MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU.

FACULTE: DES SCIENCES

DEPARTEMENT : MATHEMATIQUES

Memoire de Master

FILIERE : MATHEMATIQUES

SPECIALITE : Modélisation Mathématique

Présentée par:
BOUZNAD Leila

Thème

Une formule asymptotique pour la quantité des nombres de Gauss

Devant le jury d'examen composé de:

MOURSLI Mohammed	Professeur	UMMTO	Président
HOCINI Alaoua	MCB	UMMTO	Encadreur
KHELLAS Fazia	Professeur	UMMTO	Examinatrice
MELLAH Omar	MCB	UMMTO	Examinateur

2015 / 2016

Table des matières

Introduction générale

Le but de ce mémoire est d'établir une formule asymptotique pour la quantité des nombres de Gauss. Il s'agit d'utiliser des utiles d'analyse complexe (fonctions holomorphes, théorème de Cauchy, théorème de Résidu ...), et d'arithmétique (la fonction zêta de Riemann, caractère modulo 4, les nombres de Gauss, ...).
Les nombres premiers sont les nombres entiers strictement surérieur à qui ne sont divisibles que par lui-même et par 1.
Le théorème des nombres premiers c'est-à-dire, le fait que $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ $(x \to \infty)$ où $\pi(x) = \sum_{n \leq x} 1$, à été conjecturé dans la marge d'une table de logarithmes par Gauss en 1792 ou 1793, puit démontré indépendament par Hadamard $(1865 - 1963)$ et La Vallée Poussin $(1866 - 1962)$ en 1896 à l'aide de méthode d'analyse complexe et en particulier la fonction zêta de Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

L'outil essentiel de la démostration d'Hadamard est la fonction ζ. Riemann $(1826-1866)$ a montré que la série définie sur le domaine $s = \sigma + it$ pour $\sigma > 1$ et qu'il était possible de prolonger cette fonction sur tout le plan $\mathbb{C}$, à l'exception d'un pôle simple en $s = 1$.
La formule d'Euler $(1707 - 1783)$ relie cette somme infinie à un produit infini

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \frac{1}{p})^{-1}$$

appelé "produit eulérien". La fonction ζ est trés importante en arithmétique puisqu'elle intervient dans la formule d'Euler, elle fait donc un lien entre les entiers naturels et les nombres premiers. C'est aussi les séries de Dirichlet on introduites par Dirichlet en 1937, la plus simple puisqu'elle est associée à la fonction constante 1.

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

A cause de la relation entre la fonction ζ et la fonction π, l'hypothèse de Riemann (1858) a une importance considèrable en théorie des nombres. L'ingrédient fondamamental est la non existence des zéros de la fonction ζ sur la droit $Re(s) = 1$, où la convergence du produit eulérien cesse, ce qui ne permet pas de conclure quoi que soit de la non annulation de chacun de ces facteurs. De fait, le théorème des nombres premiers est équivalent à la non annulation de la fonction ζ sur la droit $Re(s) = 1$.
En 1801, Carle Friedrich Gauss développe des arithmétique sur d'autres anneaux que celui des entiers relatifs. Elle rend opérationnel le théorème de décomposition en facteurs premiers. Un entier de Gauss est un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont entières. Une notion utile pour l'analyse des entiers de Gauss est définie comme le produit d'un nombres par son conjugué. C'est donc la somme de deux carrés de sa partie réelles et imaginaires, elle est à valeur dans l'ensemble des entiers positifs.
Un des outils privilégies dans ce contèxte est la formule de Perron, pour un t finie

$$B(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - it}^{\sigma + it} \frac{f(s)}{s} x^s ds, \tag{1}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$.
La méthode classique d'éstimation du second membre de 1 consiste à prolonger f analytiquement et à déformer le contour d'intégration de façons à mettre en évidence une contribution essentielle à l'intégrale provenant de la (ou des) singularité(s) de f de plus grande partie réelle lorsque par exemple, f est prolongeable en une fonction holomorphe, on fait appel au théorème des résidus.

Le mémoire est organisé comme suit:

Dans le premier chapitre, on a rappelé quelque définition et formule de base de l'analyse complexe,.

Le second cahpitre, on s'interèsse à la fonction zêta de Riemann et le prolongement analytique de la fonction zêta de Riemann et le caractère modulo 4, ainsi le lien entre ses fonctions et les nombres premiers (produit eulerien).

Le troisième chapitre, est consacré à établir la formule asymptotique pour la quantité des nombres de Gauss inférieurs ou égaux à x, pour x assez grand.

Chapitre 1

Le plan complexe et holomorphie

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous supposons connus les maniement algébriques des nombres complexes considèrés comme des expressions de type $x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$, avec i est un symbole tel que $i^2 = -1$. Nous donnons néamoins une définition formmelle qui identifie $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$. Ainsi, la notion de continuité et les fonctions holomorphes , qui sont des fonctions dérivables au sens complexe, que nous allons exprimer ici en disant que les finctions analytiques sont holomorphes Nous définissons les résidus démontrons le théorème qui porte leur nom et en donnons quelque applications au calcul d'intégrales.

1.2 Rappel sur les nombres complexes $\mathbb{C}$

- soit $z \in \mathbb{C}$, alors il existe un unique point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$, avec $x = Re(z)$, $y = Im(z)$.
  x s'apelle la partie reelle de z et y la partie imaginaire de z.
- L'élément $\overline{z} = x - iy$ s'appelle le conjugué complexe de z.
- On définit le module de z comme: $\mid z \mid= (z\overline{z})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
- On définit une distance sur le plan complexe par: $\forall (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$, $d(z_1,z_2) =\mid z_1 - z_2 \mid$.
- On appelle disque ouvert de centre z_0 et de rayon $r > 0$, l'ensemble

$$\mathbf{D}(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C}, \mid z - z_0 \mid< r\}.$$

- On appelle voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ un sous-ensemble $U \subset \mathbb{C}$ contenant un disque ouvert de centre z_0.

– Le complémentaire d'un ouvert est dit ferme, on definit le disque ferme de centre z_0 et de rayon $r > 0$ par: $\mathbf{D}(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C}, \mid z - z_0 \mid \leq r\}$.
– On peut aussi représenter z en coordonnées polaires en posant $z = re^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r = \mid z \mid$, et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

1.3 Fonctions à variables complexes

Définition 1.1. On appelle fonction complexe à une variable complexe, une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto f(z)$$

Exemple 1.1. $f(z) = z^2 + z$.

Remarque 1.1. Posons $z = x + iy$ et $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ où $Re(f(z)) = P(x,y)$ et $Im(f(z)) = Q(x,y)$ on est ramené à une application φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et ceci en posant

$$\varphi(x,y) = (P(x,y),Q(x,y)).$$

1.3.1 Limite d'une fonction complexe

Soit f une fonction complexe à une variable complexe, on dit que f admet une limite l en $z_0 = x_0 + y_0$ si et seulement si $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tel que $\mid z - z_0 \mid < \eta \Rightarrow \mid f(z) - f(z_0) \mid < \epsilon$, on note $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$.
Comme dans les cas de variables réelles on peut prouver que cette limite est unique.

Propriété 1.1. Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_1$ et $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = w_2$, alors

1. $\lim\limits_{z \to z_0} (f + g)(z) = w_1 + w_2$
2. $\lim\limits_{z \to z_0} (fg)(z) = w_1 w_2$
3. $\lim\limits_{z \to z_0} \lambda f(z) = \lambda w_1$, $\lambda = constante$
4. $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f}{g}(z) = \dfrac{w_1}{w_2}$, si $g \neq 0$ et $w_2 \neq 0$

1.3.2 Derivabilité

La dérivabilité par rapport à une variable complexe est formellement identique à la dérivation par rapport à une variable réel.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f dérivable en $z_0 \in \Omega$ si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h+z_0)-f(z_0)}{h}$ existe, et on note cette limite $f'(z_0)$ qu'on appelle dérivée de f au point z_0.
On peut aussi écrire

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Exemple 1.2. *Considèrons la fonction f définie et continue sur $\mathbb{C}$ telle que*

$$f(z) = z^2$$

$z_0 \in \Omega$ *si*

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(h+z_0)-f(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(z_0+h)^2 - z_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{z_0^2 + 2z_0h + h^2 - z_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2z_0h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2z_0 + h \\
&= 2z_0.
\end{aligned}$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{C}$ et $f'(z_0) = 2z_0$.

Propriétés élémentaires

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, f, $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivables on a:

1. $(\lambda f)'(z) = \lambda f'(z)$
2. $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
3. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$
4. $(\frac{f}{g})'(z) = \frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g^2}$, $g \neq 0$.
5. $(f \circ g)' = (f' \circ g)(g')$.

1.3.3 Continuité

Les propriétés des fonctions continues de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ sont analogues à celles des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On dit que f est continue au point z_0 dans un domaine $\mathbf{D} \subset \mathbb{C}$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que

$$| z - z_0 |< \delta \Rightarrow | f(z) - f(z_0) |< \epsilon.$$

Où tout simplement f est continue en z_0 si et seulement si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Propriété 1.2. Si les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ sont continues au point z_0, alors les fonction suivantes sont continues:

1. $f + g$
2. fg
3. λf, $\lambda = constante$
4. $\frac{f}{g}$, $g \neq 0$ en z_0
5. Tout polynomes
6. Toute fonction rationnelle avec un dénomirateur $\neq 0$ en z_0

1.3.4 Condition de Cauchy-Riemann

Proposition. *Soit $f(x + iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ une fonction définie et continue sur un voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$.*
Si f est dérivable en z_0, alors P et Q admettent des dérivées partielles premiers par rapport à chacune de leurs variable et on a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad et \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

1.4 Fonctions analytiques

Définition 1.2. On dit qu'une fonction définie sur un ouvert $\mathbf{U}$ de $\mathbb{C}$ est analytique dans $\mathbb{C}$ si est développable en série entière en tout point de $\mathbf{U}$.

Exemple 1.3. *$f(z) = \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ car pour $z_0 \neq 0$, $Z = z - z_0$ on a pour $| \frac{Z}{z_0} |< 1$*

$$f(z) = \frac{1}{Z + z_0} = \frac{1}{z_0(\frac{Z}{z_0} + 1)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}}(z - z_0)^n$$

avec un rayon de convergence $\rho = \mid z \mid$.

Remarque 1.2. Si f est analytique sur $\mathbf{U}$, sa dérivée f' est aussi analytique sur $\mathbf{U}$.
En effet, à l'intérieur de $\mathbf{D}$ on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

alors également à l'intérieur de $\mathbf{D}$ on a:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Définition 1.3. (Connexité)

- On dit qu'un ouvert $\mathbf{U} \subset \mathbb{C}$ connexe si deux points quelconque de $\mathbf{U}$ peuvent être joints par un chemin dans $\mathbf{U}$.
- On dit usuellement qu'une partie $\mathbf{U}$ de $\mathbb{C}$ est connexe s'il n'est pas possible de l'écrire comme réunion disjoint de deux ouverts non vides de $\mathbb{C}$.

