

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou**

**Faculté du Génie de la Construction**

**Département de Génie Mécanique**



***En vue de l'obtention du Diplôme de Master Professionnel***  
***Spécialité : Energétique***  
***Option : Froid Chauffage et Climatisation***

***Thème :***

***Résolution des problèmes de transfert  
thermique en régime permanent et  
transitoire à l'aide de Microsoft Excel***

**Proposé et dirigé par :**  
**Mr. FERROUK Mohamed**

**Réalisé par :**  
**Mr. BECHIRI Amine**  
**Mr. LOUNI Mohamed**

**Devant le jury:**

**Encadreur : Mr. FERROUK . M**  
**Président : Mr. TEBBICHE . H**  
**Examineur : Mr. AIT HAMADOUCHE . M**

***Promotion : 2018/2019***

## **REMERCIEMENT**

*Tout d'abord, nous tenons à remercier le bon DIEU tout puissant de nous avoir donné le courage, la patience et le pouvoir d'achever ce travail.*

*On tient à remercier très chaleureusement notre promoteur Mr FERROUK Mohamed qui nous a guidé et soutenu tout au long de notre travail, et qui n'a jamais manqué de nous orienter et de nous conseiller. Qu'il trouve ici l'expression de notre respect et de notre profonde reconnaissance.*

*Nos remerciements s'dressent aussi au président et aux membres de jury pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail et pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant d'examiner et de juger notre travail.*

*Un profond remerciement à toute notre promotion et toute personne ayant aidé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail. Et tout nos amis qui avec leur bonneté et leur honnêteté sont devenus notre deuxième famille en espérant que nos chemins ne cesseront de se croiser.*

*Pour finir, nous ne pourrons jamais assez remercier nos parents qui se sont dévoués plus que jamais pour nous avoir offert toutes les conditions propices à notre épanouissement, sans oublier nos frères et sœurs pour les quels ces quelques lignes ne peuvent exprimer notre profonde estime.*

## *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Mes très chers parents qui n'ont jamais cessé de me soutenir  
et de m'encourager durant mon parcours universitaire.*

*Mes frères, ma belle-sœur et ma nièce adoré imane .*

*Toute ma famille.*

*Mes chers amis et amies.*

*Tous les étudiants de ma promotion FCC ma deuxième  
famille.*

*Tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour  
l'élaboration de ce travail.*

*Toute personne assiste.*

*BECHIRI Amine.*

## *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Mes très chers parents qui n'ont jamais cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes ces années de sacrifice.*

*Mes frères et mes sœurs*

*Toute ma famille*

*Mes chers amis et amies, mes collègues de l'étude surtout les étudiants de génie de la construction*

*Tous les étudiants de ma promotion*

*Mohamed.*



Liste des symboles		
Symbole	Signification	Unité
Symboles latins		
K	Coefficient de conductivité thermique	$[W.m^{-1}.K^{-1}]$
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection	$[W.m^{-2}.K^{-1}]$
$h_c$	Coefficient moyen de convection	$[W.m^{-2}.K^{-1}]$
q	Flux de chaleur	[W]
$Q_l$	Puissance électrique appliquée	[W]
$q_{rad\ i}$	Transfert de rayonnement net dans le nœud de surface	[W]
$\dot{q}$	Énergie générée par unité de volume	$[W.m^{-3}]$
$q''_{rad\ i}$	Densité de flux de chaleur	$[W.m^{-2}]$
C	Chaleur spécifique du matériau	$[J.kg^{-1}.K^{-1}]$
$C_{air}$	Capacité thermique de l'air	$[J.k^{-1}]$
T	Température	[K]
$T_w$	Température de la plaque	[K]
$T_\infty$	Température du fluide	[K]
$T_{p+1}$	Température a la fin de l'incrément de temps	[K]
$T_p$	Température au début de l'incrément de temps	[K]
$T_r$	Température de rayonnement	[K]
$T_c$	Température de convection	[K]
$T_s$	Température de l'environnement et alentours	[K]
$T'_j$	Température des nœuds se connectant à $T_i$	[K]
$T_n$	Température nodale inconnue	[K]
A	Aire de surface	$[m^2]$
$A_i$	Surface du nœud i exposée à la température de rayonnement	$[m^2]$
$A_c$	Surface de convection totale du solide exposé au fluide environnant	$[m^2]$
V	Volume	$[m^3]$
d	Diamètre de cylindre	[m]
r	Rayon de cylindre	[m]
$m_{air}$	Masse de l'air	[kg]
P	Pression	[Pa]
u	Vitesse de fluide	$[m.s^{-1}]$
$u_\infty$	Vitesse maximale de fluide	$[m.s^{-1}]$
(m, n)	Emplacements indiquant les incréments x et y	-
Bi	Nombre de Biot	-
Fo	Nombre de Fourier	-
$F_\varepsilon$	Fonction d'émissivité	-
$F_G$	Fonction géométrique "facteur de forme"	-

(B, n)	Constants dépendants de la géométrie et du fluide, pour les situations de convection forcée impliquant des gaz (fluides transparents)	-
<b>Coordonnées</b>		
(x, y, z)	Coordonnées cartésiennes	-
(r, $\phi$ , $\theta$ )	Coordonnées sphériques	-
(r, $\phi$ , z)	Coordonnées cylindriques	-
<b>Symboles grecques</b>		
$\alpha$	Diffusivité thermique du matériau	$[m^2.s^{-1}]$
$\tau$	Constante de temps	[s]
$\rho$	Masse volumique	$[kg.m^{-3}]$
$\sigma$	Constante de proportionnalité appelée constante de Stefan-Boltzmann	$[W.m^{-2}.K^{-4}]$
$\mathcal{E}$	Emissivité	-
<b>Ponctuation générale</b>		
†	La condition aux limites de convection se traduit en posant $h = 0$ , ( $Bi = 0$ )	-
‡	Cette équation est obtenue en multipliant la résistance par $4/(a + 1)(b + 1)$	-
§	Cette relation est obtenue en divisant la formulation de la résistance par 2	-
†	Les surfaces de convection peuvent être isolées en fixant $h = 0$ , ( $Bi = 0$ )	-

Liste des figures		
Numéro de la figure	Titre de figure	Page
<b>Chapitre 1</b>		
<b>Figure 1.1</b>	Conduction entre deux plaques horizontales	3
<b>Figure 1.2</b>	Profil de température et direction du flux de chaleur	3
<b>Figure 1.3</b>	Volume élémentaire pour une analyse unidimensionnelle de la conductivité thermique	4
<b>Figure 1.4</b>	Volume élémentaire pour l'analyse tridimensionnelle de la conduction	6
<b>Figure 1.5</b>	Conductivités thermiques de certains gaz typiques	9
<b>Figure 1.6</b>	Conductivité thermique de certains types de liquides	9
<b>Figure 1.7</b>	Conductivité thermique de certains types de solides	10
<b>Figure 1.8</b>	Transfert de chaleur par convection à partir d'une plaque	11
<b>Chapitre 2</b>		
<b>Figure 2.1</b>	Nomenclature illustrant des croquis utilisée dans l'analyse numérique bidimensionnelle de la conduction thermique	16
<b>Figure 2.2</b>	Nomenclature de problème à quatre nœuds	17
<b>Figure 2.3</b>	Nomenclature de l'équation nodale avec condition au limite convective	19
<b>Figure 2.4</b>	Nomenclature pour l'équation nodale avec convection à un angle de section	19
<b>Figure 2.5</b>	Nomenclature de l'exemple d'un problème à neuf nœuds	21
<b>Figure 2.6</b>	Nomenclature pour la solution numérique d'un problème bidimensionnel de conduction en régime transitoire	25
<b>Figure 2.7</b>	Discretisation du problème de frontières avec une condition de convection	27
<b>Figure 2.8</b>	Schéma de discrétisation du nœud à la frontière avec une condition de convection	28
<b>Chapitre 3</b>		
<b>Figure 3.1</b>	Interface générale de Microsoft Excel	33
<b>Figure 3.2</b>	Représentation de ruban	33
<b>Figure 3.3</b>	Barre d'outils accès rapide	34
<b>Figure 3.4</b>	Barre d'état de l'Excel	35
<b>Figure 3.5(a)</b>	Modèle Template pour les équations nodales bidimensionnelles en régime permanent	36
<b>Figure 3.5(b)</b>	Modèle Template pour les interfaces composites	37
<b>Figure 3.6</b>	Nomenclature pour les limites composites	40
<b>Chapitre 4</b>		
<b>Figure 4.1(a)</b>	Structure de la plaque bidimensionnelle	42
<b>Figure 4.1(b)</b>	La répartition des températures sur la plaque	43
<b>Figure 4.1(c)</b>	Vues 2D et en élévation des profils de température	44
<b>Figure 4.1(d)</b>	Les graphes 3D de profils de température	44
<b>Figure 4.2 (a) et (b)</b>	La structure de l'ailette bidimensionnelle	45
<b>Figure 4.2(c)</b>	Formules utilisées	46
<b>Figure 4.2(d)</b>	Profils de température pour les différentes valeurs de Biot	47

<b>Figure 4.2(e)</b>	Profils de température pour $Bi = 1$ .	48
<b>Figure 4.3(a)</b>	Formules utilisées	48
<b>Figure 4.3(b)</b>	Solution numérique avec un graphique en treillis métallique	49
<b>Figure 4.3(c)</b>	Formules des nœuds limites pour le rayonnement	49
<b>Figure 4.3(d)</b>	Conditions aux limites de convection et de rayonnement	50
<b>Figure 4.4(a)</b>	Structure de la plaque	51
<b>Figure 4.4(b)</b>	Formules nodales utilisées	51
<b>Figure 4.4(c)</b>	Diagramme en treillis métallique du profil de température	52
<b>Figure 4.4(d)</b>	Vue en plan de la distribution de température	52
<b>Figure 4.5(a)</b>	Les équations nodales insérées	54
<b>Figure 4.5(b)</b>	Valeurs numériques obtenues.	54
<b>Figure 4.5(c)</b>	Formules utilisées.	55
<b>Figure 4.5 (d) et (e)</b>	Représentation graphique des résultats obtenus.	55
<b>Figure 4.6</b>	Solide en aluminium ailetté	57
<b>Figure 4.6(a)</b>	Formules nodales et caractéristiques physiques de l'ailette	58
<b>Figure 4.6(b)</b>	Valeurs numériques et courbe de refroidissement par convection et rayonnement	59
<b>Figure 4.6 (c)</b>	Valeurs numérique et courbe de refroidissement par convection uniquement	60
<b>Figure 4.6(d)</b>	Comparaison entre les deux courbes	61
<b>Figure 4.7(a)</b>	Nomenclature d'un boîtier électronique	62
<b>Figure 4.7(b)</b>	Formules nodales utilisées	62
<b>Figure 4.7 (c)</b>	Résultats pour une puissance de 200 W.	63
<b>Figure 4.7 (d)</b>	Résultats pour une puissance de 100 W	64
<b>Figure 4.8 (a)</b>	Schéma d'une nervure saillante	64
<b>Figure 4.8(b)</b>	Formules nodales utilisées	65
<b>Figure 4.8 (c)</b>	Représentation numérique et graphique des résultats obtenus	66
<b>Figure 4.8(d)</b>	Représentation graphique en 3D des résultats obtenus	67
<b>Figure 4.8 (e)</b>	Profils de température d'un mur à une seule nervure	67
<b>Figure 4.9 (a)</b>	Nomenclature d'un matériau composite	68
<b>Figure 4.9(b)</b>	Valeurs numériques trouvées pour $k = 1.0$	69
<b>Figure 4.9 (c)</b>	Représentation graphique de 1 <sup>ier</sup> cas $K = 1$	70
<b>Figure 4.9 (d)</b>	Représentation graphique de 2 <sup>ème</sup> cas	71
<b>Figure 4.9(e)</b>	Représentation graphique de 3 <sup>ème</sup> cas	72
<b>Figure 4.10 (a)</b>	Schéma d'une ailette en saillie	73
<b>Figure 4.10 (b)</b>	Valeurs numériques obtenus	73
<b>Figure 4.10 (c)</b>	Représentations graphiques des résultats	74

Liste des tableaux		
Numéro de tableau	Titre de tableau	Page
<b>Tableau 1.1</b>	Conductivité thermique de différents matériaux à 0 °C.	8
<b>Tableau 1.2</b>	Conductivité thermique efficace des matériaux isolants cryogéniques utilisés dans un intervalle de 15°C à -195°C, masse volumique de 30 à 80 kg/m <sup>3</sup> .	10
<b>Tableau 1.3</b>	Valeurs approximatives des coefficients de transfert de chaleur par convection.	12
<b>Tableau 2.1</b>	Résumé des formules nodales pour le calcul des différences finies. (Les lignes pointillées indiquent le volume de l'élément.)†	19
<b>Tableau 2.2</b>	Equations nodales explicites. (Les lignes pointillées indiquent le volume de l'élément).	29
<b>Tableau 2.3</b>	Equations nodales Implicites. (Les lignes pointillées indiquent le volume de l'élément.)	30

<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
-----------------------------------	----------

## **Chapitre 1 : Equation de la chaleur**

1.1. Introduction.....	2
1.2. Le transfert de chaleur par conduction .....	2
1.3. Equation générale de la chaleur .....	4
1.4. Équation de la chaleur à des cas pratiques.....	7
1.5. Conductivité thermique .....	8
1.6. Transfert de chaleur par convection .....	10
1.7. Transfert de chaleur par rayonnement.....	12
1.7.1. Rayonnement dans une enceinte.....	13

## **Chapitre 2 : Résolution numérique des équations de la chaleur**

2.1. Introduction.....	15
2.2. Conduction bidimensionnelle en régime permanent .....	15
2.2.1. Techniques de résolution du système d'équations .....	23
2.3. Conduction bidimensionnelle en régime transitoire.....	24
2.3.1. Différences finies en amont et en aval.....	28

## **Chapitre 3 : Simulation numérique**

3.1. Introduction.....	32
3.2. Présentation de Microsoft Excel .....	32
3.3. Description de l'interface générale de l'Excel .....	33
3.3.1. Le ruban .....	33
3.3.2. La barre d'outils Accès rapide .....	34
3.3.3. La barre de formules.....	35
3.3.4. La barre d'état .....	35
3.4. Utilisation du logiciel Microsoft Excel .....	35
3.4.1. Modèle Template pour la résolution des problèmes thermiques en régime permanent .	35
3.4.2. La procédure d'utilisation des modèles en régime permanent .....	37

3.4.3. Procédure Excel pour le transfert de chaleur transitoire.....	38
3.4.3.1. Mise en place de la feuille de travail.....	38
3.4.3.2. Dans le bloc réservé pour les calculs de température nodale.....	38
3.4.3.3. Exécution du programme et graphiques des résultats.....	38
3.4.3.4. Graphes de résultats transitoires avec configuration géométrique.....	39
3.4.4. Critères de stabilité pour une interface composite	40
3.4.5. Sources de chaleur et conditions aux limites de rayonnement.....	40

## **Chapitre 4 : résultats et discussion**

4.1. Introduction.....	42
4.2. Les cas traités.....	42
4.2.1. Répartition de la température dans une plaque bidimensionnelle .....	42
4.2.2. Distribution de la température dans une ailette droite bidimensionnelle .....	45
4.2.3. Bloc de 1m <sup>2</sup> avec et sans conditions aux limites de rayonnement .....	48
4.2.4. Conduction dans une plaque avec source de la chaleur et aux conditions aux limites de contacts.....	50
4.2.5. Conduction transitoire dans un bloc durant l'établissement du régime permanent .....	53
4.2.6. Refroidissement d'un solide ailetté en aluminium .....	56
4.2.7. Chauffage transitoire d'un boîtier électronique dans une armoire électrique.....	61
4.2.8. Etude d'une configuration présentant une symétrie .....	64
4.2.9. Conduction dans un solide à matériaux composites.....	68
4.2.10. Etude d'une ailette en saillie .....	73
<b>Conclusion générale</b> .....	75

### Introduction générale

Le but de notre travail est de mettre au point un programme du calcul numérique rédigé en Microsoft Excel ; utilitaire très polyvalent et présent sur toutes les plateformes de calcul (ordinateur) ; permettant de résoudre numériquement l'équation de la chaleur (conduction). Ce transfert d'énergie thermique ne nécessite pas de mouvement macroscopique de la matière. Il est défini comme étant un mode de transmission de la chaleur entre deux milieux en contact physique.

Le présent travail, est une simulation numérique dont l'intérêt est de mettre en évidence certaines caractéristiques pouvant s'appliquer à la résolution des problèmes de transfert de chaleur en régime permanent et transitoire, ainsi le traitement des conditions aux limites des sources de chaleur et de rayonnement, des conditions aux limites à l'état d'équilibre et transitoires et des interfaces entre les matériaux composites à l'aide d'un modèle Template. L'outil de calcul élaboré a été testé et validé en traitant plusieurs cas.

Nous avons réparti notre étude en quatre chapitres plus une conclusion générale.

Le premier chapitre est consacré pour l'équation de la chaleur ainsi quelques généralités sur les transferts thermiques.

Le second chapitre présente les techniques utilisées pour résoudre numériquement les équations de la chaleur en régime permanent et transitoire.

Le troisième chapitre contient une présentation du logiciel Microsoft Excel, le modèle que nous avons utilisé pour la résolution numérique du problème et les procédures de résolution.

Le quatrième chapitre a été consacré à la discussion des résultats obtenus avec la simulation numérique.

En fin, nous terminons ce mémoire par une conclusion générale.



# *Chapitre 1 :*

## *Equation de la*

### *chaleur*

## 1.1. Introduction

Le transfert de chaleur est l'un des modes les plus communs d'échange d'énergie. Il intervient naturellement entre deux systèmes dès qu'il existe entre eux une différence de température et cela quel que soit le milieu les séparant, même vide. De ce fait, les transferts thermiques ont un rôle essentiel, aussi bien dans le domaine des sciences pures que dans celui des applications technologiques. Ce rôle devient même déterminant lorsqu'il est à l'origine des techniques utilisées dans les échangeurs, moteurs thermiques, calorifugeage, utilisation de l'énergie solaire,...etc.

A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de « quantité de chaleur » et de « différence de température ». Ceux-ci sont définis par la thermodynamique dans ses principes mêmes appelés 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> principe.

Toutefois la thermodynamique s'attache uniquement à des états d'équilibre, négligeant les mécanismes d'échange qui y conduisent. L'étude de ces mécanismes, en raison de son importance, constitue une discipline indépendante appelée « les transferts thermiques ».

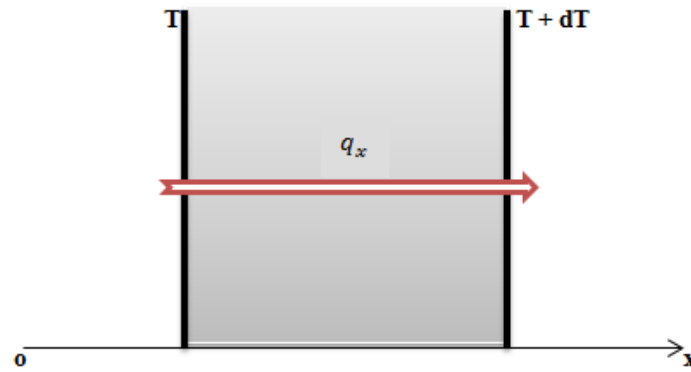
On distingue trois grandes parties se rattachant chacune à un mode de transfert de la chaleur particulier : conduction, convection et rayonnement, chacun de ces modes étant lui-même lié à un processus physique bien déterminé. En effet, comme l'énergie thermique d'un milieu matériel correspond à l'énergie cinétique de ses constituants fondamentaux ayant, une certaine liberté de mouvement (molécules, atomes, électrons libres, ...), ceux-ci pourront échanger tout ou partie de leur énergie thermique, c'est-à-dire gagner ou perdre de l'énergie cinétique :

- Soit par interaction directe avec les particules voisines (choc de molécules par exemple), ce qui correspond à « la conduction ».
- Soit par absorption ou émission de radiations électromagnétiques, ce qui correspond au « rayonnement ».
- Enfin dans le cas d'un gaz ou d'un liquide, on considère également, mais cette fois à l'échelle macroscopique, comme un mode de transfert de chaleur appelé « convection », les échanges résultant du mélange des diverses parties d'un fluide à des températures différentes. [1]

## 1.2. Le transfert de chaleur par conduction

Après cette brève définition sur l'origine microscopique du mécanisme de conduction thermique ; intéressons nous à son aspect macroscopique.

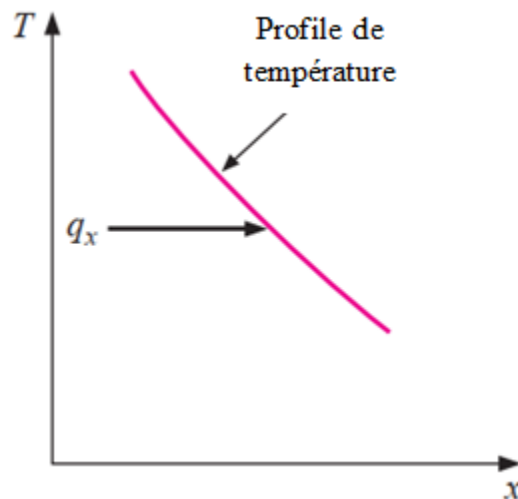
La quantité de chaleur élémentaire  $q_x$  transmise entre deux plans infinis portés aux températures  $T$  et  $T + \partial T$ , perpendiculaires à un axe  $ox$ , est proportionnelle à : la surface d'échange, la différence de température entre les 2 parois, le temps écoulé est inversement proportionnel à la distance entre les plans d'après la loi de Fourier.



**Figure1.1** : conduction entre deux plaques horizontales.[2]

Soit : 
$$q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.1)$$

Lorsqu'un gradient de température existe dans un corps, l'expérience a montré qu'il y a un transfert d'énergie de la région haute température à la région basse température. On dit que l'énergie est transférée par conduction et que le taux de transfert de chaleur par unité de surface est proportionnel au gradient de température normal.



**Figure 1.2** : Profil de température et direction du flux de chaleur. [3]

Où  $q_x$  est le taux de transfert de chaleur et  $\partial T / \partial x$  est le gradient de température dans la direction du flux thermique. La constante positive  $k$  est appelée conductivité thermique du matériau, et le signe moins est inséré pour que le deuxième principe de la thermodynamique soit respecté ; C'est-à-dire que la chaleur doit s'écouler progressivement vers le bas suivant les graduations de la température, comme l'indique le système de coordonnées de la figure 1.2. D'après le physicien français Joseph Fourier, qui a apporté des contributions très significatives au traitement analytique du transfert thermique par conduction. Il est important de noter que l'équation (1.1) représente une équation déterminante pour la conductivité thermique et que  $k$  est exprimé en Watts par mètre et par degré Celsius dans un système classique avec des unités dans lesquelles le flux thermique est exprimé en watts.

### 1.3. Equation générale de la chaleur

Considérons le système unidimensionnel illustré à la figure 1.3. Si le système est en régime permanent, c'est-à-dire que si la température ne change pas avec le temps, alors le problème est simple, et il suffit d'intégrer l'équation (1.1) et de remplacer les valeurs appropriées pour résoudre la quantité désirée.

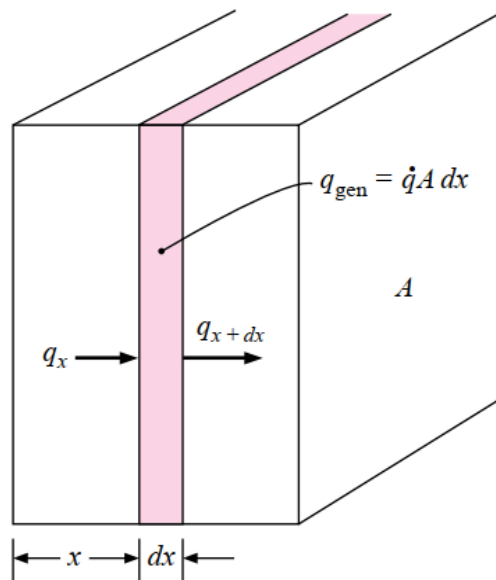
Cependant, si la température du solide change avec le temps, ou s'il y a des sources de chaleur ou des puits dans le solide, la situation est plus complexe. Nous considérons le cas général où la température peut changer avec le temps et où des sources de chaleur peuvent être présentes dans le corps. Pour l'élément d'épaisseur  $dx$ , le bilan énergétique suivant l'axe  $x$  s'écrit :

**Énergie générée dans la face gauche + chaleur générée dans l'élément = Variation de l'énergie interne + énergie dissipée en face droite**

Ces quantités d'énergie sont données comme suit :

$$\text{Énergie dans la face gauche} = q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\text{Énergie générée à l'intérieur de l'élément} = \dot{q}A dx$$



**Figure 1.3 :** Volume élémentaire pour une analyse unidimensionnelle de la conductivité thermique. [3]

$$\text{Variation de l'énergie interne} = \rho cA \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

$$\text{Sortie d'énergie à droite de la figure} = q_{x+dx} = -kA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+dx}$$

$$= -A \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right]$$

Dans lequel :

$\dot{q}$  = énergie générée par unité de volume, W / m<sup>3</sup>

$c$  = chaleur spécifique du matériau, J / kg °C

$\rho$  = masse volumique, kg / m<sup>3</sup>

En combinant les relations ci-dessus, on obtient :

$$-kA \frac{\partial T}{\partial x} + \dot{q} A dx = \rho c A \frac{\partial T}{\partial \tau} dx - A \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right]$$

Ou :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1.2)$$

C'est l'équation unidimensionnelle de conduction thermique. Pour traiter plus d'un flux de chaleur unidimensionnel, il suffit de tenir compte de la quantité de chaleur qui entre et sort d'un volume unitaire dans les trois coordonnées, comme le montre la figure 1.4(a). Le bilan énergétique s'écrit :

$$q_x + q_y + q_z + q_{\text{gen}} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz} + \frac{dE}{d\tau}$$

Et les quantités d'énergie sont données par :

$$q_x = -k dy dz \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_{x+dx} = \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy dz$$

$$q_y = -k dx dz \frac{\partial T}{\partial y}$$

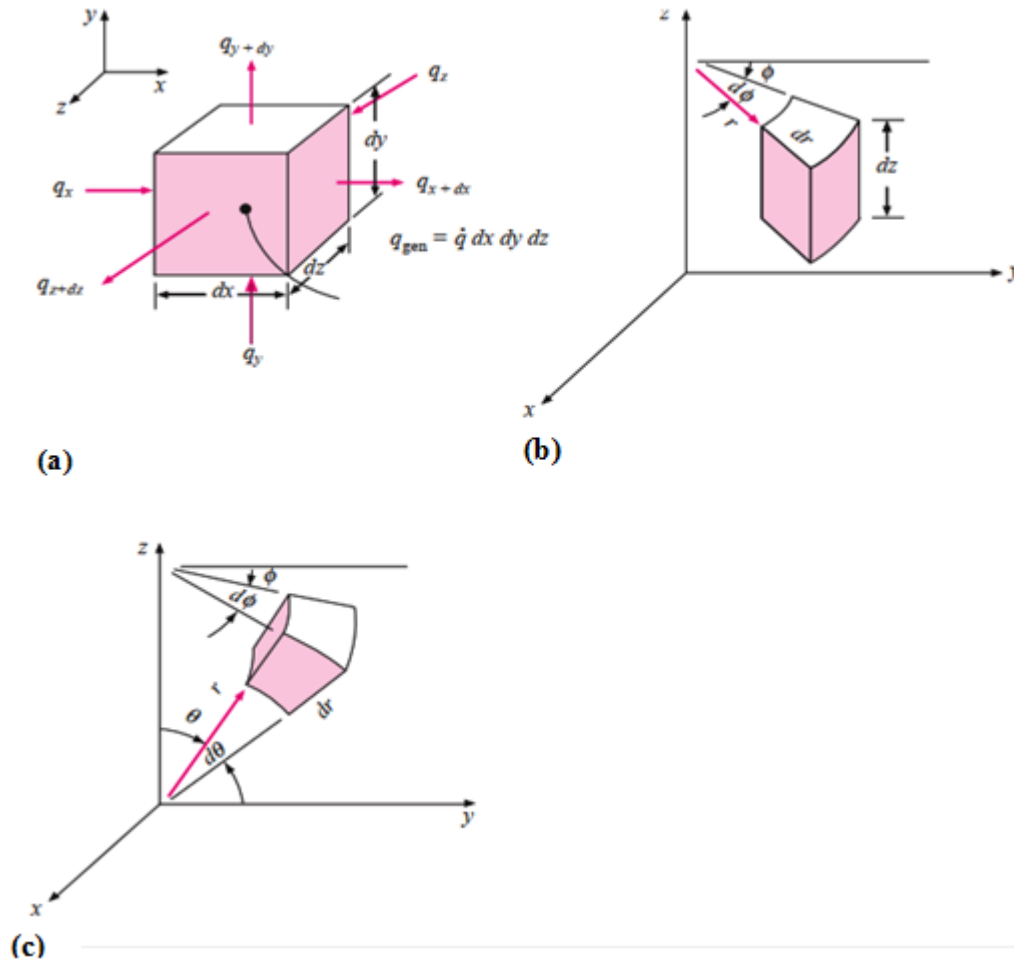
$$q_{y+dy} = \left[ k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right] dx dz$$

$$q_z = -k dx dy \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$q_{z+dz} = \left[ k \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \right] dx dy$$

$$q_{\text{gen}} = \dot{q} dx dy dz$$

$$\frac{dE}{d\tau} = \rho c dx dy dz \frac{\partial T}{\partial \tau}$$



**Figure 1.4 :** Volume élémentaire pour l'analyse tridimensionnelle de la conduction. [3]

(a) Coordonnées cartésiennes ; (b) coordonnées cylindriques ; (c) coordonnées sphériques.

L'équation générale tridimensionnelle de la conduction thermique s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1.3)$$

Pour une conductivité thermique constante, l'équation (1-3) se simplifie à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1.3a)$$

Où la quantité  $\alpha = k/\rho c$  est appelée la diffusivité thermique du matériau. Plus la valeur de  $\alpha$  est élevée, plus la chaleur se diffuse rapidement à travers le matériau. C'est ce que l'on peut constater en examinant les quantités qui composent  $\alpha$ . Une valeur élevée de  $\alpha$  peut résulter soit d'une valeur élevée de conductivité thermique, qui indiquerait un taux de transfert d'énergie rapide, soit d'une valeur peu élevée de la capacité calorifique  $\rho c$ . La diffusivité thermique  $\alpha$  est en mètres carrés par seconde [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].

L'équation (1.3a) en coordonnées cylindriques et sphériques s'écrit :

Les coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1.3b)$$

Les coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} (rT) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1.3c)$$

Les grandeurs intervenant dans les équations (1.3b) et (1.3c) sont définies dans les figures 1.4b et 1.4c.

## 1.4. Équation de la chaleur à des cas pratiques

Selon le cas étudié, les équations générales ci-dessus peuvent se simplifier. Dans ce qui suit nous donnons les cas pratiques rencontrés dans l'industrie.

- Dans le cas générale le flux de chaleur unidimensionnel en régime permanent et sans source de chaleur, l'équation (1.3) se simplifie à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (1.4)$$

Lorsque  $q = \text{constante}$ , on retrouve l'équation (1.1)

- Flux unidimensionnel en coordonnées cylindriques :

Le flux de chaleur unidimensionnel en régime permanent en coordonnées cylindriques (pas de génération de chaleur) : L'équation (1.3b) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (1.5)$$

- Flux de chaleur unidimensionnel avec source de chaleur, l'équation de la chaleur dans ce cas et en régime permanent s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (1.6)$$

- Conduction bidimensionnelle en régime permanent sans source de chaleur, l'équation (1.3a) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1.7)$$

### 1.5. Conductivité thermique

L'équation (1.1) est l'équation qui définit la conductivité thermique. Sur la base de cette définition, des mesures expérimentales peuvent être effectuées pour déterminer la conductivité thermique de différents matériaux. Pour les gaz dont les températures sont modérément basses, on peut utiliser les méthodes analytiques de la théorie cinétique des gaz pour prédire avec précision les valeurs observées expérimentalement.

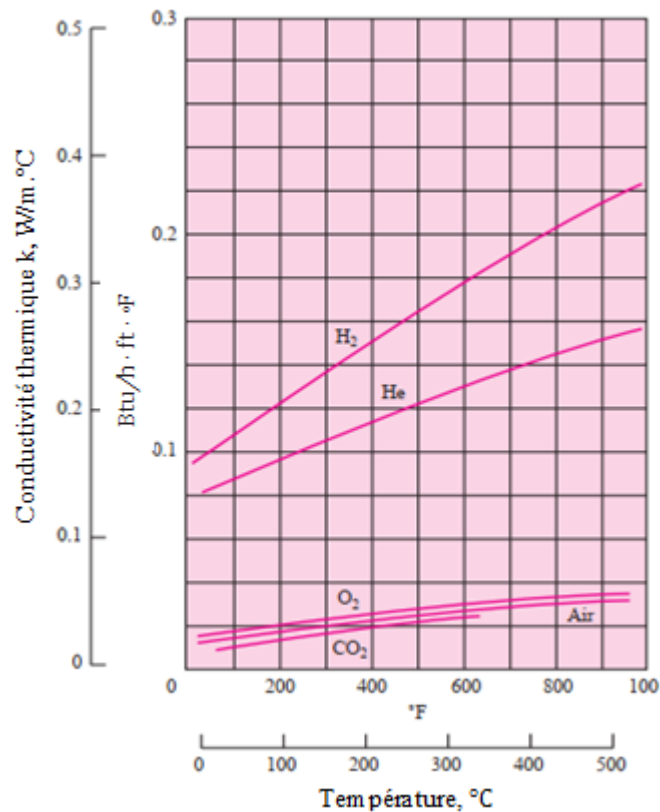
Le tableau 1.1 donne quelques natures de la conductivité thermique pour certains matériaux à 0°C.

