



UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



MEMOIRE

De fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master en génie
mécanique

Option : CONSTRUCTION MECANIQUE.

THEME :

Etude du contact entre solides déformables :

Expérimentation - modélisation

Proposé et dirigé par monsieur Fabrice
BREMAND Professeur responsable de
l'axe PEM de l'Institut PPrime,
université de Poitiers.

Codirigé par Arnaud GERMANEAU
et Ali BILEK

Présenté par

Mr. BERDJANE Mohand Ouali

Promotion 2011

Remerciements

Ce mémoire et l'aboutissement d'un travail mené à l'institut P Prime de l'université de Poitiers au sein de L'axe PEM (Equipe de photomécanique).

Je tiens tout d'abords à remercier le Professeur Fabrice Brémand responsable de l'équipe Photomécanique et Rhéologie et lui exprimer toute ma gratitude pour m'avoir accueilli et permis d'entreprendre et de mener ce travail dans les meilleures conditions et m'avoir suivi et conseillé durant tout mon stage. Je tiens à remercier aussi vivement Arnaud Germaneau enseignant chercheur à l'université de Poitiers pour son assistance, son soutien, ces conseils et ses remarques constructives et le temps qu'il y a consacré, comme je remercie aussi toute l'équipe de photomécanique, pour leurs conseils, leurs participations par leurs savoir et leurs suggestions et pour la formidable ambiance de travail qu'ils créent : Jean-Christophe DUPRE, Franck HISSER, Valery VALLE, Pascal DUMALIN, Pierre et Hassan, ainsi que toute l'équipe des thésards de tribologie pour leurs sympathies et les nombreuses discussions partagées aux tours des repas de midi et aux barbecues.

Mes chaleureux remerciements et mon grand respect pour le docteur Ali Bilek maître de conférence et enseignant chercheur à l'université UMMTO de Tizi-Ouzou, pour tous ses enseignements ses conseils et sa confiance et grâce à qui ce travail a pu avoir lieu. Et je tiens à remercier aussi tous mes enseignants du département de génie mécanique de l'université UMMTO avec qui j'ai mené mon cursus dans une ambiance de respect et de convivialité.

Sans oublier de remercier les membres du jury qui m'ont fait honneur de juger mon travail : Mr LARBI, Mr DJEBALI et Mr MOHELBI.

Mes plus grands Meris, pour les miens, grâce à qui je suis ce que je suis et qui m'ont accompagné et soutenu et continu de le faire : ma mère, mon père, mes sœurs et mes deux frères à qui je dois beaucoup, sans oublier yemma Ouezna, mes tantes et mes oncles en particulier **tonton**, pour tout ce qu'il a fait pour moi.

Je remercie aussi tous mes amis et tous mes camarades qui m'ont accompagné et avec qui j'ai appris à grandir en particulier : Ahmed, Yacine et Hocine et toute l'équipe C28.

En fin un merci que je ne saurais qualifier pour Katia parce que c'est Elle.

Sommaire

<u>Introduction générale</u>	6
<u>I. Les techniques expérimentales de mesure sans contact</u>	9
I.1. Présentation de l'axe PEM (Photomechanics & Experimental Mechanics)	10
I.2. Les méthodes optiques de mesure	10
I.2.1. Introduction	10
I.2.2. Types de mesures	11
I.2.3. La technique du suivi de marqueurs	12
I.2.4. Corrélation d'images numériques	15
I.2.5. La photoélasticimétrie	19
I.3. conclusion :	21
<u>II. La photoélasticimétrie</u>	22
II.1. Introduction	23
II.2. La polarisation de la lumière	23
II.3. Phénomène de biréfringence	24
II.4. Les différents types de polariscopes	27
II.4.1. Le polariscope rectiligne	27
II.4.2. Polariscope à lumière circulaire	28
II.4.3. Polariscope en lumière blanche	30
II.4.4. Analyse des franges :	30
II.5. La photoélasticimétrie 3D	31
II.5.1. La méthode de figeage découpage	32
II.5.2 Méthodes utilisant la lumière diffusée	33
II.5.3. Méthode du découpage optique	35
II.6. Conclusion	41
<u>III. Etablissement d'un modèle numérique</u>	43
III.1. La modélisation numérique sous Abaqus	44
III.1.1. La gestion du contact sous Abaqus	45

III.1.2. Les problèmes de non-linéarité	46
III.1.3. Problème du contact	48
III.1.4 Résolution du problème de contact	53
III.2. Simulation des franges photoélastiques	57
III.2.1. La schématisation bidimensionnelle	57
III.2.2. Schématisations tridimensionnelles	59
III.2.3. Exemple de comparaison de franges	61
III.3. Conclusion	63
<u>IV. Comparaison et discussion</u>	64
IV.1. Introduction	65
IV.2. Etablissement d'un modèle numérique pour un contact ponctuel	
sphère sur plan	65
IV.2.1. Etude expérimentale	66
IV.2.2. Description du modèle numérique	69
IV.2.3. Confrontation des résultats	72
IV.3. Etablissement d'un modèle numérique pour l'étude de cas de contact sphère sur gorge	
76	
IV.3.1. Modèle sphère sur gorge de même diamètre avec bille rigide	76
IV.3.2. Modèle sphère sur gorge de même diamètre (les deux corps sont déformables)	79
IV.3.3. Modèle sphère sur gorge (avec jeu)	83
IV.3.4 Modélisation d'une butée à billes	84
IV.3.5. Conclusion	88
<u>V. Conclusion générale</u>	90
<u>Références bibliographiques</u>	92

Introduction

Introduction :

Dans tous les mécanismes et les structures mécaniques quelles soient simples ou complexes, là où on a plus d'un composant mécanique, on a systématiquement un contact. Des sollicitations mécaniques sont alors imposées en surface et en subsurface (sous couche). Les différents problèmes rencontrés dans l'ingénierie telle que l'usure, la dégradation et l'amorçage des fissures, ont pour origine les contacts mécaniques au point que ces derniers sont considérés comme la deuxième cause de dégradation après la corrosion et cela par le biais des contraintes et des frottements qu'ils engendrent.

Afin d'évaluer l'usure et les dégradations, il est alors impératif d'étudier les contacts et d'évaluer les types et les amplitudes des contraintes imposées. Il est donc très important pour les concepteurs de machines de connaître les contraintes et les déformations au voisinage et dans la zone de contact.

Les problèmes de contacts mécaniques auxquels sont confrontés les industries et les chercheurs sont abordés de différentes manières pour tenter d'apporter des solutions et des réponses. Ces approches sont généralement analytique, numérique et/ou expérimentale.

L'approche analytique : elle est fondée sur l'écriture du problème sous forme d'équations, en s'appuyant sur les théories de la mécanique des milieux continus et des théories de la mécanique du contact telle la théorie de Hertz et en mettant en place des hypothèses permettant la résolution de ces équations. Cependant cette approche se limite à l'étude des contacts, dont les géométries sont relativement simples. Elle est rarement portée à des cas de chargement complexes et tridimensionnels vu la difficulté de la résolution.

L'approche numérique : la modélisation numérique est systématiquement liée à la méthode des éléments finis. Elle est de nos jours très répandue, elle est devenue incontournable dans l'industrie en raison de la rapidité et de la facilité d'obtention des résultats et cela grâce à l'évolution de l'outil informatique, la puissance des machines et la disponibilité des logiciels de calcul. La modélisation numérique permet de simuler le comportement des matériaux et des structures afin d'évaluer les différents paramètres tels que la répartition des contraintes, les éventuels risques d'endommagement etc. Cependant dans bien des cas la modélisation numérique est réalisée au détriment des essais expérimentaux et dans ces cas la consistance du modèle ne peut être vérifiée d'autant plus que des erreurs peuvent apparaître lorsque les conditions aux limites et les données liées aux matériaux ne sont pas conformes à la réalité.

Les modèles numériques ou élément finies sont en réalité des approximations établies pour fournir des solutions approchées aux problèmes mécaniques et ils nécessitent une vérification expérimentale pour pouvoir attester de leur validité.

L'approche expérimentale : grâce aux progrès technologiques différentes méthodes d'investigation et d'analyses sont établies, elles permettent de réaliser des mesures sans contact et des analyses non destructives en surface et dans le volume sans modifier ni la structure ni le comportement des matériaux. Les techniques généralement utilisées pour aborder les problèmes mécaniques, sont les technique 2D et les techniques dites $2D\frac{1}{2}$ pour les surfaces courbes en raison de la relative facilité de mise en œuvre. Cependant, le caractère surfacique de ces techniques ne permet pas d'accéder à l'évolution des grandeurs dans le volume, pour les problèmes mécaniques tridimensionnels tels les contacts entre solides que l'on se propose d'étudier. Des méthodes d'investigation 3D sont alors développées pour répondre à ce genre de problématiques. Cependant l'élaboration et la mise en œuvre de ces techniques peuvent s'avérer difficile pour l'étude de cas industriels complexes, ce qui les rend moins utilisées et développées pour des cas industriels.

De par les difficultés relatives de chacune de ces approches, pour l'étude de problèmes mécanique complexes, une confrontation entre ces différentes approches peut s'avérer nécessaire pour valider les différentes hypothèses, les conditions aux limites ainsi que les résultats des analyses.

Le travail présenté dans ce rapport a été réalisé au sein de l'axe PEM (photomechanics and experimental mechanics) de l'institut Pprime de Poitiers. Cette équipe possède des compétences et un savoir faire dans le développement des méthodes de mesure sans contact et la confrontation entre modélisation et expérimentation.

Ce présent rapport est scindé en trois parties, une première partie qui sera la présentation des méthodes expérimentales utilisées au sein du laboratoire en particulier la photoélasticimétrie 2D et 3D pour l'investigation et l'analyse des contraintes dans le volume qui sera détaillée dans le chapitre II, la deuxième partie qui consistera en une présentation de la modélisation numérique sous Abaqus ainsi que les différentes schématisations d'un milieu photoélastique pour la simulation des franges photoélastiques et la dernière partie, sera divisée en trois paragraphes présentés comme suit : l'étude d'un cas de contact académique sphère sur plan, et établissement d'un modèle numérique, que l'on confrontera aux résultats expérimentaux pour valider la gestion du contact sous Abaqus et les résultats expérimentaux, l'établissement d'un modèle numérique pour

dimensionner un modèle expérimental dans le cas de l'étude d'un contact sphère sur gorge
et la modélisation d'un contact dans une butée à bille.

Techniques expérimentales

I. Les techniques expérimentales de mesure sans contact :

I.1. Présentation de l'axe PEM (Photomechanics & Experimental Mechanics) :

Le travail présenté dans ce rapport entre dans le cadre du stage de master 2. Il a été effectué à l'institut Pprime de l'Université de Poitiers, au sein de l'axe PEM (Photomechanics & Experimental Mechanics). Les travaux de l'axe PEM portent sur le développement des méthodes de mesures non perturbatrices et sans contact en mécanique des solides pour déterminer l'ensemble des grandeurs physiques (relief, déplacement, déformation, contraintes,...) ainsi que sur l'utilisation des données expérimentales collectées pour mener des analyses approfondies des réponses mécaniques des solides.

L'action scientifique de l'axe PEM se décline en deux parties distinctes et étroitement liées :

- La photomécanique qui regroupe l'ensemble des activités permettant l'émergence, l'amélioration et l'adaptation à de nouveaux champs d'investigation, des méthodes optique de mesure pour la détermination des grandeurs physiques nécessaire à la compréhension des phénomènes mécaniques. A ce titre l'équipe dénombre un ensemble d'une dizaine de méthodes développées permettant de répondre au mieux à une large palette de problèmes mécaniques.
- L'analyse expérimentale en mécanique des solides (Experimental mechanics) qui concerne les activités de compréhension des phénomènes mécaniques liés aux structures et aux matériaux, par le biais du couplage entre la modélisation, l'identification et l'expérimentation. Dans ce champ on peut noter les compétences particulières de l'équipe de recherche dans les domaines de mécanique du contact et de la rupture, des couplages thermomécaniques, de l'identification et de la biomécanique.

I.2. Les méthodes optiques de mesure :

I.2.1. Introduction :

L'étude des propriétés fondamentales des principaux phénomènes optiques a commencé au début du XVIII^e siècle avec le traité d'optique d'Isaac Newton publié en 1704, et ses

travaux sur le concept de lumière monochromatique ; pour qu'ensuite viennent les travaux de Maxwell au XIX^e siècle sur la propagation des ondes électromagnétiques et qui ont permis la formulation du comportement ondulatoire de faisceaux lumineux. Ces avancées importantes dans la compréhension de la nature et du comportement de la lumière ont permis l'émergence et le développement de techniques optiques comme la photoélasticimétrie et l'interférométrie pour la mesure de grandeurs mécaniques.

A la fin du XX^e avec l'apparition des lasers à lumière cohérente, le développement des moyens d'acquisition et de traitement d'images et l'avènement des technologies informatiques pour le traitement numérique des données ont contribué à l'évolution et à l'innovation dans les techniques optiques de mesures.

Dans ce paragraphe nous allons tenter d'illustrer les principales méthodes mises en œuvre et utilisées par l'axe PEM pour la détermination des grandeurs mécaniques et l'étude des comportements des matériaux.

I.2.2. Types de mesures :

Les différentes techniques de mesure présentées dans ce chapitre permettent de déterminer une grandeur mécanique scalaire, vectorielle ou tensorielle (déplacement, déformation, contrainte...). La mesure peut être réalisée uniquement en un point, on parle alors de mesure ponctuelle. Cependant dans la plupart des applications mécaniques une mesure ponctuelle n'est suffisante car on s'intéresse généralement à l'analyse des gradients d'une grandeur d'un point à un autre en d'autres termes aux variations spatiales de cette grandeur. Le mesurage ponctuel est répété en différents points et les différentes valeurs forment un champ, d'où l'appellation de mesure de champ. Cette démarche est favorisée par l'utilisation des systèmes d'imagerie numérique et des programmes de traitement et d'analyse d'images.

Dans le cas des grandeurs vectorielles, la mesure revient à déterminer une ou plusieurs composantes. Le champ de mesure peut alors être conduit sur une ligne, une surface (plane ou courbe) ou dans un volume ce qui permet de déterminer la variation des composantes de la grandeur à partir du champ mesuré et cela suivant une, deux ou trois dimensions. Ce type de mesure est symbolisé $\alpha D - \beta C$ c'est-à-dire α dimensions et β composantes. Les techniques les plus courantes réalisent les différentes mesures sur une surface plane (2D-2C) ou une surface gauche (2D-3C) ce qui permet de quantifier les déformations en fonction du chargement. Les techniques de mesure dans le volume sont par ailleurs les

seules à déterminer les trois composantes du déplacement et leurs variations spatiales dans les trois directions (3D-3C).

I.2.3. La technique du suivi de marqueurs :

I.2.3.1. Analyse 2D-2C :

Cette technique consiste à repérer des marqueurs sous forme de taches, d'anneaux ou de lignes, sur une surface plane d'une éprouvette ou d'un modèle. Une caméra CCD placée perpendiculairement à la surface enregistre une image numérique des marqueurs à chaque état de charge de l'éprouvette.

Sur chaque zone de calcul définie, les coordonnées des points dans l'image sont obtenues à partir du calcul du centre géométrique pondéré par l'intensité lumineuse ; similaire au calcul d'un barycentre, l'équation est de la forme :

$$X_g = \frac{\sum_i X_i(I_i - I_s)}{\sum_i (I_i - I_s)} \quad Y_g = \frac{\sum_i Y_i(I_i - I_s)}{\sum_i (I_i - I_s)} \quad [I.1]$$

I_s est l'intensité seuil de la zone étudiée à partir de laquelle on peut définir si un pixel appartient au marqueur ou fait parti du fond de l'image ; I_i est l'intensité lumineuse du pixel d'indice i de coordonnées (x_i, y_i) . La procédure permet de déterminer en chaque configuration de l'éprouvette les positions des marqueurs. Ainsi on peut calculer par différence des positions entre deux configurations, les déplacements de chaque marqueur et déterminer la cinématique ou les déformations de l'éprouvette.

La figure I.1 ci-après illustre la procédure de la méthode sur une série de taches disposées en surface d'une éprouvette à l'aide d'un simple stylo.

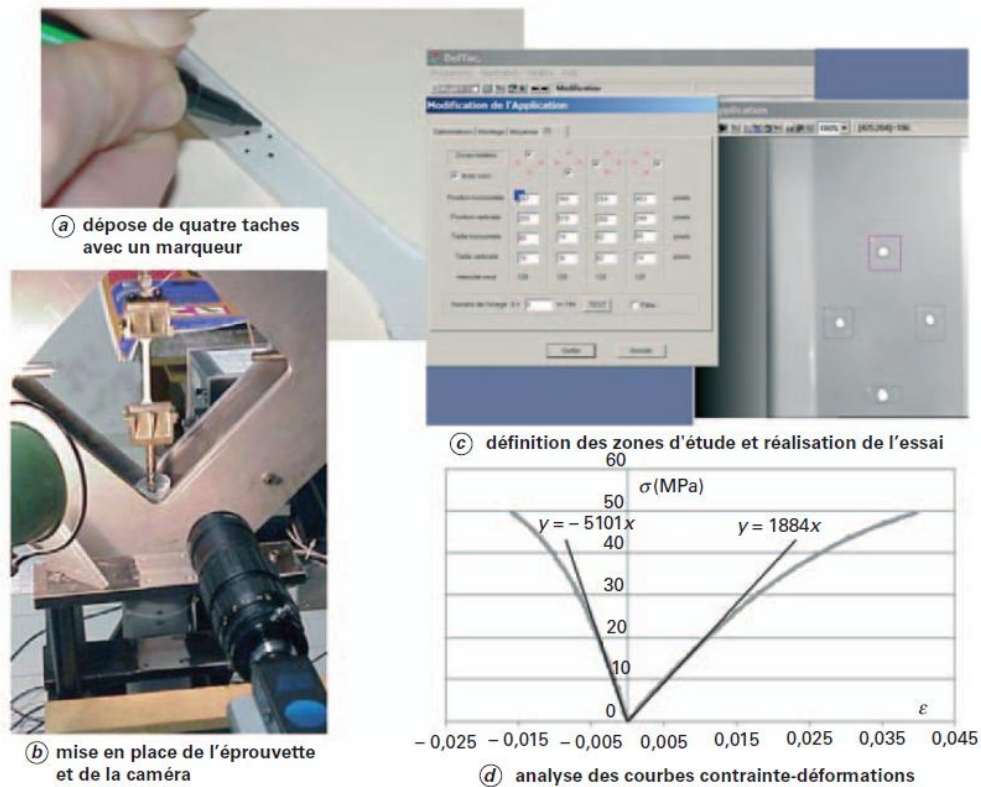


Figure I.1. Suivi de marqueurs dans l'analyse 2D-2C [R 1 850v2]

I.2.3.2. Analyse 2D-3C :

L'analyse se fait grâce à deux caméras afin d'obtenir une information stéréoscopique de la scène étudiée. La première phase d'analyse est la phase d'appariement qui consiste à repérer chaque marqueur sur les deux caméras. La seconde phase seconde consiste à calculer les coordonnées dans l'espace de chacun des marqueurs connaissant leurs coordonnées obtenues suivant les deux caméras. Pour chaque caméra, la procédure employée pour calculer les coordonnées des marqueurs est identique au cas 2D-2C. De cette façon les coordonnées réelles de chaque marqueur sont obtenues, connaissant les caractéristiques des caméras (dimension des pixels, focale) et leurs positions et orientations.

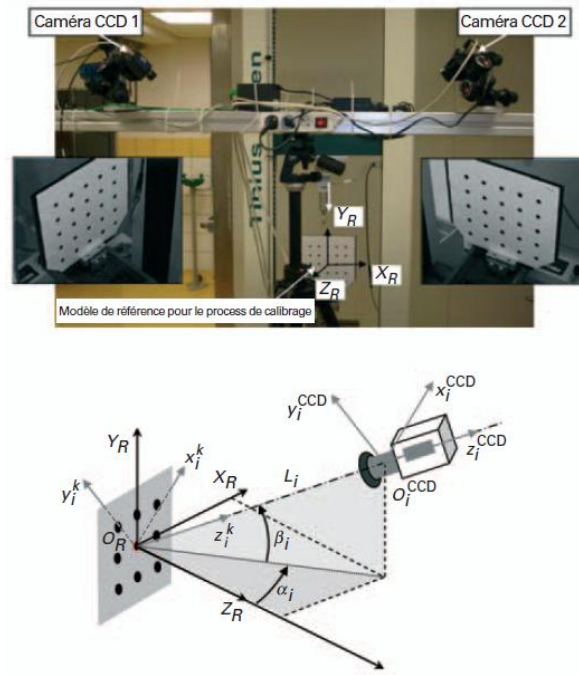


Figure I.2 : dispositif stéréoscopique [R 1 850v2]

I.2.3.3. Analyse 3D-3C

Le principe de la transposition 3D de l'analyse de marqueurs est relativement simple, puisqu'elle reprend celui de l'analyse 2D-2C en intégrant le calcul d'une coordonnée supplémentaire suivant la profondeur. L'obtention des images volumique se fait actuellement par microtomographie RX pour des applications dans le domaine médical, la géologie et l'étude de certains alliages.

Les figures suivantes montrent quelques exemples d'application.

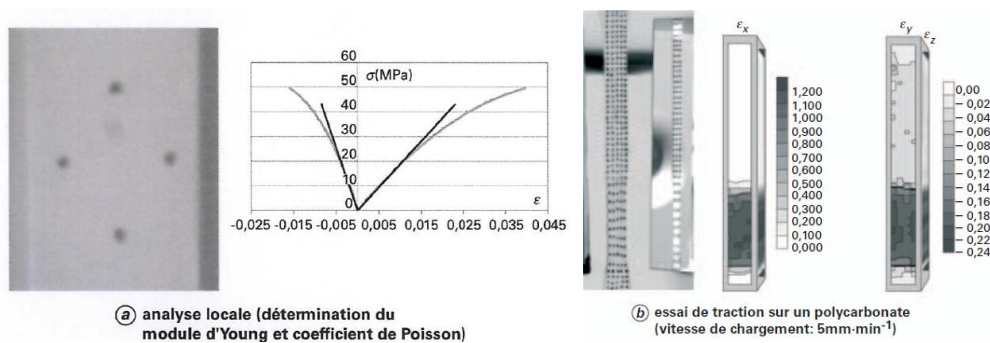


Figure I.3 : exemple d'application de la méthode 3D-3C [R 1 850v2]

I.2.4. Corrélation d'images numériques :

I.2.4.1. Analyse 2D-2C

La technique de corrélation consiste à mettre en correspondance deux images numériques de la vue de la surface plane d'un objet, à deux états de déformation distincts, un état dit de référence et un état dit déformé. La correspondance se fait sur des sous-domaines des images formant une grille virtuelle de points de mesure. Elle a pour objet de retrouver pour chaque sous-domaine noté D dont la position initiale $\underline{X}$ est définie dans l'image initiale, la position $\underline{x}$ pour son homologue dans l'image déformée, en évaluant la ressemblance des niveaux de gris de chaque sous-domaine. Cette technique se destine principalement à la mesure des déformations, elle autorise chaque domaine à se déplacer et à se déformer pour une meilleure correspondance. Ainsi pour chaque sous domaine, la procédure de corrélation fournit les coordonnées du déplacement $\underline{U}(u,v)$ de son centre, représentant son mouvement entre les deux images, modélisé par la transformation matérielle ϕ qui s'écrit habituellement

$$\underline{x} = \phi(\underline{X}) = \underline{X} + \underline{U}(\underline{X}).$$

L'ensemble de ces valeurs pour tous les domaines forme le champ discret de déplacement de la matière à partir duquel on peut déterminer les déformations par dérivation numérique. Pour mener à bien cette procédure il est nécessaire de disposer sur chaque domaine d'un motif présentant des variations spatiales de niveaux de gris. Ce motif est en général situé sur la surface de l'échantillon et fabriqué par projection de peinture, il peut aussi être la texture naturelle des surfaces notamment dans l'étude des matériaux poreux tels que les mousses ou l'os.

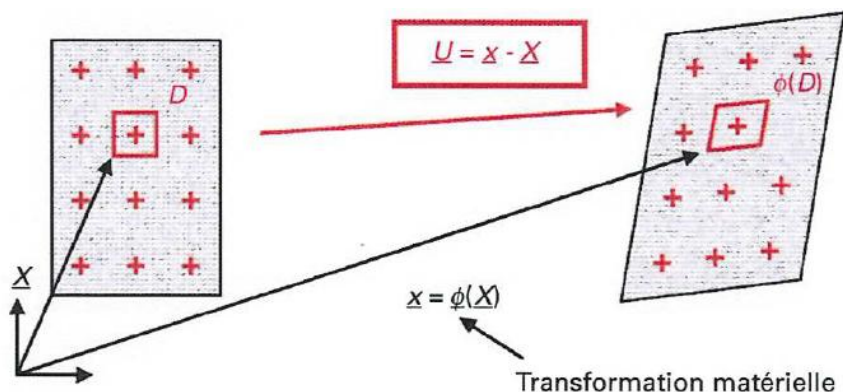
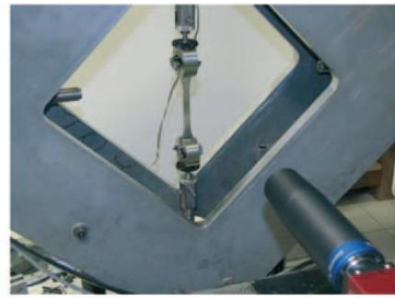


Figure I.4. Principe de la corrélation [GER 07]

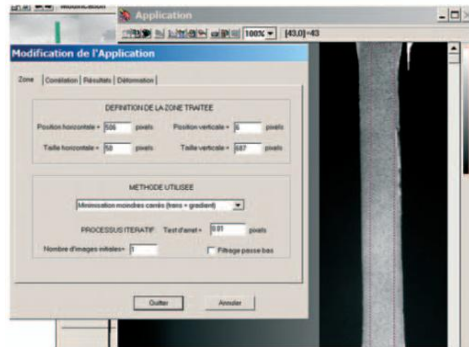
La figure I.5 montre l'exemple d'un mouchetis de peinture déposé à l'aide d'un spray. Une caméra CCD est placée perpendiculairement à la surface pour enregistrer le motif. L'analyse est effectuée automatiquement par ordinateur.



