

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZLOUZOU
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE DE MASTER

SPECIALITE: MATHEMATIQUES
OPTION: RECHERCHE OPERATIONNELLE

Présentée par:

Fatma TAREB et Damia MERZOUK

Sujet:

**Résolution d'un Problème de
Programmation Linéaire Flou via
l'Optimisation Multiobjectif**

Devant le jury d'examen composé de:

Mr OUANES Mohand ; Professeur ; U.M.M.T.O ; Président

Mr CHABBAH Mohamed ; Professeur ; U.M.M.T.O ; Examineur

Mme Ouiza Bouarab ; Maitre de conférences ; U.M.M.T.O ; Promotrice

Soutenue le 12/07/2015

Dédicaces

Je remercie le Bon Dieu tout puissant de m'avoir donné la force d'accomplir ce travail.

Je dédie cette thèse à

La mémoire de mon père que Dieu le garde dans son vaste paradis,

Ma mère pour son soutien et son dévouement tout au long de mes études,

*Mes frères et soeurs que je remercie pour leurs encouragements, leurs aides ainsi que
toute ma grande famille.*

À l'homme qui m'a choisi pour me donner son nom à jamais, mon époux et sa famille .

À tous mes amis sans citer de noms.

À mes collègues de la promotion 2015-2016 de post-graduation.

À tous ceux qui aiment Lilia et ceux que Lilia aime

Lilia ou Fatma

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

La mémoire de mes grands-parents que Dieu les garde dans son vaste paradis,

Mes parents, avec toute mon affection et tout mon respect,

Mes frères, ma petite soeur que j'adore et à toute ma famille qui m'a toujours encouragé,

Mes amies spécialement Fatima et Lylia et à leurs familles respectives,

Mon époux et sa famille sans oublier mon petit ange bien aimé "ma fille Rymas".

MERZOUK Damia

Remerciements

Nous remercions d'abord notre bon Dieu qui nous a ouvert les portes du savoir et nous a permis de réaliser ce modeste travail.

Nous tenons à remercier *M^{me}* BOUARAB de nous avoir fait l'honneur d'être promotrice de ce mémoire.

Nos vives reconnaissances de nous avoir proposé ce sujet de recherche, pour toute sa présence, ses précieux conseils et remarques.

Nous avons eu un énorme plaisir de travailler avec elle.

Nous souhaitons également remercier nos enseignants, *M^r* *K.Kasdi*, *M^r* *B.Oukacha* et *M^r* *A.Hocini* qui nous ont tenu et transmis le savoir, l'esprit de recherche et de persévérance dans nos études durant notre cursus.

Nous remercions nos camarades pour leur soutien et encouragements.

Enfin, nous remercions chaleureusement nos chers parents pour tous leurs efforts. Nous espérons que leur fierté ne sera pas que celle de ce titre obtenu, mais surtout d'avoir fait de nous ce que nous sommes.

Table des figures

1.1	Ensemble classique et ensemble flou	8
1.2	Nombre flou triangulaire (a, α, β)	11
1.3	Nombre flou trapézoïdal $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$	12
1.4	Deux nombres flous trapézoïdaux \tilde{a} et \tilde{b}	13
1.5	Résultats de négation, addition et soustraction de nombres flous trapézoïdaux.	14
2.1	Les niveaux de préférence dans la relation de dominance.	20
2.2	Illustration des différentes définitions.	22
2.3	Quel mode de résolution choisir?	24
2.4	La méthode d'agrégation	26

Table des matières

Liste des figures	1
Introduction	4
1 Théorie des nombres flous	7
1.1 Introduction	7
1.2 Préliminaires sur les ensembles flous	7
1.2.1 Concepts de base	9
1.3 Nombre flou	10
1.3.1 Opérations sur les nombres flous	10
1.3.2 Nombre flou de type $L-R$	10
1.3.3 Nombre flou de type triangulaire	11
1.3.4 Nombre flou de type trapézoïdal	12
1.4 Conclusion	14
2 Programmation Linéaire Multiobjectif	15
2.1 Introduction	15
2.2 La classification des problèmes d'optimisation	16
2.3 Concepts de base sur l'optimisation multiobjectif	17
2.3.1 Formulation d'un problème multiobjectif	17
2.3.2 La multiplicité des solutions	18
2.3.3 Notion de dominance et d'efficacité	18
2.3.4 Points particuliers	21
2.4 Approche de résolution	23
2.4.1 Difficulté d'un problème multiobjectif	23
2.4.2 Méthode de résolution: Agrégation pondérée	24
2.5 Conclusion	27

3	Programmation linéaire floue	28
3.1	Introduction	28
3.2	Programme linéaire floue unicritère	28
3.2.1	Cas où les nombres flous sont triangulaires	28
3.2.2	Cas où les nombres flous sont trapézoïdaux	31
3.3	Programmation linéaire floue multiobjectif	34
3.3.1	Solution technique pour (<i>FMOLPP</i>)	34
3.3.2	(<i>FMOLPP</i>) avec des nombres flous triangulaires	34
3.3.3	(<i>FMOLPP</i>) avec des nombres flous trapézoïdaux	36
3.4	Problème linéaire flou à variables floues	37
3.4.1	Fonction <i>Ranking</i> \mathcal{R}	37
3.4.2	Résultats théoriques	39
3.4.3	Problème flou à variables de décision floues	41
3.4.4	Problème déterministe correspondant	41
3.4.5	Application numérique	42
3.5	Conclusion	43
	Conclusion	44
	Bibliographie	45

Introduction générale

Les connaissances dont nous disposons sur une situation quelconque sont généralement imparfaites soit parce que nous avons un doute sur leur validité, elles sont alors incertaines, soit parce que nous éprouvons une difficulté à les exprimer clairement, elles sont alors imprécises.

Les connaissances imprécises n'ont été prises en considération qu'à partir de 1965, lorsque L. A. Zadeh, professeur à l'université de Californie à Berkeley, a introduit la notion de sous-ensemble flou, à partir de l'idée d'appartenance partielle à une classe, de catégorie aux limites mal définies, dans une généralisation de la théorie classique des ensembles admettant des situations intermédiaires entre le tout et le rien.

Les premières publications sur la théorie des ensembles flous datent de 1965 (Zadeh 1965) suivies par les travaux de Goguen en 1967 et 1969. Ces travaux démontrent l'intention de leurs auteurs à généraliser la notion classique d'un ensemble et d'une proposition afin d'accommoder les données floues. Dans le même contexte, Bellman et Zadeh 1970 ont développé la programmation linéaire floue qu'ils ont appliquée à un processus de décision dans un environnement flou.

La théorie des ensembles flous offre donc une structure mathématique dans laquelle des concepts vagues peuvent être précisément et rigoureusement étudiés. Elle peut également être considérée comme un langage de modélisation convenable à des situations caractérisées de relations, critères ou phénomènes flous.

Résoudre un problème d'optimisation consiste à trouver la ou les meilleures solutions vérifiant un ensemble de contraintes et d'objectifs définis par l'utilisateur. Pour déterminer si une solution est meilleure qu'une autre, il est nécessaire que le problème introduise un critère de comparaison. Ainsi, la meilleure solution, appelée aussi solution optimale, est la solution ayant obtenu la meilleure valuation au regard du critère défini. Les problèmes d'optimisation sont utilisés pour modéliser de nombreux problèmes appliqués : le traitement d'images, la conception d'emplois du temps, Il n'est en général pas possible de fournir dans tous les cas une solution optimale dans un temps raisonnable. Lorsqu'un seul critère est donné, par exemple un critère de minimisation de coût, la solution optimale est clairement définie, c'est celle qui a le coût minimal. Mais dans de nombreuses situations, un seul critère peut être insuffisant. En effet, la plupart des applications traitées intègrent plusieurs critères simultanés, souvent contradictoires. Intégrer des critères contradictoires pose un réel problème. Considérons les actions suivantes :

- Louer un appartement bien situé et d'un prix raisonnable.
- Etablir un planning pour les vacances satisfaisant toute la famille.
- Acheter une voiture.

Organisation du document :

Le *chapitre I*, pose le contexte du travail, pour cela les principales définitions liées à la théorie des nombres flous ainsi que la comparaison et l'arithmétique de deux nombres flous sont présentées.

Dans le *chapitre II*, l'essentiel des éléments de l'optimisation linéaire multiobjectif est relaté tels que la formulation du problème, le concept de dominance et d'efficacité, points particuliers. Pour résoudre notre problème multiobjectif, nous avons choisi d'utiliser la méthode d'agrégation des poids que nous avons détaillé aussi dans ce chapitre.

Le *chapitre III* est composé de deux parties:

— Dans la première partie, nous présentons une méthode de résolution d'un problème linéaire flou (Fuzzy Linear Programming Problem) dont les coefficients sont de type triangulaire. Cette résolution basée sur l'arithmétique de nombres flous triangulaires permet de convertir le problème unicritère à résoudre en un problème

multiobjectif à trois objectifs dont la résolution se fera par la méthode d'agrégation. Nous avons aussi généralisé cette résolution à un problème dont les coefficients sont de type trapézoïdal ainsi qu'à un problème linéaire multiobjectif.

— Dans la deuxième partie, nous exposons une méthode de résolution d'un problème linéaire flou dont les variables de décision sont aussi des nombres flous (Fully Fuzzy Linear Programming Problem). Cette résolution est basée sur les fonctions Ranking ou fonctions de classement qui permettent de convertir le problème flou à un problème déterministe équivalent.

Chapitre 1

Théorie des nombres flous

1.1 Introduction

La théorie des ensembles flous est en fait selon Zadeh, un pas vers un rapprochement entre la précision des mathématiques classiques et la subtile imprécision du monde réel. La théorie des ensembles flous a été développée par Zadeh(1965) [20] pour représenter l'incertitude due à l'imprécision dans l'information ne pouvant être modélisée par la théorie probabiliste.

Aujourd'hui, les domaines d'application dans lesquels il existe des utilisations de la logique floue sont très variés : médecine, biologie, écologie, économie, recherche scientifique...etc. Bien que la recherche ait renforcé la théorie des ensembles flous, il n'existe toujours pas de consensus sur la détermination des fonctions d'appartenance.

1.2 Préliminaires sur les ensembles flous

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous-ensemble. Le mérite de Zadeh a été de tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée, permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble, c'est-à-dire d'autoriser un élément à appartenir plus ou moins fortement à ce sous-ensemble [20].