1.4.1 Les zéros d'une fonction analytique

Définition 1.4. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, et si f est une fonction analytique définie sur un voisinage de z_0.

- On dit que z_0 est un zéro de f si et seulement si $f(z_0) = 0$.
- On dit que z_0 est un zéro simple de f si $f(z_0) = 0$ et si $f^0(z_0) \neq 0$.
  Sinon on dit que z_0 est un zéro multiple.
- Si f n'est pas identiquement nulle au voisinage de z_0, alors il existe un plus petit entier k tel que

$$f^{(k)}(z) \neq 0,$$

  l'entier k est appelé l'ordre de multiplicite de z_0.

Théorème 1.1. ***(Principe des zéros isolés)*** *Soit* $\mathbf{D}$ *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$, *et* $f : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction analytique sur* $\mathbf{D}$.
Si f *n'est pas identiquement nulle sur* $\mathbf{D}$ *les zéros de* f *sont isolés.*

Preuve. *En utilisant la formule de Taylor:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$$

Or, $f^{(n)}(z_0) = 0_k, \forall\, n = 0,1,\ldots,(k-1)$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = (z-z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-k}$$

$$f(z) = (z-z_0)^k g(z)$$

ou

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-k} \neq 0$$

avec $\frac{f^{(k)}(z_0)}{n!} \neq 0$
g *est continue.*
Donc il existe un voisinage de z_0 *sur lequel* $g \neq 0$ *sur* $\mathbf{U}$, *on a:*

$$f(z) = (z-z_0)^k g(z) \neq 0 \;\forall\, z \neq z_0.$$

D'ou z_0 *est isolé (*z_0 *est le seul zéro de* f *sur* $\mathbf{U}$*).*

Théorème 1.2. *Soit* $\mathbf{D}$ *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbf{D}$ *et* f, g *deux fonctions analytiques définies sur* $\mathbf{D}$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = g^{(n)}$.
2. f *et* g *coïncident sur un voisinage de* z_0.
3. f *et* g *coïncident sur* $\mathbf{D}$.

1.4.2 Prolongement analytique

Proposition. *Soit* $\mathcal{U}$ *un domaine de* $\mathbb{C}$, f *et* g *deux fonctions analytiques sur* $\mathcal{U}$, *si* f *et* g *coïncident sur une partie* $\mathbf{\Omega} \subset \mathbb{C}$ *et Si* $\mathbf{\Omega}$ *admet un point d'accumulation dans* $\mathcal{U}$, *alors* $f = g$ *dans* $\mathcal{U}$.
En particulier si f *et* g *coïncident au voisinage d'un point* $z_0 \in \mathcal{U}$ *alors* $f = g$ *sur* $\mathcal{U}$. *Si un tel prolongement existe, il est unique.*

1.5 Fonctions holomorphes

Définition 1.5. Soit $\mathbf{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbf{U}$, $f : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction,

- On dit que f est holomorphe au point z_0, si f est dérivable au point z_0.
- On dit que f est holomorphe sur $\mathbf{U}$ si elle est dérivable en tout point de $\mathbf{U}$.

Exemple 1.4. *La fonction $f : z \longmapsto z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.*
En effet, soit $z_0 \in \mathbb{C}$, on a

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = 2z_0.$$

1.5.1 Intégration des fonctions holomorphes

Définition 1.6. (Simplement connexe)
Un ouvert $\mathbf{U}$ est dit simplement connexe si son bord est un ensemble connexe.
Autrement dit, s'il est connexe et qu'il n'a pas de trous.

Théorème de Cauchy

Soient un domaine $\mathbf{\Omega} \subset \mathbb{C}$ simplement connexe, f analytique sur $\mathbf{\Omega}$ et γ un contour quelconque contenu dans $\mathbf{U} \subset \mathbb{C}$.
Alors,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Formule intégrale de Cauchy

Proposition. *Soit f holomorphe sur un domaine $\mathbf{\Omega} \subset \mathbb{C}$ simplement connexe et $z \in \mathbf{\Omega}$, alors on a pour tout contour γ de $\mathbf{\Omega}$ orionté positivement et entoutant z*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z')}{z' - z} dz'.$$

Preuve. *f est holomorphe, donc continue sur $\mathbf{\Omega}$ on a alors,*

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } \mid z' - z \mid \leq \delta \Rightarrow \mid f(z') - f(z) \mid \leq \epsilon$$

Considèrons le cercle γ' de centre z et de rayon δ

$$\forall\, z' \in \gamma' \quad \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| \leq \frac{\epsilon}{\delta}.$$

On a alors,

$$\left| \int \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} dz' \right| < 2\pi\delta \frac{\epsilon}{\delta} = 2\pi\epsilon.$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on trouve:

$$\int_{\gamma'} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \int_{\gamma'} \frac{f(z)}{z' - z} dz' = f(z) \int_{\gamma'} \frac{1}{z' - z} dz' = f(z) 2\pi i;$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(z')}{z' - z} dz'.$$

1.5.2 Série de Taylor d'une fonction holomorphe

Proposition. *Soit f holomorphe sur le disque ouvert $\mathbf{D}(z_0,r)$ avec $r > 0$, $\forall\ z \in \mathbf{D}(z_0,r)$ on a:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

avec

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z)^{n+1}} dz'.$$

γ est un contour dans $\mathbf{D}(z_0,r)$ orionté positivement entourant z_0.
Ce développement qui est unique est appelé développement de Taylor de f autour de z_0.

Proposition. *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine $\mathbf{\Omega}$, soit $z_0 \in \mathbf{\Omega}$, pour tout z' appartenant au plus grand disque de centre z_0 contenu dans $\mathbf{\Omega}$.*
La série de Taylor:

$$f(z') = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z' - z_0)^n$$

est convergente et pour somme $f(z')$.

Remarque 1.3. On vient de montrer que toute fonction holomorphe dans un domaine Ω est analytique sur ce domaine, comme on a déja vu que toute fonction analytique est holomorphe on a danc équivalence entre les fonctions analytique et les fonctions holomorphes.

1.5.3 Série de Laurent et résidu

Définition 1.7. On définit la couronne ouvert de centre z_0 et de rayon R_1, R_2 par:

$$\mathrm{C}(z_0,R_1,R_2) = \{z \in \mathbb{C},\, 0 \leq R_1 <\mid z - z_0 \mid< R_2\}.$$

Si $R_1 = 0$, on note $\mathrm{C}(z_0,0,R_2) = \mathbf{D}(z_0,R_2)$ qu'on apelle disque points.

Proposition. *Soit f holomorphe (analytique) sur $\mathrm{C}(z,R_1,R_2)$ alors, $\forall\, z \in \mathrm{C}(z_0,R_1,R_2)$ on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

avec

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z' - z)^{n+1}} dz',\, \forall n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$
$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z')dz',$$

γ est un contour quelconque orionté positivement inclus dans la couronne et entourant z_0.

Définition 1.8. Soit z un point au voisinage de quel f n'est pas analytique, on dit que z_0 est un point singulier de f.

- Soit z_0 un point singulier de f s'il existe un disque ouvert pointé de centre z_0 et de rayon $r > 0$, dont laquel f est analytique alors, on dit que z_0 est un point singulier isolé.

Exemple 1.5. *1. $f : z \longmapsto \frac{1}{z-2}$, le point 2 est un point singulier isolé.*

2. $f : z \longmapsto \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$ est un point singulier non isolé.

Dans une suite, on suppose les points sont isolés, f admet un point singulier z_0 et que l'on considère la série de Laurent associée autour z de z_0 on les notent $b_1 = C_{-1}$, $a_n = C_n$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Définition 1.9. 1. Si toutes les b_n sont nulles, la fonction analytique dans $\mathbf{D}(z_0,r)$ et on dit que z est un singularité apparente.

2. Si les (b_n) sont tous nulles i.e. s'il existe un b_n non nul tel que $b_n = 0$ pour tous $n > m$, alors z_0 est un pôle d'ordre m et

$$f(z) = \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \frac{b_{n-1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0}$$

– Si $n = 1$, on dit qu'on a un pôle simple.

– S'il existe une infinite de b_n non nulles les singularités sont dites essentielles.

Définition 1.10. Soit z_0 un point singulier isolé du f.
Soit $\mathbf{D}(z_0,r)$ un disque point ne contait pas des singuliers de f $\forall\, z \in \mathbf{D}(z_0,r)$,

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_1}{(z-z_0)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^m.$$

Les coefficients b_1 est appelée résidus de f en z_0 et notée par $Res(f,z_0)$ on a donc

$$Res(f,z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int f(z)dz.$$

contenu oriont positivement inclus dans $\mathbf{D}(z,r)$ et entourant z_0.

Exemple 1.6.

$$f(z) = \frac{z+i}{(z-1)(z+1)};$$

f est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{1,-1\}$.
Les singularités de f sont: $z_0 = 1$, $z_1 = -1$ ce sont des pôles simples.

– *Développoment de Laurent au voisinage de $z_0 = 1$*

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\frac{z+i}{z+1} = \frac{1}{z-1}g(z);$$

avec $g(z) = \frac{z+i}{z+1}$, g est holomorphe au voisinage de z_0.
On peut écrire son développement de Taylor:

$$g(z) = g(1) + \frac{g'(1)}{1!}(z-1) + \frac{g''(1)}{2!}(z-1)^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$$

$$g(1) = \frac{1+i}{2}$$

$$g'(z) = \frac{z+1-(z+i)}{(z+1)^2} = \frac{1-i}{(z+1)^2}$$

$$\Rightarrow g'(1) = \frac{1-i}{4} = \frac{-2(1-i)}{2^2}$$

$$g''(z) = \frac{-2(z+1)(1-i)}{(z+1)^4} = \frac{-2(1-i)}{(z+1)^3}$$

$$\Rightarrow g''(1) = \frac{-2(1-i)}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$g^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n+1} n!(1-i)}{(z+1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow g^{(n)}(1) = \frac{(-1)^{n+1} n!(1-i)}{2^{n+1}}$$

Donc

$$g(z) = \frac{1+i}{2} + \frac{1-i}{2^2}(z-1) - \frac{2(1-i)}{2^3}(z-1)^2 + \dots + \frac{(-1)^{n+1} n!(1-i)}{(z+1)^{n+1}}(z-1)^n + \dots$$

D'où,

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\left[\frac{1+i}{2} + \frac{1-i}{2^2}(z-1) - \frac{2(1-i)}{2^3}(z-1)^2 + \dots + \frac{(-1)^{n+1} n!(1-i)}{(z+1)^{n+1}}(z-1)^n + \dots\right]$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\frac{1+i}{2} + \frac{1-i}{4} + \frac{2(1-i)}{8}(z-1) + \dots + \frac{(-1)^{n+1} n!(1-i)}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}$$

Donc,

$$b_1 = Res(f,1) = \frac{1+i}{2}.$$

Remarque 1.4. Si z est une singularité apparante de f, alors $Res(f,z_0) = 0$

1.5.4 Calcul pratique des résidus

Si z_0 est un pôle simple $f(z) = \frac{1}{z-z_0} g(z)$
où $g(z) = a_0 + a_1(z-z_0)$ est une fonction analytique au voisinage de z_0
on a donc $\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = b_1$.
D'où,

$$Res(f,z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z).$$

Exemple 1.7. *On prend l'exemple précédent* $f(z) = \frac{1+i}{(z+1)(z-1)}$
On calcul le résidu au voisinage de $z_0 = 1$

$$Res(f,1) = \lim_{z \to 1} (z-1) f(z) = Res(f,1) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{1+i}{(z+1)(z-1)} = \lim_{z \to 1} \frac{1+i}{(z+1)} = \frac{1+i}{2}$$

Théorème des résidus

Soit $\mathbf{\Omega}$ un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit $z_1,z_2,\ldots,z_n$ un nombre fini des points de $\mathbf{\Omega}$ isolés et distincts.
Soit de plus f analytique dans $\mathbf{\Omega}\backslash\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$
Prend γ un contour contenu dans $\mathbf{\Omega}$ et entourant les $z_i, i = \{1,2,\ldots,n\}$ sont les rencontrer et orionté positivement alors,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f,z_k).$$

1.5.5 Application des résidus au calcul d'intégrale

Le théorème des résidus a de nombreuses applications au calcul d'intégrale. Le plus simple est de donner quelques famille d'exemples.