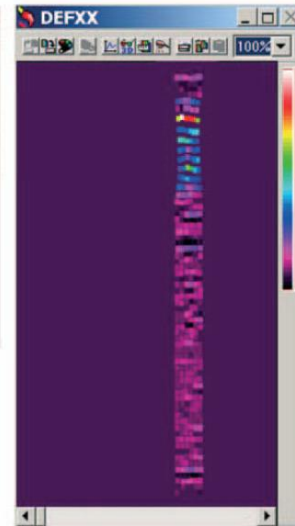
Ⓐ dépose du mouchetis par spray peinture



Ⓑ mise en place de l'éprouvette et de la caméra



Ⓒ définition des zones d'étude et réalisation de l'essai



Ⓓ analyse du champ de déformations

Figure I.5 : Marquage, enregistrement, traitement et exploitation des résultats [R 1 850v2].

I.2.4 .2. Analyse 2D-3C :

Pour mesurer dans l'espace le champ de déplacement sur une surface non plane, on utilise deux caméras pour obtenir une information stéréoscopique de la scène étudiée. Une phase de calibration, à partir d'une mire de point placée dans la scène à la place de l'objet permet de connaître les positions des deux caméras et d'établir les relations géométriques de reconstruction stéréoscopique. La démarche classique de mesure est la suivante :

En premier lieu on procède à une triangulation ce qui consiste à apparier chaque domaine de corrélation entre les deux images gauche et droite vues par les deux caméras à chaque état de charge, ce nous permet de calculer les coordonnées 3D de l'objet à partir des positions mesurées dans les deux images des caméras. La seconde étape consiste à suivre à chaque état de charge les déplacements des domaines de corrélation pour une série d'images droites ou gauches. La figure I.6 montre le principe de cette méthode.

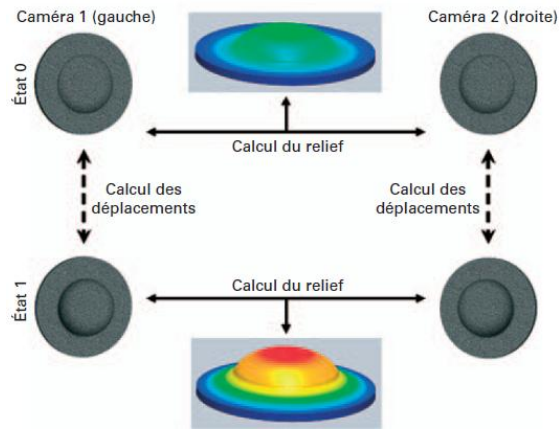


Figure I.6 : Principe de mesure par stéréocorrélation [R 1 850v2].

I.2.4.3 Analyse 3D-3C

Le principe de corrélation peut s'appliquer dans le volume et mesurer toutes les composantes des champs de déplacements et de déformations. La corrélation d'images volumiques (CIV) est l'extension de la corrélation 2D-2C en trois dimensions. Elle partage les mêmes principes et présente de nombreuses similitudes dans son écriture [GER..]. Cependant l'ajout d'une nouvelle dimension rallonge considérablement le temps de calcul du fait des paramètres supplémentaire à déterminer dans la transformation matérielle 3D. La CIV travaille sur des images volumiques qui contiennent une variation 3D des niveaux de gris. L'élément unitaire n'est plus le « pixel » mais le « voxel », les mouvements et les déformations sont alors tridimensionnels. Le champ de déplacement entre deux états (référence et déformé) est mesuré sur une grille de points tridimensionnelle virtuelle définie à l'état de référence.

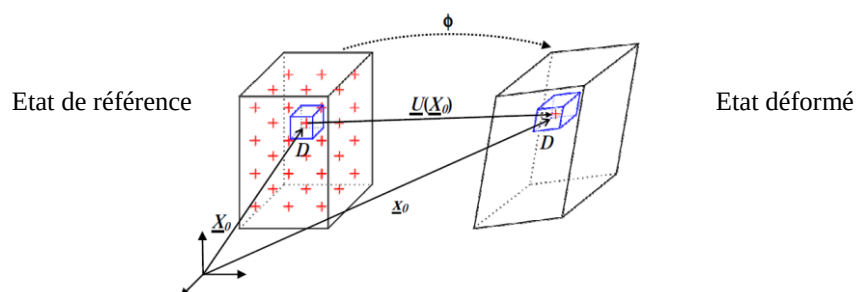


Figure I.7. Principe de la CIV [GER 07]

Dans l'image initiale, on sélectionne un sous-volume de voxels appelé domaine de corrélation (noté D) centré sur chacun des points de la grille. Ensuite, on recherche dans l'image déformée le sous-volume déformé correspondant à celui sélectionné dans l'image de référence. Ce volume de corrélation est représenté par la valeur des niveaux de gris des

voxels le constituant. Cela en émettant l'hypothèse que les niveaux de gris des sous-volumes ne varient pas au cours de la déformation.

Pour les besoin de cette méthode et pour avoir une vue au cœur des matériaux ou des structures et avoir des images volumiques de l'échantillon à observer et pouvoir suivre l'évolution de la structure interne des techniques comme la tomographie à rayon X ou IRM (image à résonance magnétique) ou encore découpage optique qui est une technique récemment développée au sein du laboratoire de photomécanique sont généralement employées. Les images volumiques générées par ces techniques, contiennent une distribution 3D des niveaux de gris. Celle-ci se caractérise par un contraste lié à la microstructure du milieu étudié. De ce fait, ce contraste peut avoir une origine naturelle mais aussi artificielle. En effet, la microstructure peut contenir naturellement des hétérogénéités mises en évidence par le rayonnement utilisé, c'est le cas par exemple lors de l'étude d'un os ou d'une roche par rayons X. On peut également créer artificiellement un contraste en ajoutant au milieu étudié des marqueurs provoquant une variation du paramètre mesuré. Ainsi, en observant ces contrastes, on suit l'évolution du paramètre, liée aux mouvements matériels locaux. La mesure de ces mouvements peut alors être effectuée par Corrélation d'Images Volumiques (CIV). Dans la figure qui suit nous verrons quelques exemples d'applications

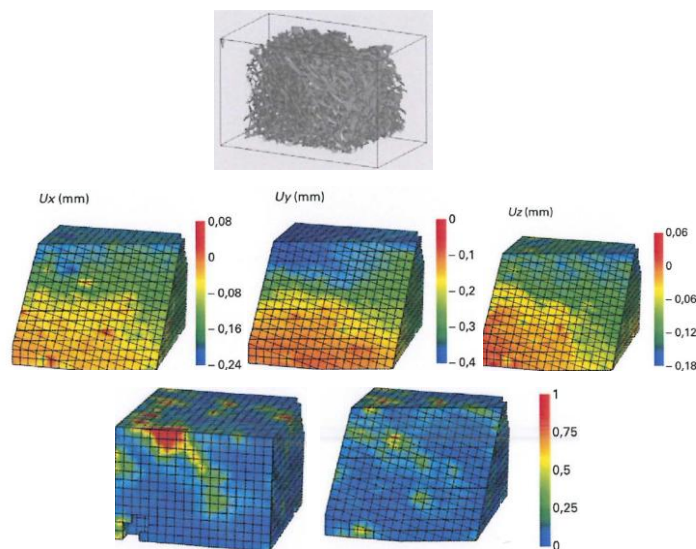


Figure I.8. Exemples d'application de la CIV Analyse du comportement mécanique d'un échantillon d'os, mesure du champ de déplacement et calcul de la déformation équivalente[R 1 850v2].

1.2.5. La photoélasticimétrie

La photoélasticimétrie est sans doute l'une des premières techniques en photomécanique. Elle est utilisée pour visualiser la répartition des contraintes dans des modèles.

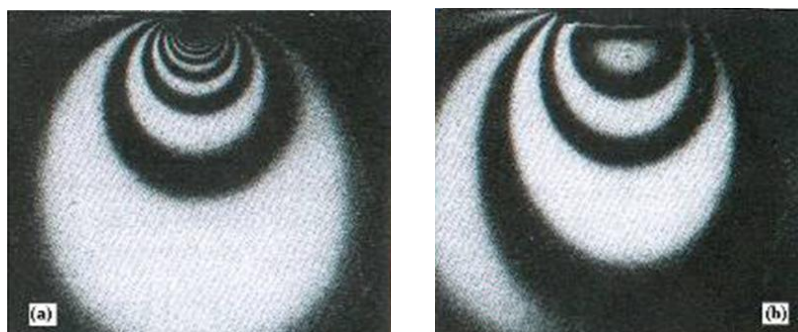
Cette technique est basée sur les variations d'indice d'optique d'un matériau transparent. Le matériau isotrope optiquement au repos (indice d'optique n_0) devient anisotrope lorsqu'il est soumis à un chargement (indice d'optique n_1 et n_2), cette propriété découverte par Brewster au début du XIX siècle est appelée phénomène de **biréfringence** a été reprise par Maxwell et Neumann qui ont relié ces variations d'indices d'optique ($n_2 - n_1$) aux contraintes ($\sigma_2 - \sigma_1$) principales et aux déformations en élasticité en établissant des lois linéaires. Pour un problème plan on a :

$$n_2 - n_1 = C(\sigma_2 - \sigma_1) \quad [I.2]$$

Avec C la constante photoélastique du matériau exprimée en Brewster ($1\text{Bw} = 10^{-12}\text{m}^2\text{N}^{-1}$)

I.2.5.1. La photoélasticimétrie bidimensionnelle

La photoélasticimétrie bidimensionnelle s'applique dans le cas où on a un problème plan ou les contraintes ne varient pas suivant l'épaisseur du modèle étudié. Elle consiste à mettre un modèle, que l'on peut considérer bidimensionnel (de petite épaisseur) sous chargement, dans un polariscope puis observer le phénomène de biréfringence qui se traduit par l'apparition de franges sur l'image du modèle. La figure suivante montre les franges observées pour quelques exemples de problèmes plans étudiés par photoélasticimétrie 2D.



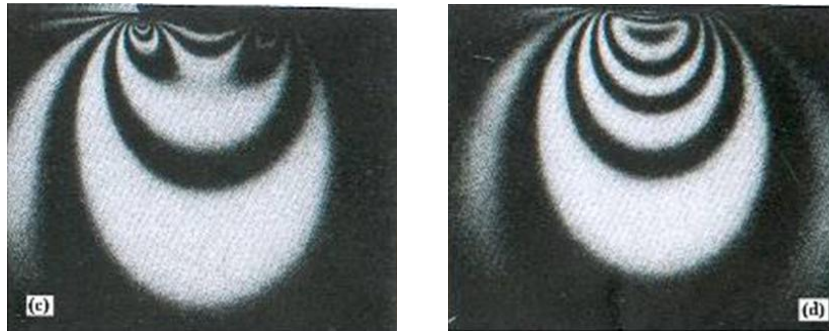


Figure I.9: Franges isochromes en photoélasticimétrie bidimensionnelle (contours des contraintes de cisaillement maximales) pour: (a) une charge ponctuelle, (b) une pression uniforme, (c) un poinçon rigide plat et (d) un contact de deux cylindres [BIL 05]

I.2.5.2. La photoélasticimétrie tridimensionnelle

Lors de l'étude de modèles, de forme complexe ou subissant un chargement tridimensionnel ou avec une épaisseur importante par rapport aux autres dimensions, l'état de contrainte ne peut plus être considéré comme plan, il varie en amplitude et en direction suivant l'épaisseur.

De ce fait on ne peut plus analyser le modèle en photoélasticimétrie 2D. Différentes techniques en photoélasticimétrie sont alors développées pour l'étude des cas tridimensionnels les principales sont : la technique du figeage-découpage qui consiste à figer des contraintes dans un modèle photoélastique puis procéder à un découpage mécanique de tranches dans les directions voulues pour en fin les étudier par photoélasticimétrie 2D cela nous permet de connaître l'état de contraintes dans le modèle .

Et la technique du découpage optique basée sur le phénomène de diffusion de la lumière dans les milieux transparents et qui consiste à isoler à l'aide de faisceaux plans laser des feuillets minces successifs à l'intérieur du modèle à étudier (figure I.10) puis enregistrer des images numériques de la lumière diffusée et calculer un coefficient de corrélation qui nous permet d'observer des franges similaires au cas 2D.

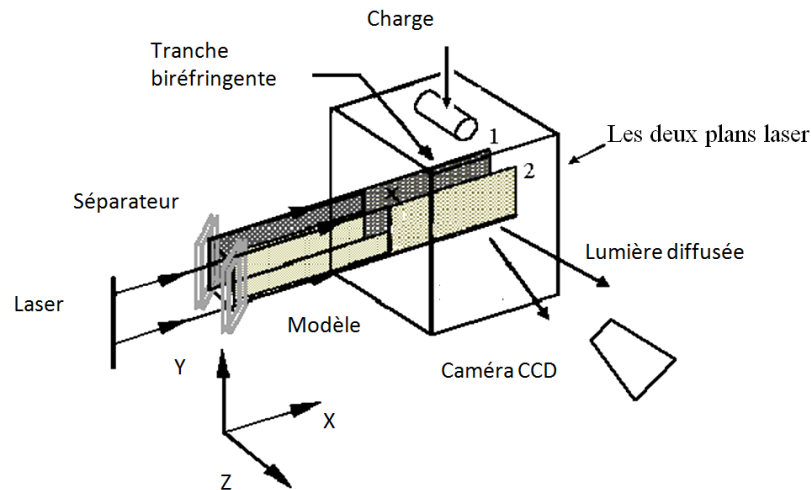


Figure I.10: Découpage optique à l'aide de deux plans laser [BIL 05]

I.3. conclusion :

On a vu dans ce chapitre l'illustration de quelques méthodes utilisées en photomécanique pour l'étude des matériaux et des structures, avec les méthodes 2D-2C pour la mesure des déplacements et des déformations sur des surfaces planes, les méthodes 2D-3C pour l'étude des surfaces courbes et la méthode 3D-3C (corrélation d'image volumique) pour une mesure dans le volume ajoutée à cela la photoélasticimétrie 2D et 3D pour l'étude des champs de contraintes.

Notre problématique, étant l'étude de contact, ça nous est nécessaire d'avoir des informations au cœur du modèle pour analyser et comprendre le comportement mécanique de la structure et du matériau. Parmi ces méthodes vues, celles qui peuvent répondre le mieux à notre étude, sont la corrélation d'image volumique et la photoélasticimétrie 3D, cependant la CIV est beaucoup plus adaptée aux grands déplacements et elle est moins précise dans le cas de petites déformations [GER 07]. Comme dans notre cas d'étude, les déformations et les déplacements sont petits on optera pour une étude avec la photoélasticimétrie 3D couplée à une modélisation numérique, pour cela le chapitre suivant tentera de présenter de manière détaillée la photoélasticimétrie, ces différents aspects et applications.

La photoélasticimétrie

II. La photoélasticimétrie

II.1. Introduction :

La photoélasticimétrie est l'une des méthodes photomécanique les plus anciennes ; elle repose essentiellement sur les études menées sur la propagation de la lumière dans les milieux transparents et sur le phénomène de biréfringence que l'on tentera d'expliquer dans ce chapitre. Elle fut très utilisée au vingtième siècle pour visualiser les répartitions des contraintes dans des modèles afin de concevoir et d'optimiser les géométries des structures mécaniques. Cependant depuis l'apparition et le développement des codes de calcul et des modélisations numériques, cette méthode est moins utilisée pour la conception mais elle s'utilise comme méthode de référence pour la validation des modèles car il y a toujours nécessité de confronter l'expérimentation et la modélisation. Cela est favorisé par le développement de moyens d'analyse 3D et de procédures automatiques de dépouillement de franges développées à l'aide des techniques de traitement et d'analyse d'images.

Dans ce chapitre nous allons tenter de faire le point sur la photoélasticimétrie, ses fondements, son utilisation en contraintes planes, et aussi sur les récentes avancées et notamment sur les dernières techniques d'analyse automatiques, et enfin sur la photoélasticimétrie tridimensionnelle.

II.2. La polarisation de la lumière :

Selon la théorie électromagnétique, la lumière est une onde composée d'un champ électrique E et d'un champ magnétique H . Ces deux champs sont perpendiculaires à la direction de propagation de la lumière.

L'état de polarisation de la lumière est donné par la direction du vecteur champ électrique ou magnétique. Par exemple, si le champ électrique E garde une direction constante durant la propagation alors l'onde lumineuse est polarisée rectiligne. Si l'orientation évolue, l'onde possède une polarisation elliptique ou circulaire [figure II.1].

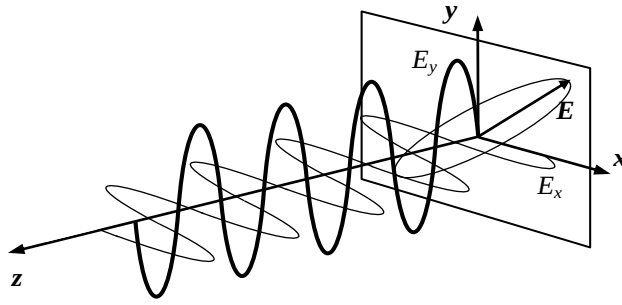


Figure II.1 : Représentation des composantes du champ électrique d'une onde de polarisation elliptique [GER 07]

Une onde monochromatique se propageant suivant la direction z , définie par son vecteur d'onde k , sa fréquence angulaire ω et son amplitude A , s'écrit alors :

$$E = A \cos(\omega t - k.z) \quad [\text{II-1}]$$

Dans le plan (x, y) cette expression devient :

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(\omega t - k.z + \phi_x) \\ E_y = A_y \cos(\omega t - k.z + \phi_y) \end{cases} \quad [\text{II-2}]$$

Le déphasage $\phi = \phi_y - \phi_x$ permet de décrire deux cas particuliers :

$$\begin{cases} \text{si } \phi = n\pi \quad (n \text{ entier}) \text{ la polarisation est rectiligne} \\ \text{si } \phi = \pm \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ et } A_x = A_y \text{ la polarisation est circulaire} \end{cases} \quad [\text{II-3}]$$

La polarisation de la lumière peut être mise en évidence à l'aide d'un polariseur. La polarisation peut aussi être effectuée par réflexion et par diffusion. Nous verrons par la suite l'utilisation du phénomène de diffusion comme polariseur.

II.3. Phénomène de biréfringence :

Le phénomène de biréfringence est une propriété physique de certains matériaux transparents qui ne sont pas isotropes optiquement comme les cristaux de quartz. Il est défini comme le fait de transmettre deux rayons distincts, polarisés dans deux plans perpendiculaires, qui se propagent dans le cristal à des vitesses différentes v_1 et v_2 . Certaines matières présentent ce phénomène lorsqu'elles sont soumises à des contraintes. Le rayon lumineux qui arrive sur le modèle transparent se trouve décomposé en deux rayons distincts autonomes. Chacun de ces rayons se déplace à une vitesse propre à sa direction de propagation.

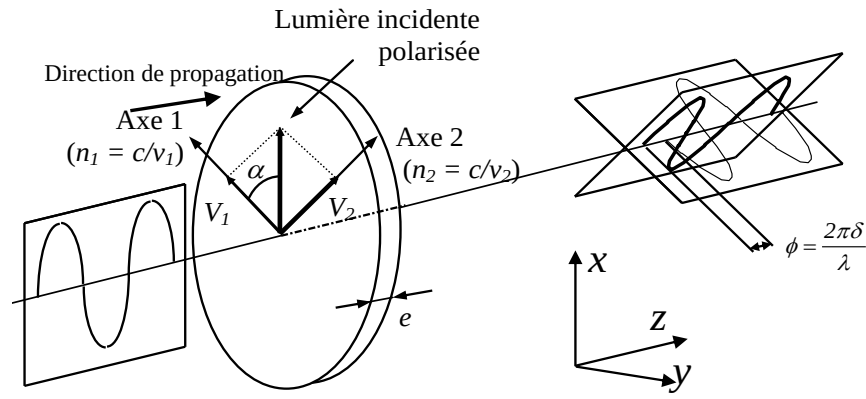


Figure II.2 : Effet d'une plaque mince biréfringente sur une lumière polarisée.

La différence de chemin optique δ entre les deux rayons ou biréfringence est donnée, si e représente l'épaisseur de la plaque, par :

$$\delta = (n_2 - n_1) e$$

[II-4]

Le déphasage entre les deux composantes (défini au paragraphe précédent), ou encore la biréfringence angulaire, est défini par :

$$\phi = 2\pi \delta / \lambda$$

[II-5]

Si ϕ est quelconque la lumière en sortie sera elliptique. D'après [II-3] la lumière peut être polarisée rectiligne et circulaire.

On peut examiner le cas particulier d'une lame quart d'onde :

- une lame quart d'onde est une lame biréfringente telle que la différence de chemin optique est de $\lambda/4$. Le déphasage introduit par cette lame est donc $\pi/2$ d'après [II-5]. Si une lumière polarisée arrive avec un angle de polarisation de 45° par rapport à l'un des axes de la lame ($A_x = A_y$) : la lumière en sortie est circulaire. L'ensemble polariseur suivi d'une lame quart d'onde conduit donc à polariser circulairement une onde lumineuse.

Un milieu est dit isotrope optiquement lorsqu'il possède les mêmes propriétés optiques quelque soit la direction d'observation. Lorsqu'un faisceau lumineux le traverse, il se propage avec la même vitesse dans toutes les directions. Dans un milieu cristallin, ou anisotrope, la vitesse de propagation varie suivant les directions propres du milieu. La vitesse de propagation dans une direction donnée est inversement proportionnelle à l'indice de réfraction correspondant à cette direction.

Un milieu transparent, isotrope au repos, a la propriété de devenir plus ou moins biréfringent lorsqu'il est soumis à des contraintes. Le milieu est caractérisé par un indice de réfraction n_0 valable dans toutes les directions au repos, et un ellipsoïde des indices lorsqu'il est soumis à des contraintes. Ce phénomène a été découvert par Brewster en 1816. L'ellipsoïde des indices est tel que ses directions principales coïncident avec les directions principales des contraintes dans le modèle. Les lois liant les indices principaux aux contraintes principales ont été déterminées par Maxwell au siècle dernier :

$$\begin{aligned}n_1 &= n_0 + C_1 \sigma_1 + C_2 (\sigma_2 + \sigma_3) \\n_2 &= n_0 + C_1 \sigma_2 + C_2 (\sigma_3 + \sigma_1) \\n_3 &= n_0 + C_1 \sigma_3 + C_2 (\sigma_1 + \sigma_2)\end{aligned}$$

[II-6]

Où C_1 et C_2 sont appelées les constantes photoélastiques absolues du matériau.

Neumann, indépendamment de Maxwell, a déterminé les lois liant les indices principaux aux déformations principales.

Plus particulièrement, pour les problèmes des contraintes planes, nous avons :

$$\begin{aligned}n_1 &= n_0 + C_1 \sigma_1 + C_2 \sigma_2 \\n_2 &= n_0 + C_1 \sigma_2 + C_2 \sigma_1\end{aligned}$$

[II-7]

La soustraction membre à membre de ces deux relations donne:

$$n_2 - n_1 = (C_1 - C_2)(\sigma_2 - \sigma_1) = C(\sigma_2 - \sigma_1)$$

[II-8]

C est une constante optico-mécanique relative du milieu et elle est aussi appelée la constante photoélastique du matériau ; elle a la dimension de l'inverse d'une contrainte et s'exprime en Brewster (Bw) qui vaut :

$$1 Bw = 10^{-12} m^2/N = 10^{-12} Pa^{-1}$$

[II-9]

On voit bien que selon la relation [II-8], la biréfringence d'un modèle en état de contraintes planes est proportionnelle à la différence des contraintes principales ($\sigma_1 - \sigma_2$).

II.4. Les différents types de polariscope :

Un banc d'essai en photoélasticimétrie est composé d'un polariscope, formé d'une source lumineuse, de deux Polaroids (appelés polariseur pour le plus proche de la source lumineuse et analyseur pour le plus proche de l'observateur), d'un appareil de mesure (photomultiplicateur : PM, film photographique, œil, caméra CCD), et d'un montage d'application de la charge.

II.4.1. Le polariscope rectiligne :

Le polariscope rectiligne est le plus simple, il utilise la polarisation rectiligne d'une onde lumineuse. Si le polariseur et l'analyseur sont croisés, alors il y a extinction de la lumière en sortie en absence de modèle, on dit que le polariscope est à champ sombre. Inversement si le polariseur et l'analyseur sont parallèles alors le polariscope est dit à champ clair.

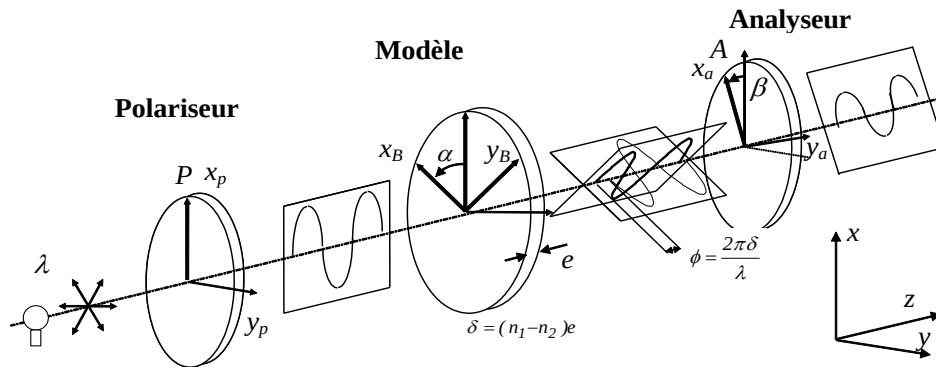


Figure II.3: Schéma de principe d'un polariscope à lumière rectiligne

Ox_B et Oy_B sont les directions principales des contraintes du modèle chargé qui forment un angle β avec la direction de la polarisation. Le calcul de l'intensité lumineuse en sortie est bien connu [BIL 07]. Nous n'en donnons ici que le résultat pour les deux configurations particulières :

$$\text{Polariscope à champ clair } (\beta=0) : I=I_0 \left[1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\phi}{2} \right] \quad [\text{II-10}]$$

$$\text{Polariscope à champ sombre } (\beta=\pi/2) : I=I_0 \left[\sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\phi}{2} \right] \quad [\text{II-11}]$$

L'exemple qui suit montre (figure II.4) l'image obtenue au travers d'un polariscope rectiligne à champ sombre d'un disque en époxyde soumis à un essai de compression

diamétrale. L'analyse des zones claires (appelées franges blanches) et des zones sombres (appelées franges noires) conduit à la connaissance de la différence des déformations ou des contraintes principales.