**Tableau1.1 :** Conductivité thermique de différents matériaux à 0 °C.

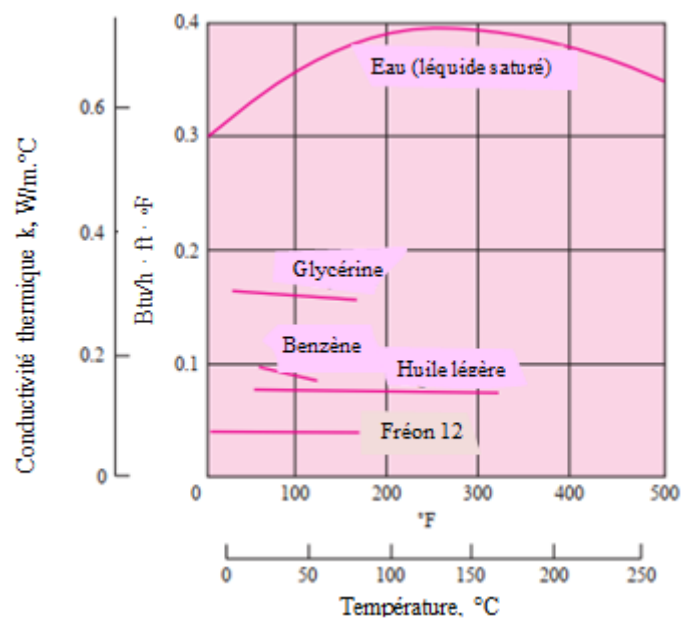
Matériau	Conductivité thermique, k
	W/m.°C
<b>Métaux :</b>	
Argent (pur)	410
Cuivre (pur)	385
Aluminium (pur)	202
Nickel (pur)	93
Fer (pur)	73
Acier au carbone, 1% C	43
Plomb (pur)	35
Acier chrome-nickel (18% Cr, 8% Ni)	16.3
<b>Solides non métalliques :</b>	
Diamant	2300
Quartz, parallèle à l'axe	41.6
magnésite	4.15
marbre	2.08_2.94
grès	1.83
Verre, fenêtre	0.78
Érable ou chêne	0.17
Caoutchouc dur	0.15
Chlorure de polyvinyle	0.09
Styrofoam	0.033
Sciure de bois	0.059
Laine de verre	0.038
glace	2.22
<b>Liquides :</b>	
Mercure	8.21
Eau	0.556
Ammoniac	0.540
Huile lubrifiante, SAE 50	0.147
Fréon 12, CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	0.073
<b>Gaz :</b>	
Hydrogène	0.175
hélium	0.141
Air	0.024
Vapeur d'eau (saturée)	0.0206
Dioxyde de carbone	0.0146



Les figures 1.5 à 1.6 donnent l'évolution de la conductivité thermique en fonction de la température. La figure 1.5 pour les gaz tels que l'hélium ; l'oxygène l'hydrogène et le dioxyde de carbone .la figure 1.6 pour certains liquides comme l'eau saturé, glycérine, benzène, huile légère et le fréon 12

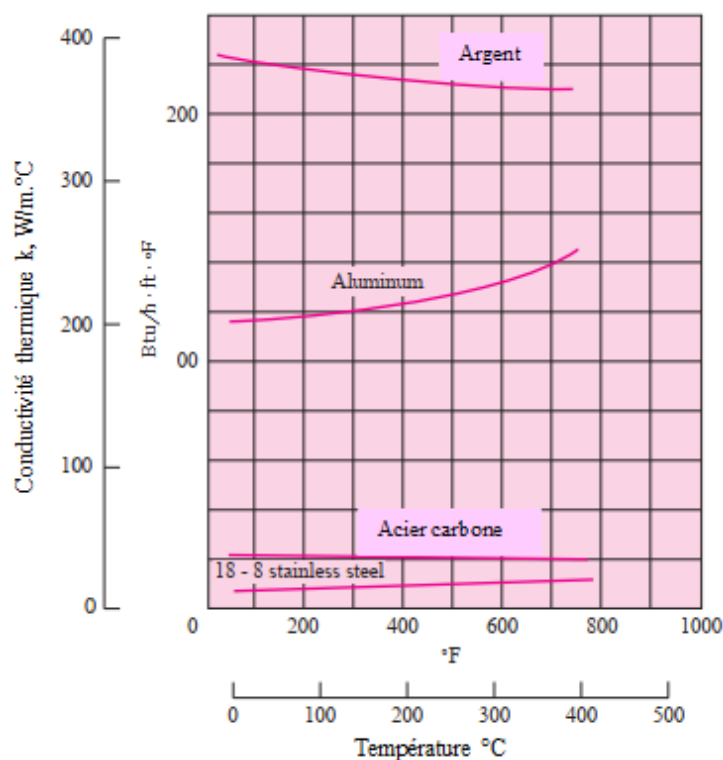


**Figure 1.5 :** Conductivités thermiques de certains gaz typiques. [3]



**Figure 1.6 :** La conductivité thermique de certains types de liquides. [3]

L'évolution de la conductivité thermique en fonction de la température pour l'argent, l'aluminium l'acier au carbone et l'acier inoxydable est illustrée à la figure 1.7.



**Figure 1.7 :** La conductivité thermique de certains types de solides. [3]

Le tableau 1.2 donne les plages des valeurs de conductivité thermique de quelques matériaux isolants ont lamasse volumique est comprise entre 30 et 80 kg/m<sup>3</sup>.

**Tableau 1.2 :** la conductivité thermique efficace des matériaux isolants cryogéniques utilisés dans un intervalle de 15°C à -195°C. masse volumique de 30 à 80 kg/m<sup>3</sup>.

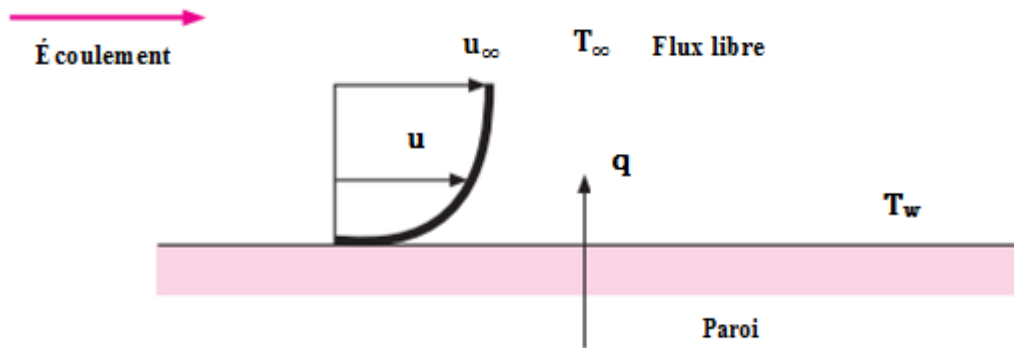
Type d'isolation	Conductivité Thermique $k$ , MW/m.°C
1. Mousses, poudres et fibres non aspirées	7-36
2. Poudres, évacuées	0.9-6
3. Fibres de verre évacuées	0.6-3
4. Poudres opacifiées, évacuées.	0.3-1
5. Isolants multicouches, évacués	0.015-0.06

## 1.6. Transfert de chaleur par convection

Il est évident qu'une plaque chauffante en métal se refroidit plus rapidement lorsqu'elle est placée devant un ventilateur que lorsqu'elle est exposée à de l'air calme. Le terme convection donne au lecteur une notion intuitive concernant le procédé de transfert de chaleur. Par exemple, nous savons que la vitesse à laquelle l'air soufflé sur la plaque chauffante influence également le taux de transfert de chaleur.

La chaleur cédée par la plaque est évacuée par convection. Pour illustrer le mécanisme physique de la convection, on considère une plaque chauffante illustrée à la figure 1.8. La température de la plaque est  $T_w$ , et la température du fluide est  $T_\infty$ . le profil de vitesse est montré également sur la figure 1.8, la vitesse est nulle et la chaleur ne peut être transférée que

par conduction à ce point. Ainsi nous pourrions calculer le transfert de chaleur, à l'aide de l'équation (1.1), avec la conductivité thermique du fluide et du gradient de température de celui-ci au niveau de la plaque. Dans la couche de fluide, la chaleur transférée par convection dépend du gradient de température. Ce dernier dépend de la vitesse à laquelle se produit l'échauffement. A une vitesse élevée, le gradient de température est important, et ainsi de suite.



**Figure 1.8 :** Transfert de chaleur par convection à partir d'une plaque. [3]

L'effet global de la convection, est exprimé par la loi de Newton du refroidissement :

$$q = hA (T_p - T_\infty) \quad (1.8)$$

Le taux de transfert de chaleur est lié à la différence de température globale entre la paroi et le fluide et l'aire  $A$ .

La grandeur  $h$  est appelée coefficient de transfert de chaleur par convection, et l'équation (1.8) est l'équation déterminante ; un calcul analytique de  $h$  peut être effectué pour certains systèmes. Pour les situations complexes, il doit être déterminé expérimentalement. Le coefficient de transfert thermique est parfois appelé conductance du film en raison de sa relation avec le processus de conduction dans la mince couche stationnaire de fluide à la surface de la paroi.

Le transfert de chaleur par convection dépend non seulement des propriétés thermiques du fluide (conductivité thermique, chaleur spécifique, densité), mais aussi de la viscosité du fluide. En effet, la viscosité influence sur le profil de vitesse et, par conséquent, sur le taux de transfert d'énergie située dans la partie à proximité de la plaque.

Les valeurs approximatives des coefficients de transfert de chaleur par convection sont données dans tableau 1.3.

**Tableau 1.3** : Valeurs approximatives des coefficients de transfert de chaleur par convection.

Mode	<b>h</b>
	W/m <sup>2</sup> .°C
A travers un entrefer de 2,5 cm, évacué à une pression de 10 <sup>-6</sup> atm et subit un $\Delta T = 100^{\circ}\text{C} - 30^{\circ}\text{C}$	0.087
<b>Convection libre, <math>\Delta T = 30^{\circ}\text{C}</math></b>	
Plaque verticale de 0,3 m (1 ft) de haut dans l'air	4.5
Cylindre horizontal, 5 cm de diamètre, dans l'air	6.5
Cylindre horizontal, 2 cm de diamètre, dans l'eau	890
Transfert de chaleur à travers l'air vertical de 1,5 cm écart avec $\Delta T = 60^{\circ}\text{C}$	2.64
fil fin dans l'air $d = 0,02 \text{ mm}$ , $T = 55^{\circ}\text{C}$	490
<b>Convection forcée</b>	
Débit d'air à 2 m/s sur plaque carrée de 0,2 m	12
Débit d'air à 35 m/s sur plaque carrée de 0,75 m/s	75
Débit d'air au nombre de Mach = 3, $p = 1/20 \text{ atm}$ , $T_{\infty} = -40^{\circ}\text{C}$ , sur plaque carrée de 0.2 m	56
Air à 2 atm s'écoulant dans un diamètre de 2,5 cm tube à 10 m/s	65
De l'eau à 0,5 kg/s s'écoule dans un tube de 2,5 cm de diamètre	3 500
Débit d'air sur un cylindre de 5 cm de diamètre avec une vitesse de 50 m/s	180
Liquide de bismuth à 4,5 kg/s et $420^{\circ}\text{C}$ dans un tube de 5,0 cm de diamètre.	3 410
Débit d'air à 50 m/s sur un fil fin, $d = 0,04 \text{ mm}$	3 850
<b>Eau bouillante</b>	
Dans un bassin ou un conteneur	2 500 – 35 000
Écoulement dans un tube	5 000 – 100 000
<b>Condensation de vapeur d'eau, 1 atm</b>	
Surfaces verticales	4 000 – 11 300
Tubes horizontaux extérieurs	9 500 – 25 000
Condensation par gouttes d'eau	170 000 – 290 000

## 1.7. Transfert de chaleur par rayonnement

Contrairement aux deux phénomènes de conduction et de la convection qui impliquent un transfert d'énergie à travers un milieu matériel, la chaleur peut également être transférée à travers des zones où le vide est parfait. Le phénomène dans ce cas est le rayonnement électromagnétique.

Des études thermodynamiques montrent qu'un émetteur thermique idéal, ou corps noir, émet de l'énergie à un rythme proportionnel à la quatrième puissance de la température absolue du corps et directement proportionnel à sa surface spécifique. Ainsi l'équation s'écrit :

$$q_{\text{émis}} = \sigma A T^4 \quad (1.9)$$

Où  $\sigma$  : la constante de proportionnalité appelée constante de Stefan-Boltzmann. L'équation (1.9) est appelée la loi de Stefan-Boltzmann de radiation thermique, et elle ne s'applique qu'aux corps noirs.

L'équation (1.9) ne régit que le rayonnement émis par un corps noir. L'échange radiatif net entre deux surfaces sera proportionnelle à la différence de températures absolues des surfaces ; c'est-à-dire :

$$\frac{q_{\text{échange net}}}{A} \propto \sigma A(T_1^4 - T_2^4) \quad (1.10)$$

Pour tenir compte de la nature "grise" des surfaces, un autre facteur dans l'équation (1.9), appelé émissivité, qui relie le rayonnement de la surface "grise" à celui d'une surface noire idéale est introduit. De plus, il faut tenir compte du fait que tout le rayonnement sortant d'une surface n'atteindra pas l'autre puisque le rayonnement électromagnétique se déplace en lignes droites et qu'une partie sera perdue dans l'environnement.

Donc deux nouveaux facteurs sont introduits dans l'équation (1.9) pour tenir compte des deux situations, de sorte que l'équation s'écrit sous cette forme :

$$q = F_\epsilon F_G \sigma A (T_1^4 - T_2^4) \quad (1.11)$$

Où  $F_\epsilon$  est la fonction d'émissivité, et  $F_G$  est la fonction géométrique "facteur de forme".

### 1.7.1. Rayonnement dans une enceinte

Un simple problème de rayonnement est rencontré lorsque nous avons une surface de transfert de chaleur à la température  $T_1$  complètement fermée par une surface beaucoup plus grande maintenue à  $T_2$ . Nous montrerons que l'échange radiant net dans ce cas peut être calculé avec :

$$q = \epsilon_1 \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad (1.12)$$

Les phénomènes de transfert de chaleur par rayonnement peuvent être extrêmement complexes et les calculs sont rarement aussi simples que le laisse entendre l'équation (1.11). Pour l'instant, nous tenons à souligner la différence de mécanisme physique entre les systèmes de transfert de chaleur par rayonnement et les systèmes de conduction-convection. [3]

## Conclusion

Dans ce chapitre les trois modes de transfert de chaleur sont passés en revue. L'équation de la chaleur dans sa forme générale a été démontrée pour le cas de la conduction.

Le mécanisme physique de convection est lié à la conduction thermique à travers la mince couche de fluide adjacente à la surface de transfert thermique. En conduction comme en convection, la loi de Fourier a été appliquée. Cependant pour le cas de la convection, l'application des lois de la mécanique des fluides sont indispensables pour l'évolution du gradient de température.

Le transfert de chaleur par rayonnement implique un mécanisme physique différent, celui de la propagation de l'énergie électromagnétique. Le concept d'un radiateur idéal, ou corps noir, qui rayonne l'énergie à un taux proportionnel à sa température absolue à la puissance quatrième a été introduit par l'étude du rayonnement thermique.

D'après les expressions qu'on a dans ce chapitre, il revient que la surface est un élément important du calcul pour les trois modes de transfert de chaleur : Plus la surface traversée par la chaleur est grande, plus le transfert de chaleur est important. Plus la surface en contact avec le fluide est grande, plus le potentiel de transfert de chaleur par convection est important. Pour la conduction, le transfert de chaleur sera presque toujours directement proportionnel à la surface. Pour la convection, le transfert de chaleur est une fonction compliquée de la mécanique des fluides ; Le problème est à son tour est fonction de la configuration géométrique de la surface chauffée et des propriétés thermiques et visqueuses du fluide véhiculé. Le transfert de chaleur par rayonnement implique également une interaction complexe entre les propriétés émissives de la surface et la géométrie de l'enceinte qui implique le transfert de rayonnement.

Le chapitre 2 traitera de la résolution numérique des équations décrites dans ce chapitre.

*Chapitre 2 :*  
*Résolution*  
*numérique des*  
*équations de la*  
*chaleur*

## 2.1. Introduction

Dans ce chapitre, on présentera les techniques utilisées pour résoudre numériquement l'équation de la chaleur en régime permanent et non permanent.

## 2.2. Conduction bidimensionnelle en régime permanent

Le transfert de chaleur en régime permanent sans source de chaleur est régi par l'équation (2.1) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

Cette équation est connue aussi sous le nom de l'équation de LAPLACE.

En supposant une conductivité thermique constante. La solution à cette équation peut être obtenue par des méthodes analytiques, numériques ou graphiques.

L'objectif de toute analyse de transfert de chaleur est généralement de prédire le flux de chaleur ou la température qui résulte d'un certain flux thermique. La solution de l'équation (2.1) donnera la température dans un corps bidimensionnel en fonction des deux coordonnées spatiales indépendantes  $x$  et  $y$ . Ensuite, le flux de chaleur dans les directions  $x$  et  $y$  peut être calculé à partir des équations de Fourier suivantes :

$$q_x = -k A_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.2)$$

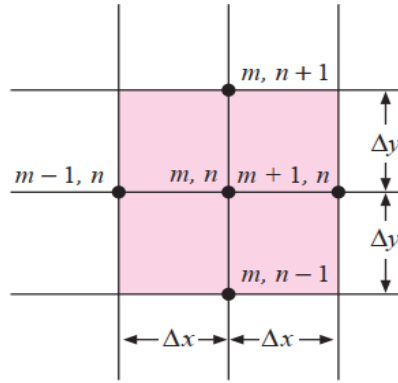
$$q_y = -k A_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.3)$$

Ces quantités de flux de chaleur sont dirigées soit dans la direction  $x$ , soit dans la direction  $y$ .

Un grand nombre de solutions analytiques aux problèmes de transfert de chaleur par conduction sont disponibles dans la littérature. Néanmoins, dans de nombreuses situations pratiques, la géométrie ou les conditions aux limites sont telles qu'aucune solution analytique n'a été obtenue, ou si la solution a été développée, elle implique une solution en série si complexe que l'évaluation numérique devient extrêmement difficile. Pour de telles situations, l'approche la plus fructueuse du problème est celle qui repose sur des techniques de différences finies, dont nous exposerons les principes de base dans la présente section.

Considérons un corps à deux dimensions qui doit être divisé en incréments égaux dans les directions  $x$  et  $y$ , comme illustré à la figure 2.1. Les points nodaux sont désignés comme indiqué, les  $m$  : emplacements indiquant l'incrément  $x$  et les  $n$  : emplacements indiquant l'incrément  $y$ . Nous souhaitons étudier les températures à n'importe lequel de ces points nodaux dans le corps, en utilisant l'équation (2.1) comme condition principale. Les différences finies sont utilisées pour approximer les incréments différentiels des coordonnées de température et d'espace. Plus nous choisissons des incréments finis, plus la distribution exacte de la température sera approchée.





**Figure 2.1 :** Nomenclature illustrant des croquis utilisée dans l'analyse numérique bidimensionnelle de la conduction thermique. [3]

Les gradients de température peuvent être écrits comme suit :

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{m+\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (2.4)$$

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{m-\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} \quad (2.5)$$

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{m,n+\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (2.6)$$

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{m,n-\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y} \quad (2.7)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_{m,n} \approx \frac{\left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{m+1/2,n} - \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{m-1/2,n}}{\Delta x} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} \quad (2.8)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]_{m,n} \approx \frac{\left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{m,n+1/2} - \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{m,n-1/2}}{\Delta y} = \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} \quad (2.9)$$

Ainsi l'approximation en différences finies pour l'équation (2.1) devient :

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (2.10)$$

Si  $\Delta x = \Delta y$ , l'équation (2.10) devient :

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0 \quad (2.11)$$

Comme nous considérons le cas de la conductivité thermique constante, les flux de chaleur peuvent tous être exprimés en termes de différences de température. L'équation (2.11) indique très simplement que le flux de chaleur net dans n'importe quel nœud est nul en régime permanent. En effet, l'approche numérique par différence finie remplace la distribution

continue de la température par des tiges fictives conductrices de chaleur reliées entre de petits points nodaux qui ne produisent pas de chaleur. Nous pouvons également concevoir un système de différences finies pour tenir compte de la production de chaleur. Nous ajoutons simplement le terme  $\frac{\dot{q}}{k}$  dans l'équation générale et on obtient :

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (2.12)$$

Ensuite, pour une grille carrée dans laquelle  $\Delta x = \Delta y$ ,

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + \frac{\dot{q}(\Delta x)^2}{k} - 4T_{m,n} = 0 \quad (2.13)$$

Pour utiliser la méthode numérique, l'équation (2.11) doit être écrite pour chaque nœud du matériau et le système d'équations résultant doit être résolu pour les températures aux différents nœuds. Un exemple très simple est présenté à la figure 2.2, et les quatre équations pour les nœuds 1, 2, 3 et 4 seraient les suivantes :

$$100 + 500 + T_2 + T_3 - 4T_1 = 0$$

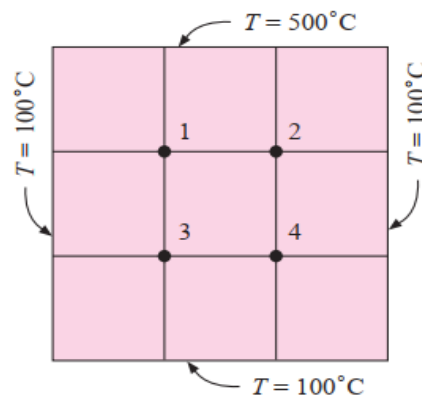
$$T_1 + 500 + 100 + T_4 - 4T_2 = 0$$

$$100 + T_1 + T_4 + 100 - 4T_3 = 0$$

$$T_3 + T_2 + 100 + 100 - 4T_4 = 0$$

La solution de ces équations est :

$$T_1 = T_2 = 250^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad T_3 = T_4 = 150^\circ\text{C}$$



**Figure 2. 2 :** Problème à quatre nœuds.[3]

Bien sûr, nous pourrions reconnaître par symétrie que  $T_1 = T_2$  et  $T_3 = T_4$  et n'aurait alors besoin que de deux équations nodales :

$$100 + 500 + T_3 - 3T_1 = 0$$

$$100 + T_1 + 100 - 3T_3 = 0$$

Une fois les températures déterminées, le flux thermique peut être calculé à partir de :

$$q = \sum k \Delta x \frac{\Delta T}{\Delta y} \quad (2.14)$$

Où le  $\Delta T$  est pris aux limites. Dans l'exemple, le flux de chaleur peut être calculé soit sur la face à 500 ° C, soit sur les trois faces à 100 ° C. Si une grille suffisamment fine est utilisée, les deux valeurs devraient être presque les mêmes. En règle générale, il est préférable de prendre la moyenne arithmétique des deux valeurs à utiliser dans les calculs. Dans l'exemple, les deux calculs donnent :

**Façade de 500 ° C :**

$$q = -k \frac{\Delta x}{\Delta y} [(250 - 500) + (250 - 500)] = 500 k$$

**Façade de 100 ° C :**

$$q = -k \frac{\Delta x}{\Delta y} [(250 - 100) + (150 - 100) + (150 - 100) + (150 - 100) + (150 - 100) + (250 - 100)] = -500 k$$

Les deux valeurs s'accordent dans ce cas.

Lorsque le solide est exposé à une certaine condition limite de convection, les températures à la surface doivent être calculées de façon différente de la méthode donnée ci-dessus. Considérons la limite illustrée à la figure 2.3.

Le bilan énergétique sur le nœud (m, n) est :

$$-k \Delta y \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} - k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{m,n} - T_{m,n+1}}{\Delta y} - k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y} = h \Delta y (T_{m,n} - T_{\infty}) \quad (2.15)$$

Si  $\Delta x = \Delta y$ , la température limite est exprimée dans l'équation :

$$T_{m,n} \left( \frac{h \Delta x}{k} + 2 \right) - \frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} - \frac{1}{2} (2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) = 0 \quad (2.16)$$

Une équation de ce type doit être écrite pour chaque nœud le long de la surface illustrée à la figure 2.3. Ainsi, lorsqu'une condition limite de convection est présente, une équation comme (2.16) est utilisée à sa limite et une équation comme (2.11) est utilisée pour les points intérieurs.

L'équation (2.16) s'applique à une surface plane exposée à une condition limite de convection. Elle ne s'appliquera pas à d'autres situations, comme un mur isolé ou un angle exposé à une condition limite de convection. Considérons la section d'angle illustrée à la figure 2.4.

Le bilan énergétique de la section d'angle est le suivant :

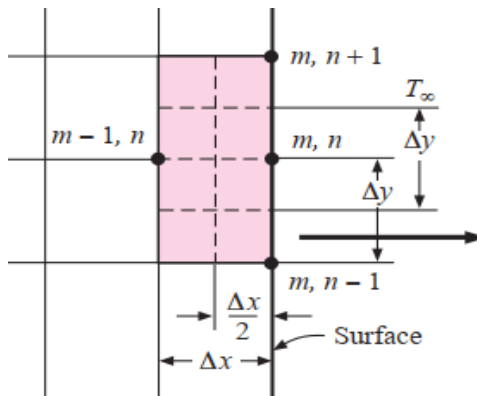
$$-k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} - k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y} = h \frac{\Delta x}{2} (T_{m,n} - T_{\infty}) + h \frac{\Delta y}{2} (T_{m,n} - T_{\infty}) \quad (2.17)$$

Si  $\Delta x = \Delta y$  :

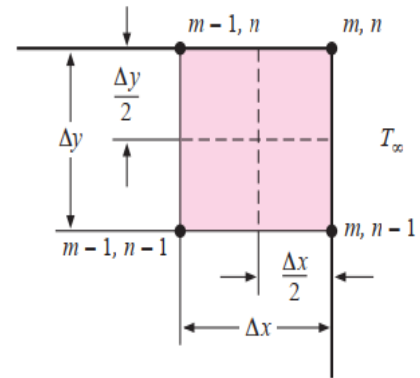
$$2T_{m,n} \left( \frac{h\Delta x}{k} + 1 \right) - 2 \frac{h\Delta x}{k} T_{\infty} - (T_{m-1,n} + T_{m,n-1}) = 0 \quad (2.18)$$

Les autres conditions aux limites peuvent être traitées de la même manière, et un résumé pratique des équations nodales est présenté dans le tableau 2.1 pour différentes situations géométries et limites.

Les situations (f) et (g) présentent un intérêt particulier car elles fournissent les équations de calcul qui peuvent être utilisées avec des limites de surfaces courbées tout en utilisant des incréments uniformes en  $\Delta x$  et  $\Delta y$ .

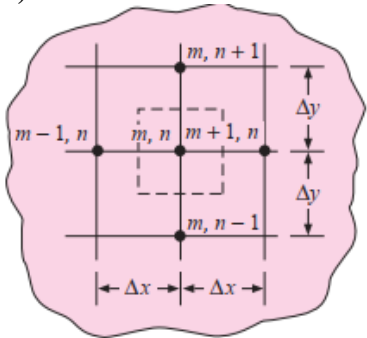


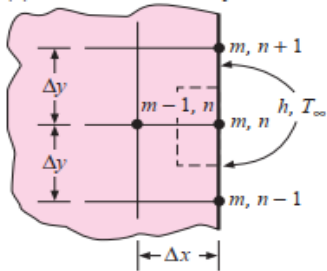
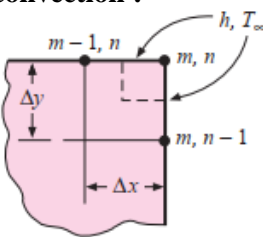
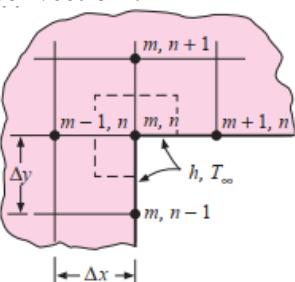
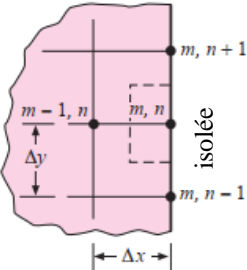
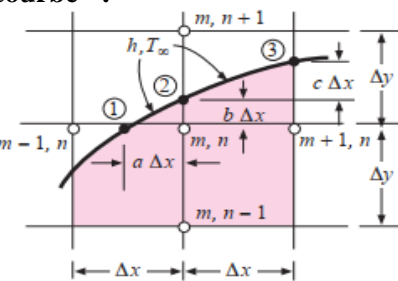
**Figure 2.3 :** Nomenclature de l'équation nodale avec condition au limite convective. [3]



**Figure 2.4 :** Nomenclature pour l'équation nodale avec convection à un angle de section. [3]

**Tableau 2.1 :** Résumé des formules nodales pour le calcul des différences finies. (Les lignes pointillées indiquent le volume de l'élément.) †

Situation physique	Équation nodale pour des incréments égaux en x et y (la deuxième équation en situation est en forme pour l'itération de Gauss-Seidel)
<b>a) Nœud intérieur :</b> 	$T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0 \quad (2.10)$ $(T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + T_{m,n-1})/4 = T_{m,n} \quad (2.11)$

<p><b>b) Nœud limite de convection :</b></p> 	$\frac{h\Delta x}{k} T_{\infty} + \frac{1}{2}(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) - \left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right) T_{m,n} = 0 \quad (2.19)$ $\frac{T_{m-1,n} + (T_{m,n+1} + T_{m,n-1})/2 + Bi T_{\infty}}{2 + Bi} = T_{m,n} \quad (2.20)$ $Bi = \frac{h\Delta x}{k}$
<p><b>c) Angle extérieur avec limite de convection :</b></p> 	$2\frac{h\Delta x}{k} T_{\infty} + (T_{m-1,n} + T_{m,n-1}) - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 1\right) T_{m,n} = 0 \quad (2.21)$ $\frac{(T_{m-1,n} + T_{m,n-1})/2 + Bi T_{\infty}}{1 + Bi} = T_{m,n}$ $\frac{h\Delta x}{k} = Bi$
<p><b>d) Angle intérieur avec limite de convection :</b></p> 	$2\frac{h\Delta x}{k} T_{\infty} + 2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} - 2\left(3 + \frac{h\Delta x}{k}\right) T_{m,n} = 0 \quad (2.22)$ $\frac{Bi T_{\infty} + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + (T_{m+1,n} + T_{m,n-1})/2}{3 + Bi} = T_{m,n} \quad (2.23)$ $Bi = \frac{h\Delta x}{k}$
<p><b>e) Limite isolée:</b></p> 	$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n} - 4T_{m,n} = 0 \quad (2.24)$ $(T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n})/4 = T_{m,n} \quad (2.25)$
<p><b>f) Nœud intérieur près de la limite courbe ‡ :</b></p> 	$\frac{2}{b(b+1)} T_2 + \frac{2}{a+1} T_{m+1,n} + \frac{2}{b+1} T_{m,n-1} + \frac{2}{a(a+1)} T_1 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) T_{m,n} = 0 \quad (2.26)$
<p><b>g) Nœud limite avec convection le long d'un nœud limite courbe- nœud limite 2 pour (f) ci-dessus § :</b></p>	$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} T_1 + \frac{b}{\sqrt{c^2+1}} T_3 + \frac{a+1}{b} T_{m,n} + \frac{h\Delta x}{k} (\sqrt{c^2+1} + \sqrt{a^2+b^2}) T_{\infty} - \left[ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{a+1}{b} + (\sqrt{c^2+1} + \sqrt{a^2+b^2}) \frac{h\Delta x}{k} \right] T_2 = 0 \quad (2.27)$

† La condition aux limites de convection se traduit en posant  $h = 0$  ( $Bi = 0$ ).

‡ Cette équation est obtenue en multipliant la résistance par  $4/(a + 1)(b + 1)$

§ Cette relation est obtenue en divisant la formulation de la résistance par 2.

### Exemple : Problème à neuf nœuds.

Considérons le carré de l'exemple de la figure de l'exemple. La face gauche est maintenue à  $100^\circ\text{C}$  et la face supérieure est maintenue à  $500^\circ\text{C}$ , tandis que les deux autres faces sont exposées à un environnement à  $100^\circ\text{C}$ .

$$h=10\text{W/m}^2.\text{°C} \quad \text{et} \quad k = 10\text{W/m}.\text{°C}$$

Le bloc est de  $1\text{m}^2$ . Calculez la température des différents nœuds comme indiqué à la figure de l'exemple 2.1 et les flux de chaleur aux limites.

