

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERRI, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme

Master académique en automatique
Option commande des systèmes

Thème

*Commande sous contraintes d'un SED
modélisé par un système linéaire
implicite*

Proposé et dirigé par :

Mr KARA Redouane

Présenté par :

M^{elle} ABDERRAHMANI Naima

Soutenu le : 02 /10 /2012

Promotion 2012

Ce travail a été préparé : au laboratoire de conception et conduite des systèmes de production (L2CSP).

Sommaire

Introduction générale.....	1
-----------------------------------	----------

Chapitre I : Analyse qualitative des RDPs autonomes, temporisés et temporel.

Introduction	4
1- Définitions de base	4
1.1- La notation matricielle	5
1.2- Le marquage.....	6
2- La dynamique des RDPs	7
3- Les RDPs autonomes et non autonomes	7
3.1- Les RDPs autonomes	7
3.2- Les RDPs non autonomes	8
4- Propriétés des RDPs	9
4.1- L'accessibilité	9
4.2- L'état d'accueil et réinitialisabilité	9
4.3- La bornitude	10
4.4- La vivacité.....	10
5- Les RDPs particuliers	10
5.1- Le graphe d'événement.....	10
5.2- Le graphe t'état	11
5.3- Le RDP sans conflit	11
5.4- Le RDP à choix libre.....	12
5.5- Le RDP simple	12
5.6- Le RDP pur	13
6- Méthodes d'analyse.....	13
6.1- L'analyse par le graphe des marquages accessibles.....	13
6.2- L'analyse par l'algèbre linéaire.....	15
6.2.1- Les invariants de marquage et les composantes conservatives.....	17
7- Les réseaux de Petri temporisés.....	17
7.1- Les RDPs p-temporisé	17
7.1.1- Principe de fonctionnement	18
7.2- Les RDP t-temporisés	19

Sommaire

7.2.1- Principe de fonctionnement	19
7.3- propriétés des RDPs temporisés.....	20
7.3.1- Les propriétés dynamiques	20
7.3.2- Les propriétés structurelle.....	21
8- Les réseaux de Petri temporels	21
8.1- Les RdPs t-temporels (t-RDP)	22
8.1.1- Définition	22
8.1.2- Principe de fonctionnement	22
8.1.2.1- Définition d'un état d'un t-RDP	22
8.1.3- Le calcul de l'état suivant	23
8.1.4- Propriétés des t-RDPs	23
8.1.5- Analyse enumerative des t-RDPs	24
8.1.5.1- Notion de classe d'état	24
8.2- Les RDPs p-temporels	27
8.2.1- Définition	27
8.2.2- Principe de fonctionnement	28
8.2.2.1- Définition fondée sur l'âge des marques	28
8.2.2.2- Condition de franchissement d'une transition	29
8.2.3- Calcul de l'état suivant	29
8.2.4- Les propriétés des p-RDPs.....	30
8.2.5- L'analyse énumérative des p-RDPs	31
8.2.5.1- Condition de tir d'une transition partant d'une classe	31
8.2.5.2- Calcul de la classe suivante.....	33
8.2.6- L'analyse structurelle.....	34
Conclusion.....	35

Chapitre II : Analyse des SED modélisés par des GDE p-temporisés et p-temporels.

Introduction	36
1- Le fonctionnement périodique	36
1.1- Le fonctionnement périodique d'un RDPT.....	36

Sommaire

1.2- La fréquence de franchissement.....	37
1.3- Le cycle de fonctionnement	37
2- Définition d'un graphe d'événement temporisé (GDET).....	37
2.1- GDET fortement connexe (GDEFC)	37
2.2- Type de fonctionnement d'un GDET.....	38
2.2.1- Le fonctionnement au plus tôt.....	38
2.2.2- Le fonctionnement périodique	38
3- Analyse des performances d'un GDEFC p-temporel	39
3.1- Le calcul du temps de cycle	39
3.2- Le calcul des marges de franchissement par la théorie des graphes	41
3.2.1- Définition	41
3.2.2- Calcul de la marge	42
4- Evaluation des performances d'un GDE dans l'algèbre usuelle	43
4.1- Les inéquations aux dateurs dans l'algèbre usuelle	44
4.1.1- Motivation.....	44
4.1.2- Le modèle général.....	45
4.1.3- Le fonctionnement 1-périodique.....	45
4.2- la programmation linéaire pour la recherche des solutions optimales.....	46
Conclusion.....	48

Chapitre III : Etude des systèmes implicites

Introduction	49
1- Généralités sur les systèmes implicites	49
1.1- Définition	49
1.2- Définition d'un système	49
1.3- Représentation équivalente	50
1.3.1- Définition du noyau	50
1.3.2- Utilisation du noyau pour la représentation équivalente.....	50
2- La théorie de Kronecker	52
2.1- La forme de Weierstrass	52
2.2- La forme canonique de Kronecker.....	53

Sommaire

3- Utilisation de la forme de Kronecker pour l'étude des système implicites.....	55
3.1- Existance et unicité de la solution.....	55
4- Obtention de la forme linéaire implicite à partir d'un GDE p-temporel	56
4.1- Motivation.....	56
4.1- Définition du temps de séjour	58
5- Commande en boucle fermée d'un GDE p-temporel	58
5.1- commande par invariance	60
Conclusion.....	63

Chapitre IV : Application sur un SED sous contraintes

Introduction	64
1- Le fonctionnement	64
2- Modélisation du processus	65
3- Le calcul du temps de cycle	66
4- Optimisation des dates de franchissement.....	68
5- La commande du système sous contraintes	69
5.1- Etude de la stabilité	69
Conclusion.....	75
Conclusion générale	76

Introduction générale

Introduction générale

Dans toute discipline d'ingénieur, la modélisation tient une place prépondérante. La compréhension et l'amélioration de tout fonctionnement passent nécessairement par cette phase. Avant d'élaborer un modèle, on pose la question suivante : « un modèle, pourquoi faire ».

En général, les réponses peuvent être orientées dans quatre directions, qui sont les objectifs généraux d'un modèle : concevoir, comprendre, prévoir et commander. Ensuite vient la phase de construction du modèle, autrement dit, la question : « un modèle, comment faire ? ». La réponse à cette question est la suivante :

- Définir l'objectif de la modélisation (lié au cahier des charges).
- Définir les éléments du système (via la réalisation d'une fonction, ou d'un processus).
- Définir les interactions entre ses éléments (hiérarchie).
- Définir la dynamique du système (entités qui circulent entre les éléments, comportement du système au cours du temps).
- Abstraction (choisir les éléments du système pertinents pour l'étude).
- Formalisation, conceptualisation: modèle mathématique (algèbre (max, +), chaîne de Markov), modèle logiciel (simulink), modèle graphique (réseaux de Petri, band graphe) [1].

Dans ce travail, notre choix s'est porté sur la modélisation graphique, plus précisément la modélisation par les réseaux de Petri, car on étudie les systèmes à événements discrets (SED).

Mais avant d'aborder cette méthode de modélisation, on doit d'abord définir les SED et les différencier des systèmes continus. Les grandeurs comme la température et la vitesse (par exemple) sont des variables continues du temps et elles peuvent prendre n'importe quelle valeur dans \mathbf{R} (\mathbf{R} est l'ensemble des nombres réels)

Les équations différentielles sont alors un outil de base approprié pour la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes physiques à temps continu.

Il existe aussi des systèmes pour lesquels :

- Les grandeurs auxquelles nous avons affaire sont discrètes telles que : le nombre de produit dans un stock, le nombre de processus en activité...etc.

Introduction générale

- L'évolution est conditionnée par l'occurrence d'événements à certains instants tel que : la fin d'exécution d'une tâche, le franchissement d'un seuil entrainer une action, l'arrivée d'un produit ou d'un client, la défaillance d'un dispositif...etc.

Ce sont des systèmes à événements discrets (SED), où l'espace d'état est un ensemble discret et l'état change seulement à certains instants du temps et de façon instantanée. A chacune des transitions entre états on associe un événement d'où la définition informelle d'un SED.

Il existe des SED à contrainte du temps de séjour où le facteur temps est une composante primordiale. Ce dernier n'affecte pas seulement les performances du système, mais aussi sa validité fonctionnelle.

Le procédé peut se trouver dans un état interdit si un résultat nécessaire à sa bonne évolution s'est produit trop tôt ou trop tard. On prend par exemple les procédés de l'industrie chimique où les réactifs utilisés apportent leur effet dans une plage de temps donné, les systèmes où une mesure devient obsolète voire incohérente après une durée donnée.

Pour établir un modèle de spécification de ces systèmes qui permettra d'extraire les performances (temps de cycle, la fréquence de franchissement...) et les contraintes logiques et temporelles, on utilise un modèle spécifique de réseaux de Petri se sont les RDPs temporels, où la contrainte de temps est représentée par un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$. Ainsi cette intervalle est associée aux places, on parle des RDPs p- temporels, soit aux transitions on parle des alors des RDPs t- temporels.

Pour la modélisation de notre système, on a choisi les graphes d'événements p- temporels. Ces derniers vont nous conduire à des modèles linéaires implicites ou linéaires généralisés ou descripteurs.

Pour l'étude des graphes d'événement p-temporels modélisé par les systèmes implicites, le travail est organisé comme suit :

Le premier chapitre se porte sur les réseaux de Petri en général, où on étudie en détail les RDPs temporisés et temporels. Ce chapitre nous permet d'aborder les méthodes d'analyse des RDPs en utilisant soit les méthodes graphiques (le graphe des marquages accessibles et graphe des classes) soit la méthode algébrique (t-invariants et p- invariants).

Le deuxième chapitre traite l'étude de la dynamique des graphes d'événements

Introduction générale

p-temporisés et p-temporels c'est-à-dire leur fonctionnement. On a ainsi présenté les différentes méthodes pour la recherche du temps de cycle ainsi que les dates de franchissement des transitions des graphes d'événements considéré. La première est basée sur l'analyse des circuits et la seconde est basée sur la programmation linéaire.

Ensuite le troisième chapitre s'intéresse essentiellement aux systèmes linéaires implicites et leur étude. Le but principal de ce chapitre est de commander en boucle fermée un GDE p-temporel modélisé par des équations linéaires implicites dans l'objectif est d'atteindre un fonctionnement désiré tout en assurant l'existence de solution, le respect des contraintes imposées sur l'état et la commande et la convergence asymptotique de la trajectoire vers un comportement désiré .

Enfin le quatrième chapitre est un exemple d'application, où on contrôle sous contraintes un système de panification modélisé par un RDP p-temporel.

Introduction

Introduits par le mathématicien allemand Carl Adam Petri dans les années 1962 dans sa thèse intitulée « communication avec les automates », les réseaux de Petri sont un outil mathématique très général permettant de décrire les relations qui existent entre les conditions et les événements et de modéliser le comportement des systèmes dynamiques à événements discrets de toute nature. Ils possèdent de nombreuses propriétés qui sont encor largement étudiées.

Les réseaux de Petri présentent de caractéristiques intéressantes :

- Premièrement: ils permettent de modéliser et de visualiser des comportements comportant du parallélisme, de la synchronisation, et du partage de ressources.
- Deuxièmement : les résultats théoriques qui les concernent sont abondants.

Les principaux utilisateurs de ces réseaux sont les informaticiens et les automaticiens. Cependant, l'outil est suffisamment général pour modéliser des phénomènes de natures très variées [2].

1. Définitions de base

Un réseau de Petri est un graphe biparti, composé de deux types de sommets : les places qui sont représentées par des cercles et les transitions qui sont représentées par des barres.

Les places et les transitions sont reliées par des arcs, un arc ne relie jamais deux sommets de même nature.

Chaque place peut contenir une ou plusieurs marques, représentées par des points. Ces marques vont permettre de modéliser le comportement dynamique du système. Si le nombre de marques dans chaque place ne dépasse jamais un, le RDP est dit sauf.

Un RDP est un quadruplet $R = (P, T, \text{Pré}, \text{Post})$ où :

- $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est un ensemble fini de places.
- $T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ est un ensemble fini de transitions.

- $\text{Pré} : (P \times T) \rightarrow \mathbf{N}$ est l'application d'incidence avant. \mathbf{N} est un ensemble des entiers naturels.

S'il existe un arc qui relie P_i et T_j alors $\text{Pré}(P_i, T_j) = 1$, s'il n'y a pas d'arc de P_i vers T_j alors $\text{Pré}(P_i, T_j) = 0$.

- $\text{Post} : (P \times T) \rightarrow \mathbf{N}$ est l'application d'incidence arrière. \mathbf{N} est un ensemble des entiers naturels.

S'il existe un arc qui relie T_j et P_i alors $\text{Post}(P_i, T_j) = 1$, s'il n'y a pas d'arc de P_i vers T_j alors $\text{Post}(P_i, T_j) = 0$ [3].

- **Notation**

${}^{\circ}P_i$: l'ensemble des transitions d'entrée de P_i .

P_i° : l'ensemble des transitions de sortie de P_i .

${}^{\circ}T_j$: l'ensemble des places d'entrée de T_j .

T_j° : l'ensemble des places de sortie de T_j .

Remarque I.1

- *$\text{Pré}(P_i, T_j)$ et $\text{Post}(P_i, T_j)$ peuvent prendre des valeurs supérieures à 1 selon le poids de l'arc qui relie les places et les transitions. (Poids d'un arc est le nombre des arcs).*

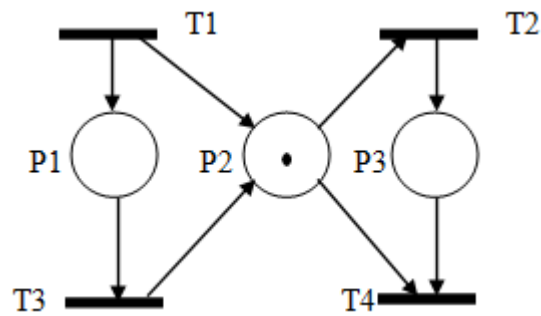
1.1. La notation matricielle

Pour un RDP avec n places et m transitions, on définit la matrice d'incidence C de dimension $n \times m$ et dont les composantes sont données par la relation suivante :

$$C_{ij} = \text{Post}_{ij} - \text{Pré}_{ij} \quad (\text{I.1})$$

C'est la synthèse des deux matrices Pré et Post [3].

La figure suivante présente un réseau de Petri, les deux matrices Pré et Post et la matrice d'incidence C :



$$\text{Pré} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \end{matrix}, \quad \text{Post} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \end{matrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \end{matrix}$$

Figure I.1 : exemple de réseau de Petri et sa notation matricielle.

1.2 Le marquage

Le marquage d'un réseau de Petri est un vecteur à composantes entières positives ou nulles, et dont la dimension est égale au nombre de places, la $j^{\text{ème}}$ composante de ce vecteur représente le nombre de marques dans la $j^{\text{ème}}$ place du RDP considéré.

Un RDP marqué est un couple $M = (R, M_0)$ tel que :

$M_0 : P^n \rightarrow \mathbf{N}^n$ est le marquage initial. \mathbf{N} est l'ensemble des entiers naturels.

R est un RDP [3].

Le marquage M définit l'état du système à un instant donné.

La figure suivante représente un RDP avec son marquage :

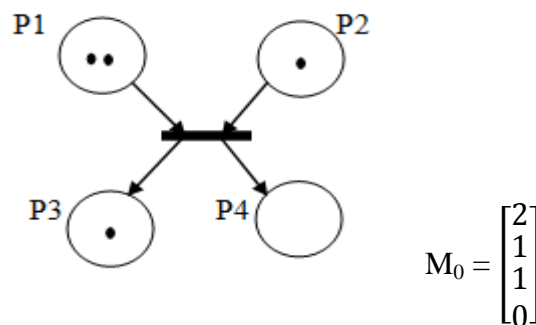


Figure I.2 : Un réseau de Petri et son marquage initial.

2. La dynamique des RDPs

Le franchissement d'une transition décrit le comportement dynamique du système modélisé. Comme on l'a défini auparavant un état est un marquage qui est modifié conformément aux règles de franchissement suivantes:

1. Une transition T_j est dite validée si chaque place P_i en amont (c'est-à-dire la place d'entrée) tel que $\text{Pré}(P_i, T_j) \neq 0$, contient un nombre de marques m_{pi} supérieur ou égal au poids de l'arc reliant P_i à T_j .

$$m_{pi} = \text{Pré}(P_i, T_j) \quad (\text{I.2})$$

2. Le franchissement d'une transition validée T_j retranche de chaque place en amont P_i un nombre de marques égal à $\text{Pré}(P_i, T_j)$ et ajoute dans chaque place en aval P_k ($\text{Post}(P_k, T_j) \neq 0$) un nombre de marques égal à $\text{Post}(P_k, T_j)$.

Le franchissement d'une ou plusieurs transitions produit un nouveau marquage M' tel que :

$$m_{pi} = m_{0pi} + \text{Post}(P_i, T_j) - \text{Pré}(P_i, T_j) \quad (\text{I.3})$$

On dit que le nouveau marquage M' est accessible à partir de marquage initial M_0 .

A partir de M_0 on peut aboutir à tous les états accessibles [3].

Remarque I.2

- Une transition franchissable n'est pas forcément immédiatement franchie.
- Une transition source, c'est-à-dire sans place d'entrée est toujours franchissable.
- Une transition sans place de sortie est une transition puits.

3. Les RDPs autonomes et non autonomes

3.1. Le RDP autonome

Quand un RDP décrit le fonctionnement d'un système évaluant d'une façon autonome, c'est-à-dire les instants de franchissement des transitions ne sont pas connus, on dit que c'est un réseau de Petri autonome.

La figure suivante représente un RDP autonome :

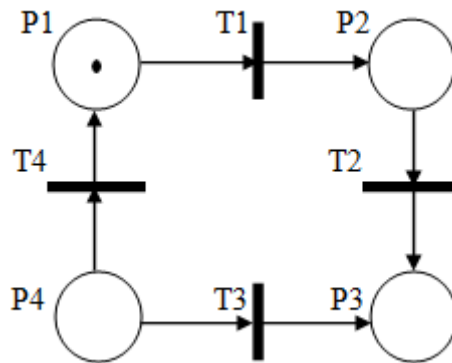


Figure I.3 : un réseau de Petri autonome.

Le fonctionnement

La figure I.3 représente un cycle de saisons. A chaque saison est associée une place et chaque passage d'une saison à la suivante est associé une transition. Si on associe à P1 le printemps, à P2 l'été, à P3 l'automne et à P4 l'hiver. Alors le marquage de la figure I.3 va correspondre au printemps, on voit sur ce RDP qu'il n'y a qu'une transition validée, T1, et que le prochain franchissement sera donc celui de cette transition. Donc le prochain marquage va correspondre à l'été mais on n'a aucune indication sur le moment où se produira le franchissement. Ce RDP décrit de façon qualitative le cycle des saisons.

Comme on a distingué les RDPs autonomes, on décrit aussi les RDP non autonomes.