Ainsi dans un tel polariscope [II-11], l'intensité I est nulle (franges noires) si :

$$\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k \pi/2$$

Ce sont les **lignes isoclines**, ces lignes sont indépendantes de l'intensité de la charge appliquée et de la longueur d'onde utilisée. On peut les faire varier soit en tournant le modèle autour de l'axe z dans le polariscope, soit, ce qui est plus simple, en tournant l'ensemble polariseur analyseur. Elles indiquent la position des points dont l'une des directions principales des contraintes est parallèle à la direction du polariseur.

$$\sin \phi/2 = 0 \Rightarrow \phi = 2\pi k \Rightarrow k = e C (\sigma_2 - \sigma_1)/\lambda$$

Ce sont les **lignes isochromes**, ces lignes d'égal cisaillement maximum ($\sigma_2 - \sigma_1 = cte$) dépendent de l'intensité de la charge appliquée et de la longueur d'onde utilisée. Le long des isochromes, la différence de chemin optique est égale à un nombre entier de fois la longueur d'onde. Ces lignes s'appellent isochromes, car observées en lumière blanche (spectre large). Ce sont des lignes d'égale couleur.

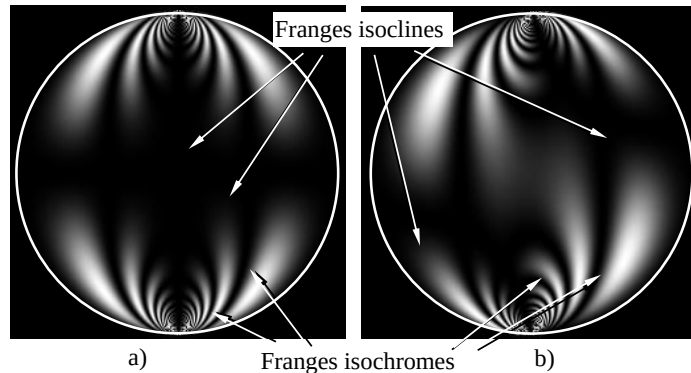


Figure II.4 : Polariscopes à champ sombre pour un disque en compression diamétrale pour deux orientations de l'ensemble polariseur analyseur : a) $\alpha=0^\circ$ et b) $\alpha=15^\circ$ [GRE 11]

II.4.2. Polariscopes à lumière circulaire :

C'est un ensemble (figure II.5) formé d'une source lumineuse puis d'un polariseur circulaire (paragraphe II.3), le modèle à étudier, un analyseur circulaire et un appareil d'enregistrement. Suivant l'orientation γ de cette deuxième lame quart d'onde avec la direction de l'analyseur nous aurons différentes configurations possibles du polariscopes.

Une démarche identique au cas du polariscope rectiligne permet alors de calculer l'expression suivante [GRE 11] :

Pour $\gamma = -\pi/4$, on obtient un polariscope circulaire à champ sombre :

$$I = \frac{I_0}{2}(1 - \cos\phi) = I_0 \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad [\text{II-12}]$$

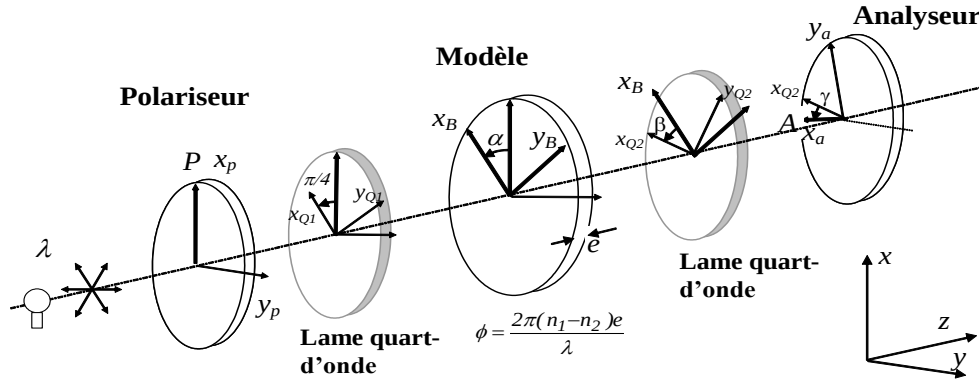


Figure II.5 : Schéma de principe d'un polariscope à lumière circulaire

On constate qu'avec ce polariscope circulaire, les lignes isochromes apparaissent seules (figure II.6). Nous avons donc éliminé les isoclines. C'est un polariscope à champ sombre, car sans contrainte ou en dehors du modèle, on a $I=0$. Les franges sombres sont évidemment d'ordre entier, comme nous l'avons vu précédemment.

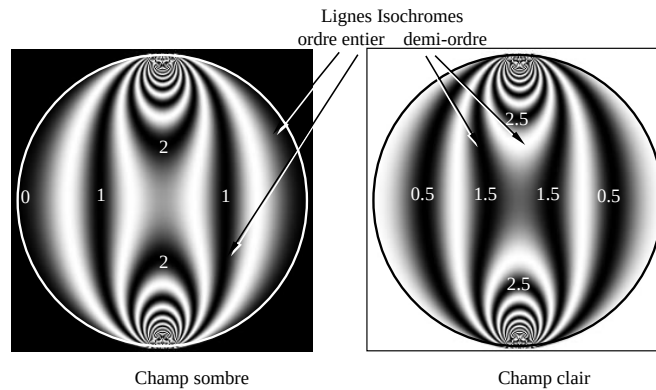


Figure II.6 : Réseaux d'isochromes dans un polariscope à lumière circulaire

pour $\gamma = \pi/4$ on obtient un polariscope circulaire à champ clair :

$$I = \frac{I_0}{2}(1 + \cos\phi) = I_0 \left(\cos^2 \frac{\phi}{2} \right) = I_0 \left(1 - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right) \quad [\text{II-13}]$$

C'est un polariscope à champ clair, car sans contrainte ou hors du modèle, l'intensité I est maximale. Les franges sombres sont de demi-ordre, car :

$$I = 0 \Rightarrow \cos \frac{\phi}{2} = 0 \Rightarrow \phi = (2k+1)\pi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \Rightarrow \phi = (k + \frac{1}{2})\lambda \quad [\text{II-14}]$$

II.4.3. Polariscopes en lumière blanche

L'utilisation d'une lumière blanche possède quelques avantages. Tout d'abord la détection de la frange isochrome d'ordre zéro est facilitée puisque c'est la seule frange qui apparaît noire dans un polariscope à champ sombre (figure II.7). Les autres lignes isochromes apparaissent donc en couleur. Actuellement, avec les logiciels classiques de traitement d'images, on peut facilement séparer une image couleur en ses trois composantes principales bleu, vert et rouge (figure II.7). On constate effectivement que les franges bleues sont plus nombreuses puisque la longueur d'onde bleue est plus faible. C'est évidemment l'inverse pour la couleur rouge. Ainsi il devient possible de réaliser une analyse par multiplication des franges.

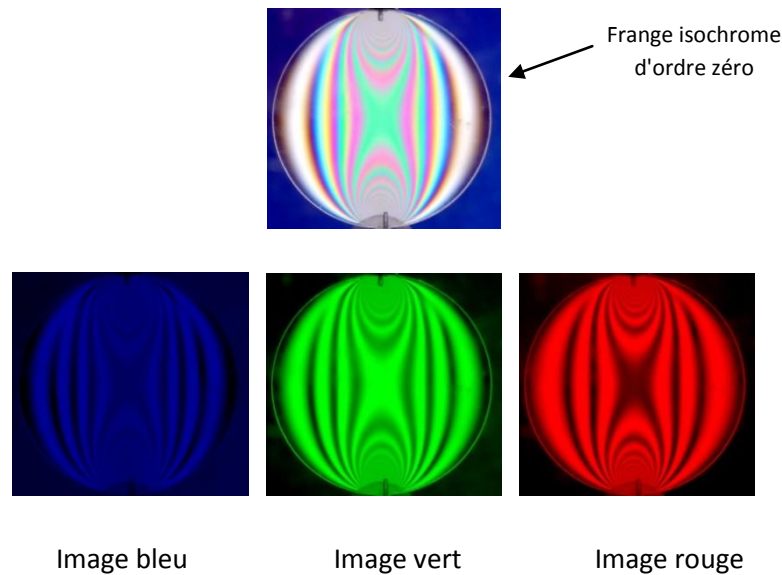


Figure II.7: Franges isochromes obtenues dans un polariscope circulaire en champ sombre et lumière blanche.

II.4.4. Analyse des franges :

Aux débuts de l'utilisation de photoélasticimétrie dans l'industrie et dans la recherche, l'analyse du réseau de franges était effectuée manuellement par mesure ponctuelle (méthode de Tardy, Senarmon [KOB 87]), ce qui nécessitait beaucoup de temps et engendrait plus d'erreurs de mesure. Avec le développement de l'informatique et des

techniques d'acquisition et de traitement d'images plusieurs méthodes ont été développées [ROB 83] [PAT 91] [ASU 93] [MOR 94] [PLO 96] [AJO 98]. Une autre voie concerne l'utilisation de plusieurs longueurs d'onde [KIH 94] [UME 89]. La difficulté de cette analyse vient du fait que deux réseaux de franges sont présents. Il faut donc pouvoir les séparer tout en minimisant l'effet de valeurs indéterminées qui peut apparaître, par exemple lorsque l'un des réseaux est d'amplitude nulle. Ensuite, il faut analyser ces deux réseaux de franges sinusoïdaux. La solution la plus utilisée [GRE 11] est de prendre plusieurs configurations de polariscope afin d'obtenir une réponse démodulée, mais la qualité des éléments optiques (polariseurs, lame quart d'onde et source de lumière) est prépondérante. Comme la réponse est obtenue à partir de fonctions trigonométriques, donc avec des discontinuités, il faut ensuite appliquer un algorithme de déroulage de phase.

II.5. La photoélasticimétrie 3D

Comme on vient de voir dans les paragraphes précédents en photoélasticimétrie 2D, on place une éprouvette sous chargement dans un polariscope et on observe ainsi des franges qui mettent en évidence la différence des contraintes principales et la direction des contraintes principales. Mais ceci suppose l'hypothèse forte que la différence des contraintes principales ne varie pas suivant l'épaisseur du modèle.

Cependant lors de l'étude de pièces épaisses ou à géométries complexes ou encore dans le cas d'une répartition tridimensionnelle des charges ; l'état des contraintes ne pourra plus être considéré plan, il varie en amplitude et en direction. De ce fait on ne pourra plus parler de différence de contraintes principales ($\sigma_1 - \sigma_2$), mais de différence des contraintes principales secondaires ($\sigma' - \sigma''$) car l'analyse de feuillet ne se fera pas nécessairement dans les axes principaux des contraintes. Quoique la biréfringence soit toujours présente dans les modèles 3D, la détermination des paramètres ne pourra plus se faire de la même manière que dans l'hypothèse 2D pour cela, différentes approches ont alors été développées à fin d'étudier les champs de contraintes et de déformation dans les volumes et on tentera d'illustrer les principales méthodes expérimentales dédiées à ce sujet.

II.5.1. La méthode de figeage découpage :

Le figeage des contraintes est un phénomène mis en évidence pour la première fois par Oppel 1936 ; c'est une propriété physique de certains polymères qui consiste en un comportement diphasique des chaînes moléculaires, lorsqu'elles sont chauffées à une température critique où le matériau adopte un comportement viscoélastique (température de transition vitreuse). Si le modèle est chargé dans cet état puis refroidi lentement jusqu'à la température ambiante, il conserve presque totalement la biréfringence acquise dans l'état viscoélastique. Ces polymères sont composés de deux types de chaînes reliant les molécules entre elles : les chaînes principales et les chaînes secondaires. A température ambiante les deux types de chaînes résistent aux charges appliquées au modèle. Lorsque la température du polymère augmente jusqu'à la température critique (environ 130°C pour un époxy), les chaînes secondaires cèdent et les chaînes principales supportent alors seules le chargement. En diminuant lentement la température du polymère jusqu'à la température ambiante, les chaînes secondaires se reforment entre les chaînes principales déformées. En supprimant la charge, les chaînes principales se détendent légèrement, mais une très grande partie de la déformation est conservée. Les déformations élastiques des chaînes principales sont alors figées dans le volume du modèle de manière permanente grâce aux chaînes secondaires reformées.

Une fois le modèle refroidi, il est découpé en tranches d'une épaisseur appropriée telle que la variation des directions de la contrainte principale à travers l'épaisseur de chaque tranche puisse être considérée comme négligeable. Chaque tranche est alors examinée dans un polariscope circulaire ou rectiligne. Les différences des contraintes principales dans chaque direction peuvent être déterminées en coupant les modèles en tranches dans les trois directions orthogonales.

Cependant, cette méthode présente plusieurs inconvénients : les matériaux généralement utilisés pour cette méthode ont un coefficient de Poisson avoisinant 0.5 dans la phase hautement élastique, ce qui peut poser des problèmes de similitude du fait de l'écart important avec les matériaux des prototypes ; les contraintes résiduelles dues au découpage mécanique peuvent perturber la mesure ou altérer l'état des contraintes figées ; il est nécessaire de disposer de plusieurs modèles pour l'étude des contraintes dans les trois directions orthogonales pour un seul cas ou état de charge.

Malgré ces inconvénients cette méthode est encore très utilisée dans l'industrie et cela en raison de sa fiabilité. Pour ce qui concerne notre étude nous avons choisi la méthode de découpage optique utilisant le phénomène de la diffusion de la lumière au sein des

matériaux transparents, pour ces avantages notamment pour son caractère non destructif et la possibilité d'étude de différents états de charge sur un même modèle.

II.5.2 Méthodes utilisant la lumière diffusée comme polariseur :

Lorsqu'un faisceau lumineux de polarisation quelconque passe à travers un milieu transparent, une partie de l'énergie est diffusée par chaque point le long de son chemin optique et suivant une direction perpendiculaire à la direction de propagation de la lumière. Si ce faisceau se propage le long de la direction $\vec{V}$, est observé suivant la direction $\vec{U}$ normale à $\vec{V}$, l'intensité lumineuse diffusée est polarisée rectilignement suivant la direction $\vec{U} \wedge \vec{V}$ (figure II.8). L'idée de l'utilisation de la lumière diffusée dans la photoélasticimétrie pour résoudre les problèmes tridimensionnels de manière non-destructive revient à Weller en 1939 [WEL 39].

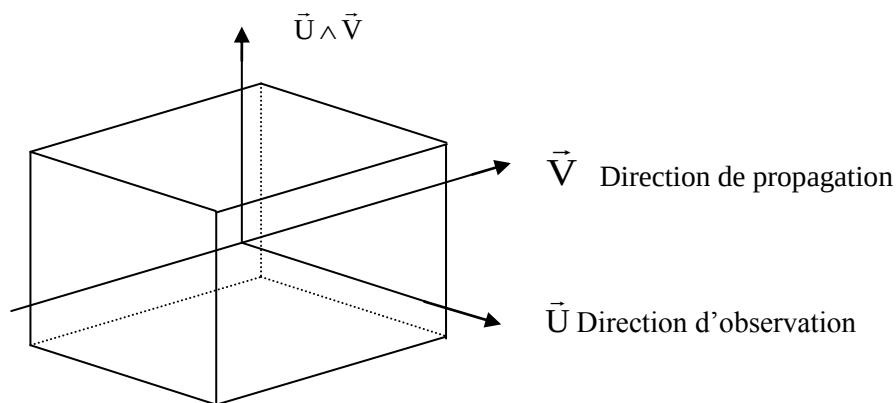


Figure II.8 : Polarisation de la lumière diffusée

La technique proposée par Weller consiste à éclairer une section plane du modèle photoélastique par un faisceau lumineux plan polarisé rectiligne, et à observer dans diverses directions normales au faisceau incident. Cette méthode, utilisant la diffusion comme analyseur, suppose que l'action du pouvoir rotatoire est négligeable c'est-à-dire que les directions principales ne changent pas d'orientation le long du faisceau lumineux incident. Pour éviter les problèmes de réfraction, le modèle est placé dans une cuve à liquide d'indice.

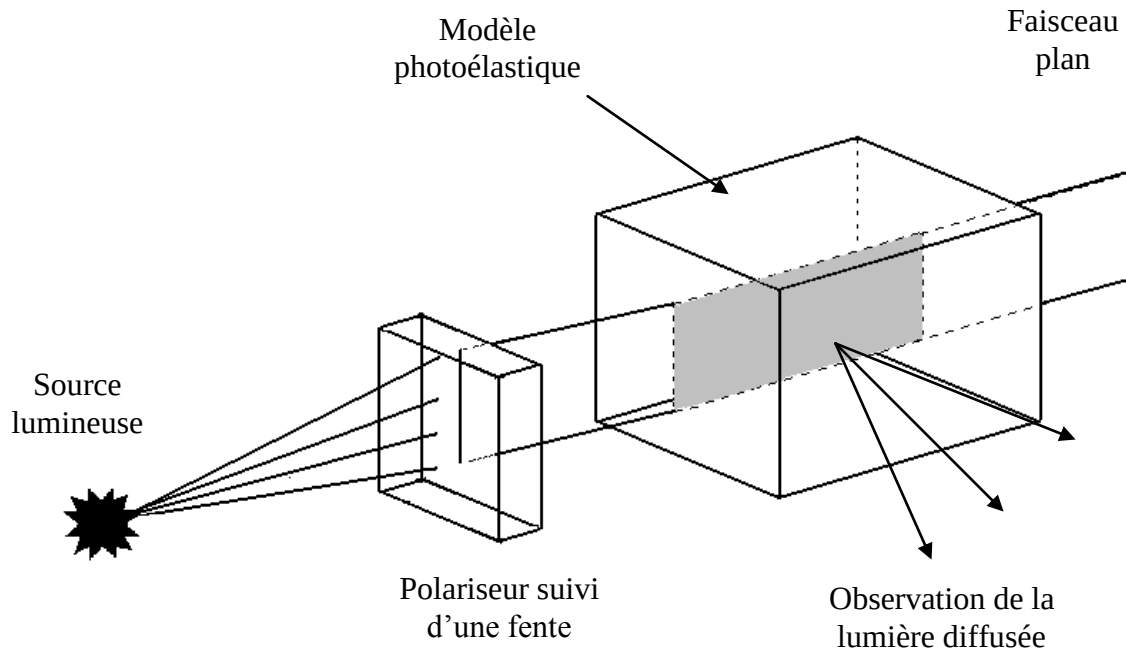


Figure II.9: Schéma de la méthode de Weller

Les franges observées sur l'ensemble du champ n'ont pas partout le même contraste. Ce contraste est maximum quand les directions de polarisation incidentes et d'observation sont à $\pi/4$ des directions principales secondaires. Par contre, les franges disparaissent lorsque la polarisation incidente est parallèle aux axes à l'entrée du modèle. Elles disparaissent également dans les zones où l'observation est effectuée suivant l'un des axes principaux secondaires. Dans le cas d'une lumière incidente circulaire, l'intensité du rayonnement diffusé est uniforme. La disparition des franges permet de déterminer l'orientation des axes principaux secondaires. La mesure de l'interfrange d , dans le réseau de franges, fournit la différence des contraintes principales secondaires (direction principale dans un plan perpendiculaire à une direction donnée, par exemple la direction du faisceau lumineux d'entrée) à l'aide de l'équation suivante:

$$\sigma' - \sigma'' = \lambda / Cd \quad [\text{II-15}]$$

où (σ', σ'') sont les contraintes principales, C représente la constante photoélastique du matériau et λ est la longueur d'onde.

Cette méthode reste simple, et présente l'avantage indéniable d'être non destructive par rapport à la méthode du figeage découpage, elle peut s'appliquer sur un modèle ayant subi un figeage de contraintes mais aussi et surtout sur un modèle que l'on chargerait pendant l'expérience ce qui est avantageux pour l'étude de différents états de charge et suivant les trois directions de l'espace à partir d'un seul modèle. Cependant, du fait qu'elle ne prend

pas en compte le pouvoir rotatoire, cette méthode présente l'hypothèse contraignante que les directions principales secondaires ne varient pas le long de l'épaisseur du modèle, ce qui n'est généralement valable que pour des pièces à géométrie et chargement simples.

En s'appuyant sur l'idée de Weller d'utiliser un faisceau lumineux plan à travers un modèle photoélastique tridimensionnel, plusieurs méthodes ont été développées, parmi elles la méthode du découpage optique que nous allons détailler.

II.5.3. Méthode du découpage optique :

II.5.3.1. Principe :

L'idée de base de cette méthode a été développée par R. Desailly [DES 77, 78, 80, 81,84]. Il a proposé d'isoler à l'aide de deux faisceaux lasers plans rectilignes et parallèles une tranche à l'intérieur d'un modèle biréfringent et de l'analyser à l'aide de la lumière diffusée.

Lorsqu'un faisceau plan de lumière cohérente traverse un milieu diffusant, chaque point de la section éclairée se comporte comme une source lumineuse. Ces sources cohérentes interfèrent entre elles et peuvent donner naissance à des régions d'intensité maximale ou minimale qui constituent le champ de granularité.

Au niveau du point où il est émis, le rayonnement est polarisé rectiligne suivant une direction perpendiculaire à la direction incidente et à la direction d'observation (Loi de Rayleigh). Expérimentalement, la visualisation directe de la biréfringence est impossible.

Le principe consiste à isoler à l'aide de deux plans lasers parallèles une tranche à l'intérieur du modèle biréfringent [figure II.10]. Les possibilités d'interférences des rayonnements des deux sections éclairées dépendent de la biréfringence du feuillet ainsi isolé. Dans cette technique, on procède à l'enregistrement à l'aide d'une caméra CCD de trois images, dont les intensités sont notées I_1 et I_2 lorsque le modèle photoélastique est éclairé par le faisceau 1 ou 2 et une troisième image (intensité I) quand le modèle est éclairé par les deux faisceaux simultanément.

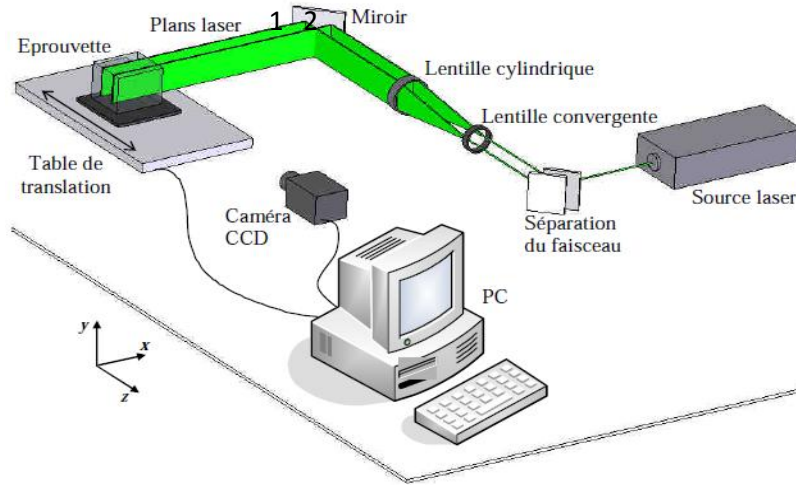


Figure II.10 : Découpage optique à l'aide de deux plans laser [GER 07].

L'intensité lumineuse diffusée peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_{1F} + I_{1g} \\
 I_2 &= I_{2F} + I_{2g} \\
 I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_{1g}}\sqrt{I_{2g}}\gamma\cos(\psi_1 + \psi_2 + \eta)
 \end{aligned}
 \tag{II-16}$$

I_1 et I_2 sont les intensités dues aux deux plans laser, I_{1F} , I_{2F} les intensités des fonds continus, Ψ_1 , Ψ_2 les phases aléatoires des champs de granularité [GER 07], I_{1g} et I_{2g} leurs intensités. η est fonction des caractéristiques optiques du feuillet, et γ est le facteur de corrélation des deux champs de granularité donnée par :

$$\gamma^2 = 1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\phi}{2}
 \tag{II-17}$$

Où α est l'angle formé par l'une des directions principales du feuillet et la direction de polarisation de la lumière diffusée, et ϕ la biréfringence angulaire du feuillet.

Cette expression est semblable à celle couramment utilisée pour l'éclairage obtenu lors de l'analyse d'un modèle en photoélasticimétrie 2D entre deux polariseurs parallèles [II-10].

Dans l'équation donnant l'intensité totale I , les termes dus aux champs de granularité ont des valeurs aléatoires, c'est pourquoi on ne peut pas observer directement les franges recherchées.

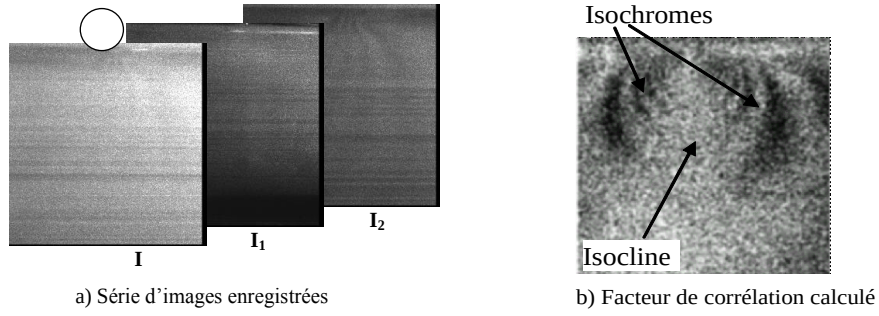


Figure II.12: Exemple d'un appui linéique

Les images de la (figure II.13) montrent un exemple des intensités enregistrées. Le champ de granularité est couplé avec un fond continu dû à la fluorescence du modèle et à une partie dépolarisée de la lumière.