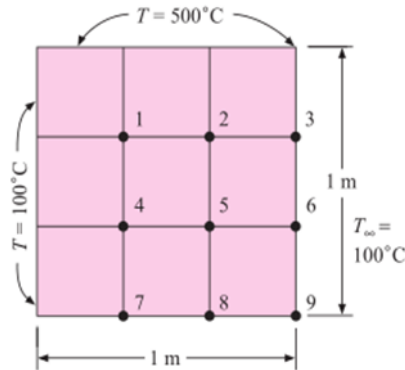
### Résultat obtenu :

L'équation nodale pour les nœuds 1, 2, 4 et 5 est la suivante :

$$T_{m+1,n}+T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1} - 4T_{m,n}=0$$

L'équation pour les nœuds 3, 6, 7 et 8 est donnée par l'équation (2.16), et l'équation pour le nœud 9 est donnée par l'équation (2.18) :

$$\frac{h\Delta x}{k} = \frac{(10)(1)}{(3)(10)} = \frac{1}{3}$$



**Figure 2.5 :** Nomenclature de l'exemple d'un problème à neuf nœuds. [3]

Les équations pour les nœuds 3 et 6 s'écrivent :

$$2T_2+T_6+567-4.67T_3=0$$

$$2T_5+T_3+T_9+67-4.67T_6=0$$

Les équations pour les nœuds 7 et 8 sont données par :

$$2T_4+T_8+167-4.67T_7=0$$

$$2T_5+T_7+T_9+67-4.67T_8=0$$

Et l'équation pour le nœud 9 est :

$$T_6 + T_8 + 67 - 2.67T_9 = 0$$

Nous avons donc neuf équations et neuf températures nodales inconnues. La solution de ce système d'équations donne :

Nœud	Température, °C
1	280.67
2	330.30
3	309.38
4	192.38
5	231.15
6	217.19
7	157.70
8	184.71
9	175.62

Les flux de chaleur aux limites sont calculés de deux manières : comme flux de conduction pour les faces 100 et 500 °C et comme flux de convection pour les deux autres faces.

- Le flux de chaleur pour la face 500 °C, est :

$$q = \sum k \Delta x \frac{\Delta T}{\Delta y} = (10) \left[ 500 - 280.67 + 500 - 330.30 + (500 - 309.38) \left( \frac{1}{2} \right) \right] = 4843.4 \text{ W/m}$$

Le flux de chaleur sortant de la face 100 °C est le suivant :

$$q = \sum k \Delta y \frac{\Delta T}{\Delta x} = (10) \left[ 280.67 - 100 + 192.38 - 100 + (157.70 - 100) \left( \frac{1}{2} \right) \right] = 3019 \text{ W/m}$$

- Le flux de chaleur par convection à la sortie de la face droite est donné par la relation de convection suivante :

$$q = \sum h \Delta y (T - T_{\infty})$$

$$q = (10) \left( \frac{1}{3} \right) \left[ 309.38 - 100 + 217.19 - 100 + (175.62 - 100) \left( \frac{1}{2} \right) \right] = 1214.6 \text{ W/m}$$

- Le flux de chaleur par convection qui sort de la face inférieure est le suivant :

$$q = \sum h \Delta x (T - T_{\infty}) = (10) \left( \frac{1}{3} \right) \left[ (100 - 100) \left( \frac{1}{2} \right) + 157.70 - 100 + 184.71 - 100 + (175.62 - 100) \left( \frac{1}{2} \right) \right] = 600.7 \text{ W/m}$$

- Le flux de chaleur total à l'extérieur est :

$$q_{\text{tot}} = 3019 + 1214.6 + 600.7 = 4834.3 \text{ W/m}$$

Les résultats présentés ci-dessus sont obtenus à l'aide du logiciel Microsoft Excel.

Le modèle ou Template élaboré sous Excel est présenté au chapitre 3.





Les solutions finales pour les températures inconnues sont écrites sous forme développée :

$$\begin{aligned} T_1 &= b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + \dots + b_{1n}C_n \\ T_2 &= b_{21}C_1 + \dots \\ &\vdots \\ T_n &= b_{n1}C_1 + b_{n2}C_2 + \dots + b_{nn}C_n \end{aligned} \quad (2.31)$$

Donc plus le nombre de nœuds est grand, plus la solution est complexe et il prend plus de temps. Cependant pour la plupart des problèmes de conduction, la matrice contient un grand nombre d'éléments nuls, ce qui simplifie quelque peu la procédure de calcul.

Par exemple, la notation matricielle pour le système de l'exemple précédent serait :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4.67 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4.67 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4.67 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4.67 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -600 \\ -500 \\ -567 \\ -100 \\ 0 \\ -67 \\ -167 \\ -67 \\ -67 \end{bmatrix}$$

Nous voyons qu'en raison de la structure des équations, la matrice des coefficients est très rare. C'est pour sa que les méthodes de solution itératives peuvent être très efficaces. L'itération de la méthode de Gauss-Seidel est probablement la plus utilisée pour la résolution de ces équations de transfert de chaleur. [3]

### 2.3. Conduction bidimensionnelle en régime transitoire

Dans ce qui suit, nous reprenons l'équation de la conduction avec le terme contenant la variable de temps  $\tau$ . l'équation de la chaleur bidimensionnelle en cordonnées cartésiennes est en régime transitoire s'écrit :

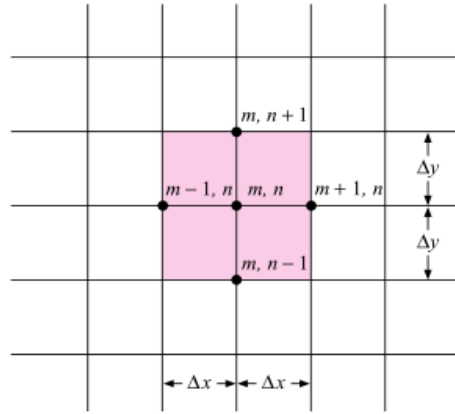
$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.32)$$

Les deux dérivées partielles spatiales rapportées précédemment s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} (T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}) \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2} (T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}) \quad (2.34)$$

Considérons un corps bidimensionnel divisé en incréments comme le montre la figure 2.6. Au sein de corps solide.



**Figure 2.6 :** Nomenclature pour la solution numérique d'un problème bidimensionnel de conduction en régime transitoire. [3]

La dérivée partielle par rapport au temps du terme écrit de l'équation (2.32) est approximée par :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta \tau} \quad (2.35)$$

En remplaçant les équations (2.33) à (2.35) dans l'équation (2.32), on obtient :

$$\frac{T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p - 2T_{m,n}^p}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p - 2T_{m,n}^p}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta \tau} \quad (2.36)$$

Ainsi, si les températures des différents nœuds sont connues à un moment donné, les températures après un incrément de temps  $\Delta \tau$  peuvent être calculées en écrivant une équation de type Equation (2.36) pour chaque nœud et en obtenant les valeurs de  $T_{m,n}^{p+1}$ . La procédure peut être répétée pour obtenir la distribution après le nombre d'incrément de temps désiré.

Si les incréments de coordonnées spatiales sont choisis de telle sorte que  $\Delta x = \Delta y$

L'équation résultante pour  $T_{m,n}^{p+1}$  devient :

$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} (T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p) + \left[ 1 - \frac{4\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \right] T_{m,n}^p \quad (2.37)$$

Si les incréments de temps et de distance sont convenablement choisis de manière que :

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} = 4 \quad (2.38)$$

On voit que la température du nœud (m, n) après un incrément de temps est simplement la moyenne arithmétique des quatre températures nodales environnantes au début de l'incrément de temps.

Lorsqu'il s'agit d'un système unidimensionnel, l'équation devient :

$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} (T_{m+1}^p + T_{m-1}^p) + \left[ 1 - \frac{4\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \right] T_{m,n}^p \quad (2.39)$$

Et si les incréments de temps et de distance sont choisis de telle sorte que :

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} = 2$$

La température du nœud  $m$  après l'incrément de temps est donnée comme la moyenne arithmétique des deux températures nodales adjacentes au début de l'incrément de temps.

Le choix des valeurs 4 et 2 pour le paramètre de l'équation (2.37) facilite grandement les calculs. Le rapport de l'équation (2.38) est désigné par  $M$  :

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} = M \quad (2.40)$$

Une fois que les incréments de distance et la valeur de  $M$  sont établis, l'incrément de temps est fixé, et nous ne pouvons pas le modifier sans changer la valeur de  $\Delta x$  ou  $M$ , ou des deux.

Plus les valeurs de  $\Delta x$  et  $\Delta \tau$  sont élevées, plus la solution sera rapide. Par contre, plus la valeur de ces incréments dans les variables indépendantes est faible, plus on obtiendra de précision. On pourrait supposer qu'une petite distance des incréments pourrait être utilisée pour une plus grande précision en combinaison avec des incréments de temps importants pour accélérer la solution.

Cependant les équations de différence finie limitent les valeurs de  $\Delta \tau$  qui peuvent être utilisées une fois que  $\Delta x$  est choisi. Si  $M < 2$  dans l'équation (2.39), le coefficient de  $T_m^p$  devient négatif.

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} = \begin{cases} M \geq 2 & \text{systems unidimensionnel} \\ M \geq 4 & \text{systems bidimensionnel} \end{cases}$$

Cette restriction limite automatiquement notre choix de  $\Delta \tau$ , une fois que  $\Delta x$  est établi. La restriction ci-dessus est imposée par le sens physique.

Les équations de différences finies données ci-dessus sont utiles pour déterminer la température interne d'un solide en fonction de l'espace et du temps. A la frontière du solide, une résistance de convection à l'écoulement intervient généralement, de sorte que les relations ci-dessus ne s'appliquent plus.

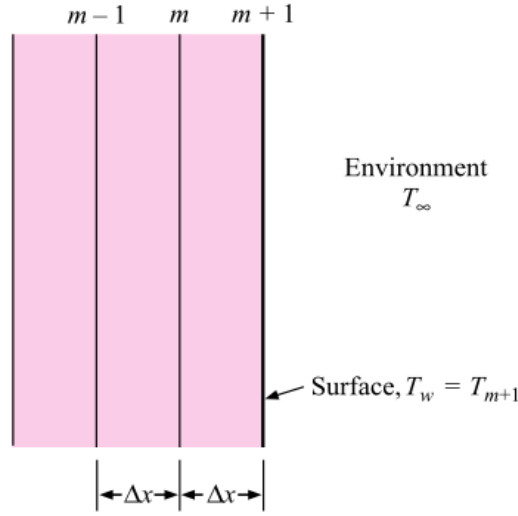
En général, chaque condition aux limites de convection doit être traitée séparément, car elle est en fonction de la forme géométrique considérée. À titre d'exemple, nous présentons le cas du mur plat.

Pour le système unidimensionnel illustré à la figure 2.7, le bilan énergétique avec une limite de convection s'écrit :

$$-KA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\text{paroi}} = hA(T_p - T_\infty) \quad (2.41)$$

L'approximation par différences finies donne :

$$-K \frac{\Delta y}{\Delta x} (T_{m+1} - T_m) = h \Delta y (T_{m+1} - T_\infty)$$



**Figure 2.7 :** Discrétisation du problème de frontières avec une condition de convection. [3]

Où :

$$T_{m+1} = \frac{T_m + (h\Delta x/k)T_\infty}{1 + h\Delta x/k} \quad (2.42)$$

Pour appliquer cette condition, il faut calculer la température de surface  $T_{m+1}$  à chaque incrément de temps et ensuite utiliser cette température dans les équations nodales pour les points intérieurs du solide. Ce n'est qu'une approximation car nous avons négligé la capacité thermique de l'élément du mur à la limite. Cette approximation fonctionnera assez bien lorsqu'un grand nombre d'incrémentes en  $x$  sont utilisés parce que la partie de la capacité thermique qui est négligée est alors faible par rapport au total. Nous pouvons tenir compte de la capacité calorifique de façon générale en considérant la paroi bidimensionnelle de la figure 2.3 exposée à une condition aux limites de convection, que nous reprenons ci après voir figure 2.8. Pour le bilan énergétique transitoire sur le nœud  $(m, n)$ , on a somme de l'énergie transférée par conduction et convection dans le nœud est égale à la variation de l'énergie interne du nœud. Ainsi :

$$k\Delta y \frac{T_{m-1,n}^p - T_{m,n}^p}{\Delta x} + k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{m,n+1}^p - T_{m,n}^p}{\Delta y} + k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{m,n-1}^p - T_{m,n}^p}{\Delta y} + h\Delta y (T_\infty - T_{m,n}^p) = \rho c \frac{\Delta x}{2} \Delta y \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta \tau} \quad (2.43)$$

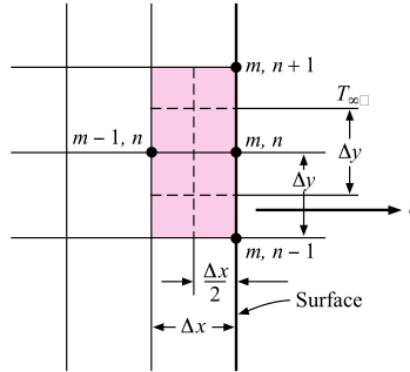
Si  $\Delta x = \Delta y$ , la relation pour  $T_{m,n}^{p+1}$  devient :

$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \left\{ 2 \frac{h\Delta x}{k} T_\infty + 2T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p + \left[ \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} - 2 \frac{h\Delta x}{k} - 4 \right] T_{m,n}^p \right\} \quad (2.44)$$

La relation unidimensionnelle correspondante s'écrit :

$$T_m^{p+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \left\{ 2 \frac{h \Delta x}{k} T_\infty + 2 T_{m-1}^p + \left[ \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} - 2 \frac{h \Delta x}{k} - 2 \right] T_m^p \right\} \quad (2.45)$$

On remarque que le choix de paramètre  $(\Delta x)^2/\alpha \Delta \tau$  n'est pas aussi simple que pour les points nodaux intérieurs car le coefficient de transfert thermique influence le choix.



**Figure 2.8** : Schéma de discrétisation du nœud à la frontière avec une condition de convection. [3]

Il est possible de choisir la valeur de ce paramètre pour que le coefficient de  $T_m^p$  ou  $T_{m,n}^p$  soit nul. Ces valeurs seraient alors :

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} = \begin{cases} 2 \left( \frac{h \Delta x}{k} + 1 \right) & \text{pour le cas unidimensionnel} \\ 2 \left( \frac{h \Delta x}{k} + 2 \right) & \text{pour le cas bidimensionnel} \end{cases}$$

Pour assurer la convergence de la solution numérique, toutes les sélections du paramètre

$(\Delta x)^2/\alpha \Delta \tau$  doivent être restreintes selon les critères suivants :

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} \geq \begin{cases} 2 \left( \frac{h \Delta x}{k} + 1 \right) & \text{pour le cas unidimensionnel} \\ 2 \left( \frac{h \Delta x}{k} + 2 \right) & \text{pour le cas bidimensionnel} \end{cases}$$

### 2.3.1. Différences finies en amont et en aval

Les équations ci-dessus ont été développées sur la base d'une technique de différence vers l'avant en ce que la température d'un nœud à un incrément de temps futur est exprimée en termes de températures nodales environnantes au début de l'incrément de temps. Les expressions sont appelées formulations explicites car il est possible d'écrire les températures nodales  $T_{m,n}^{p+1}$  explicitement en termes de températures antérieures  $T_{m,n}^p$ . Dans cette formulation, le calcul se fait directement d'un incrément de temps à l'autre jusqu'à ce que la distribution de température soit calculée à l'état final souhaité.

L'équation de différence peut également être formulée en calculant les dérivées spatiales en termes de températures à l'incrément de temps  $p+1$ . Un tel arrangement est appelé une formulation de différence en amont parce que la dérivée temporelle recule à partir des

temps de conduction thermique dans le nœud. L'équation équivalente à l'équation (2.36) serait alors :

$$\frac{T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1} - 2T_{m,n}^{p+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} - 2T_{m,n}^{p+1}}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta \tau} \quad (2.46)$$

L'équivalence à l'équation (4-29) est la suivante :

$$T_{m,n}^p = \frac{-\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} (T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) + \left[ 1 + \frac{4\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \right] T_{m,n}^{p+1} \quad (2.47)$$

La formulation des différences finies en amont ne permet pas de calculer explicitement le  $T^{p+1}$  en termes de  $T^p$ . Au contraire, un ensemble d'équations doivent être écrites pour l'ensemble du système nodal et résolues simultanément pour déterminer les températures  $T^{p+1}$ .

Donc la méthode des différences finies en amont produit une formulation implicite pour les températures dans l'analyse transitoire.

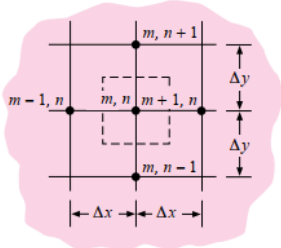
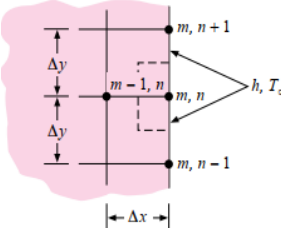
Les nombres Biot et Fourier peuvent également être définis de la manière suivante :

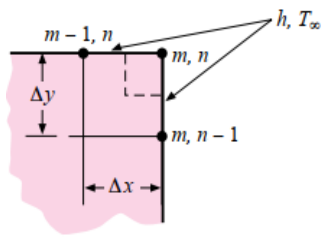
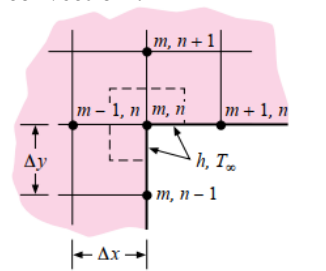
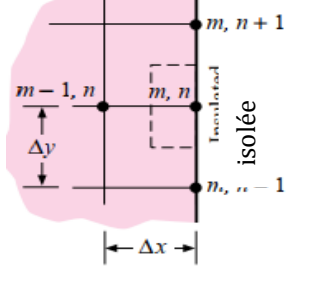
$$Bi = \frac{h \Delta x}{k} \quad (2.48)$$

$$Fo = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \quad (2.49)$$

Les tableaux 2.2 et 2.3 résument certaines équations nodales typiques dans les formulations explicite et implicite. Pour les cas de  $\Delta x = \Delta y$  présentés dans le tableau 2.2, l'exigence de stabilité la plus restrictive (la plus petite  $\Delta \tau$ ) est représentée par un nœud d'angle extérieur, en supposant que tous les nœuds de convection ont la même valeur de Biot.

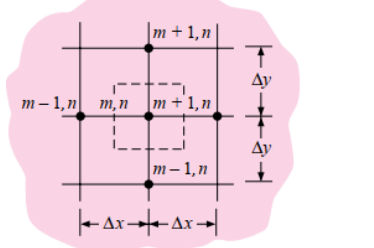
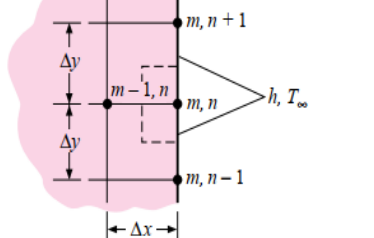
**Tableau 2.2** : Equations nodales explicites. (Les lignes pointillées indiquent le volume de l'élément).†

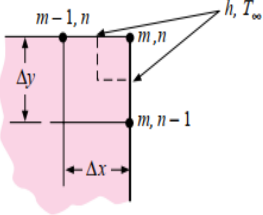
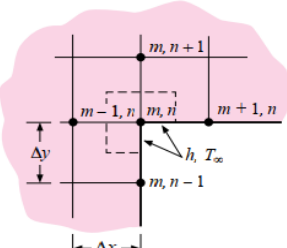
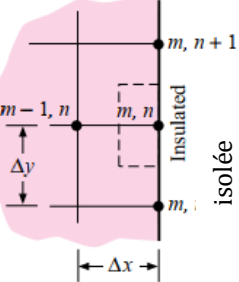
Situation Physique	Equation nodales pour ( $\Delta x = \Delta y$ )	Critères de stabilités
<b>a) Nœud intérieur :</b> 	$T_{m,n}^{p+1} = Fo(T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m+1,n}^p + T_{m,n-1}^p) + [1 - 4(Fo)] T_{m,n}^p \quad (2.50)$ $T_{m,n}^{p+1} = Fo(T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m+1,n}^p + T_{m,n-1}^p - 4T_{m,n}^p) + T_{m,n}^p \quad (2.51)$	$Fo \leq \frac{1}{4} \quad (2.52)$
<b>b) Nœud limite de convection:</b> 	$T_{m,n}^{p+1} = Fo[2T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p + 2(Bi) T_{\infty}^p] + [1 - 4(Fo) - 2(Fo)(Bi)] T_{m,n}^p \quad (2.53)$ $T_{m,n}^{p+1} = Fo[2Bi(T_{\infty}^p - T_{m,n}^p) + 2T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p - 4T_{m,n}^p] + T_{m,n}^p \quad (2.54)$	$Fo(2 + Bi) \leq \frac{1}{2} \quad (2.55)$

<p>c) Angle extérieur avec limite de convection :</p> 	$T_{m,n}^{p+1} = 2(Fo) [T_{m-1,n}^p + T_{m,n-1}^p + 2(Bi) T_{\infty}^p] + [1 - 4(Fo) - 2(Fo)(Bi)] T_{m,n}^p \quad (2.56)$ $T_{m,n}^{p+1} = 2Fo[T_{m-1,n}^p + T_{m,n-1}^p - 2T_{m,n}^p + 2Bi(T_{\infty}^p - T_{m,n}^p)] + T_{m,n}^p \quad (2.57)$	$Fo(1+Bi) \leq \frac{1}{4} \quad (2.58)$
<p>d) Angle intérieur avec limite de convection :</p> 	$T_{m,n}^{p+1} = \frac{2}{3} (Fo) [2T_{m,n+1}^p + 2T_{m+1,n}^p + 2T_{m-1,n}^p + 2T_{m,n-1}^p + 2(Bi)T_{\infty}^p] + [(1 - 4(Fo)) - \frac{4}{3} (Fo) (Bi)] T_{m,n}^p \quad (2.59)$ $T_{m,n}^{p+1} = (\frac{4}{3}) Fo [T_{m,n+1}^p + T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p - 3T_{m,n}^p + Bi(T_{\infty}^p - T_{m,n}^p)] + T_{m,n}^p \quad (2.60)$	$Fo(3+Bi) \leq \frac{3}{4} \quad (2.61)$
<p>e) Limite isolée :</p> 	$T_{m,n}^{p+1} = Fo[2T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p][1 - 4(Fo)] T_{m,n}^p \quad (2.62)$	$Fo \leq \frac{1}{4} \quad (2.63)$

†: Les surfaces de convection peuvent être isolées en fixant  $h=0$  ( $Bi=0$ ).

**Tableau 2.3 :** Equations nodales Implicite. (Les lignes pointillées indiquent le volume de l'élément.)

Situation Physique	Equations Nodales pour $\Delta x = \Delta y$	
<p>a) Nœud intérieur :</p> 	$[1 + 4(Fo)] T_{m,n}^{p+1} - Fo(T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) - T_{m,n}^p = 0 \quad (2.64)$	
<p>b) Nœud limite de convection :</p> 	$[1 + 2(Fo)(2+Bi)] T_{m,n}^{p+1} - Fo[T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} + 2T_{m-1,n}^{p+1} + 2(Bi) T_{\infty}^{p+1}] - T_{m,n}^p = 0 \quad (2.65)$	

<p><b>c) Angle extérieur avec limite de convection :</b></p> 	$[1+4(Fo)(1+Bi)] T_{m,n}^{p+1} - 2(Fo)[T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} + 2(Bi) T_{\infty}^{p+1} - T_{m,n}^p] = 0 \quad (2.66)$
<p><b>d) Angle intérieur avec limite de convection :</b></p> 	$[1+4(Fo)\left(1 + \frac{Bi}{3}\right)] T_{m,n}^{p+1} - \frac{2}{3} Fo \times [2T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} + 2T_{m,n+1}^{p+1} + 2T_{m+1,n}^{p+1} + 2(Bi) T_{\infty}^{p+1}] - T_{m,n}^p = 0 \quad (2.67)$
<p><b>e) Limite isolée :</b></p> 	$[1+4(Fo)] T_{m,n}^{p+1} - Fo (2T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) - T_{m,n}^p = 0 \quad (2.68)$

L'avantage d'une procédure explicite de différence prévisionnelle est le calcul direct des températures nodales. Cependant, la stabilité de ce calcul est régie par la sélection des valeurs de  $\Delta x$  et  $\Delta \tau$ . Une sélection d'une petite valeur de  $\Delta x$  force automatiquement la sélection d'une valeur maximale de  $\Delta \tau$ . D'autre part, aucune restriction de ce type n'est imposée sur la solution des équations qui sont obtenues à partir de la formulation implicite.

Cela signifie que des incréments de temps plus importants peuvent être sélectionnés pour accélérer le calcul.

Pour les problèmes impliquant un grand nombre de nœuds, la méthode implicite peut se traduire par une réduction du temps total consacré par l'ordinateur à la solution finale parce que de très petits incréments de temps peuvent être imposés dans la méthode explicite à partir des exigences de stabilité. Des incréments beaucoup plus importants dans  $\Delta \tau$  peuvent être utilisés avec la méthode implicite pour accélérer la solution.

La plupart des problèmes ne concerneront qu'un nombre modeste de nœuds et la formulation explicite sera tout à fait satisfaisante pour une solution. [3]

Des exemples de feuilles de calculs sont illustrées dans les chapitres 3 et 4.



*Chapitre 3 :*  
*Simulation*  
*numérique*

### **3.1. Introduction**

Avant d'entamer la simulation numérique pour la résolution des problèmes thermiques auxquelles nous avons eu recours dans notre étude. A l'aide d'un logiciel de simulation numérique, il convient de clarifier certains points sur cette méthode.

C'est évident que les méthodes numériques et de nombreux logiciels de grande taille sont des outils de conception inéluctables, puissants pour l'ingénieur, qui sont amplement utilisés dans l'industrie.

Le choix d'une telle méthode repose particulièrement sur le type et la complexité du problème à résoudre.

Dans notre étude, nous utilisons le « Microsoft Excel ». Ce logiciel est souvent utilisé, qui nous sert d'outil de simulation et d'analyse. La présentation de ce dernier se fera dans ce qui suit.

### **3.2. Présentation de Microsoft Excel**

Microsoft Excel est un utilitaire très polyvalent de tableur, il est bien plus qu'une "super calculatrice". C'est certes un outil de calcul très puissant, mais c'est aussi un outil de présentation des données, que ce soit sous forme de tableaux ou de graphiques, un outil de simulation et d'analyse, etc. Il est souvent utilisé comme outil de gestion de base de données. En effet, compte tenu de sa grande souplesse, il est tout à fait possible de stocker des données dans des feuilles de calcul, qui deviennent alors de vraies "mini-bases de données".

Excel dispose d'ailleurs de nombreuses fonctionnalités permettant d'exploiter et d'analyser ces données. Mais les tableaux croisés dynamiques sont sans conteste la fonctionnalité la plus performante et la plus souple. Ils permettent d'obtenir rapidement un tableau de synthèse à partir de plusieurs milliers d'informations. De plus, l'utilisateur bénéficie d'une grande souplesse dans la construction des tableaux car Excel permet de modifier leur structure de façon simple et conviviale. [4]

### 3.3. Description de l'interface générale de l'Excel

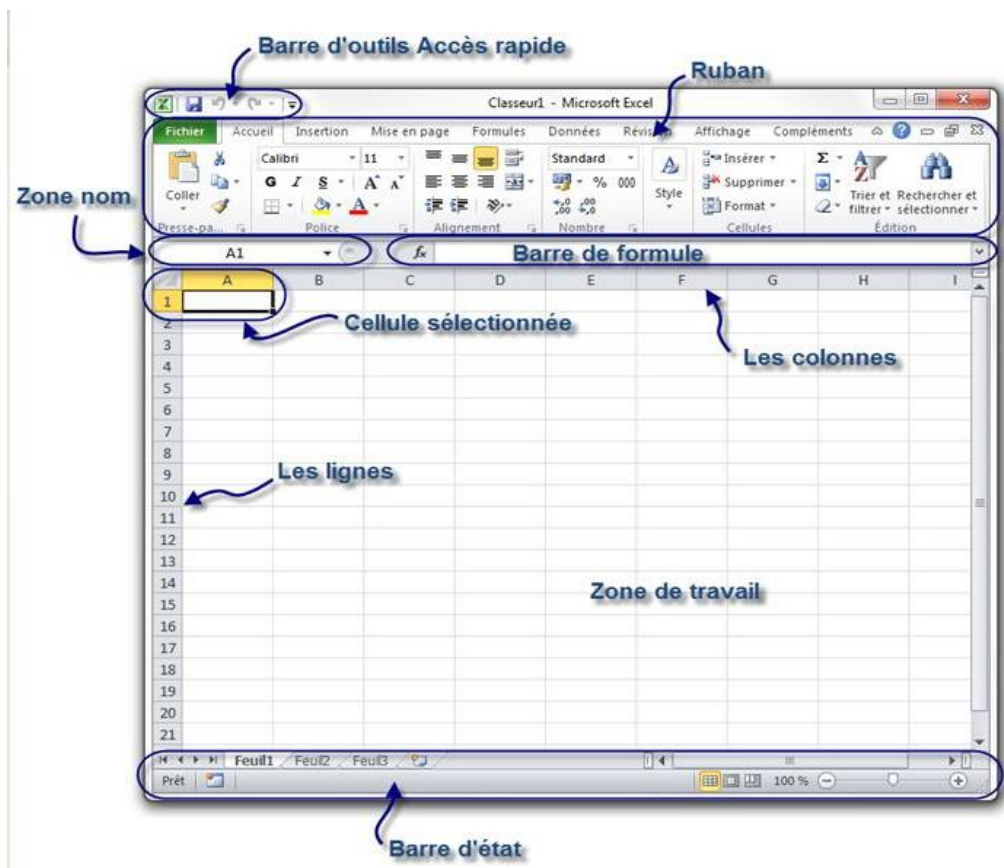


Figure 3.1 : Interface générale de Microsoft Excel. [5]

Il est nécessaire de s'attarder sur quelques détails de cette capture de l'interface. Au milieu, il y a un quadrillage très vaste. C'est la « zone de travail ».

#### 3.3.1. Le ruban :

Tout en haut de la fenêtre, il y a ce qu'on appelle le « ruban ». C'est l'une des plus grosses mises à jour d'Office 2007, repris mieux encore dans Office 2010 : un ruban, graphiquement évolué, duquel sont disponibles toutes les fonctionnalités du logiciel.

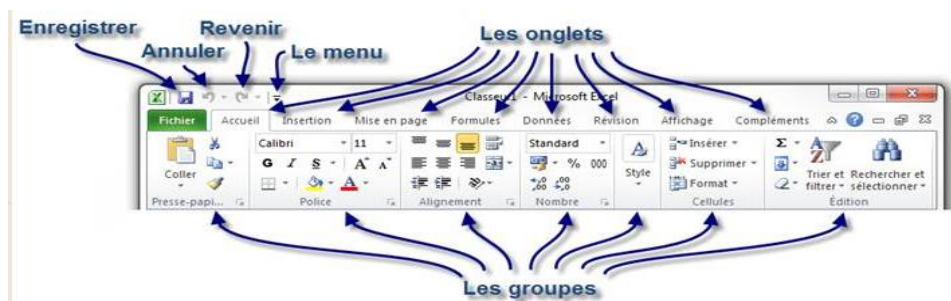


Figure 3.2 : Représentation de ruban. [5]

Dès l'arrivée sous Excel, l'onglet « Accueil » est ouvert dans le ruban, donnant accès aux fonctionnalités les plus basiques du logiciel d'analyse de données.

À gauche de cet onglet se trouve le menu « Fichier ». C'est un panel d'options diverses et variées sur les classeurs Excel, ainsi que sur le logiciel lui-même. Toutes les options, basiques ou avancées, permettent de configurer et de personnaliser Excel.

À droite se trouve un très large choix de fonctionnalités du logiciel de traitement de texte, accessibles grâce à cette fameuse structure en onglets. Ces onglets peuvent par ailleurs varier. D'autres onglets pourront apparaître au cours de l'utilisation de l'Excel. Ce sont des onglets contextuels.

Chaque onglet du ruban Office est lui-même divisé en plusieurs groupes. Ils permettent de mieux se repérer et de ne pas avoir une foule de fonctionnalités dans un espace aussi réduit. Ainsi Excel a séparé toutes les fonctionnalités selon leur utilisation : la mise en forme de la police dans un groupe, la mise en forme des paragraphes dans un autre, etc.

Mais n'oublions pas qu'Office 2010, en l'occurrence Excel, possède plusieurs milliers de fonctionnalités dans le ruban. C'est la raison pour laquelle certains groupes de fonctionnalités ne sont pas complètement affichés.

### 3.3.2. La barre d'outils Accès rapide :

Plus haut encore se trouve la « barre d'outils Accès rapide » à partir de laquelle on peut ouvrir et enregistrer des fichiers et accéder à beaucoup de fonctions d'Excel.