Exemple 1.8. *Calculer* $\int_\gamma \frac{1}{z^2+6iz}dz$
où γ *est le cercle de centre* 0 *et de rayon* 1

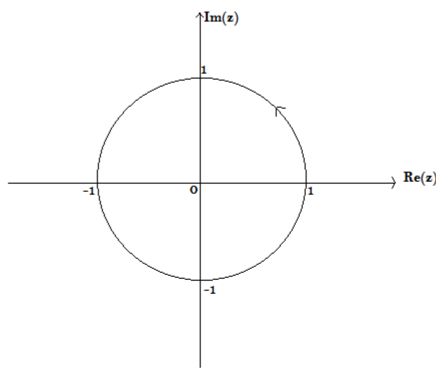

FIG. 1.1 – *Le contour* γ *de centre* 0 *et de rayon* 1.

Les singularités de $f(z) = \frac{1}{z(z+6i)}$ *sont:* $z_0 = 0$ *et* $z_1 = -6i$
Les singularites 0 *et* $-6i$ *sont des pôles simples, à l'intérieur de* γ *il n'y a que le pôle* $z_0 = 0$.

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f,0)$$

$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0}(z-0)f(z) = \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(z+6i)} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{z+6i} = \frac{1}{6i}.$$

Finalement, $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+6iz}dz = 2i\pi\frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}.$

Exemple 1.9. *Calcule de* $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, *Considerons pour cela la fonction* $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ *sur* $\mathbb{C} - \{-i,i\}$.
Soit $\gamma(R) = \gamma_1(z) + \gamma_2(R)$ *avec*

$$\gamma_1(R) : t \longmapsto (2t-1)R;$$

$$\gamma_2(R) : t \longmapsto R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t},\ t \in [0,1], R > 0.$$

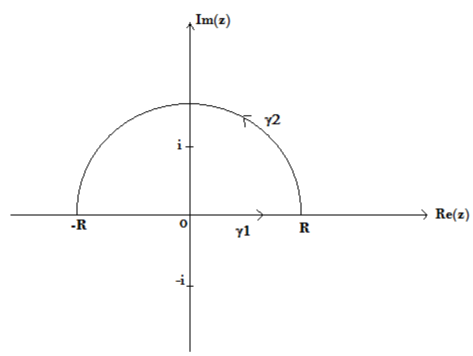

FIG. 1.2 – *L'intégrale de I sur γ_1 et γ_2.*

Les singularites de f sont $z_0 = -i$ et $z_1 = i$, ce sont des poles simples.
A l'intérieur de γ il n'y a que le pôle $z_1 = i$.
Donc $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi Res(f,i)$,

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = 2i\pi\frac{1}{2i} = \pi.$$

Mais on a: $\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}dz = \int_{-R}^{R}\frac{1}{1+x^2}dx + \int_{\gamma_2}\frac{1}{1+z^2}dz$
On montre que $\int_{\gamma_2}\frac{1}{1+z^2}dz \longrightarrow_{R\to\infty} 0$
On a: $\mid 1+z^2 \mid \geq R^2-1$

$$\mid \int_{\gamma_2}\frac{dz}{1+z^2} \mid \leq \int_{\gamma_2}\frac{dz}{\mid 1+z^2 \mid} \leq \int_{\gamma_2}\frac{1}{R^2-1}dz = \frac{1}{R^2-1}\int_{\gamma_2}dz = \frac{\pi R}{R^2-1}$$

Donc $\lim_{R\to 0}\int_{\gamma_2}\frac{dz}{1+z^2} \mid \leq \lim_{R\to 0}\frac{\pi R}{R^2-1} \longrightarrow 0$
d'ou $\int_{\gamma_2}\frac{1}{1+z^2}dz = 0.$
Finalement,

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}dz = \int_{-R}^{R}\frac{1}{1+x^2}dx = \pi.$$

Chapitre 2

Fonction ζ et le caractère modulo 4

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons costruire les fonctions ζ et χ_4 définis sur le demi-plan $Re(s) > 1$, qui seront prolongés par la suite au demi-plan $Re(s) > 0$.

2.2 La fonction zêta de Riemann

D'aprés le critère de weierstrass, la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ à variable dans $\mathbb{C}$ converge uniformement sur le demi-plan $Re(s) > 1$ vers une fonction qu'on note ζ.
En effet, Soit $\sigma_0 > 1$ un réel strictement supérieur à 1 alors la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}}$, donc le terme général est positif et convergente, et on a pour tout $s = \sigma + it$, avec

$$\sigma \geq \sigma_0, \ \mid \frac{1}{n^s} \mid \leq \frac{1}{n^{\sigma_0}}.$$

Le terme général de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ étant une fonction holomorphe.
Donc la fonction ζ, vers laquelle la dite série converge uniformement, est aussi holomorphe sur le demi-plan $Re(s) > 1$.

Définition 2.1. La fonction ζ construite ci-dessous s'appelle fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}; \ Re(s) = \sigma > 1. \tag{2.1}$$

2.2.1 Prolongement analytique de ζ au demi-plan $Re(s) > 0$

Lemme 2.1. ***(Formule d'Abel)*** *Soit (a_n) une suite de nombres complexes, pour $x > 1$ on pose $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$.*

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeure dans $\mathbb{C}$, dérivable sur $]0, +\infty[$. On a alors la formule suivante:

$$\sum_{n \leq x} a_n g(n) = A(x)g(x) - \int_1^x A(t)g'(t)dt.$$

Preuve. *On a $A(0) = 0$ et $a_n = A(n) - A(n-1)$*

Pour tout réel x on pose $B(x) = \sum_{n \leq x} a_n g(n)$

Donc si x=N on a

$$\begin{aligned}
B(N) &= \sum_{n=1}^{N} a_n g(n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (A(n) - A(n-1)g(n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} A(n)g(n) - \sum_{n=1}^{N} A(n-1)g(n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} A(n)g(n) - \sum_{n=0}^{N-1} A(n)g(n+1) \\
&= A(N)g(N) + \sum_{n=1}^{N-1} A(n)g(n) - \sum_{n=1}^{N-1} A(n)g(n+1) \\
&= A(N)g(N) - \sum_{n=1}^{N-1} A(n)(g(n+1) - g(n)) \\
&= A(N)g(N) - \sum_{n=1}^{N-1} A(n) \int_n^{n+1} g'(t)dt \\
&= A(N)g(N) - \int_1^N A(t)g'(t)dt
\end{aligned}$$

$$\forall\ t \in [n,n+1[\quad A(t) = A(n).$$

Soit maintenant x un réel, on pose alors $N = [x]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x soit le plus grand entier inférieur ou egal à x.

Il est clair que $A(x) = A(N)$ et $B(x) = B(N)$ donc,

$$\begin{aligned} B(x) = B(N) &= A(N)g(N) - \int_1^N A(t)g'(t)dt \\ &= A(N)g(N) - \left(\int_1^x A(t)g'(t)dt - \int_N^x A(t)g'(t)dt\right) \\ &= A(N)g(N) - \int_1^x A(t)g'(t)dt + \int_N^x A(t)g'(t)dt. \end{aligned}$$

On a $A(t) = A(N)$ pour tout t de l'intervalle $[N,x]$ donc,

$$\begin{aligned} \int_N^x A(t)g'(t)dt &= \int_N^x A(N)g'(t)dt \\ &= A(N)\int_N^x g'(t)dt \\ &= A(N)\Big(g(x) - g(N)\Big) \\ &= A(N)g(x) - A(N)g(N) \\ &= A(x)g(x) - A(N)g(N) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} B(x) &= A(N)g(N) - \int_1^x A(t)g'(t)dt + A(x)g(x) - A(N)g(N) \\ &= A(x)g(x) - \int_1^x A(t)g'(t)dt. \end{aligned}$$

Remarque 2.1. Si $\lim_{x\to+\infty} A(x)g(x) = 0$ alors

$$\sum_{n\le x} a_n g(n) = -\int_1^x A(t)g'(t)dt.$$

Théorème 2.1. *La fonction ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur le demi-plan $Re(s) > 0$, avec un unique pôle d'ordre 1, en $s = 1$.*

Preuve. *On pose $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$*
$g(t) = (t+N)^{-s}$ où $N \in \mathbb{N}$.
Alors $A(x) = [x]$ et pour $\sigma > 1$ on a $\lim_{x\to+\infty} A(x)g(x) = 0$
on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+N)^s} &= -\int_1^{\infty} [t]((t+N)^{-s})'dt \\ &= s\int_1^{\infty} [t](t+N)^{-s-1}dt. \end{aligned}$$

Donc
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = s\int_1^{\infty} [t](t+N)^{-s-1}dt$$
Or $[t] = 0$ *pour* $0 \leq t < 1$ *et on pose* $u = t + N$ *donc*
$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= s\int_0^{\infty} [t](t+N)^{-s-1}dt \\ &= s\int_N^{\infty} [u-N]u^{-s-1}du \\ &= s\int_N^{\infty} \frac{(u-N)-\{u-N\}}{u^{s+1}}du\end{aligned}$$
Où $\{u-N\}$ *désigne la partie décimale de* $u - N$ *avec* $\{u-N\} = (u-N) - [u-N]$ *donc*
$$\begin{aligned}s\int_N^{\infty} \frac{(u-N)-\{u-N\}}{u^{s+1}}du &= s\int_N^{\infty} \frac{(u-N)-\{u\}}{u^{s+1}}du \\ &= \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du\end{aligned}$$
Donc
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du. \tag{2.2}$$
En particulier si $N = 1$ *on aura*
$$\begin{aligned}\zeta(s) &= 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du \\ &= 1 + \frac{1}{s-1} - s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du.\end{aligned}$$
Comme
$$\left|\int_n^{n+1} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du\right| \leq \frac{1}{n^{\sigma+1}}$$
Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du$ *et l'inégalité* $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{du}{u^{\sigma+1}}$ *converge si* $\sigma > 0$.