3.2. Le RDP non autonomes

Un RDP non autonome décrit le fonctionnement d'un système dont l'évolution (franchissement des transitions) est conditionné par des événements externes ou par le temps. Un RDP non autonome est soit synchronisé soit temporisé.

La figure suivante représente un RDP non autonome :

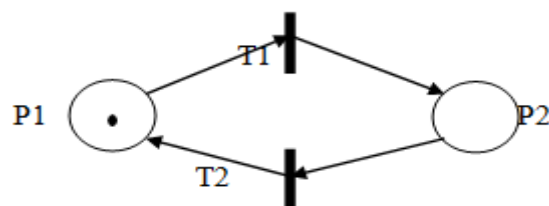


Figure I.4 : réseau de Petri non autonome.

Le fonctionnement

La figure I.4 représente le cycle de fonctionnement d'un moteur qui est arrêté puis en marche puis en arrêt puis en marche, etc. P1 correspond au mode arrêt et P2 correspond au mode marche. Donc le marquage de cette figure va correspondre à l'arrêt du moteur ce qui implique que la transition T1 est la seule transition validée et son franchissement se produira quand un événement extérieur qui est l'ordre de démarrage sera produit, c'est-à-dire on connaît le moment de franchissement de la transition [2].

4. propriétés des RDPs

Les réseaux de Petri possèdent un certain nombre de propriétés qui sont l'accessibilité, la vivacité, la bornitude et la réinitialisabilité.

L'interprétation de ces propriétés permet au concepteur du système d'identifier la présence ou l'absence des propriétés fonctionnelles spécifiques au domaine d'application du système en construction (exemple: systèmes de production, logiciels, etc.) [3].

4.1. L'accessibilité

Un marquage M est dit accessible à partir de marquage initial M_0 , s'il existe une séquence de franchissement δ , tel que $\delta = T_1 T_2 T_3 \dots T_n$ qui transforme M_0 en M .

Dans ce cas on écrit :

$$M_0[\delta > M \quad (I.4)$$

On dit que le marquage M est atteignable par le marquage initial M_0 ou bien il est accessible.

On note l'ensemble des marquages accessibles à partir de M_0 par $R(M_0)$, et on note l'ensemble de toutes les séquences de franchissement réalisable à partir de M_0 par $L(M_0)$ [3].

4.2. L'état d'accueil et réinitialisabilité

Un RDP possède un état d'accueil M_a pour un marquage initial M_0 , si pour tout marquage accessible $M \in R(M)$ il existe une séquence de franchissement δ tel que :

$$M[\delta > M_a \quad (I.5)$$

Un RDP est réinitialisable pour un marquage initial M_0 si M_0 est l'état d'accueil. [3]

4.3. La bornitude

On dit qu'un RDP est k - borné si le nombre de marque dans chaque place ne dépasse pas un nombre fini k , donc pour tout marquage accessible à partir de marquage initial M_0 on écrit :

$$m_{pi} \leq k \quad (I.6)$$

Pour un RDP sauf on dit qu'il est 1- borné [3].

4.4. La Vivacité

Un RDP est vivant, si quelque soit le marquage atteint à partir de marquage initial M_0 , il est possible de franchir chaque transition du réseau en progressant à travers une séquence de franchissement.

Cette propriété nous décrit un RDP sans blocage. (Un blocage est un état où il n'y a pas de transitions validées) [3].

5. Les RDPs particuliers

Certains RDPs possèdent des caractéristiques et des propriétés que n'ont pas les réseaux dans le cas le plus général ce sont des RDPs particuliers.

5.1. Le graphe d'événements

Un RDP est un graphe d'événement si chaque place a exactement une transition de sortie et une transition d'entrée. Un graphe d'événements est appelé parfois graphe de transitions ou graphe marqué [3].

Les possibilités qu'on peut avoir pour un graphe d'événements sont représentées par la figure suivante :

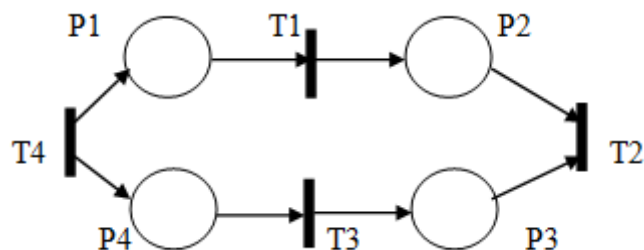


Figure I.5 : Le graphe d'événement.

5.2. Le graphe d'états

Un graphe d'états est un RDP où chaque transition possède exactement une seule place d'entrée et une seule place de sortie [3].

La figure suivante donne un exemple de graphe d'états :

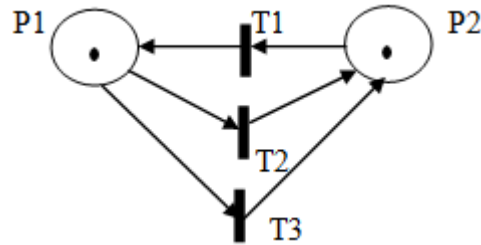


Figure I.6 : le graphe d'états.

5.3. Le RDP sans conflit

Un RDP sans conflit est un réseau dans lequel toute place a au plus une transition de sortie, comme le montre la figure suivante :

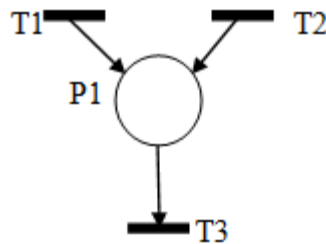


Figure I.7 : un RDP sans conflit.

On définit également les RDP avec conflits où il existe une place qui a au moins deux transitions de sorties, comme le montre la figure suivante : [4]

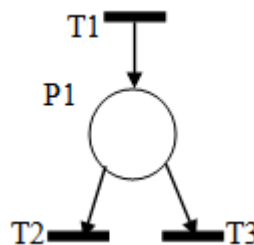


Figure I.8 : un RDP avec conflit.

5.4. Le RDP à choix libre

Un RDP à choix libre est un réseau ordinaire tel que pour tout conflit, aucune des transitions T_j rentrant dans ce conflit, ne possède une autre place d'entrée que P_i . Dans ce type de RDP on trouve : [4]

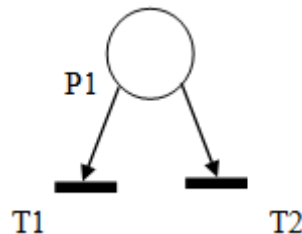


Figure I.9 : un RDP à choix libre.

Mais on peut trouver par exemple la représentation suivante :

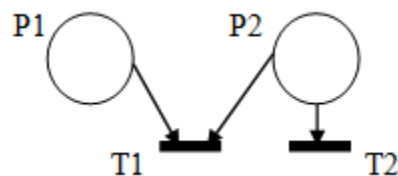


Figure I.10 : un RDP pas à choix libre.

5.5. Le RDP simple

Un RDP simple est un réseau dans lequel chaque transition ne peut être concernée que par un conflit au plus, la figure I.10 représente un RDP simple. Mais s'il existe une transition T_j et deux conflits alors ce RDP n'est pas simple, comme le montre la figure suivante : [4]

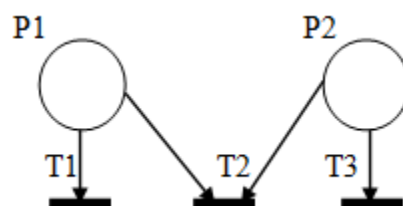


Figure I.11 : un RDP qui n'est pas simple.

Remarque I.3

- D'après l'analyse de ces cinq types des RDPs on peut noter que l'ensemble des RDPs simples inclut l'ensemble des RDPs à choix libre, qui inclut l'ensemble des RDPs sans

conflit, qui inclut lui-même l'ensemble des graphes d'événements. l'ensemble des graphes d'états est inclut dans l'ensemble des RDPs à choix libre.

- Dans un graphe d'états il existe des conflits, mais il n'y a pas des synchronisations, contrairement à un graphe d'événements ou on peut avoir des synchronisations mais il n'y a pas de conflits.

5.6 Un RDP pur

Un RDP pur est un réseau dans lequel il n'existe pas une transition ayant une place d'entrée qui est en même temps une place de sortie, comme le montre cette figure : [4]

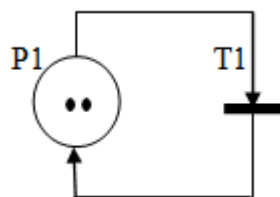


Figure I.12 : RDP impur.

Un RDP impur peut être transformé en un RDP pur comme le montre l'exemple suivant :

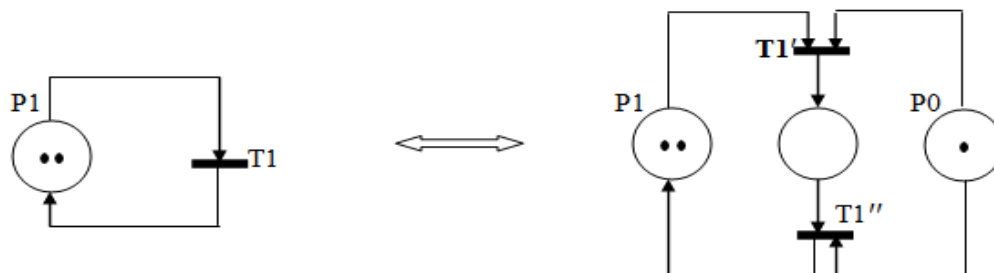


Figure I.13 : transformation d'un RDP impur en un RDP pur.

6. Méthodes d'analyse

L'analyse des RDP peut se faire en utilisant soit le graphe des marquages accessibles soit l'algèbre linéaire.

6.1. L'analyse par le graphe des marquages accessibles (GMA)

Le GMA est un graphe qui est composé de nœuds représentant les marquages accessibles et d'arcs représentant les franchissements des transitions faisant passer d'un marquage à l'autre [3].

L'exemple suivant nous montre un RDP et son graphe des marquages accessibles :

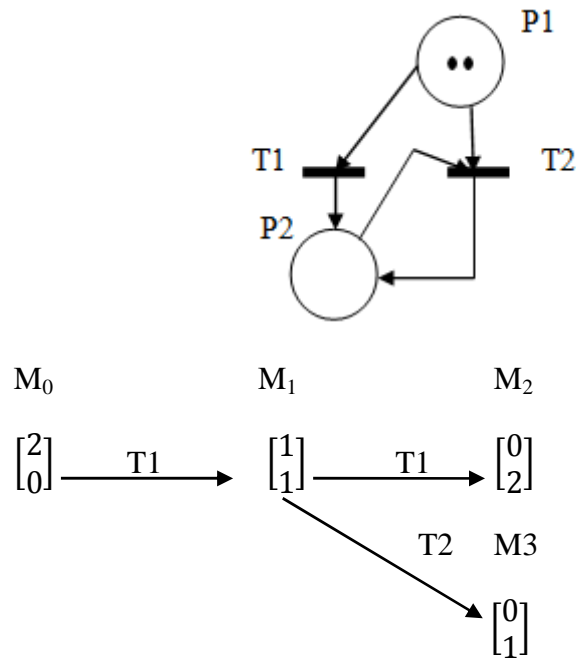


Figure I.13 : RDP est son graphe de marquage.

L'utilisation de ce graphe nous permet d'extraire les propriétés de RDP en se basant sur les propositions suivantes :

- **Proposition 1**

Un RDP est vivant si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1- Il faut que toutes les transitions apparaissent dans le GMA.
- 2- Il faut que le GMA soit fortement connexe, c'est-à-dire si (i, j) deux sommets du graphe, il existe un chemin de i vers j . et vice versa.

- **Proposition 2**

Un RDP possède un blocage s'il existe un marquage dans le GMA sans successeur.

- **Proposition 3**

Si le GMA est fini donc le RDP est borné.

- **Proposition 4**

Un RDP est réinitialisable, si quelque soit le marquage atteignable, il existe une séquence qui permet de revenir au marquage initial.

Remarque I.4

Toutes les propriétés citées auparavant dépendent du marquage initial.

6.2. L'analyse par l'algèbre linéaire

Il est cependant possible d'obtenir des informations pertinentes sur le réseau étudié (bornitude, le blocage et même la vivacité dans certains cas) par des techniques structurelles, c'est-à-dire indépendant des graphes des marquages accessible. C'est l'analyse par l'algèbre linéaire en faisant sortir les composantes conservatives et les invariants de marquage.

Étant donné un RDP modélisant un système à événements discrets, avec C sa matrice d'incidence et M₀ son marquage initial.

Si on note ^oT_j l'ensemble des place d'entrée de T_j. Alors : $\forall P_i \in {}^oT_j$.

$$m_{pi} \geq \text{Pré}(P_i, T_j) \quad (I.7)$$

$$\begin{array}{cccc}
 T_1 & \dots & T_n & \\
 \left[\begin{array}{ccc} \vdots & \dots & \vdots \\ \text{Pré}(P_i, T_j) & & \\ \dots & & \end{array} \right] \begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{array} & \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] & \leq M_0
 \end{array}$$

$T_j \text{ est franchissable} \iff \text{Pré } \delta_j \leq M_0.$

$$\delta_j = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{N}$$

Si T_j est franchissable, le vecteur caractéristique de franchissement est δ_j.

On peut écrire :

$$M_1 = M_0 + C \delta_j.$$

$$M_2 = M_1 + C \delta_i = M_0 + C (\delta_j + \delta_i).$$

⋮

$$M_f = M_{f-1} + C \delta_f = M_0 + C \sum_{k=1}^k \delta_k \dots\dots\dots (*)$$

On note : $\mu = \sum_{k=1}^k \delta_k$. le vecteur caractéristique de la séquence qui transforme M₀ en M_f.

Donc à une séquence de franchissement donnée, on associe un vecteur de franchissement S. ce vecteur représente le nombre de fois que la transition T_i est franchie dans la séquence S [3].

Exemple

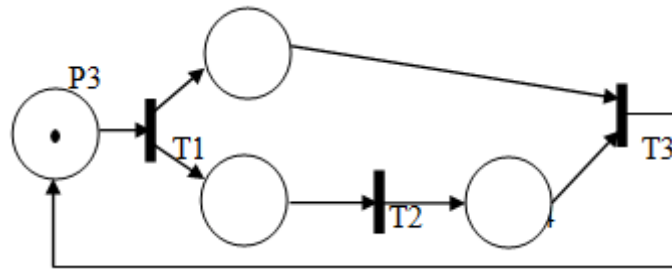


Figure I.14 : exemple explicatif.

$$M [T_1 \ T_2 \ T_3] > M_0, \quad \mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En appliquant la relation (*) on obtient :

$$M = M_0 + C \cdot \mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.2.1. Les invariants de marquage et les composantes conservatives

L'intérêt de tels invariants et de permettre une analyse structurelle du modèle étudié c'est-à-dire sans développer tout ou partie du GMA dont la taille devient gigantesque dès que l'on modélise un système qui est un peu complexe.

- **Les P- invariants (P-semi-flot)**

On appelle P- invariant le vecteur y a composantes entières positives tel que :

$$y^T C = 0 \qquad C^T y = 0 \qquad (I.8)$$

$$y^T M_k = y^T M_0, \text{ quelque soit } M_k \text{ atteignable.}$$

$$\sum_{i=1}^n y(i)M_k(i) = \text{constante.}$$

On appelle **composante conservative** d'un RDP le support du p- invariant, noté $\|y\|$ l'ensemble des places qui correspondent aux composantes non nulles de y .

Si l'ensemble des places est une composante conservative, on dit que le RDP est conservatif [3].

Exemple

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|y\| = \{P1, P2\}$$

- **Les T-invariants (T-semi-flot)**

On appelle T- invariant le vecteur x a composantes entières positives tel que :

$$Cx = 0 \quad (I.9)$$

Le support d'un T- invariant, noté $\|x\|$ est appelée la composante répétitive stationnaire du réseau.

Si l'ensemble des transitions est une composante répétitive stationnaire, on dit que le RDP est répétitif stationnaire [3].

Exemple

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \|x\| = \{T1, T2\}$$

On remarque que les RDPs étudiés dans cette section permettent une analyse qualitative (logique) du système (vivacité, la bornitude, le blocage...etc.).

L'introduction du temps dans les RDP (RDP temporisés et RDP temporels) va permettre de prendre en charge le facteur temps (très présent dans le domaine industriel).

Ce qui permet de faire l'analyse quantitative, l'analyse des performances et ma commande des systèmes à événements discret.

7. Les réseaux de Petri temporisés

On introduit les réseaux de Petri temporisés pour tenir compte de la notion du temps dans la modélisation. Il existe principalement deux types de réseaux de Petri temporisés : les réseaux T-temporisés pour lesquels on associe à chaque transition un temps qui correspond au temps qui s'écoule entre le début et la fin du franchissement de la transition, et les réseaux P-temporisés pour lesquels on associe à chaque place un temps qui représente la durée minimale de séjour d'un jeton dans une place.

7.1. Les RDPs p-temporisés

Un RDP p-temporisé est un couple (R, tempo) avec :

- R un RDP marqué au sens autonome.
- Tempo : $P \rightarrow Q^+$, avec Q^+ l'ensemble des nombres rationnels positifs.

$$P_i \rightarrow \text{tempo}(P_i) = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Tempo (P_i) est la temporisation de la place P_i qui peut éventuellement être nulle [3].

Exemple

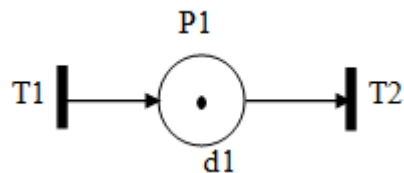


Figure I.15 : exemple d'un RDP p-temporisé.

7.1.1. Principe de fonctionnement

Lorsqu'une marque est déposée dans la place P_1 . Cette marque doit rester au moins pendant un temps d_i , on dit que la marque est indisponible pendant cette durée.

Quand d_i écoulé, alors la marque devient disponible, comme le montre la figure suivante :

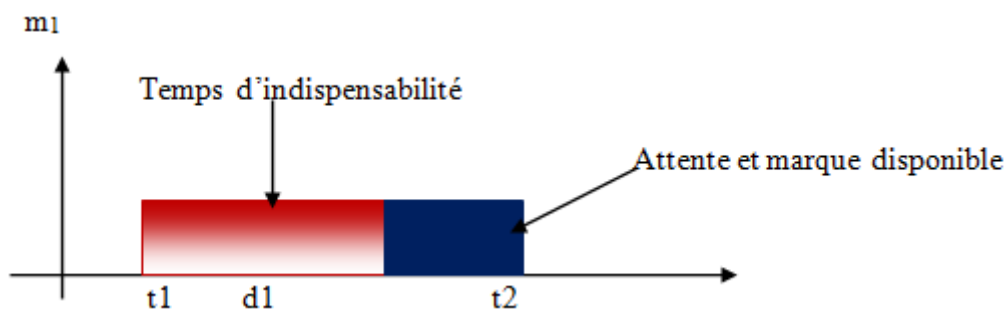


Figure 1.16 : schéma expliquant le fonctionnement d'un RDP p-temporisé.