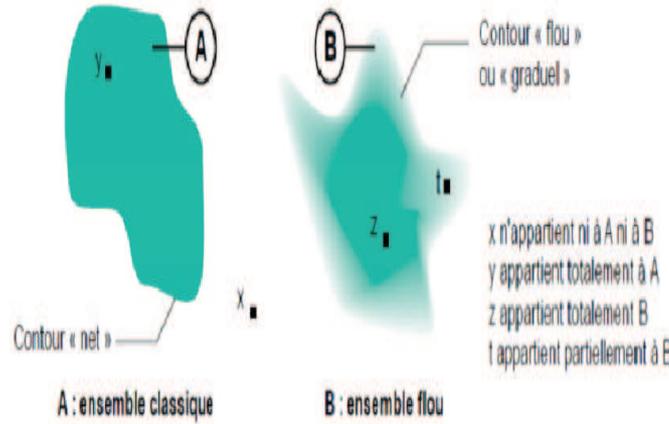


FIG. 1.1 – Ensemble classique et ensemble flou

Définition 1.1. Soit E un ensemble référentiel appelé univers (qui peut être fini ou infini, discret ou continu, ordonné ou non).

Un **ensemble flou** \tilde{A} de E est défini par la donnée d'une fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}: E \rightarrow [0,1]$ où $\mu_{\tilde{A}}(x)$ représente le degré d'appartenance de x à \tilde{A} ou bien le degré de compatibilité de x avec un concept vague ou le degré de similarité de x avec un prototype. Cette fonction s'appelle "**fonction d'appartenance**". Ainsi un ensemble flou \tilde{A} de E est caractérisé par l'ensemble des couples tel que $A = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) / x \in E\}$.

On observe les trois cas possibles suivants :

$$\begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0 & \text{si } x \text{ n'appartient pas à } \tilde{A} \\ 0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1 & \text{si } x \text{ appartient partiellement à } \tilde{A} \\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 & \text{si } x \text{ appartient entièrement à } \tilde{A} \end{cases} \quad (1.1)$$

On peut faire remarquer que si \tilde{A} est un sous-ensemble classique, la fonction d'appartenance qui lui est associée ne peut prendre que les valeurs extrêmes 0 et 1.

On a dans ce cas :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \tilde{A} \\ 1 & \text{si } x \in \tilde{A} \end{cases} \quad (1.2)$$

1.2.1 Concepts de base

Un ensemble flou est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance. A partir d'une telle fonction, un certain nombre de caractéristiques de l'ensemble flou peuvent être étudiées [7], [20].

Coupe de niveau α

Une **coupe de niveau** α d'un ensemble flou \tilde{A} , noté \tilde{A}^α , $\alpha \in]0,1[$, est l'ensemble ordinaire des éléments qui appartiennent à \tilde{A} avec un degré au moins égal à α . Il est défini par $\tilde{A}^\alpha = \{x \in E / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$.

Support d'un ensemble flou \tilde{A}

Le support de \tilde{A} , noté **supp** \tilde{A} , est l'ensemble ordinaire défini par $\text{supp } \tilde{A} = \{x \in E / \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$.

Hauteur d'un ensemble flou \tilde{A}

La hauteur de \tilde{A} , notée **haut** \tilde{A} , est le plus fort degré avec lequel un élément de E appartient à \tilde{A} . Elle est définie par $\text{haut } \tilde{A} = \sup_{x \in E} (\mu_{\tilde{A}}(x))$.

Noyau d'un sous-ensemble flou

Le noyau d'un ensemble flou \tilde{A} de E , noté **Noy**(\tilde{A}), est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent totalement (avec un degré 1). Formellement $\text{Noy}(\tilde{A}) = \{x \in E / \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$.

Ensemble flou normalisé

Un ensemble flou \tilde{A} est dit normalisé s'il existe $x \in E$ tel que $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

Ensemble flou convexe

Un ensemble flou $\tilde{A} \in E$ est dit convexe si et seulement si:
 $\forall x_1, x_2 \in E, \forall \lambda \in [0,1]$ on a $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2))$.

1.3 Nombre flou

Définition 1.2. Un *nombre flou* est un ensemble flou \tilde{A} normalisé et convexe de \mathbb{R} dont la fonction d'appartenance est continue par morceaux.

Définition 1.3. Un nombre flou \tilde{A} est dit non-négatif si, $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0; \forall x < 0$.

Remarque 1.1. Si le noyau(\tilde{A}) est un intervalle de \mathbb{R} , on parle alors d'*intervalle flou*.

1.3.1 Opérations sur les nombres flous

Soient \tilde{A} et \tilde{B} deux sous-ensembles flous d'un même référentiel E

- **Inclusion:** $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ si et seulement si $\forall x \in E$ on a : $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$.
- **Égalité:** $\tilde{A} = \tilde{B}$ si et seulement si $\forall x \in E$ on a : $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$.
- **Intersection:** $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ est le sous-ensemble flou de E dont la fonction d'appartenance est définie par : $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x); \mu_{\tilde{B}}(x))$.
- **Réunion:** $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ est le sous-ensemble flou de E dont la fonction d'appartenance est définie par : $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x); \mu_{\tilde{B}}(x))$.
- **Complémentaire:** $\underline{\tilde{A}}$ est le sous-ensemble flou complémentaire de \tilde{A} dont la fonction d'appartenance est donnée par : $\mu_{\underline{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$.
- **Produit cartésien:** Soient $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$, n sous-ensembles flous de E_1, E_2, \dots, E_n respectivement. Le produit cartésien $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n$ est le sous-ensemble flou ayant pour fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x), \mu_{\tilde{A}_2}(x), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x))$.

1.3.2 Nombre flou de type L-R

Définition 1.4. Un nombre flou \tilde{A} est de type *L-R* s'il existe deux fonctions L et R et des réels m , n , α et β telles que la fonction d'appartenance est donnée par:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & si & x \leq m; \alpha > 0 \\ 1 & si & m \leq x \leq n \\ R\left(\frac{x-n}{\beta}\right) & si & x \geq n; \beta > 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Où:

L (Left) et R (Right) sont des fonctions de référence continues, non-croissantes sur $[0, \infty)$ et telles que $L(0) = R(0) = 1$.

m (resp. n) est la moyenne à gauche (resp. à droite).

α est l'écart à gauche de m . β est l'écart à droite de n .

La représentation d'un nombre flou de type L - R est donnée par $(m, n, \alpha, \beta)_{LR}$ ou bien $(m - \alpha, m, n, n + \beta)_{LR}$.

Remarque 1.2. Il existe plusieurs types de nombres flous de type L - R , lorsque les fonctions de référence L et R sont linéaires, on parle alors de nombres flous de type triangulaire et de type trapézoïdal. Dans notre travail, nous nous intéresserons principalement à ce type particulier de nombres flous.

1.3.3 Nombre flou de type triangulaire

Un nombre flou \tilde{A} est dit de **type triangulaire** noté (a, α, β) (voir figure 1.2) si sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}$ est donnée par:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a + \alpha}{\alpha} & \text{si } a - \alpha \leq x \leq a, \\ 1 & \text{si } x = a, \\ \frac{a + \beta - x}{\beta} & \text{si } a \leq x \leq a + \beta, \end{cases} \quad (1.4)$$

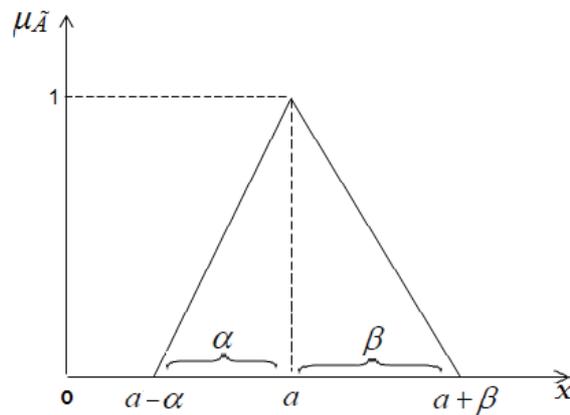


FIG. 1.2 – Nombre flou triangulaire (a, α, β)

Comparaison et arithmétique de nombres flous triangulaires [7]

Soient deux nombres flous triangulaires $\tilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$.

i) Comparaison de deux nombres flous triangulaires

1. Un nombre flou triangulaire est non-négatif si et seulement si $\alpha \geq 0$.
2. $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow a = b, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$.
3. $\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow a \leq b, a - \alpha_1 \leq b - \alpha_2, a + \beta_1 \leq b + \beta_2$.

ii) Opérations arithmétiques sur les nombres flous triangulaires

1. $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a + b, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$.
2. $-\tilde{A} = -(a, \alpha_1, \beta_1) = (-a, \beta_1, \alpha_1)$.
3. $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a - b, \alpha_1 + \beta_2, \beta_1 + \alpha_2)$.
4. $\lambda \otimes \tilde{A} = \begin{cases} (\lambda a, \lambda \alpha_1, \lambda \beta_1) & \text{si } \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}; \\ (\lambda a, -\lambda \beta_1, -\lambda \alpha_1) & \text{si } \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R}; \end{cases}$

1.3.4 Nombre flou de type trapézoïdal

Un nombre flou \tilde{A} est un nombre flou trapézoïdal noté $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$ (voir figure 1.3) si sa fonction d'appartenance est donnée par:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a^L + \alpha}{\alpha} & \text{si } a^L - \alpha \leq x \leq a^L, \\ 1 & \text{si } a^L \leq x \leq a^U, \\ \frac{a^U + \beta - x}{\beta} & \text{si } a^U \leq x \leq a^U + \beta, \end{cases} \quad (1.5)$$

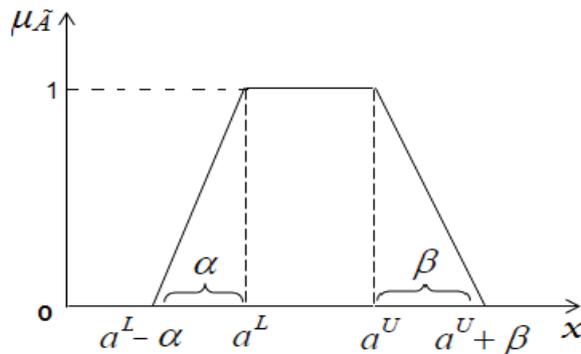


FIG. 1.3 – Nombre flou trapézoïdal $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$

Comparaison et arithmétique de nombres flous trapézoïdaux [7]

Soient deux nombres flous trapézoïdaux $\tilde{A}=(a^L,a^U,\alpha_1,\beta_1)$ et $\tilde{B}=(b^L,b^U,\alpha_2,\beta_2)$.

