



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER

En **Electronique**,

Option : **Téledétection**

Présenté par :

M. OUKALI Salim

Sujet :

***Compression d'images par bandelettes :
Application à des images de télédétection.***

Devant le jury d'examen composé de :

LAGHROUCHE Mourad	Maître de conférences A à l'UMMTO	Président
AMEUR Soltane	Professeur à l'UMMTO	Rapporteur
ZIANI Rezki	Maître de conférences A à l'UMMTO	Examineur
MAZOUZI Zohra épouse AMEUR	Maître de conférence A à l'UMMTO	Examinatrice
LAHDIR Mourad	Maître de conférences B à l'UMMTO	Examineur

Soutenu le : 13. 01. 2011

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire LAMPA (Laboratoire d'Analyse et Modélisation Des Phénomènes Atmosphérique) de la Faculté de Génie Electrique et Informatique de L'UMMTO. Je tiens à cet effet à remercier Mr le Directeur, Professeur AMEUR Soltane, qui m'a accueilli et mis à ma disposition tous les moyens nécessaires, je le remercie également pour le sujet, la confiance qu'il m'a témoignée, les précieux conseils prodigués ainsi que le suivi constant tout au long de ce travail. Je tiens à remercier également Mr LAGHROUCHE Mourad d'avoir bien voulu accepter de présider le jury d'examen.

Mes vifs remerciements vont également à Mme AMEUR, Mr ZIANI Rezki, chef du département d'Electronique et Mr LAHDIR Mourad pour avoir accepté de faire partie des membres du jury.

Toute ma gratitude à Mme SADOUNE Naima membre du Laboratoire LAMPA pour l'aide qu'elle m'a apportée.

Je n'oublierai pas de remercier toute l'équipe du Laboratoire, ainsi que tous ceux qui m'ont encouragé, soutenu et apporté leur contribution pour me permettre de mener à bien ce travail

Résumé

Le sujet central de ce travail est l'application de la transformée en bandelettes par groupement à la compression d'images. De manière générale, on cherche à prouver l'efficacité de la transformée en bandelettes par rapport à la transformée en ondelettes dans le cadre de la compression avec perte. Dans un premier temps nous exposons le fondement mathématique de la transformée en ondelettes avec un aspect plus formel. Nous mettrons l'accent sur le cas discret à une dimension et avec une simple généralisation nous passerons au cas à deux dimensions applicable pour les images. Dans un deuxième temps nous présentons la première génération de la transformées en bandelettes proposée par Le Pennec. Nous mettons ensuite en évidence les corrélations entre coefficients d'ondelettes pour montrer les limites de cette transformée pour la compression. Nous présentons ensuite la seconde génération de la transformée en bandelettes dans ses deux version qui sont dérivées des ondelettes, la première version de ses bandelettes développée par Peyré est construite au-dessus d'une transformée en ondelettes 2D, La seconde version est la transformée en bandelettes par groupement. Dans cette version les sous-bandes de la transformée en ondelettes sont segmentées en blocs de 4×4 , chaque bloc de coefficients d'ondelettes est de nouveau transformé dans une base sélectionnée dans un dictionnaire par minimisation d'un critère débit-distorsion. Nous appliquons notre méthode sur les images de références, nous l'adaptions ensuite à des images SPOT cinquième génération d'une résolution de 5m et 2.5m. Nous terminons avec une conclusion qui va nous permettre de revoir en globalité les travaux accomplis, de mettre en évidence les résultats obtenus et de donner quelque perspectives de recherche qui restent ouvertes.

Mots clés:

Compression d'image, post-transformée, transformée en bandelettes, transformée en ondelettes, optimisation débit-distorsion.

Table des matières

Introduction générale	8
1 Généralités	10
1.1 Introduction	11
1.2 Les différents formats d'image	11
1.2.1 Le mode point ou bitmap	11
1.2.2 Le mode vectoriel	11
1.2.1 Les formats bitmap	12
1.2.2 Les formats vectoriels	12
1.3 Compression d'images	13
1.3.1 Compression réversible (sans perte).....	13
1.3.2 Compression irréversible (avec perte)	13
1.4 Les étapes de compression	13
1.4.1 La décorrélation.....	14
1.4.2 La quantification.....	14
1.4.3 Codage entropique.....	15
1.4.4 Codage Huffman.....	16
1.4.5 Codage arithmétique.....	16
1.4.6 Taux de compression.....	17
1.5 Mesurer les performances en compression	18
1.5.1 Taux de compression et débit binaire.....	18
1.5.2 Mesure de l'erreur.....	18
1.5.3 Complexité	19
2 Les ondelettes	20
2.1 Introduction	21
2.2 La transformée de Fourier	22
2.3 Principe d'incertitude de Heisenberg	22
2.4 Les ondelettes	23
2.4.1 Définition.....	23

2.4.2 Transformée en ondelettes.....	25
2.4.3 La multi-résolution.....	27
2.4.4 Fonction d'échelle et d'ondelette.....	28
2.4.5 Algorithme de Mallat.....	30
2.4.6 Les bancs de filtres	32
2.4.7 Ondelettes orthogonales.....	32
2.4.8 Ondelettes bi-orthogonales.....	32
2.4.9 Passage à deux dimensions.....	33
2.4.10 Différentes ondelettes.....	37
2.4.11 Quelle ondelette choisir ?.....	37
2.5 Application à la compression d'images.....	37
2.6 Discussion.....	41
3 Les bandelettes.....	42
3.1 Introduction.....	43
3.2 Première génération de bandelettes.....	43
3.2.1 Géométrie	43
3.2.2 Bandelettes.....	45
3.3 Seconde génération de bandelettes.....	50
3.3.1 Corrélacion des coefficients d'ondelettes	50
3.3.2 Corrélacion géométrique	52
3.3.3 Base de bandelettes orthogonales.....	53
3.3.4 Algorithme de calcul.....	58
3.3.5 Transformée en bandelettes par groupement.....	62
3.4 Discussion.....	75
4 Résultats expérimentaux et interprétations.....	76
4.1 Choix de la taille des blocs.....	77
4.2 Estimation expérimentale de temps d'exécution	78
4.3 Recherche expérimentale du coût débit-distorsion optimal	79
4.4 Études expérimentales des performances de la transformée en bandelettes.....	81
4.4.1 Les bases directionnelles.....	81
4.4.2 Estimation du débit de la transformée en bandelettes et en ondelettes	82

4.4.3 Performances de la transformée en bandelettes en compression	83
4.5 Le programme SPOT88
4.6 Application aux images Spot Cinquième Génération.....	89
4.7 Discussion	93
Conclusions et perspectives.....	94
Annexe A	96
Annexe B.....	98
Annexe C	102
Bibliographie.....	106