A l'instant initial toutes les marques sont disponibles et le marquage initial est constitué des marques disponibles, à un instant t quelconque, le marquage présent est la somme des deux marquages (c'est-à-dire le marquage disponible et le marquage non disponible). On note :

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}^d(t) + \mathbf{M}^i(t) \quad (\text{I.10})$$

Une transition est validée par l'équation (I.10) si elle est validée par le marquage $\mathbf{M}^d(t)$.

Le franchissement d'une transition s'effectue comme dans un RDP autonome, en retirant des places d'entrée que les marques disponibles. Ce franchissement a une durée nulle.

Dans le cas où les temps d'attente sont nuls, on parle alors de fonctionnement à vitesse maximale, c'est-à-dire que dès qu'une transition est validée elle est franchie.

7.2. Les RDPs t-temporisés

Un RDP t-temporisé est un couple (R, tempo) avec :

- R un RDP marqué au sens autonome.
- Tempo : $T \rightarrow Q^+$, avec Q^+ l'ensemble des nombres rationnels positifs.

$$T_j \rightarrow \text{tempo}(T_j) = d_j \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Tempo (T_j) est la temporisation de la place T_j qui peut éventuellement être nulle [3].

7.2.1. Principe de fonctionnement

Une marque peut avoir deux états : elle peut être réservée pour le franchissement d'une transition, comme elle peut être non réservée.

Exemple explicatif :

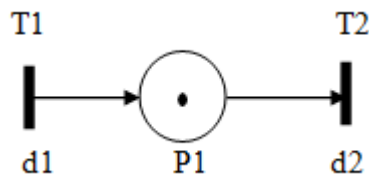


Figure 1.17 : exemple d'un RDP t-temporisé

Lorsque la transition $T1$ est franchie, une marque est déposée dans $P1$ ce qui entraîne la validation de la transition $T2$ qui sera franchissable à n'importe quel instant à partir de ce moment là (c'est-à-dire le moment de la validation).

Quand le franchissement est décidé, la marque nécessaire à ce franchissement est réservée. Lorsque la durée $d2$ est écoulée depuis la décision de franchissement la transition est effectivement franchie.

Le schéma suivant résume le fonctionnement de notre exemple :

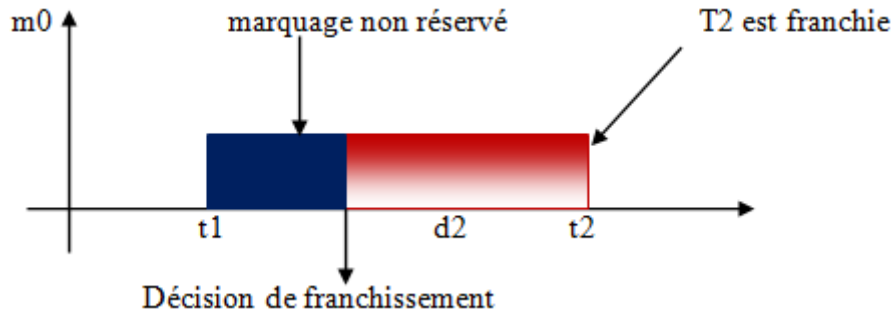


Figure 1.18 : schéma expliquant le fonctionnement d'un RDP t- temporisé

Donc le marquage sera la somme des deux marquages réservé et non réservé, on le représente comme suit :

$$M(t) = M^r(t) + M^n(t) \quad (I.11)$$

- Une transition est validée si les marques non réservées sont en nombre suffisant pour la valider.
- A l'instant initial toutes les marques sont non réservées.
- Le fonctionnement à vitesse maximale est défini de la même manière que dans les RDPs p- temporisés.

7.3. Propriétés des RDPs temporisés

Les propriétés dynamiques et structurelles des RDPTs sont les mêmes que les RDPs généralisés et elles ont les mêmes définitions.

7.3.1 Les propriétés dynamiques

Les propriétés dynamiques des RDP ne se conservent pas tout le temps lorsque on introduit une temporisation, or que :

Un RDPT peut être vivant alors que son réseau sous – jacent ne l'est pas. et vice versa.

La seule propriété qui est conservée est : si le RDP sous- jacent est borné alors le RDP temporisé est nécessairement borné [4].

Remarque 1.5

Comme nous n'avons pas d'outil pour vérifier les propriétés é dynamiques des RDPTs donc, on les traite comme une sous classe des RDP temporels (qui seront définis par la suite).

7.3.2 Les propriétés structurelles

En ce qui concerne les propriétés structurelles les temporisations associées aux RDPTs imposent des contraintes supplémentaires sur le fonctionnement des RDPs sous-jacents.

On déduit alors que l'ensemble des marquages accessibles d'un RDPT est un sous-ensemble des marquages accessibles de RDP sous-jacent, et par conséquent on a :

Les T- invariant (respectivement les P-invariants) des RDPTs sont aussi les T-invariants (respectivement les P- invariants) des RDPs sous- jacent [4].

8. les RDPs temporels

Les RDPs temporisés garantissent par définition un temps de séjour minimum d'un jeton dans une place, pour les RDPs p-temporisés et un temps de franchissement minimum d'une transition pour les RDPs t- temporisés.

Mais il existe des procédés, où le temps opératoire doit être compris entre des valeurs minimales et maximales, comme l'industrie utilisant des réactions chimiques telles que le traitement des pièces dans des bains d'acide par exemple. Dans ce cas on nécessite un temps de trempé minimal et maximal et la violation de ces spécifications peut avoir des conséquences sur la qualité de la production.

8.1. Les RDPs t-temporels (t-RDP)

On les appelle aussi le modèle de MERLIN, ils ont été introduits pour l'étude des problèmes de recouvrement des protocoles de communication. Dans ce modèle à chaque transition on associe un intervalle de temps. Cet intervalle est relatif au moment où la transition devient validée, soit $[a, b]$ cet intervalle. Supposant que la transition soit validée à l'instant τ , alors elle peut être franchie dans l'intervalle matérialisé par les quantités $(a + \tau)$ et $(b + \tau)$ [4].

8.1.1. Définitions

Un RDP t- temporel est un doublet (R, IS)

- R un RDP marqué au sens autonome.
- IS: $T \rightarrow Q^+ \times (Q^+ \cup \infty)$, avec Q^+ l'ensemble des nombres rationnels positifs.
- $t_i : IS(t_i) = [a_i, b_i]$, avec $a_i \leq b_i$.

$IS(t_i)$ définit l'intervalle statique associé à la transition t_i . Ainsi, une transition t_i doit être sensibilisée (validée) pendant au moins a_i unités de temps avant de pouvoir être tirée et ne peut rester validée au delà de b_i unités de temps sans être tirée. Le tir d'une transition est alors de durée nulle (instantané) [4].

8.1.2. Principe de fonctionnement

Le comportement d'un t-RDP peut être caractérisé par la notion d'état, ce dernier est caractérisé par un couple composé : du marquage courant et son intervalle de tire pour chaque transition validé.

L'intervalle de tire considéré sera alors qualifié d'intervalle dynamique qui peut être diffère de l'intervalle statique. Comme l'illustre l'exemple suivant :

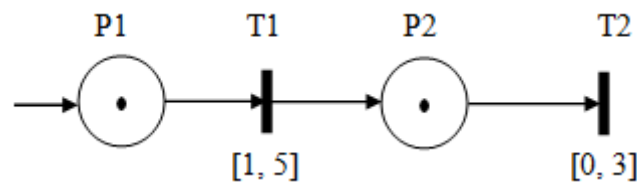


Figure 1.17: portion d'un t- RDP.

Le réseau si dessus a pour origine des temps l'instant où le jeton arrive dans P_1 , dans ce cas seule la transition T_1 est sensibilisée, donc l'intervalle dynamique correspondra à son intervalle statique $[1, 5]$.

Après τ unités de temps tel que $\tau < 5$, la marque est toujours contenue dans P_1 donc l'intervalle dynamique associé à T_1 sera l'intervalle défini par $(\max(0, 1-\tau), 5-\tau)$. [4]

8.1.2.1. Définition d'un état d'un t- RDP

Un état d'un t- RDP est défini par une paire $E(M, I)$ tel que :

M : est le marquage de réseau. $(\forall P_i \in P, M(P_i) \geq 0)$.

I : une application intervalle de tire, associant à chaque transition l'intervalle du temps dans lequel elle peut être tirée. $(\forall T_j \in T, I(T_j) = \emptyset \Leftrightarrow T_j$ est non validée).

L'intervalle de tire dans l'état courant E de ceux assignés initialement aux transitions de réseau.

Cette définition donne la possibilité de déterminer les conditions de franchissement des transitions depuis un état. Sachant que l'origine du temps pour τ est l'origine où l'état E à été atteint.

Une transition T_j est franchissable à un instant τ depuis un état $E = (M, I)$ si et seulement si les deux conditions suivante sont satisfaites :

- T_j est validée par le marquage M aux sens des RDPs autonomes.
- τ est compris entre la date de tire au plus tôt de t et la date de tire la plus petite des dates de tir au plus tard des autres transitions validées (dans l'état E). [4]

8.1.3 Le calcul de l'état suivant

Le tir d'une transition T_j franchissable depuis un état $E = (M, I)$ à un instant θ (θ étant relatif à

l'instant d'apparition de l'état E), conduit au nouvel état $E' = (M', I')$, déterminé par :

1- le nouveau marquage M' :

$$\forall P_i \in P, M'(P_i) = M(P_i) - \text{Pré}(P_i, T_j) + \text{Post}(P_i, T_j) \quad (\text{I.12})$$

2- les nouveaux intervalles de tir I' :

- Pour toutes les transitions T_j non sensibilisées par le marquage M' ,

$$I' = \emptyset$$

- Pour toutes les transitions t_i sensibilisées par le marquage M' , on distingue :

- (i) Pour toutes les transitions T_j sensibilisées par le marquage M et M' non en conflit avec la transition T_j :

$$I' = [\max(\mathbf{0}, a_j - \theta), b_j - \theta] \quad (\text{I.13})$$

Avec $[a_j, b_j]$ l'intervalle statique associé à la transition t_j .

- (ii) Pour toutes les transitions T_k nouvellement sensibilisées par le marquage M' : $[a_k, b_k]$. [4]

8.1.4. Propriétés des t-RDPs

L'ensemble des marques atteints d'un t-RDP est un sous –ensemble des marques atteints du RDP sous-jacent. Par conséquent, les notions d'invariant de transitions et de places sont préservées entre le t-RDP considéré et son RDP autonome sous-jacent.

De plus la bornitude du RDP autonome sous-jacent constitue une condition suffisante pour celle du t-RDP concerné. [4]

8.1.5. Analyse énumérative des t-RDPs :

L'analyse énumérative s'intéresse à la définition et la construction du graphe des classes.

Cette construction nous permet d'étudier les propriétés dynamiques des t-RDP. Elle est basée sur le concept de classe d'états.

8.1.5.1 Notion de classe d'états

Le fait qu'un état puisse avoir une infinité de successeurs rend impossible la construction du graphe des marquages accessibles, on définit donc un graphe qui est proche de ce dernier. C'est le graphe des classes.

Une classe d'états représentera un ensemble d'états obtenus, partant du marquage initial M_0 , en tirant une séquence de transitions δ , cette dernière vérifiant un ensemble de contraintes temporelles. Les états d'une même classe auront alors le même marquage et le domaine de tir associé à la classe correspondra à la réunion de l'intervalle dynamique des différents états constitutifs [3].

Exemple

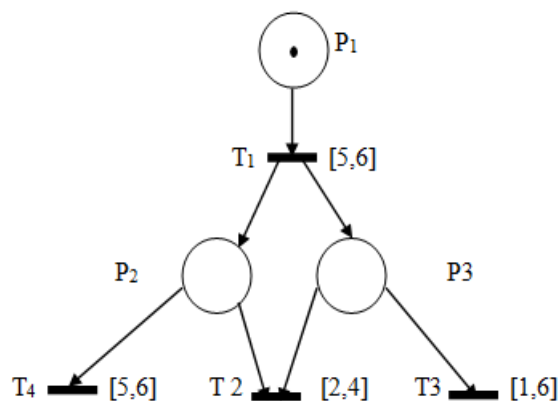


Figure 1.19: exemple explicatif d'un graphe des classes.

On a $E_0 : M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $D_0 = 5 \leq \theta_1 \leq 6$

Si on tire T_1 à un instant θ_1 on obtient : $E_1 : M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $D_1 = \begin{cases} 2 \leq \theta_2 \leq 4 \\ 1 \leq \theta_3 \leq 6 \\ 5 \leq \theta_4 \leq 6 \end{cases}$

Si on tire par exemple T_3 à une date θ_3 tel que $1 \leq \theta_3 \leq \min(4, 6, 6)$ on arrive à l'état :

$E_2 : M_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $D_2 = \begin{cases} 1 \leq \theta_3 \leq 4 \\ 5 - \theta_3 \leq \theta_4 \leq 6 - \theta_3 \\ 5 \leq \theta_1 \leq 6 \end{cases}$

On trouve une infinité d'états suivant E_1 , ils appartiennent tous à la même classe.

D'après cet exemple on constate que le domaine de tir d'une classe d'états peut être défini comme l'ensemble de solutions d'un système d'inégalités où les variables sont associées aux transitions sensibilisées par le marquage de classe considérée.

Ainsi, soit la classe $C = (M, D)$ où M est le marquage et D le domaine de tir, alors ce dernier prendra la forme suivante :

$$D = \{t/A. t \geq b\} \text{ avec :}$$

- A , une matrice de coefficients,
- b , un vecteur de constante,
- t , un vecteur de variables, fonction des transitions sensibilisées par le marquage de la classe considérée.

Pour définir une classe nous devons donner :

- Le marquage associé qui est unique.
- Pour chaque transition tous les instants possibles de tir, donc les domaines de tir de tous les états de la classe sont groupés [4].

– **Condition de tir d'une transition partant d'une classe**

Partant de la classe d'état précédente, une transition T_j sera alors franchissable si et seulement si :

- T_j est validée par le marquage M .
- T_j peut être franchie avant toute autre transition t_i aussi validée dans C [4].

– calcul de la classe suivante

Soit la transition t_i franchissable depuis la classe $C = (M, D)$, avec $D = \{t/A. t \geq b\}$.

Le tir de la t_i conduira à la classe $C' = (M', D')$ suivante caractérisée par :

- Le marquage M' obtenu par :

$$\forall P_i \in P, M'(P_i) = M(P) - \text{Pré}(P_i, T_j) + \text{Post}(P_i, T_j) \quad (\text{I.14})$$

- Le domaine D' obtenu comme suit :

- ajouter au système $A. t \geq b$ les conditions de tir de T_i , exprimant qu'elle soit la première tirée parmi l'ensemble des transitions validées :

$$A. t \geq b, T_i \leq T_j, \forall j \neq i \quad (\text{I.15})$$

- supprimer par substitution dans le nouveau système, les variables t_j associées aux transitions en conflit avec t_i .

Dans le système ainsi réduit effectuer le changement de variables suivant :

$$\forall j \neq i, T_j = T_i + T'_j \quad (\text{I.16})$$

Et éliminer par substitution toutes les occurrences de la variable T_i , pour ne garder que les nouvelles variables T'_j .

Le domaine de tir des transitions restées validées après le tir de t_i est ainsi actualisé.

- Compléter ce dernier système par une variable supplémentaire pour chaque transition nouvellement validée et associée à ces derniers leur intervalle de tir statique.

Par l'intermédiaire des notions précédentes un arbre des classes d'états peut être construit. Ce dernier doit alors permettre de répondre à un certain nombre d'interrogations telles que :

L'accessibilité d'un marquage particulier, l'existence de fonctionnements répétitifs et la finitude du marquage du réseau étudié etc. [4].

Le modèle t- RDP a démontré son efficacité pour la modélisation, l'étude et la commande des systèmes temps réel, où des opérations effectuées ne dépendent pas seulement de l'ordre dans lequel elles sont réalisées, mais aussi de la durée prise pour les réaliser.

Cependant, la règle de franchissement imposant que l'horloge associée à chaque transition ne soit déclenchée qu'à sa validation, ne permet pas la prise en compte de façon naturelle le phénomène de synchronisation sous obligation. Or que dans une place en amont d'une transition de synchronisation un jeton peut attendre infiniment sa validation.

De plus il existe plusieurs explications sur le comportement des t- RDPs dans le cas de multi-sensibilisation.

Exemple

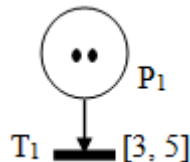


Figure 1.20 : Interprétation de la multi-sensibilisation.

La place P_1 contient initialement deux jetons donc la transition T_1 est 2-sensibilisée.

Deux interprétations sont possibles :

- T_1 est sensibilisée deux fois de façon indépendante, ainsi le premier tir peut intervenir à l'instant $t = 3$ et le second franchissement à l'instant $t = 4$.
- Le tir de la transition T_1 est interprété comme une action relative à chaque jeton la sensibilisant. L'intervalle de tir associé à T_1 représente la durée minimum et maximum nécessaire à l'exécution de l'action. Si T_1 est franchie la première fois à l'instant $t = 3$; donc le prochain tir sera dans l'intervalle $[6, 8]$.

8.2. Les RDPs p-temporels (p- RDPs)

Ils ont été introduits par KHANSA car ils ont la puissance de modéliser et analyser les SED à contraintes du temps de séjours minimum et maximum nécessitant des synchronisations sous obligations.

8.2.1 Définition

Un p- RDP est un doublet : $\langle R, IS \rangle$ où :

- R est un RDP marqué.
- $IS : P \rightarrow Q^+ \times (Q^+ \cup \infty)$ avec Q^+ l'ensemble des nombre rationnels positifs.
- $P_i \rightarrow IS (P_i) = [a_i, b_i]$ avec $a_i \leq b_i$.

IS (P_i) définit l'intervalle statique associe à la place P_i . Un jeton contenu dans la place P_i ne participera à la validation des transitions dont P_i est une place d'entrée que s'il a séjourné pendant au moins a_i unités du temps. Au-delà de b_i unité du temps le jeton est considéré comme mort, et de ce fait ne participera plus à la validation de la transition.

L'une des principales caractéristiques est la notion de réseau marques mortes ou bien séquence de tir marques vivantes [4].

8.2.2. Principe de fonctionnement

Pour l'analyse de comportement et l'étude des propriétés des p- RDPs deux approches on été proposées qui sont approche « intervalle du temps » et approche « âge de marque », mais il est préférable d'utiliser la seconde pour l'analyse des propriétés du réseau.

8.2.2.1. Définition fondée sur l'âge des marques

Comme pour les t-RDP la notion d'état à un rôle primordial dans la détermination de la règle de fonctionnement.