i) Comparaison de deux nombres flous trapézoïdaux

1. Un nombre flou trapézoïdal est non-négatif si et seulement si $\alpha_1 \geq 0$
2. $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow a^L = b^L, a^U = b^U, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$.
3. $\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow a^L \leq b^L, a^U \leq b^U, a^L - \alpha_1 \leq b^L - \alpha_2, a^U + \beta_1 \leq b^U + \beta_2$.

ii) Opérations arithmétiques sur les nombres flous trapézoïdaux

1. $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a^L + b^L, a^U + b^U, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$,
2. $-\tilde{A} = -(a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1) = (-a^U, -a^L, \beta_1, \alpha_1)$,
3. $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a^L - b^U, a^U - b^L, \alpha_1 + \beta_2, \alpha_2 + \beta_1)$,
4. $\lambda \otimes \tilde{A} = \begin{cases} (\lambda a^L, \lambda a^U, \lambda \alpha_1, \beta_1) & \text{si } \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ (\lambda a^U, \lambda a^L, -\lambda \beta_1, -\alpha_1) & \text{si } \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$

Exemple

Soient deux nombres flous trapézoïdaux présentés dans la figure (1.4)

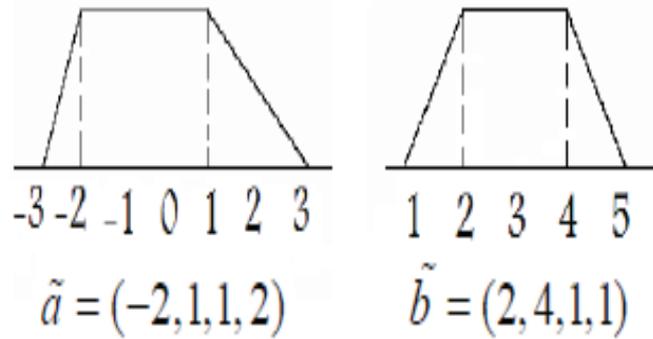


FIG. 1.4 – Deux nombres flous trapézoïdaux \tilde{a} et \tilde{b} .

Les résultats de négation, addition et soustraction sont montrés dans la figure (1.5).

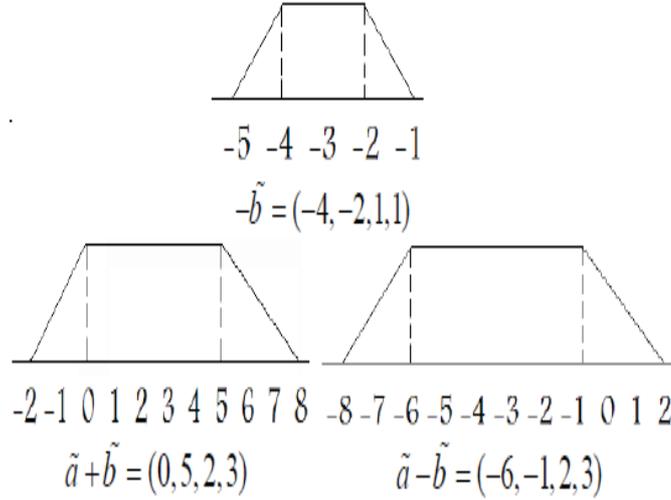


FIG. 1.5 – Résultats de négation, addition et soustraction de nombres flous trapézoïdaux.

Proposition 1.1. Soient $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ et \tilde{A}_4 quatre nombres flous de type L - R , et k un nombre réel, alors:

- $\tilde{A}_1 \leq \tilde{A}_2$, $\tilde{A}_3 \leq \tilde{A}_4 \Rightarrow \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_3 \leq \tilde{A}_2 \oplus \tilde{A}_4$.
- $\tilde{A}_1 \leq \tilde{A}_2 \Rightarrow \begin{cases} k\tilde{A}_1 \leq k\tilde{A}_2 & \text{si } k \geq 0, \\ k\tilde{A}_1 \geq k\tilde{A}_2 & \text{si } k \leq 0, \end{cases}$
- $\tilde{A}_1 \leq \tilde{A}_2, \tilde{A}_2 \leq \tilde{A}_1 \Rightarrow \tilde{A}_1 = \tilde{A}_2$.
- $\tilde{A}_1 \leq \tilde{A}_2, \tilde{A}_2 \leq \tilde{A}_3 \Rightarrow \tilde{A}_1 \leq \tilde{A}_3$.

1.4 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif d'introduire dans un premier temps, les concepts fondamentaux de la théorie des nombres flous. Puis nous avons introduit l'arithmétique des nombres flous de type L - R qui nous servira comme support pour la résolution de notre problème principal au chapitre trois.

Chapitre 2

Programmation Linéaire Multiobjectif

2.1 Introduction

Dans la plupart des problèmes du monde réel, il ne s'agit pas d'optimiser seulement un seul critère mais plutôt d'optimiser simultanément plusieurs critères et qui sont généralement conflictuels.

L'optimisation multiobjectif [3], [4], [6], [11], [13], [21] consiste donc à optimiser simultanément plusieurs fonctions.

La solution d'un problème multiobjectif n'est pas une solution unique, mais un ensemble de solutions connu comme l'ensemble des solutions Pareto optimales. Toute solution de cet ensemble est optimale dans le sens qu'aucune amélioration ne peut être faite sur une composante du vecteur sans dégradation d'au moins une autre composante.

Après toute modélisation d'un problème, vient la question clé qui porte sur la détermination de la ou les solutions optimales satisfaisant un certain nombre de contraintes et la façon de les déterminer.

La principale difficulté que l'on rencontre en optimisation mono-objectif vient du fait que modéliser un problème sous la forme d'une équation unique peut être une tâche difficile. Avoir comme but de se ramener à une seule fonction objectif peut aussi biaiser la modélisation.

L'optimisation multiobjectif autorise ces degrés de liberté qui manquaient en optimisation mono-objectif. Cette souplesse n'est pas sans conséquences sur la démarche à suivre pour chercher un optimum à notre problème enfin modélisé.

La recherche ne nous donnera plus une solution unique mais une multitude de solutions. Ces solutions sont appelées *solutions de Pareto* et l'ensemble de solutions que l'on obtient à la fin de la recherche est la *surface de compromis*.

C'est après avoir trouvé les solutions du problème multiobjectif que d'autres difficultés surviennent : il faut sélectionner une solution dans cet ensemble. La solution qui sera choisie par l'utilisateur va refléter les compromis opérés par le décideur vis-à-vis des différentes fonctions objectif.

2.2 La classification des problèmes d'optimisation

On peut classer les différents problèmes d'optimisation que l'on rencontre dans la vie courante en fonction de leurs caractéristiques :

1. Nombre de variables de décision:

- Une \Rightarrow monovariable.
- Plusieurs \Rightarrow multivariable.

2. Type de la variable de décision:

- Nombre réel continu \Rightarrow continu
- Nombre entier \Rightarrow entier ou discret.
- Permutation sur un ensemble fini de nombres \Rightarrow combinatoire.

3. Type de la fonction objectif:

- Fonction linéaire des variables de décision \Rightarrow linéaire.
- Fonction quadratique des variables de décision \Rightarrow quadratique.
- Fonction non linéaire des variables de décision \Rightarrow non linéaire.

4. Formulation du problème:

- Avec des contraintes \Rightarrow contraint.
- Sans contraintes \Rightarrow non contraint.

2.3 Concepts de base sur l'optimisation multiobjectif

2.3.1 Formulation d'un problème multiobjectif

Pour des raisons de simplicité, nous supposons que toutes les fonctions objectif sont à minimiser (dans le cas de maximisation, il suffit de minimiser $(-F)$). Ainsi, le problème d'optimisation multicritère peut être posé sous la forme suivante:

$$(PMO) \begin{cases} \text{" min " } F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)) \\ \text{s.c. } x \in S \end{cases} \quad (2.1)$$

Où:

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ représente l'action (ou vecteur de décision) avec x_i les variables du problème et n le nombre de ces variables;
- $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$ est le vecteur de fonctions objectif, avec f_i les objectifs (ou critères de décision) et k le nombre d'objectifs ($k \geq 2$);
- S est l'ensemble des solutions réalisables. L'ensemble $D = F(S)$, celui des objectifs correspondants aux solutions de S ;
- Le symbole " " indique que le problème est mathématiquement mal posé, c'est à dire il n'existe en général, aucune solution admissible qui minimise simultanément les k fonctions objectifs.

Définition 2.1. (*hyperplan-frontière*)

1. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n / a^t x = b\}$ représente un *hyperplan* de \mathbb{R}^n ;
2. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n / a^t x \leq b\}$ représente un demi-espace fermé de \mathbb{R}^n dont l'hyperplan correspondant constitue la *frontière*.

Définition 2.2. (*Polyèdre-polytope*)

1. Un *polyèdre* S est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés et/ou d'hyperplans. Un polyèdre est un ensemble convexe fermé.
2. Un *polytope* est un polyèdre borné et non vide.

Remarque 2.1. Si les k critères sont linéaires et les contraintes sont linéaires en x , on parle alors de problème de programmation linéaire multiobjectif (*MOLP*) (Multiple Objective Linear Programming Program) écrit sous la forme suivante:

$$(MOLP) \begin{cases} \min F(x) = (c^1x, c^2x, \dots, c^kx) \\ s.c. x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\} \end{cases} \quad (2.2)$$

Avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $C = (c^1, c^2, \dots, c^k) \in \mathbb{R}^{k \times n}$.

2.3.2 La multiplicité des solutions

Lorsque l'on cherche à obtenir une solution optimale à un problème d'optimisation multiobjectif donné, on s'attend souvent à trouver une solution et une seule. En fait, on rencontre rarement ce cas de figure. La plupart du temps, on trouve une multitude de solutions, du fait que certains des objectifs sont contradictoires.

Donc, quand on résoudra un problème d'optimisation multiobjectif, on obtiendra une grande quantité de solutions. Ces solutions, comme on peut s'en douter, ne seront pas optimales, au sens où elles ne minimiseront pas tous les objectifs du problème.

Un concept intéressant, qui nous permettra de définir les solutions obtenues, est le compromis. En effet, les solutions que l'on obtient lorsque l'on a résolu le problème sont des solutions de compromis. Elles minimisent un certain nombre d'objectifs tout en dégradant les performances sur d'autres objectifs.

2.3.3 Notion de dominance et d'efficacité

La notion d'optimalité la plus généralement admise est celle introduite par Francis Ysidro Edgeworth en 1881 [8], généralisée plus tard au XIX^{ème} siècle, par l'économiste italien Vilfredo PARETO en 1896 [15] qui formula le concept suivant:

"Dans un problème multiobjectif, il existe un équilibre tel que l'on ne peut pas améliorer un objectif sans détériorer au moins un des autres objectifs".

Cet équilibre est appelé optimum de Pareto ou solution efficace.