On en déduit que la fonction $s \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du$ *est holomorphe sur* $Re(s) > 0$.

Ainsi 2.2 donne un prolongement analytique de ζ *en* $\{s : Re(s) > 0\}\backslash\{1\}$, *avec*
$$Res(\zeta,1) = 1 \quad car\ \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1.$$

2.2.2 Produit d'Euler de $\zeta(s)$

Théorème 2.2. *Pour $Re(s) > 1$, on a*

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}}(1-\frac{1}{p^s})^{-1}. \tag{2.3}$$

Où $p \in \mathcal{P} = \{2,3,5,7,\dots\}$ est l'ensemble des nombres premiers (entiers positifs).

Preuve. *On a*

$$\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots+\frac{1}{p^{ns}}+\dots\right) = (1-\frac{1}{p^s})^{-1}$$

$$\prod_{p\leq X}(1-\frac{1}{p^s})^{-1} = \prod_{p\leq X}(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots)$$

Chaque facteurs s'écrivent comme suit:

$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{p^s})^{-1} &= \frac{1}{1-\frac{1}{p}}\\ &= 1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\dots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(p^{-s})^n.\end{aligned}$$

En multippliant ces séries absolument convergentes pour un entier $N > 2$,

$$\begin{aligned}\prod_{p\in\mathcal{P}}(1-p^{-s})^{-1} &= \sum_{n\leq X}\frac{1}{n^s}+\sum_{n>X}\frac{1}{n^s}\\ &= \sum_{n\leq X}\frac{1}{n^s}+R(s,X).\end{aligned}$$

Où

$$R(s,X) = \sum_{n>X}\frac{1}{n^s}$$

on a

$$\left|R(s,X)\right| \leq \sum_{n>X}\frac{1}{\mid n^\sigma \mid} = \sum_{n>X}\frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{\sigma-1}X^{1-\sigma}.$$

Comme

$$\lim_{X\to\infty}X^{1-\sigma} = 0 \quad (\mathit{car}\ \sigma > 1)$$

donc

$$\lim_{X\to\infty}\frac{1}{\sigma-1}X^{1-\sigma} = 0$$

i.e.

$$\lim_{X\to\infty}\left|R(s,X)\right| = 0.$$

D'où

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}(1-\frac{1}{p})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

2.3 Cractère modulo 4

Définition 2.2. On définit la fonction χ_4 de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ comme suit:

$$\chi_4(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } pgcd\,(4,n) > 1 \\ 1 & \text{si } n = 4k+1\ (n \equiv 1[4]) \\ -1 & \text{si } n = 4k+3\ (n \equiv 3[4]) \end{cases}$$

La fonction χ_4 définie ci-dessus s'appelle caractère modulo 4

Proposition. *La fonction χ_4 est multiplicative $\forall\ n,\, m \in \mathbb{N}$ on a*

$$\chi_4(nm) = \chi_4(n)\chi_4(m).$$

Preuve. *1. Si n où m n'est pas premier avec 4, alors nm ne l'est pas aussi, donc*

$$\chi_4(n)\chi_4(m) = 0$$

$$\chi_4(nm) = 0.$$

2. • $n = 4k_1 + 1$ *et* $m = 4k_2 + 1$ *alors* $nm = 4K + 1$
Donc $\chi_4(nm) = 1$ *et* $\chi_4(n) = \chi_4(m) = 1$
D'où

$$\chi_4(nm) = \chi_4(n)\chi_4(m).$$

• $n = 4k_1 + 3$ *etm* $= 4k_2 + 3$ *alors*

$$\begin{aligned} nm &= 16k_1k_2 + 12k_1 + 12k_2 + 9 \\ &= 16k_1k_2 + 12(k_1 + k_2) + 2 * 4 + 1 \\ &= 4K + 1 \end{aligned}$$

Donc $\chi_4(nm) = 1$ *et* $\chi_4(n)\chi_4(m) = (-1)(-1) = 1$
D'où

$$\chi_4(nm) = \chi_4(n)\chi_4(m).$$

- *$n = 4k_1 + 3$ et $m = 4k_2 + 1$ alors*

$$\begin{aligned} nm &= 16k_1k_2 + 12k_1 + 4k_2 + 3 \\ &= 4K + 3 \end{aligned}$$

Donc $\chi_4(nm) = -1$ et $\chi_4(n)\chi_4(m) = 1(-1) = -1$
D'où

$$\chi_4(nm) = \chi_4(n)\chi_4(m).$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_4(n)}{n^s}$ converge uniformement sur le demi-plan $Re(s) > 1$, vers une fonction holomorphe qu'on note $L(s,\chi_4)$.
Le terme général $\frac{\chi_4(n)}{n^s}$ de la dite série étant analytique, donc de même pour la fonction $L(s,\chi_4)$.
On démontrede même manière que la fonction $L(s,\chi_4(n))$ admet un prolongement analytique au demi-plan $Re(s) > 1$.

2.3.1 Produit eulérien de χ_4

Le résulta suivant montre que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_4(n)}{n^s}$ associée à la fonction χ admet une représentation qui fait intervenir un produit porte uniquement sur les nombres premiers.

Proposition. *Dons le domaine $Re(s) > 1$, on a*

$$L(s,\chi_4) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Preuve. *Soit $X > 1$ et posons*

$$\Phi(s,X) = \prod_{p\leq X} \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

Comme $Re(s) > 1$, donc

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{\chi_4(p)}{p^s} + \frac{\chi_4(p)}{2s} + \dots.$$

Par conséquent,

$$\Phi(s,X) = \sum_{n\leq X} \frac{\chi_4(n)}{n^s} + R(s,\chi_4)$$

Puisque χ_4 *est multiplicative.*

On a

$$\left|R(s,\chi_4)\right| \leq \sum_{n>X}\left|\frac{\chi_4(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n>X}\frac{1}{n^\sigma} < \int_X^\infty \frac{du}{u^\sigma} = \frac{1}{\sigma-1}X^{1-\sigma}$$

Or, $\lim\limits_{X\to\infty} X^{1-\sigma} = 0.$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_4(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{\chi_4(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Chapitre 3

La formule asymptotique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons établir une formule asymptotique pour la quantité des nombres de Gauss $\leq x$ quand x assez grand. Pour cela en utilisant la formule de Perron.

3.2 Les nombres de Gauss

Définition 3.1. Un entier naturel est appelé nombre de Gauss s'il est somme de deux carrés d'entiers.

Exemple 3.1. *1.* $5 = 1^2 + 2^2$*: est un nombre de Gauss;*

2. 7*: n'est pas un nombre de Gauss.*

Gauss, en étudiant l'anneau des entiers $(\mathbb{Z}[i], +\ ,.)$ a démontré qu'un entier naturel n est somme de deux carrés d'entiers si et seulement si pour tout premier p congru à 3 modulo 4 et tout entier naturel α

$$p^\alpha | n \text{ et } \quad p^{\alpha+1} \nmid n \Rightarrow \alpha \equiv 0[2]$$

C'est-à-dire n est de Gauss $\Leftrightarrow$ la décomposition canonique de n ne contient pas un facteur p^α, avec $p = 4k + 3$ et $\alpha \equiv 1[2]$.

3.2.1 Analogue de la formule d'Euler

On pose

$$b(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un nombre de Gauss} \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}$ converge uniformement sur le demi-plan $Re(s) > 1$, vers une fonction holomorphe qu'on note $G(s)$.

Proposition. *b est multiplicative i.e. $(n,m) = 1$ alors $b(nm) = b(n)b(m)$.*

Preuve. *b est multiplicative*
$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_l^{\alpha_l} \quad m = q_1^{\beta_1} \dots q_r^{\beta_r}$

$$(n,m) = 1 \Rightarrow \ \forall \, i,j, \, (p_i^{\alpha_i}, q_j^{\beta_j}) = 1$$

Donc si $b(n) = 1$ et $b(m) = 1$ alors

$$nm = p_1^{\alpha_1} \dots p_l^{\alpha_l} q_1^{\beta_1} \dots q_r^{\beta_r}$$

est la décomposition canonique de nm qui ne contient pas un facteur p^k tel que $p \equiv 3[4]$ et $k \equiv 1[2]$ $(p = q_i$ ou $p_i)$.
Donc $b(nm) = 1$
D'oú

$$b(nm) = b(n)b(m).$$

Si $b(n) = 0$ et $b(m) = 0$ alors

$$\exists \, p_i^{\alpha_i}, \, p_i \equiv 3[4] \text{ et } \alpha_i \equiv 1[2]$$

ou

$$\exists \, q_j^{\beta_j}, \, q_j \equiv 3[4] \text{ et } \beta_j \equiv 1[2]$$

Donc $nm = p_1^{\alpha_1} \dots p_l^{\alpha_l} q_1^{\beta_1} \dots q_r^{\beta_r}$ contient un tel facteurs, donc $b(nm) = 0$
D'oú

$$b(nm) = b(n)b(m).$$

Proposition.

$$G(s) = (1 - \frac{1}{2^s})^{-1} \prod_{p\equiv 1[4]} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} \prod_{p\equiv 3[4]} (1 - \frac{1}{p^{-2s}})^{-1} \qquad \textit{quand } Re(s) > 1.$$

Preuve. *On a*

- $(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \dots) = (1 - \frac{1}{2^s})^{-1}$ *(somme d'une suite géométrique de raison* $\frac{1}{2^s}$*);*
- $(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots) = (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$ *(somme d'une suite géométrique de raison* $\frac{1}{p^s}$*);*
- $(1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \dots) = (1 - \frac{1}{p^{2s}})^{-1}$ *(somme d'une suite géométrique de raison* $\frac{1}{p^{2s}}$*).*

Donc

$$\begin{aligned}
(1 - \frac{1}{2^s})^{-1} \prod_{p\equiv 1[4]} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} \prod_{p\equiv 3[4]} (1 - \frac{1}{p^{2s}})^{-1} &= (1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \dots) \prod_{p\equiv 1[4]} (1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots) \\
&\quad \prod_{p\equiv 3[4]} (1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \dots) \\
&= (1 + \frac{b(2)}{2^s} + \frac{b(2^2)}{2^{2s}} + \dots) \prod_{p\equiv 1[4]} (1 + \frac{b(p)}{p^s} + \frac{b(p^2)}{p^{2s}} + \dots) \\
&\quad \prod_{p\equiv 3[4]} (1 + \frac{b(p^2)}{p^{2s}} + \frac{b(p^4)}{p^{4s}} + \dots) \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} (1 + \frac{b(p)}{p^s} + \frac{b(p^2)}{p^{2s}} + \dots) \\
&= \sum_{n\leq X} \frac{b(n)}{n^s} + R(s,X).
\end{aligned}$$