Un état d'un p- RDP est défini par une paire $E (M, Q)$ tel que :

M : est le marquage de réseau. ($\forall P_i \in P, M (P_i) \geq 0$)

Q : une application temps de séjour qui associe à chaque marque k dans la place p_i un nombre réel θ_i^k tel que θ_i^k est l'âge de cette marque (c'est-à-dire le temps écoulé depuis son arrivée dans la place p_i). $\theta_i^k \leq b_i$ où $[a_i, b_i]$ l'intervalle statique associe à p_i .

La marque k dans la place p_i peut participer à la validation des transitions de sortie si $\theta_i^k \geq a_i$, k est morte quand $\theta_i^k \geq b_i$.

L'âge d'une marque k est relatif à l'instant d'arrivée de cette marque dans la place p_i . Supposons que la marque k arrive dans la place p_i à l'instant absolu t . l'âge de cette marque à cet instant est égal à zéro. A l'instant absolu t' , son âge est $\theta_i^k = t' - t$. elle ne participe à la validation de ses transitions de sortie qu'à l'instant $t' = t + a_i$, et elle sera morte à $t' > t + b_i$ [3].

8.2.2.2. Condition de franchissement d'une transition

Une transition T_j est potentiellement tirable à partir de l'état $E = (M, Q)$ si et seulement si :

1. Elle est validée au sens des RDPs autonomes.
2. $\forall P_i \in {}^oT$, il existe au moins $I(P_i, T_j)$ marques dans cette place tel que : [3]

$$\min(b_i, \theta_i^k) - \max(0, \max(a_i, \theta_i^k)) \geq 0 \quad (I.17)$$

Remarque I.6

Il n'existe pas de marques j (qui ne participe pas au franchissement de la transition) tel que :
 $(b_i - \theta_i^k) \leq \max(0, \max(a_i, \theta_i^k))$.

8.2.3. Calcul de l'état suivant

L'état $E' = (M', I')$ est un état accessible à partir de l'état $E = (M, I)$ par l'écoulement de temps τ si et seulement si:

- $M' = M$.
- $\forall j$ une marque contenue dans la place p_i , $a_i^j = \max(a_i^j - \tau, 0)$ et $b_i^j = b_i^j - \tau$ avec:
 $b_i^j \geq 0$, où a_i^j et b_i^j (respectivement a_i^j et b_i^j) représente la borne inférieure et la borne supérieure de l'intervalle dynamique associé à la marque j dans la place P_i dans l'état E (respectivement E').

l'état $E' = (M', I')$ est un état atteignable depuis l'état $E(M, I)$ par le franchissement de la transition T_j si seulement si T_j est directement franchissable depuis un E c'est-à-dire la borne inférieure de son intervalle de tire potentiel est égal à zéro.

$$\forall P_i \in P, M'(P_i) = M(P_i) - \text{Pré}(P_i, T_j) + \text{Post}(P_i, T_j) \quad (I.18)$$

Les marques qui ne bougent pas, gardent les mêmes intervalles dans E et E' (la durée de franchissement d'une transition considérée comme étant nulle).

Les marques nouvellement créées prennent les intervalles statiques associés à leurs places d'accueil [4].

8.2.4. Les propriétés des p-RDPs

- **Finitude et accessibilité**

La définition d'un p- RDP borné est la même que le RDP monotone c'est-à-dire si un p-RDP est borné donc tout ses places sont k- bornées.

La finitude du marquage et le problème d'accessibilité d'un marquage

Sont indécidables pour les p- RDPs [4].

- **Vivacité et blocage**

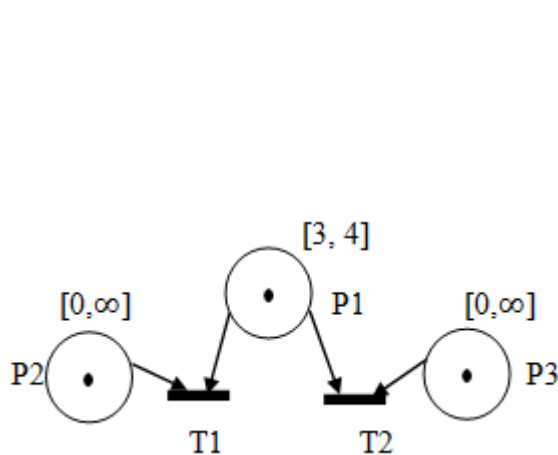
Un p-RDP est vivant pour un marquage initial M_0 si toutes ses transitions sont vivantes. Tel que : une transition t_j d'un p- RDP est vivante pour M_0 , si pour tout marquage M_i accessible depuis M_0 , il existe une séquence de franchissement réalisable à partir de M_i contenant t_j .

Si toutes les marques dans M sont vivantes on dit que l'état $E = (M, I)$ est marque vivante. Ainsi on définit : un p- RDP est marques vivantes (m-v-RDP) pour le marquage M_0 si tous les marquages des états accessibles depuis M_0 sont des états marques –vivantes.

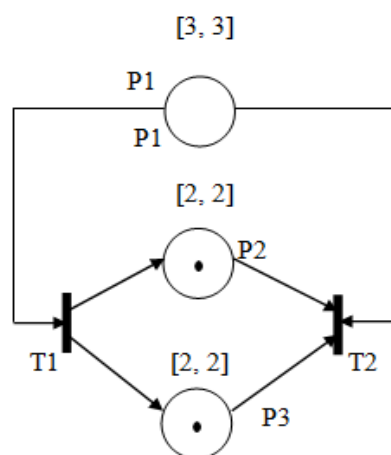
Si une marque d'un marquage d'un état accessible depuis l'état initial E_0 est morte, alors le réseau est marque morte [4].

Remarque I.7 :

Un p- RDP peut être vivant sans être marques- vivantes et inversement. Comme le montre la figure suivante :



p-RDP non vivant et marques-vivantes.



p-RDP vivant et marques-mortes.

8.2.5. L'analyse énumérative des p- RDPs

Comme pour les t-RDP, le domaine de tir d'une classe d'état peut se définir comme l'ensemble de solution d'un système d'inégalités où les variables sont alors associées aux différentes marques présentes dans le marquage de la classe considérée.

Ainsi, soit la classe d'état $C = (M, D)$, où M est le marquage et D le domaine de tir avec D l'ensemble des domaines de tir I_i d'une marque ($i = 1 \dots \infty$).

Le domaine de tir prendra la forme suivante :

$$D = \{\theta / A \cdot \theta \geq b\} \quad (I.19)$$

Avec :

- A , une matrice de coefficients.
- b , un vecteur de constantes.
- θ , un vecteur de variable, fonction des marques présentes dans le marquage de la classe considérée. chaque composant θ_i^j représentant la date de sortie de la marque j contenu dans la place P_i .

Chaque inégalité associée à une marque donne alors l'intervalle dynamique associé à cette dernière dans cette classe. [4]

8.2.5.1 Condition de tir d'une transition partant d'une classe

Définition

Une transition t_i est tirable depuis la classe $C = (M, D)$ si et seulement si:

- T_j est validée au sens des RDP autonomes dans cette classe : $\forall p \in {}^0T$ il existe au moins pré (P_i, T_j) inégalité dans le système (I.19).
- T_j est potentiellement tirable depuis C : l'intervalle potentiel associé à la transition t_i doit vérifier le système augmenté suivant :

$$\begin{cases} A \cdot \theta \geq b \\ a_i^k \leq \theta_{T_j} \leq b_i^k \end{cases} \quad (I.20)$$

Où θ_{T_j} est la date de franchissement de la transition t_i et $[a_i^k, b_i^k]$ est l'intervalle dynamique associé à la marque k qui participe au franchissement de T_j (la place P_i de cette marque est une place d'entrée de la transition). a_i^k et b_i^k sont calculés à partir des inégalités associées à la marque k dans le système (I.20).

De plus pour qu'aucune marque j dans les places d'entrée de la transition t_i ne participe pas au franchissement de la transition T_j ne meure, il faut rajouter au système (I.20) les inégalités :

$\theta_{ti} \leq \theta_i^j$ conduisant au système suivant :

$$\begin{cases} A \cdot \theta \geq b \\ a_i^k \leq \theta_{ti} \leq b_i^k \\ \theta_{Tij} \leq \theta_i^j \end{cases} \quad (I.21)$$

La transition T_j doit être franchie dans l'intervalle d'intersection des intervalles dynamiques associés aux marques qui la valident. La dernière inégalité assure que le franchissement de la transition a lieu avant la mort des marques des marques qui existent dans ses place d'entrée ne participant pas au franchissement.

Si le système (I.21) n'a pas de solution alors la classe considérée est une classe marque morte.

Aussi il faut vérifier que le franchissement de T_j n'entraîne pas la mort des marques dans les places qui ne sont pas des places d'entrée pour T_j . Il faut alors ajouter au système (I.21), les inégalités suivantes : $\theta_{Tj} \leq \theta_1^j$ où p_1 n'est pas une place d'entée de la transition T_j .

Comme des relations peuvent exister entre les dates limites des jetons ne changeant pas de place lors de tir d'une transition du réseau, les inéquations de la forme : $a_i^j \leq \theta_i^j \leq b_i^j$ ne suffisent pas pour représenter entièrement le domaine de tir. Pour les couples de jetons vérifiant la caractéristique précédente, l'inégalité suivante doit aussi être considérée:

$$\theta_1^p - \theta_k^q \leq c_{pq} \quad (I.22)$$

Avec θ_k^q représente la date de sortie de la marque q contenue dans la place p_k .

Ces inégalités traduisent la conservation dans la nouvelle classe d'états, des relations préalablement existantes dans la classe de départ, entre les jetons n'ayant pas participés au tir [4].

8.2.5.2 Calcul de la classe suivante

Soit la transition t_i franchissable depuis la classe $C = (M, D)$, avec $D = \{\theta / A \cdot \theta \geq b\}$

Le tir de T_j conduira à la classe $C' = (M', D')$ suivante caractérisée par :

- le marquage M' obtenu par :

$$\forall P_i \in P, M'(P_i) = M(P_i) - \text{Pré}(P_i, T_j) + \text{post}(P_i, T_j) \quad (\text{I.23})$$

Le domaine D' est obtenu comme suit :

- ajouter au système (I.20) les conditions de tir de T_j , des inégalités qui attribuent à T_j la variable θ_{Tj} représente son instant de franchissement. Ces inégalités auront la forme suivante :

$$a_i^k \leq \theta_{Tj} \leq b_i^k$$

$[a_i^k, b_i^k]$ est l'intervalle dynamique associé à la marque k qui participe au franchissement de t_i . a_i^k et b_i^k sont calculés à partir des inégalités associées à la marque k dans le système (I.20).

Le système augmenté sera alors :

$$\begin{cases} A.\theta \geq b \\ a_i^k \leq \theta_{Tj} \leq b_i^k \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

- exprimer que θ_{ti} est inférieur ou égal à toutes les quantités θ_i^j associées aux autres marques ne participant pas au franchissement de T_j :

$$\theta_{Tj} \leq \theta_i^j \quad (\text{I.26})$$

Pour chaque marque j qui ne participe pas au franchissement de t_i , il y a une inégalité. Le système d'inégalité deviendra :

$$\begin{cases} A.\theta \geq b \\ a_i^k \leq \theta_{Tj} \leq b_i^k \\ \theta_{Tj} \leq \theta_i^k \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

- Effectuer, pour toutes les marques qui ne participent pas au franchissement de t_i , le changement de variable suivant :

$$\theta_i^j = \theta_i^{j'} + \theta_{Tj} \quad (\text{I.28})$$

- Éliminer par substitution toutes les quantités θ_i^j associées aux marques participant au franchissement de la transition T_j pour ne garder que les nouvelles quantités $\theta_i'^j$. On définit alors, les nouveaux domaines de tir potentiel des marques qui n'ont pas changé de place lors du franchissement de T_j .
- Compléter ce dernier système par une variable pour chaque marque nouvellement créée i.e. associé à ces marques les intervalles statiques de leurs places d'accueil.

Partant des différents résultats précédents, un graphe des classes d'états peut aisément être construit, conduisant ainsi à la résolution d'un certain nombre de problèmes liés au comportement du p-RDP étudié. Les sommets du graphe ainsi obtenu correspondront aux différentes classes du graphe et l'intervalle étiquetant l'arc orienté reliant deux classes, correspondra à l'intervalle de tir de la transition dont le franchissement permet le passage ainsi matérialisé.

L'une des principales remarques concernant le graphe ainsi obtenu, est que par l'intermédiaire de ce dernier aucune évaluation des performances n'est possible. En effet, les intervalles matérialisés sont des intervalles relatifs de tir [4].

Conclusion

- Ce premier chapitre s'est porté sur l'étude générale des RDPs passant par les définitions de base, les propriétés ainsi que les RDPs particuliers, tout en abordant les différentes méthodes d'analyse.
- Ensuite on a étudié deux modèles différents des RDPs, se sont les RDP temporisés et les RDPs temporels qu'on va utiliser par la suite pour l'analyse quantitative et la commande.

Introduction

L'analyse qualitative abordée au premier chapitre a permis l'étude des propriétés qui concernent les systèmes modélisés par les RDPs tel que : la bornitude, la vivacité, le blocage ...etc.

Le chapitre présent aborde l'analyse quantitative c'est-à-dire la dynamique des SED modélisés par les graphes d'événements. Cette analyse permet la recherche du cycle de fonctionnement (le temps du cycle) et la marge de franchissement des transitions. Elle nous permet aussi d'optimiser les dates et les périodes de franchissement.

Avant d'aborder l'analyse quantitative on doit d'abord définir quelques notions concernant la dynamique des SED tel que : le fonctionnement périodique, le régime stationnaire... etc.

L'intérêt principal de ce chapitre est de démontrer l'importance de l'utilisation des techniques analytiques pour l'évaluation des performances.

1. Le fonctionnement périodique

L'évolution d'un RDP mène à un état identique au bout d'un temps fini, dans ce cas le régime stationnaire est établi et le système va avoir un fonctionnement périodique.

1.1. Le fonctionnement périodique d'un RDPT

Pour un RDP temporisé borné, le fonctionnement à vitesse maximale conduit à un fonctionnement périodique au bout d'un temps fini pour le marquage initial M_0 [3].

Remarque II.1

Le régime stationnaire assure le caractère répétitif du système. Il assure aussi un fonctionnement sans blocage.

1.2. La fréquence de franchissement

La fréquence de franchissement f_j d'une transition T_j est le nombre moyen de franchissements de T_j par unité du temps lorsque le régime stationnaire est établi [3].

1.3. Le cycle de fonctionnement (le temps du cycle)

Le temps du cycle noté λ d'un graphe d'événements (GDE) est le temps moyen séparant deux tirs consécutifs d'une transition.

Pour un système de production par exemple, il correspond au temps moyen séparant deux pièces produites [3].

2. Définition d'un graphe d'événements temporisé (GDET)

Un GDET est un couple (N, tempo) .

N : est un graphe d'événements marqué.

$\text{tempo} : P \text{ ou } T \rightarrow \mathbb{Q}^+$. \mathbb{Q}^+ est l'ensemble des nombre rationnels positifs.

$\text{tempo}(P_i) = d_i$ ou $\text{tempo}(T_j) = d_j$.

Ainsi on définit:

2.1. GDEFT fortement connexe (GDEFC)

On dit qu'un GDE est fortement connexe s'il existe un chemin de i vers j et inversement de j vers i tel que i et j sont deux sommets de réseau.

Définition

Dans un circuit élémentaire C d'un GDE, le nombre de marques est invariant quelque soit les transitions franchies.

Un circuit élémentaire est un chemin orienté qui part d'une ou plusieurs transitions du RDP et y revient sans plus d'une fois la place ou la transition. [3]

Théorème II.1

Un GDE vivant si et seulement si le marquage de chaque circuit élémentaire est strictement positif.

Un GDEFC est borné si et seulement si le marquage initial est borné.

Dans un GDEFc, s'il existe un circuit ne contenant aucune marque alors le RDP va atteindre un état de blocage.

2.2. Types de fonctionnement d'un GDET

2.2.1. Le fonctionnement au plus tôt

Les franchissements des transitions sont initialisés dès que celles-ci sont franchissables. Cette hypothèse semble à priori justifiée en vu d'obtenir les performances maximales du système [3].

Remarque II.2

Une fois que les performances maximales, sont atteintes la notion de séquence franchissable est remplacée par la notion d'exécution contrôlée, suite de transition dont l'instant de franchissement est imposé à l'avance.

2.2.2. Le fonctionnement périodique

Lorsqu'on a des GDEFc, alors on peut chercher le cycle de fonctionnement autrement dit le temps du cycle, noté λ_{\max} qui se calcul comme suit :

$$\lambda_{\max} = \max_{ck} \left\{ \frac{\sum_{ck} d_i}{\sum_{ck} m_{0i}} \right\} \quad (\text{II.1}) \quad \text{avec}$$

$\sum_{ck} d_i$, la somme des temporisations des places (ou transitions) dans le circuit élémentaire C_k .

$\sum_{ck} m_{0i}$, la somme des marques de circuit élémentaire C_k . [3]

Exemple

La méthode de calcul du cycle de fonctionnement est illustrée dans l'exemple qui suit :

Sur la figure ci-dessous les circuits élémentaires sont :

$$C_1 = P1 \ T1 \ P2 \ T3 \ P1.$$

$$C_2 = P1 \ T1 \ P3 \ T2 \ P4 \ T3 \ P1.$$

Donc :

$$\lambda_{\max} = \max \left\{ \frac{1+2}{1} \quad \frac{1+3+3}{1} \right\} = \max \left\{ \frac{3}{1} \quad \frac{8}{1} \right\}$$

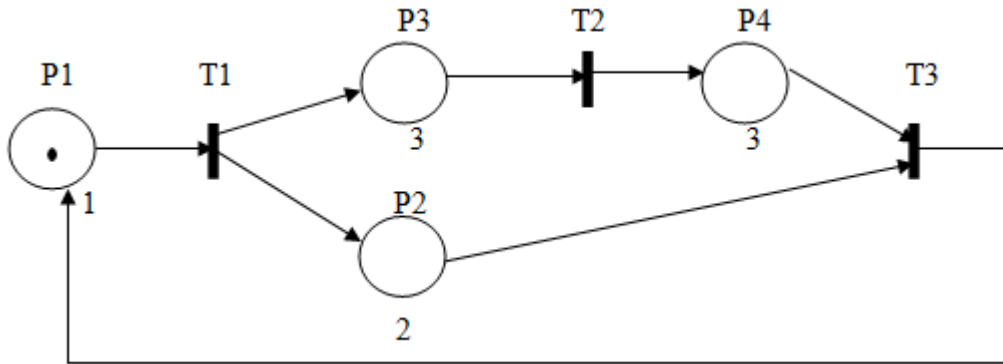


Figure II .1 : exemple explicatif.

