nonlinear vibrations of systems with many degree of freedom*. Advanced Appl. Mech., (9) :155{242, 1966.
- [94] S. Bellizzi and R. Bouc. *A new formulation for the existence and calculation of nonlinear normal modes*. Journal of Sound and Vibration, 287(3) :545{569, 2005.
- [95] A. F. VAKAKIS. *Non-Linear Normal Modes (NNMS) And Their Applications In Vibration Theory: An Overview. Mechanical Systems and Signal Processing* (1999) 11(1), 3-22.
- [96] S. Bellizzi and R. Bouc. *A new formulation for the existence and calculation of nonlinear modes*. EUROMECH 457, pages 25{28, 2004.
- [97] YURI V. MIKHLIN. *Nonlinear Normal Vibration Modes And Their Applications* . DINCON'10, 9th Brazilian Conference On Dynamics, June 07-11, 2010.
- [98] S.W. Shaw and C. Pierre. *Normal modes de vibration for non-linear vibratory systems*. Journal of Sound and Vibration, 164(1) :85{124, 1993.
- [99] S.W. Shaw and C. Pierre. *Normal modes de vibration for non-linear continuous systems*. Journal of Sound and Vibration, 169(3) :319{347, 1994.
- [100] N. Boivin, C. Pierre, and S.W. Shaw. *Nonlinear Modal Analysis of Structural Systems featuring Internal Resonance*. Journal of Sound and Vibration, 182(2) :336{341, 1995.
- [101] E. Pesheck, C. Pierre, and S.W. Shaw. *Accurate reduced-order models for a simple rotor blade model using nonlinear normal modes*. Mathematical and Computer Modelling, 33 :1085{1097, 2001.

- [102] E. Pesheck and C. Pierre. *A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds*. Journal of Sound and Vibration, 249(5) :971{993, 2002.
- [103] D. Jiang, C. Pierre, and S.W. Shaw. *Large-amplitude nonlinear normal modes of piecewise linear systems*. Journal of Sound and Vibration, 217(3) :869{891, 2004.
- [104] D. Jiang, C. Pierre, and S.W. Shaw. *The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance*. International Journal of Nonlinear Mechanics, 40 :729{746, 2005.
- [105] D. Jiang, C. Pierre, and S.W. Shaw. *Non-linear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation*. Journal of Sound and Vibration, 288(4-5) :791{812, 2005.
- [106] P. Apiwattan Nalunggarn. *Model reduction of nonlinear structural systems using nonlinear normal modes and component mode synthesis* . PhD thesis, Michigan State University, 2003.
- [107] W. Szemplinska and Stupnicka. *The Behaviour of Nonlinear Vibrating Systems, Volume II : Advanced Concepts and Application to Multi-Degree-of-Freedom Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [108] R. Lewandowski. *Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures, part 1 : theoretical background*. International Journal of Solids and Structures, 34(15) :1925{1947, 1997.
- [109] R. Bouc and S. Bellizzi. *Une nouvelle approche pour l'existence et le calcul des modes non-lineaires*. Publications du LMA,, (156) :39{58, 2003.
- [110] M. Legrand, D. Jiang, C. Pierre, and S.W. Shaw. *Nonlinear normal modes of a rotating shaft based on the invariant manifold method*. International Journal of Rotating Machinery, 10(4) :319{335, 2004.
- [111] P. Sundararajan and S. T. Noah. *An algorithm for response and stability of large order nonlinear systems - Application to rotor systems*. Journal of Sound and Vibration, 214(4) :695{723, 1998.
- [112] Maxime PEETERS. *Theoretical and Experimental Modal Analysis of Nonlinear Vibrating Structures using Nonlinear Normal Modes*. PhD Thesis, University of Liege ,November 2010.