Notations

$A = B \oplus C$	Espace complémentaire orthogonal
$L^2(\mathbb{R})$	Ensemble de fonctions carrées intégrables
\langle , \rangle	Produit scalaire de deux fonctions appartenant à $L^2(\mathbb{R})$
$T.O$	Transformée en ondelettes
$\hat{f}(w)$	Transformée de Fourier de $f(t)$
$f * g$	Convolution de deux fonctions
$\ f(t)\ $	Norme de $f(t)$
\mathbb{N}	Espace des entiers naturels.
\mathbb{Z}	Espace des entiers relatifs.
\mathbb{R}	Espace des réels

Introduction générale

Les évolutions récentes des technologies de l'information ont bouleversé le domaine des télécommunications. Ainsi, l'apparition des techniques numériques a favorisé une diversification des utilisations du multimédia ainsi que des fonctionnalités qui leur sont associées. Cela implique la manipulation de volumes de données sans cesse croissants. Il est donc indispensable de disposer d'outils performants pour la transmission et le stockage de ces énormes quantités d'information. Les progrès techniques de ces dernières années, qui ont permis une augmentation conséquente des débits des réseaux ainsi qu'une baisse du prix de revient de la mémoire, apportent une partie de la réponse à ce problème. Parallèlement, on peut également chercher à diminuer la taille des fichiers de description des données. C'est dans cette optique qu'ont été développées au cours des dernières décennies de nombreuses méthodes de compression de données déduites de la théorie de l'information et faisant appel à de nombreux domaines des mathématiques et de l'informatique. Parmi les données les plus volumineuses, on compte les images et vidéos numériques qui ont de ce fait un besoin particulièrement important d'un traitement adapté à leurs spécificités. Les méthodes de compression de ce type de documents ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche. La diversité des problématiques dépendant des applications visées est à mettre en parallèle avec la gamme des techniques mises en jeu. L'élaboration des différents standards destinés à des applications industrielles qui couvrent ce domaine dépend en effet des objectifs recherchés. Notre travail porte sur l'évaluation et l'amélioration des techniques de compression basées sur la transformée en bandelettes.

Le premier chapitre sera consacré à des notions de la théorie de l'information ainsi que les principales méthodes de compression d'images. Dans le deuxième chapitre nous exposerons le principe mathématique de la transformation en ondelettes. Pour plus de compréhension nous aborderons cette transformation sous deux angles différents. Le premier étant simple et ne fait pas appel à des notions approfondies, il vise ainsi à expliquer l'idée fondamentale derrière la transformée en ondelettes. Le second sera le fondement mathématique de la transformée en ondelettes avec un aspect plus formel. Nous mettrons l'accent sur le cas discret à une dimension. Puis nous ferons le lien entre cette transformation et l'analyse en multi-résolution. A la fin à l'aide d'une simple généralisation nous passerons au cas à deux dimensions applicable pour les images. Dans le troisième chapitre nous exposons d'abord la première génération de la transformées en bandelettes proposée par Le Pennec dans sa thèse de doctorat. Nous mettons ensuite en évidence les corrélations et l'information résiduelle entre coefficients d'ondelettes pour montrer les limites de cette transformée pour la compression. Nous présentons la seconde génération de la transformée en bandelettes dans ses deux version qui sont dérivées des ondelettes, la première version de ses bandelettes développée par Peyré est construite au-dessus d'une transformée en ondelettes 2D, La seconde version est la transformée en bandelettes par groupement. Dans cette version les sous-bandes de la transformée en ondelettes sont segmentées en blocs de 4×4 ce qui permet

d'économiser le calcul et la transmission du quadtree. Nous détaillons l'algorithme de la transformée en bandelettes par bloc et nous abordons le problème d'allocation débit-distorsion sous hypothèse haut, bas et moyen débits. Dans le dernier chapitre nous présentons les résultats obtenus. Nous définissons la meilleure taille des blocs à transformer à partir d'une étude des corrélations entre coefficients d'ondelettes séparés par plus d'un coefficient et à partir de résultats en compression obtenus par extension de la transformée en bandelettes à des blocs de grande taille. La meilleure transformée en bandelettes sur chaque blocs est sélectionnée parmi un dictionnaire de transformées possibles par minimisation d'un critère débit-distorsion. Nous appliquons notre méthode sur les images de références, nous l'adaptions ensuite à des images SPOT cinquième génération d'une résolution de 2.5 m et 5 m. Nous terminons par une conclusion qui va nous permettre de revoir en globalité les travaux accomplis, de mettre en évidence les résultats obtenus et de donner quelque perspectives de recherche qui restent ouvertes.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Vue d'ensemble	11
1.2 Les différents formats d'image	11
1.2.1 Le mode point ou bitmap	11
1.2.2 Le mode vectoriel	11
1.2.1 Les formats bitmap	12
1.2.2 Les formats vectoriels	12
1.3 Compression d'images	13
1.3.1 Compression réversible (sans perte).....	13
1.3.2 Compression irréversible (avec perte)	13
1.4 Les étapes de compression	13
1.4.1 La décorrélation.....	14
1.4.2 La quantification.....	14
1.4.3 Codage entropique.....	15
1.4.4 Codage Huffman.....	16
1.4.5 Codage arithmétique.....	16
1.4.6 Taux de compression.....	17
1.5 Mesurer les performances en compression	18
1.5.1 Taux de compression et débit binaire.....	18
1.5.2 Mesure de l'erreur.....	18
1.5.3 Complexité	19

1.1 Introduction

La transmission et le stockage d'un très grand nombre d'images numériques impliquent la manipulation de flux d'information extrêmement volumineux si on les conserve sous leur forme originale. Afin d'améliorer la gestion de ces flux, des techniques de compression de données ont été adaptées au domaine spécifique de l'image numérique. Constituées de milliers d'images fixes, les séquences vidéo nécessitent un effort de compression encore plus important. L'intérêt porté au codage d'images fixes est également justifié par son rôle essentiel dans un schéma de codage général de vidéos. La nature des méthodes de compression est partiellement déterminée par les exigences requises par les utilisateurs. On peut distinguer deux grandes catégories de compression: la compression sans perte et la compression avec perte. Dans le premier cas, on ne tolère aucune dégradation du signal d'origine. Par exemple on peut avoir besoin dans certains domaines tels que l'imagerie médicale d'une reconstruction parfaite des images pour des raisons juridiques. Naturellement une telle contrainte limite la réduction potentielle du coût de représentation d'une image. Pour la plupart des images naturelles, il est difficile de dépasser un taux de compression sans perte de l'ordre de 2 à 3 (à moins d'être confronté à une image dont le contenu informatif est particulièrement pauvre). En revanche, on peut tolérer dans de nombreuses applications une dégradation perceptuelle dans des limites déterminées qui correspondent à des débits disponibles et des besoins en qualité différents. En fonction de ces limites, ces dégradations peuvent être imperceptibles pour un œil humain exercé ou bien décelables par tout le monde, y compris par des utilisateurs non professionnels. Une telle diminution de la qualité est inévitable lorsque le terminal utilisé implique une faible capacité de transmission (c'est le cas pour les téléphones portables). Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse principalement à ce dernier type de compression ; les applications visées sont plus particulièrement des applications bas et moyen débit pour lesquelles il est indispensable d'accepter une perte de qualité de l'image. Parmi ces applications on peut citer le stockage de bases de données des images de télédétection.