Définition 2.3. Une solution réalisable $x^* \in S$ est dite **efficace** (ou **Pareto optimale**) si et seulement si il n'existe aucun point $x \in S$ telle que:

$$f_i(x) \leq f_i(x^*), \forall i \in \{1, \dots, k\} \text{ et } f_i(x) < f_i(x^*) \text{ pour au moins un indice } i \in \{1, \dots, k\}.$$

Notons que, si un tel point x existe, x^* est dit dominé et le k -uplet $(f_1(x^*), f_2(x^*), \dots, f_k(x^*))$ est aussi dominé.

– Cette définition peut s’interpréter de la manière suivante:

un vecteur A est meilleur qu’un vecteur B au sens de Pareto si:

- 1) Les composantes de A sont meilleures ou égales que les composantes de B,
- 2) Au moins une composante de A est meilleure que la composante correspondante de B.

Définition 2.4. Une solution réalisable $x^* \in S$ est dite **faiblement efficace** si et seulement s’il n’existe aucun point $x \in S$ telle que:

$$f_i(x) < f_i(x^*), \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}. \quad (2.3)$$

Remarque 2.2. Il est clair que toute solution efficace est faiblement efficace et l’inverse est fausse.

Définition 2.5.

1. **Dominance:** Soient $F(x^*), F(x) \in D = F(S)$ deux vecteurs critères.

On dira que $F(x^*)$ domine $F(x)$ ssi:

$$f_i(x^*) \leq f_i(x) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \text{et} \quad \exists i \in \{1, \dots, k\} \mid f_i(x^*) < f_i(x). \quad (2.4)$$

2. **Dominance forte:** Soient $F(x^*), F(x) \in D = F(S)$ deux vecteurs critères.

On dira que $F(x^*)$ domine fortement $F(x)$ ssi:

$$f_i(x^*) < f_i(x) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}. \quad (2.5)$$

Si $F(x^*)$ domine fortement $F(x)$, alors $F(x^*)$ est meilleur que $F(x)$ sur tous les critères.

Remarque 2.3.

L’idée de dominance se réfère à l’espace des critères. Alors que l’efficacité se réfère aux points de l’espace de décision.

Remarque 2.4.

Lorsque l’on applique la définition de la dominance, on peut définir quatre régions auxquelles on peut attribuer des niveaux de préférence. Ces régions sont représentées à la figure (2.1). Par exemple, si ce graphique est centré sur une solution A et que l’on compare cette solution avec une solution B, on aura les possibilités suivantes :

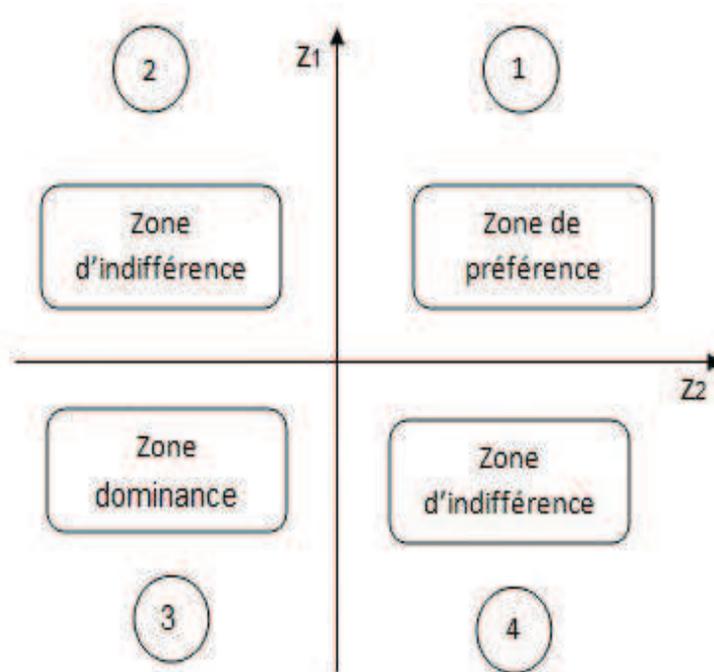


FIG. 2.1 – Les niveaux de préférence dans la relation de dominance.

- si la solution B se trouve dans le quadrant 1, alors la solution A est préférée à la solution B,
- si la solution B se trouve dans le quadrant 3, alors la solution A est dominée par la solution B,
- si la solution B se trouve dans l'un des quadrants 2 ou 4, alors on ne peut pas se prononcer sur la préférence de A par rapport à B ou de B par rapport à A.

Définition 2.6. Ensemble Pareto et Surface de Pareto

- 1) L'ensemble des solutions optimales au sens de Pareto s'appelle ensemble de compromis ou ensemble des solutions non-dominées ou ensemble des solutions efficaces ou encore ensemble Pareto.
- 2) L'image de l'ensemble Pareto dans l'espace des critères est appelé la surface de Pareto (ou le front de Pareto dans le cas de problème bi-objectif), ou également frontière de Pareto.

2.3.4 Points particuliers

Définition 2.7. (*Point idéal*)

Le point idéal est un vecteur de \mathbb{R}^k dont les coordonnées sont les valeurs minimales des objectifs pris séparément.

$$M_i = \min_{x \in S} f_i(x), \quad i \in \{1, \dots, k\} \quad (2.6)$$

Remarque 2.5. Le point idéal ne correspond pas à une solution réalisable car si c'était le cas, cela sous entendrait que les objectifs ne sont pas contradictoires et qu'une solution optimisant un objectif, optimise simultanément tous les autres, ce qui ramènerait le problème à un problème ayant une seule solution Pareto optimale.

Définition 2.8. (*Point utopique*)

De ce point idéal peut être défini le point utopique Z^U de la façon suivante :

$$Z^U = M_i - \varepsilon \times v \quad (2.7)$$

où $\varepsilon > 0$ et v est le vecteur unitaire ($v = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$).

Il est clair, de par sa définition, que ce point n'est pas réalisable.

Définition 2.9. (*Point anti-idéal*)

Le point anti-idéal est un vecteur de \mathbb{R}^k dont les coordonnées sont les valeurs maximales des objectifs pris séparément.

$$N_i = \max_{x \in S} f_i(x), \quad i \in \{1, \dots, k\} \quad (2.8)$$

Définition 2.10. (*Point nadir*)

A la différence du point idéal qui représente les bornes inférieures de chaque objectif dans l'espace faisable, le vecteur nadir z^{nad} correspond à leurs bornes supérieures sur la surface de Pareto et non pas dans tout l'espace faisable S .

Soit $y^N = (y_1^N, \dots, y_k^N)$ est point Nadir ssi

$$Y_i = \max_{x \in X_{Pareto}} f_i(x), \quad i \in \{1, \dots, k\} \quad (2.9)$$

Remarque 2.6.

1. Le point idéal est utilisé dans beaucoup de méthodes d'optimisation comme point de référence.
2. Le point nadir sert à restreindre l'espace de recherche, il est utilisé dans certaines méthodes d'optimisation interactives.
3. Par exemple, on peut utiliser le point idéal et le point nadir pour la normalisation des valeurs des objectifs par:

$$f_i^{norm} = \frac{f_i - M_i}{m_i - M_i} \tag{2.10}$$

Une visualisation de l'ensemble de ces définitions est donnée sur la figure 2.2.

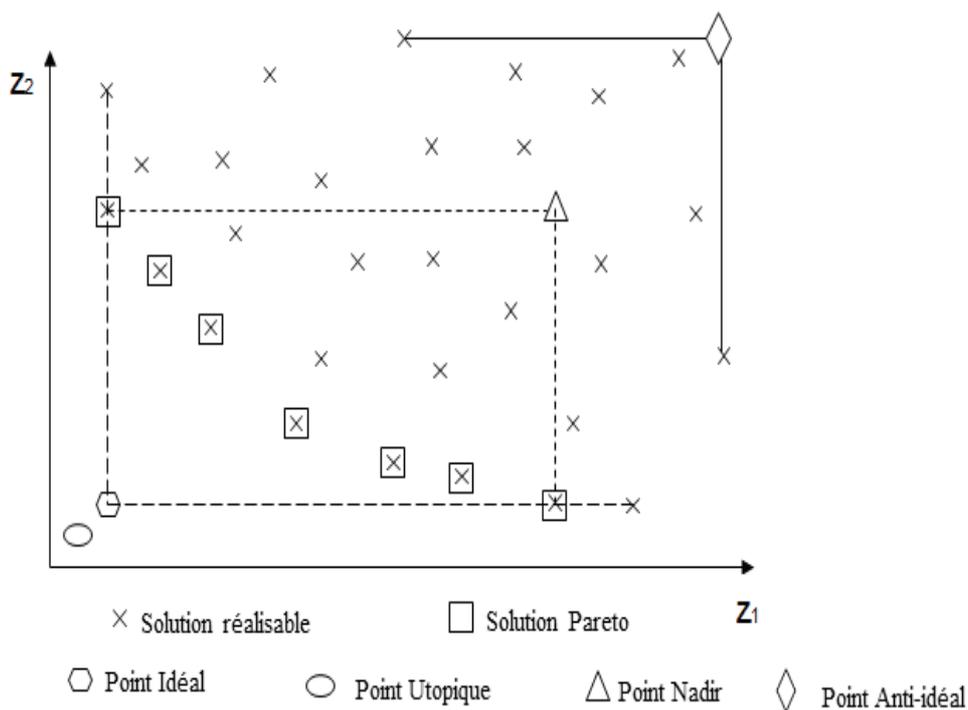


FIG. 2.2 – Illustration des différentes définitions.

Définition 2.11. (Fonction convexe)

La fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe sur l'ensemble S convexe non vide de \mathbb{R}^n si et seulement si:

$$\forall x, y \in S \text{ et } \forall \lambda \in [0,1] \text{ on a : } f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (2.11)$$

Définition 2.12. (Convexité)

Un ensemble S est convexe si, pour n'importe quels deux points distincts de cet ensemble notés x_1, x_2 , le segment qui relie ces deux points est contenu dans l'ensemble S c'est à dire

$$\forall x_1, x_2 \in S \text{ et } \forall \lambda \in [0,1], \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S \quad (2.12)$$

La convexité est le premier indicateur de la difficulté du problème. En effet, plusieurs méthodes d'optimisation sont incapables de résoudre d'une façon optimale des problèmes non convexes.

2.4 Approche de résolution

2.4.1 Difficulté d'un problème multiobjectif

La difficulté principale d'un problème multiobjectif est qu'il n'existe pas de définition de la solution optimale. Le décideur peut simplement exprimer le fait qu'une solution est préférable à une autre mais il n'existe pas une solution meilleure que toutes les autres. Dès lors résoudre un problème multiobjectif ne consiste pas à rechercher la solution optimale mais l'ensemble des solutions satisfaisantes pour lesquelles, nous ne pourrions pas effectuer une opération de clacement.