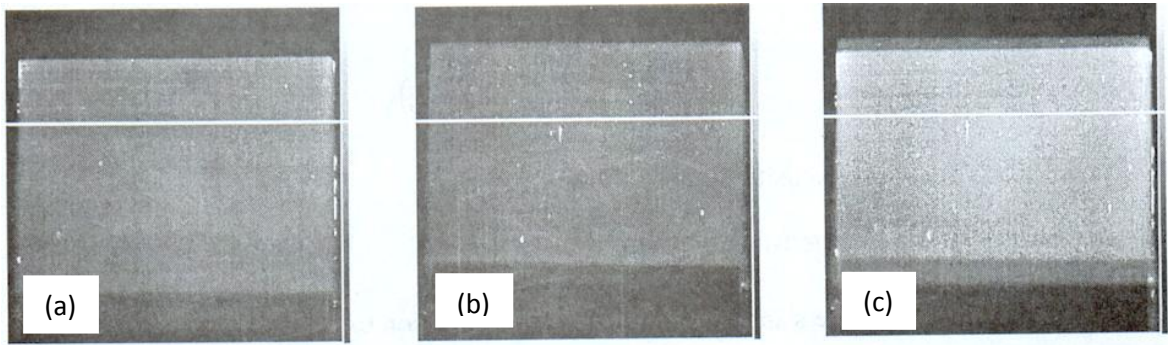


Figure II.13 : Intensités lumineuses diffusées (a) avec le faisceau 1 seul, (b) avec le faisceau 2 seul et (c) avec les deux faisceaux simultanément [BIL 07]

II.5.3.2. Analyse des champs de granularité dans un milieu photoélastique :

II.5.3.2.1. Analyse statistique des champs de granularité

En émettant les hypothèses d'ergodicité et d'indépendance des variables aléatoires, on peut considérer que les intensités des deux faisceaux incidents sont égales et que les moyennes temporelles et statistiques des champs de granularité sont équivalentes. Et à partir d'une analyse statistique des champs de granularité, il est possible de déterminer le facteur de corrélation γ ainsi que la valeur moyenne et la variance pour le champ résultant dont l'intensité diffusée est donnée par I :

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle \quad [\text{II-18}]$$

$$\text{var}^2 = \langle [I - \langle I \rangle]^2 \rangle = \text{var}_1^2 + \text{var}_2^2 + 2\gamma^2 \langle I_{1g} \rangle \langle I_{2g} \rangle \quad [\text{II-19}]$$

Le symbole $\langle \rangle$ représente la moyenne spatiale et var_1 et var_2 les variances de l'éclairement des champs créés respectivement par le premier et second faisceau. Le phénomène de diffusion étant le même pour les deux faisceaux, l'intensité lumineuse du champ de granularité due à la superposition est proportionnelle à l'intensité lumineuse diffusée par chacun des plans lumineux. On a donc en moyenne :

$$K = \frac{\langle I_{1g} \rangle}{\langle I_1 \rangle} = \frac{\langle I_{2g} \rangle}{\langle I_2 \rangle} \quad [\text{II-20}]$$

Tel que K est un facteur dépendant des caractéristiques de diffusion de la matière

A partir de [II-19] et [II-20] on peut écrire :

$$\text{var}^2 = \text{var}_1^2 + \text{var}_2^2 + 2K^2\gamma^2 \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle \quad [\text{II-21}]$$

Finalement on obtient le facteur de corrélation $K^2\gamma^2$:

$$K^2\gamma^2 = \frac{\text{var}^2 - \text{var}_1^2 - \text{var}_2^2}{2\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \quad [\text{II-21}]$$

Par conséquent, à partir de l'acquisition des trois images de granularité laser au sein de l'échantillon, nous pouvons calculer Var , Var_1 , Var_2 , $\langle I_1 \rangle$ et $\langle I_2 \rangle$ afin de déterminer le facteur de corrélation, permettant ainsi de visualiser les franges isochromes et isoclines sur le feuillet considéré.

II.5.3.2.2. Analyse numérique des champs de granularité :

Afin de calculer de manière rapide et efficace le facteur de corrélation en chaque point de l'image pour déterminer les paramètres isoclines et isochromes, l'équipe de recherche en photomécanique de l'axe PEM a développé le logiciel Photo 3D.

Les intensités moyennes et les variances de I_1 , I_2 et I sont calculées localement sur une zone carrée de dimension N fixée par l'utilisateur. Suivant la valeur de N définie par l'utilisateur, le contraste et la granularité de l'image $k^2\gamma^2$ ne sont pas les mêmes. La taille de la zone de calcul est choisie en fonction du type de frange que l'on cherche à visualiser (plus les franges sont proches, plus la zone doit être petite). La taille de la zone de calcul correspond à la base de mesure pour calculer les grandeurs statistiques. Afin d'avoir une résolution la plus fine possible, il est nécessaire d'avoir un grain de granularité laser (« speckle ») très fin, de la taille d'un pixel. Pour cela, on peut agir sur les différents

paramètres caractérisant l'ouverture numérique (diaphragme, distance) de manière à obtenir une taille de grain aussi petite que possible.

Pour chaque pixel (i,j), le logiciel calcule chacun des termes intervenant dans l'équation [II-21]. La moyenne et la variance de (I) sont calculées sur une zone de $(2N+1)^2$ pixels centrée en (i,j) :

$$\langle I(i, j) \rangle = \frac{\sum_{k=-N}^{k=+N} \sum_{l=-N}^{l=+N} I(i+k, j+l)}{(2N+1)^2} \quad [\text{II-22}]$$

Une fois la valeur moyenne calculée, la variance est obtenue par :

$$\text{Var}^2(i, j) = \left\langle [I(i, j) - \langle I(i, j) \rangle]^2 \right\rangle = \frac{\sum_{k=-N}^{k=+N} \sum_{l=-N}^{l=+N} [I(i+k, j+l) - \langle I(i, j) \rangle]^2}{(2N+1)^2} \quad [\text{II-23}]$$

Les valeurs moyennes et les variances pour (I₁) et (I₂) sont obtenues de la même manière [II-22] et [II-23]. Ainsi le logiciel calcule une quatrième image correspondant à ($K^2\gamma^2$), ce qui permet de représenter les franges isochromes et isoclines de manière quasi instantanée.

II.5.3.2.3. Séparation des paramètres isochrome et isocline dans un feuillet mince :

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe II.5.3.1 (équation [II-17]), l'expression du facteur de corrélation est identique à celle de l'intensité lumineuse obtenue dans un polariscope 2D rectiligne. L'analyse de la lumière diffusée donne donc des franges équivalentes à celles obtenues dans un polariscope rectiligne (isochrome et isocline).

$$K^2\gamma^2 = 1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad [\text{II-24}]$$

Le facteur K dépend de la propriété de la diffusion du matériau utilisé. En pratique, il est approximativement égal à 1/10.

Sur un feuillet isolé, on rappelle que le paramètre isochrome φ est donné par :

$$\varphi = \frac{2\pi Ce}{\lambda} (\sigma' - \sigma'') \quad [\text{II-25}]$$

Le paramètre isocline s'exprime en fonction des composantes du tenseur des contraintes :

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right) \quad [\text{II-26}]$$

Les franges isoclines correspondant aux directions des contraintes principales secondaires, peuvent être gênantes lorsque l'on veut observer uniquement les franges isochromes afin d'accéder aux différences de contraintes principales secondaires. Pour cela, il est possible de les éliminer en faisant l'acquisition d'images d'un même état de charge avec deux orientations de l'incidence des faisceaux (par exemple 0° et 45°).

Pour une étude 2D, lorsque l'on veut éliminer le paramètre isocline, on utilise un polariscope circulaire avec deux lames quart d'onde afin de faire tourner la polarisation de la lumière et de faire apparaître seulement les franges isochromes. En 3D, la polarisation est fonction de l'orientation des faisceaux. En orientant les faisceaux d'un angle θ , on fait varier la direction de polarisation et de ce fait, l'isocline tourne également d'un angle θ . On obtient alors deux images contenant les réseaux de franges où les isoclines ont des orientations différentes. Par exemple, pour $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 45^\circ$ et en sommant les deux images, on élimine les franges isoclines. Dans ce cas, on observe uniquement les franges isochromes.

II.5.3.3. Exploitation des franges photoélastiques :

A partir des franges photoélastiques 3D obtenues, deux approches sont généralement utilisées pour caractériser l'état mécanique d'un feuillet découpé optiquement dans un modèle.

La première consiste à déterminer la différence des contraintes ou des déformations et à calculer les contraintes (par intégration des équations d'équilibre en partant d'un bord) et cette approche passe par une analyse du réseau de franges isochromes. En pratique l'ordre de frange est déterminé manuellement ou à l'aide d'une méthode de démodulation de phase à partir d'une seule image. Cette technique, appelée Modulated Phase Corrélation (MPC), a été développée au sein de l'axe PEM par Robin et al. [ROB 04, 05a, 05b]. Elle consiste à épouser la morphologie locale du réseau de franges par un réseau de franges virtuelles. On évalue alors le degré de similitude entre ces deux réseaux (réel et virtuel) par un coefficient de corrélation. Lorsque le degré de similitude maximal est atteint, la fonction de phase virtuelle du modèle est proche de la fonction de phase réelle. La MPC permet de déterminer la phase en tout point de l'image.

La seconde approche consiste à comparer les franges obtenues expérimentalement avec des franges obtenues à partir d'un modèle théorique ou numérique. Pour cela un modèle théorique ou numérique correspondant au cas réel est établi ce qui permet d'obtenir le tenseur des contraintes en tout point du modèle. Au sein de celui-ci, on définit un feuillet sur lequel on effectue une étude photoélastique, en y reconstituant les variations de

l'intensité lumineuse correspondant à l'état de contrainte de chaque point du modèle. Cette technique sera détaillée dans le chapitre suivant.

II.6. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté dans un premier temps la théorie relative à la photoélasticimétrie, notamment le phénomène de biréfringence utilisé en photoélasticité pour l'analyse des contraintes dans les modèles sollicités. Nous avons expliqué les différentes configurations de polariscope (en lumière plane ou circulaire) et l'utilisation de ce dernier du phénomène de biréfringence pour l'obtention des franges isochromes et isoclines, qui permettent de déterminer respectivement les valeurs des contraintes de cisaillement maximales et les directions des contraintes principales dans le modèle étudié.

Ensuite on a vu les fondements de la photoélasticité 3D par découpage optique qui consistent à isoler un feuillet au sein du modèle photoélastique 3D par deux faisceaux plans laser, ce qui permet en balayant les deux faisceaux dans l'épaisseur du modèle d'étudier plusieurs feuillets et ainsi évaluer les différences de contraintes dans tout le volume. L'analyse statistique des champs de granularité obtenue par diffusion de la lumière permet de calculer le facteur de corrélation, qui est un paramètre similaire à l'intensité lumineuse observée en photoélasticimétrie 2D. Ce qui permet d'obtenir des franges telles qu'elles sont observées dans des cas 2D avec un polariscope à lumière rectiligne.

Pour exploiter ces franges, deux approches sont généralement utilisées. La première consiste à analyser les réseaux de franges et déterminer la différence des contraintes en tout point du modèle et la seconde consiste à établir un modèle numérique pour ensuite calculer les franges simulées et les comparer à celles obtenues expérimentalement. Cette approche est performante pour la validation d'une simulation numérique ce qui correspond à notre problématique d'étude. Le chapitre suivant présentera les différentes schématisations d'un milieu photoélastique et les formulations numériques pour la construction d'un modèle numérique sous Abaqus.

La modélisation numérique

III. Etablissement d'un modèle numérique :

Le développement de la technologie informatique, des calculateurs et des logiciels de calcul, rend les simulations numériques incontournables pour la conception et le dimensionnement de structures et de pièces mécaniques dans l'industrie et dans la recherche scientifique et ce pour la facilité et la rapidité de l'obtention des résultats. Cependant les modélisations sont souvent effectuées au détriment d'essais expérimentaux ce qui peut introduire des erreurs dans les estimations lorsque les conditions aux limites, les maillages ou les données liées aux matériaux ne sont pas correctement définis. Pour chacun de ces éléments des approximations sont alors établies. Pour s'assurer de la viabilité de ces approximations et par conséquent de la modélisation numérique une validation expérimentale est nécessaire.

Pour les différents cas de contact traités pour le problème mécanique abordé dans ce mémoire, une modélisation numérique par éléments finis est réalisée sous Abaqus 6.10, qui est un code de calcul, largement utilisé dans l'industrie et réputé particulièrement pour sa fiabilité dans le traitement des problèmes non linéaires, permettant d'estimer l'état de contrainte en tout point du modèle. La détermination des contraintes en chaque nœud du maillage permet ensuite de calculer des franges photoélastiques simulées. Ces franges simulées pourront ainsi être comparées à celles obtenues expérimentalement par photoélasticimétrie par découpage optique afin de statuer sur la validité de la simulation ou bien pour dimensionner un modèle expérimental.

Dans ce chapitre nous allons tenter d'illustrer brièvement la modélisation numérique et ses principes ainsi que les différentes formulations du contact entre solides sous Abaqus. Ensuite, nous parlerons des différentes schématisations d'un milieu 3D photoélastique permettant de calculer les franges à partir des données de la simulation.

III.1. La modélisation numérique sous Abaqus :

Abaqus est un code de calcul qui a été développé par Hibbit, Karlsson & Sorensen (HKS) à la fin des années 1970 avec les débuts de la théorie des éléments finis et a été amélioré au fur et à mesure pour intégrer toutes les nouveautés de la théorie et des besoins de la recherche et de l'industrie. Pour établir un modèle numérique sous Abaqus on doit suivre une démarche qui est scindée en trois étapes :

- La modélisation : le logiciel Abaqus dispose d'un module CAE, doté d'une interface graphique facile d'accès, similaire à celles des logiciels de conception, et

qui nous permet de réaliser toutes les définitions géométriques du problème, elle permet de faire des assemblages ou même importer des modèles conçus sur d'autres logiciels tel que SolidWorks. Il faut ensuite définir le maillage, les chargements et les conditions aux limites.

- Le prétraitement : Cette étape consiste à attribuer les propriétés des matériaux au modèle, de choisir les pas de temps pour le chargement, les données du problème (le chargement, les conditions aux limites) et les inconnues à calculer. Ensuite, un fichier d'entrée est généré (caractérisé par le suffixe .inp) qui contient toutes les données du problème et enfin le calcul peut être lancé.
- Le post traitement : Après avoir calculé et généré le fichier de résultats (caractérisé par le suffixe .odb), le logiciel dispose d'une interface qui permet de visualiser les différentes inconnues calculées comme les forces de réactions, les contraintes, les déformations, les déplacements etc. Cette étape est la plus importante et demande un savoir et un bon esprit d'analyse pour pouvoir traiter et interpréter les résultats.

III.1.1. La gestion du contact sous Abaqus :

Abaqus dispose de plusieurs algorithmes de gestion de contact notamment d'un algorithme de contact généralisé qui identifie les surfaces susceptibles d'interagir. Aussi, il peut laisser la liberté du choix des contacts à considérer « contact pair ». Il est à noter qu'à la base de la gestion des contacts, Abaqus propose deux catégories de surfaces : maîtres et esclaves. La surface maître est utilisée, via sa normale, pour la définition de la direction de contact. Le choix de cette hiérarchie dépend des critères suivants :

- si l'un des corps est infiniment rigide, c'est celui-ci qui sera choisi comme maître
- si les deux sont déformables, la pièce la plus rigide et/ou maillée le plus grossièrement sera choisie comme maître (il s'agit ici de la rigidité 'locale' de la structure et non simplement du matériau qui la constitue). La différence entre les deux vient du fait que les surfaces maîtres peuvent pénétrer les surfaces esclaves et pas le contraire. Cependant, les nouvelles versions proposent la possibilité de définir une interpénétration.

- **Algorithme de contact de type cinématique :** Cet algorithme procède par un avancement de l'état cinématique du modèle sans tenir compte des contacts. Ainsi, il estime les enfoncements des nœuds esclaves dans la surface maître puis, en intégrant la pénétration prévue et la masse associée à chaque nœud esclave, il estime une force résistante à la pénétration qui empêchera le nœud en question de

pénétrer dans la surface maître. Cet algorithme ne permet pas la gestion de tous les cas de contact, en particulier ceux faisant intervenir des surfaces rigides.

- **Algorithme de contact de type « penalty »** : Cet algorithme présente l'avantage d'être moins contraignant au niveau des surfaces à mettre en contact. En effet, il complète l'algorithme précédent au niveau des contacts rigides. Cet algorithme évalue la force pénétrante du nœud esclave et lui oppose une force résistante. De plus la surface maître subit la même force de sorte qu'elle ne pénètre pas la surface esclave en ce point, alors que dans l'algorithme cinématique aucune force n'est opposée aux nœuds maîtres.

Pour nos différentes simulations nous utiliserons l'algorithme de type penalty qui semble mieux répondre à nos conditions de contact et à la nature de nos interactions. Cet algorithme propose deux formulations : grand glissement « finite sliding » et petit glissement « small sliding ». La formulation la plus générale du contact entre deux pièces utilise l'hypothèse de grand glissement (finite sliding). Elle autorise tout déplacement relatif (translation comme rotation) entre surfaces en contact. Elle est cependant coûteuse en temps de calcul. Sous certaines conditions bien spécifiques, on peut alléger le problème en faisant l'hypothèse de petit glissement (small sliding). Les rotations relatives peuvent toujours être arbitrairement grandes, mais les déplacements sont contraints : chaque nœud d'une surface esclave ne doit au cours de l'analyse interagir qu'avec un même élément de la surface maître.

III.1.2. Les problèmes de non-linéarité

Dans les problèmes de mécanique des solides et des structures, il existe trois formes de non-linéarité :

- Les non-linéarités de type comportement qui portent sur la loi de comportement du matériau : plasticité, endommagement, etc.
- Les non-linéarités de type géométrique qui sont prises en compte dans le cas de grandes déformations ou de grands déplacements (lorsque la configuration déformée ne peut plus être confondue avec la configuration non déformée).
- Les non-linéarités de type contact associées au fait que dans un contact parfait entre deux solides du décollement ou du glissement peut apparaître. Ces non linéarités se scindent en deux catégories : les non-linéarités de contact unilatéral et celles de frottement.

Les non-linéarités de type contact sont parmi les plus difficiles à traiter du fait qu'elles mettent en jeu des changements brusques de comportement (au passage contact-décollement et au passage adhérence glissement-glissement). Les éléments finis générés sous Abaqus sont souvent non linéaires et peuvent comporter de quelques à des milliers de variables. Pour ces variables, les équations d'équilibres obtenues par discrétisation de l'équation du travail virtuel peuvent s'écrire symboliquement sous la forme :

$$F^N(u^M) = 0 \quad [\text{III.1}]$$

Où F^N est la composante de la force associée à la $N^{\text{ième}}$ variable dans le problème et u^M est la valeur de la $M^{\text{ième}}$ variable.

Le problème de base est de résoudre l'équation [III.1] pour u^M pendant tout le calcul. La solution doit être gérée et développée par série de petits incréments. Dans cette perspective deux problèmes peuvent apparaître : comment résoudre les équations d'équilibre discrètes pour chaque incrément et comment choisir la taille de chaque incrément ?

Pour résoudre les équations d'équilibres non linéaires Abaqus utilise généralement les discrétisations en différences finies de Newton comme méthode numérique. La formulation de base de la méthode de Newton est la suivante :

Elle suppose qu'après une itération i , une approximation u_i^M est obtenue pour la solution avec c_{i+1}^M comme différence entre la solution calculée et la solution exacte de l'équation (1) ce qui donnerait :

$$F^N(u_i^M + c_{i+1}^M) = 0 \quad [\text{III.2}]$$

Si on développe en série de Taylor la solution approchée u_i^M on obtient :

$$F^N(u_i^M) + \frac{\partial F^N}{\partial u^P}(u_i^M)c_{i+1}^P + \frac{\partial^2 F^N}{\partial u^P \partial u^Q}(u_i^M)c_{i+1}^P c_{i+1}^Q + \dots = 0 \quad [\text{III.3}]$$

Si u_i^M est une approximation proche de la solution ; la valeur de c_{i+1}^M sera donc petite et par conséquent les termes d'ordre supérieur seront négligeables ce qui nous donnera un système d'équations linéaires de la forme :

$$K_i^{NP} c_{i+1}^P = -F_i^N \quad [\text{III.4}]$$

Où $K_i^{NP} = \frac{\partial F^N}{\partial u^P}(u_i^M)$ est la matrice de Jacobi et $F_i^N = F^N(u_i^M)$, l'approximation de la solution qui suivra sera donc $u_{i+1}^M = u_i^M + c_{i+1}^M$ et les itérations continueront.

La méthode de Newton assure une bonne convergence particulièrement quand les entrées :

F_i^N et c_{i+1}^N sont suffisamment petites.

III.1.3. Problème du contact :

On considère deux solides Ω_1 et Ω_2 . On note $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ l'ensemble des corps. Ils sont soumis à des déplacements imposés $\vec{u}_d$ sur la zone $S_u = S_{u1} \cup S_{u2}$, à des efforts imposés $\vec{F}_d$ sur la zone $S_F = S_{F1} \cup S_{F2}$ et des forces de volumes $\vec{f}_d$ agissant sur les deux domaines.

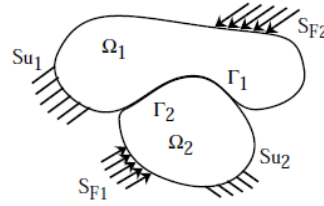


Figure III.1 : Problème du contact unilatéral

Les deux solides sont en contact sur une zone $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$ supposée connue. Les équations classiques du problème d'élasticité sont les suivantes :

$$\overline{\text{div}} \vec{\sigma} + \vec{f}_d = \vec{0} \text{ dans } \Omega \quad [\text{III.5}]$$

$$\vec{\sigma} \vec{n} = \vec{F}_d \text{ sur } S_F \quad [\text{III.6}]$$

$$\vec{u} = \vec{u}_d \text{ sur } S_u \quad [\text{III.7}]$$

$$\vec{\sigma} \text{ dans } \Omega \quad [\text{III.8}]$$

Les équations qui définissent l'interaction entre les deux corps sur la zone de contact sont définies dans le paragraphe suivant.

III.1.3.1 Notation

On partitionne le champ solution $\vec{u}$ en $\vec{u}_1$ dans Ω_1 et $\vec{u}_2$ dans Ω_2 . Il en va de même pour le champ de contrainte $\bar{\sigma}$ et le champ de déformation $\bar{\epsilon}$. On note $\vec{n}_1$ la normale sortante de Ω_1 et $\vec{n}_2$ celle de Ω_2 . Sur la zone de contact lorsque les deux corps sont initialement en contact les deux normales coïncident ($\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$). Pour simplifier, on considère $\vec{n} = \vec{n}_1$.

Relativement à ces normales on note les efforts normaux :

$$\vec{F}_{n1} = \vec{n} \cdot \bar{\sigma}_1 \vec{n}_1 \quad \text{[III.} \quad 9]$$

$$\vec{F}_{n2} = \vec{n} \cdot \bar{\sigma}_2 \vec{n}_2 \quad \text{[III.} \quad 10]$$

et les efforts tangentiels :

$$\vec{F}_{t1} = \bar{\sigma}_1 \vec{n}_1 - \vec{F}_{n1} \vec{n} \quad \text{[III.} \quad 11]$$

$$\vec{F}_{t2} = \bar{\sigma}_2 \vec{n}_2 - \vec{F}_{n2} \vec{n} \quad \text{[III.} \quad 12]$$

Les relations d'interaction dans la direction normale sont associées au problème du contact unilatéral et celles dans le plan tangent au problème de frottement. Pour étudier l'interaction dans la direction normale on s'intéresse d'abord au cas du contact unilatéral sans frottement.

III.1.3.2. Contact unilatéral sans frottement

Le contact unilatéral est la relation qui existe, sur la zone de contact, entre les efforts normaux (pressions de contact) et le mouvement relatif des deux corps dans la direction normale (décollement).

- Problème local

Sur l'interface Γ , les conditions du contact unilatéral sans frottement s'écrivent :

$$(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} \geq 0 \quad \text{[III.13]}$$

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{n1} = -\vec{F}_{n2} \leq 0 \quad \text{[III.14]}$$

$$\vec{F}_t = \vec{F}_{t1} = -\vec{F}_{t2} = 0 \quad \text{[III.15]}$$

$$((\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n}) \vec{F}_n = 0 \quad \text{[III.16]}$$

L'équation [III.13] indique qu'il ne peut y avoir que décollement et non pénétration. L'équation [III.14] indique que les efforts normaux ne peuvent correspondre qu'à de la compression. L'équation [III.15] indique l'absence de forces tangentielles de frottement. Pour finir, l'équation [III.16], appelée condition de complémentarité, indique qu'en un point il y soit contact, soit décollement [Abaqus analysis5].

- **Formulation variationnelle**

On définit l'espace des champs cinématiquement admissibles :

$$U_{ad} = \{\vec{v}, \text{régulier} / \vec{v} = \vec{u}_d \text{ sur } S_u\}$$

On définit le convexe K , sous ensemble de U_{ad} , des champs vérifiant les conditions de décollement sur l'interface de contact.

$$K = \{\vec{v} \in U_{ad} / (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{n} \geq 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

La formulation variationnelle en déplacement du problème s'écrit alors [Abaqus theory]:

la solution $\vec{u}$ est telle que $\vec{u} \in K$ et $\forall \vec{v} \in K$:

$$\int_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon}(\vec{v} - \vec{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f}_d \cdot (\vec{v} - \vec{u}) dS + \int_{SF} \vec{F}_d \cdot (\vec{v} - \vec{u}) dS + \int_{\Gamma_1} \bar{\sigma}_1 \vec{n}_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) dS + \int_{\Gamma_2} \bar{\sigma}_2 \vec{n}_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{u}_2) dS$$

[III.

17]

Avec les notations habituelles on obtient :

$$a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) - l(\vec{v} - \vec{u}) = \int_{\Gamma_1} \bar{\sigma}_1 \vec{n}_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) dS + \int_{\Gamma_2} \bar{\sigma}_2 \vec{n}_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{u}_2) dS$$

Les efforts tangentiels étant nuls [III.15] on obtient :

$$a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) - l(\vec{v} - \vec{u}) = \int_{\Gamma_1} F_{n1} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) \vec{n} dS + \int_{\Gamma_2} F_{n2} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{u}_2) \vec{n} dS$$

Et les efforts normaux en équilibre [III.14] :

$$a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) - l(\vec{v} - \vec{u}) = \int_{\Gamma_1} F_n \cdot (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) \vec{n} dS - \int_{\Gamma_2} F_n \cdot (\vec{v}_2 - \vec{u}_2) \vec{n} dS$$

Soit :

$$a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) - l(\vec{v} - \vec{u}) = \int_{\Gamma_1} F_n \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \vec{n} dS + \int_{\Gamma_2} F_n \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \vec{n} dS$$

La condition de complémentarité [III.16] annule le premier terme du second membre.

Or $F_n \leq 0$ et $\vec{v} \in K$ donc :

$$\int_{\Gamma_2} F_n \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \vec{n} dS \leq 0$$

[III.

18]

La formulation variationnelle en déplacement devient donc la solution $\vec{u}$ telle que $\vec{u} \in K$ et $\forall \vec{v} \in K$:

$$a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) - l(\vec{v} - \vec{u}) \geq 0$$

[III.

19]

Nous sommes en présence d'une inéquation variationnelle qui traduit l'aspect unilatéral du problème.

- **Théorème de l'énergie**

Il a été montré [Abaqus theory], qu'il existe un théorème de l'énergie potentielle associé à l'inéquation variationnelle [III.19] : la solution $\vec{u}$ est telle que $\vec{u} \in K$ et qu'elle minimise l'énergie potentielle :

$$\vec{v} \in K \rightarrow E_c(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) - l(\vec{v})$$

Il s'agit là d'un problème de minimisation sous contraintes (d'inégalité). Il s'apparente à un problème d'optimisation et les méthodes de résolution utilisées pour le résoudre sont pour la plupart issues des méthodes d'optimisation.