Avec $\mid R(s,X) \mid \leq \sum_{n>X} \frac{b(n)}{\mid n^s \mid} \leq \frac{1}{\sigma - 1} X^{1-\sigma}$

D'où,

$$G(s) = (1 - \frac{1}{2^s})^{-1} \prod_{p\equiv 1[4]} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} \prod_{p\equiv 3[4]} (1 - \frac{1}{p^{-2s}})^{-1}.$$

Proposition.

$$G(s) = \frac{1}{\sqrt{s-1}} \Phi(s)$$

$\Phi(s)$ *est une fonction holomorphe.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
G(s) &= (1-\frac{1}{2^s})^{-1}\prod_{p\equiv 1[4]}(1-\frac{1}{p^s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1-\frac{1}{p^{2s}})^{-1} \\
&= (1-\frac{1}{2^s})^{-1}\prod_{p\equiv 1[4]}(1-\frac{1}{p^s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}\left((1-\frac{1}{p^s})^{-1}(1+\frac{1}{p^s})^{-1}\right) \\
&= \left[(1-\frac{1}{2^s})^{-1}\prod_{p\equiv 1[4]}(1-\frac{1}{p^s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1-\frac{1}{p^s})^{-1}\right]\prod_{p\equiv 3[4]}(1+\frac{1}{p^s})^{-1} \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}}(1-\frac{1}{p^s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1+\frac{1}{p^s})^{-1} \\
&= \zeta(s)\prod_{p\equiv 3[4]}(1+\frac{1}{p^s})^{-1}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
G(s) &= (1-\frac{1}{2^s})^{-1}\prod_{p\equiv 1[4]}(1-\frac{1}{p^s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1-\frac{1}{p^{2s}})^{-1} \\
&= \left[\prod_{p\equiv 1[4]}(1-\frac{1}{p^s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1+\frac{1}{p^s})^{-1}\right](1-\frac{1}{2^s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1-\frac{1}{p^s})^{-1} \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}}(1-\frac{\chi_4(p)}{p^s})^{-1}(1-\frac{1}{2^s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1-\frac{1}{p^s})^{-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_4(n)}{n^s}(1-\frac{1}{2^s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1-\frac{1}{p^s})^{-1} \\
&= L(s,\chi_4)(1-2^{-s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1-p^{-s})^{-1}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
G^2(s) &= \zeta(s)\prod_{p\equiv 3[4]}(1+p^{-s})^{-1}L(s,\chi_4)(1-2^{-s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1-p^{-s})^{-1} \\
&= \zeta(s)L(s,\chi_4)(1-2^{-s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1-p^{-2s})^{-1}.
\end{aligned}$$

$$G(s)=\sqrt{\zeta(s)L(s,\chi_4)(1-2^{-s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1-p^{-2s})^{-1}}=\frac{1}{\sqrt{s-1}}\Phi(s)$$

Où

$$\Phi(s)=\sqrt{(s-1)\zeta(s)L(s,\chi_4)(1-2^{-s})\prod_{p\equiv 3[4]}(1-p^{-2s})^{-1}}.$$

3.3 La formule asymptotique pour la quantité des nombres de Gauss $\leq x$

Définition 3.2. – Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $g(s)$ une fonction à valeures dans $\mathbb{R}_+^*$, on écrit $f(s) = O(g(s))$ s'il existe au voisinage de s_0 une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\frac{\mid f(s) \mid}{g(s)} \leq C$$

– On écrit $f(s) = O(g(s))$ quand $\mid s \mid \to +\infty$ si $\exists\ C \in \mathbb{R}_+^*$ lel que

$$\frac{\mid f(s) \mid}{g(s)} \leq C$$

Exemple 3.2. *1. Pour N assez grand $\ln N = O(N)$.*

2. $x \sin x = O(x)$; x assez grand.

3. $\zeta(\sigma + iT) = O\left((\ln T)^{\frac{2}{3}}\right)$,

$\chi_4(\sigma + iT) = O\left((\ln T)^{\frac{2}{3}}\right)$.

Propriété 3.1. Soit $f(s)$ une fonction à valeures dans $\mathbb{R}$, on a

1. $O(f) + O(f) = O(f)$;
2. $O(f) - O(f) = O(f)$;
3. $\lambda O(f) = O(f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.1. *Pour x un réel assez grand on a la formule asymtotique suivante*

$$B(x) = c\frac{x}{\sqrt{\ln x}} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Où $B(x) = \sum_{n \leq x} b(n)$ (quantité des nombres de Gauss$\leq x$)
et c une constante réelle positive.

Pour la démonstration du théorème se base sur le lemme suivant

Lemme 3.1. ***(Théorème de Perron)***

Soit a_n une suite de nombres complexe.

On pose $B(x) = \sum_{n \leq x} a_n$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}. \tag{3.1}$$

qui converge absolument pour $\sigma > 1$.

On suppose que $\mid a_n \mid \leq A(n)$ *avec* $A(n) > 0$ *une suite non décroissante et quand* $\sigma \longrightarrow 1^+$; *on a:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid n^{-\sigma} = O((\sigma - 1)^{\alpha}),\, \alpha > 0$$

Alors pour $b_0 \geq b > 1, T \geq 1$ $x = N + \frac{1}{2}$, *on a la formule suivante:*

$$B(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{xA(2x)\log x}{T}\right)$$

Où la constante dans O *ne dépend que de* b_0.

Preuve. *En premier heur, remarquons d'abord que:*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{a^s}{s} ds = \begin{cases} 1 + O(\frac{a^b}{T|\log a|}) & si\ a > 0 \\ O(\frac{a^b}{T|\log a|}) & si\ 0 < a < 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

En effet, soit $a > 1$ $(0 < a < 1)$ *prennons* $U > b$, *choisissons le contour* Γ (Γ_1) $(figure 3.1)$

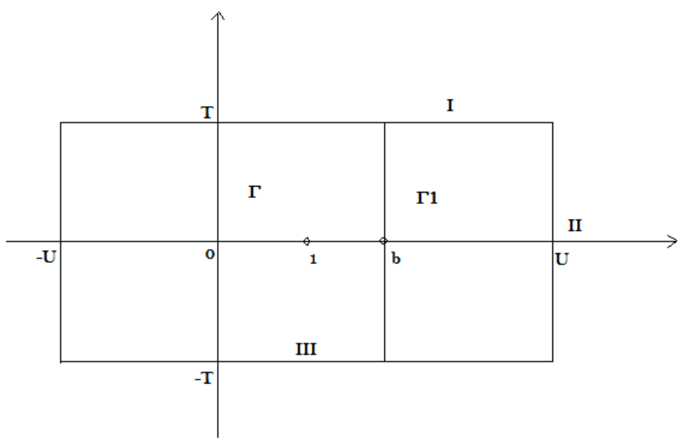

FIG. 3.1 – *représente le contour* Γ *et* Γ_1.

Alors par le théorème de Chauchy on a:

$$\begin{cases} \frac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{a^s}{s}ds = 1 \ (a>1) \\ \frac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{a^s}{s}ds = 0 \ (a<1) \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} \frac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{a^s}{s}ds = 1+R \ (a>1) \\ \frac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{a^s}{s}ds = R_1 \ (a<1) \end{cases} \tag{3.3}$$

Où R et R_1 sont réspectivement l'intégrale sur les arrêtes I, II, III.
Les intégrale sur I, et III sont égales en valeurs absolues.
Donc pour $a>1$, on a:

$$\frac{1}{2i\pi}\left|\int_I \frac{a^s}{s}ds\right| \leq \frac{1}{2i\pi}\int_{-U}^{b}\frac{a^\sigma}{\sqrt{T^2+\sigma^2}}d\sigma \leq \frac{a^b}{T\log a};$$

Si $0<a<1$ alors,

$$\frac{1}{2i\pi}\left|\int_I \frac{a^s}{s}ds\right| \leq \frac{1}{2i\pi}\int_{b}^{U}\frac{a^\sigma}{\sqrt{T^2+\sigma^2}}d\sigma \leq \frac{a^b}{T\log a}$$

En plus, si $a>1$

$$\frac{1}{2i\pi}\left|\int_{II} \frac{a^s}{s}ds\right| \leq \frac{1}{2i\pi}\int_{-T}^{T}\frac{a^{-U}}{\sqrt{U^2+t^2}}dt = O(a^{-U}) \longrightarrow 0 \text{ quand } U \longrightarrow +\infty;$$

Si $0<a<1$ alors,

$$\frac{1}{2i\pi}\left|\int_{II} \frac{a^s}{s}ds\right| \leq \frac{1}{2i\pi}\int_{-T}^{T}\frac{a^{U}}{\sqrt{U^2+t^2}}dt = O(a^{-U}) \longrightarrow 0 \text{ quand } U \longrightarrow +\infty;$$

Dans 3.2 quand $U \longrightarrow \infty$, on aura 3.3.
Comme $x = N+\frac{1}{2}$ alors $\frac{x}{n} \neq 1$, pour l'entier n naturel.
La série 3.1 converge absolument.
On intégre tèrme à tèrme, on obtient

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{x^s}{s}ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{b-iT}^{b+iT}(\frac{x^s}{n})^s ds\right) = \sum_{n\leq x} a_n + R$$

Où $R = O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid (\frac{x}{n})^b T^{-1} \mid \log \frac{x}{n} \mid^{-1}\right)$

On partage la somme dans O *en deux sommes:*

– *La première: entendue sur* $\frac{x}{n} \leq \frac{1}{2}$ *ou* $\frac{x}{n} \geq 2$; $\mid \log \frac{x}{n} \mid \geq \log 2$.
  Selon les conditions de théorème on a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mid a_n \mid}{n^b} = O\left(\frac{1}{(b-1)^{\alpha}}\right)$$

  Donc la première somme est:

$$O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^{\alpha}}\right).$$

– *La deuxième somme:*

$$\sum_{\frac{x}{2}<n<2x} (\frac{x}{n})^b T^{-1} \left| \log \frac{x}{n} \right|^{-1} \leq T^{-1} A(2x) 2^b \sum_{\frac{x}{2}<n<2x} \left| \log \frac{N+0.5}{n} \right|^{-1}.$$

Dans cette dernière somme on met à part les tèrmes $n = N-1;\ N;\ N+1$, *qui sont à l'ordre* $O(x)$ *et pour le reste* x *des tèrmes on aura:*

$$x \leq \int_{\frac{x}{2}}^{N-1} \left(\log \frac{N+0.5}{U}\right)^{-1} dU + \int_{N+1}^{2x} \left(\log \frac{U}{N+0.5}\right)^{-1} dU = O(x \log x).$$