Les méthodes de résolution de problème multiobjectif sont donc des méthodes d'aide à la décision car le choix final sera laissé au décideur.

Pour répondre à ce problème la communauté scientifique a adapté deux types de comportement. Le premier est de ramener un problème multiobjectif à un problème simple à objectif au risque d'enlever toute signification au problème. Le second comportement est de tenter d'apporter des réponses au problème au prenant en compte l'ensemble des critères.

La différence entre ces deux démarches s'exprime dans le schéma ci-dessous fig (2.3). Soit le décideur intervient dès le début de la définition du problème, en exprimant ses

préférences, afin de transformer un problème multiobjectif en un problème simple objectif. Soit le décideur effectue son choix dans l'ensemble des solutions proposées par le solveur multiobjectif.

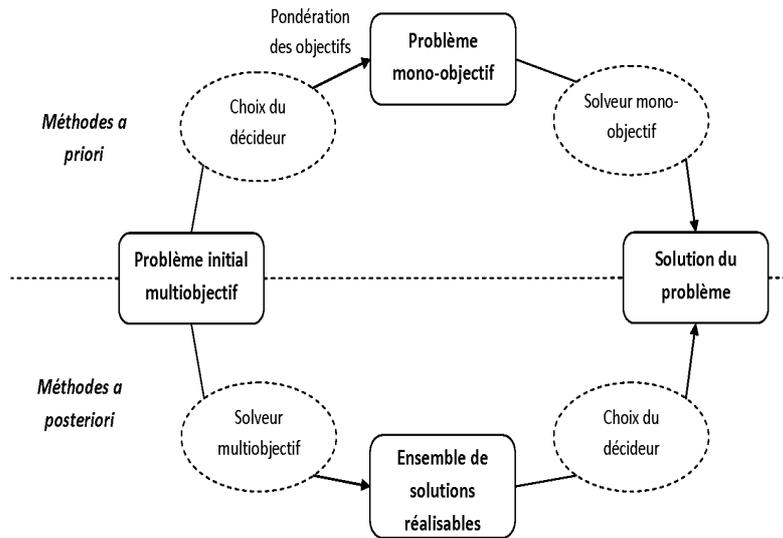


FIG. 2.3 – Quel mode de résolution choisir?

2.4.2 Méthode de résolution: Agrégation pondérée

C'est l'une des premières approches utilisées pour résoudre les problèmes multiobjectif (PMO) [12]. Elle consiste à transformer un problème multiobjectif en un problème mono-objectif. Les coefficients sont généralement choisis en fonction de l'importance relative des objectifs. Soit le problème mono-objectif linéaire suivant:

$$(P_\lambda) \begin{cases} \min Z_\lambda(x) = \min \sum_{i=1}^k \lambda_i c^i x \\ \text{s.c. } x \in S \\ \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k \text{ et } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

La résolution du problème linéaire multiobjectif (*MOLP*) (2.2) consiste à résoudre le problème linéaire paramétrique (2.13).

Cette approche a l'avantage de pouvoir réutiliser tous les algorithmes classiques dédiés aux problèmes d'optimisation à un seul objectif tels que la méthode du simplexe [1]. Certains résultats théoriques clarifiant le rapport entre la solution optimale du problème (2.13) et les solutions Pareto-optimales du problème (2.2) ont été établis dans [5], [14].

Notamment, nous avons les deux théorèmes suivant:

Théorème 2.1. *Si tous les poids λ_i sont positifs ($\lambda_i > 0, \forall i = 1, \dots, k$), la solution optimale du problème (P_λ) est une solution Pareto-optimale du problème linéaire multiobjectif (2.2).*

Preuve

Soit $x^* \in S$ solution optimale de (P_λ) avec $\lambda_i > 0$. Supposons que x^* n'est pas Pareto optimale pour (2.2) \Leftrightarrow il \exists une solution $x \in S$ tq $f_i(x) \leq f_i(x^*) \ i = 1, \dots, k$ et $f_j(x) < f_j(x^*)$ pour au moins un $j \in \{1, \dots, k\}$. Puisque les $\lambda_i > 0, \forall i = 1, \dots, k$ nous avons

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) < \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x^*)$$

Ceci contredit le fait que x^* est une solution optimale de (P_λ) donc x^* est Pareto optimale.

Théorème 2.2. *L'unique solution optimale du problème (P_λ) est Pareto optimale pour le problème (2.2).*

Preuve

Soit $x^* \in S$ l'unique solution optimale de (P_λ). Supposons que x^* n'est pas Pareto optimale pour le problème linéaire multiobjectif (2.2). Dans ce cas il \exists une solution $x \in S$ tq $f_i(x) \leq f_i(x^*) \ \forall i = 1, \dots, k$ et $f_j(x) < f_j(x^*)$ pour au moins un $j \in \{1, \dots, k\}$. Comme $\lambda_i \geq 0$ on a:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x^*) \dots \dots \dots (1)$$

D'un autre côté, l'unicité de x^* signifie que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x^*) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(\tilde{x}) \ \forall \tilde{x} \in S \dots \dots \dots (2)$$

Les inégalités (1) et (2) sont contradictoires donc x^* est Pareto optimale pour (2.2).

La figure (2.4) illustre le fonctionnement de la méthode d'agrégation. Fixer un vecteur poids revient à trouver un hyperplan dans l'espace objectif (une droite pour un problème bi-critères) avec une orientation fixée. La solution Pareto optimale est le point où l'hyperplan possède une tangente commune avec l'espace réalisable (le point X dans la figure (2.4)).

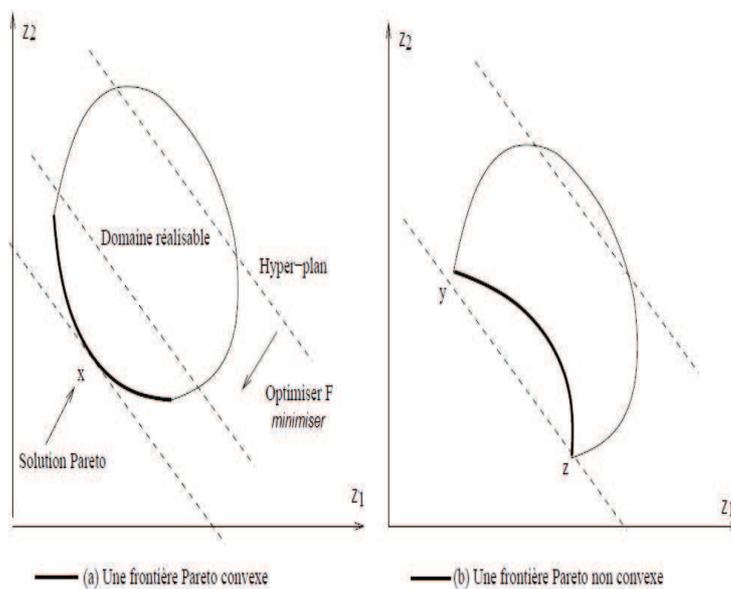


FIG. 2.4 – La méthode d'agrégation

Les résultats obtenus dans la résolution du problème d'agrégation pondéré (2.13) dépendent fortement des paramètres choisis pour le vecteur de poids λ . Les poids λ_i doivent aussi être choisis en fonction des préférences associées aux objectifs, ce qui est une tâche délicate. Ainsi, une approche généralement utilisée est de résoudre le problème (2.13) avec différentes valeurs de λ .

Difficultés de cette méthode:

Cette méthode est simple à mettre en œuvre et elle est d'une grande efficacité mais les difficultés essentielles de cette approche sont:

- 1) Comment le décideur détermine-t-il les poids de chaque critère?
- 2) Comment exprimer l'interaction entre les différents critères?

Choix des poids des objectifs:

Une solution est d'utiliser une combinaison linéaire des objectifs et de faire varier les poids de façon à constater l'influence de tel ou tel objectif sur le résultat. Cette approche est facile à implémenter mais tous les résultats obtenus appartiennent à des zones convexes de l'espace des objectifs réalisables Fig(2.4). Les solutions potentielles situées dans des portions concaves sont oubliées.

Comme le problème (2.2) est linéaire donc il est convexe d'où le théorème suivant:

Théorème 2.3. (Geoffrion, 1968) [9]

$x^0 \in S$ est une solution optimale pour le problème paramétrique (2.13) si et seulement si x^0 est une solution efficace pour le problème multiobjectif (PLMO) (2.2).

2.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif de présenter dans un premier temps les principales définitions nécessaires à la présentation des problèmes d'optimisation multiobjectif, le concept de dominance au sens de Pareto et le concept d'efficacité. Puis nous avons présenté une méthode scalaire dite méthode d'agrégation des critères que nous utiliserons au chapitre 3 pour la résolution du problème principal linéaire flou.

Chapitre 3

Programmation linéaire floue

3.1 Introduction

En programmation linéaire, les données sont supposées connues avec précision. Dans le cas où ces dernières sont mal connues ou imprécises de nature floue, nous avons alors un programme linéaire flou.

3.2 Programme linéaire floue unicritère

Un problème de Programmation Linéaire Floue Unicritère (Fuzzy Linear Programming Problem) (*FLPP*) est donné sous la forme suivante:

$$(P_F) \begin{cases} \max Z(x) = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j \otimes x_j \\ \text{s.c.} \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \otimes x_j \leq \tilde{b}_i & , \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & , \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.1)$$

Où \tilde{c}_j , \tilde{a}_{ij} et \tilde{b}_i sont des nombres flous $\forall i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$.

3.2.1 Cas où les nombres flous sont triangulaires

Les nombres flous que nous considérons dans le problème (P_F) sont de type triangulaire [18], c'est à dire:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_j &= (c_j, \gamma_j, \theta_j) & , j = 1, \dots, n \\ \tilde{a}_{ij} &= (a_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}) & , i = 1, \dots, m \\ \tilde{b}_i &= (b_i, \rho_i, \eta_i) \end{aligned}$$

Le problème (P_F) devient alors:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max Z(x) = \sum_{j=1}^n (c_j, \gamma_j, \theta_j) \otimes x_j \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^n (a_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}) \otimes x_j \leq (b_i, \rho_i, \eta_i) & , \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & , \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max Z(x) = (\sum_{j=1}^n c_j x_j, \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j, \sum_{j=1}^n \theta_j x_j) \\ \text{s.c. } (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j, \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j) \leq (b_i, \rho_i, \eta_i) & , \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & , \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.3)$$

En utilisant les opérations arithmétiques sur les nombres flous triangulaires définies dans la sous-section (1.3.3) du chapitre 1, le problème (3.3) est converti en un problème linéaire multiobjectif équivalent à trois fonctions objectif suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max (Z_1(x), Z_2(x), Z_3(x)) \\ \text{Où } Z_1(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j, Z_2(x) = \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j, Z_3(x) = \sum_{j=1}^n \theta_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad ; \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \alpha_{ij}) x_j \leq (b_i - \rho_i) ; \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \beta_{ij}) x_j \leq (b_i + \eta_i) ; \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Le problème linéaire multiobjectif (3.4) sera résolu par la méthode d'agrégation pondérée étudiée au chapitre 2.