- [113] J. Lardies. *State-space identification of vibrating systems from multi-output measurements*. Mechanical Systems and Signal Processing, 12(4) :543{558, 1998.
- [114] J. Lardies. *Modal parameter estimation and model order selection of a randomly vibration system*. Mechanical Systems and Signal Processing, 12(6) :825{838, 1998.
- [115] K. Liu. *Modal parameter estimation using the state space method*. Journal of Sound and Vibration, 197(6) :387{402, 1998.
- [116] R. Carmona, W.-L. Hwang, and B. Torr_esani. *Practical Time-Frequency Analysis, Gabor and Wavelet Transforms with an Implementation in S*. Academic Press, 1998.
- [117] W.J. Staszewski. *Identification of non-linear systems using multiscale ridges and skeletons of the wavelet transform*. Journal of Sound and Vibration, 214(4) :639{658, 1998.
- [118] M. Ruzzene, A. Fasana, L. Garibaldi, and B. Piombo. *Natural frequencies and dampings identification using wavelet transform : application to real data*. Mechanical Systems and Signal Processing, 11(2) :207{218, 1997.
- [119] P. Argoul and Le T.-P. *Instantaneous indicators of structural behaviour based on the continuous cauchy wavelet analysis*. Mechanical Systems and Signal Processing, 17(1) :243{250, 2003.
- [120] T.-P. Le and P. Argoul. *Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response*. Journal of Sound and Vibration, 17(1) :243{250, 2003.
- [121] M. Boltezar and J. Slavic. *Enhancements to the continuous wavelet transform for damping identi_cations on short signal*. Mechanical Systems and Signal Processing, 18(5) :1065{1076, 2004.
- [122] J. Lardies, M.-N Ta, and M. Berthillier. *Modal parameter estimation based on the wavelet transform of output data*. Achive of Applied Mechanics, 73 :718{733, 2004.
- [123] W.J. Staszewski. *Identification of damping in MDOF systems using time-scale decomposition*. Journal of Sound and Vibration, 203(2) :283{305, 1997.
- [124] S. Erlicher and P. Argoul. *Modal identification of linear non-proportionally damped systems by wavelet transform*. Mechanical Systems and Signal Processing, in press, 2006.
- [125] S. Adhikari. *Optimal complex modes and an index of damping non-proportionality*. Mechanical Systems and Signal Processing, pages 1{27, 2004.

- [126] V. Lenaerts, G. Kerschen, and J.-C. Golinval. *Identification of a continuous structure with a geometrical non-linearity. Part II : Proper orthogonal decomposition*. Journal of Sound and Vibration, pages 907{919, 2003.
- [127] V. Lenaerts, G. Kerschen, and J.-C. Golinval. *Identification of a continuous structure with a geometrical non-linearity. Part I : Conditioned reverse path method*. Journal of Sound and Vibration, pages 889{906, 2003.
- [128] J. V. Ferreira. *Dynamic response analysis of structures with nonlinear components. PhD thesis, Imperial college of science, technology and medecine, University of London, May 1999.*
- [129] S. Bellizzi, P. Guilleman, and R. Kronland-Martinent. *Identification of coupled non-linear modes from free vibration using time-frequency representations*. Journal of Sound and Vibration, pages 191{213, 2001.
- [130] M.-N. Ta and J. Lardiés. *Identification of weak nonlinearities on damping and stiffness by the continuous wavelet transform*. Journal of Sound and Vibration, pages 16{37, 2006.
- [131] J. Lardiés and M.-N. Ta. *A wavelet-based approach for the identification of damping in non-linear oscillators*. International Journal of Mechanical Science, pages 1262{1281, 2005.
- [132] R. Lewandowski. *Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures, part 2 : numerical strategy and examples*. International Journal of Solids and Structures, 34(15) :1949{1964, 1997.
- [133] P. Ribeiro. *Non-linear forced vibrations of thin/thick beams and plates by the finite element and shooting methods*. Computers and Structures, 82 :1413{1423, 2004.
- [134] C. Touzé, O. Thomas, and A. Huberdeau. *Asymptotique non-linear normal modes for largeamplitude vibrations of continuous structures*. Computers and Structures, 82 :2671{2682, 2004.
- [135] L. Azrar, E. H. Boutyour, and M. Potier-Ferry. *Non-linear forced vibrations of plates by an asymptotique-numerical method*. Journal of Sound and Vibration, 252(4) :657{674, 2002.
- [136] Noboru KIKUCHI. "Adaptive grid-design methods for finite element analysis". Computer methods in applied mechanics and engineering 55 : 129-160 (1986).