**Figure 3.3 :** Barre d'outils accès rapide [5]

La barre d'Accès rapide fonctionne comme la barre de lancement rapide de Microsoft Windows. Elle permet l'accès rapide aux fonctionnalités globalement les plus utilisées de Word, sous forme générale.

L'icône Excel ne fait pas partie de la barre d'accès rapide. Elle simule simplement le clic droit sur la barre de titre. Par défaut, les fonctionnalités suivantes sont déjà présentes :

- ✓ Enregistrer (dont le raccourci clavier est Ctrl + S, notez-le) : permet d'enregistrer notre document.
- ✓ Annuler la dernière action (dont le raccourci clavier est Ctrl + Z, notez-le lui aussi).
- ✓ Répéter la dernière action (dont le raccourci clavier est Ctrl + Y).

En effet les trois fonctionnalités les plus utilisées, quel que soit le document qu'on édite. Néanmoins, il est possible d'ajouter plusieurs autres fonctionnalités. On clique simplement sur la flèche descendante à droite de cette barre. Elle permet d'ajouter (ou supprimer) plusieurs fonctionnalités telles que la création d'un nouveau fichier (Ctrl + N), l'ouverture d'un fichier enregistré auparavant sur le disque dur (Ctrl + O), l'impression (Ctrl + P), la correction orthographique (F7), etc.

### 3.3.3. La barre de formules :

C'est cette barre qui se trouve Entre la zone de travail et le ruban. Cette zone est très importante, elle se compose des éléments suivants :

- ✓ Zone de nom : qui affiche le nom de la cellule sélectionné.
- ✓ Inséré une fonction : qui permet d'ouvrir la bibliothèque des fonctions et de choisir celle a utilisé.
- ✓ Zone principale de la barre de formule : c'est cette zone qui affiche le contenu d'une cellule sélectionné.

### 3.3.4. La barre d'état :

La barre d'état est la partie de la fenêtre qui fournit des informations sur l'état de programme tels que prêt, entrer, modifier,...etc. Dans cette barre se trouvent plusieurs fonctionnalités importantes comme indique la figure 3.4. [4]

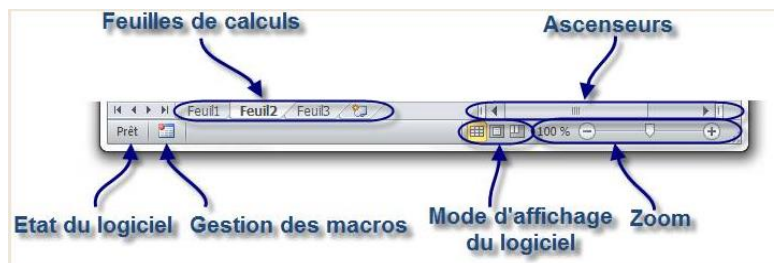


Figure 3.4 : Barre d'état de l'Excel. [5]

## 3.4. Utilisation du logiciel Microsoft Excel

Dans cette partie, nous décrivons certaines caractéristiques pouvant s'appliquer à la résolution de problèmes de transfert de chaleur. Nous supposons que le lecteur a acquis au moins une connaissance de base sur l'Excel avant d'utiliser ce document afin d'obtenir une articulation satisfaisante.

### 3.4.1. Modèle Template pour la résolution des problèmes thermiques en régime permanent

La structure de grille de la feuille de calcul Excel et la fonctionnalité de référence de cellule relative pour la copie de formules de cellule constituent un moyen pratique pour les solutions numériques de problèmes de conduction en régime permanent. Les équations nodales pour  $\Delta x = \Delta y$  présentées dans le tableau 2.1, sous forme appropriée pour une solution itérative. Ces équations peuvent être répertoriées sous forme d'un modèle de feuille de calcul, puis copiées dans les cellules appropriées de la feuille.

La solution de l'ensemble des équations est réalisée par une fonctionnalité de solution itérative intégrée d'Excel. Un modèle Excel répertoriant les équations nodales bidimensionnelles avec  $\Delta x = \Delta y$  est présenté à la figure 3.5(a) pour les nœuds intérieurs, les nœuds à limite de la plaque avec le coefficient de convection  $h$  et la température du fluide  $T_{\infty}$  ainsi que les nœuds de l'angle intérieur et extérieur exposés à la convection. L'équation pour un nœud droit-extérieur avec une limite de convection est la même que pour une surface de convection de gauche, Les équations sont écrites sous la forme fonctionnelle :

$$T_i = f(T'_s, Bi) \quad (3.1)$$

	A	B	C
3			<i>Formules nodales généralisées pour <math>\Delta x = \Delta y</math> et <math>Bi = h\Delta x/k</math> avec <math>Bi = 0</math> pour une surface isolée</i>
4			
6	Nœud intérieur		$= (B6 + C5 + D6 + C7) / 4$
7			
8	Surface de convection droite,		$= (B8 + \$B\$16 * \$B\$17 + (C7 + C9) / 2) / (2 + \$B\$16)$
9	ou intérieur gauche		
10	Surface de convection gauche,		$= (D10 + \$B\$16 * \$B\$17 + (C9 + C11) / 2) / (2 + \$B\$16)$
11	ou intérieur droite		
12	Surface supérieur de convection,		$= (C13 + \$B\$16 * \$B\$17 + (B12 + D12) / 2) / (2 + \$B\$16)$
13	ou l'intérieur de fond		
14	Surface inférieur de convection,		$= (C13 + \$B\$16 * \$B\$17 + (B14 + D14) / 2) / (2 + \$B\$16)$
15	ou en haut à l'intérieur		
16	Bi=		
17	Conv, Temp =		
18			
19	Angle supérieur droit		$= (\$B\$16 * \$B\$17 + (B19 + C20) / 2) / (1 + \$B\$16)$
20			
21	Angle supérieur gauche		$= (\$B\$16 * \$B\$17 + (D21 + C22) / 2) / (1 + \$B\$16)$
22			
23	Angle inférieur droit		$= (\$B\$16 * \$B\$17 + (C22 + B23) / 2) / (1 + \$B\$16)$
24			
25	Angle inférieur gauche		$= (\$B\$16 * \$B\$17 + (C24 + D25) / 2) / (1 + \$B\$16)$
26			
27	Angle intérieur supérieur gauche		$= (\$B\$16 * \$B\$17 + C26 + B27 + (D27 + C28) / 2) / (3 + \$B\$16)$
28			
29	Angle intérieur supérieur droit		$= (\$B\$16 * \$B\$17 + D29 + C28 + (B29 + C30) / 2) / (3 + \$B\$16)$
30			
31	Angle intérieur inférieur gauche		$= (\$B\$16 * \$B\$17 + B31 + C32 + (C30 + D31) / 2) / (3 + \$B\$16)$
32			
33	Angle intérieur inférieur droit		$= (\$B\$16 * \$B\$17 + D33 + C34 + (B33 + C32) / 2) / (3 + \$B\$16)$

**Figure 3.5(a) :** Modèle Template pour les équations nodales bidimensionnelles en régime permanent.

Les équations sont répertoriées dans les cellules C35: C49 du modèle de la figure 3.5(b) pour  $\Delta x = \Delta y$ . Ces formules impliquent le paramètre  $K = k_{\text{exterieur}} / k_{\text{interieur}}$  et que sa spécification est prévue dans la cellule B51. Cette valeur est appelée  $\$B\$51$  dans les formules nodales respectives, tout comme la valeur de  $Bi$  est appelée  $\$B\$16$  dans les formules de surface de convection.

	A	B	C
34			
35	surface composite supérieur		$= (2 * (C36 + \$B\$51 * C34) + (1 + \$B\$51) * (B35 + D35)) / ((1 + \$B\$51) * 4)$
36			
37	surface composite droite		$= (2 * (B37 + \$B\$51 * D37) + (1 + \$B\$51) * (C36 + C38)) / ((1 + \$B\$51) * 4)$
38			
39	surface composite gauche		$= (2 * (\$B\$51 * B39 + D39) + (1 + \$B\$51) * (C38 + C40)) / ((1 + \$B\$51) * 4)$
40			
41	surface comosite inférieur		$= (2 * (C40 + \$B\$51 * C42) + (1 + \$B\$51) * (B41 + D41)) / ((1 + \$B\$51) * 4)$
42			
43	angle composite supérieur droit		$= (2 * \$B\$51 * (C42 + D43) + (1 + \$B\$51) * (B43 + C44)) / ((3 * \$B\$51 + 1) * 2)$
44			
45	angle composite supérieur gauche		$= (2 * \$B\$51 * (B45 + C44) + (1 + \$B\$51) * (C46 + D45)) / ((3 * \$B\$51 + 1) * 2)$
46			
47	angle composite inférieur gauche		$= (2 * \$B\$51 * (B47 + C48) + (1 + \$B\$51) * (C46 + D47)) / ((3 * \$B\$51 + 1) * 2)$
48			
49	angle composite inférieur droit		$= (2 * \$B\$51 * (D49 + C50 + (1 + \$B\$51) * (D49 + C48))) / ((3 * \$B\$51 + 1) * 2))$
50			
51	$[k(\text{ext})] / [k(\text{int})] = K =$		

Figure 3.5(b) : Modèle Template pour les interfaces composites.

### 3.4.2. Procédure d'utilisation des modèles en régime permanent

**Etape 1 :** Sur une feuille de calcul vierge, on trace le système nodal dans une partie de la grille de la feuille de calcul près des cellules occupées par les formules de la figure 3.5(a). La solution est pour  $\Delta x = \Delta y$ . On note le type de nœud (intérieur, convection, angle, etc.) pour chaque cellule ou ensemble de cellules, à savoir que tous les nœuds internes utiliseront la formule de C6 sur le modèle, une surface de convection extérieure droite utilisera la formule en C8, ...etc.

**Etape 2 :** On clique sur *Fichier / Options / Formules / activer le calcul Itératif*.

**Etape 3 :** On a associé les formules appropriées de la colonne C à chaque cellule de la feuille de calcul mis de côté à l'étape 1. Lorsque plusieurs applications sont requises, comme pour plusieurs nœuds intérieurs, la fonctionnalité dupliquer d'Excel est utilisée pour accélérer le processus. La surface isolée est adaptée en définissant  $B_i = 0$  pour cette surface. Ainsi, une surface latérale droite isolée utiliserait la formule de C8 avec zéro (0) substitué à  $\$B\$16$  dans la formule comme indique le tableau 2.1 dans le chapitre précédent.

**Etape 4 :** Entrée des valeurs numériques pour les températures nodales aux limites spécifiées dans des cellules appropriées. Ces cellules ne nécessitent pas une entrée de formule ; seulement une valeur numérique.

**Etape 5 :** Entrée des valeurs numériques pour  $B_i$  et la température de convection dans les cellules B16 et B17.

**Etape 6 :** Si les formules ont été conservées à l'écran pendant les étapes ci-dessus, la solution numérique n'apparaîtra pas encore. Pour afficher la solution, on clique sur *Accueil / Formules / Afficher les formules*. La solution apparaîtra conformément au nombre d'itérations sélectionnées. La valeur par défaut est 100 itérations, ce qui est souvent satisfaisant. Le nombre d'itérations nécessaires dépend du problème physique et du nombre de nœuds utilisés dans la formulation.



**Etape 7 :** Un affichage graphique des résultats obtenu en utilisant l'assistant graphique Excel et un graphique de treillis métallique ou de surface de couleur. Ils sont présentés essentiellement tels qu'ils apparaissent initialement dans l'assistant Graphique.

**Etape 8 :** Les effets des modifications des conditions aux limites sont observés en modifiant les valeurs d'entrée pour  $Bi$ ,  $T_{\infty}$  ou les températures aux limites fixes. Les modifications sont visibles à la fois dans les valeurs de température et dans les affichages graphiques.

### 3.4.3. Procédure Excel pour le transfert de chaleur transitoire

#### 3.4.3.1. Mise en place de la feuille de travail :

**Etape 1 :** On réserve un bloc de cellules pour les calculs de nœud avec : Nombre de nœuds de température = nombre de colonnes Nombre de lignes temporelles = nombre d'incréments temporels + 3.

**Etape 2 :** On détermine et on répertorie les propriétés des matériaux dans une partie de la feuille de calcul en dehors de ce bloc réservé pour les calculs nodaux et on fournit des cellules pour répertorier les conditions aux limites dans cette même zone ainsi des cellules de calcul pour  $Bi$  et  $Fo$  dans le cas où  $\Delta x = \Delta y$  et une cellule pour la spécification de la sélection d'incrément de temps conformément au calcul de l'étape 3 ci-dessous.

**Etape 3 :** On détermine l'incrément de temps maximal autorisé  $\Delta \tau$  pour chaque nœud.

#### 3.4.3.2. Dans le bloc réservé pour les calculs de température nodale :

**Etape 4 :** A l'aide d'une esquisse de la disposition des nœuds correspondant au problème, on définit la nomenclature des températures des nœuds dans la ligne supérieure de chaque colonne en entrant  $T_1 =$ ,  $T_2 =$ , etc.

**Etape 5 :** On ignore une ligne.

**Etape 6 :** On insère les valeurs initiales (temps = 0 s) pour chaque température nodale dans la ligne suivante et on entre des formules pour calculer ces valeurs à partir d'autres données du problème.

**Etape 7 :** Dans la ligne suivante, on écrit des formules pour chaque  $T^{p+1}$  et on spécifie l'incrément de temps ou  $Fo$  et  $Bi$  pour chaque formule nodale en termes d'emplacements de cellules fournis à l'étape 2 ci-dessus.

**Etape 8 :** On duplique les formules pour un nombre de lignes égal au nombre d'incréments de temps souhaités.

#### 3.4.3.3. Exécution du programme et graphiques des résultats :

**Etape 9 :** On vérifie les formules pour assurer qu'elles sont correctes.

**Etape 10 :** On sélectionne un incrément de temps ayant une valeur inférieure à la condition la plus restrictive déterminée à l'étape 3. Tenant compte du temps total souhaité dans la solution finale et du nombre d'incréments de temps (lignes) disponibles.

**Etape 11 :** On insère toutes les propriétés du matériau, les conditions aux limites et les conditions initiales dans les cellules fournies dans les étapes ci-dessus.

**Etape 12 :** Si des formules sont toujours affichées, on clique sur *Fichier / Formules / Supprimer la coche de la formule*. La solution apparaîtra.



**Etape 13 :** Des graphiques des températures nodales en fonction du nombre d'incrément de temps (lignes) peuvent être obtenus en utilisant l'assistant graphique et un graphique à courbes. Si un nombre suffisamment grand d'incrément de temps est affiché, les solutions s'approcheront des valeurs de l'état d'équilibre. Le nombre d'incrément de temps nécessaires pour obtenir l'état d'équilibre dépend de la configuration géométrique, des propriétés du matériau, des conditions initiales, et de la valeur de  $\Delta\tau$  sélectionnée.

#### 3.4.3.4. Graphes de résultats transitoires avec configuration géométrique :

Les graphiques linéaires obtenus à l'étape 13 correspondent aux numéros attribués à leurs nœuds respectifs. Les résultats peuvent également être présentés dans un format correspondant à la configuration géométrique du problème physique à l'aide de la procédure suivante.

**Etape 14 :** Dans une zone de la feuille de calcul éloignée des calculs de l'étape 12 ci-dessus ou sur une nouvelle feuille de calcul, on met de côté un bloc de cellules dont la configuration correspond au problème physique ; une cellule pour chaque nœud ( $\Delta x = \Delta y$ ). Des cellules doivent être incluses pour toutes les températures nodales à limites fixes.

**Etape 15 :** Pour chaque cellule, correspondant à la nomenclature du problème, on entre la formule = \$ colonne (nœud de température), ligne (incrément de temps). Tous les numéros de ligne seront les mêmes pour le même incrément de temps, même s'ils apparaissent dans des lignes différentes de la feuille de travail.

**Etape 16 :** La matrice de nombres obtenue à l'étape 15 peut être représentée graphiquement à l'aide de l'assistant graphique sous la forme d'un treillis métallique, d'un graphique surfacique ou d'un graphique surfacique 3D afin d'afficher le profil de température sur la géométrie pour l'incrément de temps correspond.

**Etape 17 :** Pour obtenir la distribution de température à un incrément de temps ultérieur, on doit copier le bloc de cellules obtenu à l'étape 15 dans un autre emplacement avec un nombre de lignes égal à la ligne (étape 15) + différence en incréments de temps = ligne (nouveau bloc de cellules). Si le haut du bloc de cellules à l'étape 15 était dans la ligne 10 pour l'incrément de temps 2, le haut du bloc de cellules sera dans la ligne 13 pour l'incrément de temps 5, et ainsi de suite.

**Etape 18 :** On répète la procédure de l'étape 17 pour autant de fois. Bien qu'une seule feuille de calcul puisse accueillir de nombreux affichages.

Il est également possible d'effectuer le calcul transitoire en utilisant la fonction de recalcul d'Excel, dans laquelle les équations sont disposées en deux lignes pour des incréments de temps. Le nombre d'incrément de temps peut être spécifié pour le résultat final sans affichage de valeurs intermédiaires. Cette approche peut être préférable pour un grand nombre d'incrément de temps ou dans les cas où le seul résultat souhaité est un temps écoulé spécifique. Les résultats peuvent toujours être copiés dans un bloc de cellules de la feuille de calcul qui représente la configuration géométrique du problème physique.

### 3.4.4. Critères de stabilité pour une interface composite

Lorsqu'un problème transitoire impliquant des interfaces composites est formulé, un incrément de temps maximal doit être déterminé pour le calcul, les incréments de temps maximum autorisés pour les interfaces composites peuvent être écrits pour le cas  $\Delta x = \Delta y$ .

Des formules plus complexes se rencontrent avec une surface ou un angle d'interface séparant deux matériaux ayant des conductivités thermiques différentes. La nomenclature appliquée à ces nœuds composites est donnée à la figure 3.6.

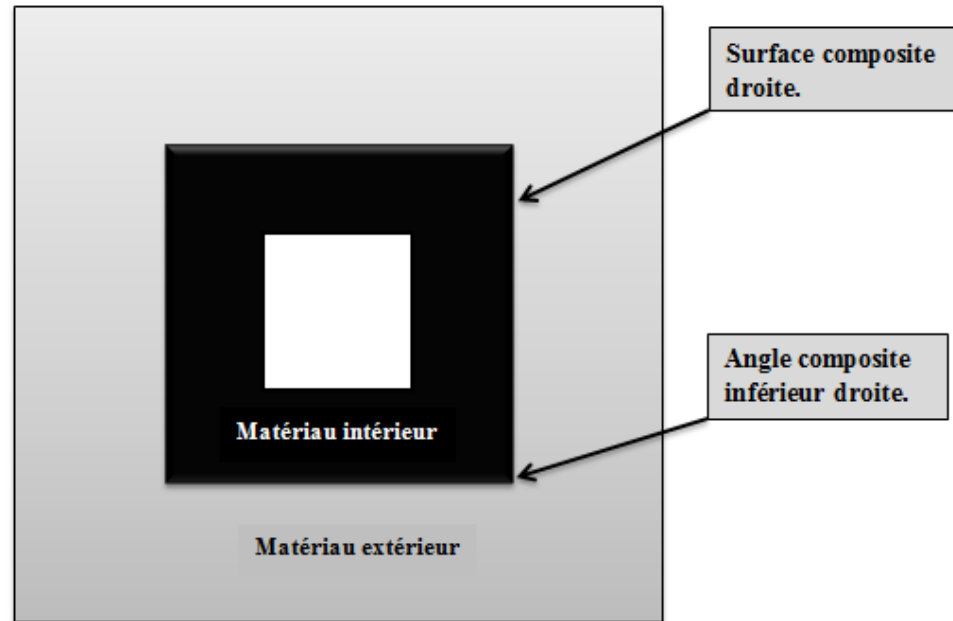


Figure 3.6 : Nomenclature pour les limites composites.

### 3.4.5. Sources de chaleur et conditions aux limites de rayonnement

Les équations nodales pour  $\Delta x = \Delta y$ , comme indiqué dans le tableau 2.1, peuvent être modifiées pour inclure les sources de chaleur et les conditions aux limites de rayonnement en ajoutant le terme suivant au numérateur de chaque équation :

$$q_i = \dot{q}_i \Delta V_i \quad (3.2)$$

Pour les sources de chaleur l'équation est :

$$q_i = q''_{\text{rad } i} \times \Delta A_i \quad (3.3)$$

Dans le cas commun où un nœud limite de surface ayant une émissivité de  $\epsilon_i$  échange de la chaleur avec un environnement à rayonnement élevé à  $T_r$ , le transfert de rayonnement net dans le nœud de surface s'écrit :

$$q_{\text{rad } i} = \sigma \epsilon_i \Delta A_i (T_r^4 - T_i^4) \quad (3.4)$$

Toutes les températures doivent être en degrés absolus.  $T_r$  peut être ou ne pas être égal à la température d'une aire de convection en contact avec le nœud de surface.  $\Delta A_i$  est la surface du nœud  $i$  exposée à la température de rayonnement  $T_r$ .

Là encore, l'avantage de la solution de type feuille de calcul Excel réside dans le fait que les nœuds peuvent être disposés dans le même motif géométrique que le problème physique et permettent ainsi un affichage graphique des températures correspondantes.

Au cours de ce chapitre on a interprété la présentation du logiciel « Microsoft office Excel 2010 » que nous avons utilisé pour la résolution numérique des problèmes thermiques. La procédure de résolution est aussi présentée. Et les résultats que nous avons obtenus ainsi que leur traitement feront l'objet du chapitre suivant. [3]

*Chapitre 4 :*  
*Résultats et*  
*discussion*

## 4.1. Introduction

Après avoir bien posé les problèmes sous Microsoft Excel, on procèdera maintenant à l'analyse des résultats obtenus par ce logiciel pour résoudre les problèmes de transfert thermique en régime permanent et transitoire, ainsi le traitement des conditions aux limites des sources de chaleur et de rayonnement, des conditions aux limites à l'état d'équilibre et transitoires et des interfaces entre les matériaux composite à l'aide d'un modèle Template illustré dans la figure 3.5(a) et 3.5(b). Dix cas de l'utilisation d'Excel pour résoudre des problèmes sont traités dans ce chapitre.

## 4.2. Les cas traités

### 4.2.1. Répartition de la température dans une plaque bidimensionnelle

Le cas des plaques bidimensionnelles est très facile à analyser numériquement en utilisant une configuration Excel pour les équations nodales. Nous choisissons  $T_1 = 0$  comme température limite constante le long du fond et des côtés de la plaque et  $T_2 = 100$  comme température constante le long du dessus de la plaque. La grille Excel est configurée comme illustré à la figure 4.1(a) avec la température constante de 100 insérée dans les cellules E5:Q5. Les températures zéro sont insérées dans les cellules E6:E44, Q6:Q44 et F44:P44. Tous les autres nœuds sont des nœuds intérieurs et ont la même forme d'équation nodale, c'est-à-dire celle donnée dans la cellule C6 du modèle figure 3.5(a). Cette formule est donc copiée dans la cellule F6, puis copiée et dupliquée dans les autres cellules. La solution apparaît comme illustré à la figure 4.1(b) :

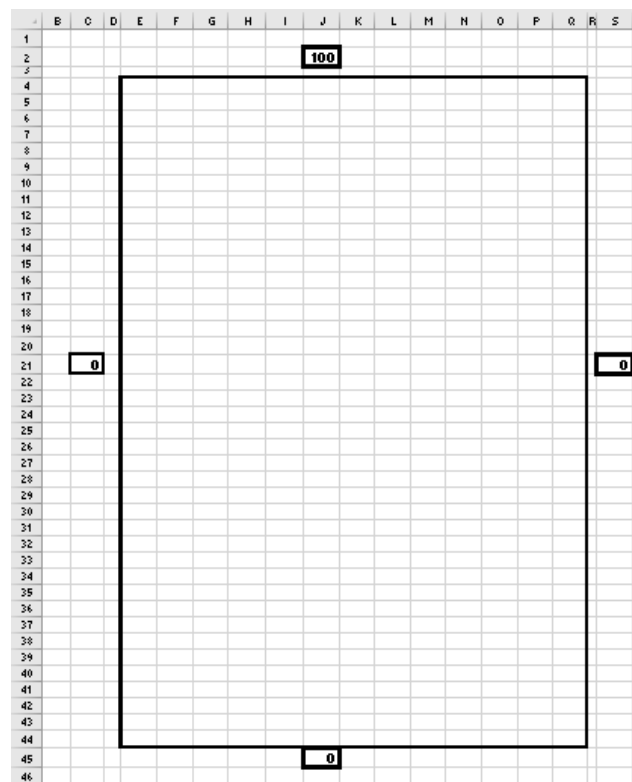


Figure 4.1(a) : Structure de la plaque bidimensionnelle.

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
4													
5	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
6	0	49,27	68,26	76,71	80,82	82,77	83,35	82,77	80,82	76,71	68,26	49,27	0
7	0	28,81	47,07	57,76	63,81	66,90	67,86	66,90	63,81	57,76	47,07	28,81	0
8	0	18,88	33,46	43,46	49,75	53,18	54,27	53,18	49,75	43,46	33,46	18,88	0
9	0	13,25	24,44	32,86	38,55	41,80	42,85	41,80	38,55	32,86	24,44	13,25	0
10	0	9,67	18,21	24,98	29,78	32,62	33,55	32,62	29,78	24,98	18,21	9,67	0
11	0	7,22	13,74	19,08	22,98	25,33	26,12	25,33	22,98	19,08	13,74	7,22	0
12	0	5,46	10,45	14,62	17,72	19,62	20,26	19,62	17,72	14,62	10,45	5,46	0
13	0	4,16	7,99	11,23	13,66	15,17	15,68	15,17	13,66	11,23	7,99	4,16	0
14	0	3,18	6,13	8,63	10,53	11,71	12,11	11,71	10,53	8,63	6,13	3,18	0
15	0	2,44	4,71	6,64	8,12	9,04	9,35	9,04	8,12	6,64	4,71	2,44	0
16	0	1,88	3,62	5,12	6,26	6,97	7,21	6,97	6,26	5,12	3,62	1,88	0
17	0	1,44	2,79	3,94	4,82	5,38	5,56	5,38	4,82	3,94	2,79	1,44	0
18	0	1,11	2,15	3,04	3,72	4,14	4,29	4,14	3,72	3,04	2,15	1,11	0
19	0	0,86	1,66	2,34	2,87	3,20	3,31	3,20	2,87	2,34	1,66	0,86	0
20	0	0,66	1,28	1,80	2,21	2,46	2,55	2,46	2,21	1,80	1,28	0,66	0
21	0	0,51	0,98	1,39	1,70	1,90	1,97	1,90	1,70	1,39	0,98	0,51	0
22	0	0,39	0,76	1,07	1,31	1,46	1,52	1,46	1,31	1,07	0,76	0,39	0
23	0	0,30	0,58	0,83	1,01	1,13	1,17	1,13	1,01	0,83	0,58	0,30	0
24	0	0,23	0,45	0,64	0,78	0,87	0,90	0,87	0,78	0,64	0,45	0,23	0
25	0	0,18	0,35	0,49	0,60	0,67	0,69	0,67	0,60	0,49	0,35	0,18	0
26	0	0,14	0,27	0,38	0,46	0,52	0,53	0,52	0,46	0,38	0,27	0,14	0
27	0	0,11	0,21	0,29	0,36	0,40	0,41	0,40	0,36	0,29	0,21	0,11	0
28	0	0,08	0,16	0,22	0,28	0,31	0,32	0,31	0,28	0,22	0,16	0,08	0
29	0	0,06	0,12	0,17	0,21	0,24	0,24	0,24	0,21	0,17	0,12	0,06	0
30	0	0,05	0,09	0,13	0,16	0,18	0,19	0,18	0,16	0,13	0,09	0,05	0
31	0	0,04	0,07	0,10	0,13	0,14	0,15	0,14	0,13	0,10	0,07	0,04	0
32	0	0,03	0,06	0,08	0,10	0,11	0,11	0,11	0,10	0,08	0,06	0,03	0
33	0	0,02	0,04	0,06	0,07	0,08	0,09	0,08	0,07	0,06	0,04	0,02	0
34	0	0,02	0,03	0,05	0,06	0,06	0,07	0,06	0,06	0,05	0,03	0,02	0
35	0	0,01	0,03	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,04	0,04	0,03	0,01	0
36	0	0,01	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,03	0,03	0,02	0,01	0
37	0	0,01	0,01	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,01	0,01	0
38	0	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0
39	0	0,00	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00	0
40	0	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0
41	0	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0
42	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0
43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figure 4.1(b) : La répartition des températures sur la plaque.

Les représentations graphiques des résultats peuvent être présentées simplement sous forme de vues 2D, comme le montre la figure 4.1(c), ou sous forme d'un ensemble de graphiques 3D, comme le montre la figure 4.1(d), et on remarque une élévation des profils de température dans la plaque.

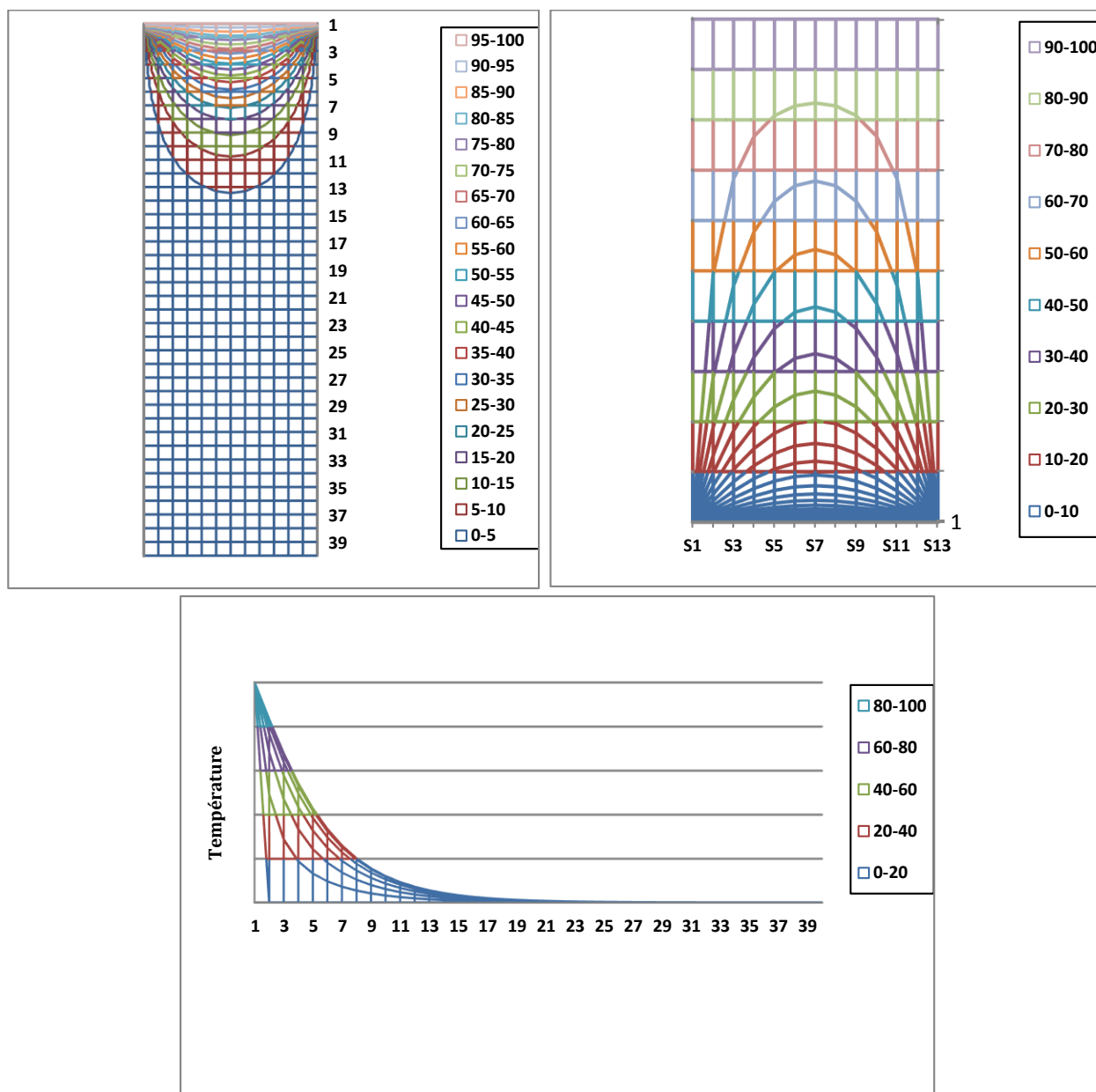


Figure 4.1(c) : Vues 2D et en élévation des profils de température.