Exemple numérique

Soit à résoudre le problème linéaire flou suivant:

$$(P_f) \begin{cases} \max Z(x) = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \\ \text{s.c } \tilde{a}_{11} x_1 + \tilde{a}_{12} x_2 \leq \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{21} x_1 + \tilde{a}_{22} x_2 \leq \tilde{b}_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max Z(x) = (10,3,4)x_1 + (25,5,10)x_2 \\ \text{s.c } (3,2,1)x_1 + (6,4,1)x_2 \leq (13,5,2) \\ (4,1,2)x_1 + (6,5,4)x_2 \leq (7,4,2) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max (10x_1 + 25x_2, 3x_1 + 5x_2, 4x_1 + 10x_2) \\ \text{s.c } (3x_1 + 6x_2, 2x_1 + 4x_2, x_1 + x_2) \leq (13,5,2) \\ (4x_1 + 6x_2, x_1 + 5x_2, 2x_1 + 4x_2) \leq (7,4,2) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max (10x_1 + 25x_2, 3x_1 + 5x_2, 4x_1 + 10x_2) \\ \text{s.c } 3x_1 + 6x_2 \leq 13 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 7 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 10x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

En utilisant la méthode d'agrégation pondérée au problème (3.8), nous obtenons:

$$\begin{cases} \max (\lambda_1(10x_1 + 25x_2) + \lambda_2(3x_1 + 5x_2) + \lambda_3(4x_1 + 10x_2)) \\ \text{s.c } 3x_1 + 6x_2 \leq 13 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 7 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 10x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

En variant les valeurs des λ avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ et en utilisant la méthode du simplexe [1], nous obtenons le tableau (3.1) suivant:

	λ_1	λ_2	λ_3	(x_1^*, x_2^*)
1	1/4	1/4	1/2	(0 , 0.9)
2	1/4	1/2	1/4	(0 , 0.9)
3	1/2	1/4	1/4	(0 , 0.9)
4	1/3	1/3	1/3	(0 , 0.9)

TAB. 3.1 – *Tableau 1*

Conclusion

La solution optimale $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (0, 0.9)$ du problème (3.9) est une solution optimale du problème initial (P_f) et sa valeur optimale floue est:

$$Z(x^*) = Z(0, 0.9) = ((10, 3, 4) \times 0 + (25, 5, 10) \times 0.9 = (22.5, 4.5, 9)).$$

3.2.2 Cas où les nombres flous sont trapézoïdaux

Quand les coefficients de (P_F) sont de type trapézoïdal le problème (P_F) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{j=1}^n (c_j^L, c_j^U, \gamma_j, \theta_j) \otimes x_j \\ \sum_{j=1}^n (a_{ij}^L, a_{ij}^U, \alpha_{ij}, \beta_{ij}) \otimes x_j \leq (b_i^L, b_i^U, \rho_i, \eta_i) \quad , i = 1, \dots, n \\ x_j \geq 0 \quad , j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (3.10)$$

En utilisant les opérations arithmétiques sur les nombres flous trapézoïdaux définies dans la sous-section (1.3.4) du chapitre 1, le problème (3.10) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max (Z_1(x), Z_2(x), Z_3(x), Z_4(x)) \quad \text{où} \\ Z_1(x) = \sum_{j=1}^n c_j^L x_j, Z_2(x) = \sum_{j=1}^n c_j^U x_j, Z_3(x) = \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j, Z_4(x) = \sum_{j=1}^n \theta_j x_j \\ s.c \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}^L x_j \leq b_i^L, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}^U x_j \leq b_i^U, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n (a_{ij}^L - \alpha_{ij}) x_j \leq (b_i^L - \rho_i), \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n (a_{ij}^U + \beta_{ij}) x_j \leq (b_i^U + \eta_i), \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Le problème obtenu (3.11) est un problème linéaire multiobjectif à quatre fonctions objectif dont la résolution se fera par la méthode d'agrégation.

Exemple numérique

Soit à résoudre le problème linéaire flou suivant:

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max Z(x) = (2,3,1,1)x_1 + (3,4,1,2)x_2 \\ s.c \quad (1,2,1,1)x_1 + (2,3,1,2)x_2 \leq (5,6,2,2) \\ \quad (2,3,1,3)x_1 + (1,2,1,1)x_2 \leq (4,6,2,1) \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max (2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 4x_2, x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \\ s.c \quad (x_1 + 2x_2, 2x_1 + 3x_2, x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \leq (5,6,2,2) \\ \quad (2x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2, x_1 + x_2, 3x_1 + x_2) \leq (4,6,2,1) \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max (2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 4x_2, x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \\ \text{s.c } x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 8 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

En utilisant la méthode d'agrégation pondérée au problème (3.14), nous obtenons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max (\lambda_1(2x_1 + 3x_2) + \lambda_2(3x_1 + 4x_2) + \lambda_3(x_1 + x_2) + \lambda_4(x_1 + 2x_2)) \\ \text{s.c } x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 8 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

En variant les valeurs des λ avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ et en utilisant la méthode du simplexe [1], nous obtenons le tableau (3.2) suivant:

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	(x_1^*, x_2^*)
1	1/4	1/4	1/4	1/4	(0.52, 1.28)
2	3/8	1/4	1/4	1/8	(0.52, 1.28)
3	1/6	1/3	1/6	1/3	((0.52, 1.28)

TAB. 3.2 – Tableau 1

3.3 Programmation linéaire floue multiobjectif

La forme générale d'un problème de Programmation Linéaire Multiobjectif Flou (Fuzzy Multiobjective Linear Programming Problem) (*FMOLPP*) est donnée comme suit:

$$(FMOLPP) \begin{cases} \max (Z^1(x), Z^2(x), \dots, Z^k(x)) \\ \text{Où } Z^l(x) = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j^l x_j \quad , \quad l = 1, \dots, k \\ \text{s.c } \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i \quad , \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.16)$$

3.3.1 Solution technique pour (*FMOLPP*)

Considérons un problème d'optimisation multiobjectif avec k fonctions objectif Z_1, Z_2, \dots, Z_k représentées par des ensembles flous $\tilde{F}_l, l = 1, \dots, k$ et m fonctions contraintes $\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i, i = 1, \dots, m$ représentées par des ensembles flous $\tilde{G}_i, i = 1, \dots, m$.

En généralisant l'analogie d'une fonction objectif unique, la décision floue résultante est donnée par:

$$\tilde{F}_1 \cap \tilde{F}_2 \cap \dots \cap \tilde{F}_k \cap \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \dots \cap \tilde{G}_m$$

et dont la fonction d'appartenance est définie par:

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min_{l,i} (\mu_{\tilde{F}_l}(x) , \mu_{\tilde{G}_i}(x))$$

Une solution optimale x^* est celle dont la fonction d'appartenance de la décision floue résultante \tilde{D} est maximale c'est à dire $\mu_{\tilde{D}}(x^*) = \max \mu_{\tilde{D}}(x)$.

3.3.2 (*FMOLPP*) avec des nombres flous triangulaires

Dans le cas où tous les coefficients du problème (3.16) sont des nombres flous de type triangulaires alors le nombre d'objectif est multiplié par 3 d'après le résultat de la sous-section (3.2.1). Le problème résultant aura $3 \times k$ fonctions objectif qui sera toujours résolu par la méthode d'agrégation.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max [(Z_1^1(x), Z_2^1(x), Z_3^1(x)) , \dots , (Z_1^k(x), Z_2^k(x), Z_3^k(x))] \\ \text{Où } Z_1^l(x) = \sum_{j=1}^n c_j^l x_j , Z_2^l(x) = \sum_{j=1}^n \gamma_j^l x_j , Z_3^l(x) = \sum_{j=1}^n \theta_j^l x_j \quad ; \quad l = 1, \dots, k \\ \text{s.c } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad , \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \alpha_{ij}) x_j \leq (b_i - \rho_i) \quad , \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \beta_{ij}) x_j \leq (b_i + \eta_i) \quad , \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Exemple numérique

Soit le problème bi-objectif suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(Z_1(x), Z_2(x)) \\ \text{Où } Z_1(x) = (10, 3, 4)x_1 + (25, 5, 9)x_2 \\ \quad Z_2(x) = (14, 4, 11)x_1 + (35, 10, 5)x_2 \\ \text{s.c } (3, 2, 1)x_1 + (6, 4, 1)x_2 \leq (13, 5, 2) \\ \quad (4, 1, 2)x_1 + (6, 5, 4)x_2 \leq (7, 4, 2) \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.18)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max [(10x_1 + 25x_2 , 3x_1 + 5x_2 , 4x_1 + 9x_2); \\ \quad (14x_1 + 35x_2 , 4x_1 + 10x_2 , 11x_1 + 5x_2)] \\ \text{s.c } 3x_1 + 6x_2 \leq 13 \\ \quad x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ \quad 4x_1 + 7x_2 \leq 15 \\ \quad 4x_1 + 6x_2 \leq 7 \\ \quad 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ \quad 6x_1 + 10x_2 \leq 9 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.19)$$

En utilisant la méthode d'agrégation pondérée, nous résolvons le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(\lambda_1(10x_1 + 25x_2) + \lambda_2(3x_1 + 5x_2) + \lambda_3(4x_1 + 9x_2) + \lambda_4(14x_1 + 35x_2) \\ \quad + \lambda_5(4x_1 + 10x_2) + \lambda_6(11x_1 + 5x_2)) \\ \text{s.c } 3x_1 + 6x_2 \leq 13 \\ \quad x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ \quad 4x_1 + 7x_2 \leq 15 \\ \quad 4x_1 + 6x_2 \leq 7 \\ \quad 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ \quad 6x_1 + 10x_2 \leq 9 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

En variant les valeurs des λ et en utilisant la méthode du simplexe nous obtenons le tableau (3.3) suivant:

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	(x_1^*, x_2^*)
1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	(0 , 0.9)
2	1/4	3/16	1/8	1/8	3/16	1/8	(0 , 0.9)
3	1/6	1/12	1/3	1/12	1/6	1/6	(0 , 0.9)
4	1/10	1/10	1/10	1/5	1/5	3/10	(0 , 0.9)

TAB. 3.3 – *Tableau 2*

La solution optimale (0,0.9) du problème (3.20) est une solution Pareto optimale du problème (3.18) et sa valeur optimale floue est:

$$\begin{aligned} Z_1(x^*) &= (25,5,10) \times 0.9 = (19.8,4.5,9) \\ Z_2(x^*) &= (35,10,5) \times 0.9 = (32.5,9,4.5) \end{aligned}$$

3.3.3 (FMOLPP) avec des nombres flous trapézoïdaux

Quand tous les coefficients du problème (3.16) sont trapézoïdaux alors le problème linéaire multiobjectif à k fonctions objectif devient à $4 \times k$ fonctions objectif dont la résolution se fera par la méthode d'agrégation des poids.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \max [(Z_1^1(x), Z_2^1(x), Z_3^1(x), Z_4^1(x)) , \dots , (Z_1^k(x), Z_2^k(x), Z_3^k(x), Z_4^k(x))] \\
 \text{Où } Z_1^l(x) = \sum_{j=1}^n (c_j^L)^l x_j , Z_2^l(x) = \sum_{j=1}^n (c_j^U)^l x_j , Z_3^l(x) = \sum_{j=1}^n \gamma_j^l x_j , Z_4^l(x) = \sum_{j=1}^n \theta_j^l x_j \\
 \text{s.c } \sum_{j=1}^n a_{ij}^L x_j \leq b_i^L \quad , \quad i = 1, \dots, m \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij}^U x_j \leq b_i^U \quad , \quad i = 1, \dots, m \\
 \sum_{j=1}^n (a_{ij}^L - \alpha_{ij}) x_j \leq (b_i^L - \rho_i) \quad , \quad i = 1, \dots, m \\
 \sum_{j=1}^n (a_{ij}^U + \beta_{ij}) x_j \leq (b_i^U + \eta_i) \quad , \quad i = 1, \dots, m \\
 x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \text{ et } l = 1, \dots, k
 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

3.4 Problème linéaire flou à variables floues

Dans cette section, nous considérons un problème linéaire flou où tous les coefficients sont des nombres flous triangulaires y compris le vecteur de variables de décision (Fully Fuzzy Linear Programming Problem).

3.4.1 Fonction *Ranking* \mathcal{R}

Une approche efficace pour comparer les nombres flous est l'utilisation des fonctions *Ranking* ou fonctions de classement. Une fonction *Ranking* \mathcal{R} est définie de l'ensemble des nombres flous $F(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} où l'ordre naturel des nombres existe [2], [17].

Propriétés

Soient \tilde{a} et \tilde{b} deux nombres flous, on définit un ordre sur $F(\mathbb{R})$ par:

$$\tilde{a} \underset{\mathcal{R}}{\geq} \tilde{b} \text{ si et seulement si } \mathcal{R}(\tilde{a}) \geq \mathcal{R}(\tilde{b}) \quad (3.22)$$

$$\tilde{a} \underset{\mathcal{R}}{>} \tilde{b} \text{ si et seulement si } \mathcal{R}(\tilde{a}) > \mathcal{R}(\tilde{b}) \quad (3.23)$$

$$\tilde{a} \underset{\mathcal{R}}{=} \tilde{b} \text{ si et seulement si } \mathcal{R}(\tilde{a}) = \mathcal{R}(\tilde{b}) \quad (3.24)$$

$$\tilde{a} \underset{\mathcal{R}}{\leq} \tilde{b} \text{ si et seulement si } \tilde{b} \underset{\mathcal{R}}{\geq} \tilde{a} \quad (3.25)$$

Lemme 3.1. Soit \mathcal{R} une fonction Ranking linéaire. Alors

(i) $\tilde{a} \underset{\mathcal{R}}{\geq} \tilde{b} \Leftrightarrow \tilde{a} - \tilde{b} \underset{\mathcal{R}}{\geq} 0 \Leftrightarrow -\tilde{b} \underset{\mathcal{R}}{\geq} -\tilde{a}$

(ii) Si $\tilde{a} \underset{\mathcal{R}}{\geq} \tilde{b}$ et $\tilde{c} \underset{\mathcal{R}}{\geq} \tilde{d}$ alors $\tilde{a} + \tilde{c} \underset{\mathcal{R}}{\geq} \tilde{b} + \tilde{d}$

(iii) $\mathcal{R}(k\tilde{a} + \tilde{b}) = k\mathcal{R}(\tilde{a}) + \mathcal{R}(\tilde{b})$ pour tout $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$ et tout $k \in \mathbb{R}$.

Remarque 3.1. Comme suggestion d'une fonction linéaire Ranking d'un nombre flou triangulaire $\tilde{a} = (a, \alpha, \beta)$ est de prendre par exemple [2].

$$\mathcal{R}(\tilde{a}) = a + \frac{\beta - \alpha}{4} \quad (3.26)$$

Définition 3.1. On dira que le nombre réel a correspond au nombre flou triangulaire $\tilde{a} = (a, \alpha, \beta)$ par rapport à la fonction linéaire Ranking \mathcal{R} si:

$$a = \mathcal{R}(\tilde{a}) \quad (3.27)$$

3.4.2 Résultats théoriques

Soit un problème linéaire flou correspondant à la relation \mathcal{R} suivant:

$$(P_{\mathcal{R}}) \left\{ \begin{array}{ll} \max_{\mathcal{R}} \tilde{z}(x) \equiv \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j & \\ s.c \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \underset{\mathcal{R}}{\leq} \tilde{b}_i & i = 1, \dots, m_0 \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \underset{\mathcal{R}}{\geq} \tilde{b}_i & i = m_0 + 1, \dots, m_1 \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \underset{\mathcal{R}}{=} \tilde{b}_i & i = m_1 + 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (3.28)$$

où $\underset{\mathcal{R}}{=}$, $\underset{\mathcal{R}}{\leq}$ et $\underset{\mathcal{R}}{\geq}$ signifient égalité et inégalité par rapport à la fonction Ranking \mathcal{R} .

Définition 3.2. Solution \mathcal{R} -optimale

x^* est une solution réalisable \mathcal{R} -optimale pour le problème $(P_{\mathcal{R}})$ si et seulement si $\tilde{z}(x^*) \underset{\mathcal{R}}{\geq} \tilde{z}(x)$ pour tout x réalisable.

Définition 3.3. Deux problèmes (P) et (P') sont équivalents s'ils ont même domaine réalisable et une solution optimale de l'un est solution optimale de l'autre.

Théorème 3.1. *Le problème $(P_{\mathcal{R}})$ et le problème suivant (P_D) sont équivalents*

$$(P_D) \begin{cases} \max z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ s.c \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \dots, m_0 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i & i = m_0 + 1, \dots, m_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & i = m_1 + 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.29)$$

Preuve.

1°) Soient $S_{\mathcal{R}}$ et S_D les domaines réalisables des problèmes $(P_{\mathcal{R}})$ et (P_D) respectivement. Montrons que $S_{\mathcal{R}} = S_D$.

$$\text{Soit } x \in S_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \Theta_{\mathcal{R}} \tilde{b}_i \Leftrightarrow \mathcal{R} \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \right) \Theta_{\mathcal{R}} (\tilde{b}_i) \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^n \mathcal{R}(\tilde{a}_{ij}) x_j \right) \Theta_{\mathcal{R}} (\tilde{b}_i)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \Theta b_i \Leftrightarrow x \in S_D \text{ donc } S_{\mathcal{R}} = S_D$$

où $\Theta_{\mathcal{R}} = \left\{ \leq_{\mathcal{R}}, \geq_{\mathcal{R}}, =_{\mathcal{R}} \right\}$ et $\Theta = \{ \leq, \geq, = \}$.

2°) Supposons que x^* est une solution réalisable \mathcal{R} -optimale pour le problème $(P_{\mathcal{R}})$ donc

$$\forall x \in S_{\mathcal{R}}, \text{ nous avons } \tilde{z}(x^*) \geq_{\mathcal{R}} \tilde{z}(x) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j^* \geq_{\mathcal{R}} \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{R} \left(\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j^* \right) \geq_{\mathcal{R}} \left(\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \right) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \mathcal{R}(\tilde{c}_j) x_j^* \geq \sum_{j=1}^n \mathcal{R}(\tilde{c}_j) x_j \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n c_j x_j^* \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j \Leftrightarrow$$

$$z(x^*) \geq z(x) \text{ pour tout } x \in S_D \Leftrightarrow x^* \text{ est solution optimale pour } (P_D).$$

Définition 3.4. [17] Multiplication de deux nombres flous triangulaires

Soient $\tilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$ deux nombres flous triangulaires, alors on a:

1) Si \tilde{A} et \tilde{B} sont positifs,

$$(a, \alpha_1, \beta_1) \otimes (b, \alpha_2, \beta_2) = (ab, a\alpha_2 + b\alpha_1, a\beta_2 + b\beta_1).$$

2) Si \tilde{A} est négatif et \tilde{B} positif,

$$(a, \alpha_1, \beta_1) \otimes (b, \alpha_2, \beta_2) = (ab, b\alpha_1 - a\beta_2, b\beta_1 - a\alpha_2).$$

3) Si \tilde{A} et \tilde{B} sont négatifs,

$$(a, \alpha_1, \beta_1) \otimes (b, \alpha_2, \beta_2) = (ab, -a\beta_2 - b\beta_1, -a\alpha_2 - b\alpha_1).$$

3.4.3 Problème flou à variables de décision floues

Mathématiquement, un problème linéaire flou dont tous les coefficients sont des nombres flous y compris les variables de décision (Fully Fuzzy Linear Programming Problem) correspondant à la fonction ranking \mathcal{R} s'écrit:

$$(P_{\mathcal{FF}}) \begin{cases} \max_{\mathcal{R}} \tilde{z}(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j \tilde{x}_j \\ s.c \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \tilde{x}_j \Theta_{\mathcal{R}} \tilde{b}_i \quad i = 1, \dots, m \\ \tilde{x}_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.30)$$

Remarque 3.2. Tous les coefficients flous considérés dans le problème (3.30) seront des nombres flous triangulaires positifs.