- [137] Frédéric HESCHUNG. "*Vers une construction et une adaptation automatiques des maillages*". Thèse de doctorat, Université De Reims Champagne Ardenne (2005).
- [138] A. Düster, E. Rank. "*The p-version of the finite element method compared to an adaptive h-version for the deformation theory of plasticity*". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 : 1925-1935 (2001).
- [139] Stefan M. HOLZER, Zohar YOSIBASH. "*The p-version of the finite element method in incremental elasto-plastic analysis*". *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 39, 1859-1878 (1996).
- [140] SZABO B.A. & BABUSKA I. "*Finite element analysis*". John Wiley & Sons, (1991).
- [141] F.Y.M. WAN and H.J. WEINITSCHKE. "*On shells of revolution with the Love-Kirchhoff hypotheses*". *Journal of Engineering Mathematics* 22: 285-334 (1988).
- [142] Xiao-ting He, Qiang Chen, Jun-yi Sun, Zhou-lian Zheng and Shan-lin Chen. "*Application of Kirchhoff hypotheses to bending thin plates with different moduli in tension and compression*". 5: 755–769 (2010).
- [143] Mindlin R.D. "*Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates*". *Jou.App.Mech.*, Vol 18, 31-38 (1951).
- [144] Theofanis S. Plagianakos, Dimitris A. Saravanos "*Higher-order layerwise laminate theory for the prediction of interlaminar shear stresses in thick composite and sandwich composite plates*". *Composite Structures* 87 23–35(2009).
- [145] Whitney J.M. "*the effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates*". *J.Comp.Mat.* Vol.3, p.534-547, 1969.
- [146] P.G. van Bladel "*A suitable transverse shear stiffness definition for buckling of laminates and sandwich plates*" Faculty of Aerospace Engineering, Delft University of Technology (1989).
- [147] By X. Frank Xu, Pizhong Qiao, and Julio F. Davalos. "*Transverse shear stiffness of composite honeycomb core with general configuration*". *Journal of Engineering Mechanics*, 127 : 1144–1151 (November 2001).
- [148] Berthelot J-M, "*Matériaux composites, comportement mécanique et analyses des structures*"., 2ème Edition, Masson, Paris, 1996, ISBN: 2-225-85425-4.
- [149] Ferdinando Auricchio and Elio Sacco. "*A mixed-enhanced finite-element for the analysis of laminated composite plates*". *Meth.Engng.* 44, 1481-1504 (1999).

- [150] Vijay Kumar Goyal. "*Dynamic Stability of Uncertain Laminated Beams Subjected to subtangential Loads*". Blacksburg, VA 24061-0203,
- [151] Madabhushi p. and J.F.Davalos. "*Static shear correction factor for laminate rectangular beams*". Composites : part B 27B, pp 285-293, 1996.
- [152] Song Cen, Yuqiu Long, Zhenhan Yao. "*A new hybrid enhanced displacement based element for the analysis of laminated composite plate*". Computer and Structures 80, (2002) 819-833.
- [153] Batoz J.L, Dhatt G . "*Modélisation des structures par éléments finis*". Volume 2, Poutres et Plaques.
- [154] Tanov Romil, Tabiei Ala. "*A simple correction to the first –order shear deformation shell finite element formulation*". Finite Element in analysis and design 35, (2000) 189-197.
- [155] Prever T, Seibi A.C, AL-Jahwari F.K.S. "*Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory*". J.Composite Structures 71, (2005) 414-422.
- [156] Desai Y.M., Ramtekkar G .S. Shah A.H. "*Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model*". J.Composite Structures 59, (2003) 237-249.
- [157] Ambartsumyan S.A. "*Theory of anisotropic plate*". Technomic Publishing Co, 1969.124.
- [158] Reissner. "*The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*". J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69/77, 1945.
- [159] Panc V. "*Theories of elastic plates*". Noordho, Leyden, Netherlands, 1975.
- [160] Murthy M. "*An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate*". Rapport Technique, NASA, 1981.
- [161] Reddy J.N. "*A simple higher-order theory for laminated composite plates*". Journal of Applied Mechanics, vol. 51, pages 745-752, 1984.
- [162] K. M. LIEW. "*Solving The Vibration Of Thick Symmetric Laminates By Reissner/Mindlin Plate Theory And The P-Ritz Method*". Journal of Sound and Vibration (1996) 198(3), 343-360.
- [163] Franck Pérignon. "*Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires*". Thèse à Université De La Méditerranée (Aix-Marseille II).

- [164] Clément Boulonne. *Algèbre matricielle numérique*. Notes de cours, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [165] J.H. Wilkinson et C. Reinsch. *Handbook for Automatic Computation*, Volume II, Linear Algebra. Springer-Verlag, New York (1971).
- [166] N. Bogolioubov et I. Mitropolski. *Les Méthodes Asymptotiques en Théorie des Oscillations non Linéaires*. Paris Gauthier-Villars et C^{ie}, Editeur-imprimeur-libraire. Paris 1962.
- [167] A. Lienard. *Etude des oscillations entretenues*. Revue générale de l'Electricité, 23, 901-912 et 946-954 (1928).
- [168] S.N. Butchbarov, M. Ouali et L. Kountchev. *Méthode Asymptotique Dans Un Problème De Vibrations Non Linéaires D'une Machine Avec Transmission Par Cardan*. Livre 2, Sofia, 1986.
- [169] Mohand Slimani, Mustapha Taazount, Amar Bouazzouni. *Perturbed solution of free non-linear vibrations of composite beams*. Composite Structures 94 (2012) 1805–1813.