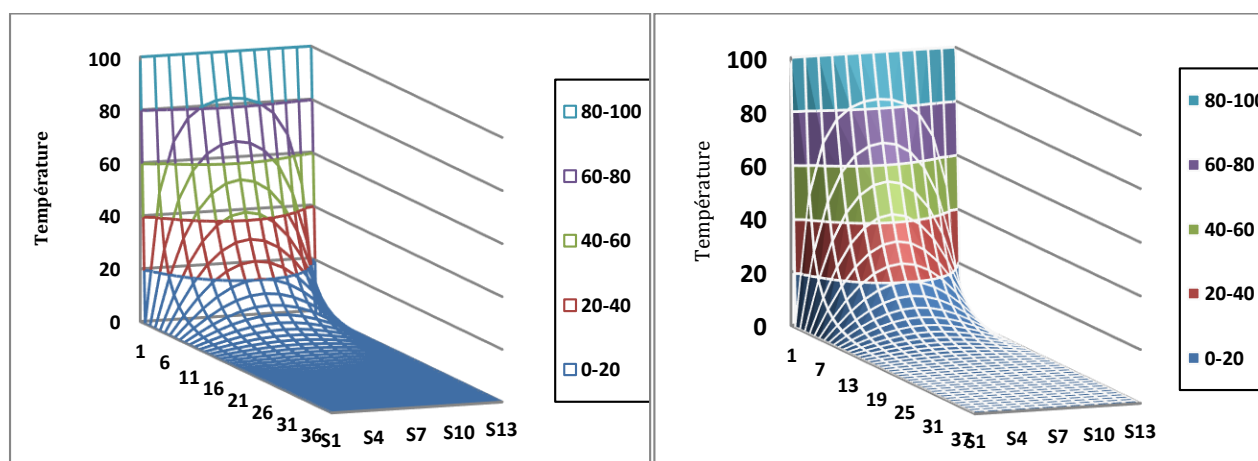


Figure 4.1(d) : Les graphes 3D de profils de température.

### 4.2.2 Distribution de la température dans une ailette droite bidimensionnelle

L'ailette d'épaisse  $e = 4\Delta x$  de la figure 4.2(a) est suffisamment grande par rapport à la longueur  $L$  pour provoquer une distribution bidimensionnelle de la température lorsqu'elle est exposée à un flux convectif avec un coefficient  $h$  et dont la température loin de la paroi vaut  $T_\infty$ . La distribution bidimensionnelle est établie comme le montre la figure 4.2(b). La température ambiante de convection est  $0^\circ\text{C}$  avec la température de base est  $100^\circ\text{C}$ . Les équations nodales sont écrites dans le modèle donné au tableau 1.1 et les valeurs respectives de  $Bi = h\Delta x/k$ . La méthode de configuration du problème dans Excel est décrite dans le chapitre précédent, et les résultats calculés sont présentés sur la figure 4.2(d) pour différentes valeurs du nombre de Biot. Les affichages 3D illustrent l'état du comportement de l'ailette :

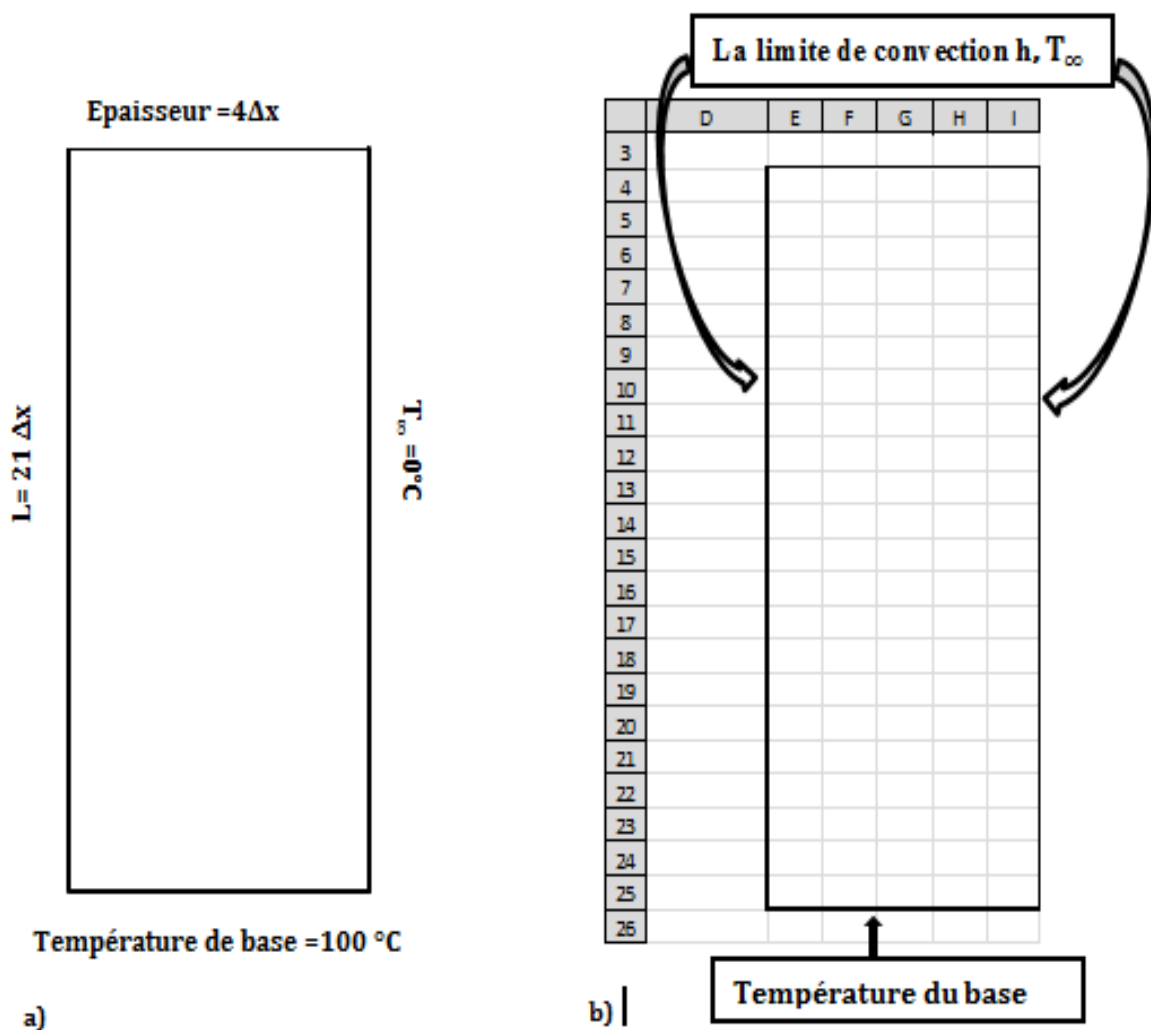


Figure 4.2 (a) et (b) : La structure de l'ailette bidimensionnelle.

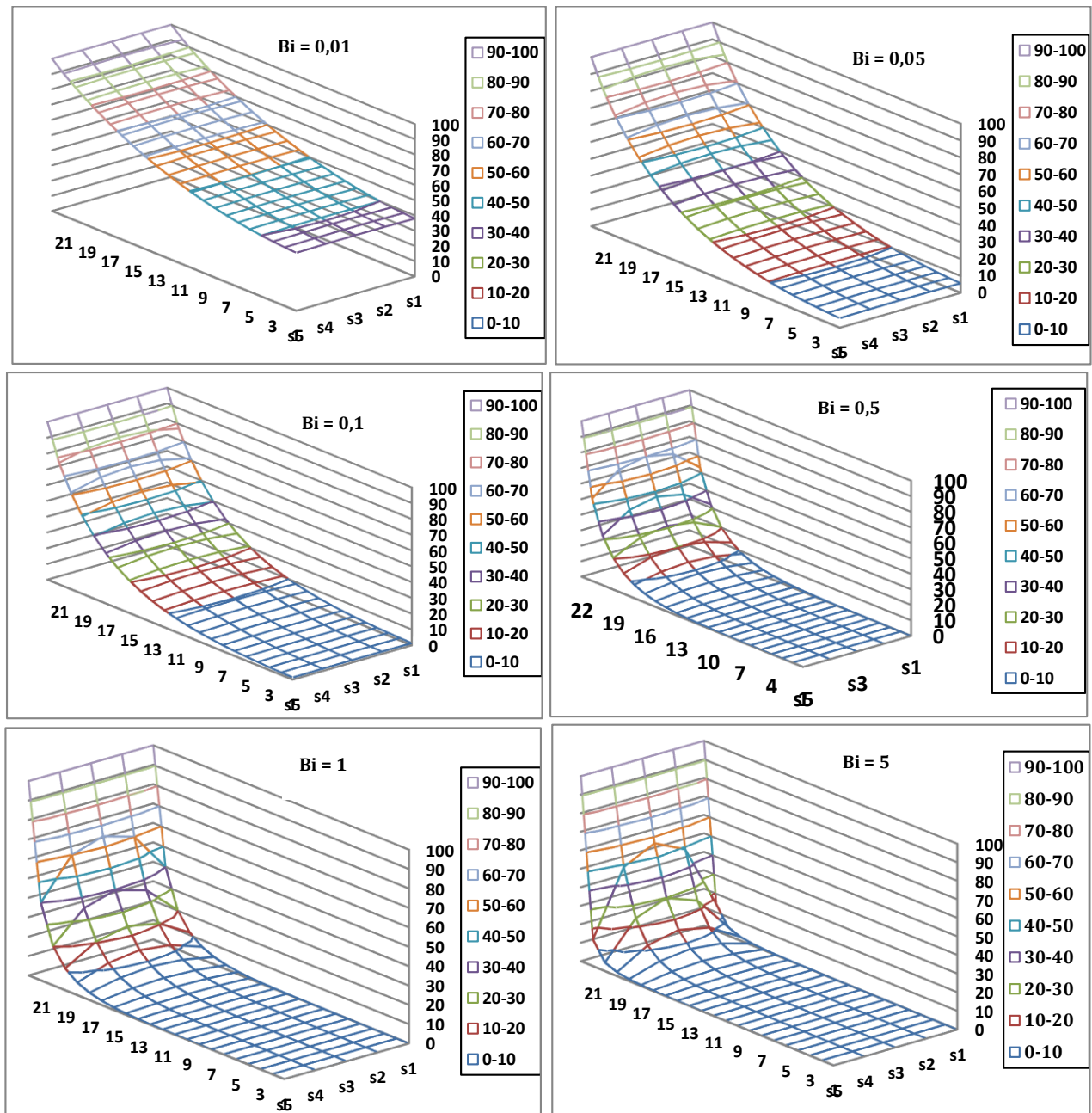


	E	F	G
4	$=(\$B\$16*\$B\$17+(F4+E5)/2)/(1+\$B\$16)$	$=(F5+\$B\$16*\$B\$17+(E4+G4)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(G5+\$B\$16*\$B\$17+(F4+H4)/2)/(2+\$B\$16)$
5	$=(F5+\$B\$16*\$B\$17+(E4+E6)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E5+F4+G5+F6)/4$	$=(F5+G4+H5+G6)/4$
6	$=(F6+\$B\$16*\$B\$17+(E5+E7)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E6+F5+G6+F7)/4$	$=(F6+G5+H6+G7)/4$
7	$=(F7+\$B\$16*\$B\$17+(E6+E8)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E7+F6+G7+F8)/4$	$=(F7+G6+H7+G8)/4$
8	$=(F8+\$B\$16*\$B\$17+(E7+E9)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E8+F7+G8+F9)/4$	$=(F8+G7+H8+G9)/4$
9	$=(F9+\$B\$16*\$B\$17+(E8+E10)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E9+F8+G9+F10)/4$	$=(F9+G8+H9+G10)/4$
10	$=(F10+\$B\$16*\$B\$17+(E9+E11)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E10+F9+G10+F11)/4$	$=(F10+G9+H10+G11)/4$
11	$=(F11+\$B\$16*\$B\$17+(E10+E12)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E11+F10+G11+F12)/4$	$=(F11+G10+H11+G12)/4$
12	$=(F12+\$B\$16*\$B\$17+(E11+E13)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E12+F11+G12+F13)/4$	$=(F12+G11+H12+G13)/4$
13	$=(F13+\$B\$16*\$B\$17+(E12+E14)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E13+F12+G13+F14)/4$	$=(F13+G12+H13+G14)/4$
14	$=(F14+\$B\$16*\$B\$17+(E13+E15)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E14+F13+G14+F15)/4$	$=(F14+G13+H14+G15)/4$
15	$=(F15+\$B\$16*\$B\$17+(E14+E16)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E15+F14+G15+F16)/4$	$=(F15+G14+H15+G16)/4$
16	$=(F16+\$B\$16*\$B\$17+(E15+E17)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E16+F15+G16+F17)/4$	$=(F16+G15+H16+G17)/4$
17	$=(F17+\$B\$16*\$B\$17+(E16+E18)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E17+F16+G17+F18)/4$	$=(F17+G16+H17+G18)/4$
18	$=(F18+\$B\$16*\$B\$17+(E17+E19)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E18+F17+G18+F19)/4$	$=(F18+G17+H18+G19)/4$
19	$=(F19+\$B\$16*\$B\$17+(E18+E20)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E19+F18+G19+F20)/4$	$=(F19+G18+H19+G20)/4$
20	$=(F20+\$B\$16*\$B\$17+(E19+E21)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E20+F19+G20+F21)/4$	$=(F20+G19+H20+G21)/4$
21	$=(F21+\$B\$16*\$B\$17+(E20+E22)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E21+F20+G21+F22)/4$	$=(F21+G20+H21+G22)/4$
22	$=(F22+\$B\$16*\$B\$17+(E21+E23)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E22+F21+G22+F23)/4$	$=(F22+G21+H22+G23)/4$
23	$=(F23+\$B\$16*\$B\$17+(E22+E24)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E23+F22+G23+F24)/4$	$=(F23+G22+H23+G24)/4$
24	$=(F24+\$B\$16*\$B\$17+(E23+E25)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(E24+F23+G24+F25)/4$	$=(F24+G23+H24+G25)/4$
25	100	100	100

H	I
$=(H5+\$B\$16*\$B\$17+(G4+I4)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(\$B\$16*\$B\$17+(H4+I5)/2)/(1+\$B\$16)$
$=(G5+H4+I5+H6)/4$	$=(H5+\$B\$16*\$B\$17+(I4+I6)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G6+H5+I6+H7)/4$	$=(H6+\$B\$16*\$B\$17+(I5+I7)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G7+H6+I7+H8)/4$	$=(H7+\$B\$16*\$B\$17+(I6+I8)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G8+H7+I8+H9)/4$	$=(H8+\$B\$16*\$B\$17+(I7+I9)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G9+H8+I9+H10)/4$	$=(H9+\$B\$16*\$B\$17+(I8+I10)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G10+H9+I10+H11)/4$	$=(H10+\$B\$16*\$B\$17+(I9+I11)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G11+H10+I11+H12)/4$	$=(H11+\$B\$16*\$B\$17+(I10+I12)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G12+H11+I12+H13)/4$	$=(H12+\$B\$16*\$B\$17+(I11+I13)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G13+H12+I13+H14)/4$	$=(H13+\$B\$16*\$B\$17+(I12+I14)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G14+H13+I14+H15)/4$	$=(H14+\$B\$16*\$B\$17+(I13+I15)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G15+H14+I15+H16)/4$	$=(H15+\$B\$16*\$B\$17+(I14+I16)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G16+H15+I16+H17)/4$	$=(H16+\$B\$16*\$B\$17+(I15+I17)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G17+H16+I17+H18)/4$	$=(H17+\$B\$16*\$B\$17+(I16+I18)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G18+H17+I18+H19)/4$	$=(H18+\$B\$16*\$B\$17+(I17+I19)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G19+H18+I19+H20)/4$	$=(H19+\$B\$16*\$B\$17+(I18+I20)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G20+H19+I20+H21)/4$	$=(H20+\$B\$16*\$B\$17+(I19+I21)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G21+H20+I21+H22)/4$	$=(H21+\$B\$16*\$B\$17+(I20+I22)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G22+H21+I22+H23)/4$	$=(H22+\$B\$16*\$B\$17+(I21+I23)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G23+H22+I23+H24)/4$	$=(H23+\$B\$16*\$B\$17+(I22+I24)/2)/(2+\$B\$16)$
$=(G24+H23+I24+H25)/4$	$=(H24+\$B\$16*\$B\$17+(I23+I25)/2)/(2+\$B\$16)$
100	100

Figure 4.2(c) : Formules utilisées.

Le nombre Biot compare les grandeurs relatives des résistances de convection superficielle et de conduction interne au transfert de chaleur, plus le nombre de Biot augmente, plus le profil de température est accentué dans l'ailette.



**Figure 4.2(d) :** Profils de température pour les différentes valeurs de Biot.

- Des valeurs plus faibles de Bi (convection faible, conduction importante) donnent des profils de température plus uniformes sur toute l'épaisseur de l'ailette, c'est-à-dire que l'ailette se comporte davantage comme une ailette unidimensionnelle.
- Des valeurs plus faibles de Bi entraînent également une diminution moins rapide de la température sur toute la longueur de l'aileron.
- Des valeurs plus élevées de Bi (convection élevée, conduction faible) provoquent une chute rapide de la température sur toute la longueur de l'ailette. Pour Bi suffisamment grand, elle se comporte comme une ailette "infinie" dont l'extrémité atteint la température ambiante.

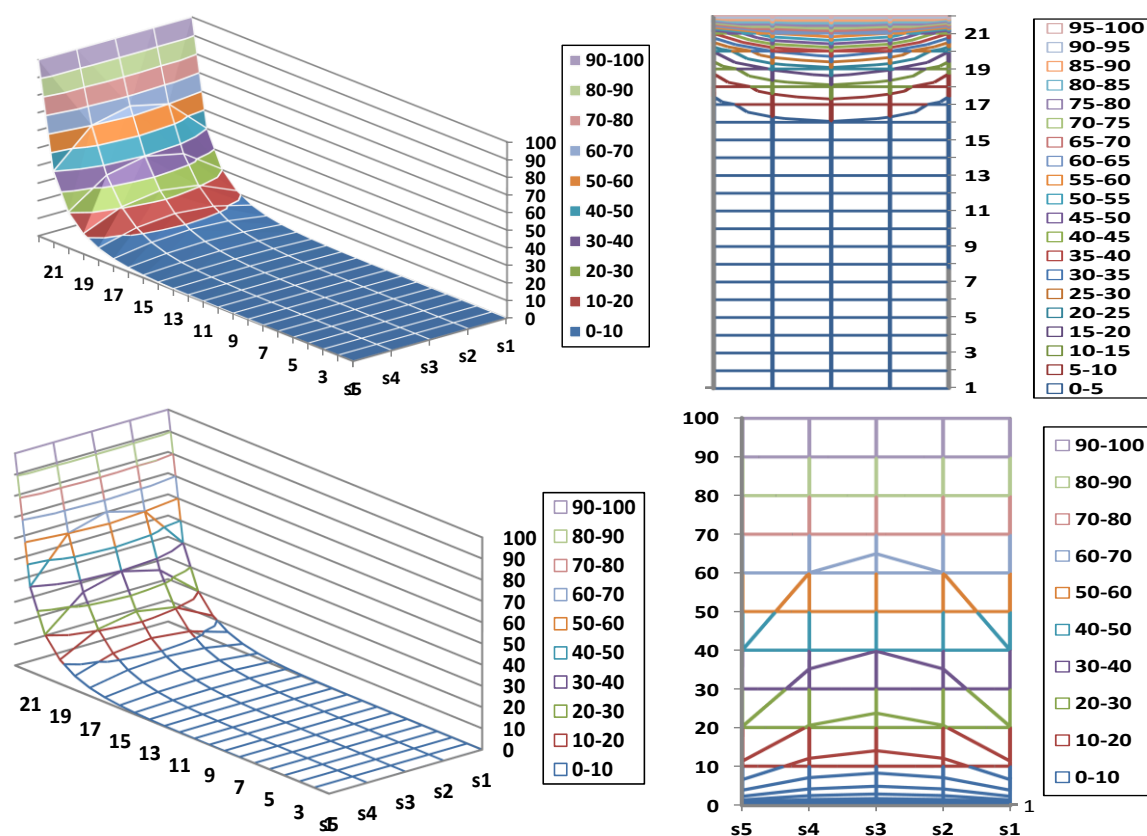


Figure 4.2(e) : Profils de température pour  $Bi = 1$ .

Les solutions de tableur Excel peuvent également être utilisées pour obtenir des vues en plan (2D) et en élévation des profils de température de l'ailette, comme illustré à la figure 4.2(e) pour  $Bi = 1.0$ .

### 4.2.3. Bloc de $1m^2$ avec et sans conditions aux limites de rayonnement

Pour ce cas, on réserve 16 cellules : 7 pour les températures limites fixes et 9 pour les températures nodales inconnues. A l'aide du modèle et de la procédure en régime permanent, nous mettons de côté le bloc E2:H5 et copions les formules appropriées, comme illustré à la figure 4.3(a). Les cellules  $\$B\$16$  et  $\$B\$17$  correspondent à  $Bi = h\Delta x/k = 1/3$  et  $T_\infty = 100^\circ C$ .

	E	F	G	H
1				
2	500	500	500	500
3	100	$=(E3+F2+G3+F4)/4$	$=(F3+G2+H3+G4)/4$	$=(G3+\$B\$16*\$B\$17+(H2+H4)/2)/(2+\$B\$16)$
4	100	$=(E4+F3+G4+F5)/4$	$=(F4+G3+H4+G5)/4$	$=(G4+\$B\$16*\$B\$17+(H3+H5)/2)/(2+\$B\$16)$
5	100	$=(F4+\$B\$16*\$B\$17+(E5+G5)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(G4+\$B\$16*\$B\$17+(F5+H5)/2)/(2+\$B\$16)$	$=(\$B\$16*\$B\$17+(H4+G5)/2)/(1+\$B\$16)$

Figure 4.3(a) : Formules utilisées.

Lorsque la procédure d'itération est exécutée, la solution apparaît comme illustré à la figure 4.3(b) avec un graphique en treillis métallique des températures.

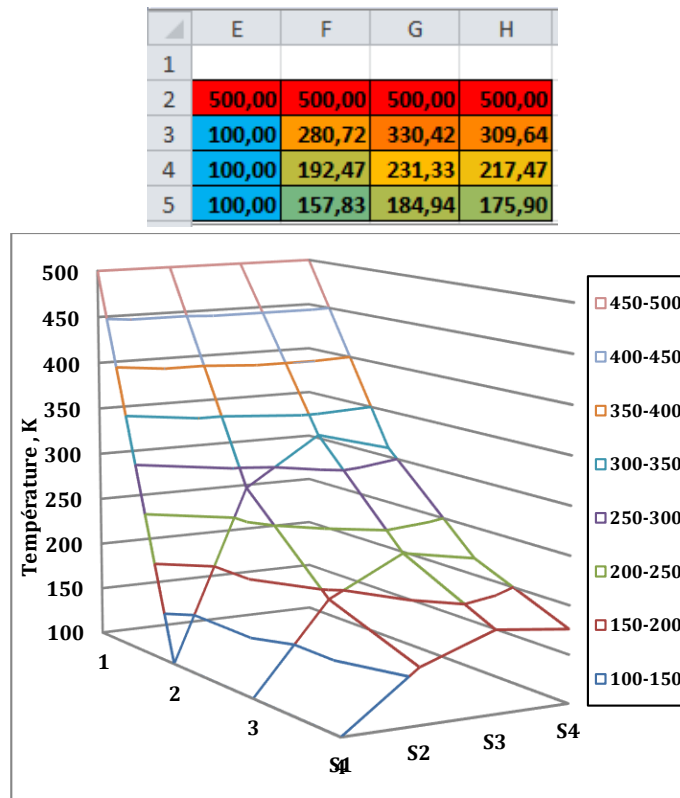


Figure 4.3(b) : Solution numérique avec un graphique en treillis métallique.

Considérons maintenant le même exemple mais avec les surfaces exposées d'émissivité  $\mathcal{E}=0,9$  et échangeant de l'énergie rayonnante avec une grande enceinte ayant  $T_r=100^\circ\text{C} = 373\text{K}$ . Nous pouvons examiner les effets du rayonnement en incluant le terme :

$$q_{\text{rad},i} = \sigma \mathcal{E}_i \Delta A_i (T_r^4 - T_i^4) / k \quad (4.1)$$

Dans le numérateur de chacune des formules de nœuds limites (nœuds 3,6,7,8,9) comme illustré à la figure 2.5. La surface spécifique pour chaque formule est  $\Delta x = 1/3$  et  $T_r = 373$  avec  $T_i$  écrit dans chaque formule comme suit :

$$T_i = T_i(^{\circ}\text{C}) + 273$$

Pour les températures nodales exprimées en  $^{\circ}\text{C}$ . Ainsi, l'équation (4.1) devient :

$$q_{\text{rad},i} = (5.669 \times 10^{-8})(0.9)(1/3)(393^4 - (T_i + 273)^4) / 10 \quad (4.2)$$

Ce terme est maintenant entré dans le numérateur pour chaque formule de nœud limite, comme l'illustre la figure 4.3(c) pour la colonne H.

	H
1	
2	500
3	$= (G3 + \text{\$B\$16} * \text{\$B\$17} + (H2 + H4) / 2 + 0,000000001701 * (393^4 - (H3 + 273)^4)) / (2 + \text{\$B\$16})$
4	$= (G4 + \text{\$B\$16} * \text{\$B\$17} + (H3 + H5) / 2 + 0,000000001701 * (393^4 - (H4 + 273)^4)) / (2 + \text{\$B\$16})$
5	$= (\text{\$B\$16} * \text{\$B\$17} + (H4 + G5) / 2 + 0,000000001701 * (393^4 - (H5 + 273)^4)) / (1 + \text{\$B\$16})$

Figure 4.3(c) : Formules des nœuds limites pour le rayonnement.



Enfin, les résultats obtenus après exécution sont montrés sur la figure 4.3(d). Les températures sont considérablement plus basses que celles obtenues avec une limite de convection seule en raison de la perte de chaleur rayonnante supplémentaire. La différence est représentée graphiquement sur l'afficheur à mailles métalliques.

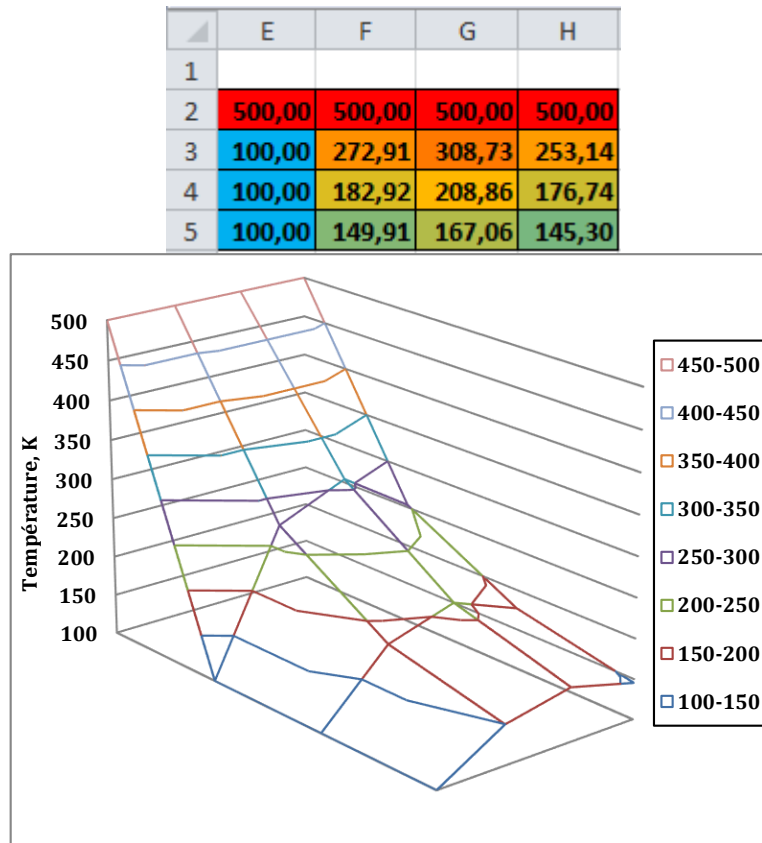


Figure 4.3(d) : Conditions aux limites de convection et de rayonnement.

#### 4.2.4. Conduction dans une plaque avec source de chaleur et des conditions aux limites de contacts

La plaque bidimensionnelle illustrée à la figure 4.4(a) présente les trois côtés inférieurs maintenus à une température constante de 100 °C, alors que la surface supérieure est exposée à un environnement de convection à  $T_{\infty} = 0^{\circ}\text{C}$ . De plus, une source de chaleur est imposée au nœud indiqué. La source de la chaleur est  $\dot{q} = 400 \times k$  où  $k$  est la conductivité thermique du matériau. La limite de convection est tel que  $Bi = 0,5$ . Nous examinerons la distribution de la température dans le solide pour les valeurs suivantes, avec une configuration qui permet de modifier les spécifications.

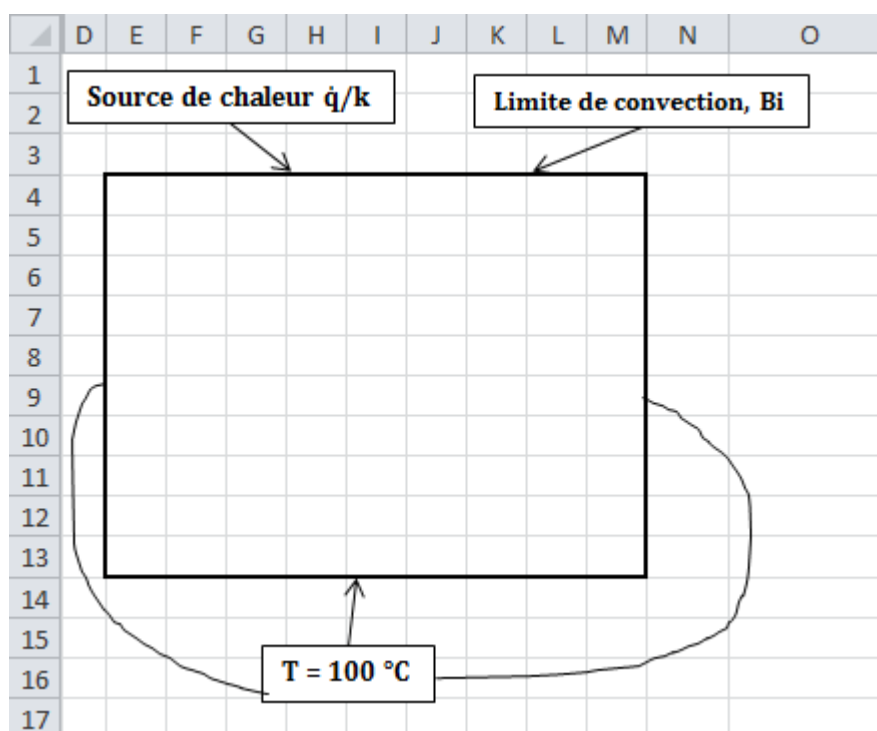


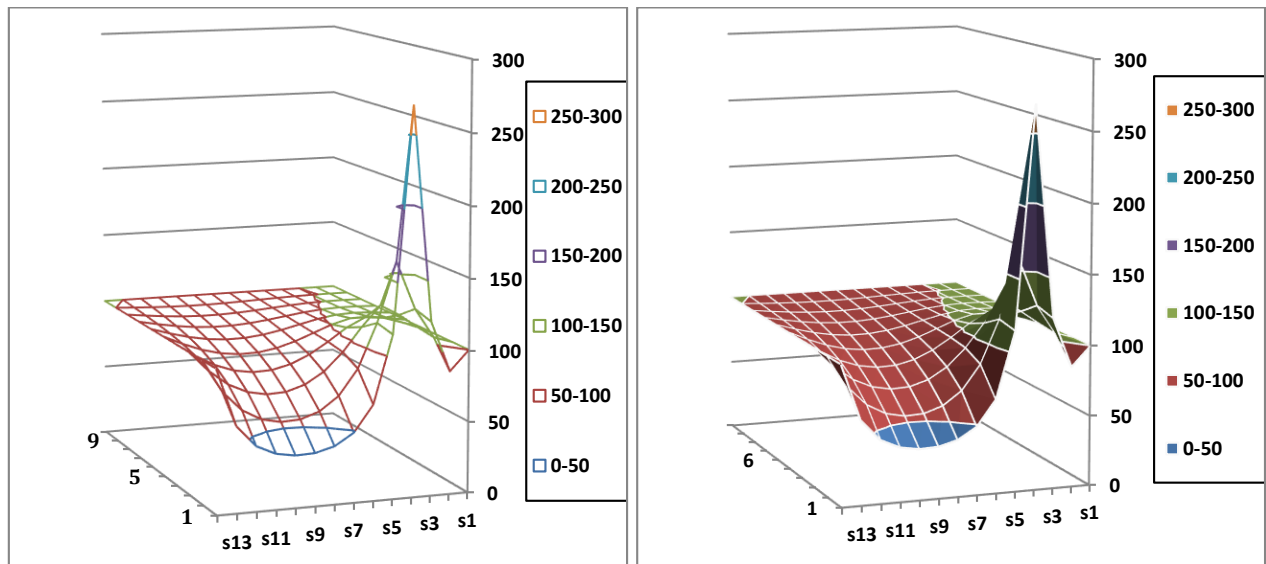
Figure 4.4(a) : Structure de la plaque.