1.2 Les différents formats d'images

Le codage d'une image se fait selon deux grands principes qui sont :

1.2.1 Le mode point ou bitmap

Avec ce mode, l'image est représentée comme un ensemble de points colorés "pixels" contenus dans un tableau, chacun de ces points possède une ou plusieurs valeurs décrivant sa couleur. Décrire l'image revient alors à préciser la couleur de chaque point.

1.2.2 Le mode vectoriel

Dans ce mode l'image est un ensemble de figures et de formes élémentaires décrites par des formules mathématiques. L'élaboration de ces images consiste à dessiner des points que relient des lignes. Puis on définit des remplissages aux tracés de lignes fermées. Les notions de coordonnées de points, d'angles, de tangentes, etc sont à la base de la description d'une image vectorielle. Un fichier vectoriel décrit dans un langage codé les différentes figures composant

l'image. Les avantages de ce format sont que l'on peut beaucoup plus facilement manipuler l'image. On peut redimensionner, changer d'échelle, sans perte de qualité, effet d'échelle etc. Par contre, il est impossible d'avoir un rendu satisfaisant d'une photo sous ce format. On préférera alors le format bitmap, et on réservera le vectoriel pour les figures, les logos, les schémas ... Ce mode est largement utilisé en architecture ou en modélisation.

1.2.3 Les formats bitmap

BMP : (Windows Bitmap) C'est le format actuel utilisé par Windows. Il produit des images de bonne qualité et est reconnu par de nombreuses applications. C'est le format le plus utilisé, par contre, il est extrêmement volumineux.

TIFF : (Tag image file format) C'est un format d'excellente qualité, mais qui présente des problèmes de compatibilité du fait d'une multiplicité de version. Ce format est compatible avec d'autres plates-formes (macintosh). Il est utilisé par les professionnels.

GIF : (Graphics Interchange Format) Ce format a été créé pour faciliter le transport des images par télématique (réseau Compuserve). Il prend en charge un maximum de 256 couleurs sauvegardées dans une palette de couleurs constituables individuellement. Il est caractérisé par le chargement de l'image en plusieurs étapes. Les images sont compressées et le codage est limité à huit bits. Les fichiers occupent très peu de place, et conviennent pour les images simples mais guère pour les photos. Les images sont transformables en GIF animées facilement utilisables dans les pages web.

JPEG : (Joint Photographic Expert Group) Format conçu pour réduire le plus possible la taille des fichiers graphiques en acceptant éventuellement de légères pertes de qualité, il est basé sur la transformation DCT. Il est destiné au stockage et à la transmission rapide de l'information. Il a comme inconvénient la détérioration non négligeable de la qualité de l'image.

JP2: format conventionnel de l'algorithme de compression JPEG2000. JP2 fournit deux méthodes pour identifier l'espace de couleurs de façon précise. La méthode énumérée (par nom) impose à toutes les applications de pouvoir interpréter chacun des espaces possibles, ce qui rend son implémentation difficile dans le cas où il y en aurait un nombre important. Pour cette raison, cette méthode a été limitée à deux espaces: sRGB et niveaux de gris non-linéaires. Pour les autres espaces de couleurs, JP2 supporte une forme restreinte des profils ICC (International Color Consortium), qui autorisent une courbe de non-linéarité ainsi qu'une matrice de transformation 3x3.

1.2.4 Les formats vectoriels

Il existe très peu de programmes permettant la conversion entre les différents formats vectoriels

WMF : (Windows meta file) C'est le format vectoriel utilisé par Windows, il est reconnu par beaucoup de programmes fonctionnant sous Windows. C'est un format qui permet de sauvegarder tant les images bitmap que les images vectorielles. C'est le format des cliparts.

CDR (Coreldraw) Considéré comme le meilleur, mais aucun autre programme ne sait le lire. Il faut donc le convertir.

DXF : Format des produits Autocad et Autodesk.

EPS : format des fichiers Postscript. Les images ne sont pas affichables. Il a été conçu pour intégrer des images dans des documents écrits pouvant être imprimés. Il est souvent associé au format TIFF.

1.3 Compression d'images

On distingue deux grandes familles d'algorithmes de compression : les méthodes dites sans pertes (réversibles) qui restituent de façon parfaite les images mais avec un faible taux de compression, et les méthodes dites avec pertes (irréversibles) qui permettent d'atteindre des taux de compression élevés mais qui introduisent des distorsions lors de la restitution [1], [2].

1.3.1 Compression réversible (sans perte)

Après décompression, l'image est parfaitement reconstruite et identique à l'image initiale sur le plan numérique (c.-à-d. qu'il y a une corrélation parfaite entre l'image initiale et l'image décompressée). Les algorithmes d'encodage RLE et la nouvelle norme JPEG sans perte sont des exemples de compression sans perte.

1.3.2 Compression irréversible (avec perte)

Des données sont supprimées lors de la compression irréversible et ne peuvent être récupérées. Lors de la compression, le contenu fréquentiel auquel l'œil humain est insensible est supprimé. Lors de la décompression, les données supprimées ne peuvent être récupérées, ce qui laisse une certaine place à l'interprétation au stade de la reconstruction. Par conséquent, l'image initiale n'est pas identique à la version décompressée. Le codage par ondelettes et JPEG irréversible sont des exemples de compression irréversible. JPEG 2000 constitue un algorithme de compression qui passe progressivement de la compression sans perte à la compression avec perte.

1.4 Les étapes de compression

Le schéma d'un système de compression classique est représenté sur la figure 1.1. La première étape est la décorrélation. Elle permet d'exploiter les redondances statistiques de l'image. Ensuite vient l'étape de quantification. C'est dans cette étape que la perte d'information a lieu. Enfin, le codage entropique des données quantifiées constitue la dernière étape. Elle permet d'organiser le train binaire en compressant les données sans altérer l'information.