3. Analyse des performances d'un GDEFC p- temporel (p-GDEFC) :

Les GDEFC p- temporel ont la même définition que les GDETFC sauf qu'ici les durées sont remplacées par des intervalles du temps noté $[a_i, b_i]$. [3]

3.1. Le calcul du temps de cycle

- Le temps de cycle statique minimal d'un circuit C_k est $\delta_{\min}(C_k)$ tel que :

$$\delta_{\min} = \frac{\sum_{ck} a_i}{\sum_{ck} m_{0i}} \quad (\text{II.2})$$

Où $\sum_{ck} a_i$ est la somme des bornes inférieures des intervalles statiques associé aux places P_i de C_k et $\sum_{ck} m_{0i}$ est la somme des marques dans C_k .

- Le temps de cycle statique maximal d'un circuit C est $\delta_{\max}(C)$ tel que :

$$\delta_{\max} = \frac{\sum_{ck} b_i}{\sum_{ck} m_{0i}} \quad (\text{II.3})$$

Où $\sum_{ck} b_i$ est la somme des bornes supérieures des intervalles statiques associé aux places P_i de C_k et $\sum_{ck} m_{0i}$ est la somme des marques dans C_k .

Le temps du cycle pour un p- GDEFC est noté λ_{\max} tel que :

$$\lambda_{\max}^{\min} \leq \lambda_{\max} \leq \lambda_{\max}^{\max} \quad (\text{II.4})$$

λ_{max}^{min} et λ_{max}^{max} sont calculés comme suit :

$$\lambda_{max}^{min} = \max_{ck} \left\{ \frac{\sum_{ck} a_i}{\sum_{ck} m_{0i}} \right\} , \quad \lambda_{max}^{max} = \max_{ck} \left\{ \frac{\sum_{ck} b_i}{\sum_{ck} m_{0i}} \right\}$$

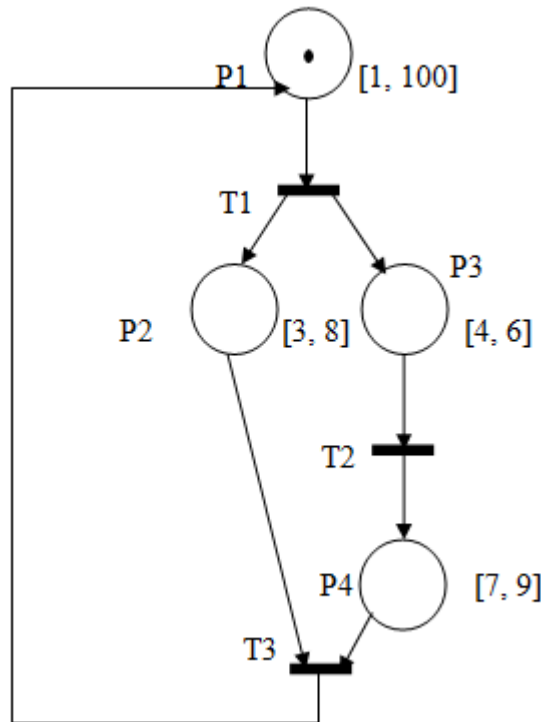
$\sum_{ck} a_i$: La somme des bornes inferieures du circuit élémentaire C_k .

$\sum_{ck} b_i$: La somme des bornes supérieures du circuit élémentaire C_k

$\sum_{ck} m_{0i}$: La somme des marques dans le circuit élémentaire C_k .

L'intervalle $[\lambda_{max}^{min}, \lambda_{max}^{max}]$ est appelée la fenêtre temporelle du temps de cycle.

Exemple



$$\lambda_{max}^{min} = \max \left\{ \frac{1+3}{1} , \frac{1+4+7}{1} \right\} = \max \{4 \quad 12\} = 12.$$

$$\lambda_{max}^{max} = \max \left\{ \frac{100+6+9}{1} , \frac{100+8}{1} \right\} = \max \{117 \quad 108\} = 117.$$

Donc : $12 \leq \lambda_{max} \leq 117$.

Figure II.2:exemple de calcul de temps de cycle pour un p-GDEFc.

3.2. Calcul des marges de franchissement par la théorie des graphes

3.2.1. Définition

Soit G un GDEFC p-temporel et π la période de fonctionnement tel que :

$\pi \in \{\lambda_{max}^{min}, \lambda_{max}^{max}\}$, λ_{max}^{min} et λ_{max}^{max} sont calculées dans le paragraphe (3.1).

G' est le graphe associé à G . il défini comme suit:

- Les sommets de G' : à chaque transition T_j de G est associé un sommet j de G' .
- Les arcs de G' : à chaque place $P_{j,j+1}$ dans G , sont associés deux arcs :
 1. Un arc orienté de j vers $j + 1$.
 2. Un arc orienté de $j + 1$ vers j .
- Les valuations des arcs :
 1. La valeur de l'arc associé à $P_{j,j+1}$ et orienté de j vers $j + 1$ est donné par :

$$v_{pj,j+1} = a_{pj,j+1} - \pi \cdot m_{pj,j+1} \quad (\text{II.5})$$

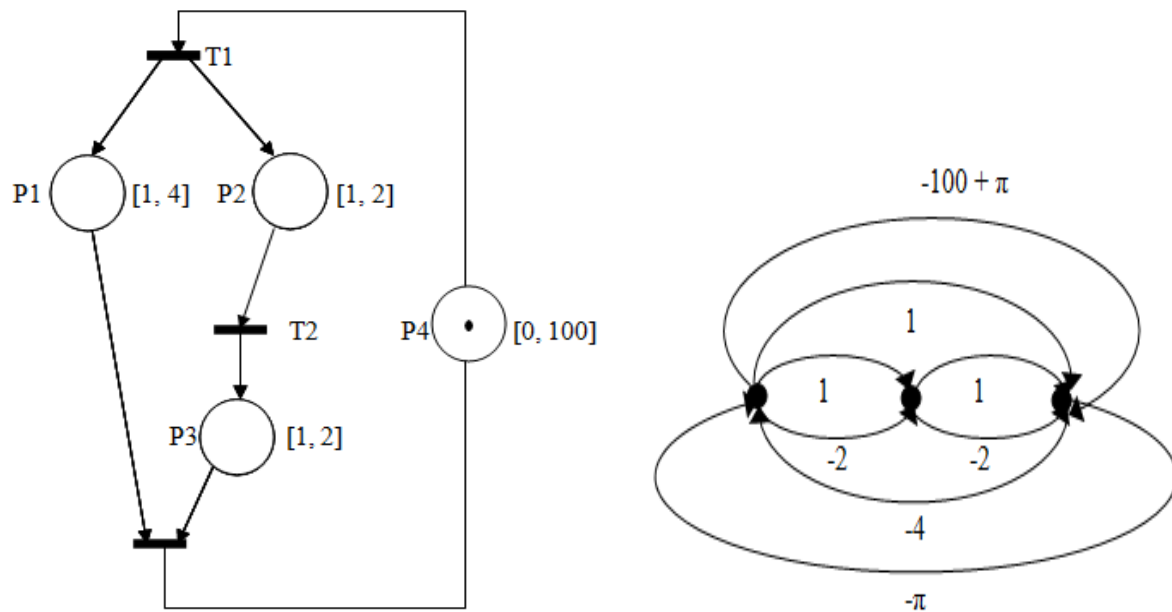
2. La valeur associée représentant $P_{j,j+1}$ et orienté de $j+1$ vers j est donnée par :

$$v'_{pj,j+1} = -b_{pj,j+1} + \pi \cdot m_{pj,j+1} \quad (\text{II.6})$$

Avec : a et b sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure associée à la place p_j [3].

Exemple

La figure ci-dessous représente un graphe d'événement p- temporel et son graphe associé :



$\pi \in [\lambda_{max}^{min}, \lambda_{max}^{max}]$ tel que : $\lambda_{max}^{min} = \max_{ck}[1, 2] = 2$ et $\lambda_{max}^{max} = \max_{ck}[4, 100]$ donc $\pi \in [2, 104]$

Figure II.3 : exemple de graphe associé.

3.2.2. Calcul de la marge

La marge maximale sur le franchissement d'une transition T_j par rapport au franchissement d'une autre transition T_i est la différence entre la date du $k^{\text{ème}}$ franchissement au plus tôt possible et la date du $k^{\text{ème}}$ franchissement au plus tard possible de la transition T_j . [3]

Théorème II.2

Pour un graphe d'événement p-temporel G et son graphe développé G' . Pour le fonctionnement périodique de période $\pi \in [\lambda_{max}^{min}, \lambda_{max}^{max}]$, la date de franchissement au plus tôt de la transition T_j par rapport à la date de franchissement de la transition T_i noté : $S_{T_j i min}(1)$ est donné par la somme des poids du plus long chemin allant de i vers j dans G' et la date du premier franchissement de T_i notée $S_{T_i}(1)$

Explication

Dans le graphe développé dans la figure II.3 on a le plus long chemin de i vers j , de 1 vers 3 par exemple est gal à 2.

La date du premier franchissement $S_{T_i}(1)$ est égale à 0. Donc : $S_{T_{jmin}}(1) = 2 + 0 = 2$.

Théorème II.3

Pour un graphe d'événement p-temporel G et son graphe développé G' , pour le FP de période $\pi \in [\lambda_{max}^{min}, \lambda_{max}^{max}]$, la date de franchissement au plus tard de la transition T_j par rapport à la date de franchissement de la transition T_i noté $S_{T_{jmax}}(1)$ est donné par la somme de la valeur absolue des poids du plus long chemin allant de j vers i et la date du premier franchissement de T_i notée $S_{T_i}(1)$

Explication

Pour la figure II.3, on a le poids de chemin le plus long allant de 3 vers 1 est égal à 4.

$$S_{T_{jmax}}(1) = 4$$

Corollaire II.1

Soit G un GEDFC p-temporel et G' son graphe développé T_i et T_j deux transitions dans G , la marge maximale notée R_{jmax} sur le franchissement de la transition T_j par rapport au franchissement de T_i est égal à la valeur absolue du poids du chemin le plus long allant de j vers i dans G' moins le poids du plus long chemin de i vers j dans ce graphe.

$$R_{T_{jmin}}(1) = S_{T_{jmax}}(1) - S_{T_{jmin}}(1) \quad (II.7)$$

Si on reprend le même exemple que la figure II.3 on trouve :

$$R_{jmax} = 4 - 2 = 2 \text{ unités du temps.}$$

En général si on a la date de franchissement de la transition T_i la transition T_j peut être franchie entre $S_{T_{jmin}}(1)$ et $S_{T_{jmin}}(1) + R_{T_{jmin}}(1)$.

4. Évaluation des performances d'un GDE dans l'algèbre usuelle

L'évaluation des performances consiste à rechercher le temps de cycle ainsi que les dates de franchissement des transitions.

Contrairement à l'approche basée sur l'analyse des circuits, on peut calculer le temps de cycle en utilisant le modèle décrivant le comportement du système (utilisation des inéquations

aux dateurs pour les GDE p-temporels). Et pour déterminer les valeurs à optimiser par la programmation linéaire, on suppose que le GDE p-temporel à un comportement 1-périodique. [5]

4.1. Les inéquations aux dateurs dans l’algèbre usuelle1

4.1.1. Motivation

Soit le GDE p-temporel représenté dans la figure suivante :

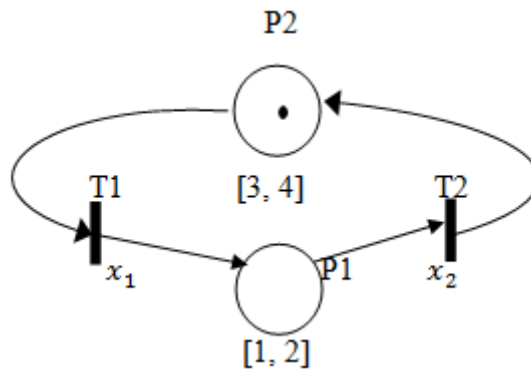


Figure II.4 : GDE p-temporel.

On peut écrire les inéquations suivantes :

$$x_2(k) \geq x_1(k) + 1$$

$$x_2(k) \leq x_1(k) + 2$$

Cette dernière expression permet d’exprimer les dates limites de franchissement de la transition T2 (borne supérieure).

$$x_1(k) \geq x_2(k - 1) + 3.$$

$$x_1(k) \leq x_2(k - 1) + 4.$$

Si on met ces inéquations sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k - 1) \\ x_2(k - 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4.1.2. Le modèle général

Plus généralement on obtient un modèle de la forme :

$$\overline{A_0} x(k) \leq \sum \overline{A_i} x(k - \tau_i) + \overline{T} \quad (II.8)$$

On peut toujours faire un changement de variables pour obtenir le modèle suivant :

$$A_0 x(k) \leq A_1 x(k - 1) + T \quad (II.9)$$

Ceci est possible en dupliquant les places ayant plus d'un jeton en plusieurs places contenant exactement un seul jeton. Comme l'explique la figure suivante :

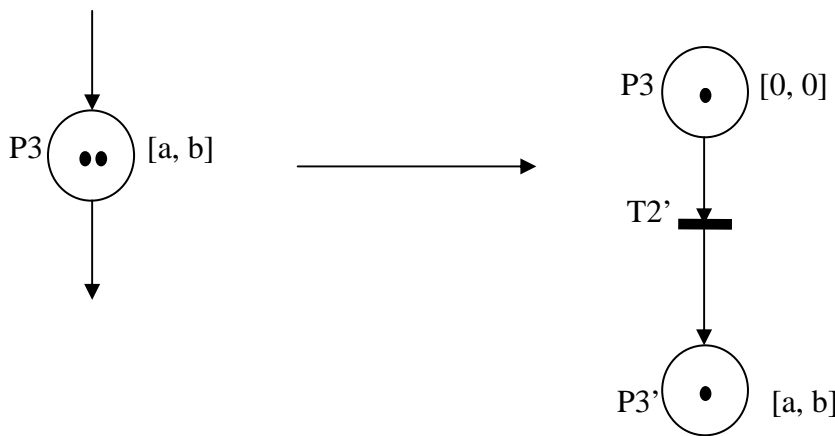


Figure II.5 : place à deux jetons dupliquée.

Le modèle (II.9) peut être qualifié de modèle polyédrale puisqu'il contient toutes les trajectoires admissibles.

Pour la figure (II.4) on a :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4.1.3. Le fonctionnement 1- périodique

Dans un système de production par exemple, on a tendance à chercher une conduite qui nous permet d'avoir un fonctionnement périodique.

Parmi les fonctionnements périodiques connus, on trouve le fonctionnement

1- périodique qui est le plus facile et le plus recherché. Dans cette section, on donne les conditions nécessaires et suffisantes permettant de caractériser un ce fonctionnement.

Le fonctionnement 1-périodique est caractériser par :

$$x(\mathbf{k} + 1) = x(\mathbf{k}) + \lambda u \quad (\text{II.10})$$

Si on remplace dans l'équation (II.9) on obtient :

$$A_0[x(k-1) + \lambda u] \leq A_1 x(k-1) + T$$

$$A_0 x(k-1) + A_0 \lambda u \leq A_1 x(k-1) + T$$

$$(A_0 - A_1)x(k-1) + A_0 \lambda u \leq T$$

On met $(A_0 - A_1) = A$ donc notre inéquation devient :

$A x(k-1) + A_0 \lambda u \leq b$, on la met sous forme matricielle on aura :

$$[A \quad A_0 u] \begin{bmatrix} x(k-1) \\ \lambda \end{bmatrix} \leq T \quad \text{Cette inégalité est sous la forme :}$$

$$\bar{A} \bar{x} \leq T \quad (\text{II.11})$$

$$\text{Avec : } \bar{A} = [A \quad A_0 u] \text{ et } \bar{x} = \begin{bmatrix} x(k-1) \\ \lambda \end{bmatrix}$$

A partir de cette inégalité on peut chercher les dates de franchissement $x(k-1)$ et le temps de cycle λ .

Mais on doit d'abord prouver l'existence de la solution en utilisant le théorème de Farkas.

Théorème de Farkas

Le système d'inégalité linéaire $A x \leq T$ a une solution si et seulement si \exists un vecteur $y \geq 0$ tel que $y^t A = 0$ et $y^t T \geq 0$

Remarque II.3

Le théorème de Farkas est utilisé dans notre étude pour confirmer l'existence du temps de cycle.

4.2. La programmation linéaire pour la recherche des solutions optimales

Une fois que l'existence de la solution est prouvée, on passe à sa recherche en utilisant la programmation linéaire.

Pour cela on prend comme fonction objective $C^t \bar{x}$ et comme contraintes on met $Ax \geq 0$ et $x \geq 0$, qui sont des contraintes de type inégalité.

Le vecteur C peut prendre différentes valeurs selon l'objectif de notre optimisation :

$C = [1 \quad \dots \quad 1]$ si on veut optimiser \bar{x} .

$C = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 0]$ si on désire optimiser les dates de franchissement.

$C = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]$ pour l'optimisation de temps de cycle.

Formulation du problème :

Pour augmenter la vitesse du système de production on réduit son temps de cycle, ainsi le problème d'optimisation est formé comme suit :

$$\min C^t x.$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Exemple

Pour le système de la figure II.4 on a :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Existence de la solution :

Selon le lemme de Farkas $\bar{A} \bar{x} \leq b$ admet des solutions si et seulement si $\exists y \geq 0 / y^t \bar{x} = 0$ et $y^t b \geq 0$.

Le calcul de y :

$$[y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$y_2 = y_3$ et $y_0 = y_1$, on prend $y^t = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 2]$.

Le calcul de $y^t b = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \geq 0$

Donc la solution de l'équation II.12 existe

La solution optimale peut être calculée sous matlab.

Après l'exécution de programme matlab on a pu arriver au résultat suivant :

Pour cet exemple le programme suivant nous permet la recherche des solutions :

x =

0.0000

1.0000

4.0000

Remarque II.4

La méthode de la programmation linéaire introduite dans [5] ne suppose pas des graphes d'événements fortement connexes.

Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'étudier la dynamique des SED c'est-à-dire leur fonctionnement, en analysant les dates de franchissement ainsi que le temps de cycle et ceci en utilisant de différentes méthodes tel que :

- La recherche du temps de cycle par l'analyse des circuits (les GDE p-temporels et p-temporisés).
- Le calcul de la marge de franchissement d'une transition par rapport à une autre par la théorie des graphes.
- Optimisation de temps de cycle ainsi que les dates de franchissement en utilisant la programmation linéaire.

Introduction

Dans ce chapitre on utilise les équations linéaires implicites pour modéliser un GDE p-temporel.

Ces équations nous permettent de commander les SED et de démontrer l'existence et l'unicité de la solution. Notons que le vecteur des solutions à chercher dans un GDE p-temporel représente les dates de franchissement des transitions et le temps de cycle.

1. Généralités sur les systèmes linéaires implicites

L'étude des systèmes linéaires implicites nous permet de mettre en évidence les propriétés suivantes : [6]

- L'existence et l'unicité des solutions.
- L'atteignabilité et la commandabilité.
- L'observabilité et la reconstructibilité.