Nous utilisons le modèle à l'état d'équilibre du chapitre 3 (figure 3.5(a)). On met de côté le bloc de cellules E4:M13 pour les calculs. L'inclusion de nœuds pour les températures limites fixes nécessite 90 cellules. Les températures limites fixes de 100 °C sont insérées dans les cellules E4:E13, F13:L13 et M4:M13. Les formules pour les nœuds intérieurs sont copiées de la cellule C6 dans le bloc F5:L12. Les formules pour une surface de convection supérieure sont copiées de cellules C13 à F5:L5. De plus, la valeur de  $q/k = 400$  spécifiée dans la cellule  $\$B\$15$  est ajoutée au numérateur de la formule pour la cellule H4, la cellule représentant le nœud avec la source de chaleur. La figure 4.4(b) illustre une partie des formules nodales.

	E	F	G	H
3				
4	100	$= (F5 + \$B\$16 * \$B\$17 + (E4 + G4) / 2) / (2 + \$B\$16)$	$= (G5 + \$B\$16 * \$B\$17 + (F4 + H4) / 2) / (2 + \$B\$16)$	$= (\$B\$15 + H5 + \$B\$16 * \$B\$17 + (G4 + H4) / 2) / (2 + \$B\$16)$
5	100	$= (E5 + F4 + G5 + F6) / 4$	$= (F5 + G4 + H5 + G6) / 4$	$= (G5 + H4 + I5 + H6) / 4$
6	100	$= (E6 + F5 + G6 + F7) / 4$	$= (F6 + G5 + H6 + G7) / 4$	$= (G6 + H5 + I6 + H7) / 4$
7	100	$= (E7 + F6 + G7 + F8) / 4$	$= (F7 + G6 + H7 + G8) / 4$	$= (G7 + H6 + I7 + H8) / 4$
8	100	$= (E8 + F7 + G8 + F9) / 4$	$= (F8 + G7 + H8 + G9) / 4$	$= (G8 + H7 + I8 + H9) / 4$
9	100	$= (E9 + F8 + G9 + F10) / 4$	$= (F9 + G8 + H9 + G10) / 4$	$= (G9 + H8 + I9 + H10) / 4$
10	100	$= (E10 + F9 + G10 + F11) / 4$	$= (F10 + G9 + H10 + G11) / 4$	$= (G10 + H9 + I10 + H11) / 4$
11	100	$= (E11 + F10 + G11 + F12) / 4$	$= (F11 + G10 + H11 + G12) / 4$	$= (G11 + H10 + I11 + H12) / 4$
12	100	$= (E12 + F11 + G12 + F13) / 4$	$= (F12 + G11 + H12 + G13) / 4$	$= (G12 + H11 + I12 + H13) / 4$
13	100	100	100	100

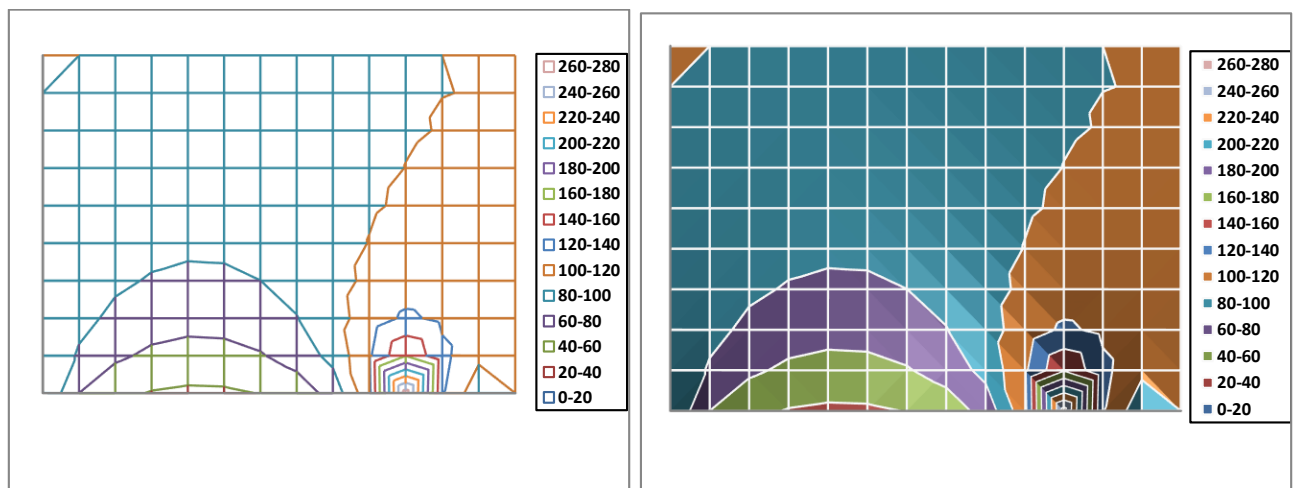
Figure 4.4(b) : Formules nodales utilisées.

Lorsque la procédure itérative de la solution est exécutée, les résultats apparaissent comme indiqué à la figure 4.4(c) avec un diagramme en treillis métallique du profil de température. La température à un pic évident au niveau du nœud contenant la source de chaleur, elle est constante le long des limites inférieures et chute près de la surface de convection.



**Figure 4.4(c) :** Diagramme en treillis métallique du profil de température.

Des vues en plan de la distribution de la température sont également illustrées à la figure 4.4(d).



**Figure 4.4(d) :** Vue en plan de la distribution de température.

L'utilisation d'une structure de grille plus fine produirait des courbes plus lisses.

Les effets des différentes puissances des sources de chaleur, des coefficients de convection ou des températures ambiantes peuvent être examinés en entrant de nouvelles valeurs pour les quantités respectives dans les cellules B15, B16 et B17.

### 4.2.5. Conduction transitoire dans un bloc durant l'établissement du régime permanent

Soit un bloc carré de  $1 \text{ m}^2$  dont la température initiale uniforme est maintenue à  $100^\circ\text{C}$ . Les surfaces inférieure et droite sont alors soudainement exposées à une limite de convection avec  $h = 10 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$  et  $T_\infty = 100^\circ\text{C}$ , tandis que la surface gauche est maintenue à  $100^\circ\text{C}$  et la surface supérieure est élevée à  $500^\circ\text{C}$ . Les propriétés du matériau sont :  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ ,  $c = 290 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ , et  $k = 10 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ .  $\Delta x = \Delta y = 1/3 \text{ m}$ . Une valeur appropriée de  $\tau$  a été choisie et la réponse de deux graphiques seront donnés pour  $n = 5$  incréments de temps et pour  $n$  suffisamment grands pour atteindre un état stationnaire. La solution à l'état d'équilibre correspondra à celle obtenue dans le 3<sup>ème</sup> cas présenté précédemment pour le cas du régime permanent.

Dans un premier temps, nous calculons les valeurs de  $Bi$  et  $\alpha$  comme suit :

$$Bi = h\Delta x/k = (10)(1/3)/10 = 1/3 \quad (4.3)$$

$$\alpha = k/\rho c = 10/(8000)(290) = 4.31 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad (4.4)$$

Nous avons noté au chapitre 3 que pour  $\Delta x = \Delta y$ , la sélection d'incrément de temps la plus restrictive est déterminée par un nœud d'angle extérieur de sorte que :

$$\Delta\tau_{\max} \leq (\Delta x)^2 / 4\alpha(1 + Bi) = 4833 \text{ sec}$$

Nous choisirons  $\Delta\tau = 4000 \text{ sec}$  pour le calcul et déterminerons le nombre de Fourier comme suit :

$$Fo = \alpha \Delta\tau / (\Delta x)^2 = 0.1862. \quad (4.5)$$

Il y a seize nœuds dans le problème physique mais que sept températures nodales limites sont spécifiées, donc seulement 9 nœuds participent au processus de chauffage. Les colonnes A à I sont réservées pour le processus de calcul à neuf nœuds avec les étiquettes de la ligne 1 comme suit :

A    B    C

$$T_1 = T_2 = T_3 = \text{etc.}$$

La ligne 2 est ignorée ; Les températures initiales pour tous les nœuds sont entrées dans la ligne 3 comme étant les températures données de 100 ; Les équations nodales sont maintenant entrées dans la ligne 4 à l'aide des formules de Tableau 2.2. Les valeurs calculées de  $Bi$  et  $Fo$  sont insérées dans les cellules M1 et O1 par commodité, et ensuite appelé comme \$M\$1 et \$O\$1 dans les formules nodales. Les équations résultantes sont présentées dans la figure 4.5(a).



	A	B	C
1	T1=	T2=	T3=
2			
3	100	100	100
4	=SO\$1*(500+B3+D3+100-4*A3)+A3	=SO\$1*(A3+500+C3+E3-4*B3)+B3	=SO\$1*(2*\$M\$1*(100-C3)+2*B3+500+F3-4*C3)+C3
5	=SO\$1*(500+B4+D4+100-4*A4)+A4	=SO\$1*(A4+500+C4+E4-4*B4)+B4	=SO\$1*(2*\$M\$1*(100-C4)+2*B4+500+F4-4*C4)+C4
6	=SO\$1*(500+B5+D5+100-4*A5)+A5	=SO\$1*(A5+500+C5+E5-4*B5)+B5	=SO\$1*(2*\$M\$1*(100-C5)+2*B5+500+F5-4*C5)+C5
	D	E	F
1	T4=	T5=	T6=
2			
3	100	100	100
4	=SO\$1*(A3+100+E3+G3-4*D3)+D3	=SO\$1*(D3+B3+F3+H3-4*E3)+E3	=SO\$1*(2*\$M\$1*(100-F3)+2*E3+C3+H3-4*F3)+F3
5	=SO\$1*(A4+100+E4+G4-4*D4)+D4	=SO\$1*(D4+B4+F4+H4-4*E4)+E4	=SO\$1*(2*\$M\$1*(100-F4)+2*E4+C4+H4-4*F4)+F4
6	=SO\$1*(A5+100+E5+G5-4*D5)+D5	=SO\$1*(D5+B5+F5+H5-4*E5)+E5	=SO\$1*(2*\$M\$1*(100-F5)+2*E5+C5+H5-4*F5)+F5
	G	H	I
1	T7=	T8=	T9=
2			
3	100	100	100
4	=SO\$1*(2*\$M\$1*(100-G3)+2*D3+100+H3-4*G3)+G3	=SO\$1*(2*\$M\$1*(100-H3)+2*E3+G3+H3-4*H3)+H3	=2*\$O\$1*(2*\$M\$1*(100-I3)+F3+H3-2*I3)+I3
5	=SO\$1*(2*\$M\$1*(100-G4)+2*D4+100+H4-4*G4)+G4	=SO\$1*(2*\$M\$1*(100-H4)+2*E4+G4+H4-4*H4)+H4	=2*\$O\$1*(2*\$M\$1*(100-I4)+F4+H4-2*I4)+I4
6	=SO\$1*(2*\$M\$1*(100-G5)+2*D5+100+H5-4*G5)+G5	=SO\$1*(2*\$M\$1*(100-H5)+2*E5+G5+H5-4*H5)+H5	=2*\$O\$1*(2*\$M\$1*(100-I5)+F5+H5-2*I5)+I5

Figure 4.5(a) : Les équations nodales insérées.

Ensuite, les équations sont copiées et dupliquées sur 43 lignes, ce qui permet d'obtenir un nombre suffisant d'incrément de temps pour obtenir un état stable. L'affichage des valeurs de température transitoire en colonne sont illustrées à la figure 4.5(b).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	T1=	T2=	T3=	T4=	T5=	T6=	T7=	T8=	T9=
2									
3	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
4	174,48	174,48	174,48	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
5	207,36	221,22	211,98	113,87	113,87	113,87	100,00	100,00	100,00
6	227,03	248,84	236,88	126,11	131,28	127,83	105,16	105,16	105,16
7	239,47	267,43	253,03	137,10	146,70	141,74	111,36	114,25	112,32
8	248,16	280,37	264,66	146,25	160,43	153,65	117,96	123,67	120,94
9	254,49	290,01	273,22	153,99	172,01	164,09	123,98	132,85	128,94
10	259,34	297,40	279,88	160,42	181,86	172,86	129,36	140,98	136,30
11	263,15	303,26	285,13	165,80	190,09	180,29	133,98	148,08	142,65
12	266,21	307,98	289,39	170,27	196,99	186,49	137,91	154,12	148,10
13	268,71	311,83	292,86	174,00	202,74	191,68	141,21	159,23	152,69
14	270,76	314,99	295,71	177,10	207,54	196,00	143,99	163,51	156,56
15	272,45	317,61	298,07	179,69	211,53	199,60	146,30	167,09	159,79
16	273,84	319,77	300,02	181,83	214,86	202,60	148,24	170,08	162,49
17	275,00	321,57	301,64	183,62	217,63	205,10	149,85	172,58	164,74
18	275,97	323,06	302,99	185,11	219,93	207,18	151,19	174,65	166,62
19	276,77	324,30	304,11	186,35	221,84	208,91	152,30	176,38	168,18
20	277,43	325,33	305,04	187,38	223,44	210,35	153,23	177,82	169,47
21	277,99	326,18	305,81	188,23	224,76	211,55	154,01	179,02	170,56
22	278,45	326,90	306,46	188,94	225,87	212,54	154,65	180,01	171,45
23	278,83	327,49	306,99	189,54	226,78	213,37	155,18	180,84	172,20
24	279,15	327,98	307,44	190,03	227,55	214,06	155,63	181,53	172,82
25	279,41	328,39	307,81	190,44	228,18	214,63	156,00	182,10	173,34
26	279,63	328,73	308,11	190,78	228,71	215,11	156,31	182,58	173,77
27	279,82	329,02	308,37	191,07	229,15	215,51	156,56	182,98	174,13
28	279,97	329,25	308,58	191,30	229,52	215,84	156,78	183,31	174,43
29	280,10	329,45	308,76	191,50	229,82	216,11	156,95	183,58	174,68
30	280,20	329,61	308,91	191,66	230,07	216,34	157,10	183,81	174,88
31	280,29	329,75	309,03	191,80	230,28	216,53	157,22	184,00	175,05
32	280,36	329,86	309,13	191,91	230,46	216,69	157,33	184,16	175,20
33	280,42	329,96	309,22	192,00	230,60	216,82	157,41	184,29	175,32
34	280,47	330,03	309,29	192,08	230,73	216,93	157,48	184,40	175,41
35	280,51	330,10	309,35	192,15	230,83	217,02	157,54	184,49	175,50
36	280,55	330,15	309,40	192,20	230,91	217,10	157,59	184,57	175,57
37	280,58	330,20	309,44	192,25	230,98	217,16	157,63	184,63	175,62

Figure 4.5(b) : Valeurs numériques obtenues.

Les températures nodales après 5 incréments de temps sont affichées dans la ligne 8 et les valeurs en régime permanent sont atteintes pour les lignes supérieures à environ 35. Pour obtenir une représentation graphique de la (des) solution(s) dans une configuration adaptée à la géométrie, il faut mettre de côté un bloc de 16 cellules, correspondant à 7 températures limites fixes plus 9 nœuds à température variable. Nous avons choisi K2:N5 comme bloc voir la figure 4.5(c). Pour les incréments de 5 temps (ligne 8), les formules sont saisis comme =\$A8, =\$B8, et ainsi de suite pour les nœuds 1, 2, etc. Les températures limites fixes de 100 et 500°C sont également saisies comme valeurs constantes pour l'emplacement de leurs cellules. Les solutions numériques pour  $n = 5\tau$  apparaissent dans le bloc de 16 cellules.

	J	K	L	M	N	O
1			Bi=	=1/3	Fo=	=0,1862
2		500	500	500	500	
3		100	=\$A8	=\$B8	=\$C8	
4		100	=\$D8	=\$E8	=\$F8	
5		100	=\$G8	=\$H8	=\$I8	

Figure 4.5(c) : Formules utilisées.

Pour afficher la solution à  $n = 40\tau$  (état stationnaire), sélectionner le bloc de cellules à K2:N5 et copié à un autre emplacement en commençant par la ligne 37 (ligne 2 + augmentation du nombre d'incrément de temps). Dans ce cas, nous avons choisi le bloc et les températures correspondant à 40 incréments de temps comme le montre la configuration géométrique du problème.

Enfin, les graphiques en treillis métallique pour les deux temps Les incréments sont illustrés à la figure 4.5(d) et 4.5(e). Bien sûr, s'affiche pour une autre fois les augmentations d'échelon pourraient être obtenues en utilisant la même procédure.

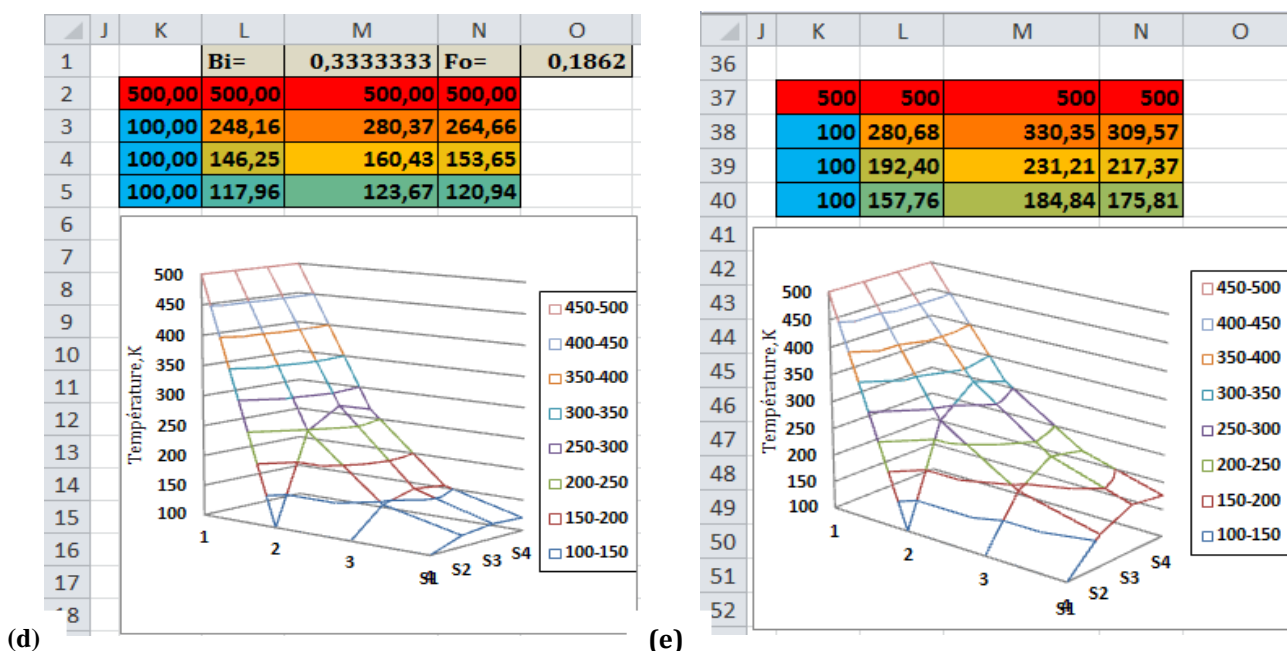


Figure 4.5 (d) et (e) : Représentation graphique des résultats obtenus.

La solution transitoire présentée dans les colonnes A à I n'affiche pas les nœuds de température limite constante, tandis que les affichages dans le format de configuration géométrique montrent assez clairement l'influence de la surface chaude et du refroidissement par convection sur la distribution de température dans le solide.

Une fois que l'inclusion des nœuds de température limite constante est une partie essentielle de l'affichage dans les figures 4.5(d) et (e). Et Le coefficient de Fourier compare une dimension corporelle caractéristique à une profondeur de pénétration approximative de l'onde de température pour un temps donné ( $\tau$ ).

### Comparaison avec la solution à l'état d'équilibre de cas 3 :

La solution à l'état d'équilibre de 3<sup>ème</sup> cas correspond à la solution transitoire ci-dessus lorsqu'elle est reportée sur un nombre suffisamment important d'incréments de temps.

### 4.2.6. Refroidissement d'un solide ailette en aluminium

Les problèmes de transfert de chaleur dans la pratique impliquent souvent plus d'un mode de transfert de chaleur. Dans ce cas, nous examinons le problème de la réception (ou perte) de chaleur par un solide à grande capacité à partir d'une aire de surface de convection. Le coefficient de convection  $h_c$  et la température du fluide  $T_c$ , qui peuvent tous deux varier en fonction du temps ou de la température du solide. On suppose que le fluide est transparent au rayonnement thermique. La combinaison solide-liquide est entourée d'une grande enceinte ayant un rayonnement efficace. La température de  $T_r$  qui échange de la chaleur avec le solide par rayonnement. Le système est illustré dans la figure 4.6 où nous avons montré un solide à ailettes avec un trou en son centre.

Nous supposons que le solide rayonnera avec une certaine émissivité effective à partir d'une aire de surface rayonnante égale à celle d'un cylindre enfermant la surface à ailettes et décrite par l'équation suivante :

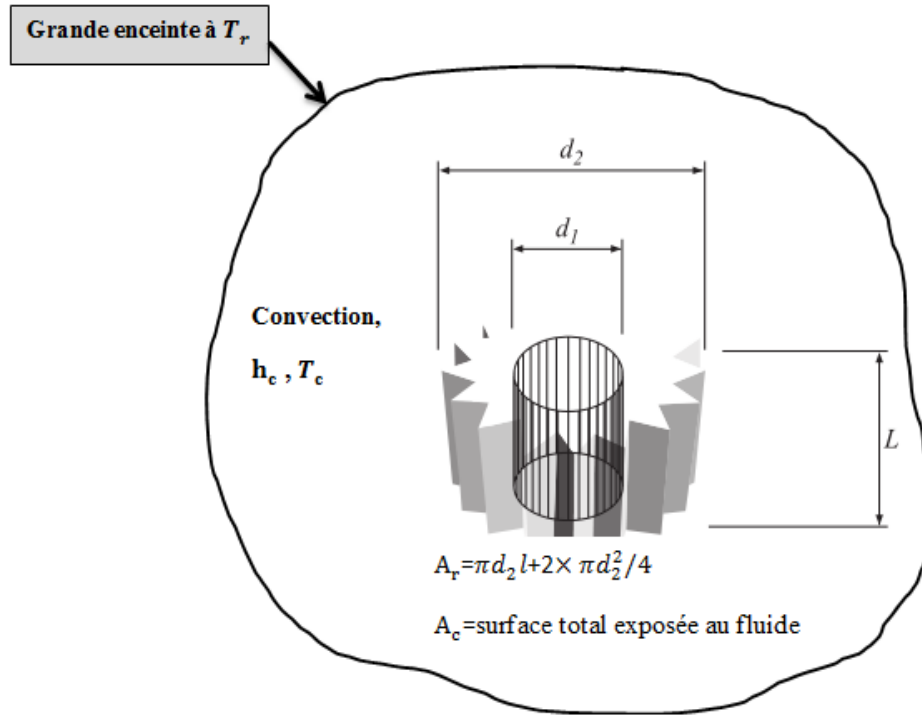
$A_c$  est l'aire de convection totale du solide exposé au fluide environnant avec le coefficient moyen de convection  $h_c$ .

En supposant que le solide se comporte comme une capacité regroupée, nous avons le bilan énergétique

**Taux d'augmentation de l'énergie interne du solide = transfert de chaleur au solide par convection + transfert de chaleur au solide par rayonnement.**

Où

$$\rho c V dT/d\tau = h_c A_c (T_c - T) + \sigma \epsilon A_r (T_r^4 - T^4) \quad (4.6)$$



**Figure 4.6 :** Solide en aluminium ailetté. [3]

L'équation (4.6) est écrite sous forme de différence finie adaptée à la solution numérique. En désignant les températures au début de l'incrément de temps avec l'indice ( $p$ ) et les températures à la fin de l'incrément de temps  $\Delta\tau$  avec l'indice ( $p+1$ ), l'équation (4.6) devient :

$$T_{p+1} = T_p + [h_c A_c (T_{c,p} - T_p) + \sigma \varepsilon A_r (T_{r,p}^4 - T_p^4)] (\Delta\tau / \rho c V) \quad (4.7)$$

Au cours d'un calcul numérique, il peut être souhaitable d'observer les effets distincts de la température du rayonnement et de la convection en écrivant l'équation (4.7) sous la forme suivante:

$$T_{p+1} = T_p + DT_{\text{conv}} + DT_{\text{rad}} \quad (4.8)$$

Avec les désignations évidentes :

$$DT_{\text{conv}} = h_c A_c (T_{c,p} - T_p) (\Delta\tau / \rho c V) \quad (4.9)$$

Et

$$DT_{\text{rad}} = \sigma \varepsilon A_r (T_{r,p}^4 - T_p^4) (\Delta\tau / \rho c V) \quad (4.10)$$

Toutes les températures doivent être en degrés absolus à cause des termes de rayonnement.

Lorsqu'il s'agit de problèmes de convection libre dans les gaz, le coefficient de convection prend souvent une forme fonctionnelle de :

$$h_c = B \times (T_c - T)^n \quad (4.11)$$

Où la constante B et l'exposant n sont dépendants de la géométrie et du fluide, pour les situations de convection forcée impliquant des gaz (fluides transparents).

Lorsque le transfert de chaleur par rayonnement est inclus dans le bilan énergétique du solide, avec la possibilité de coefficients de convection variables, la réponse temps-température peut différer considérablement du comportement exponentiel simple. Une description d'un tel système avec une constante de temps simple de :

$$\tau = cpV/hA \quad (4.12)$$

Un solide ailetté en aluminium comme celui illustré à la figure 4.4(a) avec des caractéristiques physiques données dans les colonnes E et F comme le monte la figure 4.6(a).[3]

	A	B	C	D
1	Temps,s	Température,K	DT Rayonnement, K	DT convection, K
2	0	533		
3	=A2+\$E\$2	=B2+C3+D3	=SE\$13*(0,00000005668*SE\$8*SE\$9*(SE\$12^4-B2^4))	=SE\$13*(SE\$14*(ABS(SE\$7-B2))^SE\$15)*SE\$10*(SE\$7-B2)
4	=A3+\$E\$2	=B3+C4+D4	=SE\$13*(0,00000005668*SE\$8*SE\$9*(SE\$12^4-B3^4))	=SE\$13*(SE\$14*(ABS(SE\$7-B3))^SE\$15)*SE\$10*(SE\$7-B3)
5	=A4+\$E\$2	=B4+C5+D5	=SE\$13*(0,00000005668*SE\$8*SE\$9*(SE\$12^4-B4^4))	=SE\$13*(SE\$14*(ABS(SE\$7-B4))^SE\$15)*SE\$10*(SE\$7-B4)
6	=A5+\$E\$2	=B5+C6+D6	=SE\$13*(0,00000005668*SE\$8*SE\$9*(SE\$12^4-B5^4))	=SE\$13*(SE\$14*(ABS(SE\$7-B5))^SE\$15)*SE\$10*(SE\$7-B5)
7	=A6+\$E\$2	=B6+C7+D7	=SE\$13*(0,00000005668*SE\$8*SE\$9*(SE\$12^4-B6^4))	=SE\$13*(SE\$14*(ABS(SE\$7-B6))^SE\$15)*SE\$10*(SE\$7-B6)

	E	F
1		Nomenclature
2	60	incrément de temps, s
3	2675	densité, kg/m^3
4	920	chaleur spécifique, J/kg.K
5	0,0000334	volume, m^3
6	=SE\$3*SE\$4*SE\$5	capacité thermique, J/K
7	293	température de convection, K
8	0,85	emissivité
9	0,01141	surface effective de rayonnement, m^2
10	0,02298	surface totale de convection, m^2
11	=SE\$14*(ABS(SE\$7-B2))^SE\$15	coeff, convc W/m^2-k
12	293	température de rayonnement, k
13	=SE\$2/E6	parametre de temps
14	1,4	conv, const
15	0,25	conv, Exp

**Figure 4.6(a) :** Formules nodales et caractéristiques physiques de l'ailette.

Le solide est uniforme à la température de 260 °C = 533 K lorsqu'il est placé dans l'air ambiant à 20 °C et qu'on le laisse refroidir. On peut supposer que le coefficient de transfert de chaleur par convection libre varie en fonction des facteurs suivants :

$$h = 1.4(T - T_{\infty})^{0.25} \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \quad (4.13)$$

La température de rayonnement effective des murs de la pièce environnante est également de 20°C.

On cherche à déterminer la courbe de refroidissement température-temps pour cette situation et à comparer avec ce qui se passerait si le solide était refroidi uniquement par

convection avec  $h$  égale à la valeur au début du refroidissement. Quelle serait la constante de temps pour cette dernière situation, on déterminera la constante de temps.

Les équations (4.7), (4.8) et (4.9) sont entrées dans le tableur Excel comme le montre la figure 4.6(a). Un incrément de temps de 60 secondes est sélectionné et l'équation (4.13) est insérée pour décrire le coefficient de convection. Les formules sont copiées sur une cinquantaine de lignes pour produire des conditions proches de l'équilibre. La valeur de  $h$  au début du refroidissement est :

$$h_{\text{initial}} = 1.4 (533 - 293)^{0.25} = 5.51 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

Cette valeur est calculée et indiquée dans la cellule E11.

	A	B	C	D	E	F
1	Temps,s	Température,K	DT Rayonnement, K	DT convection, K		Nomenclature
2	0	533			60	incrément de temps, s
3	60	481,39	-29,43	-22,18	2675	densité, kg/m <sup>3</sup>
4	120	446,41	-18,59	-16,39	920	chaleur spécifique, J/kg.K
5	180	420,75	-12,98	-12,68	3,34E-05	volume, m <sup>3</sup>
6	240	401,05	-9,62	-10,09	82,1974	capacité thermique, J/K
7	300	385,44	-7,42	-8,18	293	température de convection, K
8	360	372,81	-5,90	-6,73	0,85	émissivité
9	420	362,42	-4,79	-5,60	0,01141	surface effective de rayonnement, m <sup>2</sup>
10	480	353,75	-3,97	-4,71	0,02298	surface totale de convection, m <sup>2</sup>
11	540	346,44	-3,33	-3,98	5,51037108	coeff. conv W/m <sup>2</sup> ·K
12	600	340,22	-2,82	-3,39	293	température de rayonnement, K
13	660	334,90	-2,42	-2,91	0,729950096	paramètre de temps
14	720	330,30	-2,09	-2,50	1,4	conv, const
15	780	326,32	-1,82	-2,16	0,25	conv, Exp
16	840	322,85	-1,59	-1,88		
17	900	319,81	-1,40	-1,64		
18	960	317,13	-1,24	-1,43		
19	1020	314,78	-1,10	-1,26		

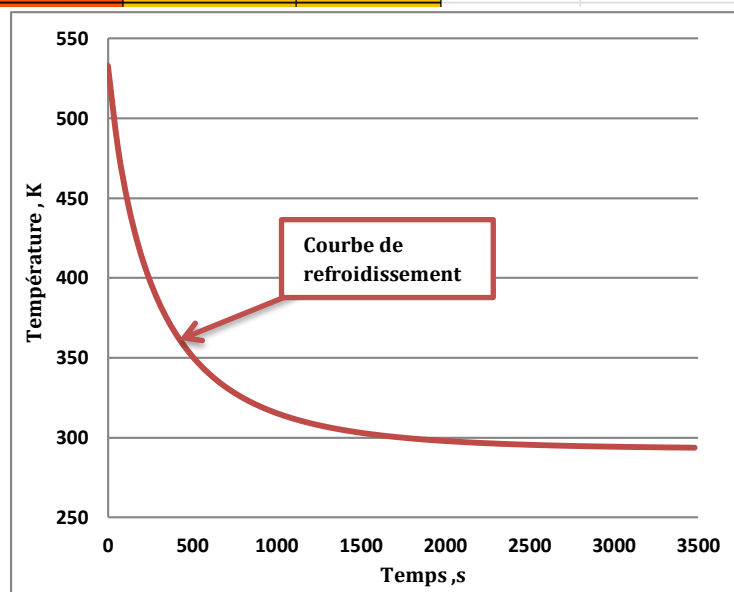
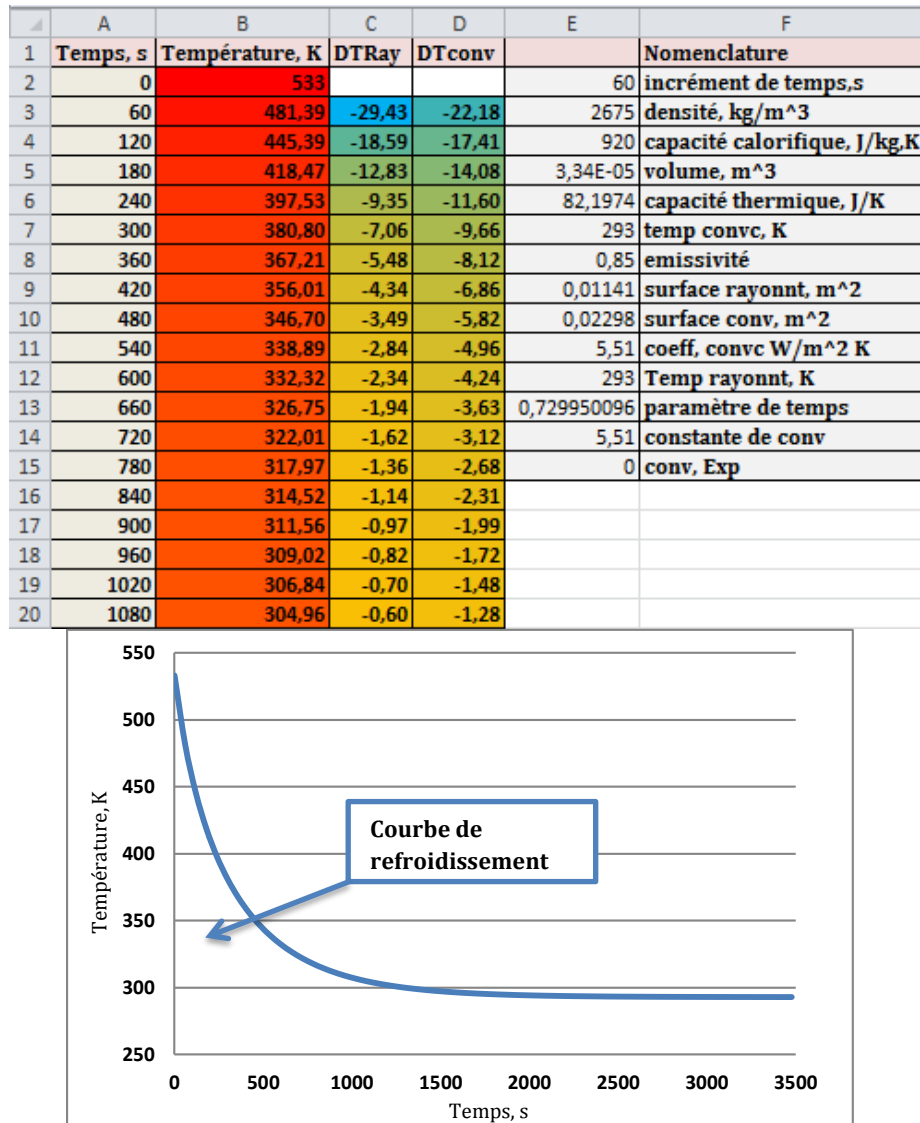


Figure 4.6 (b) : Valeurs numériques et courbe de refroidissement par convection et rayonnement.