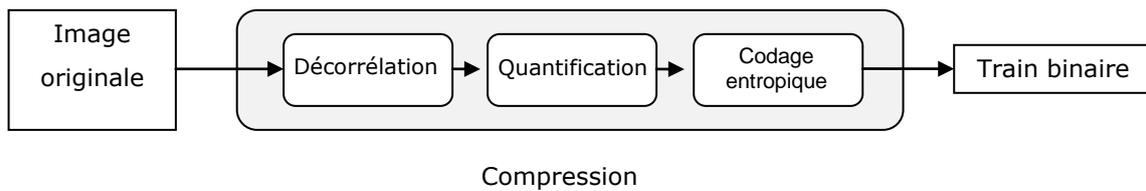


Figure 1.1 Schéma général d'un système de compression.

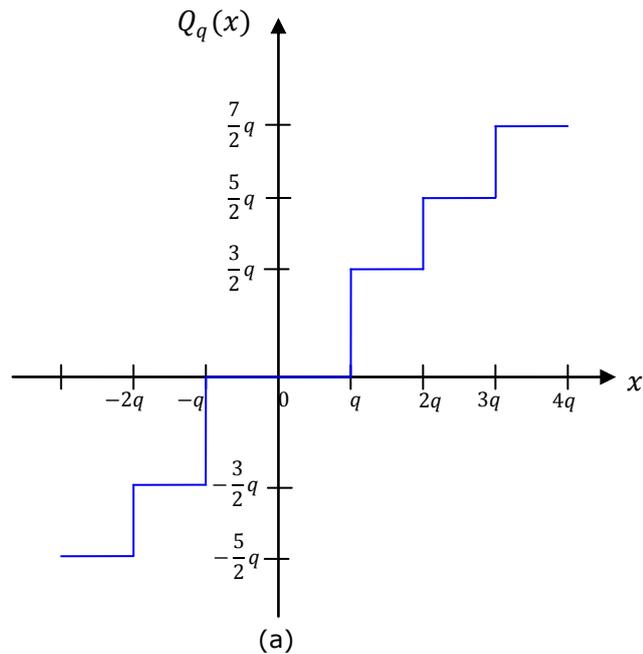


Figure 1.2 Quantification scalaire uniforme de pas q .

1.4.1 La décorrélacion

La décorrélacion a pour objectif de réduire les redondances statistiques de l'image et ainsi réduire les entropies d'ordre faible. Par la suite, cela permet d'utiliser une quantification et un codage scalaire, c'est-à-dire le traitement des coefficients un par un pour la compression [3]. Cette étape est réversible sans pertes ou quasiment sans pertes. Elle fait intervenir une transformée. Par exemple la DCT est utilisée dans le très populaire standard de compression d'images JPEG ou la transformée en ondelettes qui est à la base du standard JPEG2000.

1.4.2 La quantification

C'est la seule étape non réversible du schéma de compression. La quantification peut être vectorielle ou scalaire.

Quantification scalaire uniforme

La quantification scalaire uniforme est représentée sur la figure 1.2, les intervalles de quantification sont tous de la même taille, elle consiste à quantifier séparément chaque pixel en 2^R niveaux, où R est le nombre (éventuellement non entier) de bits par pixel (bpp) alloué au quantificateur. Le pas de quantification q est choisi uniforme. Un pixel p est tout d'abord ramené dans l'intervalle de $[0, 2^R - 1]$ par transformation linéaire $ap + b$ où a et b sont calculés en fonction de R et des valeurs minimales et maximales que peut prendre le pixel p . La valeur quantifiée correspondante x est l'entier le plus proche de $ap + b$. La quantification inverse consiste à remettre la valeur quantifiée dans l'intervalle d'amplitude initial, par la transformation $(x - b)/a$. Bien que cela n'ait pas d'influence sur la distorsion apportée par la quantification, il est important, pour obtenir une bonne qualité visuelle de l'image reconstruite, que les pixels de valeur zéro des sous-images "passe-bande" soient quantifiés à la valeur zéro en d'autre terme b doit être entier.

Quantification vectorielle

La quantification vectorielle a été élaborée par le fondateur de la théorie de l'information C. Shannon. C'est une méthode de codage qui opère au niveau bloc [4], [5] et qui est une généralisation de la quantification scalaire. Par conséquent, elle se place dans la deuxième étape de la chaîne de codage. Elle peut être appliquée directement sur l'image en omettant l'étape de changement de représentation, contrairement à la quantification scalaire, qui est plutôt appliquée dans un domaine transformé.

1.4.3 Codage entropique

Le codage entropique permet la compression des coefficients quantifiés en générant un train binaire de longueur proche de la limite basse théorique de Shannon. Plusieurs types de codage entropique existent. Le codage par Run-Length est utilisé dans le fax mais aussi dans le standard JPEG. Le codage par dictionnaire comme LZW (Lempel-Ziv-Welch) est utilisé dans le format d'image GIF (Graphics Interchange Format). Le codage par statistique comme le codage de Huffman est aussi utilisé dans le format JPEG. Enfin, un codage arithmétique est effectué dans le standard JPEG2000 par le codeur MQ.

Entropie d'une source simple

L'entropie $H(S)$ d'une source simple (S) de loi de probabilité P est définie par

$$H(S) = - \sum_i P_i \log_2 P_i \quad (1.1)$$

$H(S)$ est une mesure de l'information moyenne de chaque symbole (ou message) de la source. Elle est maximale si tous les symboles de la source sont équiprobables, on a alors $H(S) = \log_2 N$. La composition des événements fait décroître l'entropie.

1.4.4 Le codage de Huffman

David Huffman [11] a proposé en 1952 une méthode statistique qui permet d'attribuer un mot de code binaire aux différents symboles à compresser (pixels ou caractères par exemple). La longueur de chaque mot de code n'est pas identique pour tous les symboles: les symboles les plus fréquents (qui apparaissent le plus souvent) sont codés avec de petits mots de code, tandis que les symboles les plus rares reçoivent de plus longs codes binaires. On parle de **codage à longueur variable** (en anglais VLC pour *variable code length*) **préfixé** pour désigner ce type de codage car aucun code n'est le préfixe d'un autre. Ainsi, la suite finale de mots codés à longueurs variables sera en moyenne plus petite qu'avec un codage de taille constante. Le codeur de Huffman crée un arbre ordonné à partir de tous les symboles et de leur fréquence d'apparition. Les branches sont construites récursivement en partant des symboles les moins fréquents. La construction de l'arbre se fait en ordonnant dans un premier temps les symboles par fréquence d'apparition. Successivement les deux symboles de plus faible fréquence d'apparition sont retirés de la liste et rattachés à un nœud dont le poids vaut la somme des fréquences des deux symboles. Le symbole de plus faible poids est affecté à la branche 1, l'autre à la branche 0 et ainsi de suite en considérant chaque nœud formé comme un nouveau symbole, jusqu'à obtenir un seul nœud parent appelé *racine*. Le code de chaque symbole correspond à la suite des codes le long du chemin allant de ce caractère à la racine. Ainsi, plus le symbole est "profond" dans l'arbre, plus le mot de code sera long.