Preuve. ***(Preuve du théorème).*** *On a*

$$G(s) = \frac{1}{\sqrt{s-1}} \Phi(s)$$

Où

$$\Phi(s) = \sqrt{(s-1)\zeta(s)L(s,X_4)(1-2^{-s})^{-1} \prod_{p\equiv 3[4]} (1-p^{-2s})^{-1}}$$

La fonction $\Phi(s)$ *est continue sur un disque de centre* 1, *donc* $\lim_{s\to 1} \Phi(s) = \Phi(1)$, *d'où il existe* $M > 0$ *tel que* $\mid \Phi(s) \mid < M$ *pour tout* s *appartenant au disque de centre* 1 *et de rayon* ρ *assez petit*

D'où Φ *est bornée, par conséquent*

$$G(\sigma) = O((\sigma - 1)^{\frac{1}{2}})$$

Donc en appliquant le lemme précédent on aura

$$B(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} G(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b (\ln x)^{\frac{1}{2}}}{T}\right) + O\left(\frac{x \ln x}{T}\right)$$

Pour $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$ *on a*

$$\begin{aligned}
\frac{x^b(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{T} &\leq \frac{x^{1+\frac{1}{\ln x}}(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{T} \\
&\leq \frac{x x^{\frac{1}{\ln x}}(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{T} \\
&\leq \frac{x \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln \mathrm{x}}\ln \mathrm{x}}(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{T} \\
&\leq \frac{\mathrm{e} x(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{T}
\end{aligned}$$

Comme $(\ln x)^{\frac{1}{2}} \leq \ln x$ *donc*

$$\frac{x(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{T} \leq \frac{\mathrm{e} x \ln x}{T}$$

Par conséquent

$$B(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} G(s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x\ln x}{T}\right)$$

A fin de calculer l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} G(s)\frac{x^s}{s}ds$$

On applique le théorème de Cauchy sur le contour C *avec* $C = \sum_{i=1}^{8} C_i$,

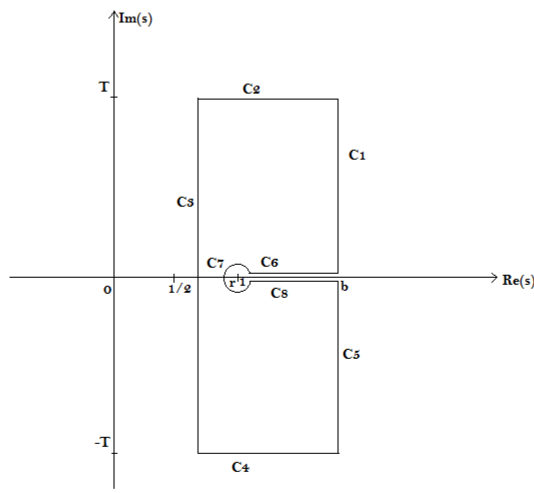

FIG. 3.2 – *Représentation de l'intégrale I sur le contour C.*

où encore

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}+\int_{C_5}+\int_{C_6}+\int_{C_7}+\int_{C_8}\right)\frac{G(s)}{s}x^s ds = 0$$

– *Calcul de* $\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_6}+\int_{C_8}\right)\frac{G(s)}{s}x^s ds.$
L'intégrale sur C_6 *et* C_8 *nous donne la partie principale de la formule et un reste qui sera majoré par* $\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_6}+\int_{C_8}\right)\frac{G(s)}{s}x^s ds &= 2\frac{1}{2\pi i}\int_{C_8}\frac{G(s)}{s}x^s ds\\ &= \frac{1}{\pi i}\int_{1+r}^{b}G(\sigma)\frac{x^\sigma}{\sigma}d\sigma\\ &= \frac{1}{\pi i}\int_{1+r}^{1+\frac{1}{\ln x}}\frac{\Phi(\sigma)}{\sqrt{\sigma-1}}\frac{x^\sigma}{\sigma}d\sigma.\end{aligned}$$

Avec

$$r=\frac{1}{(\ln x)^3};\ \delta = 1-\frac{c'}{(\ln x)^{\frac{2}{3}}};\ T=(\ln x)^{\frac{5}{2}}.$$

Premier changement de variable:

On pose $\sigma=\sigma_1+1$ *on a donc*

1. $d\sigma = d\sigma_1$
2. $\sigma = 1+r \Rightarrow \sigma_1 = r$
3. $1+\frac{1}{\ln x}\Rightarrow \sigma_1 = \frac{1}{\ln x}$

On aura donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi i}\int_{1+r}^{1+\frac{1}{\ln x}}\frac{\Phi(\sigma)}{\sqrt{\sigma-1}}\frac{x^\sigma}{\sigma}d\sigma &= \frac{1}{\pi i}\int_{r}^{\frac{1}{\ln x}}\frac{\Phi(\sigma_1+1)}{\sqrt{\sigma_1}}\frac{x^{1+\sigma_1}}{1+\sigma_1}d\sigma_1\\ &= \frac{1}{\pi i}\int_{r}^{\frac{1}{\ln x}}\frac{\Phi(\sigma_1+1)}{\sqrt{\sigma_1}}\frac{x^{\sigma_1+1}}{1+\sigma_1}d\sigma_1\end{aligned}$$

Deuxième changement de variable:

On pose $\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{\ln x}$ *donc*

1. $d\sigma_1 = \frac{1}{\ln x}d\sigma_2$
2. $\sigma_1 = r \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_1 \ln x = r\ln x$

3. $\sigma_1 = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow \sigma_2 = 1$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi i}\int_r^{\frac{1}{\ln x}} \frac{\Phi(\sigma_1+1)}{\sqrt{\sigma_1}}\frac{x^{\sigma_1+1}}{1+\sigma_1}d\sigma_1 &= \frac{x}{\pi i}\int_{r\ln x}^{1} \frac{\Phi(1+\frac{\sigma_2}{\ln x})}{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\ln x}}}\frac{x^{\frac{\sigma_2}{\ln x}}}{1+\frac{\sigma_2}{\ln x}}\frac{d\sigma_2}{\ln x}\\
&= \frac{x}{\pi i}\int_{r\ln x}^{1} \frac{\Phi(1+\frac{\sigma_2}{\ln x})}{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\ln x}}}\frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{1+\frac{\sigma_2}{\ln x}}\frac{d\sigma_2}{\ln x}\\
&= \frac{x}{\pi i}\int_{r\ln x}^{1} \frac{\Phi(1+\frac{\sigma_2}{\ln x})\sqrt{\ln x}}{\sqrt{\sigma_2}(1+\frac{\sigma_2}{\ln x})\ln x}\mathrm{e}^{\sigma_2}d\sigma_2\\
&= \frac{x}{\pi i\sqrt{\ln x}}\int_{r\ln x}^{1} \frac{\Phi(1+\frac{\sigma_2}{\ln x})}{\sqrt{\sigma_2}(1+\frac{\sqrt{\sigma_2}}{\ln x})}\mathrm{e}^{\sigma_2}d\sigma_2.
\end{aligned}$$

A la fonction Φ on applique le théorème des accroissement fini sur l'intervalle $[1;1+\frac{\sigma_2}{\ln x}]$, il existe alors $\xi \in [1;1+\frac{\sigma_2}{\ln x}]$ tel que

$$\Phi(1+\frac{\sigma_2}{\ln x}) = \Phi(1) + \Phi'(\xi)\frac{\sigma_2}{\ln x} = \Phi(1) + O(\frac{\sigma_2}{\ln x}). \tag{3.4}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
(1+\frac{\sigma_2}{\ln x})^{-1} &= \frac{1}{1+\frac{\sigma_2}{\ln x}}\\
&= \frac{(1+\frac{\sigma_2}{\ln x}) - \frac{\sigma_2}{\ln x}}{1+\frac{\sigma_2}{\ln x}}\\
&= 1 + \frac{-\frac{\sigma_2}{\ln x}}{1+\frac{\sigma_2}{\ln x}}
\end{aligned}$$

Or,

$$\left|\frac{-\frac{\sigma_2}{\ln x}}{1+\frac{\sigma_2}{\ln x}}\right| \leq \frac{\sigma_2}{\ln x}$$

Donc

$$(1+\frac{\sigma_2}{\ln x})^{-1} = O(\frac{\sigma_2}{\ln x}). \tag{3.5}$$

De 3.4 et 3.5 on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(1+\frac{\sigma_2}{\ln x})}{(1+\frac{\sigma_2}{\ln x})} &= \left(\Phi(1) + O(\frac{\sigma_2}{\ln x})\right)\left(1 + O(\frac{\sigma_2}{\ln x})\right)\\
&= \Phi(1) + O\left(\frac{\sigma_2}{\ln x}\right) + O\left(\frac{\sigma_2}{\ln x}\right) + O\left(\frac{\sigma_2^2}{(\ln x)^2}\right)\\
&= \Phi(1) + O\left(\frac{\sigma_2}{\ln x}\right) + O\left(\frac{\sigma_2^2}{(\ln x)^2}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\sigma_2 < 1$ *on a donc*

$$\frac{\sigma_2^2}{(\ln x)^2} \leq \frac{\sigma_2}{(\ln x)^2} \leq \frac{\sigma_2}{\ln x}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(1+\frac{\sigma_2}{\ln x})}{(1+\frac{\sigma_2}{\ln x})} &= \Phi(1) + O\left(\frac{\sigma_2}{\ln x}\right) + O\left(\frac{\sigma_2}{\ln x}\right) \\ &= \Phi(1) + O\left(\frac{\sigma_2}{\ln x}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{x}{\pi i \sqrt{\ln x}} \int_{r \ln x}^{1} \frac{\Phi(1+\frac{\sigma_2}{\ln x})}{\sqrt{\sigma_2}(1+\frac{\sigma_2}{\ln x})} \mathrm{e}^{\sigma_2} d\sigma_2 &= \frac{x}{\pi i \sqrt{\ln x}} \int_{r \ln x}^{1} \left(\Phi(1) + O(\frac{\sigma_2}{\ln x})\right) \frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}} d\sigma_2 \\ &= \frac{x}{\pi i \sqrt{\ln x}} \int_{r \ln x}^{1} \Phi(1) \frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}} d\sigma_2 \\ &+ \frac{x}{\pi i \sqrt{\ln x}} \int_{r \ln x}^{1} O(\frac{\sigma_2}{\ln x}) \frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}} d\sigma_2 \end{aligned}$$

Regardons d'abord l'intégrale:

$$\frac{x}{\pi i \sqrt{\ln x}} \int_{r \ln x}^{1} \Phi(1) \frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}} d\sigma_2.$$

De la relation de Challe on obtient

$$\begin{aligned} \frac{x}{\pi i \sqrt{\ln x}} \int_{r \ln x}^{1} \Phi(1) \frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}} d\sigma_2 &= \frac{x}{\pi i \sqrt{\ln x}} \int_{0}^{1} \Phi(1) \frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}} d\sigma_2 \\ &- \frac{x}{\pi i \sqrt{\ln x}} \int_{0}^{r \ln x} \Phi(1) \frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}} d\sigma_2 \\ &= \frac{1}{\pi i} \left(\int_{0}^{1} \Phi(1) \frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}} d\sigma_2 \right) \frac{x}{\sqrt{\ln x}} \\ &- \frac{\Phi(1)}{\pi i} \frac{x}{\sqrt{\ln x}} \int_{0}^{r \ln x} \frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}} d\sigma_2. \end{aligned}$$