- **Prise en compte des jeux initiaux**

Lorsque les deux corps ne sont pas initialement en contact sur la zone Γ , il faut prendre en compte un jeu initial dans les équations de contact du paragraphe (III.1.1.3)

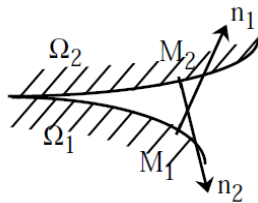


Figure III.2. : Jeu initial

Deux problèmes se posent alors :

- Le jeu se doit d'être petit de manière à ce que les hypothèses du problème (petites perturbations,...) soient respectées.

– Les normales $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont bien souvent différentes [Figure III.2]. Dans la pratique, le jeu étant petit, les deux normales ne peuvent être très différentes et Abaqus choisit généralement la direction de la surface maître pour définir la normale $\vec{n}$ utilisée dans les équations de contact. On peut aussi choisir pour $\vec{n}$ une moyenne des deux normales ou bien la direction définie par les deux points de contact au repos [figure III.3].

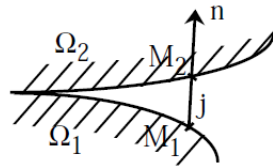


Figure III.3 : choix de la normal et du jeu

Lorsque les deux points précédents sont respectés, les équations du contact deviennent :

$$(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} \geq j$$

[III.

19]

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{n1} = -\vec{F}_{n2} \leq 0$$

[III.

20]

$$\vec{F}_t = \vec{F}_{t1} = -\vec{F}_{t2} = 0$$

[III.

21]

$$[(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} - j] \vec{F}_n = 0$$

[III.

22]

Où (j) est le jeu initial dans la direction normale $\vec{n}$ choisie.

III.1.4 Résolution du problème de contact :

Pour la résolution du problème de contact [figure III.1] Abaqus utilise une discrétisation par éléments finis :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n \vec{\varphi}_i u_i = [\varphi]^t [u] \quad \text{et} \quad \vec{v} = [\varphi]^t [v] \quad [\text{III.} \\ 23]$$

Où $[u]$ et $[v]$ sont les valeurs nodales des déplacements [Abaqus theory].

III.1.1.4.1. Relation de contact discrète

Les relations de contact (éq III.19 à III.22) portent maintenant sur les inconnues nodales. Lorsque les maillages des deux corps sont compatibles [Figure III.4 (a)] sur Γ , les conditions de non pénétration sont des relations simples entre les degrés de liberté des nœuds en vis-à-vis. Par contre, dans la majorité des cas, les maillages en présence sont incompatibles [Figure III.4 (b)] et les relations entre les degrés de liberté sont beaucoup moins simples à écrire.

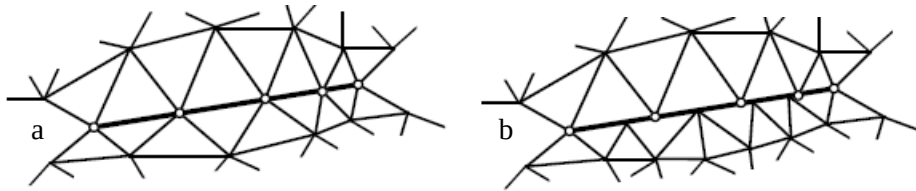


Figure III.4 : (a) maillages compatibles ; (b) maillages incompatibles

Le théorème de l'énergie potentielle du paragraphe précédant devient après discrétisation :

La solution $[u]$ est telle que $[u] \in H$ et qu'elle minimise l'énergie potentielle :

$$E_c([v]) = \frac{1}{2} [v]^t [K] [v] - [v]^t [F] \quad [\text{III.} \\ 24]$$

parmi tous les vecteurs $[v] \in H$

Ici $[K]$ est la matrice de rigidité classique du problème et $[F]$ le vecteur des forces généralisées. H est la forme discrète du convexe K et est définie par :

$$H = \{[v] / [B][v] - [j] \geq 0\}$$

La matrice $[B]$ assure la restriction à la zone de contact et la construction des écarts en déplacements normaux. $[j]$ est le vecteur des jeux éventuels.

La solution discrétisée $[u]$ est alors la solution du système linéaire :

$$[K][u] = [F] \text{ sous la condition } [B][u] - [j] \geq 0$$

III.1.1.4.2. Graphe de la loi de contact :

Les équations du contact unilatéral définies au paragraphe [III. 1.1.2] peuvent être représentées sous la forme du graphe présenté par [figure III.5], en définissant :

$$[u_n] = (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)\vec{n}$$

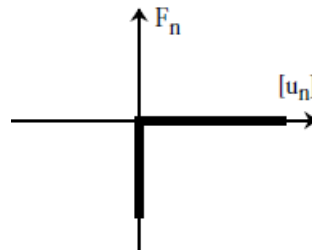


Figure III.5 Graphe de la loi de contact

Il apparaît clairement sur ce graphe, la très forte non linéarité de la loi de contact.

III.1.1.4.3 Méthode des multiplicateurs de Lagrange :

Parmi de nombreuses méthodes de résolution existantes, Abaqus utilise par défaut la méthode des multiplicateurs de Lagrange, le problème unilatéral est reporté sur les efforts par dualisation. Cette méthode est relativement facile et assure une bonne convergence pour résoudre des problèmes d'optimisation avec des contraintes d'égalité.

Si on considère un problème d'une seule contrainte à deux variables $X = (x, y)$

$$\max f(X) \quad \text{s.c.} \quad h(X) = 0.$$

On appelle Lagrangien associé à ce problème la fonction :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda h(x, y)$$

[III.

25]

Le Lagrangien permet d'introduire la contrainte dans la fonction objectif avec une certaine pénalité λ à chaque incrément de calcul, tel que λ est le multiplicateur de Lagrange. On se retrouve ainsi à maximiser une fonction à trois variables sans contrainte.

Si, maintenant, on cherche les points stationnaires (x^*, y^*, λ^*) du Lagrangien $L(x, y, \lambda)$, cela veut dire que nous cherchons (x^*, y^*, λ^*) tel que $\nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = (0, 0, 0)$.

Nous déduisons alors le système suivant comportant trois équations:

$$\frac{\partial}{\partial x} L(x^*, y^*, \lambda^*) = f'_x(x^*, y^*) - \lambda^* h'_x(x^*, y^*) = 0$$

[III.

26]

$$\frac{\partial}{\partial y} L(x^*, y^*, \lambda^*) = f'_y(x^*, y^*) - \lambda^* h'_y(x^*, y^*) = 0$$

[III.

27]

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(x^*, y^*, \lambda^*) = -h(x^*, y^*) = 0$$

[III.

28]

Dans les deux premières équations, on reconnaît les conditions d'optimum du premier ordre : $\nabla f(x^*, y^*) - \lambda^* \nabla h(x^*, y^*) = (0, 0)$, alors que la troisième est équivalente à la contrainte de départ imposée par le modèle : $h(x, y) = 0$, au point (x^*, y^*) (point admissible).

La méthode du Lagrangien transforme donc un problème d'optimisation d'un modèle avec contraintes d'égalité à celui de recherche des points stationnaires d'une fonction sans contrainte. De plus, puisque pour tout point optimal (x^*, y^*) on a $h(x^*, y^*) = 0$, la valeur du Lagrangien est la même que celle de l'objectif en ce point :

$$L(x^*, y^*, \lambda^*) = f(x^*, y^*) - \lambda^* h(x^*, y^*) = f(x^*, y^*).$$

[III.

29]

III.1.1.5. Calcul de la pression de contact et du frottement

A chaque nœud de la surface esclave qui vient à entrer en contact avec un élément de la surface maître, Abaqus construit une mesure de la pénétration h du nœud dans la surface maître ainsi qu'une mesure du glissement s_i . Ces données cinématiques sont alors utilisées ensemble avec le multiplicateur de Lagrange approprié pour introduire le calcul des interactions de contact et de frottement.

III.1.1.5.1. Calcul de la pression

Sous Abaqus la pression de contact P est considérée comme fonction de l'interpénétration (h) entre les surfaces antagoniste. $p = p(h)$

Dans ce cas : $p = 0$ pour $h < 0$ (contact ouvert)

$h = 0$ pour $p > 0$ (contact fermé)

La contrainte de contact est appliquée avec un multiplicateur de Lagrange adéquat de manière à ce qu'à chaque fois que $h > 0$, c'est-à-dire lorsqu'il y a interpénétration des surfaces, l'algorithme associe un multiplicateur de Lagrange aux équations de contact de manière à avoir $h = 0$ ce qui se répercute par une augmentation de la pression pour atteindre l'équilibre.

III.1.1.5.2. Calcul du frottement

Les phénomènes physiques à faire apparaître dans une loi de frottement sont l'existence d'un seuil d'effort en dessous duquel aucun glissement n'est possible et une éventuelle dépendance de ce seuil à l'intensité des efforts normaux. Pour le calcul des frottements, Abaqus utilise une forme régularisée de la forme classique de la loi de frottement de Coulomb. Contrairement à la loi de frottement classique de Coulomb dans laquelle le déplacement de glissement est considéré irréversible, des relations entre les forces de frottement et la vitesse de glissement sont alors établies :

$$\vec{u}_t = (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) - ((\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n})\vec{n}$$

[III.

30]

$$[\vec{u}_t] = \frac{\partial \vec{u}_t}{\partial t}$$

[III.

30]

Si $\|\vec{F}_t\| < \mu|F_n|$ alors $[\vec{u}_t] = 0$ (Adh rance)

Si $\|\vec{F}_t\| = \mu|F_n|$ alors $[\vec{u}_t] = \lambda\vec{F}_t$ (glissement)

Où μ est le coefficient de frottement qui dépend des matériaux en présence et des  tats de surface. Le graphe de cette loi est tracé sur la figure [III.]

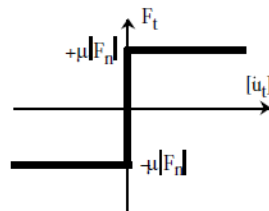


Figure III.6 : Loi de Coulomb

Dans cette loi de frottement apparaissent des inconvénients comme le caractère non-différentiable de la loi et le changement brutal de comportement au passage adhérence/glissement. Pour palier à ces défauts de la loi de Coulomb, Abaqus utilise la loi régularisées qui est plus douce (Figure III.7).

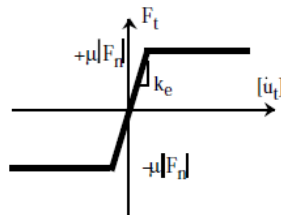


Figure III.7 : Loi de Coulomb régularisée

Elle autorise un glissement élastique réversible paramétré par une raideur élastique k_e . Cette raideur est justifiée par une élasticité des aspérités de la zone de contact. Elle prend souvent une valeur très grande de manière à être proche de la loi de Coulomb.

III.2. Simulation des franges photoélastiques :

Pour faire la comparaison entre les franges expérimentales et les franges simulées, on doit établir un modèle numérique correspondant au cas réel et qui nous permet d'obtenir le

tenseur des contraintes en tout point. Il faut définir un feuillet dans le modèle numérique sur lequel sera effectuée une étude photoélastique afin de reconstituer les variations de l'intensité lumineuse en fonction des contraintes. Pour relier les contraintes aux intensités lumineuses, il existe différentes méthodes permettant de schématiser un milieu photoélastique.

III.2.1. La schématisation bidimensionnelle :

Cette schématisation émet l'hypothèse que les contraintes principales secondaires et leurs orientations restent constantes suivant l'épaisseur du feuillet (c'est-à-dire $(\sigma' - \sigma'') = \text{cste}$ et $d\alpha/dz = 0$). Cette schématisation est utilisée dans le cas de milieux photoélastiques minces. Rappelons que l'écriture de l'intensité lumineuse dans un polariscope rectiligne :

$$\text{à champ clair} \quad I = I_0 \left[1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\phi}{2} \right]$$

$$\text{à champ sombre} \quad I = I_0 \left[\sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\phi}{2} \right]$$

Avec (α) l'angle entre le repère mobile et le repère fixe et qui représente le paramètre isocline, I_0 l'intensité lumineuse sans chargement et (ϕ) est le retard de phase qui représente le paramètre isochrome. L'expression de ϕ s'écrit :

$$\phi = \frac{2\pi e C}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

Ou en fonction des composantes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy}

$$\phi = \frac{2\pi e C}{\lambda} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

[III.

31]

L'angle α a pour expression en fonction des contraintes :

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

[III.

32]

Cette schématisation est parfois utilisée en photoélasticimétrie de milieu épais en faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas de rotation de contraintes lors de la traversée du matériau, ceci revient à considérer que l'angle α est le même à l'entrée et à la sortie du modèle. Cette hypothèse ne permet une bonne approximation que dans le cas de milieux photoélastiques minces et n'est généralement pas valide dans les milieux photoélastiques épais.

Pour l'étude des milieux photoélastiques épais, des schématisations tridimensionnelles ont été développées afin de pouvoir considérer des angles α à l'entrée et à la sortie différents.

III.2.2. Schématisations tridimensionnelles :

III.2.2.1. Schématisation tridimensionnelle par H.Aben [ABE 79] :

A partir de la théorie de l'électromagnétisme et des équations caractéristiques de la propagation d'une onde lumineuse dans un milieu photoélastique H.Aben a schématisé le milieu photoélastique tridimensionnel en étudiant une lame biréfringente. Tout en se reposant comme pour la schématisation 2D sur l'hypothèse que la différence des contraintes principales secondaire ($\sigma' - \sigma''$) reste constante. En revanche, il considère que les directions de celles-ci peuvent varier linéairement suivant l'épaisseur du modèle ($\frac{d\alpha}{dz} = \text{cste}$).

Lorsqu'une onde polarisée rectiligne se propage suivant les directions $\Delta'e$ ou $\Delta''e$ à l'entrée du modèle, elle émerge polarisée rectiligne à la sortie suivant les directions $\Delta's$ ou $\Delta''s$. Ce résultat constitue une généralisation du cas bidimensionnel pour lequel les directions sont confondues. Dans le cas d'une lumière polarisée elliptique, les composantes du vecteur lumineux acquièrent un déphasage φ^* au cours de la traversée du modèle. L'angle $R = (\Delta'e, \Delta's)$ entre les directions caractéristiques conjuguées est appelé « angle caractéristique » et peut être considéré en fait comme le pouvoir rotatoire du milieu photoélastique [ABE 79].

Dans un cas général, les directions caractéristiques ne coïncident pas avec les directions principales à l'entrée et à la sortie du modèle photoélastique. L'intensité lumineuse pour cette schématisation s'exprime :

$$I = I_0 \left[\cos^2 R - \sin 2\alpha^* \sin 2(\alpha^* + R) \sin^2 \frac{\varphi^*}{2} \right]$$

[III.

33]

Elle est semblable à l'intensité lumineuse exprimée dans le cas d'un polariscope à lumière rectiligne.

Cette schématisation permet de calculer les paramètres mécaniques (α , α_0 et φ) à partir des paramètres physiques (α^* , φ^* et R) [ABEN 79] ce qui nous permet de relier l'intensité lumineuse I aux contraintes.

III.2.2.2 Schématisation tridimensionnelle discrétisée :

La schématisation tridimensionnelle discrétisée considère un feuillet photoélastique épais comme étant équivalent à une succession de lames biréfringentes minces (ou sous-feuillet), chacune possédant une orientation propre de ses axes principaux et une valeur propre de retard de phase.

Cette schématisation utilise une procédure de calcul qui consiste à obtenir les composantes de la lumière après chaque passage dans un sous-feuillet par le biais de matrices de rotation (R_{α_i}) et de matrice de déphasage (S_{φ_i}) [ZEN 98].

Sur chacun des sous feuillets, la méthode suppose que les contraintes sont constantes. Elle permet de ne poser aucune hypothèse sur le feuillet épais (en dehors de l'hypothèse de discrétisation elle-même). On note (X_0, Y_0) les composantes de la lumière à l'entrée du premier sous-feuillet, (X_1, Y_1) les composantes de la lumière à la sortie du premier sous-feuillet et à l'entrée du deuxième sous-feuillet, et ainsi de suite jusqu'à (X_n, Y_n) les composantes de la lumière à la sortie du dernier sous-feuillet.

L'intensité lumineuse pour cette schématisation est donnée par [ZEN 98]:

$$I = I_0 [(Re(X_n) \cos \beta + Re(Y_n) \sin \beta)^2 + (Im(X_n) \cos \beta + Im(Y_n) \sin \beta)^2]$$

[III.

34]

avec (β) l'angle entre la dernière direction de composante de la lumière (x_n) et la direction de l'analyseur.

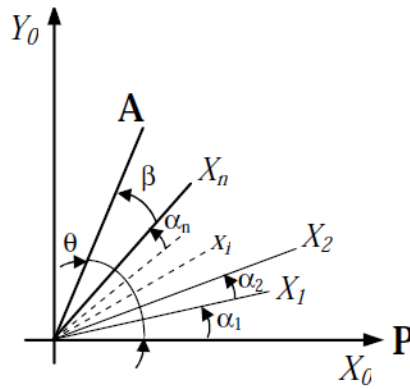


Figure III.9. Composante de la lumière (X_i) au passage de chaque sous feuillet [GER 07]

III.2.2.3. La technique du submodeling (sous modèle)

Pour pouvoir simuler des franges numériques à comparer avec les franges expérimentales, on se doit de réaliser un modèle numérique équivalent au modèle réel. Après avoir obtenu les résultats pour le modèle numérique globale Abaqus dispose d'une technique dite de Submodeling, pour découper le modèle de manière à étudier localement les contraintes en raffinant le maillage dans une zone d'intérêt particulier. Cette technique nous permet de découper des feuillets géométriquement équivalents aux feuillets découpés optiquement par photoélasticimétrie puis relancer un calcul en utilisant les résultats du modèle globale pour avoir l'état des contraintes et des déformations dans le modèle local avec un maillage plus fin. Ces résultats seront ensuite utilisés pour calculer les intensités lumineuses équivalentes aux contraintes en chaque nœud du maillage ce qui nous donnera les franges simulées que l'on pourra comparer aux franges réelles.

III.2.3. Exemple de comparaison de franges

Après avoir établi le modèle numérique correspondant au cas réel, et grâce aux schématisations précédentes, on peut visualiser en chaque point du maillage l'intensité lumineuse. A partir des contraintes obtenues en chaque nœud, on peut utiliser les formules d'intensité lumineuses des trois schématisations pour calculer les variations de l'intensité lumineuse correspondant aux franges au sein du feuillet. A partir de cela, on peut comparer les franges obtenues expérimentalement aux franges simulées à l'aide de l'une des trois schématisations. Cette procédure est généralement effectuée pour valider un modèle numérique (conditions aux limites, maillage, loi de comportement utilisée etc.).

Pour illustrer l'intérêt de cette procédure, A. Zénina [ZEN 98] a montré que pour un essai académique de flexion trois points en 2D, des différences peuvent apparaître dans les

figures de franges selon le type de maillage et des conditions aux limites imposées dans la simulation numérique.

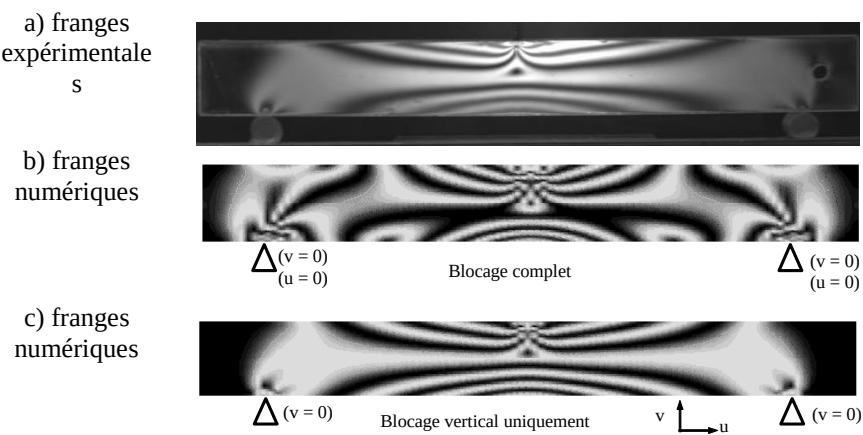


Figure III.10 Simulation numérique et image expérimentale pour une plaque soumise à un essai de flexion [ZEN 98]

On observe bien une différence entre les franges simulées dans l’image (b) et les franges expérimentales ce qui a nécessité un recalage des conditions aux limites pour avoir ensuite des franges dans l’image en (c) plus proches du cas réel.

Cette procédure de comparaison de franges a été utilisée par A. Zénina pour comparer les trois schématisations pour un milieu photoélastique (schématisation 2D, schématisation 3D par H. Aben et schématisation 3D discrétisée) permettant ainsi d’établir le domaine de validité pour chacune d’entre elles. Cette comparaison a été effectuée lors d’une étude d’un barreau prismatique sollicité en torsion, les franges expérimentales étant obtenues par découpage optique.

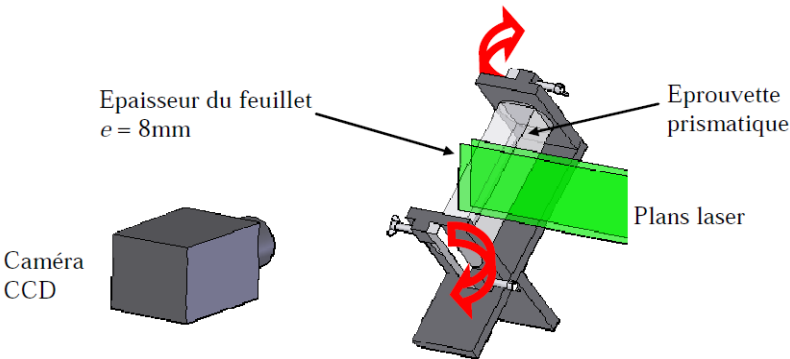


Figure III.11. : Essai de torsion sur un barreau prismatique [GER 07]

Schématisation 2D	Schématisation 3D d’Aben	Schématisation 3D discrétisée	Franges expérimentales
-------------------	--------------------------	-------------------------------	------------------------

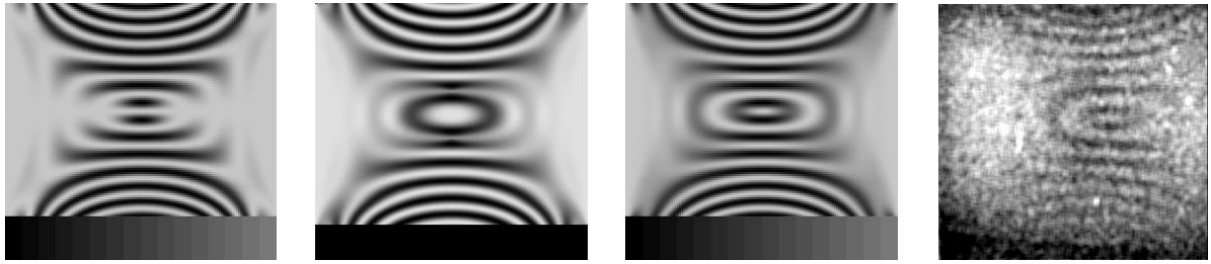


Figure III.12. : Franges expérimentale et numériques pour un barreau prismatique sollicité en torsion [Zen 98]

Les deux schématisations 3D donnent des résultats plus réalistes que la schématisation 2D et si on regarde dans le détail on constate que la schématisation 3D discrétisée est encore plus proche des franges expérimentales que celle d'Aben et ce du fait de la prise en compte des variations des quantités $d\alpha/dz$ et $(\sigma_1\sigma_2)$.

Pour clore ce chapitre nous allons montrer un exemple de couplage entre les approches numérique et expérimentale afin d'étudier une structure de forme complexe avec une répartition 3D des contraintes. Il concerne l'étude de rotules aéronautiques pour les liaisons mât-moteur [GER 08]. Un outil de simulation numérique par éléments finis a été développé afin d'approcher de façon réaliste la répartition de pressions dans les éléments rotulés, en fonction notamment de leur géométrie. Les conditions aux limites et le maillage doivent être évidemment validés. Nous comparons les franges expérimentales aux franges calculées numériquement (schématisation 3D discrétisée) à partir des champs de contraintes 3D.

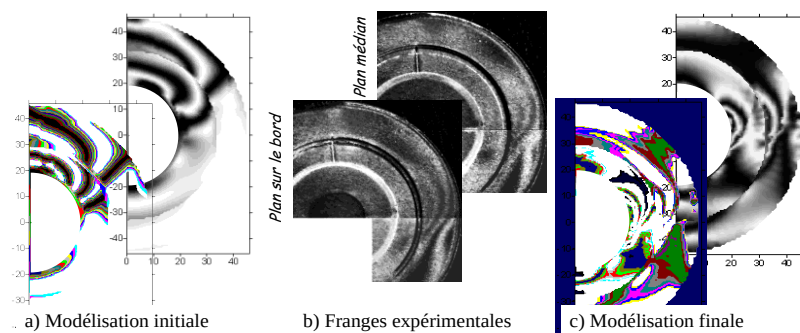


Figure III.12. Comparaison numérique expérimentale [GER 08].

III.3. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons vu la modélisation de manière générale sous Abaqus et on a vu la gestion et la formulation du contact sur ce dernier. On a également abordé les différentes schématisations d'un milieu photoélastique, nous permettant de calculer des intensités lumineuses correspondant aux franges simulées en chaque point du modèle. Dans le dernier paragraphe on a mis en évidence l'importance du couplage entre expérimentation et modélisation pour la validation du traitement numérique de divers problèmes en mécanique.

Comparaison et discussion

IV. Comparaison et discussion :

IV.1. Introduction

Dans le but de réaliser une étude pour différents cas de contacts mécaniques, on a vu dans les chapitres précédents l'importance du couplage entre expérimentation et modélisation. Dans ce chapitre on propose tout d'abord l'étude d'un cas de contact sphère sur plan pour lequel on établit un modèle numérique, puis on compare les résultats et les franges simulées pour pouvoir évaluer la pertinence de la modélisation. Ensuite on établira des modélisations pour différents cas de contact sphère sur gorge dans le but de dimensionner un modèle expérimental. L'étude de ce dernier type de contact trouve toute son importance du fait qu'il est fréquent dans l'industrie (roulement, butée à bille, vis à bille, etc)

IV.2. Etablissement d'un modèle numérique pour un contact ponctuel sphère sur plan :

On propose dans ce paragraphe d'établir un modèle numérique sous Abaqus, pour un contact académique Hertzien, qui est le contact sphère sur plan.