Algorithme du codage de Huffman

- Répartir les probabilités P_i des symboles.
- Classer les symboles dans l'ordre décroissant des probabilités d'occurrence.
- Regrouper par séquences les paires de symboles de plus faible probabilité, calculer $S = P_{i_n} + P_{i_{n-1}}$ la somme des deux plus faibles probabilités.
- Choisir le plus petit indice k tel que S soit supérieur ou égal à P_{i_k} , remplacer k par $k + 1$
- Recomposer la table des probabilités en plaçant à la k^{eme} position la valeur S et en décalant les autres d'une position vers le bas. Puis décrémenter n d'une unité, poursuivre jusqu'à ce que la table des probabilités ne comporte plus que deux éléments.
- Coder avec retour arrière depuis le dernier groupe, en ajoutant un 0 ou un 1 pour différencier les symboles préalablement regroupés.

1.4.5 Codage arithmétique

Le codage arithmétique permet, à partir de la probabilité d'apparition des symboles d'une source de créer un seul mot-code qui soit associé à une séquence de longueur arbitraire de symboles. Ceci diffère du code de Huffman qui attribue des mots-codes de longueurs variables à chaque symbole de la source. Le code associé à une séquence est un nombre réel de l'intervalle $[0, 1[$. Ce code est construit par subdivisions récursives d'intervalles. Un intervalle est subdivisé pour chaque nouveau symbole qui appartient à la séquence. On obtient, en définitive, un sous-intervalle de l'intervalle $[0, 1[$ tel que tout nombre réel appartenant à cet intervalle représente la séquence à coder.

L'un des avantages du codage arithmétique est que chaque symbole peut être codé sur un nombre non entier de bits. Le principal inconvénient de cet algorithme réside dans sa complexité d'implémentation. Néanmoins, cette complexité n'augmente pas dans les algorithmes adaptatifs, où les distributions de probabilité changent.

Algorithme du codage arithmétique

- Calculer la probabilité associée à chaque symbole dans la chaîne à coder.
- Associer à chaque symbole un sous intervalle proportionnel à sa probabilité, dans l'intervalle $[0,1[$ (l'ordre de rangement des intervalles sera mémorisé car il est nécessaire au décodeur).
- Initialiser la limite inférieure de l'intervalle de travail à la valeur 0 et la limite supérieure à la valeur 1.
- Tant qu'il reste un symbole dans la chaîne à coder :
 - Largeur = limite supérieure – limite inférieure.
 - Limite inférieure = limite inférieure + largeur * (limite basse du sous intervalle du symbole).
 - limite supérieure = limite inférieure + largeur * (limite haute du sous intervalle du symbole)
- La limite inférieure code la chaîne de manière unique.

1.4.6 Taux de compression

La compression numérique peut se définir par le quotient de compression de données numériques (image, audio ou vidéo) ou par le taux de compression. L'un et l'autre donnent une mesure de la performance de l'algorithme de compression utilisé.

Quotient de compression

C'est le rapport du volume initial des données (nombre de bits) avant compression sur le volume final des données après compression. Plus la compression sera forte, plus le quotient de compression sera élevé.

Taux de compression de données

Deux définitions de taux de compression sont admises, Il est généralement exprimé en pourcentage, et noté T_c .

L'une définit le taux de compression comme le rapport du volume des données après compression sur le volume initial des données. De ce fait, plus le taux de compression est faible, plus la taille du fichier compressé résultant est faible. Le taux de compression ainsi défini est donné par la formule

$$T_c = \frac{[Volume\ final]}{[Volume\ initial]} \quad (1.2)$$

C'est aussi l'inverse du Quotient de compression. L'autre définition exprime le taux de compression comme le gain en volume rapporté au volume initial des données. Cette définition est en fait complémentaire de la première. Plus le taux de compression est élevé, plus la taille du fichier compressé résultant est faible. La formule correspondante s'écrit

$$T_c = 1 - \frac{[Volume\ final]}{[Volume\ initial]} \quad (1.3)$$

Dans ce cas, le taux de compression est relié au quotient de compression q par l'équation $T_c = 1 - 1/q$. Le taux de compression est également noté sous la forme : « **a:b** » ou « **a/b** », ainsi un taux de compression de 10:1 (ou bien 10/1), soit "10 pour 1", signifie que le fichier final est dix fois plus petit que l'original.

1.5 Mesurer les performances en compression

1.5.1 Taux de compression et débit binaire

Le taux de compression est le rapport entre la taille de l'image originale et la taille de l'image compressée en bits. Par exemple, une image à la résolution numérique de 8 bits et de taille 512*512 a un volume de 256 Ko. Avec un taux de compression de 5, le volume de cette image est réduit à 51,2 ko. Ce taux de compression peut être relié au débit binaire exprimé en bits par pixel (bpp): c'est le volume des données compressées divisé par le nombre de pixels dans l'image ou encore la résolution numérique de l'image divisée par le taux de compression. Dans le cas d'images 8 bits, avec un taux de compression égal à 5, le débit binaire est de 1,6 bpp.

1.5.2 Mesure de l'erreur

Comme on l'a souligné précédemment, on s'intéresse ici à la compression avec perte. Afin de déterminer dans quelle mesure une image approchée est "bonne" il est important de se doter d'outils de mesure de l'erreur entre deux images. On suppose que l'on dispose d'une image originale I_0 et l'image compressée I_c . On utilise souvent comme mesure de qualité le PSNR (Peak Signal to Noise Ratio ou rapport crête signal à bruit) qui s'appuie sur l'erreur quadratique, c'est à dire sur la norme L^2 de la différence entre l'image compressée et l'image originale. Le PSNR a pour expression :

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{255^2}{MSE} \quad (1.4)$$

MSE (Mean Square Error) désigne l'erreur quadratique moyenne qui a pour expression pour une image de taille $M * N$

$$MSE(I_0, I_c) = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (I_0(i, j) - I_c(i, j))^2 \quad (1.5)$$

Etant donné que le PSNR est inversement proportionnel à l'erreur quadratique, la qualité de I_c est censée être croissante en fonction du PSNR. Le caractère "universel" du PSNR constitue une de ses principales qualités ; en effet son ordre de grandeur ne dépend pas de la taille et peu du contenu de l'image. Ceci autorise des comparaisons très générales. L'échelle logarithmique permet de conserver des écarts de PSNR de même ordre pour des gammes de qualités très différentes. Par ailleurs l'interprétation mathématique en terme de norme dans des espaces L^2 dont les propriétés sont bien connues et qui se prêtent bien à des problèmes de minimisation d'erreur constitue également une raison du succès de cette mesure. Cependant on peut légitimement s'interroger sur la validité d'un tel outil de mesure de la qualité.