Majorons la dérnière intégrale:

$$\int_{0}^{r \ln x} \frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}} d\sigma_2.$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{r\ln x}\frac{e^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2\right| &\leq \int_0^{r\ln x}\left|\frac{e^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}\right|\sigma_2\\
&\leq \int_0^{r\ln x}\frac{e}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2\\
&= 2e(r\ln x)^{\frac{1}{2}}\\
&= 2e(\frac{1}{(\ln x)^2})^{\frac{1}{2}}\\
&= 2e\frac{1}{\ln x}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\Phi(1)}{\pi i}\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\int_0^{r\ln x}\frac{e^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2\right| &\leq \frac{\Phi(1)}{\pi}\frac{x}{\sqrt{\ln x}}2e\frac{1}{\ln x}\\
&= 2e\frac{\Phi(1)}{\pi}\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\Phi(1)}{\pi i}\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\int_0^{r\ln x}\frac{e^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2 = O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Regardons maintenant le deuxième tèrme:

$$\frac{x}{\pi i\sqrt{\ln x}}\int_{r\ln x}^{1}O(\frac{\sigma_2}{\ln x})\frac{e^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2.$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x}{\pi i\sqrt{\ln x}}\int_{r\ln x}^{1}O(\frac{\sigma_2}{\ln x})\frac{e^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2\right| &\leq \frac{x}{\pi\sqrt{\ln x}}\int_{r\ln x}^{1}M\frac{\sigma_2}{\ln x}\frac{e^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2\\
&\leq M\frac{x}{\pi(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\int_{r\ln x}^{1}e^{\sigma_2}\sqrt{\sigma_2}d\sigma_2\\
&\leq M\frac{x}{\pi(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\int_{r\ln x}^{1}e^{\sigma_2}d\sigma_2\\
&\leq MM'\frac{x}{\pi(\ln x)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{x}{\pi i\sqrt{\ln x}}\int_{r\ln x}^{1}O(\frac{\sigma_2}{\ln x})\frac{e^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2 \leq O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\bigg(\int_{C_6}+\int_{C_8}\bigg)\frac{G(s)}{s}x^s ds &= \frac{1}{\pi i}\bigg(\int_0^1 \Phi(1)\frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2\bigg)\frac{x}{\sqrt{\ln x}}+O\bigg(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\bigg)+O\bigg(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\bigg)\\
&= \frac{1}{\pi i}\bigg(\int_0^1 \Phi(1)\frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2\bigg)\frac{x}{\sqrt{\ln x}}+O\bigg(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\bigg).
\end{aligned}$$

– *Estimation de* $\frac{1}{2\pi i}\bigg(\int_{C_2}+\int_{C_4}\bigg)\frac{G(s)}{s}x^s ds.$

L'éstimation de $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{G(s)}{s}x^s ds$ *et* $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_4}\frac{G(s)}{s}x^s ds$ *s'obtient de la même manière*

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{G(s)}{s}x^s ds\right| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{1-\delta}^{b}\frac{G(\sigma+iT)}{\sigma+iT}x^{\sigma+iT}d\sigma\right|\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{1-\delta}^{b}\left|\frac{G(\sigma+iT)}{\sigma+iT}x^{\sigma+iT}\right|d\sigma\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{1-\delta}^{b}\mid G(\sigma+iT)\mid\frac{x^{\sigma}}{T}d\sigma\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{1-\delta}^{b}\mid G(\sigma+iT)\mid\frac{x^{1+\frac{1}{\ln x}}}{T}d\sigma\\
&\leq \mathrm{e}\frac{x}{2\pi T}\int_{1-\delta}^{b}\mid G(\sigma+iT)\mid d\sigma.
\end{aligned}$$

On a

$$G(s)=\sqrt{\zeta(s)L(s,X_4)(1-2^{-s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1-p^{-2s})^{-1}}$$

au voisinage de 1 *on a les éstimations suivantes:*

$$\mid\zeta(s)\mid\leq B_1(\ln T)^{\frac{2}{3}}$$

$$\mid L(s,X_4)\mid\leq B_2(\ln T)^{\frac{2}{3}}$$

Donc

$$\begin{aligned}
G(s) &= \sqrt{B_1B_2}(\ln T)^{\frac{2}{3}}\sqrt{\mid 1-2^{-s}\mid^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1-p^{-2s})^{-1}}\\
&\leq B(\ln T)^{\frac{2}{3}}\mid 1-2^{-s}\mid^{\frac{-1}{2}}\mid\prod_{p\equiv 3[4]}(1-p^{-2s})\mid^{\frac{-1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mid 1-2^{-s} \mid^{-1} &= \mid 1-2^{-\sigma-iT} \mid^{-1} \\
&= \mid 1-2^{-\sigma}2^{-iT} \mid^{-1} \\
&= \mid 1-2^{-\sigma}(\cos T' - i\sin T') \mid^{-1}
\end{aligned}$$

Où $T' = T \ln 2$

$$\begin{aligned}
\left|1-2^{-\sigma}(\cos T' - i\sin T')\right|^{-1} &= \left|1-2^{-\sigma}\cos T' + i2^{-\sigma}\sin T'\right|^{-1} \\
&= \left(\sqrt{(1-2^{-\sigma}\cos T')^2 + (2^{-\sigma}\sin T')^2}\right)^{-1} \\
&= \left(\sqrt{1-22^{-\sigma}\cos T' + 2^{-2\sigma}\cos^2 T' + 2^{-2\sigma}\sin^2 T'}\right)^{-1} \\
&= \left(\sqrt{1-22^{-\sigma}\cos T' + 2^{-2\sigma}}\right)^{-1} \\
&\leq \left(\sqrt{1-22^{-\sigma} + (2^{-\sigma})^2}\right)^{-1} \\
&= \left(\sqrt{(1-2^{-\sigma})^2}\right)^{-1} \\
&= (1-2^{-\sigma})^{-1} \\
&= \frac{1}{1-2^{-\sigma}} \\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\left|\prod_{p\equiv 3[4]} (1-p^{-2\sigma})^{-1}\right| = \sum_{n\geq 1}\left|\frac{X_4(n)}{n^{2\sigma}}\right| = c''.$$

Donc

$$G(s) \leq A(\ln T)^{\frac{2}{3}}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}\frac{x}{2\pi T}\int_{1-\delta}^{b} \mid G(\sigma+iT) \mid d\sigma &\leq \frac{A\mathrm{e}x}{2\pi T}(\ln T)^{\frac{2}{3}}\int_{1-\delta}^{b} d\sigma \\
&\leq \frac{KA\mathrm{e}x}{2\pi T}(\ln T)^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

où $K = \int_{1-\delta}^{b} d\sigma$

On pose $T = (\ln x)^{\frac{5}{2}}$, *donc*

$$\begin{aligned}
\frac{KAex}{2\pi T}(\ln T)^{\frac{2}{3}} &= \frac{KAex}{2\pi(\ln x)^{\frac{5}{2}}}(\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{KAex}{2\pi(\ln x)^{\frac{5}{2}}}(\frac{5}{2}\ln(\ln x))^{\frac{2}{3}} \\
&\leq (\frac{5}{2})^{\frac{2}{3}}\frac{KAex}{2\pi(\ln x)^{\frac{5}{2}}}(\ln x)^{\frac{2}{3}} \\
&= (\frac{5}{2})^{\frac{2}{3}}\frac{KAex}{2\pi(\ln x)^{\frac{11}{6}}} \\
&\leq M''\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_2}+\int_{C_4}\right)\frac{G(s)}{s}x^s ds = O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

– *Estimation de* $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\frac{G(s)}{s}x^s ds$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\frac{G(s)}{s}x^s ds\right| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-T}^{T}\frac{G(1-\delta+it)}{1-\delta+it}x^{1-\delta}dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} | G(1-\delta+it) | \frac{| x^{1-\delta} |}{| 1-\delta+it |}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{0} | G(1-\delta+it) | \frac{x^{1-\delta}}{| 1-\delta+it |}dt \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{T} | G(1-\delta+it) | \frac{x^{1-\delta}}{| 1-\delta+it |}dt
\end{aligned}$$

L'éstimation de l'intégrale

$$\int_0^T | G(1-\delta+it) | \frac{x^{1-\delta}}{| 1-\delta+it |}dt.$$

Au voisinage de 1 *on a*

$$| G(1-\delta+it) | \leq A(\ln T)^{\frac{2}{3}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^T \mid G(1-\delta+it)\mid \frac{x^{1-\delta}}{\mid 1-\delta+it\mid}dt &\leq A(\ln T)^{\frac{2}{3}}x^{1-\delta}\int_0^T \frac{dt}{\mid 1-\delta+it\mid}\\
&= A(\ln T)^{\frac{2}{3}}x^{1-\delta}\Big(\int_0^1 \frac{dt}{\mid 1-\delta+it\mid}+\int_1^T \frac{dt}{\mid 1-\delta+it\mid}\Big)\\
&\leq A(\ln T)^{\frac{2}{3}}x^{1-\delta}\Big(\int_0^1 \frac{dt}{1-\delta}+\int_1^T \frac{dt}{t}\Big)\\
&= \frac{A(\ln T)^{\frac{2}{3}}x^{1-\delta}}{1-\delta}+A(\ln T)^{\frac{2}{3}}x^{1-\delta}\ln T\\
&= \frac{A}{a}(\ln T)^{\frac{4}{3}}x^{1-\delta}+A(\ln T)^{\frac{5}{3}}x^{1-\delta}
\end{aligned}$$

Si $a \geq 1$ *on a*

$$\frac{A}{a}(\ln T)^{\frac{4}{3}}x^{1-\delta}+A(\ln T)^{\frac{5}{3}}x^{1-\delta} \leq 2A(\ln T)^{\frac{5}{3}}x^{1-\delta}$$

Si $0 < a < 1$ *on a*

$$\frac{A}{a}(\ln T)^{\frac{4}{3}}x^{1-\delta}+A(\ln T)^{\frac{5}{3}}x^{1-\delta} \leq 2\frac{A}{a}(\ln T)^{\frac{5}{3}}x^{1-\delta}$$

Donc

$$\int_0^T \mid G(1-\delta+it)\mid \frac{x^{1-\delta}}{\mid 1-\delta+it\mid}dt \leq A'(\ln T)^{\frac{5}{3}}x^{1-\delta}$$

Où $A' = \max(2A, 2\frac{A}{a})$.