La courbe de refroidissement résultante est tracée dans la figure 4.6(b) avec quelques lignes de calcul. Les chutes de température dues au rayonnement et à la convection sont presque les mêmes au début du refroidissement ; ainsi donc, négliger le rayonnement entraînerait une erreur grave.

Pour obtenir la courbe de refroidissement pour  $h = 5,51$  = constante, cette valeur est entrée dans la cellule E14 avec une valeur exposante de zéro dans la cellule E15. La courbe de refroidissement qui en résulte est illustrée à la figure 4.6(c).



**Figure 4.6 (c) :** Valeurs numérique et courbe de refroidissement par convection uniquement.

Ce qui indique un temps manifestement plus long pour le processus de refroidissement que pour le refroidissement combiné par rayonnement et convection. La constante de temps est calculée selon l'équation (4.7) comme suit :

$$\tau = \rho c V / h A = (2675)(920)(0.0000334) / (5.51)(0.02298) = 649 \text{ sec}$$

C'est le moment d'atteindre 63,2 % de la baisse de température globale.



$$T = 533 - (0.632)(533 - 293) = 381 \text{ K}$$

Pour le refroidissement combiné convection/rayonnement, le temps nécessaire pour atteindre cette même température n'est que d'environ 320 secondes, une période beaucoup plus courte. Une spécification de la constante de temps en fonction de la baisse de 63,2 % de la température est évidemment un moyen inapproprié pour décrire le problème du refroidissement par convection combiné. Une comparaison des deux courbes de refroidissement est illustrée à la figure 4.6(d).

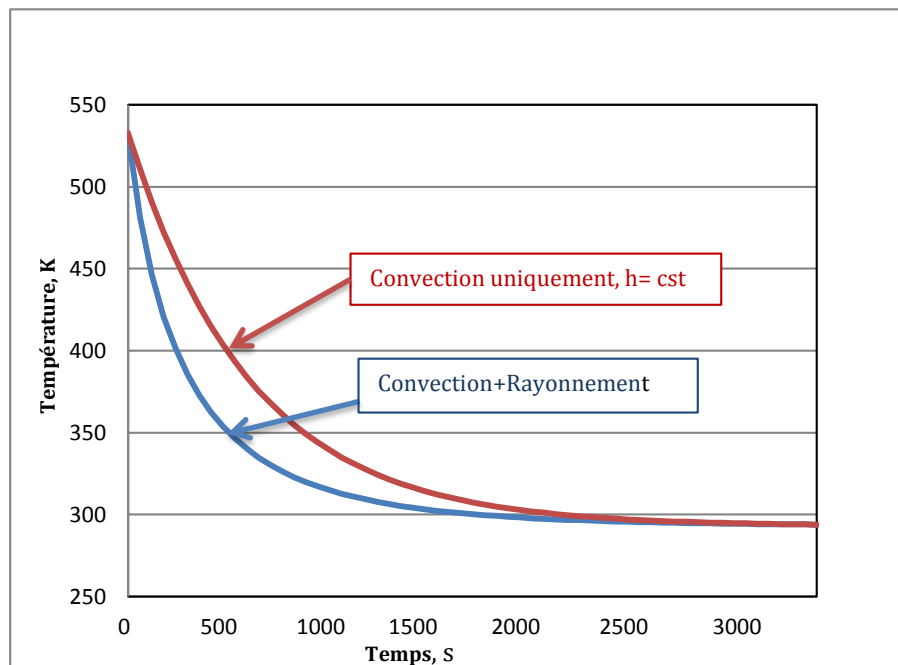


Figure 4.6 (d) : Comparaison entre les deux courbes.

#### 4.2.7. Chauffage transitoire d'un boîtier électronique dans une armoire électrique

Une petite boîte métallique contenant un équipement électronique hermétique a des dimensions approximatives d'un cube de 10 cm avec une masse égale à 0,5 kg et une chaleur spécifique de 300 J/kg.°C. Le volume du boîtier est de 0,06 m<sup>3</sup> et la chaleur générée dans le boîtier est de 200 W. Le boîtier électronique est entouré d'un boîtier en aluminium d'environ 25 cm de diamètre sur un côté avec une masse de 1,05 kg et une chaleur spécifique de 890 J/kg.°C. La surface du boîtier est de 0,375 m<sup>2</sup> et l'émissivité de surface du boîtier de l'équipement électronique et du boîtier en aluminium est de 0,9.

L'espace entre les deux boîtes est rempli d'air à la pression atmosphérique avec une masse de 0,0176 kg. et  $c = 718 \text{ J/kg.°C}$ . Le système est initialement à une température uniforme de 20°C = 293 K lorsque la puissance électrique de 200 W est appliquée. Le coefficient de transfert de chaleur par convection entre toutes les surfaces et l'air ambiant est  $h=10 \text{ W/m}^2\text{.°C}$ , et l'ensemble est enfermé dans une grande pièce sous une température de 20°C. Nous utiliserons une technique numérique pour déterminer le comportement temporel de la température du boîtier électronique et de son boîtier.



Résultats obtenus :

La nomenclature du système est indiquée à la figure 4.7(a). Puisque  $A_3 \gg A_1$ , le transfert de chaleur par rayonnement peut être calculé avec l'équation (1.12) comme suit :

$$q_{\text{rad}_{1-2}} = \sigma \varepsilon_1 A_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad (4.14)$$

$$q_{\text{rad}_{3-s}} = \sigma \varepsilon_3 A_3 (T_3^4 - T_s^4) \quad (4.15)$$

avec :

$$C_1 = m_1 \cdot c_1$$

$$C_2 = C_{\text{air}} = m_{\text{air}} \cdot c_{\text{air}};$$

$$C_3 = m_3 \cdot c_3$$

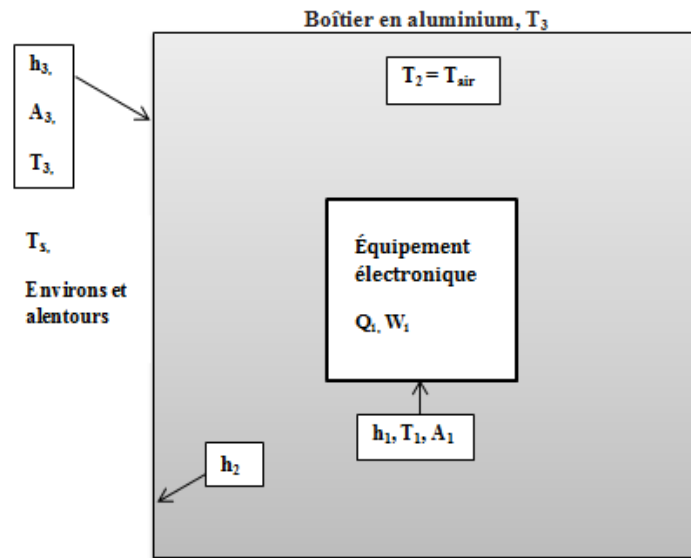


Figure 4.7(a) : Nomenclature d'un boîtier électronique.

	C	D
1	T1=	T2=
2		
3	293	293
4	=H\$2*(\$H\$3*0,06*(D3-C3)+0,000000051*0,06*(E3^4-C3^4)+\$H\$6)/150+C3	=H\$2*(\$H\$3*0,06*(C3-D3)+\$H\$4*0,375*(E3-D3))/12,58+D3
5	=H\$2*(\$H\$3*0,06*(D4-C4)+0,000000051*0,06*(E4^4-C4^4)+\$H\$6)/150+C4	=H\$2*(\$H\$3*0,06*(C4-D4)+\$H\$4*0,375*(E4-D4))/12,58+D4
6	=H\$2*(\$H\$3*0,06*(D5-C5)+0,000000051*0,06*(E5^4-C5^4)+\$H\$6)/150+C5	=H\$2*(\$H\$3*0,06*(C5-D5)+\$H\$4*0,375*(E5-D5))/12,58+D5
	E	
1	T3=	
2		
3	293	
4	=H\$2*(\$H\$4*0,375*(D3-E3)+\$H\$5*0,375*(293-E3)+0,000000051*0,06*(C3^4-E3^4)+0,000000051*0,375*(293^4-E3^4))/934+E3	
5	=H\$2*(\$H\$4*0,375*(D4-E4)+\$H\$5*0,375*(293-E4)+0,000000051*0,06*(C4^4-E4^4)+0,000000051*0,375*(293^4-E4^4))/934+E4	
6	=H\$2*(\$H\$4*0,375*(D5-E5)+\$H\$5*0,375*(293-E5)+0,000000051*0,06*(C5^4-E5^4)+0,000000051*0,375*(293^4-E5^4))/934+E5	

Figure 4.7(b) : Formules nodales utilisées.

On a:  $C_1 = 150 \text{ J/}^\circ\text{C}$ ;  $C_2 = 12.63 \text{ J/}^\circ\text{C}$ ;  $C_3 = 934 \text{ J/}^\circ\text{C}$

Nous pouvons maintenant faire un bilan énergétique sur chacun des trois nœuds, en réglant le taux d'énergie dans chaque nœud égal au taux de variation dans le temps de

l'énergie interne de ce nœud. Pour le nœud 1, le boîtier électronique, il y a également une entrée d'énergie provenant de la puissance électrique appliquée, que nous appelons  $Q_1$ .

Ainsi :

$$C_1 dT_1/d\tau = Q_1 + h_1 A_1 (T_2 - T_1) + \sigma \epsilon_1 A_1 (T_3^4 - T_1^4) \quad (4.16)$$

$$C_2 dT_2/d\tau = h_1 A_1 (T_1 - T_2) + h_2 A_3 (T_3 - T_2) \quad (4.17)$$

$$C_3 dT_3/d\tau = h_2 A_3 (T_2 - T_3) + \sigma \epsilon_1 A_1 (T_1^4 - T_3^4) + h_3 A_3 (T_s - T_3) + \sigma \epsilon_3 A_3 (T_s^4 - T_3^4) \quad (4.18)$$

Où toutes les températures doivent être en Kelvins à cause des termes de radiation.  $T_s$  est la température ambiante de la grande pièce. D'après les données du problème, nous avons :

$$A_1 = 0.06; \quad A_3 = 0.375; \quad h_1 = h_2 = h_3 = 10$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0.9; \quad T_s = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$$

Les équations (4.6), (4.7) et (4.8) peuvent être écrites sous forme de différence finie en exprimant les gradients de température comme suit :

$$dT/d\tau = (T^{p+1} - T^p)/\tau \quad (4.19)$$

Toutes les températures du côté droit de l'équation comme  $T^p$  représentent les températures au début de l'incrément de temps  $\Delta\tau$  et  $T^{p+1}$  représente la température à la fin de l'incrément de temps. Les formules résultantes ont été insérées dans une feuille de calcul Excel et sont illustrées dans la figure 4.7(b) ci-dessus.  $Dt$  est utilisé pour désigner l'incrément de temps  $\Delta\tau$ . Les équations pour un grand nombre d'incrément de temps sont ensuite copiées pour effectuer le calcul transitoire. Les résultats pour un incrément de temps de 5 secondes sont illustrés à la figure 4.7(c) pour une puissance électrique de 200W. À titre de comparaison, les résultats pour une puissance thermique de 100 W sont illustrés à la figure 4.7(d), indiquant des températures légèrement inférieures pour chacun des trois nœuds.

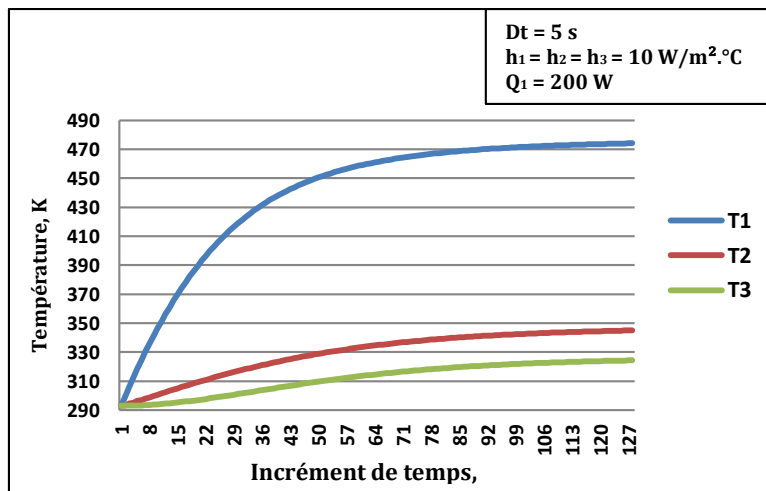
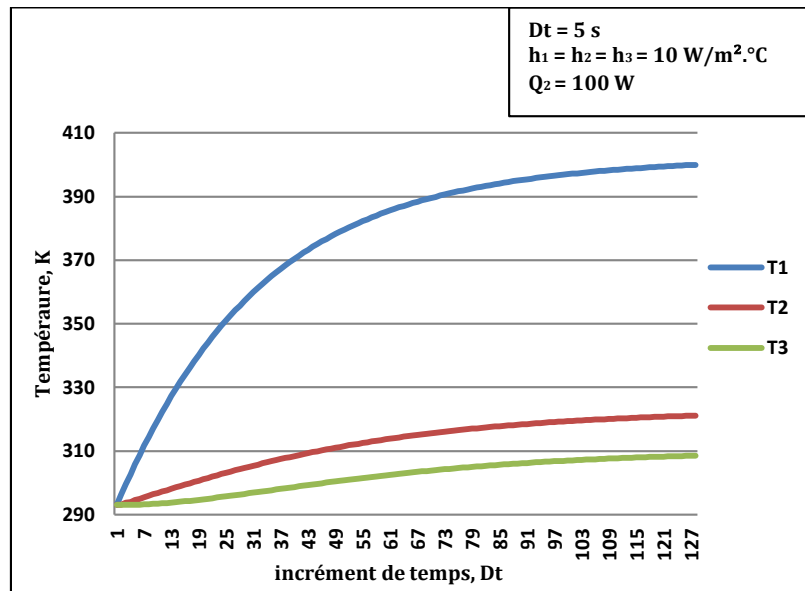


Figure 4.7 (c) : Résultats pour une puissance de 200 W.

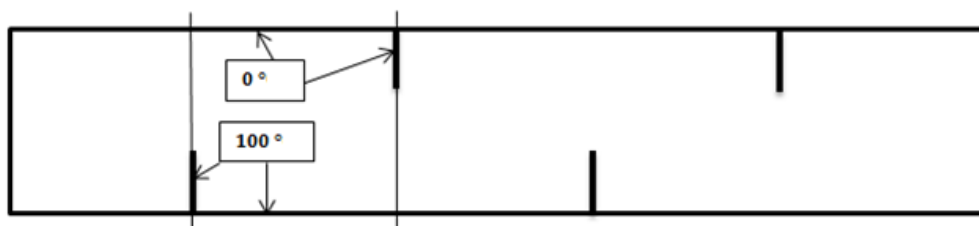


**Figure 4.7 (d) :** Résultats pour une puissance de 100 W.

La température du boîtier électronique atteint environ 473 K (200°C) pour une entrée de 200 W et seulement 400 K (127°C) pour l'entrée de 100 W, après environ 120 incréments de temps ou 10 minutes. Les températures d'équilibre correspondantes pour le boîtier en aluminium sont environ 52°C et 35°C.

#### 4.2.8. Etude d'une configuration présentant une symétrie

Dans certains problèmes, une configuration géométrique se répète, ce qui permet de tirer parti de la symétrie dans la formulation des équations nodales, réduisant ainsi le nombre de nœuds nécessaires pour résoudre le problème. Dans ce qui suit, nous considérons un matériau contenu entre deux parois avec des nervures saillantes, comme le montre la figure 4.8(a). La section entre les lignes pointillées se répète ou est une image miroir d'elle-même et peut être utilisée pour analyser l'ensemble du problème du mur. Le système est configuré sous la forme de 15 nœuds sur 15 pour représenter la section répétitive. Le bloc A1:O15 est utilisé pour la formulation Excel, dont certaines parties sont illustrées à la figure 4.8(b). La nervure 100° dépasse la surface 100° avec des valeurs fixes saisies pour les nœuds A9:A15. De même, la nervure 0° dépasse la surface 0° de sorte que des valeurs constantes de zéro sont entrées dans les cellules O1:O7.



**Figure 4.8 (a) :** Schéma d'une nervure saillante.

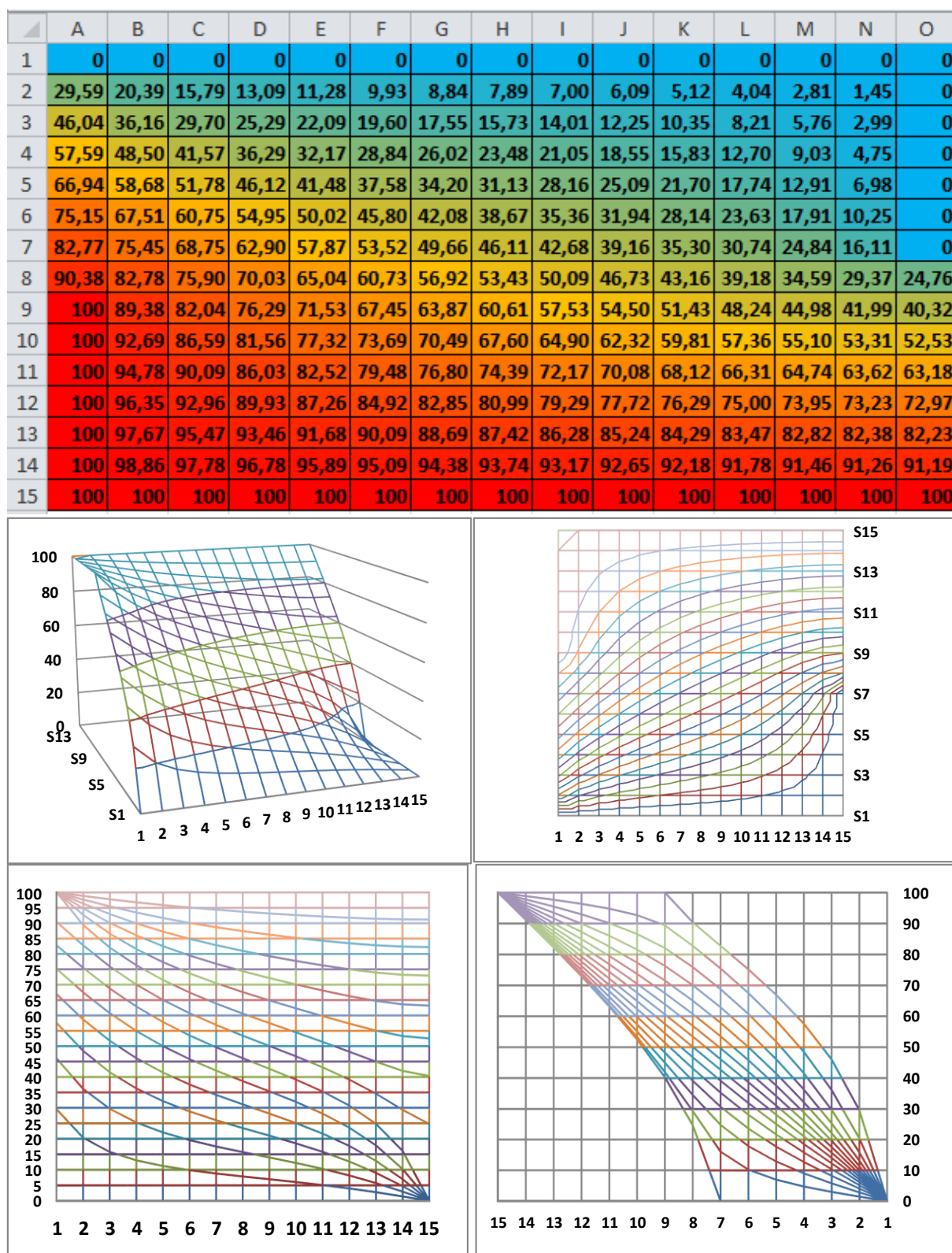
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	$=(A1+2*B3+A3)/4$	$=(A2+B1+B3+C2)/4$	$=(B2+C1+C3+D2)/4$	$=(C2+D1+D3+E2)/4$	$=(D2+E1+E3+F2)/4$	$=(E2+F1+F3+G2)/4$	$=(F2+G1+G3+H2)/4$	$=(G2+H1+H3+I2)/4$
3	$=(A2+2*B4+A4)/4$	$=(A3+B2+B4+C3)/4$	$=(B3+C2+C4+D3)/4$	$=(C3+D2+D4+E3)/4$	$=(D3+E2+E4+F3)/4$	$=(E3+F2+F4+G3)/4$	$=(F3+G2+G4+H3)/4$	$=(G3+H2+H4+I3)/4$
4	$=(A3+2*B5+A5)/4$	$=(A4+B3+B5+C4)/4$	$=(B4+C3+C5+D4)/4$	$=(C4+D3+D5+E4)/4$	$=(D4+E3+E5+F4)/4$	$=(E4+F3+F5+G4)/4$	$=(F4+G3+G5+H4)/4$	$=(G4+H3+H5+I4)/4$
5	$=(A4+2*B6+A6)/4$	$=(A5+B4+B6+C5)/4$	$=(B5+C4+C6+D5)/4$	$=(C5+D4+D6+E5)/4$	$=(D5+E4+E6+F5)/4$	$=(E5+F4+F6+G5)/4$	$=(F5+G4+G6+H5)/4$	$=(G5+H4+H6+I5)/4$
6	$=(A5+2*B7+A7)/4$	$=(A6+B5+B7+C6)/4$	$=(B6+C5+C7+D6)/4$	$=(C6+D5+D7+E6)/4$	$=(D6+E5+E7+F6)/4$	$=(E6+F5+F7+G6)/4$	$=(F6+G5+G7+H6)/4$	$=(G6+H5+H7+I6)/4$
7	$=(A6+2*B8+A8)/4$	$=(A7+B6+B8+C7)/4$	$=(B7+C6+C8+D7)/4$	$=(C7+D6+D8+E7)/4$	$=(D7+E6+E8+F7)/4$	$=(E7+F6+F8+G7)/4$	$=(F7+G6+G8+H7)/4$	$=(G7+H6+H8+I7)/4$
8	$=(A7+2*B9+A9)/4$	$=(A8+B7+B9+C8)/4$	$=(B8+C7+C9+D8)/4$	$=(C8+D7+D9+E8)/4$	$=(D8+E7+E9+F8)/4$	$=(E8+F7+F9+G8)/4$	$=(F8+G7+G9+H8)/4$	$=(G8+H7+H9+I8)/4$
9	100	$=(A9+B8+B10+C9)/4$	$=(B9+C8+C10+D9)/4$	$=(C9+D8+D10+E9)/4$	$=(D9+E8+E10+F9)/4$	$=(E9+F8+F10+G9)/4$	$=(F9+G8+G10+H9)/4$	$=(G9+H8+H10+I9)/4$
10	100	$=(A10+B9+B11+C10)/4$	$=(B10+C9+C11+D10)/4$	$=(C10+D9+D11+E10)/4$	$=(D10+E9+E11+F10)/4$	$=(E10+F9+F11+G10)/4$	$=(F10+G9+G11+H10)/4$	$=(G10+H9+H11+I10)/4$
11	100	$=(A11+B10+B12+C11)/4$	$=(B11+C10+C12+D11)/4$	$=(C11+D10+D12+E11)/4$	$=(D11+E10+E12+F11)/4$	$=(E11+F10+F12+G11)/4$	$=(F11+G10+G12+H11)/4$	$=(G11+H10+H12+I11)/4$
12	100	$=(A12+B11+B13+C12)/4$	$=(B12+C11+C13+D12)/4$	$=(C12+D11+D13+E12)/4$	$=(D12+E11+E13+F12)/4$	$=(E12+F11+F13+G12)/4$	$=(F12+G11+G13+H12)/4$	$=(G12+H11+H13+I12)/4$
13	100	$=(A13+B12+B14+C13)/4$	$=(B13+C12+C14+D13)/4$	$=(C13+D12+D14+E13)/4$	$=(D13+E12+E14+F13)/4$	$=(E13+F12+F14+G13)/4$	$=(F13+G12+G14+H13)/4$	$=(G13+H12+H14+I13)/4$
14	100	$=(A14+B13+B15+C14)/4$	$=(B14+C13+C15+D14)/4$	$=(C14+D13+D15+E14)/4$	$=(D14+E13+E15+F14)/4$	$=(E14+F13+F15+G14)/4$	$=(F14+G13+G15+H14)/4$	$=(G14+H13+H15+I14)/4$
15	100	100	100	100	100	100	100	100

	I	J	K	L	M	N	O
1	0	0	0	0	0	0	0
2	$=(H2+I1+I3+J2)/4$	$=(I2+J1+J3+K2)/4$	$=(J2+K1+K3+L2)/4$	$=(K2+L1+L3+M2)/4$	$=(L2+M1+M3+N2)/4$	$=(M2+N1+N3+O2)/4$	0
3	$=(H3+I2+I4+J3)/4$	$=(I3+J2+J4+K3)/4$	$=(J3+K2+K4+L3)/4$	$=(K3+L2+L4+M3)/4$	$=(L3+M2+M4+N3)/4$	$=(M3+N2+N4+O3)/4$	0
4	$=(H4+I3+I5+J4)/4$	$=(I4+J3+J5+K4)/4$	$=(J4+K3+K5+L4)/4$	$=(K4+L3+L5+M4)/4$	$=(L4+M3+M5+N4)/4$	$=(M4+N3+N5+O4)/4$	0
5	$=(H5+I4+I6+J5)/4$	$=(I5+J4+J6+K5)/4$	$=(J5+K4+K6+L5)/4$	$=(K5+L4+L6+M5)/4$	$=(L5+M4+M6+N5)/4$	$=(M5+N4+N6+O5)/4$	0
6	$=(H6+I5+I7+J6)/4$	$=(I6+J5+J7+K6)/4$	$=(J6+K5+K7+L6)/4$	$=(K6+L5+L7+M6)/4$	$=(L6+M5+M7+N6)/4$	$=(M6+N5+N7+O6)/4$	0
7	$=(H7+I6+I8+J7)/4$	$=(I7+J6+J8+K7)/4$	$=(J7+K6+K8+L7)/4$	$=(K7+L6+L8+M7)/4$	$=(L7+M6+M8+N7)/4$	$=(M7+N6+N8+O7)/4$	0
8	$=(H8+I7+I9+J8)/4$	$=(I8+J7+J9+K8)/4$	$=(J8+K7+K9+L8)/4$	$=(K8+L7+L9+M8)/4$	$=(L8+M7+M9+N8)/4$	$=(M8+N7+N9+O8)/4$	$=(2*N8+O7+O9)/4$
9	$=(H9+I8+I10+J9)/4$	$=(I9+J8+J10+K9)/4$	$=(J9+K8+K10+L9)/4$	$=(K9+L8+L10+M9)/4$	$=(L9+M8+M10+N9)/4$	$=(M9+N8+N10+O9)/4$	$=(2*N9+O8+O10)/4$
10	$=(H10+I9+I11+J10)/4$	$=(I10+J9+J11+K10)/4$	$=(J10+K9+K11+L10)/4$	$=(K10+L9+L11+M10)/4$	$=(L10+M9+M11+N10)/4$	$=(M10+N9+N11+O10)/4$	$=(2*N10+O9+O11)/4$
11	$=(H11+I10+I12+J11)/4$	$=(I11+J10+J12+K11)/4$	$=(J11+K10+K12+L11)/4$	$=(K11+L10+L12+M11)/4$	$=(L11+M10+M12+N11)/4$	$=(M11+N10+N12+O11)/4$	$=(2*N11+O10+O12)/4$
12	$=(H12+I11+I13+J12)/4$	$=(I12+J11+J13+K12)/4$	$=(J12+K11+K13+L12)/4$	$=(K12+L11+L13+M12)/4$	$=(L12+M11+M13+N12)/4$	$=(M12+N11+N13+O12)/4$	$=(2*N12+O11+O13)/4$
13	$=(H13+I12+I14+J13)/4$	$=(I13+J12+J14+K13)/4$	$=(J13+K12+K14+L13)/4$	$=(K13+L12+L14+M13)/4$	$=(L13+M12+M14+N13)/4$	$=(M13+N12+N14+O13)/4$	$=(2*N13+O12+O14)/4$
14	$=(H14+I13+I15+J14)/4$	$=(I14+J13+J15+K14)/4$	$=(J14+K13+K15+L14)/4$	$=(K14+L13+L15+M14)/4$	$=(L14+M13+M15+N14)/4$	$=(M14+N13+N15+O14)/4$	$=(2*N14+O13+O15)/4$
15	100	100	100	100	100	100	100

Figure 4.8(b) : Formules nodales utilisées.

Toutes les formules nodales sont de type nodal intérieur, mais celles des cellules A2:A8 et O8:O14 impliquent des températures d'image miroir telles que la température à gauche du nœud A2 serait être le même que celui de B3. De même, la température à droite du nœud O8 serait la même que celle du nœud O8. N8. Ainsi,  $2*B3$  et  $2*N8$  sont saisis dans les formules et ainsi de suite. Une fois qu'une formule caractéristique les formules de cellules similaires peuvent être copiées et dupliquées. Les autres formules de nœuds intérieurs peuvent être copiées et dupliquées de la même manière, et certaines des entrées sont illustrées à la figure 4.8(b).