IV.2.1. Etude expérimentale :

Dans le cas général d'une analyse de structure 3D, on choisira une étude expérimentale par photoélasticimétrie 3D ou corrélation volumique en fonction des conditions. A. Germaneau [GER 07] a réalisé dans le cadre de ses travaux sur les méthodes expérimentales, une étude d'une compression localisée à touche sphérique avec la corrélation volumique par découpage optique, ce qui permet d'avoir un gradient de déformation suivant les trois directions. On a repris ces travaux pour réaliser une étude du même modèle par photoélasticimétrie 3D. La compression localisée à touche sphérique a été réalisée avec une bille (de diamètre 8 mm), l'application de la charge se situe au milieu de l'éprouvette suivant la direction z (à 12 mm), le chargement s'effectue en imposant à la touche sphérique une charge de 150N. Les deux éprouvettes étudiées de dimensions $50 \times 35 \times 24 \text{ mm}^3$ sont d'apparence semblable mais l'une contient de la poudre de silice fine pour une analyse par photoélasticimétrie 3D et l'autre des particules de polyamide pour une analyse par corrélation volumique [GER 07]. Les caractéristiques mécaniques des deux éprouvettes ont été déterminées sur des essais de traction réalisés sur deux éprouvettes témoins provenant des mêmes coulées que celles effectuées pour mouler les pièces. Les valeurs du module d'Young et du coefficient de Poisson sont reportées dans le tableau IV.1

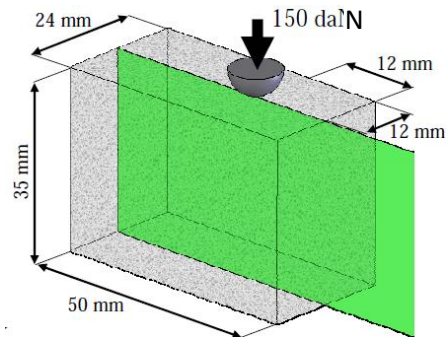


Figure IV.1. Compression à touche sphérique

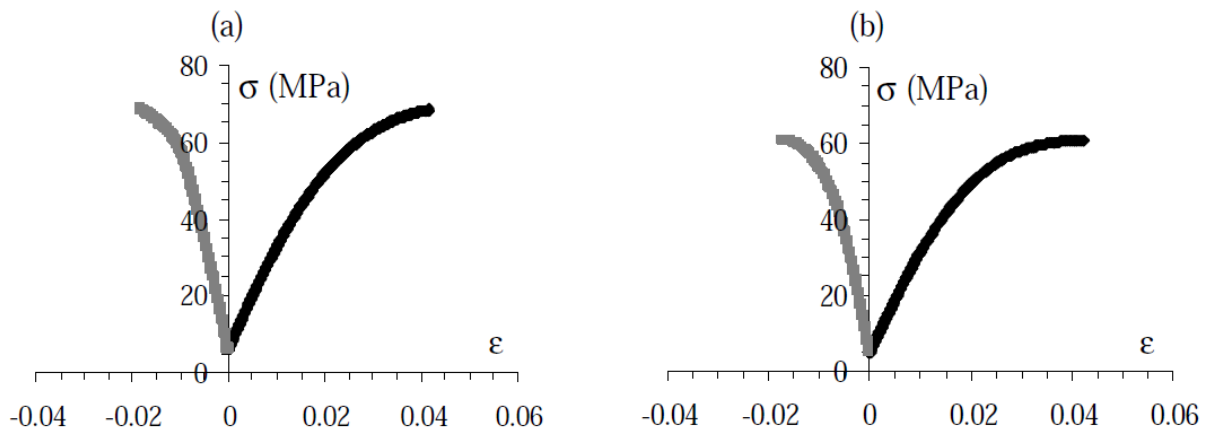


Figure IV.2 Courbes de comportement sur un essai de traction des matériaux constituant les éprouvettes ; (a) Résine époxy contenant de la poudre de silice (photoélasticimétrie 3D), (b) Résine époxy contenant de la poudre de polyamide (corrélacion volumique).

	E (MPa)	ν	C (Bw)	K
Résine + poudre de silice (photoélasticimétrie 3D)	2720 ± 15	$0,39 \pm 4.10^{-3}$	$49 \pm 0,5$	$0,0995 \pm 1.10^{-4}$
Résine + poudre de polyamide (corrélacion)	2700 ± 15	$0,38 \pm 4.10^{-3}$		

Tableau IV.1 Propriétés mécaniques des éprouvettes analysées par photoélasticimétrie 3D et par corrélation volumique.

IV.2.1.1. Etude par photoélasticimétrie 3D :

L'étude est menée sur un feuillet d'épaisseur 4 mm avec lequel on balaye la pièce avec un pas de 2 mm entre chaque feuillet analysé. Afin de n'observer que le paramètre isochrome, le paramètre isocline est éliminé en réalisant une double acquisition des images avec deux angles d'incidence des faisceaux plans laser : à 0° et à 45° (Figure IV.3). Afin d'éviter tout phénomène de réflexion ou de réfraction des faisceaux, l'éprouvette est plongée dans un liquide ayant le même indice optique que la résine époxy. La (Figure IV.4) montre les réseaux de franges photoélastiques obtenus sur plusieurs feuillets successifs suivant l'épaisseur de l'éprouvette pour les deux incidences des faisceaux laser.

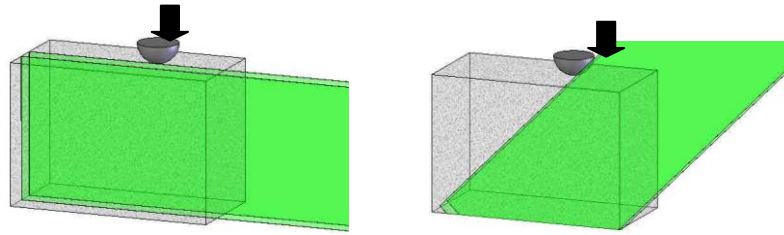


Figure IV.3. Orientation des plans laser [GER 07]

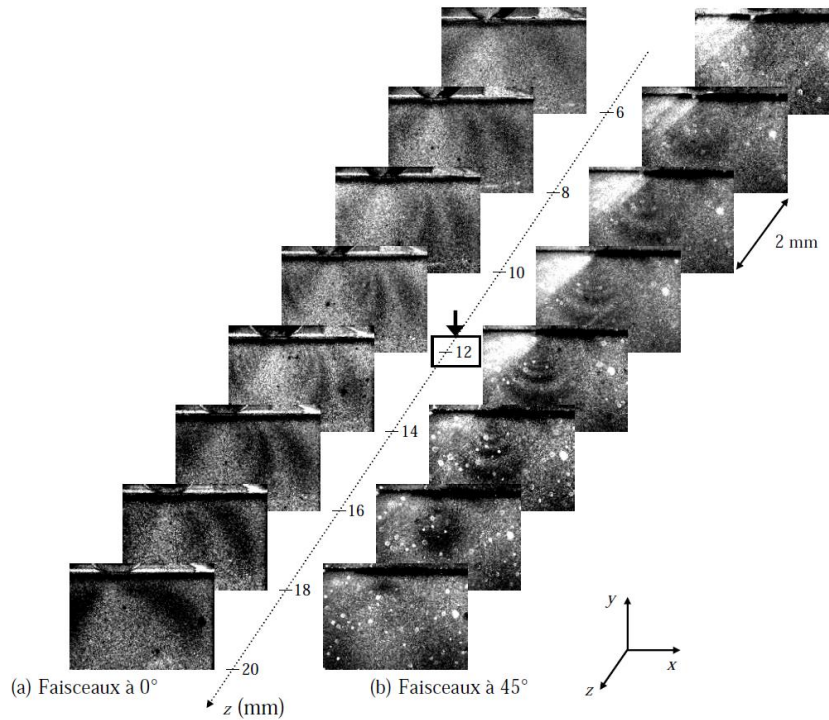


Figure IV.4. Franges photoélastiques de l'essai de compression à touche sphérique

En sommant les images des deux orientations des faisceaux, on peut reconstruire uniquement le réseau de franges isochromes (Figure IV.5). Il est alors possible de déterminer les différences des contraintes ou de déformations principales secondaires dans chaque feuillet isolé.

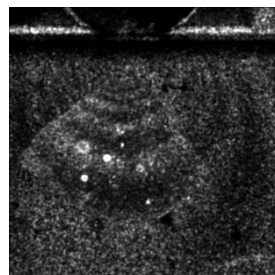


Figure IV.5. Franges isochromes obtenues sur un feuillet dans le plan médian de l'éprouvette

IV.2.1.2. Etude par corrélation volumique par découpage optique :

La procédure de la corrélation volumique est relativement similaire à celle de la photoélasticimétrie, elle est effectuée sur une grille 3D sur toute l'épaisseur de l'éprouvette, correspondant à la même zone que celle étudiée par photoélasticimétrie, ce qui permet d'avoir une même base de mesure pour les deux techniques. La Figure IV.6 montre les résultats de la corrélation autrement dit les déplacements suivant les trois directions dans le volume.

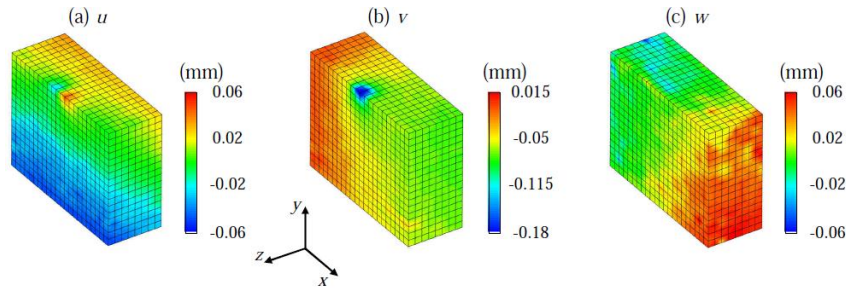


Figure IV.6 Composantes du déplacement obtenues par corrélation volumique [GER 07]

Le déplacement le plus important se situe proche du contact, il est d'environ 0,18 mm. Dans des conditions expérimentales parfaites, les déplacements auraient eu lieu uniquement à cet endroit. Comme on peut l'observer, il y a des mouvements de solide rigide, probablement dus à la mise en place de l'éprouvette ou la direction d'application de la charge qui n'est peut être pas parfaitement normale à la surface de l'éprouvette ce qui pourrait expliquer cette évolution du champ de déplacement dans l'éprouvette.

Les composantes du tenseur des déformations sont calculées à partir des champs de déplacements, (Figure IV.7). Au niveau de l'application de la charge, la déformation suivant l'axe de chargement se situe autour de 7%. Les déformations suivant les autres directions restent faibles et vont jusqu'à 3% proche du contact. L'incertitude de mesure en déformation est de l'ordre de $1 * 10^{-3}$ [GER 07]

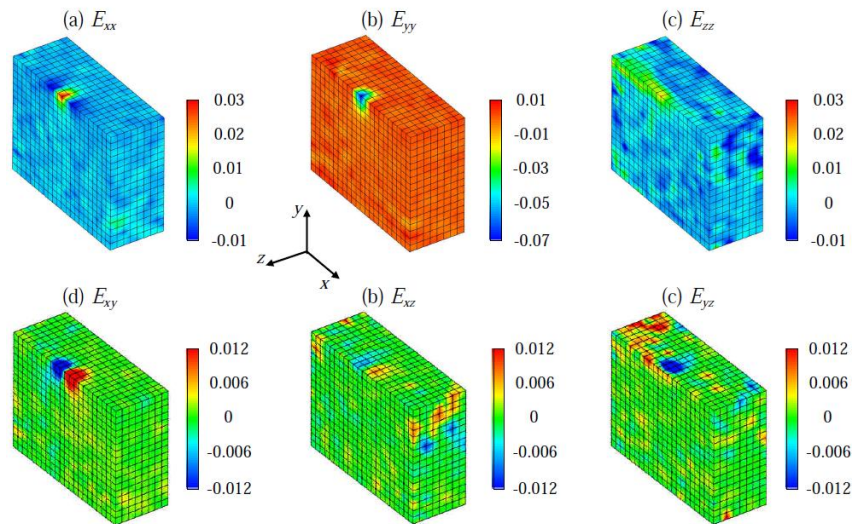


Figure IV.7 Déformations calculées à partir des déplacements mesurés par corrélation volumique [GER 07]

IV.2.2. Description du modèle numérique :

Le modèle numérique a été réalisé sous Abaqus 6.10. Pour que le modèle soit conforme au cas réel, nous avons à respecter les dimensions, les caractéristiques du matériau et les conditions aux limites établies expérimentalement. Le modèle est chargé tout d'abord en imposant une force concentrée de 150N sur la bille considérée rigide, puis en imposant un déplacement équivalent à celui mesuré par corrélation suivant l'axe de chargement. Pour les deux cas, nous avons réalisé deux simulations, une en considérant un coefficient de frottement $f = 0.3$ et une autre sans frottement pour voir l'incidence du frottement sur les résultats. En raison de la symétrie du problème, le calcul s'est effectué sur un quart de modèle pour permettre un gain de temps dans le calcul.

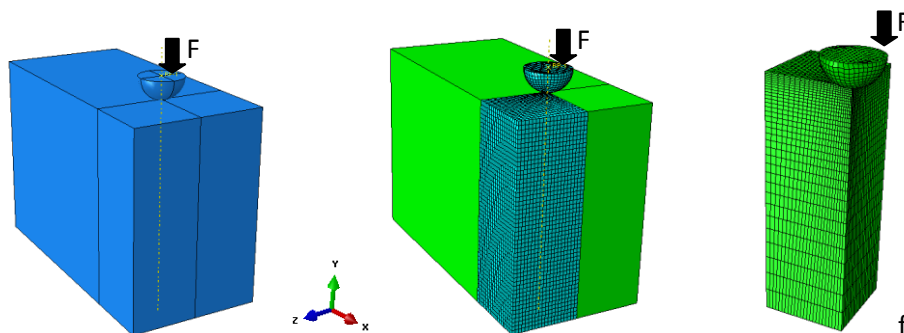


Figure IV.8 Construction du modèle numérique

La figure IV.8 montre la construction géométrique du modèle numérique, le maillage est raffiné au voisinage de la zone de contact afin d'avoir une meilleure précision de calcul dans la zone d'intérêt où les contraintes et les déformations sont plus importantes (voisinage du contact). Le tableau suivant montre les résultats des différentes simulations.

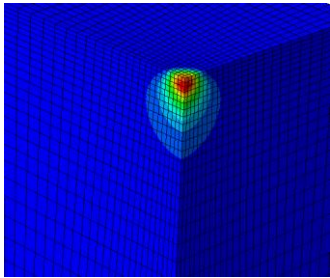
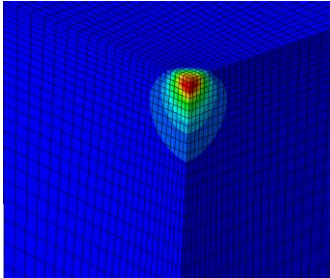
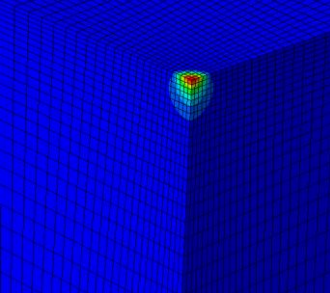
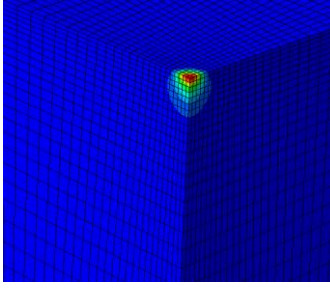
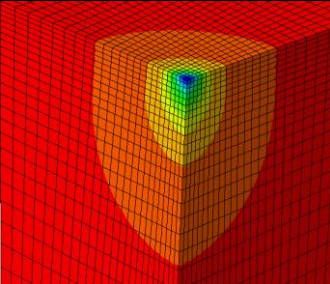
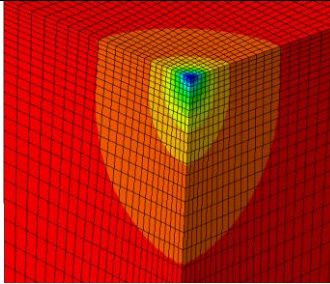
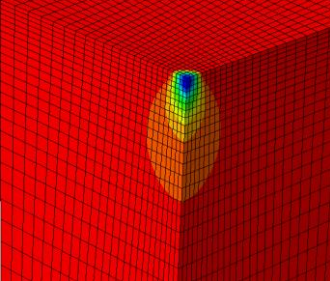
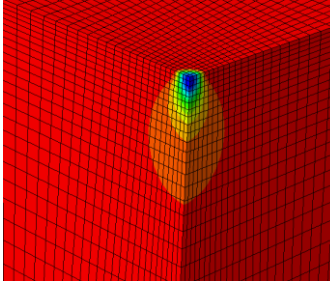
Grandeur mesurée	Force imposé $F = 150 \text{ N}$; coefficient de frottement $f = 0.3$	Déplacement imposé $z = -0.18 \text{ mm}$ coefficient de frottement $f = 0.3$
Contraintes Von Mises (MPa)	 S, Mises (Avg: 75%) +2.280e+02 +2.090e+02 +1.900e+02 +1.710e+02 +1.520e+02 +1.330e+02 +1.140e+02 +9.499e+01 +7.599e+01 +5.699e+01 +3.800e+01 +1.900e+01 +4.193e-01	 S, Mises (Avg: 75%) +2.297e+02 +2.106e+02 +1.914e+02 +1.723e+02 +1.531e+02 +1.340e+02 +1.149e+02 +9.572e+01 +7.657e+01 +5.741e+01 +3.829e+01 +1.915e+01 +4.270e-01
Pression de contact (MPa)	 S, Pressure (Avg: 75%) +2.638e+02 +2.418e+02 +2.198e+02 +1.978e+02 +1.758e+02 +1.538e+02 +1.318e+02 +1.098e+02 +8.776e+01 +6.575e+01 +4.375e+01 +2.174e+01 -2.635e-01	 S, Pressure (Avg: 75%) +2.648e+02 +2.427e+02 +2.206e+02 +1.985e+02 +1.764e+02 +1.543e+02 +1.323e+02 +1.102e+02 +8.808e+01 +6.599e+01 +4.391e+01 +2.182e+01 -2.684e-01
Déplacement suivant l'axe de chargement (mm)	 U, U1 +0.000e+00 -1.480e-02 -2.959e-02 -4.439e-02 -5.918e-02 -7.398e-02 -8.877e-02 -1.036e-01 -1.184e-01 -1.332e-01 -1.480e-01 -1.628e-01 -1.775e-01	 U, U1 +0.000e+00 -1.500e-02 -2.979e-02 -4.459e-02 -5.938e-02 -7.418e-02 -8.897e-02 -1.037e-01 -1.185e-01 -1.333e-01 -1.481e-01 -1.629e-01 -1.776e-01
Déformation suivant l'axe de chargement	 E, E11 (Avg: 75%) +4.786e-03 -1.230e-03 -1.125e-02 -1.926e-02 -2.728e-02 -3.530e-02 -4.331e-02 -5.133e-02 -5.934e-02 -6.736e-02 -7.538e-02 -8.339e-02 -9.141e-02	 E, E11 (Avg: 75%) +4.909e-03 -1.174e-03 -1.126e-02 -1.934e-02 -2.742e-02 -3.551e-02 -4.359e-02 -5.167e-02 -5.975e-02 -6.784e-02 -7.592e-02 -8.400e-02 -9.209e-02

Tableau IV.2. Résultats de la simulation pour les deux cas de chargement (déplacement imposé et force concentrée)

On voit bien dans les résultats des deux simulations représentés dans le tableau ci-dessus, un comportement quasi-identique avec des différences très petites dans les valeurs. Dans le cas du déplacement la différence est de l'ordre de 10^{-3} mm . Cette différence est équivalente à la précision de mesure en corrélation volumique ce qui nous permet de dire que l'on impose un déplacement ou un effort équivalent et l'incidence sur les résultats est négligeable.

Dans le tableau suivant nous présentons les résultats de deux simulations avec, le même chargement et les mêmes conditions aux limites, à la seule différence que dans l'une on prend en compte le frottement et dans l'autre on le néglige.

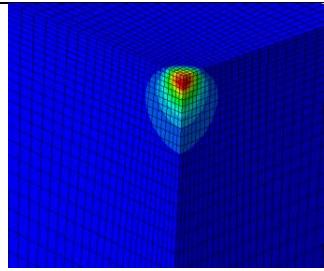
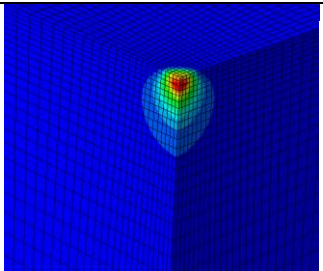
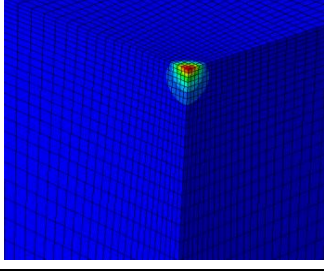
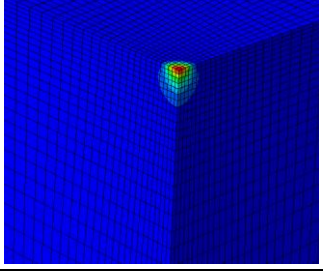
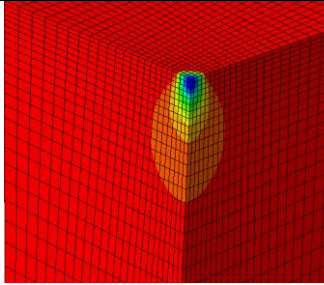
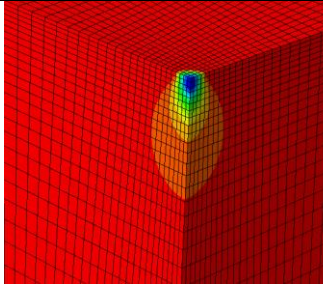
Gradeurs mesurées	Force imposée $F = 150\text{ N}$; coefficient de frottement $f = 0.3$	Force imposée $F = 150\text{ N}$, sans frottement.
Contraintes Von Mises (MPa)	 S, Mises (Avg: 75%) +2.280e+02 +2.090e+02 +1.900e+02 +1.710e+02 +1.520e+02 +1.330e+02 +1.140e+02 +9.499e+01 +7.599e+01 +5.699e+01 +3.800e+01 +1.900e+01 +4.191e-01	 S, Mises (Avg: 75%) +2.274e+02 +2.084e+02 +1.895e+02 +1.705e+02 +1.516e+02 +1.327e+02 +1.137e+02 +9.475e+01 +7.580e+01 +5.685e+01 +3.790e+01 +1.895e+01 +4.182e-01
Pression de contact (MPa)	 S, Pressure (Avg: 75%) +2.638e+02 +2.418e+02 +2.198e+02 +1.978e+02 +1.758e+02 +1.538e+02 +1.318e+02 +1.098e+02 +8.776e+01 +6.575e+01 +4.375e+01 +2.174e+01 -2.635e-01	 S, Pressure (Avg: 75%) +2.731e+02 +2.503e+02 +2.275e+02 +2.047e+02 +1.820e+02 +1.592e+02 +1.364e+02 +1.136e+02 +9.085e+01 +6.807e+01 +4.529e+01 +2.251e+01 -2.637e-01
Déformation suivant l'axe de chargement	 E, E11 (Avg: 75%) +4.786e-03 -3.230e-03 -1.125e-02 -1.926e-02 -2.728e-02 -3.530e-02 -4.331e-02 -5.133e-02 -5.934e-02 -6.736e-02 -7.538e-02 -8.339e-02 -9.141e-02	 E, E11 (Avg: 75%) +4.468e-03 -3.429e-03 -1.133e-02 -1.922e-02 -2.712e-02 -3.501e-02 -4.291e-02 -5.081e-02 -5.870e-02 -6.660e-02 -7.450e-02 -8.239e-02 -9.029e-02

Tableau IV.3 Incidence du frottement sur les résultats de la simulation

Comme le montre bien le tableau, on peut constater une différence entre les deux simulations. Pour les contraintes de Mises, on a dans le cas où les frottements sont négligés des valeurs légèrement inférieures par rapport au cas où le frottement est pris en considération. La différence est de l'ordre de 5MPa ce qui peut paraître non négligeable, bien que dans un contact statique, les effets des forces de frottement sont généralement considérés négligeables. Une autre différence du même ordre est relevée pour les pressions de contact, où, si les frottements sont pris en considération, des valeurs inférieures sont observées. Cela peut s'expliquer par l'adhérence qui pourrait se créer entre les deux surfaces dans le cas où les frottements sont considérés, ce qui va engendrer une augmentation de la contrainte sur la surface au voisinage du contact. Dans le cas contraire, il peut y avoir glissement et la contrainte sur la surface sera moindre. La figure IV.9 représente un zoom sur la zone de contact pour les contraintes de Mises, où l'on peut voir une légère différence d'intensité de contraintes sur les deux surfaces.

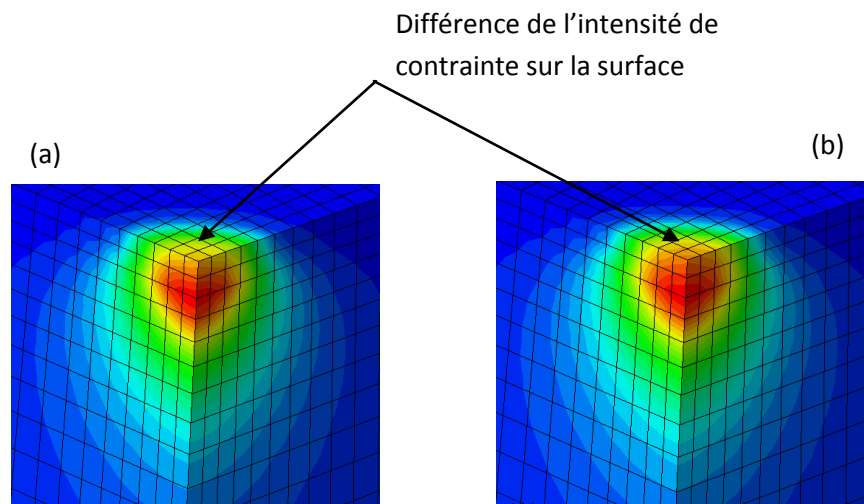


Figure IV.9. Zoom sur la zone de contact (échelle 1x10mm), (a) cas sans frottement, (b) cas avec frottement

Dans cette figure, au voisinage du contact, on voit bien que la contrainte maxi n'est pas sur la surface mais en subsurface ce qui est conforme aux prédictions de la théorie de Hertz, cela nous permet de dire que le contact hertzien est correctement géré sous Abaqus.

IV.2.3. Confrontation des résultats :

IV.2.3.1. Confrontation avec les résultats obtenus par corrélation :

Le tableau IV.4 représente une comparaison des composantes du tenseur de déformation, obtenues expérimentalement par corrélation volumique et par simulation.