En effet le PSNR ne correspond pas nécessairement à la perception des erreurs par le système visuel humain. Il est en effet simple d'exhiber deux approximations d'une image donnée présentant le même PSNR et dont la qualité visuelle sera très différente. En particulier le PSNR est basé exclusivement sur le carré des écarts entre les valeurs de luminance et ne tient donc pas compte des changements de signe de l'erreur observée. Notons que du point de vue de la théorie de l'information, le PSNR ne fournit pas d'indication absolue sur la perte d'information occasionné par l'approximation testée. Ainsi un écart important mais constant entre I_0 et I_c peut correspondre à un PSNR très bas alors que l'information perdue est très faible (un seul coefficient la résume : l'écart lui-même), tandis qu'une image I_c constituée de l'ajout aux pixels de l'image I_0 d'un bruit blanc gaussien de faible variance aura un bon PSNR alors que l'information perdue est très importante : pour reconstituer l'image originale, il faut connaître l'écart en chaque point.

Malgré ces défauts, le PSNR donne un bon ordre de grandeur de la qualité dans un grand nombre de cas pratiques. Si sa fiabilité n'apparaît pas absolue sur des images spécifiques, en particulier lorsque les écarts sont faibles, le PSNR constitue tout de même un bon indicateur pris en moyenne. On présentera donc les résultats comparatifs entre les différentes méthodes sur la base des PSNR, en gardant toujours à l'esprit l'importance du facteur visuel. On s'attachera ainsi à caractériser qualitativement les types de dégradations induits par chacune des méthodes présentées.

1.5.3 Complexité

Un troisième critère de performance d'un système de compression est la complexité. La complexité calculatoire peut être mesurée par le temps d'exécution du processus de compression ou en nombre d'opérations par pixel : c'est le nombre moyen d'opérations qui sont nécessaires à la compression de l'image. La complexité d'implantation est aussi importante dans le cadre de la compression. En effet, pour pouvoir être implanté sur des circuits électroniques sur lesquels le nombre de portes logiques est limité, il faut que cette complexité soit la plus faible possible. Enfin, les besoins en mémoire nécessaires au cours de la compression sont aussi à prendre en compte puisque la mémoire est une ressource relativement limitée.

Chapitre 2

Les ondelettes

2.1 Préambule	21
2.2 La transformée de Fourier	22
2.3 Principe d'incertitude de Heisenberg	22
2.4 Les ondelettes	23
2.4.1 Définition.....	23
2.4.2 Transformée en ondelettes.....	25
2.4.3 La multi-résolution.....	27
2.4.4 Fonction d'échelle et d'ondelette.....	28
2.4.5 Algorithme de Mallat.....	30
2.4.6 Les bancs de filtres	32
2.4.7 Ondelettes orthogonales.....	32
2.4.8 Ondelettes bi-orthogonales.....	32
2.4.9 Passage à deux dimensions.....	33
2.4.10 Différentes ondelettes.....	37
2.4.11 Quelle ondelette choisir ?.....	37
2.5 Application à la compression d'images	37
2.6 Discussion	41

2.1 Introduction

Le traitement du signal a pour principal objet la description des signaux liés au monde réel dans un but de traitement, d'identification, de compression, de compréhension ou de transmission. Dans ce contexte, les transformations linéaires ont toujours joué un très grand rôle, et parmi ces dernières, la plus célèbre et la plus anciennement étudiée est la transformation de Fourier (1822). Cette transformation permet, comme chacun sait, d'explorer la composition fréquentielle du signal et par ses propriétés de lui appliquer facilement des opérateurs de filtrage. Lors de cette transformation le signal est décomposé sur un ensemble de signaux de «base» qui sont les cosinus et sinus ou l'exponentielle imaginaire, mais, très tôt dans l'histoire du traitement du signal, il est apparu que la décomposition obtenue n'était pas toujours la plus satisfaisante et la première transformation en ondelettes (le nom n'est pas encore utilisé) est proposée par Haar en 1910. La transformée en ondelettes est un outil qui découpe les données, les fonctions ou les opérateurs en composantes fréquentielles suivant une résolution adaptée à l'échelle. Les précurseurs conscients de cette technique ont été des mathématiciens (Calderon 1964), des physiciens (Aslaken et Klaunder en 1968, Paulen 1985), et surtout des ingénieurs (ou des chercheurs en sciences pour l'ingénieur) comme Esteban et Galand (1977), Smith et Barnwell (1986), Vetterli (1986), nous pourrions parler dans leur cas de «pré-ondelette». Mais le premier à avoir utilisé la méthode et le premier à avoir proposé le nom d'ondelettes fut Jean Morlet (1983). Le problème traité par Morlet était celui de l'analyse de données issues de sondages sismiques effectués pour des recherches géologiques ; ces données faites de nombreux transitoires sont particulièrement adaptées à une technique d'analyse conservant la notion de localisation de l'événement tout en fournissant une information sur son contenu fréquentiel ce qui est tout l'intérêt de ce type de transformation. Les résultats obtenus par Morlet et formalisés par le physicien Alex Grossmann ont rapidement éveillé l'attention de nombreux chercheurs et bientôt des bases mathématiques solide ont été mises en place faisant apparaître la notion de base orthogonale (Y. Meyer 1985), d'analyse multi-résolution (S. Mallat 1989 [21], [22], [23]) et d'ondelettes à support compact (I. Daubechies 1988) [24]).

2.2 La transformée de Fourier

La transformée de Fourier (1822) joue un rôle prépondérant dans l'analyse et le traitement des signaux. Elle permet en outre de réaliser des opérations de filtrage par simple multiplication dans le domaine fréquentiel (domaine de Fourier). La transformée de Fourier est une transformation linéaire et inversible permettant de décomposer un signal sur la base des exponentielles complexes. Le spectre obtenu permet alors de rendre compte de la composition fréquentielle du signal original.

Les formules d'analyse et de synthèse de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sont données par :

$$\text{Analyse} \quad F(W) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt} dt \quad (2.1)$$

$$\text{Synthèse} \quad F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iwt} dw \quad (2.2)$$

Malgré son immense succès, cette technique a plusieurs défauts, en particulier son manque évident de localisation temporelle. En effet, l'analyse de Fourier permet de connaître les différentes fréquences existantes dans un signal, c'est-à-dire son spectre, mais ne permet pas de savoir à quels instants ces fréquences ont été émises. Cette analyse donne une information globale et non locale, car les fonctions d'analyse utilisées sont des sinusoides qui oscillent indéfiniment sans s'amortir. Cette perte de localité n'est pas un inconvénient pour analyser des signaux stationnaires, mais devient un problème pour l'étude de signaux non stationnaires.