1.1. Définition

Un système linéaire implicite discret est représenté sous la forme suivante :

$$E x(k+1) = A x(k) + B u(k) \quad (\text{III.1})$$

Avec : $E \in Z^{q \times n}$, $A \in Z^{q \times n}$, $B \in Z^{q \times m}$ [6].

Si la matrice E est une matrice inversible le système devient explicite.

1.2. Définition d'un système

On appelle système l'ensemble des couples (x, u) de deux suites $\{x_0 \dots x_i \dots\}$ et $\{u_0 \dots u_i \dots\}$ tel que l'équation (III.1) est satisfaite $\forall k \geq 0$.

Ce système est noté :

$$E x(k+1) = A x(k) + B u(k) \quad (\text{III.1})$$

On appelle entrée admissible une suite u pour laquelle il existe une suite $x \in N^X$ tel le que :

$(x, u) \in (III.1)$. On dit que $\gamma \in X$ ($X = R^n$) est une condition initiale admissible s'il existe pour toute entrée u admissible une suite $x \in N^X$ tel le que $(x, u) \in (III.1)$ et $x_0 = \gamma$ [6].

1.3.Représentation équivalente

1.3.1. Définition du noyau

E et F sont deux espaces vectoriels, munis respectivement des bases $(b_1 \dots b_n)$ et $(c_1 \dots c_m)$. La matrice de l'application linéaire f relative à ces deux bases est (a_{ij}) . Le noyau de f noté $\text{Ker}(f)$ est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul. Soit v un vecteur de E et $x = (x_1 \dots x_n)$ le n -uplet de ses coordonnées dans la base $(b_1 \dots b_n)$. La condition nécessaire et suffisante sur x pour que $f(v)$ soit nul est que toutes les coordonnées de $f(v)$, c'est-à-dire toutes les lignes du produit Ax , soient nulles.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & \dots & a_{1j}x_j & \dots & a_{1n}x_n & = & 0 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{i1}x_1 & \dots & a_{ij}x_j & \dots & a_{in}x_n & = & 0 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & \dots & a_{mj}x_j & \dots & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases} \quad (III.2)$$

Le système linéaire (III.2) est homogène, l'ensemble de ses solutions est un sous-espace vectoriel de R^n . La méthode du pivot de Gauss permet de déterminer une base de l'ensemble des solutions de (III.2), donc une base de $\text{Ker}(f)$.

1.3.2. Utilisation du noyau pour la représentation équivalente

Soit N une matrice de base du noyau à gauche de la matrice B , donc on peut noter le système (III.1) sous la forme :

$$NE x(k+1) = NA x(k) \quad (III.3)$$

Si $x \in (III.3)$, alors pour tout k ($k \in \mathbf{N}$), $E x(k+1)$ et $A x(k)$ sont égaux modulo un élément de noyau de E . Par conséquent :

$$E x(k+1) = A x(k) + b \quad (III.4)$$

Où $b \in \text{Im}(B)$ soit

$$E x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

Où $u(k)$ est tel que $B u(k) = b$.

Réciproquement, si $x(k+1) = A x(k) + B u(k)$, il est clair que :

$$NE x(k+1) = NA x(k)$$

Puisque par définition, $N.B = 0$ [6].

Remarque III.1

Si on applique la transformé en z pour le système (III.3), on obtient $N(zE - A)x(z) = 0$

Le terme $(zE - A)$ est appelé le faisceau des matrices E et A . Ce dernier nous permet de faciliter l'étude des systèmes linéaires implicites.

- **Proposition 1**

Soit $x \in N^X$ ($X = R^n$) alors : $x \in$ (III.1) $\Leftrightarrow \exists u \in N^X / (x, u) \in$ (III.3)

(III.3) est la projection de (III.1) sur N^X , donc un vecteur est condition pour (III.1) si et seulement s'il est condition initiale pour (III.3).

Pour $x_0 \in N^X$, $\exists x_1$ tel que

$$NEx_1 = NAx_0 \text{ si et seulement si } x_0 \in (NA)^{-1} \text{Im}(NE)$$

En suite : $\exists x_2$ tel que : $NEx_2 = NAx_1$ si seulement si $x_0 \in (NA)^{-1} (NE) (NA)^{-1} \text{Im}(NE)$ [6].

- **Proposition 2**

D'après la proposition (1) on note :

$$\begin{cases} M_0 = R^n \\ M_{i+1} = (NA)^{-1} (NE) M_i = A^{-1} (EM_i + \text{Im}(B)) \end{cases}, i \geq 0 \quad \text{(III.5)}$$

Cette suite n'est pas croissante, stationnaire après un nombre fini d'itérations vers un espace vectoriel noté M^* , qui est l'ensemble des conditions initiales admises de (III.3) et de (III.1).

La démonstration suivante nous permet de vérifier les propriétés ci-dessus [6].

Démonstration

Il est évident que $M_1 \subset M_0$.

On suppose que $M_i \subset M_{i-1}$, alors :

$$M_i = (NA)^{-1} (NE) M_{i-1} \subset (NA)^{-1} (NE) M_i.$$

On en déduit donc par récurrence que $M_i \subset M_{i-1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

La dimension des espaces M_i est donc décroissante, et inférieure à n , par conséquent convergente après au plus n étapes d'itération. On observe alors :

$$\dim(M_{i+1}) = \dim(M_i) \Leftrightarrow M_{i+1} = M_i \quad M_{i+1} = (NA)^{-1} (NE) M_{i+1} = (NA)^{-1} (NE) M_i = M_{i+1}.$$

Et par récurrence $M_{i+k} = M_i$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Dès lors que $M_{i+1} = M_i = M^*$.

L'espace M^* vérifie $M^* = (NA)^{-1} (NE) M^*$.

Et donc :

$$NA M^* = NA (NE) M^* (NE) M^* = \text{Im} (NA) \cap (NEM^*) \subset (NEM^*).$$

Il en vient que si $x_0 \in M^*$, il existe $x_1 \in M^*$, tel que $NE x_1 = NA x_0$, puis $x_2 \in M^*$ tel que

$$NE x_2 = NA x_1, \text{ et ainsi de suite.}$$

Il existe une solution x , avec $x_i \in M^*$, $\forall i \in \mathbb{N}$. [6]

2. La théorie de Kronecker**2.1. La forme de Weierstrass**

L'étude de paires de matrices E et A de même dimension est possible grâce à l'étude du faisceau correspondant $sE - A$ où s est un scalaire indéterminé. Notons que La forme de « Weierstrass » est utilisée dans le cas où les deux matrices E et A sont carrées. Si en plus le déterminant de $sE - A$ est non nul on dit que le faisceau $sE - A$ est régulier. Si non il est singulier [6].

- **Proposition 3**

Deux faisceaux $sE - A$ et $sE' - A'$ sont équivalents s'il existe deux matrices carrées constantes et inversibles P et Q tel les que $sE - A = P (sE' - A') Q^{-1}$.

On obtient la liste des invariants ainsi que les formes canoniques associées à cette relation d'équivalence sous la forme de « Weierstrass » dans le cas régulier et sous la forme de Kronecker dans le cas général. Ce résultat s'exprime comme suit :

Théorème III.1

Il existe des matrices de changements de base P et Q pour lesquelles le faisceau régulier $sE - A$ est strictement équivalent à un faisceau de forme diagonale par blocs, lequel est complètement déterminé par les diviseurs élémentaires finis et infinis. A chaque diviseur élémentaire fini $(s - a_j)^{k_{ji}}$ du faisceau $sE - A$, où k_{ji} correspond à la multiplicité du facteur irréductible $(s - a_j)$, correspond un bloc de dimension $k_{ji} \times k_{ji}$ de la forme :

$$L_{k_{ji}} = \begin{bmatrix} s - a_j & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & s - a_j \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, t \text{ et } i = 1, \dots, n$$

A chaque diviseur élémentaire infini v_i correspond un bloc de dimension $v_i \times v_i$ de la forme :

$$L_{v_i} = \begin{bmatrix} 1 & s & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & s \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, p$$

Les termes des matrices qui ne sont pas précisés sont nuls [6].

2.2 La forme canonique de Kronecker

La forme de Weierstrass n'est utilisable que dans le cas où $sE - A$ est régulier, alors que la forme de « Kronecker » est applicable dans tous les cas.

Théorème III.2

Il existe des matrices de changements de base P et Q pour lesquelles le faisceau $sE - A$ est strictement équivalent à un faisceau de forme diagonale par blocs, lequel est complètement déterminé par les invariants de « Kronecker », c'est-à-dire les diviseurs élémentaires finis, infinis et les indices minimaux par les colonnes et par les lignes.

Les diviseurs élémentaires finis et infinis sont définis de la même manière que dans la forme de « Weierstrass ».

A chaque indice minimal par les colonnes ϵ_i correspond un bloc de dimension $\epsilon_i \times (\epsilon_i + 1)$ de la forme :

$$L_{\epsilon_i} = \begin{bmatrix} s & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & s & 1 \\ & & & \ddots \\ & & & & s & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, s.$$

A chaque indice minimal par les lignes μ_i correspond un bloc de dimension $(\mu_i + 1) \times \mu_i$ de la forme :

$$L_{\mu_i} = \begin{bmatrix} s & & & & \\ 1 & s & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & s \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, r$$

Finalement, $sE - H$ est équivalent à la forme diagonale par blocs :

$$\{L_{k_1}, \dots, L_{k_m}; L_{v_1}, \dots, L_{v_p}; L_{\epsilon_1}, \dots, L_{\epsilon_s}; L_{\mu_1}, \dots, L_{\mu_r}\}$$

- Les termes des matrices qui ne sont pas précisés sont nuls.
- Les indices minimaux par les colonnes qui sont nuls correspondent à un bloc de dimension 0×1 , ce qui correspond à une colonne nulle dans la forme canonique. De la même manière, les indices minimaux par les lignes qui sont nuls correspondent à des blocs de dimension 1×0 , une ligne nulle, dans la forme canonique.
- On considère généralement que les diviseurs élémentaires d'ordre fini et infini, les indices minimaux par les colonnes et les lignes sont ordonnés de manière non croissante.

- Les blocs de diviseurs élémentaires à l'infini et les indices minimaux par les lignes fournissent des renseignements quant à l'existence d'une solution. La solution est unique s'il n'y a pas de blocs d'indices minimaux par les colonnes dans la forme canonique de « Kronecker » [6].

3. Utilisation de la forme de Kronecker pour l'étude des systèmes implicites

L'intérêt du calcul des invariants structurels de « Kronecker », vient dans la formalisation suivante :

- **Proposition 4**

Toute condition initiale est admissible, autrement dit $M^* = R^n$ si et seulement si le faisceau des matrices $zNE - NA$ n'a ni indice minimal par ligne non nul, ni diviseur élémentaire à l'infini. Ou bien :

$$\text{Im}(NA) = \text{Im}(NE).$$

$$\text{rang}(NA - NE) = \text{rang}(NE).$$

Dans ce cas le théorème de «Kronecker» nous permet de démontrer est ce que la condition initiale est admissible [6].

3.1. Existence et unicité de la solution

- **Proposition 5**

$$E x(k+1) = A x(k) + B u(k) \quad (\text{III.1})$$

Le système (III.1) admet une solution pour tout x_0 et u si et seulement si :

$$\text{Im}(A, B) \subset \text{Im}(E)$$

Ou bien :

$$\text{rang}(E, A, B) = \text{rang}(E)$$

Ce système admet une solution unique si en plus de la condition précédente on a :

$$\text{rang}(zE - A) = n$$

Ou bien les deux conditions :

$$\text{rang}(E, A, B) = \text{rang}(E) \text{ et}$$

$$\text{rang}(zE - A) = n$$

La dernière condition est équivalente à l'absence des indices minimaux par colonnes pour le faisceau $(zE - A)$ [6].

C'est un autre intérêt de la forme canonique de « Kronecker ».

4. Obtention de la forme linéaire implicite à partir d'un GDE p-temporel

4.1. Motivation

Soit le GDE p-temporel ci-dessous :

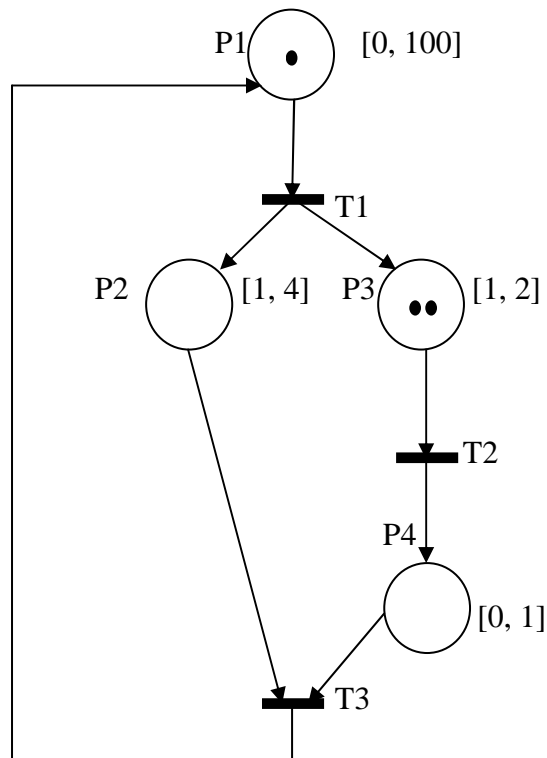


Figure III.3 : Exemple d'un GDE p-temporel.

Les équations aux dateurs sont obtenues comme suit :

$$x_1(k) = x_4(k-1) + q_1(k)$$

$$x_2(k) = x_1(k-1) + q_2(k)$$

$$x_3(k) = x_1(k-1) + q_3(k)$$

$$x_4(k) = x_3(k) + q_4(k)$$

$$x_4(k) = x_1(k) + q_5(k)$$

Avec :

$$0 \leq q_1(k) \leq 100$$

$$0 \leq q_2(k) \leq 0$$

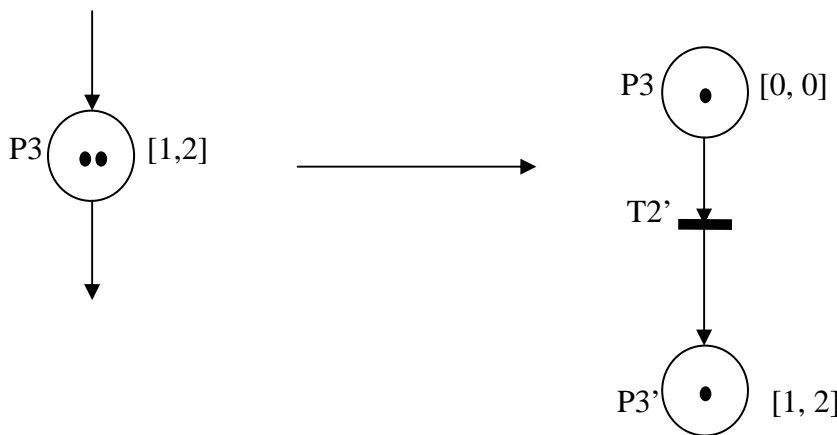
$$1 \leq q_3(k) \leq 2$$

$$0 \leq q_4(k) \leq 1$$

$$1 \leq q_5(k) \leq 4$$

Remarque :

Pour avoir les équations aux dateurs, on a simplifié la place P3 comme suit :



Les équations ci-dessus nous donnent la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \\ x_4(k-1) \end{bmatrix} + q(k)$$

On remarque bien que la forme obtenue est une équation linéaire implicite.

Généralement la modélisation d'un un GDE p-temporel par une équation linéaire implicite est donné comme suit :

$$\begin{cases} E x(k+1) = A x(k) + q(k+1) \\ a \leq q(k) \leq b \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Avec :

k : Le nombre de franchissement des transitions.

$x(k)$: La date de $k^{\text{ème}}$ franchissement.

$q(k)$: Le temps de séjour d'un jeton dans une place.

a et b sont respectivement la borne inférieure et le borne supérieure des intervalles de franchissement.

4.2 Définition du temps de séjour

Le temps de séjour d'un jeton dans une place P_i correspond au temps effectif que le jeton doit passer dans la place P_i pour le franchissement k .

Pour l'exemple (III.1) on a :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Commande en boucle fermée des GDE p-temporels

La commande d'un SED modélisé par un GDE p-temporel est le pilotage des entrées en vue d'obtention d'un comportement désiré pour le système et plus précisément les sorties.

Le problème traité dans cette section consiste à calculer à chaque étape (k) une commande $q(k)$ en fonction de l'état des dateurs de telle sorte à converger asymptotiquement vers une trajectoire désirée $z(k)$, $k \in \mathbf{N}$ tout en vérifiant des contraintes imposées sur l'état et la commande $q(k)$.

Pour un GDE p-temporel modélisé par l'équation linéaire implicite suivante :

$$\begin{cases} E \mathbf{x}(k+1) = A \mathbf{x}(k) + \mathbf{q}(k+1) \\ \mathbf{a} \leq \mathbf{q}(k) \leq \mathbf{b} \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

\mathbf{a} et \mathbf{b} sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure des intervalles de franchissement.

On cherche trouver un retour d'état F tel que la solution $\mathbf{x}(k)$ de (III.6) tend asymptotiquement vers une trajectoire $z(k)$ désirée, solution du système d'équations linéaires implicites suivant :

$$E \mathbf{z}(k+1) = A \mathbf{z}(k) + \mathbf{qz} \quad (\text{III.7})$$

La trajectoire désirée $z(k)$ est donnée par un fonctionnement 1-périodique. C'est-à-dire :

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{z}(k) + \lambda \mathbf{u} \quad (\text{III.8})$$

Tel que λ est le temps de cycle désiré et \mathbf{u} est un vecteur unitaire de dimension appropriée.

Le système d'erreur induit par les deux équations (III.7) et (III.8) est donné par :

$$E e(k+1) = A e(k) + qz - q(k+1) \quad (\text{III.9})$$

Avec :

$$e(k) = z(k) - x(k) \quad (\text{III.10})$$

Pour un tel système (III.9) on peut définir des entrées $q(k+1)$ données par un retour à l'état statique de la forme :

$$q(k+1) = F e(k) + qz \quad (\text{III.11})$$

Le système en boucle fermée est donné par :

$$E e(k+1) = (A - F) e(k) \quad (\text{III.12})$$

Le problème est de chercher F tel que le système (III.12) admet une solution. C'est-à-dire que $e(k)$ existe.

Le système (III.12) admet une solution si et seulement si :

$$\text{Im}(A - F) \subset \text{Im}(E)$$

Ou bien :

$$\text{rang}(A - F, E) = \text{rang}(E)$$

Cette solution est unique si en plus le rang $(zE - (A - F)) = n$.