Montrons que $A'(\ln T)^{\frac{5}{3}}x^{1-\delta} \leq \frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$
Pour x *assez grand on a:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a}{(\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{3}}}+\frac{5}{3}\frac{\ln\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\frac{3}{2}\frac{\ln x\ln x}{\ln x} = 0$$

Pour x *assez grand on a:*

$$\frac{a}{(\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{3}}}+\frac{5}{3}\frac{\ln\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\frac{3}{2}\frac{\ln x\ln x}{\ln x} \leq 1,$$

où encore

$$\frac{a}{(\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{3}}}\ln x+\frac{5}{3}\ln\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{2}\ln\ln x \leq \ln x$$

$$\ln x^{\frac{a}{(\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{3}}}}+\ln(\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}})^{\frac{5}{3}}+\ln(\ln x)^{\frac{3}{2}} \leq \ln x$$

$$\ln\left(x^{\frac{a}{(\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{3}}}}(\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}})^{\frac{5}{3}}(\ln x)^{\frac{3}{2}}\right)\leq \ln x$$
$$x^{\frac{a}{(\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{3}}}}(\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}})^{\frac{5}{3}}(\ln x)^{\frac{3}{2}}\leq x$$
$$x^{\frac{a}{(\ln(\ln x)^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{3}}}}\ln(\ln T)^{\frac{5}{3}}\leq \frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$$

Conclusion

$$\int_0^T\left|G(1-\delta+it)\frac{x^{1-\delta}}{1-\delta+it}\right|dt\leq A\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$$

D'où

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^T\left|G(1-\delta+it)\frac{x^{1-\delta}}{1-\delta+it}\right|dt=O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

De même manière on obtient:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^0\left|G(1-\delta+it)\frac{x^{1-\delta}}{1-\delta+it}\right|dt=O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\frac{G(s)}{s}x^s ds=O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

– *Estimation de* $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_7}\frac{G(s)}{s}x^s ds$.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_7}\frac{G(s)}{s}x^s ds\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_7}\frac{G(s)}{s}x^s ds\right|$$

On pose $s=1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ *alors* $ds=ri\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}d\theta$

$$\int_{C_7}\left|\frac{G(s)}{s}x^s\right|ds=\int_0^{2\pi}\mid G(1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mid\frac{\mid x^{1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mid}{\mid 1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mid}\mid ri\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mid d\theta$$

On a

$$\mid G(1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mid\leq\frac{M}{\sqrt{1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}}=\frac{M}{\sqrt{r}}.$$

$$\begin{aligned}\mid x^{1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mid &= \mid x^{1+r\cos\theta+ri\sin\theta}\mid\\ &= \mid x^{1+r\cos\theta}\mid\mid x^{ir\sin\theta}\mid\\ &= x^{1+r\cos\theta}\mid \mathrm{e}^{ir\sin\theta\ln x}\mid\\ &= x^{1+r\cos\theta}\\ &\leq x^{1+r}\end{aligned}$$

$$| ri\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} |= r.$$

$$\begin{aligned}
| 1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} | &= | 1+r\cos\theta+ir\sin\theta | \\
&= \sqrt{(1+r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta} \\
&= \sqrt{1-2r\cos\theta+r^2} \\
&\geq \sqrt{1-2r+r^2} \\
&= \sqrt{(1-r)^2} \\
&= 1-r.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} | G(1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) | \frac{| x^{1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} |}{| 1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} |} | ri\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} | \, d\theta &\leq \int_0^{2\pi} \frac{M}{\sqrt{r}} x^{1+r} \frac{r}{1-r} d\theta \\
&\leq \int_0^{2\pi} \frac{M\sqrt{r}x^{1+r}}{1-r} d\theta
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{2} < 1-r \leq 1$ *on obtient:*

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} M\sqrt{r}x^{1+r} d\theta &= 2\pi M\sqrt{r}x^{1+r} \\
&= 2\pi M\sqrt{r}x^{r} \\
&\leq 2\pi M\sqrt{r}x\mathrm{e}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_7} \frac{G(s)}{s} x^s ds \right| &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi M\sqrt{r}x\mathrm{e} \\
&= \mathrm{e}M\sqrt{r}x \\
&= \mathrm{e}M\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_7} \frac{G(s)}{s} x^s ds = O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

$$\begin{aligned}
B(x) &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_1}+\int_{C_5}\right)\frac{G(s)}{s}x^s ds + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right)\\
&= -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_6}+\int_{C_8}\right)\frac{G(s)}{s}x^s ds\\
&- \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_2}+\int_{C_4}+\int_{C_3}+\int_{C_7}\right)\frac{G(s)}{s}x^s ds + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right)\\
&= -\frac{1}{\pi i}\left(\int_0^1 \Phi(1)\frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2\right)\frac{x}{\sqrt{\ln x}} - \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_2}+\int_{C_4}+\int_{C_3}+\int_{C_7}\right)\frac{G(s)}{s}x^s ds + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

$$B(x) + \frac{1}{\pi i}\left(\int_0^1 \Phi(1)\frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2\right)\frac{x}{\sqrt{\ln x}} = O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

On a donc

$$\left|B(x) + \frac{1}{\pi i}\left(\int_0^1 \Phi(1)\frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2\right)\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right| \leq K\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B(x) - \left|\frac{1}{\pi i}\left(\int_0^1 \Phi(1)\frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2\right)\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right| \leq K\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B(x) - \frac{1}{\pi}\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\int_0^1 \Phi(1)\frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2 = O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}
B(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \Phi(1)\frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2\frac{x}{\sqrt{\ln x}} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right)\\
&= c\frac{x}{\sqrt{\ln x}} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

où $c = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \Phi(1)\frac{\mathrm{e}^{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_2}}d\sigma_2$.

Conclusion générale

Cette formule montre que la suite des nombres de Gauss est plus dense que celle des nombres premiers et comme cette dérnière, elle possède une densité nulle par rapport à la suite naturelle. En outre, l'ensemble des nombres de Gauss est un monoïde pour la multiplication. Comme pour la suite des nombres premiers, on peut obtenir une formule explicite, exprirée en terme des zéros de la fonction zêta de Riemann.

L'égalité

$$G(s) = \sqrt{\zeta(s)L(s,\chi_4)(1-2^{-s})^{-1}\prod_{p\equiv 3[4]}(1-p^{-2s})^{-1}}$$

montre qu'il existe un lien étroit entre les nombres de Gauss et la fonction zêta de Riemann ce qui pouait avancer l'exploration des z'ros de la fonction zêta de Riemann.

Annexe

Nous présentons dans cette section des outils anlytiques pour les démonstrations des résultats du charitre 3.

La décomposition en facteurs premiers

Le théorème de décomposition premier qui suit est fondamental.

Théorème 3.2. *Tout entier $n \geq 2$ admet une décomposition en facteurs premiers qui est unique à l'ordre des facteurs près.*
C'est-à-dire, tout entier naturel $n \geq 2$ s'écrit sous la forme:

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$$

Où, $p_1, \dots, p_n$ des nombres premiers distincts, et $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$.

Diviseurs d'un entier

Proposition. *Soit $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$ la décomposition en facteurs premiers de l'entier $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$, on a*

$$Div(n) = \{ \substack{+\\-} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}, \forall\, i \in [1; n], m_{i \leq n_i} \}.$$

L'entier n admet $(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_r+1)$ diviseurs positifs.

Exemple 3.3. *1.* $33 = 3.11$ *et* $Div(33) = \{ \substack{+\\-} 1,3,11 \}$.

2. $Div(6^{33}) = Div(2^{33}3^{33}) = \{2^k 3^l;\ 0 \leq k,l \leq 33\}$.
6^{33} *admet* 34^2 *diviseurs positifs.*

Plus grand commun diviseur (*pgcd*)

Proposition. *Soient $p_1,\ldots,p_n$ des nombres premiers distincts et $a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_r$. Le pgcd des entiers $a = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_r^{a_r}$ et $b = p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_r^{n_r}$ est donné par*

$$pgcd\,(a,b) = p_1^{\min(a_1,b_1)}\ldots p_1^{\min(a_r,b_r)}$$

Exemple 3.4. *On écrit les factorisations $a = 2^2.3.5.7$, $b = 2.3^2.7.13$ sous la forme $a = 2^2.3.5.7.13^0$, $b = 2.3^2.7.13$ pour obtenir*

$$pgcd\,(a,b) = 2.3.7$$

Les congruences sur $\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Définition 3.3. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, on dit que a est congru à b modulo n si n divise $b - a$, est noté $a \equiv b[n]$.

Propriété 3.2.

1. Réflexivité: $\forall\, a \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b[n]$.
2. Symétrique: $\forall\, a,b \in \mathbb{Z}$, si $a \equiv b[n]$ alors $b \equiv a[n]$.
3. Transitivité: $\forall\, a,b,c \in \mathbb{Z}$, si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ alors $a \equiv c[n]$.

Les deux propriétés suivantes nous disent que les congruence sont préservées par passage à la somme et au produit. C'est essentiel pour les calculs.

Proposition. *$\forall\, a,b,a',b' \in \mathbb{Z}$, si $a \equiv a'[n]$ et $b \equiv b'[n]$ alors*

$$a + b \equiv a' + b'[n]; \quad ab \equiv a'b'[n].$$

Une dérnière observation:

Soit $a = nq + r$, $0 \leq r < n$ est la divition euclidienne de a par n. Puisque $n|a - r$, par définition de la congruence on a $a \equiv r[n]$. A l'aide des propriétés (2) et (3), il est alors immédiat de voir que deux entiers a et b sont congrus modulo n si et seulement si ils ont même reste pour la division euclidienne par n.

Bibliographie

[**1**] A.A.Karatsuba, *Elément de la theorie analytique des nombres,*

[**2**] A.Giroux, *Analyse complexe cours et exercices corrigés, Univercité de Montréal* 2013.

[**3**] E.C.Titchmarch, *The theory of the Riemann zeta function, second edition* 1986.

[**4**] E.Kaufmann, *De l'anatyse complexe à la répartion des nombres premiers, Strasbourg* 2008.

[**5**] G.I.Arkhipov, A.Hocini, V.N.Chubarikov, *Estimation des somme en nombres de Gauss* 1995.

[**6**] H.Sadaui, S.Belhadj *Fonction zêta de Riemann et la répartition des nombres premiers* $2012 - 2013$

[**7**] H.M.Edward, *Riemann's zeta function pure and appied mathematics, Vol* 58, *Monastyrskry Prees,NewYork-London* 1974.

[**8**] O.Ramaré, *Série de Dirichlet et transformées de Mellin en théorie analytique des nombres, cours donnés à l'univercité de Monastir* 2013.

[**9**] P.Biane, J.B.Bost, P.Colmez, *La fonction zêta, les éditions de l'école polytechnique, Palaiseau* 2003.

[**10**] P.Bornaszten, X.Carusu, P.Nolin, M.Tibouchi, *Cours d'arithmétique (premier pertie)* 2004

[**11**] P.Rouchon *Théorie analytique des nombres: la fonction ζ, centre automatique et systèmes Mines Paris Tech* 2012.