2.3 Principe d'incertitude de Heisenberg

Le principe d'incertitude de Heisenberg vient de la mécanique quantique, mais il joue un rôle important dans la théorie du traitement du signal car il donne une limite à la précision de la localisation dans différentes représentations d'un signal. Ainsi le principe nous dit que l'énergie d'un signal et celle de sa transformée de Fourier ne peuvent être localisées avec une précision arbitraire. De façon plus simple, on peut dire qu'il y a toujours une incertitude sur les mesures en temps et en fréquence d'un signal. Le théorème démontre que

$$\sigma_t^2 \sigma_w^2 \geq \frac{1}{4} \quad (2.3)$$

Où σ^2 désigne la variance, c'est à dire la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne. Pour pallier à ces déficiences, on a eu l'idée d'introduire la transformée de Fourier à fenêtre glissante

$$\text{Analyse} \quad SFT(v, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g_{v,b}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-b)e^{-i2\pi vt} dt \quad (2.4)$$

$$\text{Synthèse} \quad f(t) = SFT(v, b)g_{v,b}(t) dvdb \quad \text{Avec } g(t) = e^{-\pi t^2} \quad (2.5)$$

Dans laquelle on fait intervenir une fenêtre temporelle dont le rôle est de limiter le domaine d'intégration temporel et d'obtenir ainsi une localisation de l'information. Cette approche n'est pourtant pas pleinement satisfaisante pour plusieurs raisons :

Premièrement se pose le problème du choix de la fenêtre utilisée et plus précisément du choix de sa largeur temporelle, deuxièmement pour une taille de fenêtre fixée, on remarque alors que pour des fréquences, hautes ou basses, la résolution obtenue n'est pas optimale. Pour résoudre ces problèmes, aucun compromis sur une taille de fenêtre optimale sans connaissance a priori du signal ne semble satisfaisante. Finalement, le constat qui découle de tout ceci est qu'il faut faire varier la taille de la fenêtre d'analyse pour pouvoir saisir les hautes et basses fréquences à une résolution acceptable. De plus, le nombre d'oscillations contenues dans la fenêtre d'analyse doit demeurer constant à toutes les fréquences. C'est justement le principe de fonctionnement des ondelettes, qui va être décrit dans les prochaines sections.

2.4 Les ondelettes

2.4.1 Définition

Pour avoir une représentation temps-fréquence adaptée à la fois pour les grandes et les basses variations on utilise les ondelettes. Une ondelette est une fonction continue, qui disparaît au voisinage de $\pm\infty$. On dit que les ondelettes sont des ondes localisées [27], cette propriété de localisation lui permet d'agir localement. On la désigne souvent par la lettre ψ .

La figure ci-dessous est un exemple d'ondelette. Elle est connue sous le nom de : '*chapeau mexicain*' son expression est donnée par :

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4} (1 - t^2)e^{-t^2/2}$$

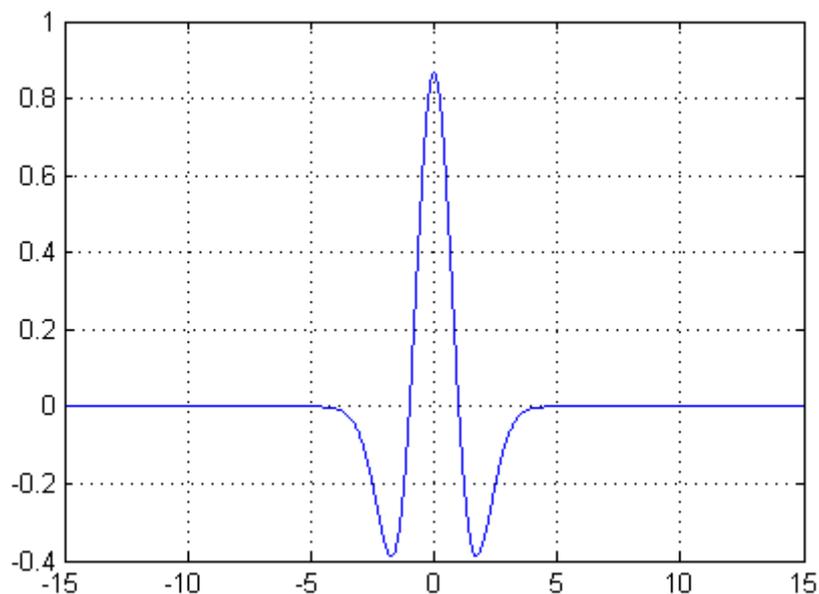


Figure. 2.1 Ondelette 'Chapeau Mexicain'

Deux opérations importantes appliquées à la fonction d'ondelette nous permettent de générer une infinité de variations de celle-ci. La *translation* qui correspond au déplacement de l'ondelette le long de l'axe des x , la deuxième opération est la *dilatation* (aussi dite compression en temps ou espace). Cette notion est illustrée par la forme générale d'une ondelette.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}^2, a \neq 0 \quad (2.6)$$

a étant le facteur d'échelle et b le facteur de translation. Le pas de translation à l'échelle a est $\frac{b}{a}$. La figure. 2.2 montre l'effet de ces deux paramètres. L'ondelette utilisée est celle de Grossmann et Morlet (1984), son équation est