Exemple

Dans l'exemple de la figure (III.1), on a :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = I_{5 \times 5}$$

Donc (III.12) sera :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(k+1) \\ e_2(k+1) \\ e_3(k+1) \\ e_4(k+1) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \\ e_3(k) \\ e_4(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(k+1) \\ e_2(k+1) \\ e_3(k+1) \\ e_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{11} & -f_{12} & -f_{13} & 1-f_{14} \\ 1-f_{21} & -f_{22} & -f_{23} & -f_{24} \\ -f_{31} & 1-f_{32} & -f_{33} & -f_{34} \\ -f_{41} & -f_{42} & -f_{43} & -f_{44} \\ -f_{51} & -f_{52} & -f_{53} & -f_{54} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \\ e_3(k) \\ e_4(k) \end{bmatrix}$$

On a le rang $(E) = 4$

On choisit les f_{ij} de telle sorte que le rang $((A - BF), E)$ est égal à 4.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc la solution $e(k)$ existe et on peut prouver qu'elle est unique si on peut également trouver z tel que :

$$\text{rang}(zE - (A - F)) = 4.$$

Cette dernière équation est vérifiée pour $z = 1$

Remarque (III.3)

La méthode de vérification de l'existence et l'unicité de la solution est une méthode approximative et elle devient impossible pour l'étude des systèmes importants où les deux matrices E et A deviennent gigantesques.

Une autre approche nous permet de vérifier l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation (III.12) en utilisant les résultats de la proposition suivante :

- **proposition 6**

Le système implicite $E x(k+1) = A x(k)$ a une solution pour chaque condition initiale si et seulement si [7]

$$\text{Im } A \subset \text{Im } E$$

Ou bien :

$$\exists Q \in R^{n \times n} \text{ tel que : } EQ = A.$$

Donc pour l'équation (III.12), on cherche une matrice carrée Q tel que :

$$EQ = A - F. \quad (\text{III.13})$$

La solution du système (III.13) est donnée par :

$$e(k+1) = Q e(k) \quad (\text{III.14})$$

Le système est stable si les valeurs absolues des valeurs propres de la matrice Q sont inférieures ou égales à 1. Mais dans notre cas on ne sait pas est ce que les contraintes sur la commande et l'état sont satisfaites.

Pour pouvoir vérifier le respect de ces contraintes, on doit faire appel à la théorie de la commande par invariance.

5.1. La commande par invariance

- **Proposition 7**

Le polyèdre $D(P, p) / D(P, p) \{e, Pe \leq p\}$ est positivement invariant par rapport au système (III.14)

Si $\forall k :$

$$e(k) \in D(P, p) \rightarrow e(k+1) \in D(P, p)$$

$$P e(k) \leq p \rightarrow P e(k+1) \leq p . \text{C'est-à-dire}$$

$$P e(k) \leq p \rightarrow P A e(k) \leq p . \text{Donc}$$

$$D(P, p) \subset D(PA, p)$$

Cette relation est vraie si et seulement si le lemme de Farkas étendu est vérifié c'est-à-dire :

\exists une matrice H avec des coefficients tous positifs tel que :

$$\begin{cases} H P = P A \\ H p \leq p \end{cases}$$

- **Proposition 8**

Une propriété définie pour les polyèdre fermé (polytope) et compact ($p > 0$).

Un polytope compact est contractif par rapport au système (III.14) si et seulement si

$$e(k) \in D(P, p) \rightarrow e(k+1) \in D(P, lp) \quad (0 \leq l \leq 1)$$

$$P e(k) \leq p \rightarrow P e(k+1) \leq lp$$

$$P e(k) \leq p \rightarrow PA e(k) \leq lp$$

$$D(P, p) \subset D(PA, lp)$$

Cette relation est vrai si et seulement si :

\exists une matrice H avec des coefficients tous positifs tel que :

$$\begin{cases} HP = PA \\ Hp \leq lp \end{cases}$$

• **Proposition 9**

Les contraintes sur le vecteur commande sont satisfaites $\forall k$ si et seulement si

\exists une matrice J avec des coefficients positif tel que :

$$\begin{cases} J \times P = \begin{bmatrix} F \\ -F \end{bmatrix} \\ J \times p \leq \rho \end{cases} \quad \text{Tel que}$$

$$\rho = \begin{bmatrix} b & - & qz \\ qz & - & a \end{bmatrix}$$

a et b sont respectivement la borne inferieur et la borne superieur de l'intervalle du temps.

qz est le temps de sejour des jetons dans les places.

En résumé

Il faut trouver un retour d'état F solution de :

$$\begin{cases} EQ = Q - F \\ HP = PQ \\ Hp \leq lp \\ Jp \leq \rho \\ Jp = \begin{bmatrix} F \\ -F \end{bmatrix} \end{cases}$$

Avec : $H_{ij} \geq 0$, $0 \leq l < 1$, $J_{ij} \geq 0$.

Pour assurer

- L'existence et l'unicité de la solution.
- La convergence asymptotique vers une trajectoire désirée.
- Le respect des contraintes sur l'état et la commande.

Conclusion

La modélisation d'un GED p-temporel par les équations linéaires implicites nous a permis d'arriver à une méthode intéressante pour contrôler un SED, et cela en utilisant les faisceaux des matrices ou bien les résultats de la proposition (6).

La commande par invariance introduite dans ce chapitre nous permet de commander un SED tout en vérifiant les contraintes sur les entrées et l'état du système. Les résultats de cette commande sont utilisés pour étudier un système de production dans le chapitre qui suit.

Introduction

Cette application nous permet d'utiliser les méthodes d'analyse pour les SED modélisés par des GDE p-temporels étudiées auparavant.

Dans cette application on essaye de trouver un moyen pour contrôler un SED modélisé par les équations linéaires implicites, en utilisant les méthodes classiques tel que la poursuite de la trajectoire et l'étude de la stabilité.

- D'abord on commence par le calcul de temps du cycle λ_{max} en se basant sur l'analyse des GDE p-temporels (l'analyse des circuits). Dans un premier lieu on propose un programme MATLAB pour optimiser les dates de franchissement et cela pour une sortie désirée $z(k)$ qui a un fonctionnement 1-périodique. C'est-à-dire

$$z(k) = z(k - 1) + \lambda_{max} u$$

Remarque VI.1

- Pour avoir les dates de franchissement au plus tôt, on utilise λ_{max}^{min} .
 - Pour avoir les dates de franchissement au plus tard on utilise λ_{max}^{max} .
- Ensuite sous MATLAB aussi et par l'utilisation des équations linéaires implicites, on propose un programme qui étudie la stabilité et qui vérifie la poursuite de la trajectoire pour notre système.

Le système étudié dans cette application est un processus de panification.

1. Le fonctionnement

On considère une boulangerie semi-industrielle qui fabrique deux types de pains, Pain1 (qualité supérieure) et Pain2 (qualité ordinaire). Le procédé de fabrication est représenté par le graphe d'événements p-temporel de la Figure (IV.1). Les deux types de pains doivent suivre la même séquence de fabrication sur les quatre machines disponibles : le pétrin (M1), la diviseuse (M2), la façonneuse (M3) et le four (M4).

Pains 1 et 2 : **M 1** → **M 2** → **M 3** → **M 4**.

Les durées sont différentes entre les deux gammes, ainsi qu'une opération de pointage supplémentaire (place **P21**) pour la gamme 2, sont à l'origine d'une qualité différente. Les opérations sont les suivantes :

- **Pétrissage** : Le pétrissage commence par un mélange de tous les ingrédients dans un pétrin, cette opération durant de **15 à 27** minutes. Cette étape est représentée par les places **P11 et P20**.
- **Pointage** : C'est la première fermentation. La pâte est laissée au repos de **10 à 30** minutes pour permettre à la levure, ou le levain, d'assurer une fermentation usante. Cette étape ne concerne que le Pain 2 et elle est représentée par (**P21**) dans le graphe.
- **Division** : Il s'agit de découper la pâte, en pâtons plus petits avec la diviseuse. Dans le graphe, cela est représenté par (**P12**) pour le Pain 1 et (**P22**) pour le Pain 2. Deux diviseuses sont disponibles.
- **Détente** : Les pâtons sont laissés au repos une nouvelle fois. Cette étape dure **180** minutes pour le Pain1 (**P13**) et de **15 à 20** minutes pour le Pain2 (**P23**).
- **Façonnage** : Chaque pâton est retravaillé pour lui donner la forme voulue. On utilise pour cela une façonneuse. Dans le graphe, cela est représenté par (**P14**) pour le Pain 1 et (**P24**) pour le Pain2. Deux façonneuses sont disponibles.
- **Apprêt** : Les pâtons sont disposés sur une toile de lin pour la deuxième fermentation. L'apprêt (repos) dépend du type de Pain et est représenté par les places (**P15**) et (**P25**).
- **Cuisson** : Les pains sont enfournés à 250 – 280°C dans le four (supposé suffisamment grand). La cuisson dure de **20 à 25** minutes et est identique pour les deux gammes. Cette opération est représentée par **P16** pour le Pain 1 et **P26** pour le Pain 2.
- **Sortie des chariots** : Elle est représentée par **P17** et **P27**.

2. Modélisation du processus

Le système est modélisé par le GDE p-temporel suivant :

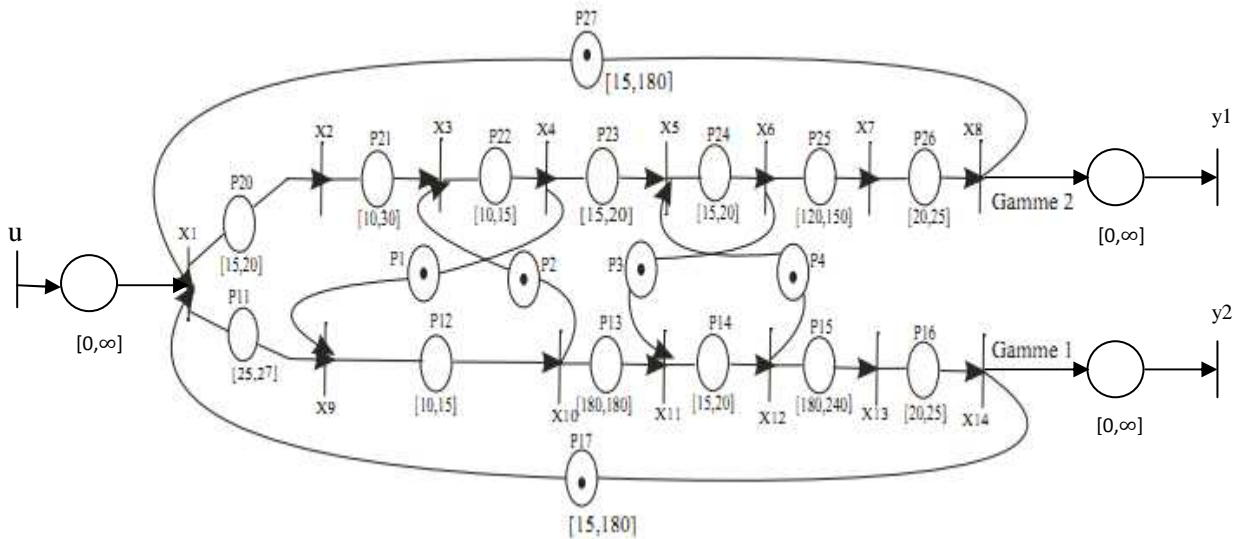


Figure IV.1: système de panification modélisé par un GDE p-temporel.

3. Le calcul du temps de cycle

Le temps de cycle pour un GDE p-temporel est noté λ_{max} tel que :

$$\lambda_{max}^{min} \leq \lambda_{max} \leq \lambda_{max}^{max}$$

λ_{max}^{min} et λ_{max}^{max} sont calculés comme suit :

$$\lambda_{max}^{min} = \max \left\{ \frac{\sum_{ck} a_i}{\sum_{ck} m_{0i}} \right\}, \quad \lambda_{max}^{max} = \max \left\{ \frac{\sum_{ck} b_i}{\sum_{ck} m_{0i}} \right\}$$

$\sum_{ck} a_i$: La somme des bornes inférieures de circuit élémentaire C_k .

$\sum_{ck} b_i$: La somme des bornes supérieures de circuit élémentaire C_k .

$\sum_{ck} m_{0i}$: La somme des marques dans le circuit élémentaire C_k .

L'intervalle $[\lambda_{max}^{min}, \lambda_{max}^{max}]$ est appelée la fenêtre temporelle du temps de cycle.

λ_{max}^{min} :

$$\lambda_{max}^{min} = \max \left\{ \frac{15 \times 4 + 10 \times 2 + 120 + 20}{1}, \frac{15 \times 2 + 180 \times 2 + 10 + 20}{1}, \frac{10 \times 3 + 15 \times 3 + 180 \times 2 + 20}{2}, \frac{15 \times 5 + 10 \times 2 + 180 + 20}{2}, \frac{10 \times 2 + 15 \times 3 + 25 + 120 + 20}{2}, \frac{25 + 10 \times 180 + 15 \times 3 + 20}{2} \right\}$$

$$\lambda_{max}^{min} = \{220, 445, 227.5, 147.5, 115, 200\}$$

$x(k)$ est un vecteur composé des dates de franchissement des transitions, des deux sorties $y_1(k)$ et $y_2(k)$ et de l'entrée $u(k)$.

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ 180 \\ 180 \\ -15 \\ -15 \\ 20 \\ -10 \\ 30 \\ 0 \\ -10 \\ 15 \\ -15 \\ 20 \\ 0 \\ -15 \\ 20 \\ -120 \\ 150 \\ -20 \\ 25 \\ -25 \\ 27 \\ 0 \\ -10 \\ 15 \\ 180 \\ 180 \\ 0 \\ -15 \\ 20 \\ -180 \\ 240 \\ -20 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Après l'exécution de programme MATLAB pour 10 itérations on a pu optimiser les dates de franchissement pour un fonctionnement au plus tôt.

Pour ce programme on a choisit :

$$\text{minf}(x) = \sum x(k). \text{ Comme fonction objectif.}$$

$$\text{Et } A_0 x(k) \leq A_1 x(k - 1) + T \text{ comme contrainte de type inégalité.}$$

La solution (les dates de franchissement au plus tôt) est la suivante :

Dates de franchissement $\times 10^3$ transitions	Date	Date	Date	Date	Date	Date	Date	Date	Date	Date
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(k)$	0	0.0150	0.4600	0.9050	1.3500	1.7950	2.2400	2.6850	3.1300	3.5750
$x_1(k)$	0	0.0150	0.4600	0.9050	1.3500	1.7950	2.2400	2.6850	3.1300	3.5750
$x_2(k)$	0	0.0350	0.4800	0.9250	1.3700	1.8150	2.2600	2.7050	3.1500	3.5950
$x_3(k)$	0	0.0650	0.5100	0.9550	1.4000	1.8450	2.2900	2.7350	3.1800	3.6250
$x_4(k)$	0	0.0800	0.5250	0.9700	1.4150	1.8600	2.3050	2.7500	3.1950	3.6250
$x_5(k)$	0	0.1000	0.5450	0.9900	1.4350	1.8800	2.3250	2.7700	3.2150	3.6400
$x_6(k)$	0	0.1200	0.5650	0.0100	1.4550	1.9000	2.3450	2.7900	3.2350	3.6600
$x_7(k)$	0	0.2700	0.7150	1.1600	1.6050	2.0500	2.4950	2.9400	3.2850	3.6800
$x_8(k)$	0	0.2950	0.7400	1.1850	1.6300	2.0750	2.5200	2.9650	3.4100	3.8300
$x_9(k)$	0	0.0400	0.4850	0.9300	1.3750	1.8200	2.2650	2.7100	3.1550	3.6000
$x_{10}(k)$	0	0.0500	0.4950	0.9400	1.3850	1.8300	2.2750	2.7200	3.1650	3.6100
$x_{11}(k)$	0	0.2300	0.6750	1.1200	1.5650	2.0100	2.4550	2.9000	3.3450	3.7900
$x_{12}(k)$	0	0.2450	0.6900	1.1350	1.5800	2.0250	2.4700	2.9150	3.3600	3.8050
$x_{13}(k)$	0	0.4250	0.8700	1.3150	1.7600	2.2050	2.6500	3.0950	3.5400	3.9850
$x_{14}(k)$	0	0.4450	0.8900	1.3350	1.7800	2.2250	2.6700	3.1150	3.5600	4.0050
$y_2(k)$	0	0.4450	0.8900	1.3350	1.7800	2.2250	2.6700	3.1150	3.5600	4.0050
$y_2(k)$	0	0.4450	0.8900	1.3350	1.7800	2.2250	2.6700	3.1150	3.5600	4.0050

Tab IV.1 : dates de franchissement optimisées.

On remarque que après la deuxième itération, la date de franchissement égale à la date précédente plus le temps de cycle (λ_{max}^{min}).

5. La commande du système sous contraintes

5.1. Étude de la stabilité

Pour étudier la stabilité de ce système, on utilise le résultat de la proposition(6) de chapitre (III). C'est -à- dire on doit chercher les deux matrices Q et F tel que l'équation (III.13) soit satisfaite.

F est le retour d'état recherché pour que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable.

Le système est stable si les valeurs absolues des valeurs propres de la matrice Q sont inférieures ou égales à 1. Les deux matrices recherchées vérifient le respect des contraintes imposées sur le système en utilisant la théorie de la commande par invariance.