Le problème $(P_{\mathcal{FF}})$ s'écrit alors:

$$\begin{cases} \max_{\mathcal{R}} \tilde{z}(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^n (c_j, \gamma_j, \theta_j) \otimes (x_j, v_j, \omega_j) \\ s.c \sum_{j=1}^n (a_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}) \otimes (x_j, v_j, \omega_j) \Theta_{\mathcal{R}} (b_i, \rho_i, \eta_i) \quad , i = 1, \dots, m \\ (x_j, v_j, \omega_j) \geq 0 \quad , j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.31)$$

3.4.4 Problème déterministe correspondant

(1) En utilisant la définition (3.4) de la multiplication de deux nombres flous triangulaires positifs. Le problème (3.31) devient:

$$\begin{cases} \max_{\mathcal{R}} \mathcal{R} \left(\sum_{j=1}^n c_j x_j, \sum_{j=1}^n c_j v_j + \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j, \sum_{j=1}^n c_j \omega_j + \sum_{j=1}^n \theta_j x_j \right) \\ s.c \\ \mathcal{R} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j, \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j \right) \Theta_{\mathcal{R}} (b_i, \rho_i, \eta_i) \\ (x_j, v_j, \omega_j) \geq 0 \quad , j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.32)$$

(2) En utilisant la définition de la fonction Ranking \mathcal{R} , le problème (3.32) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \left(\frac{4 \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n c_j \omega_j + \sum_{j=1}^n \theta_j x_j - \sum_{j=1}^n c_j v_j - \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j}{4} \right) \\ s.c \\ \left(\frac{4 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j - \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j}{4} \right) \ominus \frac{4b_i + \eta_i - \rho_i}{4} \\ (x_j, v_j, \omega_j) \geq 0 \quad , j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Le problème (3.33) est un problème linéaire déterministe, équivalent au problème (P_{FF}) , et peut être résolu par la méthode du simplexe.

3.4.5 Application numérique

Résoudre le problème flou suivant:

$$(P_F) \left\{ \begin{array}{l} \max Z(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \underset{\mathcal{R}}{=} ((2,1,1) \otimes \tilde{x}_1 \oplus (3,1,1) \otimes \tilde{x}_2) \\ s.c \quad (1,1,1) \otimes \tilde{x}_1 \oplus (2,1,1) \otimes \tilde{x}_2 \underset{\mathcal{R}}{\leq} (10,9,17) \\ \quad (2,1,1) \otimes \tilde{x}_1 \oplus (1,1,1) \otimes \tilde{x}_2 \underset{\mathcal{R}}{\leq} (11,9,17) \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Posons $\tilde{x}_1 = (x_1, v_1, \omega_1)$ et $\tilde{x}_2 = (x_2, v_2, \omega_2)$, alors le problème donné s'écrit comme suit:

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \max \mathcal{R}((2,1,1) \otimes (x_1, v_1, \omega_1) \oplus (3,1,1) \otimes (x_2, v_2, \omega_2)) \\ s.c \quad \mathcal{R}(1,1,1) \otimes (x_1, v_1, \omega_1) \oplus (2,1,1) \otimes (x_2, v_2, \omega_2) \leq \mathcal{R}(10,9,17) \\ \quad \mathcal{R}(2,1,1) \otimes (x_1, v_1, \omega_1) \oplus (1,1,1) \otimes (x_2, v_2, \omega_2) \leq \mathcal{R}(11,9,17) \\ x_1, x_2, v_1, v_2, \omega_1, \omega_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

En utilisant la définition (3.4) de la multiplication de deux nombres flous triangulaires positifs, on obtient:

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \max \mathcal{R}(2x_1 + 3x_2 ; x_1 + x_2 + 2v_1 + 3v_2 ; x_1 + x_2 + 2\omega_1 + 3\omega_2) \\ s.c \mathcal{R}(x_1 + 2x_2 ; x_1 + x_2 + v_1 + 2v_2 ; x_1 + x_2 + \omega_1 + 2\omega_2) \leq \mathcal{R}(10,9,17) \\ \mathcal{R}(2x_1 + x_2 ; x_1 + x_2 + 2v_1 + v_2 ; x_1 + x_2 + 2\omega_1 + \omega_2) \leq \mathcal{R}(11,9,17) \\ x_1, x_2, v_1, v_2, \omega_1, \omega_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

En appliquant la fonction *Ranking* \mathcal{R} sur la fonction objectif et les contraintes nous obtenons le problème suivant:

$$(P_3) \left\{ \begin{array}{l} \max 2x_1 + 3x_2 - 0.5v_1 - 0.75v_2 + 0.5\omega_1 + 0.75\omega_2 \\ s.c 4x_1 + 8x_2 - v_1 - 2v_2 + \omega_1 + 2\omega_2 \leq 48 \\ 8x_1 + 4x_2 - 2v_1 - v_2 + 2\omega_1 + \omega_2 \leq 46 \\ x_1, x_2, v_1, v_2, \omega_1, \omega_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(P_L) \left\{ \begin{array}{l} \max W = 2x_1 + 3x_2 - 0.5v_1 - 0.75v_2 + 0.5\omega_1 + 0.75\omega_2 \\ s.c 4x_1 + 8x_2 - v_1 - 2v_2 + \omega_1 + 2\omega_2 + x_3 = 48 \\ 8x_1 + 4x_2 - 2v_1 - v_2 + 2\omega_1 + \omega_2 + x_4 = 46 \\ x_1, x_2, v_1, v_2, \omega_1, \omega_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

La solution optimale du problème (PL) est:

$$x_1 = \frac{11}{3}, x_2 = \frac{25}{6} \text{ et } v_1 = v_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0.$$

$$\text{Sa valeur optimale est: } W = \frac{22}{3} + \frac{75}{6} \approx 19.83$$

La solution du problème (P_F) est: $\tilde{x}_1 = (\frac{11}{3}, 0, 0)$, $\tilde{x}_2 = (\frac{25}{6}, 0, 0)$.

La valeur floue optimale de la fonction objectif est:

$$\begin{aligned} Z(x_1^*, x_2^*) &= (2, 1, 1) \otimes (\frac{11}{3}, 0, 0) \oplus (3, 1, 1) \otimes (\frac{25}{6}, 0, 0) = (\frac{22}{3} + \frac{75}{6}, \frac{11}{3} + \frac{25}{6}, \frac{11}{3} + \frac{25}{6}) \\ &= (\frac{119}{6}, \frac{47}{6}, \frac{47}{6}) \text{ et } \mathcal{R}(Z(x_1^*, x_2^*)) = \frac{22}{3} + \frac{75}{6} = \frac{119}{6} \approx 19.83. \end{aligned}$$

Remarque 3.3. Les deux problèmes ont la même valeur optimale $W = Z(x_1^*, x_2^*) \approx 19.83$

3.5 Conclusion

Ce chapitre comprend deux parties:

1. Résolution d'un problème linéaire flou via la programmation linéaire multiobjectif déterministe.
2. Résolution d'un problème linéaire flou où les variables de décision sont aussi floues par l'utilisation des fonctions *Ranking*.

Conclusion

Depuis plusieurs années, on considère que les deux sources d'incertitude principales sont le manque d'informations et la variabilité des phénomènes. On modélise alors les informations soit par des distributions de probabilité (informations aléatoires) soit par des ensembles flous (informations incomplètes). La théorie des ensembles flous apparaît comme un outil bien adapté pour modéliser un concept vague.

L'optimisation multiobjectif consiste à optimiser simultanément plusieurs fonctions objectif souvent conflictuelles.

La solution d'un problème multiobjectif n'est pas une solution unique, mais un ensemble de solutions connu comme l'ensemble des solutions Pareto optimales. Toute solution de cet ensemble est optimale dans le sens qu'aucune amélioration ne peut être faite sur une composante du vecteur sans dégradation d'au moins une autre composante.

Après avoir rappeler les concepts de base sur la théorie des ensembles flous au chapitre un et les concepts de base sur l'optimisation linéaire multiobjectif au chapitre deux. Nous nous sommes intéressé au chapitre trois à la résolution d'un problème linéaire flou (Fuzzy Linear Programming Problem) via l'optimisation linéaire multiobjectif et aussi à la résolution d'un problème linéaire flou avec des variables de décision floues (Fully Fuzzy Linear Programming Problem) via les fonctions Ranking.

Bibliographie

- [1] Aiden M., oukacha B., *Programmation linéaire, Les manuels De L'étudiant*. Editions Pages Bleues, **2005**
- [2] Batolan G., Degani R., *A review of some Method for Ranking Fuzzy Subsets*. Fuzzy Sets and Systems 15, page 1-19 (1985).
- [3] Benayad R., Hamadi S. ,*Optimisation des coûts carburants Air Algérie*. Thèse ingénieur, université USTHB 2008.
- [4] Berro A., *Optimisation Multiobjectif et Stratégie d'évolution en environnement Dynamique*. Thèse de Doctorat, université des sciences sociales Toulouse, 2001.
- [5] Chankong V., Haimes Y.Y., *Multiobjective Decision Making Theory and Methodology*. North-Holland, New York, 1983.
- [6] Collette Y., Siarry P., *Optimisation multiobjectif*. Éditions Eyrolles 61, 2002.
- [7] Dubois D., Prade H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, New York, 1980.
- [8] Edegeworth F.Y., *Mathematical physics*. Keagan P., Londres, Angleterre, 1881.
- [9] Geoffrion A.M., *Proper efficiency and the theory of vector maximization*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 22, 618-630, 1968.
- [10] Hassena Z., Tirchi S., *Optimisation Linéaire Multiobjectif Discrète*. Thèse master, Université UMMTO, 2012.
- [11] Ishibuch H.i, Murata T., *A multiobjective genetic local search algorithm and its application to the flowshop scheduling*. IEEE transactions on systems, Man and Cybernetics – Part C : applications and reviews, 28, 392-403, 1998.
- [12] Kebaili F., Moulouel H., *Optimisation de la Gestion de portefeuille d'actifs financiers*. Mémoire de fin d'étude, université USTHB 2008.
- [13] Miettinen K., *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Kluwer, Boston, 1999.
- [14] Pareto V., *Cours d'économie politique*. Rouge, Lausanne, Suisse, 1896.

- [15] Shamooshaki M.M., Hosseinzadeh A., Edalatpanah S.A., *A New Method For Solving Fully Fuzzy Linear Programming with LR-type Fuzzy Numbers*. Operations Research, Vol.1, N°3, 53-55, 2014.
- [16] Thakre P.A., SHELAR D.S., Thakre S.P., *Solving Fuzzy Linear Programming Problem as Multi Objective Linear Programming Problem*. Proceedings of the World Congress on Engineering, Vol II, WCE, July 1-3, London, U.K., 2009.
- [17] Zadeh L.A., Fuzzy sets, *Information and Control*. 8 (3), 338-353, 1965.
- [18] Zerdani O., *L'optimisation non Linéaire Multiobjectif*. Thèse doctorat, Université UMMTO, 2013.