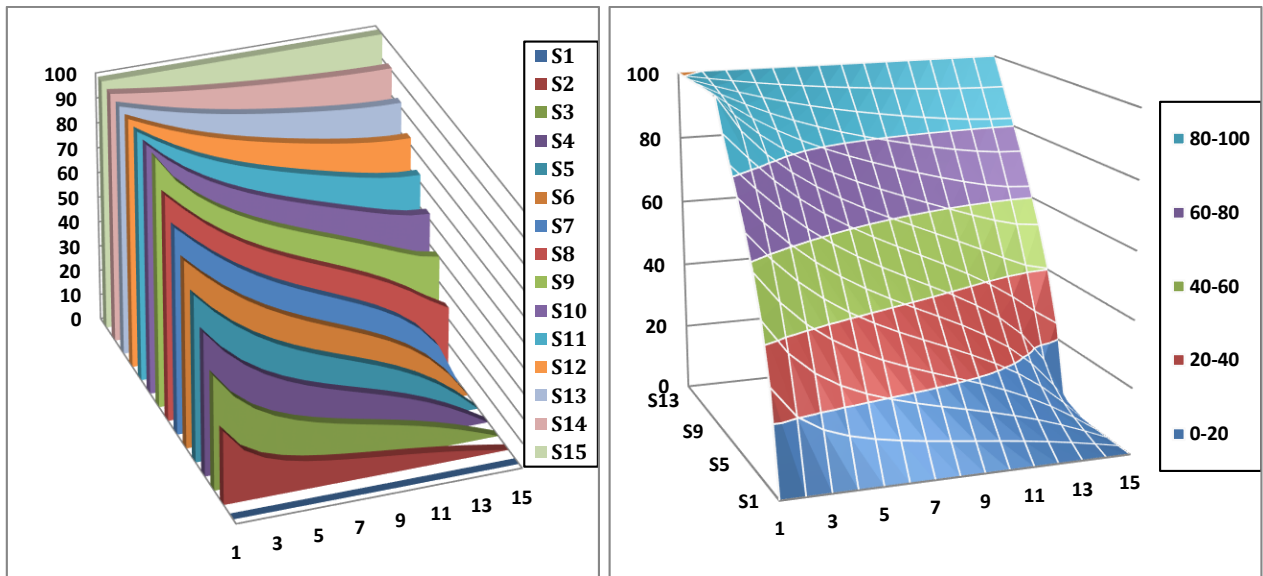


**Figure 4.8 (c) :** Représentation numérique et graphique des résultats obtenus.

Lorsque la solution itérative est effectuée, les résultats apparaissent comme le montre la figure 4.8(c) ci-dessus, accompagnés d'un graphique à mailles métalliques

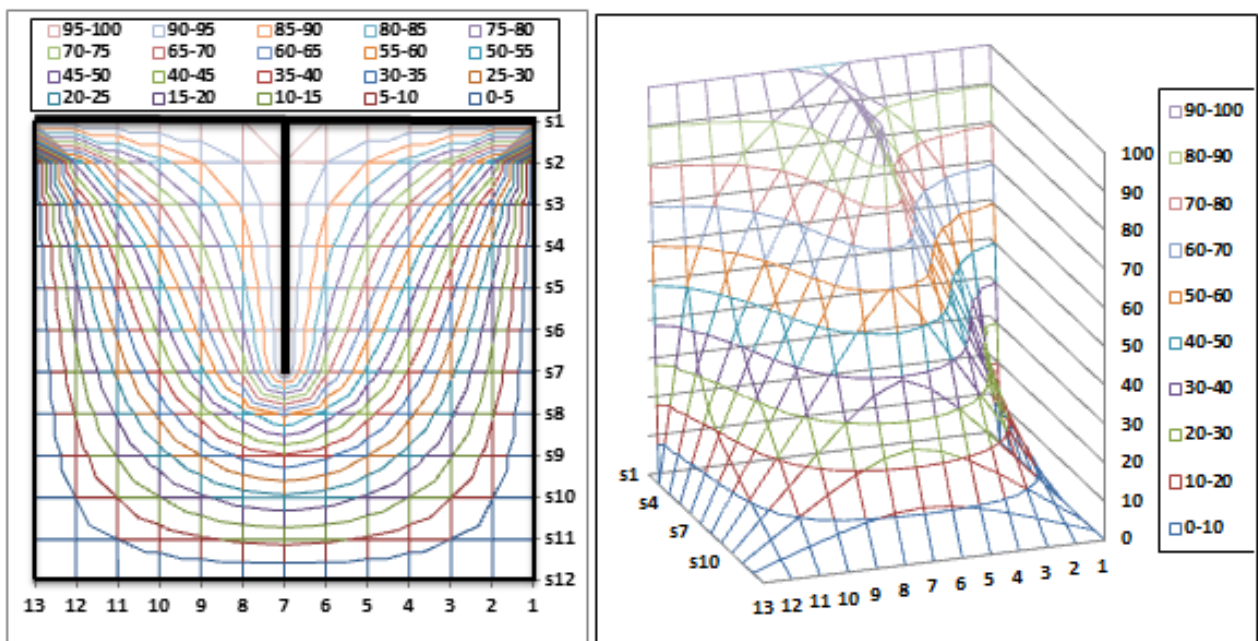


tridimensionnelles et de vues en plan et en élévation des profils de température. Les solutions sont illustrées à la figure 4.8(d).



**Figure 4.8(d) :** Représentation graphique en 3D des résultats obtenus.

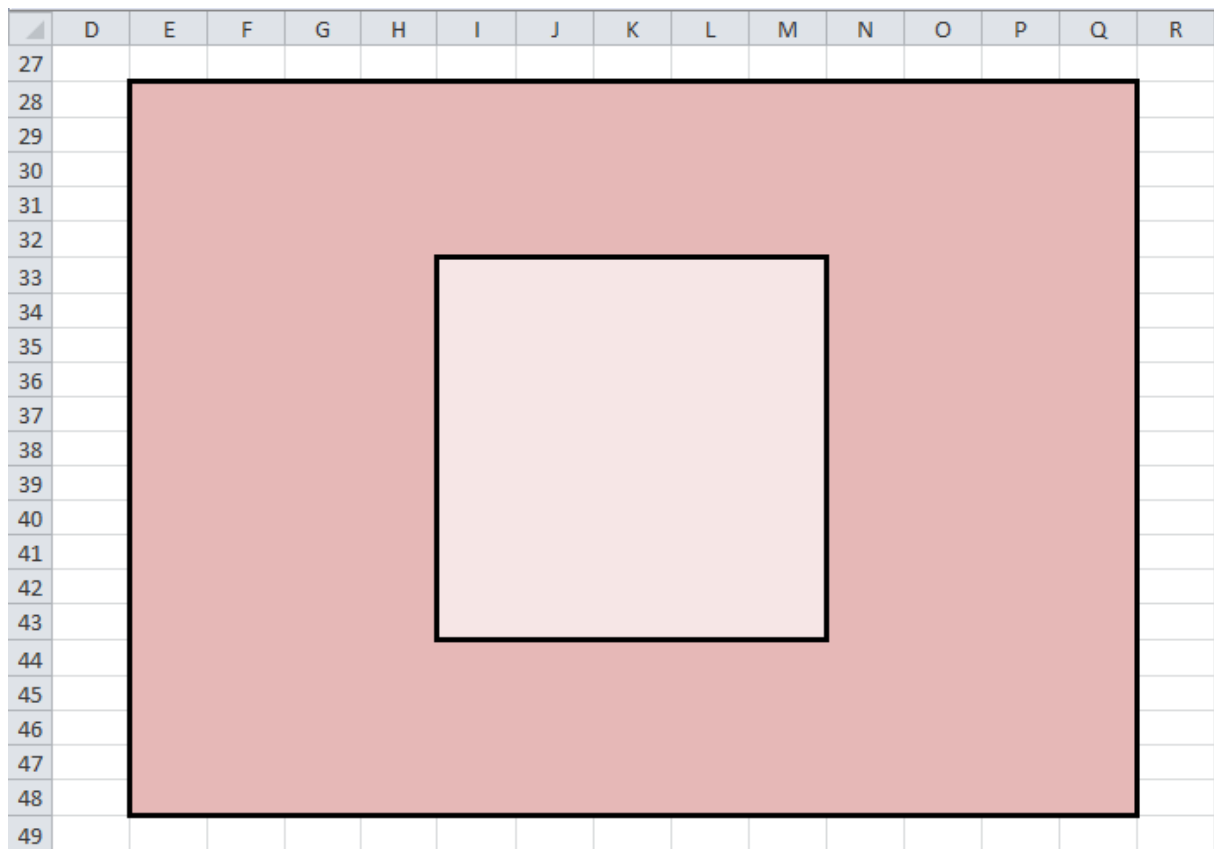
À titre de comparaison, les profils de température d'un mur et d'une seule nervure en saillie à 100°C entourés de trois murs à 0°C sont illustrés à la figure 4.8(e).



**Figure 4.8 (e) :** Profils de température d'un mur à une seule nervure.

### 4.2.9 Conduction dans un solide à matériaux composites

Considérant un solide composite illustré à la figure 4.9(a). Le matériau extérieur est de 10 x 24 cm avec un insert de matériau intérieur de 4 x 10 cm centré verticalement et horizontalement. Nous réglons le problème avec la surface supérieure spécifiée comme  $T = 0$ , tandis que les cellules indiquées F12, G12 et H12 peuvent être utilisées pour fournir des entrées pour les températures des 3 autres surfaces. K est spécifié dans le modèle avec la cellule B51.



**Figure 4.9 (a) :** Nomenclature d'un matériau composite.

Il n'y a pas de limites de convection, donc nous n'avons que des nœuds intérieurs, qui peuvent être écrits en utilisant la cellule C6 et la copie et dupliquée, et les nœuds d'interface entre les deux matériaux. L'emplacement des cellules de la feuille de calcul est indiqué à la figure 4.9(a). L'installation offre un nombre illimité d'alternatives grâce à l'affectation de valeurs à la température limite. Nous choisissons l'ensemble :

Température de la surface gauche = 100

Température de surface droite = 300

Température de la surface inférieure = 0

Température de la surface supérieure = 0

Les trois ratios extrêmes de conductivité thermique sont :

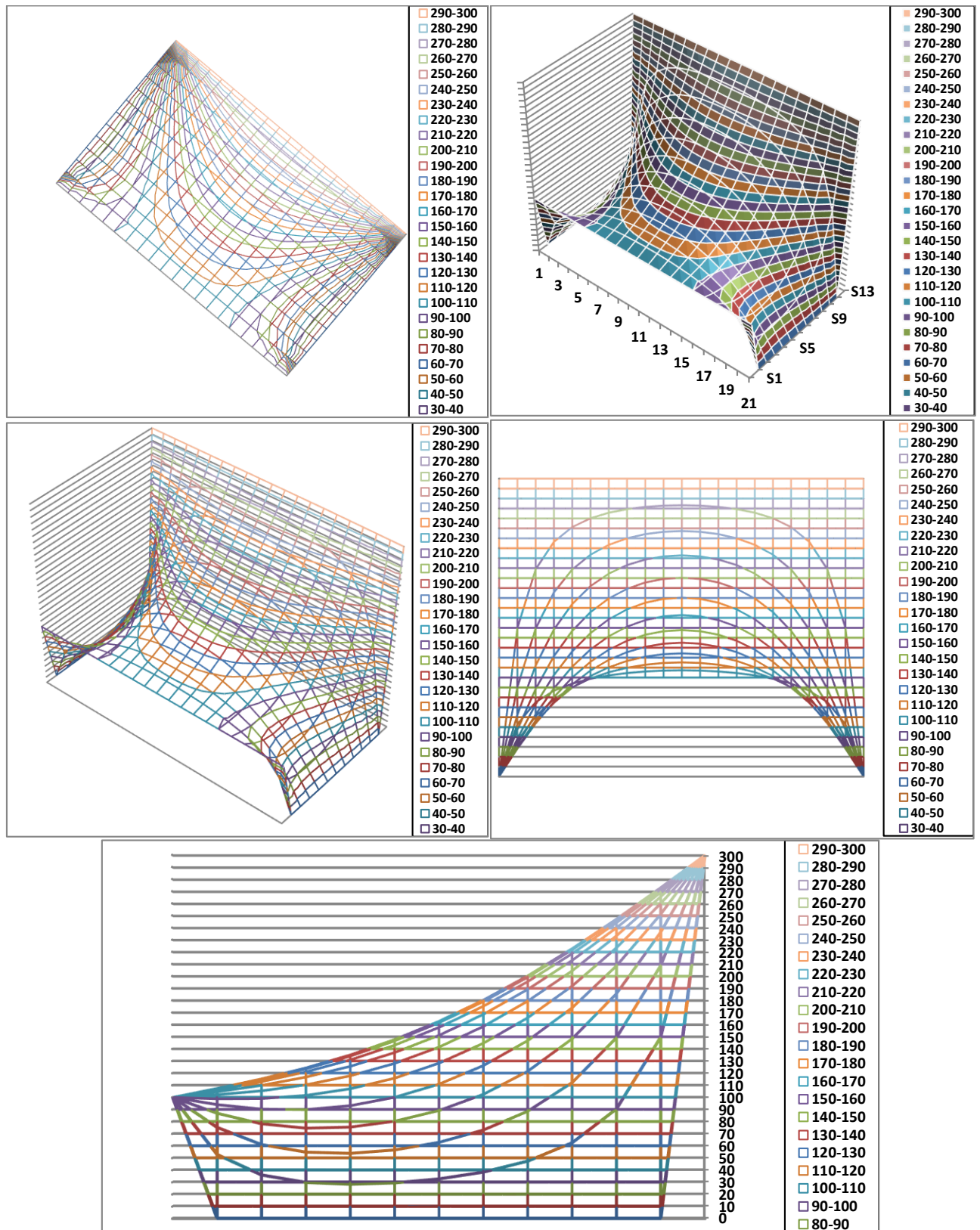
1.  $K = 1.0$  : Les deux matériaux ont les mêmes propriétés
2.  $K = 0.0001$  : Matériau intérieur bon conducteur, matériau extérieur bon isolant. Matériaux de l'échantillon (cuivre et fibre de verre).
3.  $K = 10000$  : Matériau intérieur bon isolant, matériau extérieur bon conducteur.

Il y a trop de nœuds pour afficher toutes les solutions numériques, c'est pourquoi nous avons donné des diagrammes tridimensionnels à mailles métalliques des distributions de température pour illustrer les effets. Le premier cas où  $K = 1$  est illustré à la figure 4.9(c) , les valeurs trouvées dans ce cas sont illustrées à la figure 4.9(b) et on remarque une variation lisse de la surface de la température est présentée. Cette solution est indépendante de la valeur numérique de la conductivité thermique du matériau.

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
28	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	300
29	100	52,74	35,84	29,68	28,17	29,31	32,58	38,21	47,28	62,44	90,38	149,82	300
30	100	75,12	60,94	54,70	53,69	56,51	62,79	72,98	88,47	112,12	149,26	208,88	300
31	100	86,79	78,11	74,50	75,37	80,24	89,08	102,44	121,51	148,30	185,65	236,46	300
32	100	93,94	90,21	89,82	93,05	99,99	110,87	126,20	146,83	173,91	208,59	251,30	300
33	100	98,76	98,96	101,53	107,03	115,80	128,20	144,66	165,72	191,90	223,51	260,13	300
34	100	102,15	105,32	110,31	117,72	127,98	141,47	158,53	179,47	204,47	233,43	265,72	300
35	100	104,53	109,86	116,69	125,56	136,94	151,17	168,52	189,16	213,08	240,01	269,33	300
36	100	106,12	112,91	121,00	130,90	143,05	157,75	175,23	195,57	218,66	244,20	271,59	300
37	100	107,03	114,67	123,50	134,00	146,59	161,56	179,09	199,22	221,81	246,53	272,84	300
38	100	107,33	115,25	124,31	135,02	147,75	162,80	180,35	200,40	222,83	247,28	273,24	300
39	100	107,03	114,67	123,50	134,00	146,59	161,56	179,09	199,22	221,81	246,53	272,84	300
40	100	106,12	112,91	121,00	130,90	143,05	157,75	175,23	195,57	218,66	244,20	271,59	300
41	100	104,53	109,86	116,69	125,56	136,94	151,17	168,52	189,16	213,08	240,01	269,33	300
42	100	102,15	105,32	110,31	117,72	127,98	141,47	158,53	179,47	204,47	233,43	265,72	300
43	100	98,76	98,96	101,53	107,03	115,80	128,20	144,66	165,72	191,90	223,51	260,13	300
44	100	93,94	90,21	89,82	93,05	99,99	110,87	126,20	146,83	173,91	208,59	251,30	300
45	100	86,79	78,11	74,50	75,37	80,24	89,08	102,44	121,51	148,30	185,65	236,46	300
46	100	75,12	60,94	54,70	53,69	56,51	62,79	72,98	88,47	112,12	149,26	208,88	300
47	100	52,74	35,84	29,68	28,17	29,31	32,58	38,21	47,28	62,44	90,38	149,82	300
48	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	300

Figure 4.9(b) : Valeurs numériques trouvées pour  $k = 1.0$ .

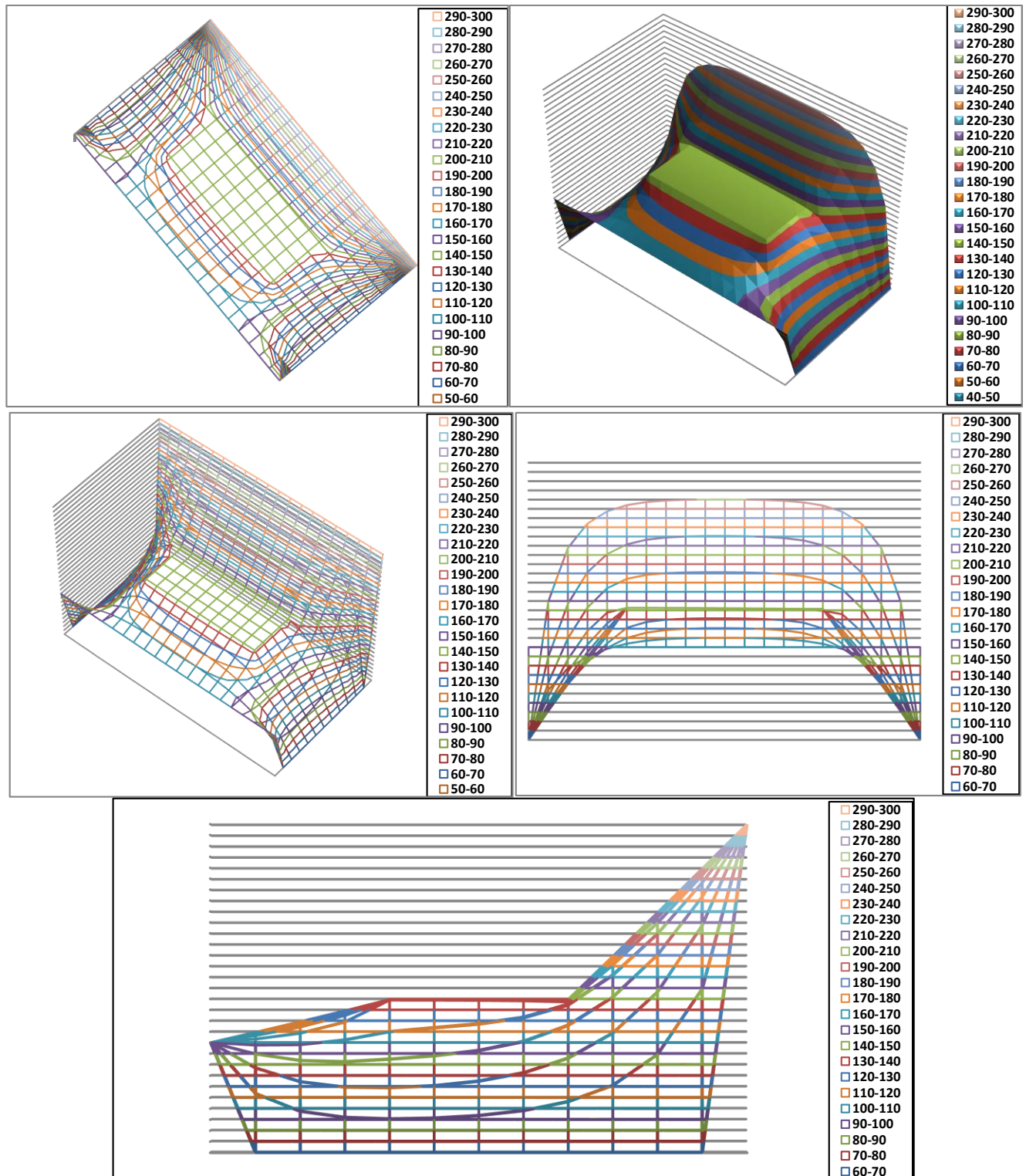




**Figure 4.9 (c) :** Représentation graphique de 1<sup>er</sup> cas  $K = 1$ .

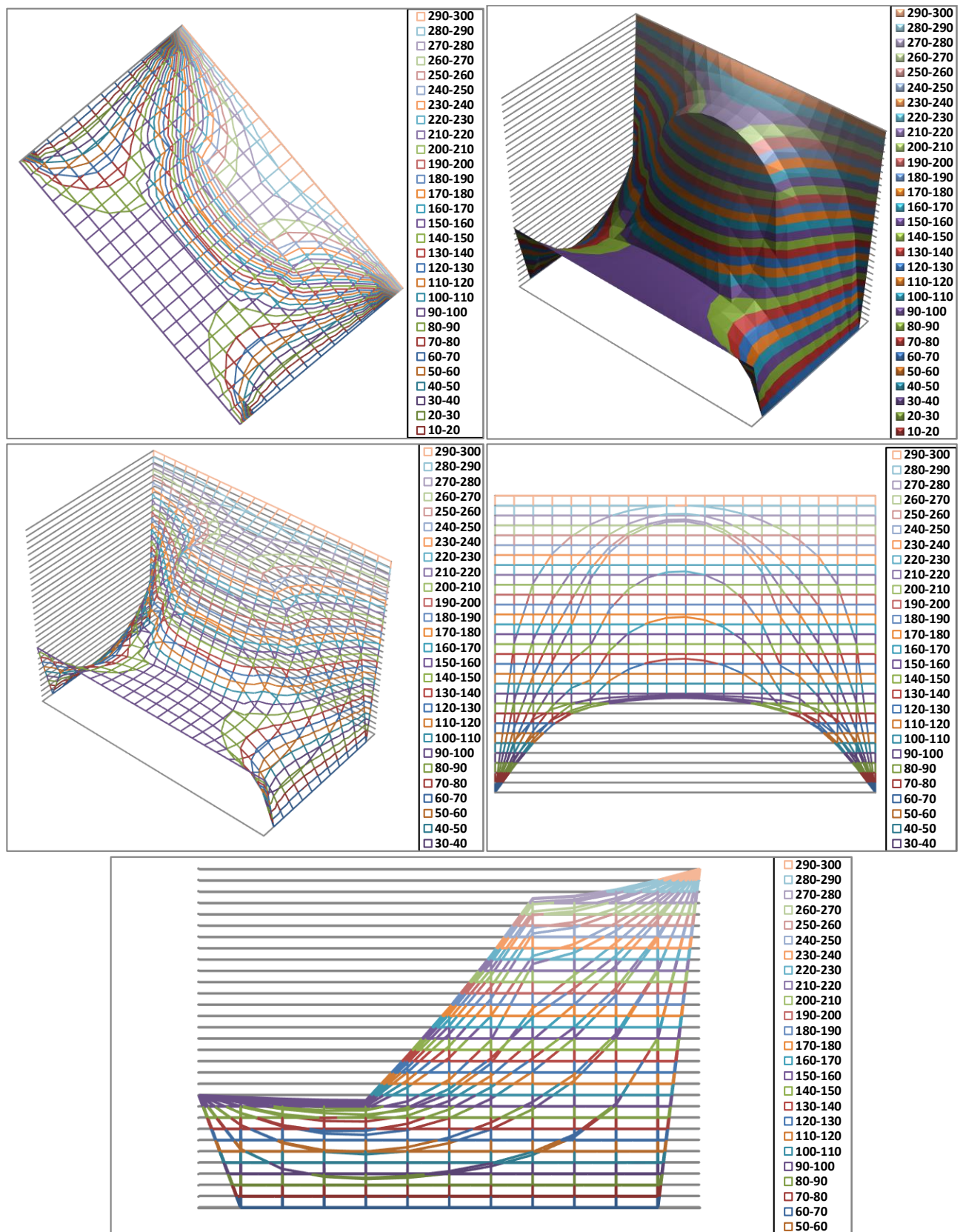
La solution pour le deuxième cas est donnée à la figure 4.9(d) et indique à quoi on peut s'attendre : des gradients de température importants dans le matériau isolant extérieur et de très

faibles gradients de température dans le matériau intérieur. la partie supérieure plane du matériau intérieur à conductivité élevée qui résulte des faibles variations de température.



**Figure 4.9 (d) :** Représentation graphique de 2<sup>ème</sup> cas.

La solution pour la troisième situation est illustrée à la figure 4.9(e) et montre exactement le contraire de celle de la deuxième situation : des gradients de température élevés pour le matériau intérieur et des gradients relativement peu élevés pour le matériau extérieur.



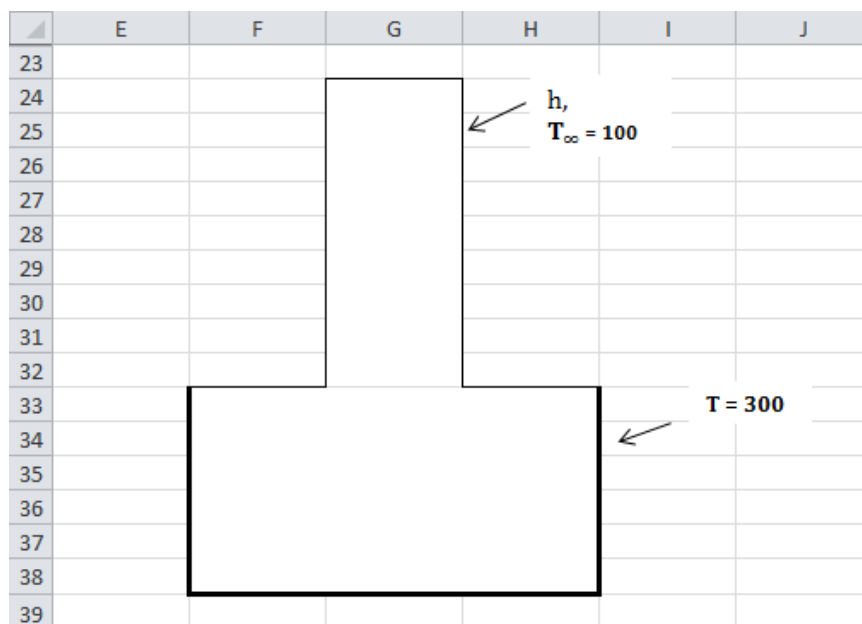
**Figure 4.9(e) :** Représentation graphique de 3<sup>ème</sup> cas.

Des vues en plan et en élévation ont été incluses pour les trois cas afin d'illustrer davantage les effets du gradient de température.



### 4.2.10. Etude d'une ailette en saillie

La figure 4.10(a) correspond à un schéma d'une ailette en saillie refroidi par un environnement de convection, des solutions numériques illustrées à la figure 4.9 (b), pour correspondre à la configuration géométrique quatre représentations graphiques des résultats sont définis à la figure (c).



**Figure 4.10 (a) :** Schéma d'une ailette en saillie.

Lorsque la procédure d'itération est exécutée, la solution apparaît comme illustré à la figure 4.10(b) avec un graphique en treillis métallique des températures.

	D	E	F	G	H	I	J
4							
5		100	100	100	100	100	100
6		100	100	100,01	100,01	100	100
7		100	100	100,02	100,02	100	100
8		100	100	100,04	100,04	100	100
9		100	100	100,12	100,12	100	100
10		100	100	100,30	100,30	100	100
11		100	100	100,79	100,79	100	100
12		100	100	102,07	102,07	100	100
13		100	100	105,43	105,43	100	100
14		100	100	114,21	114,21	100	100
15		100	100	137,21	137,21	100	100
16		300	213,96	197,42	197,42	213,96	300
17		300	258,43	241,08	241,08	258,43	300
18		300	278,67	267,39	267,39	278,67	300
19		300	288,87	282,42	282,42	288,87	300
20		300	294,38	291,01	291,01	294,38	300
21		300	297,65	296,22	296,22	297,65	300
22		300	300	300	300	300	300

**Figure 4.10 (b) :** Valeurs numériques obtenus.

Enfin, les résultats obtenus après l'exécution sont montrés sous forme des graphes 3D et 2D sur la figure 4.10(c). Les températures sont considérablement plus basses que celles obtenues avec une limite de convection. La différence est représentée graphiquement sur l'afficheur à mailles métalliques.

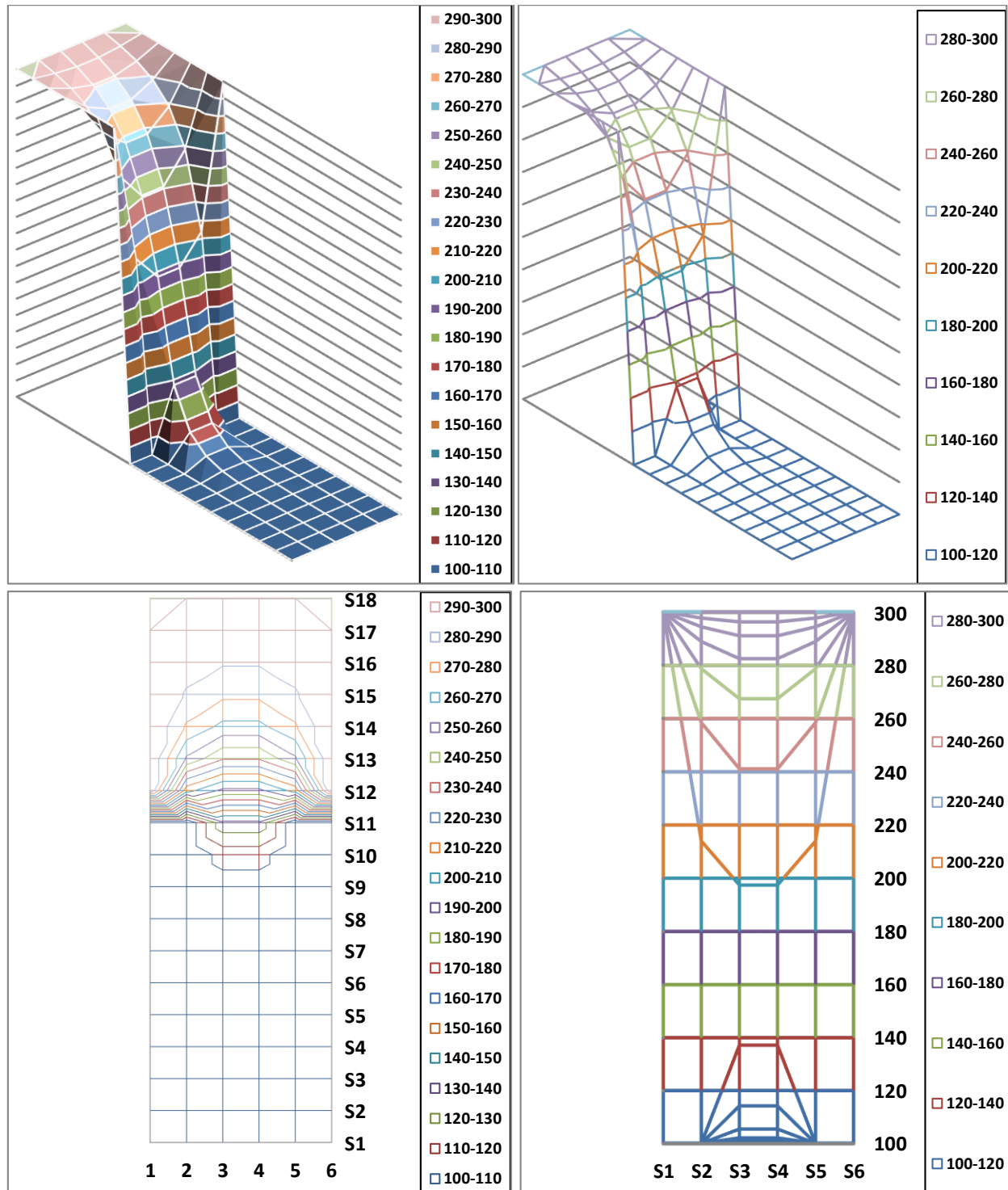


Figure 4.10 (c) : Représentations graphiques des résultats.

La solution est semblable à celle de 3<sup>ème</sup> cas, mais diffère légèrement en raison de l'arrondi de 4.2/3 à 4,67.

### Conclusion générale

Afin de mettre au point notre travail, il a fallu en premier maîtriser les fonctions et les instructions de base du logiciel Microsoft Excel.

L'objectif de ce faire est de mettre en évidence la résolution de problèmes thermiques, dans ce cadre, nous avons étudié numériquement l'équation de la chaleur en régime permanent et transitoire. En utilisant une revue bibliographique sur le transfert en conduction, ainsi les techniques de résolution utilisées en méthodes numériques pour la discrétisation des équations régissant le problème.

Dix cas pratiques ont été traités avec le succès. Les résultats obtenus sont en bonne concordance avec ceux données dans la littérature (J. P. HOLMAN).

Les cas traités ont porté essentiellement sur :

1. La répartition de la température dans une plaque bidimensionnelle.
2. La distribution de la température dans une ailette droite bidimensionnelle.
3. Un bloc de  $1\text{m}^2$  avec et sans conditions aux limites de rayonnement.
4. La conduction dans une plaque avec source de la chaleur et aux conditions aux limites de contacts.
5. La conduction transitoire dans un bloc durant l'établissement du régime permanent.
6. Le refroidissement d'un solide ailetté en aluminium.
7. Le chauffage transitoire d'un boîtier électronique dans une armoire électrique.
8. L'étude d'une configuration présentant une symétrie.
9. La conduction dans un solide à matériaux composites.
10. L'étude d'une ailette en saillie.

Les cas 1, 2, 3, 4, 8, 9 et 10 sont en régime permanent et les autres cas 5, 6 et 7 sont en régime transitoire.

En perspective, nous recommandons l'extension de cette étude à des configurations géométriques dont les frontières sont courbées. C'est-à-dire l'utilisation des équations (2.26) et (2.27).

Il est aussi souhaitable de confronter les résultats obtenus à l'aide du logiciel Excel avec les résultats obtenus à l'aide des solutions analytiques de certains problèmes rapportés dans la bibliographie disponible.

### Bibliographie

- [1] J.F. SACADURA. Initiation aux transferts thermiques. Tec et Doc, 6 e tirage 2000.
- [2] Fourier, J. Théorie Analytique de la Chaleur. Paris: Chez Firmin Didot. (1822).
- [3] J.P. Holman., Heat transfer, Tenth Edition (McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering) - The McGraw - Hill Companies, Inc. (2010).
- [4] J.P. HOLMAN and Blake K. HOLMAN What Every Engineer Should Know about Excel; second edition (Series Editor: William H. Middelndorf).
- [5] [https://user.oc-static.com/files/419001\\_420000/419637.png](https://user.oc-static.com/files/419001_420000/419637.png) (2019)