Si on modélise le système par l'équation linéaire implicite (III.6), on trouve :

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le programme matlab nous a permis de trouver ces résultats :

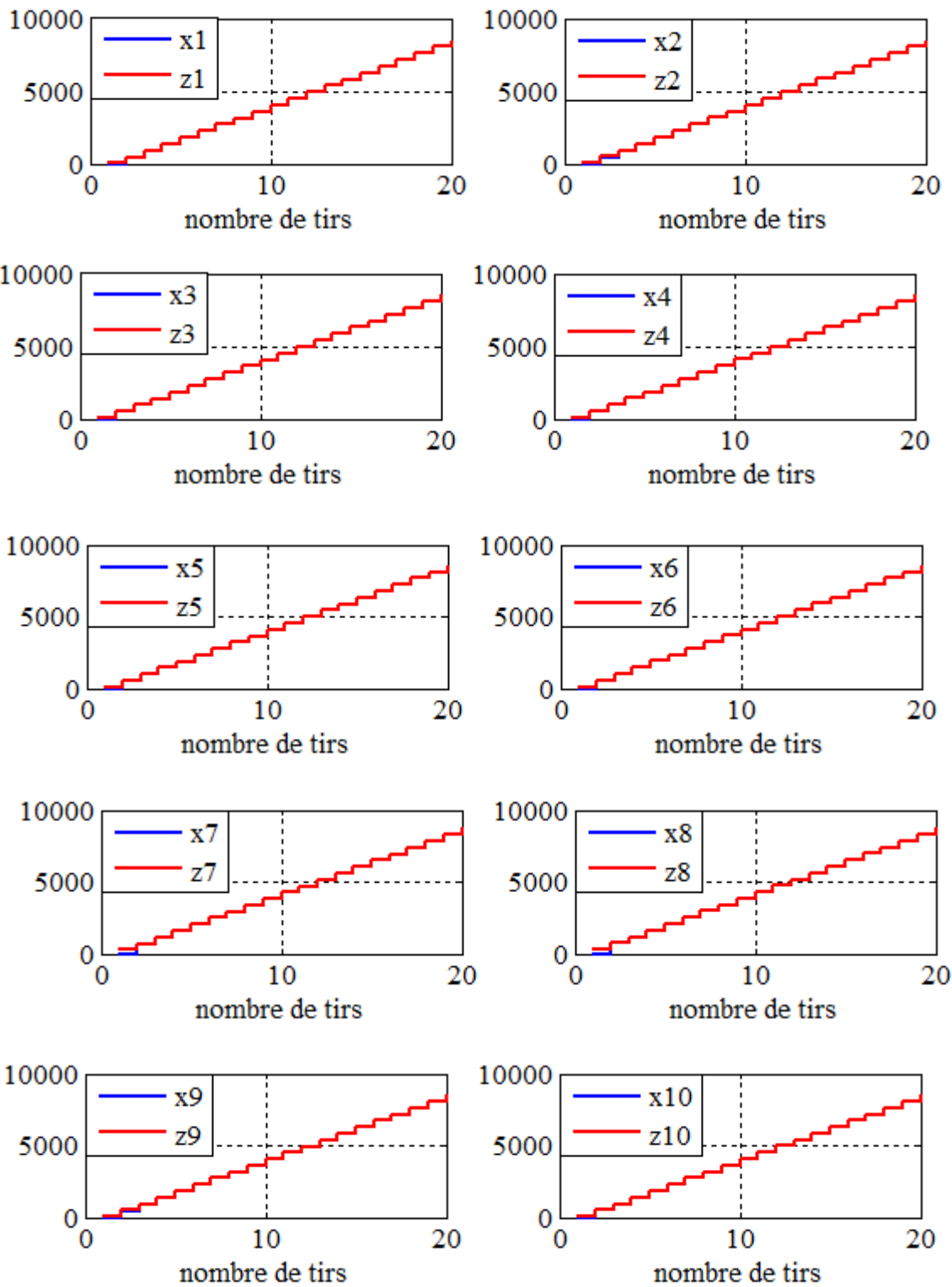
$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.0058 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0469 & 0 & -0.0022 & 0 & 0.0029 & 0 & 0.1444 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0002 & 0 & -0.0009 & 0 & 0.0459 & 0 & -0.0093 & 0 & 0.0051 & 0 & 0.0971 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0 & -0.0005 & 0 & 0.0142 & 0 & -0.0585 & 0 & 0.0173 & 0 & 0.0299 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0.0004 & 0 & 0.0086 & 0 & -0.0091 & 0 & 0.0443 & 0 & 0.0097 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0013 & 0 & 0.0027 & 0 & -0.0008 & 0 & 0.0491 & 0 & 0.0020 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & -0.0002 & 0 & 0.0024 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0508 & 0 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & -0.0006 & 0 & 0.0004 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0260 & 0 & 0.0004 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & -0.0004 & 0 & 0.0006 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0241 & 0 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0526 & 0 & -0.0032 & 0 & 0.0346 & 0 & 0.0000 & 0 & -0.0008 & 0 & 0.0714 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0059 & 0 & 0.0039 & 0 & 0.0154 & 0 & 0.0001 & 0 & 0.0012 & 0 & 0.0315 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0 & -0.0347 & 0 & 0.0059 & 0 & 0.0000 & 0 & -0.0001 & 0 & 0.0096 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0006 & 0 & 0.0048 & 0 & 0.0041 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0025 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0003 & 0 & 0.0055 & 0 & 0.0020 & 0 & 0.0000 & 0 & -0.0017 & 0 & 0.0015 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0053 & 0 & 0.0022 & 0 & 0.0000 & 0 & -0.0023 & 0 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0084 & 0 & -0.0004 & 0 & -0.0119 & 0 & -0.0000 & 0 & -0.0001 & 0 & -0.0315 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0000 & 0 & -0.0006 & 0 & -0.0000 & 0 & 0.0117 & 0 & -0.0034 & 0 & -0.0042 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0003 & 0 & 0.0127 & 0 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & -0.0021 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0000 & 0 & -0.0013 & 0 & 0.0004 & 0 & -0.0002 & 0 & 0.2308 & 0 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0003 & 0 & 0.0001 & 0 & 0.9630 & 0 & -0.0001 & 0 & -0.0008 & 0 & -0.0296 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0058 & 0 & 0.0000 & 0 & -0.0469 & 0 & 0.0010 & 0 & -0.0029 & 0 & 0.8556 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0057 & 0 & 0.0009 & 0 & 0.0010 & 0 & 0.0083 & 0 & -0.0023 & 0 & 0.0473 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0 & -0.0004 & 0 & 0.0316 & 0 & 0.0493 & 0 & -0.0122 & 0 & 0.0672 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & -0.0010 & 0 & 0.0056 & 0 & -0.0494 & 0 & -0.0270 & 0 & 0.0202 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & -0.0009 & 0 & 0.0060 & 0 & -0.0084 & 0 & -0.0048 & 0 & 0.0077 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0011 & 0 & 0.0013 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0155 & 0 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0005 & 0 & 0.0019 & 0 & 0 & 0 & 0.0248 & 0 & -0.0003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0003 & 0 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0.0019 & 0 & 0.0003 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0468 & 0 & -0.0032 & 0 & 0.0123 & 0 & -0.0010 & 0 & 0.0037 & 0 & 0.0730 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0467 & 0 & -0.0007 & 0 & 0.0191 & 0 & -0.0001 & 0 & -0.0021 & 0 & 0.0399 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0061 & 0 & 0.0386 & 0 & 0.0096 & 0 & 0 & 0 & 0.0013 & 0 & 0.0219 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0013 & 0 & 0.0021 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 & 0 & 0.0023 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0 & -0.0007 & 0 & 0.0021 & 0 & 0 & 0 & 0.0019 & 0 & 0.0010 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0003 & 0 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0.0005 & 0 & 0.0013 \end{bmatrix}$$

Le programme MATLAB qui étudie la poursuite de la trajectoire nous permet de vérifier les résultats trouver auparavant (paragraphe 5.1), c'est à dire est ce que le feedback calculé est un feedback stabilisant.

Après l'exécution de ce programme on a obtenu les figures suivantes :

La figure suivante montre l'évolution des dates de franchissement du système étudié ($x(k)$), ainsi que l'évolution de système quand il a un fonctionnement 1-périodique (c'est-à-dire $z(k)$). Et cela pour un nombre fini d'itérations.



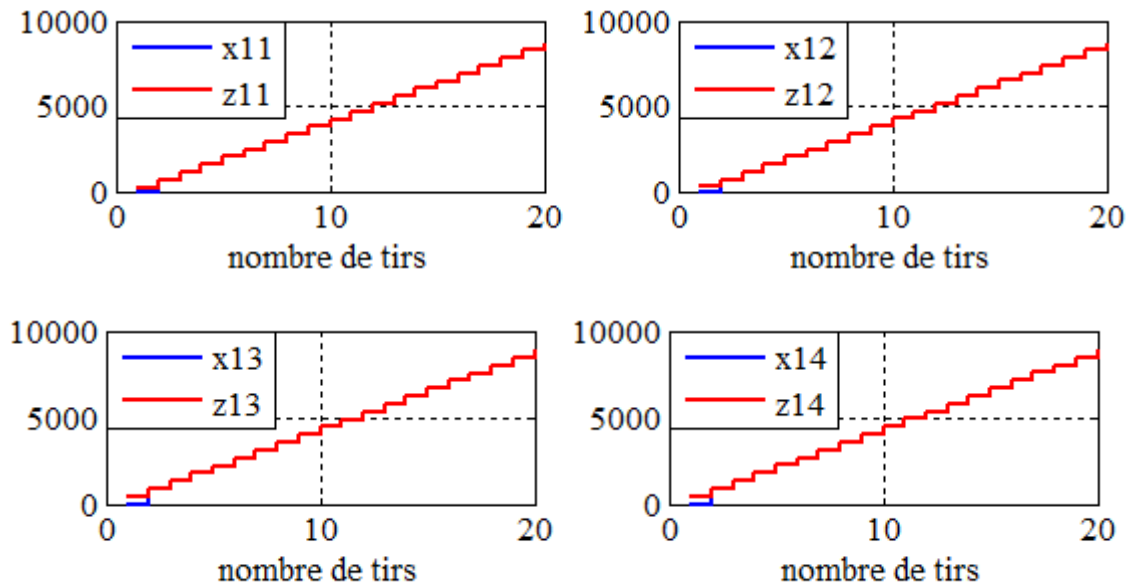
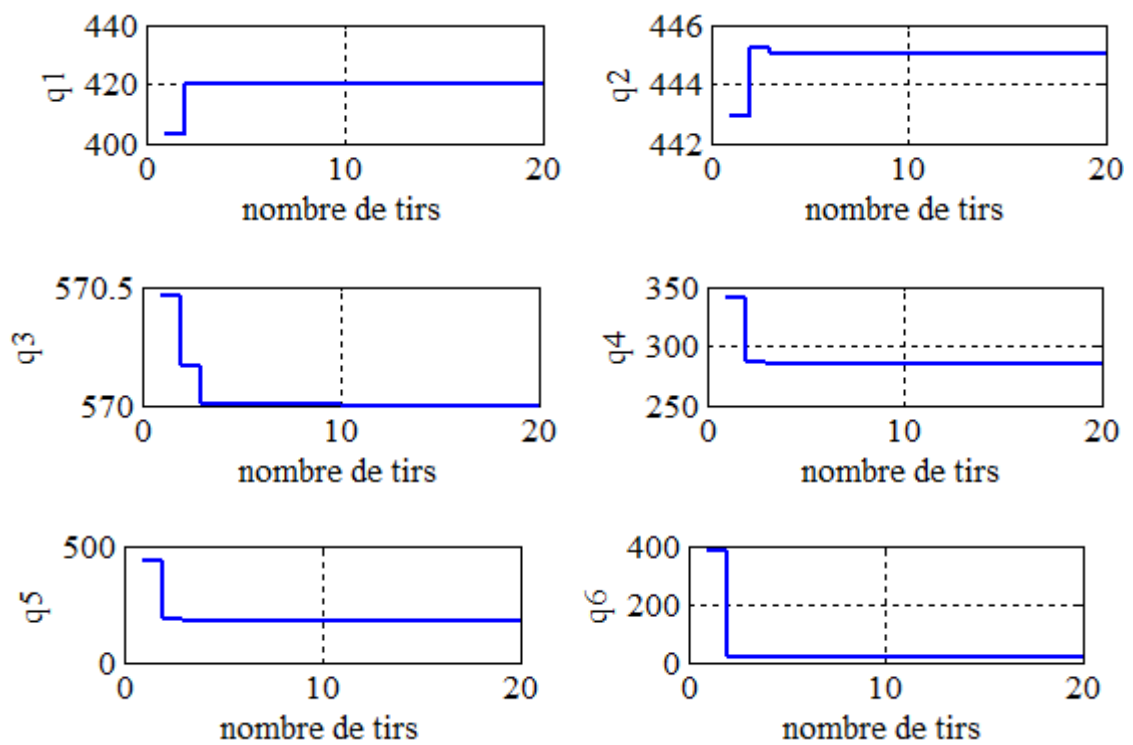


Figure IV.2 : état d'évolution de fonctionnement du système.

La figure ci-dessous représente les entrées pour le système linéaire implicite obtenu. Ces entrées représentent le temps de séjour des jetons dans les places. On remarque bien que cette valeur devient stable après un moment donné où le système lui-même devient stable.



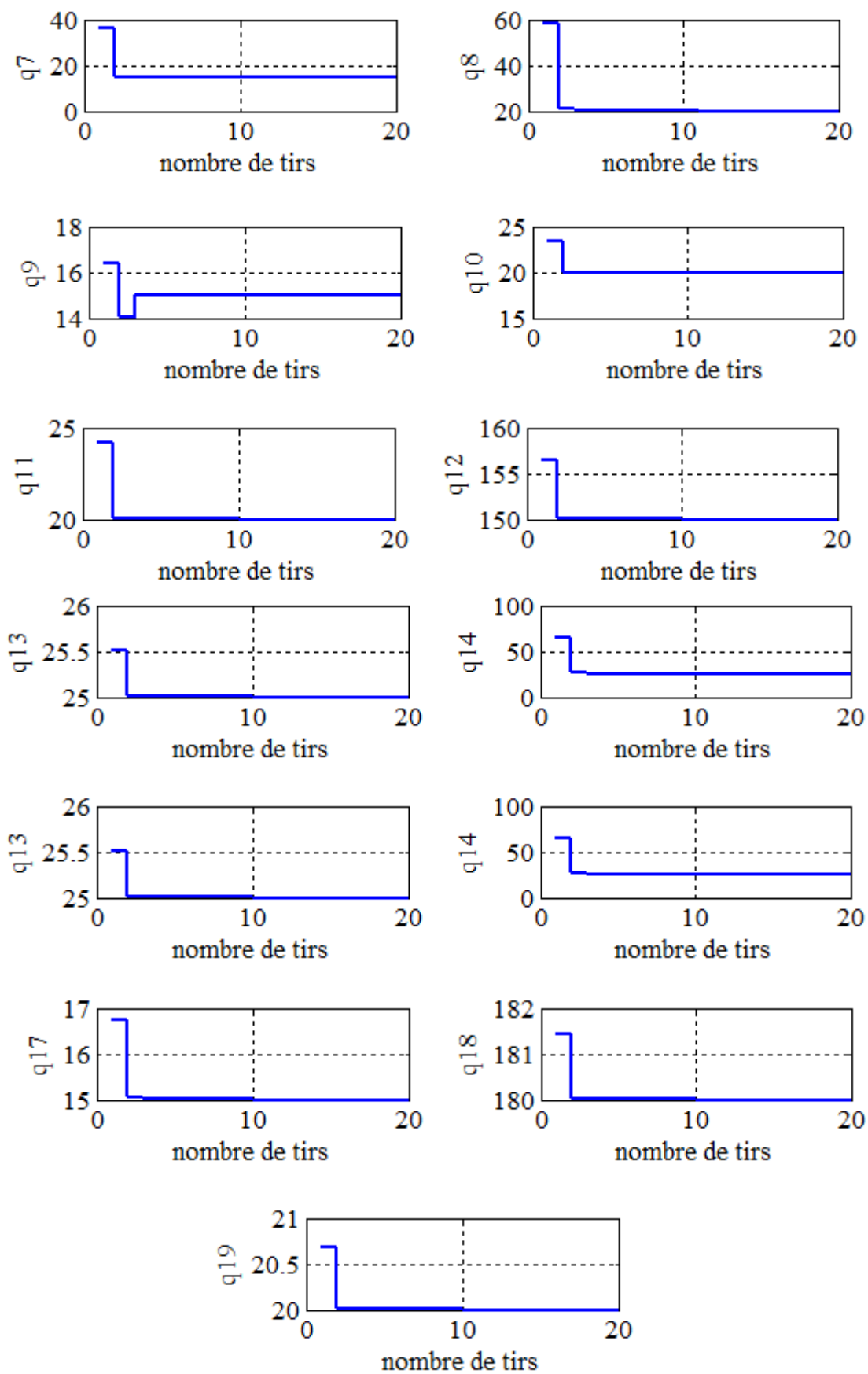


Figure IV.3 : Les entrées .

Conclusion

Grace à cette application on a pu contrôler un SED modélisé par un GDE p-temporel et par une équation linéaire implicite, en cherchant un feedback stabilisant.

Dans cette approche on a démontré la possibilité d'utilisation des méthodes classiques pour étudier les SED.

Conclusion générale

Conclusion générale

Ce travail est une suite de plusieurs travaux qui se sont portés sur l'étude des SED et leurs méthodes de modélisation, plus particulièrement la modélisation par les RDPs. Notons que cette méthode est devenue très répandue dans les pays industrialisés, elle est utilisée dans le domaine de la productique et aussi pour la modélisation des systèmes ferroviaires.

Dans ce travail on s'est basé essentiellement sur la modélisation des SED à contraintes temporelles par les GDE p-temporels (graphe particulier des RDPs p-temporel), et qui sont par la suite modélisés :

Soit par des inéquations aux dateurs qui nous ont permis d'optimiser les dates de franchissement et le temps de cycle.

Soit par les équations linéaires implicites. Cette méthode est très récente et ouvre un domaine de recherche très intéressant. Son utilisation nous a permis de trouver un moyen pour commander les SED en utilisant les méthodes classiques utilisées dans le cas continu, comme l'étude de la stabilité et la poursuite de trajectoire par exemple.

L'étude des systèmes linéaires implicites a montré la complémentarité qui existe entre les mathématiques et l'automatique. Vu que les résultats théoriques obtenus nous ont permis de régler des problèmes rencontrés dans des systèmes automatisés.

Liste des abréviations

SED : Systèmes à événements discrets.

RDP : Réseau de Petri.

P : Place.

T : Transition.

Post : matrice d'incidence arrière.

Pré : matrice d'incidence avant.

M : marquage.

GMA : graphe de marquage accessible.

p-RDP : Réseau de Petri p-temporel.

t-RDP : Réseau de Petri t-temporel.

GDE : graphe d'événements.

GDET : graphe d'événements temporisé.

GDETFC : graphe d'événements temporisé fortement connexe.

p-GDEFC : graphe d'événements p-temporel fortement connexe.

La bibliographie

- [1] **P. BORNE, G. DAUPHIN, TANGAY**, « *Modélisation et identification des processus* », Éditions Technip, Paris, 1992.

- [2] **René DAVID, Hassane ALLA**, « *Du grafctet aux réseaux de Petri* », Éditions Hermès, Paris, 1997.

- [3] **R .KARA**. Cours de productique ; Département d'Automatique, UMMTO, 2012.

- [4] **Patrice BONHOMME**, « *RESEAU DE PETRI P-TEMPORELS : CONTRIBUTION A LA COMMANDE ROBUSTE* », Thèse de doctorat, École Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy, 2001.

- [5] **Abdelhak GUEZZY**, « *Modélisation, analyse de performances et commande des systèmes à événements discrets* », Thèse de doctorat, École Doctorale STIM, Science et Technologie de l'Information et de Mathématiques, 2010.

- [6] **Émeline GIUE**, « *Étude et modélisation des réseaux de transports en vue de contrôler leur congestion* ». Thèse de DEA, Institut de Recherche en Communications et en Cybernétique de Nantes, 2003.

- [7] **R. BACOS, J.E.R. CURY, J.J. LOISEAU**, « *Control of a Class of Constrained Implicit Systems* ». Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes (IRCCyN), UMR CNRS 6597, École Centrale de Nantes, 2010.