	E11	E22	E33
Résultats numériques (sans frottement)			
Résultats expérimentaux (corrélation volumique)			
Résultats numériques (avec frottement f=0.3)			

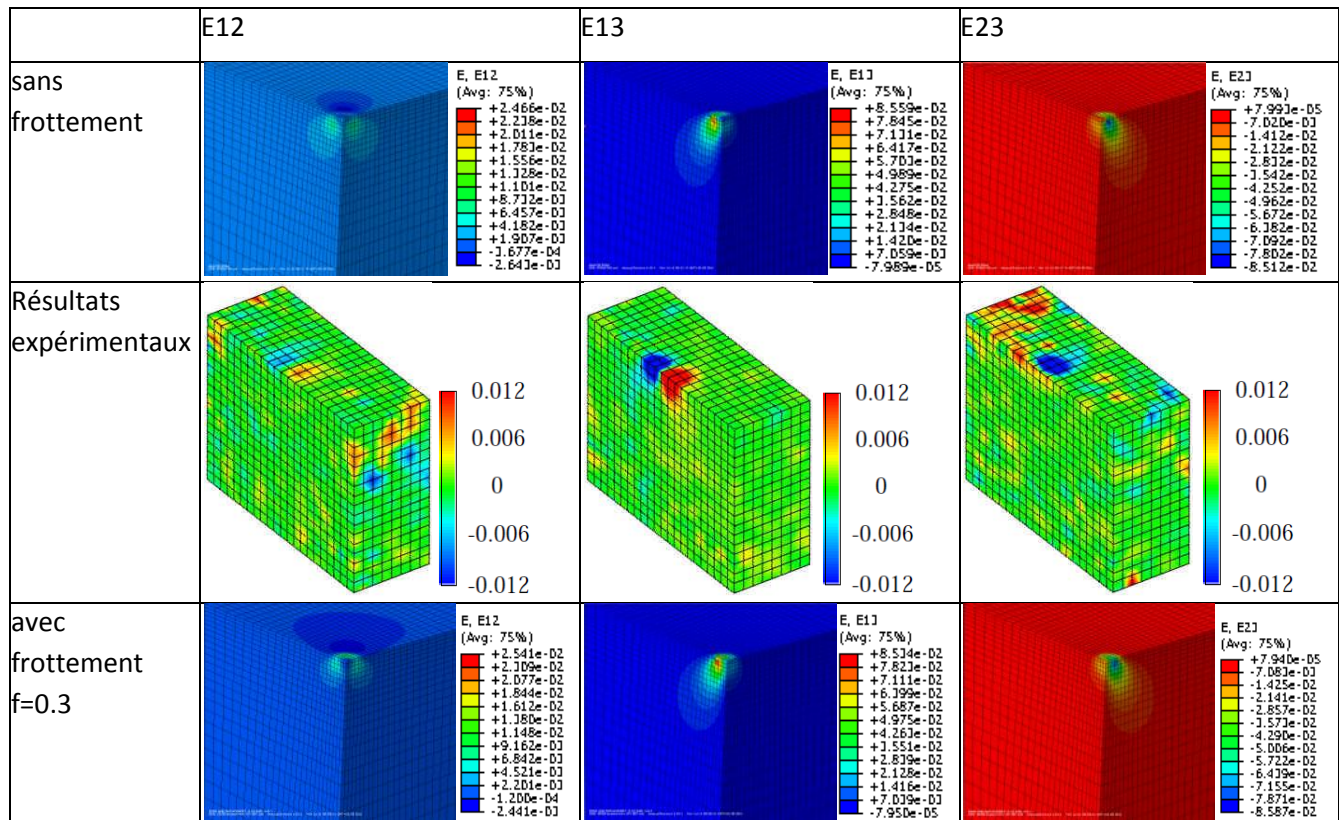


Figure IV.4. Confrontation des résultats obtenus par corrélation et par simulation.

Les résultats illustrés dans ce tableau montrent une similitude en termes de comportement, sauf dans le cas de E_{22} où l'image expérimentale est trop bruitée. Cependant des différences en termes de valeurs sont observées. Pour les déformations suivant les axes, les intensités sont relativement proches, les différences peuvent s'expliquer par des erreurs dues à la précision de mesure et des conditions expérimentales qui peuvent engendrer des bruits et comme on l'a vu dans le paragraphe IV.2.1.2. Pour les déformations suivant E_{12} , E_{13} et E_{23} qui sont de l'ordre de 3% les différences peuvent être considérées négligeables. On remarque aussi que les valeurs les plus proches des résultats expérimentaux sont celles de la simulation où le frottement est pris en considération, permettant ainsi de dire que le frottement doit être considéré dans l'établissement du modèle numérique.

IV.2.3.2. Confrontation avec les résultats obtenus par photoélasticimétrie :

Pour pouvoir faire une comparaison entre les franges expérimentales et les franges simulées, on passe par une étape de modélisation qui est le submodeling (paragraphe III.2.2.3).

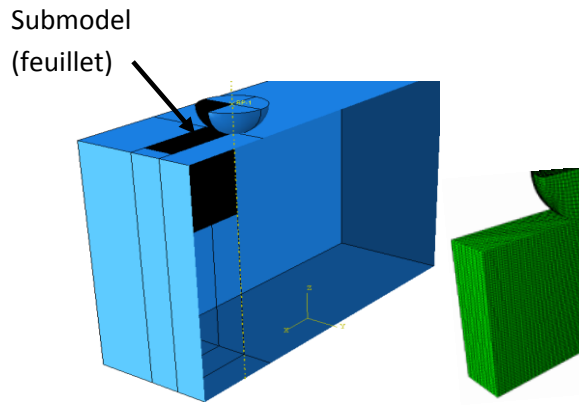


Figure IV.10 Représentation du feuillet numérique

Après avoir obtenu les résultats du calcul, on génère un fichier de sortie, comportant les coordonnées de chaque nœud et les contraintes correspondantes. La dernière étape est le calcul des franges à proprement dit, ou on introduit les valeurs dans le fichier de sortie généré dans un programme développé par l'axe PEM pour calculer les intensités lumineuses correspondant à chaque nœud. Ce dernier génère à son tour un fichier qui peut être lu par un logiciel de tracé 3D pour visualiser les franges.

Dans la figure IV.11 nous présentons les franges obtenues expérimentalement sur un feuillet de 4mm d'épaisseur découpé optiquement sur la zone de contact et les franges simulées d'un feuillet de même épaisseur et découpé au même endroit.

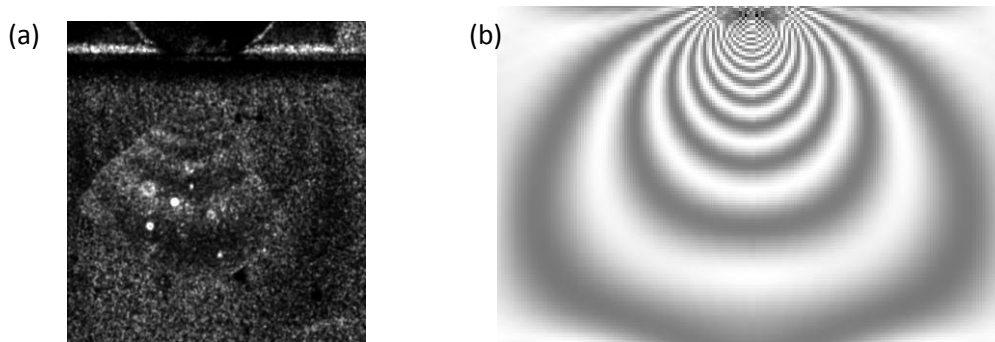


Figure IV.11. (a) Franges expérimentales, (b) franges simulées.

Comme on peut le voir sur cette figure, les franges sont de forme circulaire sauf pour la première frange simulée qui est légèrement déformée à cause des effets de bords, les densités des deux réseaux de franges sont similaires. On note une différence aux abords du contact, les franges simulées sont plus nettes et bouclent au voisinage du contact. L'existence d'une zone d'ombre dans l'image expérimentale empêche de voir les franges à cet endroit. La densité de franges au voisinage du contact est importante et supérieure à la sensibilité de la photoélasticimétrie, de ce fait les franges expérimentales ne sont pas visibles à cet endroit.

I.V.2.4. Validation

On a vu dans ces derniers paragraphes, les différents résultats obtenus expérimentalement pour un contact sphère sur plan. On a illustré aussi la modélisation numérique à l'aide de différents paramètres et différents résultats. Nous l'avons comparée aux résultats expérimentaux obtenus par les deux méthodes.

Globalement le comportement mécanique dans la modélisation semble conforme au cas réel, cela permet de dire que la loi de comportement choisie lors de la modélisation est correcte et répond bien à la réalité. Les différences en amplitude entre les résultats expérimentaux et numériques, en contraintes ou en déformations, sont petites et de l'ordre de la précision de mesure. Cela peut s'expliquer justement par l'erreur de mesure, ou des conditions aux limites et de chargement pas tout à fait semblables ce qui peut introduire des erreurs d'appréciation. Après avoir vu et commenter ces résultats, on peut conclure que le modèle numérique est valide et que la gestion du contact hertzien sous Abaqus répond bien à la réalité, à condition de respecter les conditions aux limites établies expérimentalement.

IV.3. Etablissement d'un modèle numérique pour l'étude de cas de contact sphère sur gorge :

Après avoir vu dans le paragraphe précédent, le cas de contact sphère sur plan et avoir statué sur la bonne gestion des contacts sur Abaqus, dans ce paragraphe, on tentera d'établir des modèles numériques pour des cas de contact sphère sur gorge, dans le but de dimensionner des modèles à étudier expérimentalement par photoélasticimétrie 3D. On calculera les franges numériques afin de prédire la possibilité de voir des franges expérimentales en jouant d'une part sur la valeur de la charge et d'autre part sur les dimensions. L'étude de ce type de contact trouve tout son intérêt du fait de sa présence dans de nombreux systèmes mécaniques et dans différents cas de structure, citons par exemple : le cas des roulements, des butées à billes qui sont des éléments essentiels dans les guidages en rotation, et aussi le cas des vis à billes qui sont notamment utilisées en aéronautique ou dans des centres d'usinage pour la transmission de mouvement de précision.

Le but étant de dimensionner un modèle expérimental, on prendra comme données liées aux matériaux, celles mesurées dans le cas de contact sphère/Plan, le matériau étant le même.

On se propose ici de simuler différents cas de contact sphère/gorge, on commencera par un contact avec une bille et une gorge de même diamètre et qui sera égal au diamètre de la bille du contact précédant et en considérant la bille rigide, puis on reprendra le même contact en considérant la bille déformable ; après cela on établira une autre simulation en considérant un jeu entre la bille et la gorge, et enfin une modélisation d'une butée à bille, pour une pré-étude qui donnera un ordre d'idée des dimensions et du chargement pouvant permettre la visualisation des franges expérimentales.

IV.3.1. Modèle sphère sur gorge de même diamètre avec bille rigide

IV.3.1.1. Construction du modèle

La simulation se fait sur un modèle en époxy de module de Young de $= 2700 \text{ Mpa}$, de coefficient de Poisson $\nu = 0.38$, et de constante photoélastique $C = 40Bw$. En raison de la symétrie on fera le calcul sur un quart du modèle. On impose un déplacement de $U = -0.2\text{mm}$ suivant l'axe y pour la bille que l'on considère rigide et un coefficient de frottement $f = 0.3$.

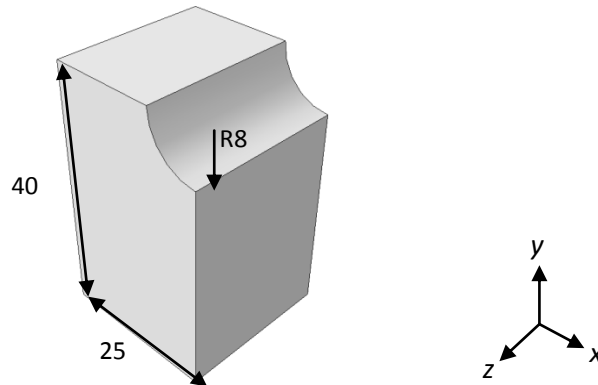


Figure IV.11. Dimensions du modèle (en mm)

Les dimensions du modèles sont nettement plus grandes par rapport au rayon, et ce pour avoir une plus grande surface de visualisation des franges et pour diminuer les effets de bords dus aux réactions aux appuis. La figure IV.12 illustre les résultats de la simulation en contraintes de Von-Mises et en pression de contact :

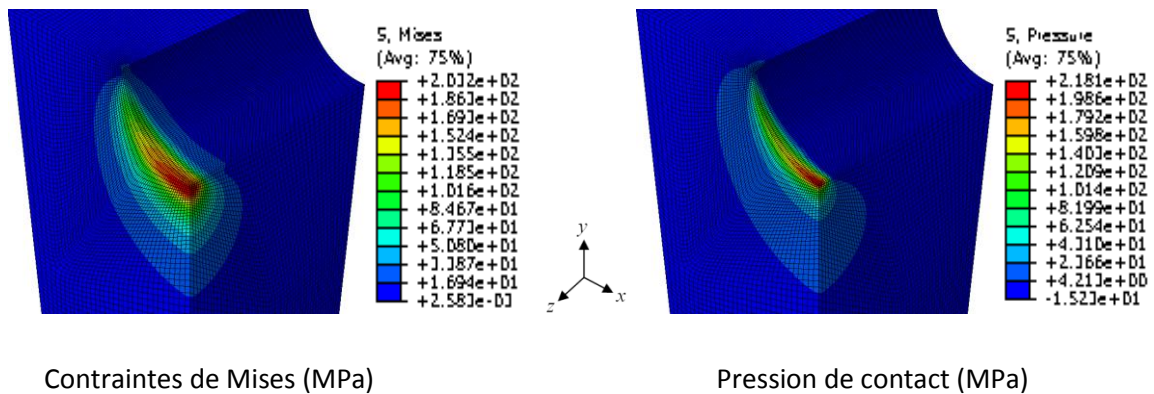


Figure IV.12. Résultats de la simulation (bille rigide)

La contrainte de Von Mises max se situe en "subsurface" au fond de la gorge suivant la direction normale du contact (parallèle à l'axe y) et décroît en s'éloignant du fond de la gorge jusqu'à atteindre une valeur nulle au niveau le plus haut de la gorge (dans la direction parallèle à l'axe x). La pression de contact est maximale sur la surface au voisinage du point le plus profond de la gorge suivant la direction de chargement et adopte

le même comportement que les contraintes de Von Mises. A noter aussi que les contraintes de Von Mises et la pression de contact ont le même ordre de grandeur.

IV.3.1.2. Calcul des franges simulées

Pour le calcul des franges simulées, on procède à la découpe de deux feuillets de 2mm et de 4mm d’épaisseur discrétisés respectivement en 6 et 7 plans.

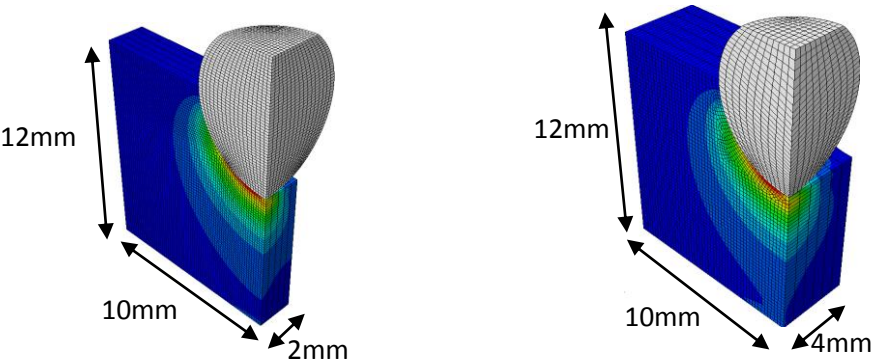
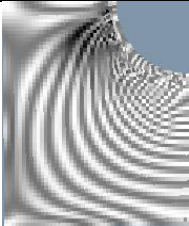
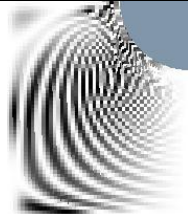


Figure IV.13. Dimensions des deux feuillets

Les franges sont calculées avec une schématisation 3D et une schématisation 2D pour chaque plan. Le tableau IV.5 montre les franges pour les deux feuillets avec les deux schématisations.

Feuillet de 4mm d’épaisseur					
Schématisation 3D					
Schématisation 2D ; les 5 premiers plans en partant du contact					
Feuillet de 2mm d’épaisseur					
Schématisation 3D					

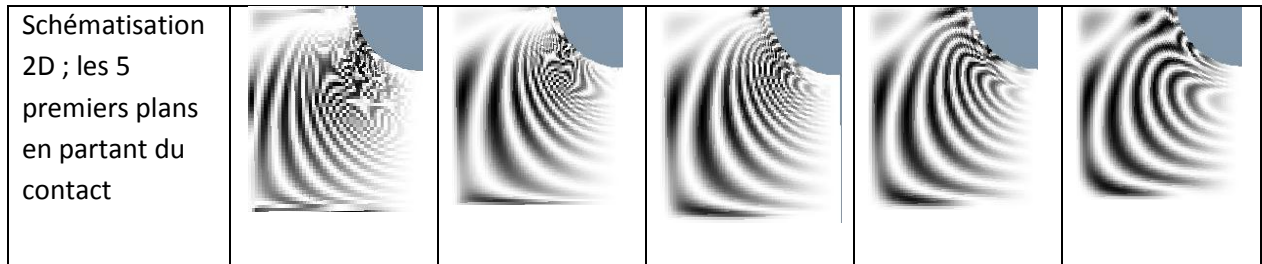


Tableau IV.5. Réseaux de franges pour les feuillets de 2mm et 4mm avec les schématisations 2D et 3D.

En schématisation 2D, et pour les deux feuillets, on voit bien que plus on s'éloigne du contact moins on a de franges, ce qui est justifié du fait que l'intensité des contraintes est plus importante au voisinage du contact, cependant dans la zone de contact la densité des franges est importante et aux abords du contact on voit des aberrations et du bruit. Pour la schématisation 3D, on voit moins de franges dans le feuillet de 2 mm, mais dans les deux cas la densité du réseau de franges est importante. Dans un modèle expérimental un tel réseau ne peut être visualisé correctement, les franges expérimentales seront bruitées et incohérentes. Ce qui nous amène à dire que le chargement est trop important pour pouvoir visualiser des franges particulièrement au voisinage du contact, avec de telles conditions.

IV.3.2. Modèle sphère sur gorge de même diamètre (les deux corps sont déformables)

IV.3.2.1. Construction du modèle

Afin de pouvoir étudier la répartition des contraintes dans la bille, on construit un modèle numérique avec une bille déformable. La simulation est réalisée avec un modèle similaire à celui du cas précédant, en considérant la bille déformable est du même matériau que la gorge. La figure IV.14 montre les résultats de la simulation pour la pression de contact et les contraintes de Von Mises.

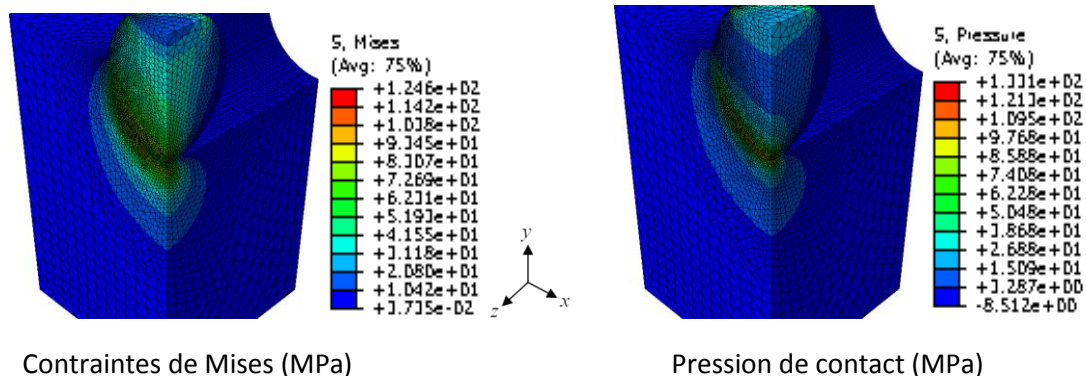
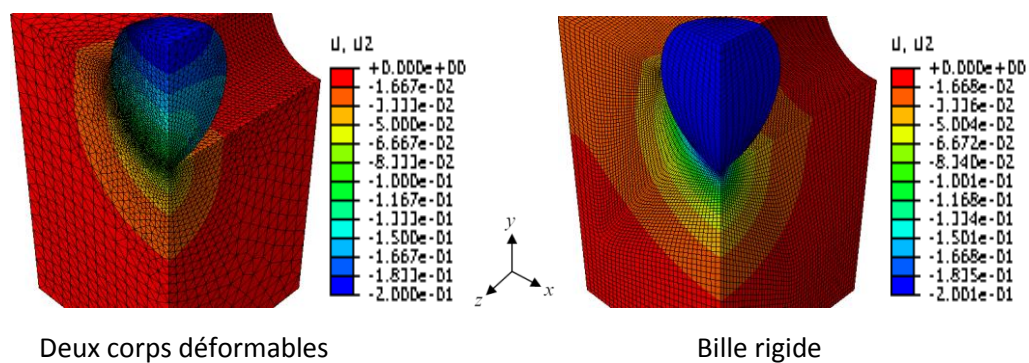
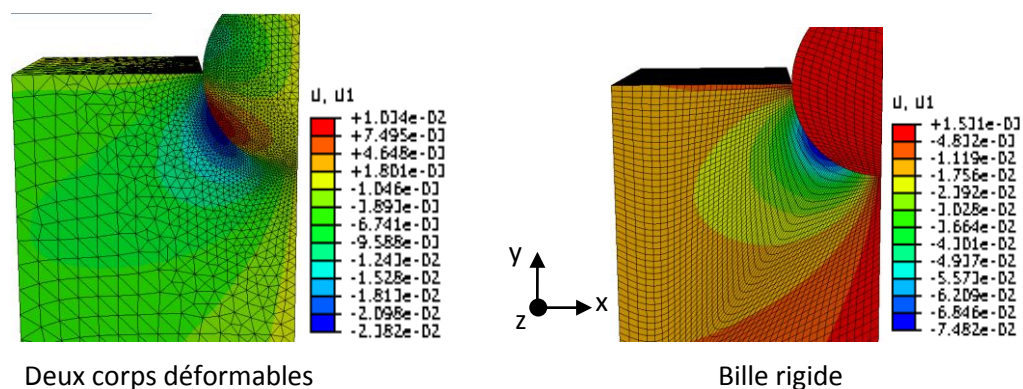


Figure IV.14. Résultats de la simulation numérique (les deux corps sont déformables)

Si on compare les résultats des deux simulations (avec une bille rigide et avec une bille déformable) on voit que l'ordre de grandeur des résultats est réduit, presque de moitié. Cela peut s'expliquer par le fait, que dans le premier cas le déplacement imposé est intégralement transmis par la bille rigide à la gorge, ce qui induit une déformation importante dans la gorge, et ainsi des contraintes importantes et ce par la relation linéaire entre les contraintes et les déformations, alors que dans le second cas les deux corps sont déformés et le déplacement imposé n'est pas transmis intégralement à la gorge, ce qui réduit considérablement l'intensité de la contrainte max et la pression de contact (figure IV.15). On peut noter aussi que la pression de contact maximale dans le cas des deux corps déformables, est moins localisée que dans le cas de la bille rigide, car la compression exercée sur la bille engendre une déformation positive suivant les directions x et z , qui comprime tout l'arc de la gorge.



(a) Déplacement U_2 suivant l'axe y (mm)



(b) Déplacement U_1 suivant x (mm)

Figure IV.15. Résultats des simulations en déplacement suivant x et suivant y

On voit bien en (a) que le déplacement est totalement transmis dans le cas de la bille rigide et dans le cas des deux corps déformables, le déplacement est absorbé par les deux corps.

On remarque la même chose en (b) sauf pour la répartition du déplacement où elle est moins localisée dans le cas des deux corps déformables.

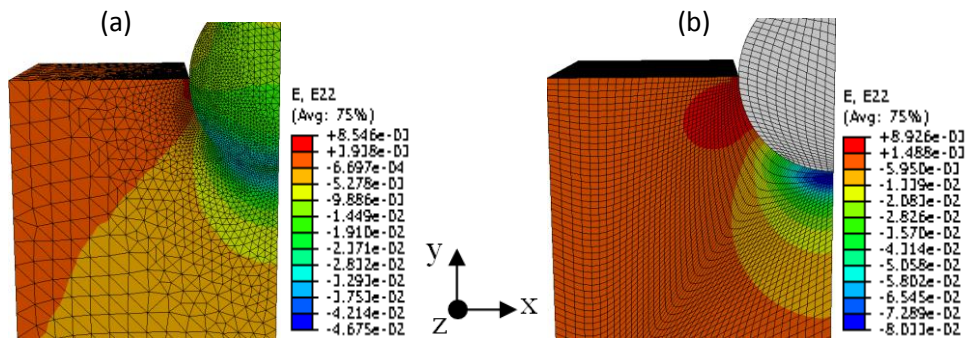
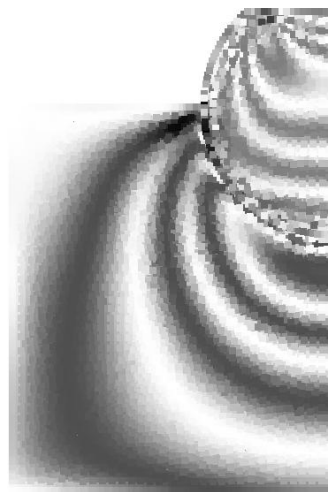


Figure IV.16 Déformations suivant l'axe de chargement y, (a) les deux corps sont déformables, (b) bille rigide

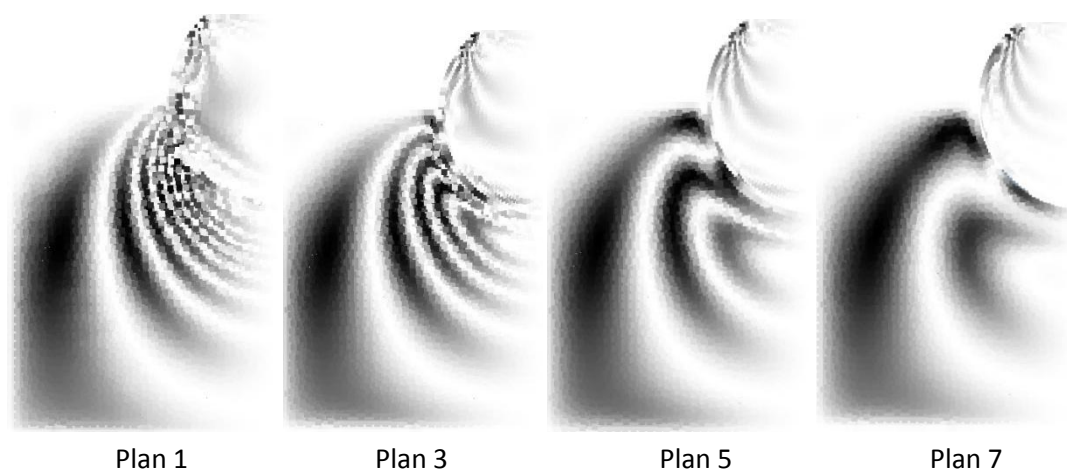
La figure ci-dessous illustre la répartition de la déformation suivant l'axe y, on voit bien que dans le cas des deux corps déformables la déformation est répartie sur presque tout l'arc de la gorge alors que dans le cas où la bille est rigide la déformation est plus localisée au fond de la gorge. Ce qui explique la répartition des contraintes maximales sur tout l'arc dans le premier cas.

IV.3.2.2. Calcul des franges

Les franges simulées sont calculées sur un feuillet de 2mm d'épaisseur avec les mêmes dimensions que ceux du cas précédant avec une discrétisation en 9 plans équidistants.



Franges simulées (schématisation 3D)



Franges simulées (schématisation 2D, les plans en partant de la zone de contact)

Figure IV.16 Frange simulées dans le cas de deux corps déformable

Dans la schématisation 2D le paramètre isocline, empêche de voir les franges sur la bille et sur la gorge la densité du réseau de franges est plus importante sur le premier plan et diminue en s'éloignant de la zone de contact ce qui est normal, vu que les contraintes sont plus importantes dans cette zone. Pour la schématisation 3D, on voit clairement les franges sur les deux corps et la densité du réseau de franges est moins importante que dans le cas où la bille est considérée rigide. Pour un modèle expérimental, où les deux corps sont déformables, on peut visualiser clairement des franges même avec un tel chargement contrairement au cas où la bille est rigide.

IV.3.3. Modèle sphère sur gorge (deux corps déformables) avec jeu

IV.3.3.1. Construction du modèle

Afin d'approcher les conditions réelles dans ce type de contact nous allons considérer un jeu de $80\mu\text{m}$ entre la bille et la gorge, et qui est le jeu moyen dans les vis à billes. La simulation est faite sur un modèle similaire aux deux précédents et avec les mêmes conditions aux limites.

IV.3.3.2. Calcul des franges

Les franges sont calculées sur un feuillet de 2 mm d'épaisseur, similaire en dimensions et en conditions à ceux vues dans les simulations précédentes, et cela pour avoir une référence dans les calculs pour pouvoir comparer les résultats.

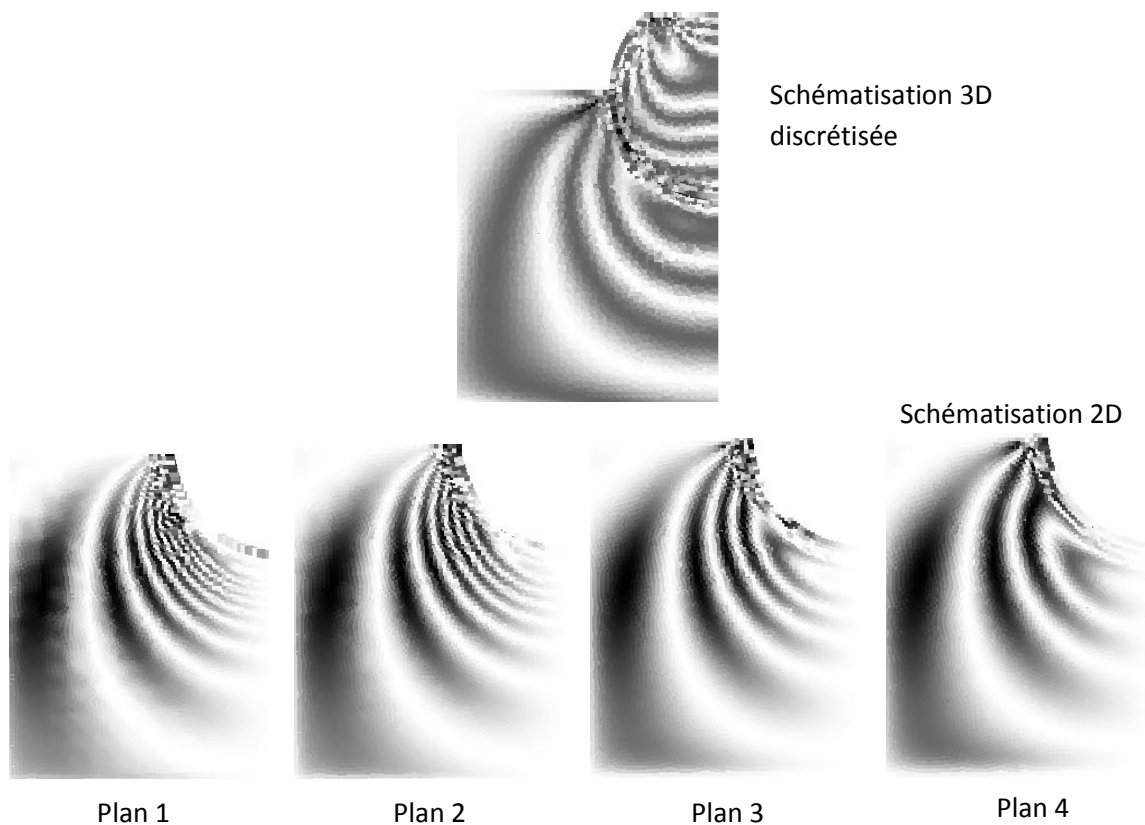


Figure IV.17. Franges simulées contact sphère sur gorge avec un jeu de $80\mu\text{m}$

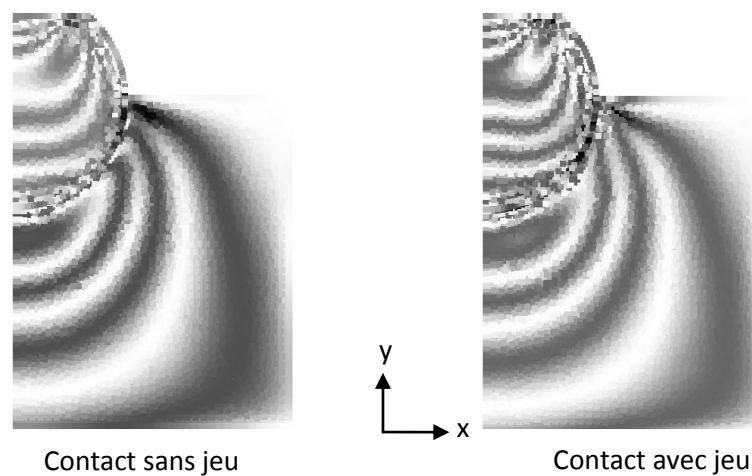


Figure IV.18. Comparaison des deux réseaux de franges (cas avec jeu et cas sans jeu)

On observe peu de différence dans les deux réseaux, dans le cas où le jeu est pris en compte les franges sont plus serrées dans la bille et plus ouvertes dans la gorge que dans le cas où le jeu n'est pas pris en compte. Cela peut s'expliquer par le fait que dans le cas où le jeu est pris en considération, la déformation est légèrement plus importante suivant x du fait du jeu entre les deux surfaces. A noter qu'avec un tel jeu, les différences entre les deux modélisations seront difficilement observables dans un modèle expérimental. Cependant avec un jeu plus grand les franges peuvent varier sensiblement en comportement et en densité du réseau.

IV.3.4 Modélisation d'une butée à billes

L'étude du comportement mécanique dans une butée à billes peut s'avérer utile pour porter l'étude du contact sphère sur gorge dans un cas réel, et aussi servir d'une modélisation 3D simplifiée du cas de contact dans une vis à billes. Les dimensions de la butée modélisée dans ce paragraphe sont prises d'un cas réel étudié [BERT 10]. Cette modélisation se fera avec deux cas de chargement, le premier avec un déplacement imposé $U = 0.2 \text{ mm}$ et le second avec un déplacement $U = 0.4 \text{ mm}$.

IV.3.4.1 Construction du modèle

Le système de butée à bille conçu pour cette étude est composé d'une butée inférieure et d'une butée supérieure de 96 mm de diamètre. Ces deux bagues présentent un chemin de roulement au sein duquel 16 billes sont disposées approximativement à 22.5° les unes des autres. Les billes sont de diamètre 13 mm , le jeu introduit numériquement entre une bille et la gorge est de 0.30 mm .

Grâce aux symétries de géométrie et de chargement, 1/16 de la butée sera pris en considération dans le calcul. Le chargement est appliqué sur la face supérieure de la butée et consiste en un déplacement $U = 0.2 \text{ mm}$. Des conditions de symétrie sont imposées sur les faces découpées dans la portion à calculée pour les billes et les bagues de la butées. La butée inférieure est bloquée en déplacement suivant y en considérant un appui simple sur la face inférieure de la bague.

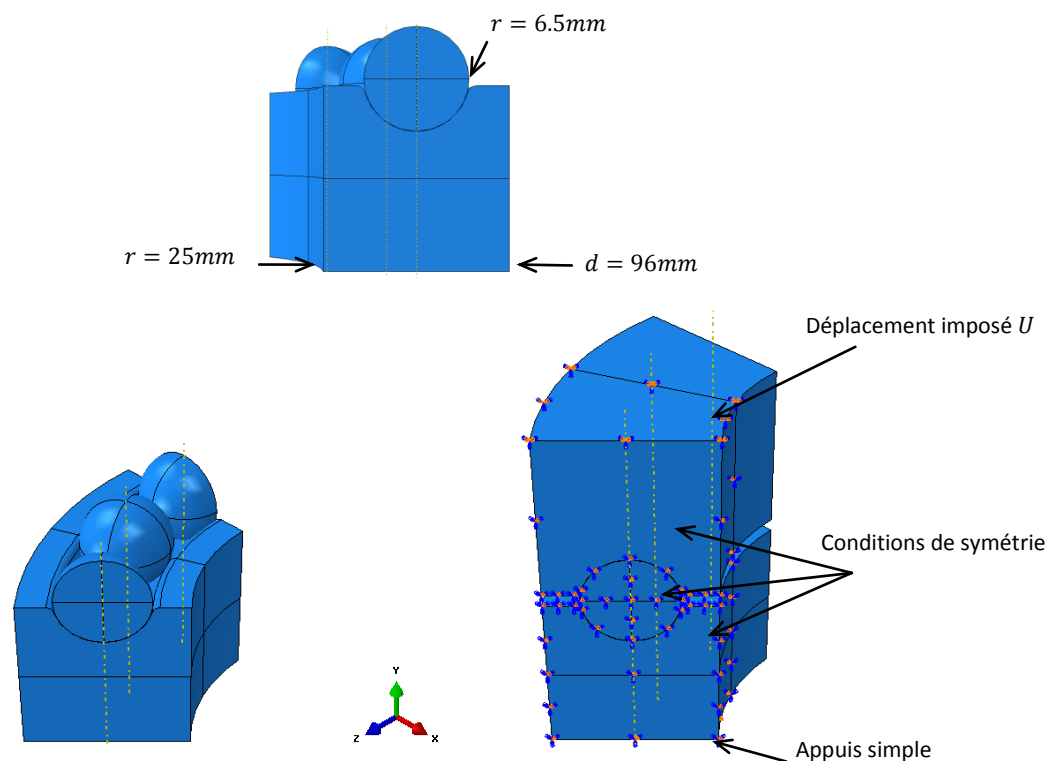


Figure IV.19. Représentation de la construction géométrique de 1/8 du modèle

Le maillage dans le modèle global est réalisé avec des éléments tétraédriques linéaires C3D4 à 4 nœuds, comme on peut le voir dans la figure IV.20 le maillage est raffiné au niveau du contact. Les conditions de contact sont introduites en utilisant la méthode par défaut d'Abaqus (multiplicateurs de Lagrange). Le coefficient de frottement est $f = 0.3$. Les caractéristiques du matériau des billes et des butées sont celles utilisées dans les simulation précédentes c'est-à-dire $E = 2700\text{Mpa}$, $\nu = 0.38$

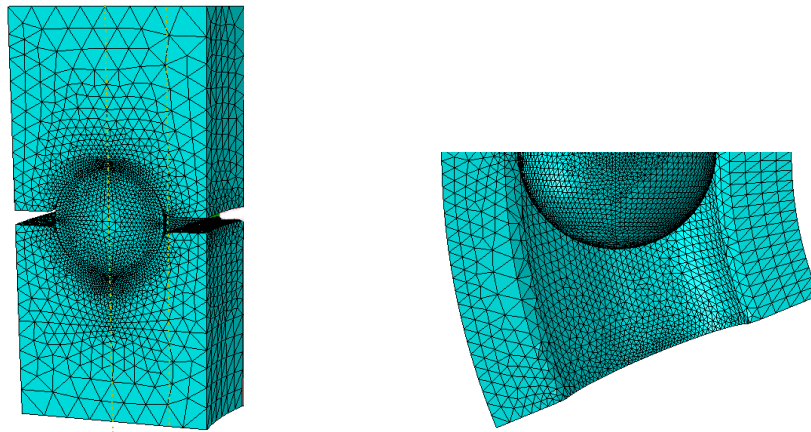
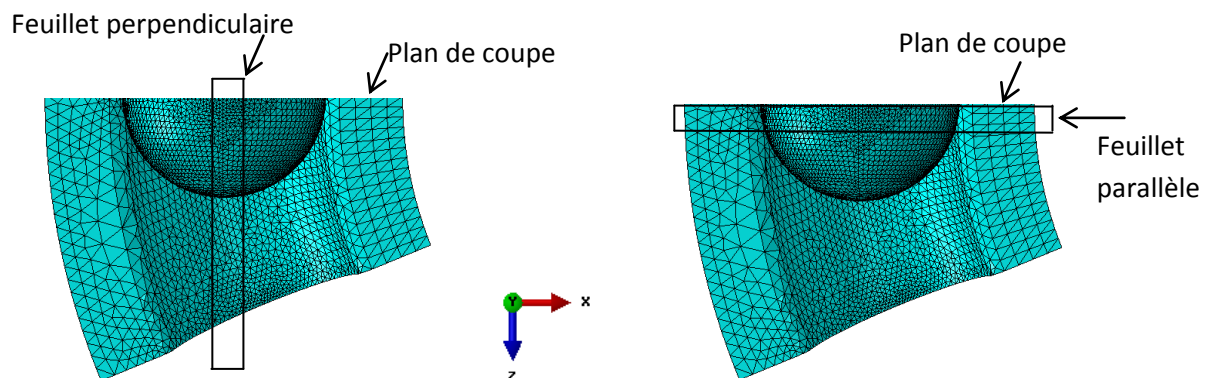


Figure IV.20. Maillage pour la modélisation à 1/16 de la butée

IV.3.4.2. Calcul des franges

Les franges simulées sont calculées sur deux feuillets de 2mm d'épaisseur. L'un sera perpendiculaire à la découpe du modèle et l'autre sera suivant le plan de la découpe. On choisit de découper les feuillets que sur la moitié de la butée (partie inférieur) et ce en raison de la symétrie et pour réduire le temps de calcul.



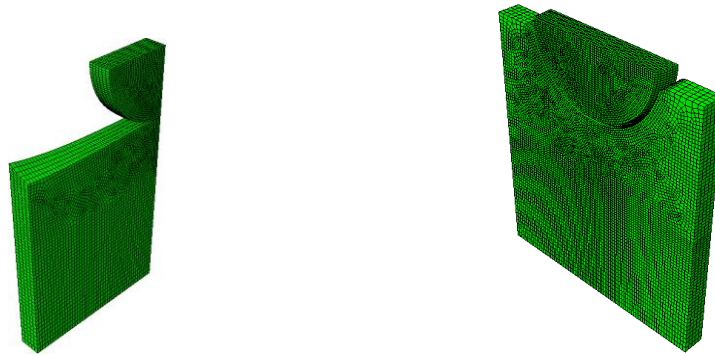


Figure IV.21. Représentation des feuillets

Les franges obtenues sont représentées sur la figure IV.22, IV.23

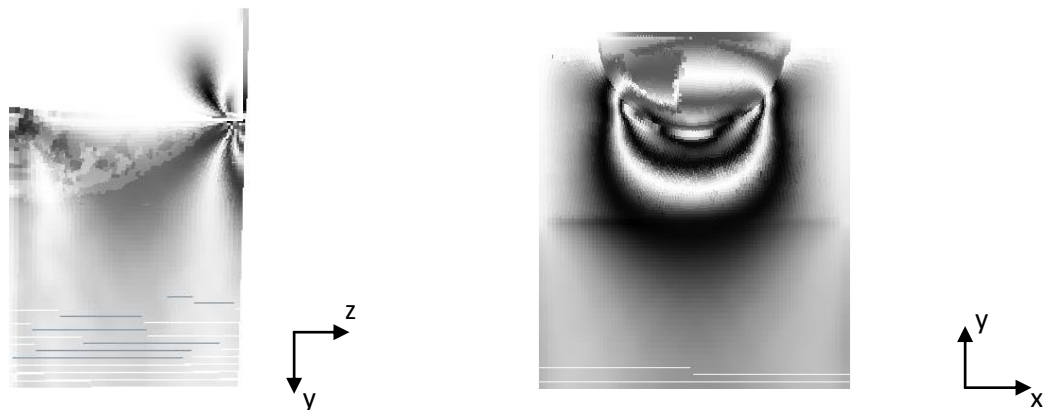


Figure IV.22. Franges simulées avec un déplacement imposé $U = 0.2mm$



Figure IV.22. Franges simulées avec un déplacement imposé $U = 0.4mm$

Les franges observées dans les deux états de charge sont identiques en termes de comportement, avec des densités de réseau différentes. On peut observer dans le plan (x,y) des discontinuité dans les franges au niveau de la bille et dans la jonction des deux parties (haute et basse) de la buté, à cause des discontinuités dans les maillages et cela sans altérer la visualisation des franges globales. On observe aussi une augmentation de la zone de contact en fonction de la charge. L'observation expérimentale des franges dans le plan (x,y) ne pourra être cohérente et les franges pourraient être altérées, à cause du volume de matière que traversera la lumière diffusée et son passage sur des zones contraintes par

l'action des billes voisines, ce qui créera des interférences entre les franges avant que le signal n'atteigne le capteur. Cependant la simulation des franges dans ce plan peut s'avérer nécessaire pour avoir une visualisation du comportement sur tout l'arc de la gorge. Dans le plan (y,z) l'observation des franges est possible dans les deux états de charge. Le réseau franges dans le cas du chargement $U = 0.4mm$ est plus dense particulièrement dans la bille ce qui pourra rendre difficile la visualisation des franges expérimentales dans cette partie du modèle.

IV.3.5. Conclusion

On a vu dans ce chapitre la modélisation numérique de différents cas de contact sphère sur gorge, avec différents états de charge et différentes configurations géométriques, pour simuler des franges photoélastiques, dans le but de prédire la visualisation de ces dernières expérimentalement. On a aussi observé l'influence de certains paramètres comme l'épaisseur du feuillet et le jeu introduit entre les solides en contact sur le réseau de franges et sur l'état des contraintes dans le solide. Après avoir observé les franges simulées, on peut choisir un état de charge pour les modèles expérimentaux et avoir une idée du comportement et des franges à observer. Ces modélisations peuvent avoir à subir des modifications en termes de conditions aux limites, de conditions géométriques et de chargement, après une étude expérimentale, et ce dans le but de comparer les franges simulées et les franges expérimentales pour statuer sur la viabilité des modélisations et la possibilité de traiter ce genre de contact qu'avec des modélisations sans avoir à se soucier de différences significatives en terme de comportement et de valeurs des grandeurs calculées tout en choisissant correctement les conditions aux limites.

Conclusion

Conclusion :

A travers ce mémoire, nous avons traité des problèmes de contacts mécaniques entre solides. La première partie consistait en la présentation de quelques techniques expérimentales de mesure sans contact et nous avons choisi la technique de la photoélasticimétrie, pour l'investigation dans le volume dans les cas de contact, pour ses avantages en termes de précision et de la rapidité d'obtention de résultats. L'insuffisance d'une étude par une seule méthode pour statuer sur la validité des résultats nous mène à conclure sur la nécessité d'un couplage entre expérimentation et modélisation numérique. Cette dernière est effectuée à l'aide du code de calcul Abaqus. La modélisation nous donne les valeurs du tenseur de contraintes en chaque nœud du maillage que l'on utilise pour simuler des franges photoélastiques par les schématisations des milieux photoélastiques, afin de les comparer aux franges expérimentales. Le travail a été scindé en deux parties distinctes. La première était l'étude d'un contact Hertzien sphère sur gorge en établissant un modèle numérique sous Abaqus permettant le calcul des franges simulées que nous avons comparées aux franges expérimentales, et aux résultats en déformations préalablement établies. Cette procédure a permis de statuer sur la viabilité du traitement des problèmes de contacts sous Abaqus. La seconde partie s'est axée sur la modélisation de cas de contact sphère sur gorge, pour le dimensionnement de modèles expérimentaux à étudier par photoélasticimétrie, et ce pour l'étude des contacts dans le cas des butées et des vis à billes, en les approchant avec des géométries simplifiées. On a réalisé dans cette partie différentes simulations où on a vu l'incidence de certains paramètres sur les modélisations, en comparant les résultats et les franges simulées. Le dernier exemple traité était la butée à bille. Cette modélisation nous a permis de prédire le comportement global du contact et donné une idée du chargement et des franges à visualiser expérimentalement. La modélisation étant insuffisante pour l'étude d'un problème mécanique, une étude expérimentale sera nécessaire, pour valider la modélisation et lui apporter notamment des améliorations et des modifications, dans les conditions aux limites, dans la géométrie et les chargements, afin d'approcher les conditions réelles.

On a vu dans ce mémoire l'intérêt du couplage expérimentation/modélisation et sa nécessité pour avoir des résultats consistant et valider une étude par une méthode à travers les résultats obtenus par une autre. Ce travail a permis de montrer l'intérêt et la possibilité de dimensionner une étude expérimentale par la technique de la photoélasticimétrie 3D, par une modélisation numérique et la simulation des franges photoélastiques.

Références bibliographiques

Références bibliographique

- [ABA AN] Abaqus 6.10 documentation analysis 5
- [ABA TH] Abaqus 6.10 documentation theory
- [ABE 79] ABEN H., « Integrated photoelasticity », McGraw-Hill, 1979.
- [ABE 97] ABEN H., JOSEPHSON J., « Strange interference blots in the interferometry of inhomogeneous birefringent objects », *Applied Optics*, vol. 36, n°28, October 1997.
- [AJO 98] AJOVALASIT A., BARONE S., PETRUCCI G., « A review of automated methods for the collection and analysis of photoelastic data », *Journal of Strain Analysis*, vol. 33, N° 2, pp.75-99, 1998.
- [AJO 07] AJOVALASIT A., PETRUCCI G., SCAFIDI M., « Phase shifting photoelasticity in white light », *Optical and Laser in engineering*, vol. 45, pp.596-611, 2007.
- [ASU 93] ASUNDI A., « Phase shifting in photoelasticity », *Experimental Techniques*, pp. 19-23., Jan. 1993.
- [BAR 10] BARANGER Y « Apport des méthodes volumiques dans la confrontation théorie/expérience », Thèse de doctorat, Université de Poitiers, décembre 2010.
- [BIL 05] BILEK A, DUPRE J.C, BREMAND F, OUIBRAHIM A « 7th international conference on computer methods and Experimental Measurements for surface effects and Contact Mechanics, Bologne, Italy, september 2005.
- [BIL 07] BILEK A, « Méthode non destructive de découpage optique, Photoélasticimétrie 3D Application au problème fondamental du contact », Thèse de doctorat université de UMMTO Tizi-Ouzou, Juin 2007.
- [BRE 93] BREMAND, F., « A phase unwrapping technique for any object relief determination », *International Symposium on Optical tools for manufacturing and Advanced Automation, SPIE*, Boston, September 1993.
- [BRI 82] BRILLAUD J., LAGARDE A., « Méthode ponctuelle de photoélasticité tridimensionnelle, Application », *Revue Française de Mécanique*, 84, pp. 41-49, 1982.
- [DES 80] DESAILLY R., LAGARDE A., « Sur une méthode de photoélasticimétrie tridimensionnelle non destructive à champ complet », *Journal de Mécanique Appliquée*, vol. 4, n° 1, pp. 3, 1980
- [DES 81] DESAILLY R., « Méthode non-destructive de découpage optique en photoélasticimétrie tridimensionnelle- Application à la mécanique de la rupture », Thèse de doctorat, Université de Poitiers, juin 1981.
- [DUP 93] DUPRÉ J. C., BREMAND F., LAGARDE A., « Photoelastic data processing through digital image processing: isostatics and isochromatics reconstruction », *International conference on photoelasticity: new instrumentation and data processing technique*. Londres, November 1993.
- [DUP 97] DUPRÉ J. C., LAGARDE A., « Photoelastic analysis of a three-dimensional specimen by optical slicing and digital image processing », *Experimental Mechanics*, vol. 37, n°4, pp. 393-397, December 1997.
- [GER 07] GERMANEAU A « Développement de techniques de mesure dans le volume : Application à l'étude des effets mécaniques 3D dans les structures et les biomatériaux », Thèse de doctorat, Université de Poitiers, novembre 2007.
- [GER 08] GERMANEAU A., F. PEYRUSEIGT, S. MISTOU, O. DALVERNY, P. DOUMALIN, J.C. DUPRÉ, « Verification of a spherical plain bearing FE model using scattered light photoelasticity tests » *Journal of Engineering Tribology*, 222(J5), pp. 647-656, 2008.
- [GRE 11] GREDAC M « Traité de Mécanique et des techniques d'imagerie » Hermès Lavoisier 2011.
- [R 1 850v2] BREMAND F, COTTRON M, DOUMALIN P, DUPRE J-C, GERMANEAU A, VALLE V « Mesures en mécanique par méthodes optiques » Technique de l'ingénieur 2011
- [ZEN 98a] ZENINA A. « analyse par photoélasticimétrie d'une pièce tridimensionnelle : modélisation expérimentation » Thèse de doctorat université de Poitiers 1998.

[ZEN 98b] ZENINA A, DUPRE J.C, LAGARDE A «Optical approaches of a photoélastique medium for theoretical and experimental study of stresses in three dimensional specimen » *IUTAM symposium on advanced optical methods and applications in solid mechanics*, Poitiers, France, septembre 1998