$$\psi(t) = \cos(5t) e^{-t^2/2}$$

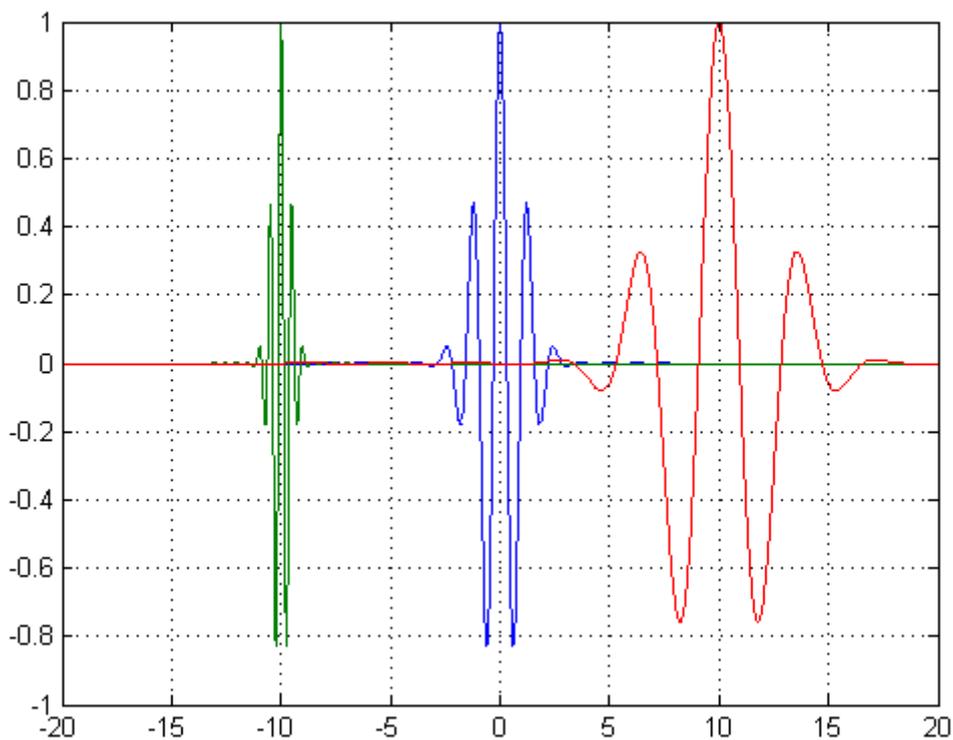
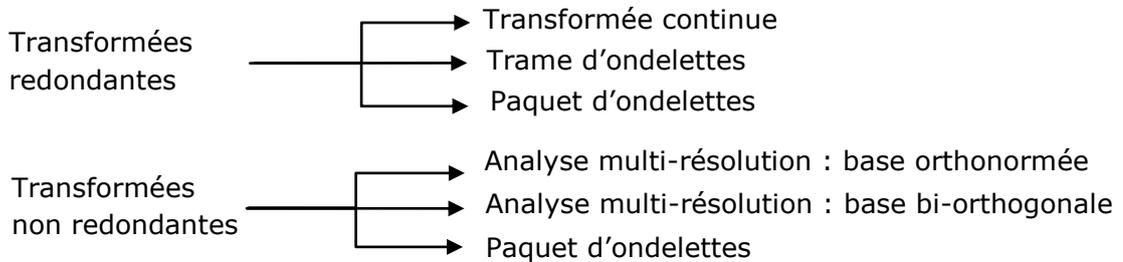


Figure. 2.2 Effet de la dilatation et de la translation

L'ondelette au centre est la fonction de référence, elle correspond à une ondelette non dilatée et non traduite : $a = 1$ et $b = 1$, celle de gauche correspond à une ondelette comprimée avec $a = 0.4$ et traduite de $b = -10$, l'ondelette à droite correspond à une dilatation de $a = 3$ et une translation de $b = 10$.

2.4.2 Transformée en ondelettes

Les transformées en ondelette sont suivant les cas continues ou discrètes, redondantes ou non. Le classement suivant peut être donné :



Transformée en ondelettes continue

Une présentation détaillée de la transformation en ondelette peut être trouvée dans [25], de la même façon que la transformée de Fourier peut se définir comme étant une projection sur la base des exponentielles complexes, on introduit la transformée en ondelettes comme la projection sur la base des fonctions ondelettes.

$$WT(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt ; \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}^2, a \neq 0$$

$$WT(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt ; \text{ avec } \psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.7)$$

Les fonctions $\psi_{a,b}(t)$ sont obtenues à partir de la dilatation et de la translation de la fonction mère $\psi(t)$. Les fonctions $\psi_{a,b}(t)$ sont par conséquent parfois appelées les ondelettes filles. Tout comme la transformée de Fourier, la transformée en ondelettes est inversible.

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b} da db \quad (2.8)$$

Où C_ψ est un coefficient dont l'expression est $C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw$

Avec $\hat{\psi}(w)$ transformée de Fourier de $\psi(t)$

Condition d'admissibilité

La fonction ondelette doit vérifier un certain nombre de propriétés, la première d'entre elle se nomme *condition d'admissibilité*.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty \quad (2.9)$$

Cette condition permet d'analyser le signal, puis de le reconstruire sans perte d'information. La condition d'admissibilité implique en outre que la transformée de Fourier de l'ondelette à la fréquence du continu (pour $w = 0$) doit être nulle. Soit,

$$\hat{\psi}(w) \Big|_{w=0} = 0 \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) peut s'écrire d'une façon équivalente sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.11)$$

et montre que $\psi(t)$ doit être à moyenne nulle. $\psi(t)$ est donc une fonction à largeur temporelle finie (fenêtre temporelle) possédant un caractère oscillatoire. On est donc bien en présence d'une **petite onde** : une ondelette.

Transformée en ondelettes discrète

La transformée en ondelettes telle qu'elle est définie est redondante, c'est à dire que l'on obtient plus de coefficients d'ondelettes qu'il n'en est nécessaire pour décrire le signal de manière exhaustive. En pratique, on a plus souvent affaire à des signaux discrets, mais même sans cela, on a intérêt à discrétiser les valeurs de a et b .

Daubechies a proposé de choisir le paramètre a comme une puissance entière et positive d'un paramètre de dilatation fixé a_0 supérieur à 1, $a = a_0^m$ avec $m \in \mathbb{Z}$

Le choix du paramètre b est lié à celui a de par $b = nb_0 a_0^m$ où $b_0 > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, l'expression de l'ondelette devient alors

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m} t - nb_0) \quad (2.12)$$

m et n représentent les indices d'échelle et de temps (dilatation et translation)

La transformation en ondelettes discrète est donnée par

$$WT(a_0^m, nb_0) = C_{m,n} = a_0^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{m,n}(t) dt \quad (2.13)$$

La formule de reconstruction est donnée par

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (2.14)$$

La nécessité d'un traitement peu redondant et peu corrélé de l'information à travers les échelles, ainsi que pour des considérations purement mathématiques relatives aux espaces fonctionnels [26] a favorisé l'émergence de bases d'ondelettes dyadiques [8] où le paramètre $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$. L'équation (2.14) devient

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j} t - k) \quad (2.15)$$

Le choix du couple privilégié $(a_0, b_0) = (2, 1)$ a conduit à proposer des algorithmes rapides de

décomposition en ondelettes discrète grâce à l'utilisation d'opérateurs de décimation et d'interpolation d'un facteur de 2. Ces opérateurs constituent la base de la théorie de l'analyse multi-résolution.

2.4.3 La multi-résolution

Principe

Une multi-résolution analyse le signal à haute fréquences, pour en prélever les détails, ensuite elle analyse le signal à une résolution deux fois moins fine, et elle réitère l'opération en grossissant son échelle d'un facteur deux, jusqu'à obtenir une description complète du signal, elle est définie comme une suite décroissante de sous espaces emboîtés $\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots$ qui satisfait les propriétés suivantes tirées de [25]

1- Emboîtement des espaces : V_j

$$V_{j+1} \subset V_j, \text{ Si } f(t) \in V_{j+1} \text{ alors } f(t) \in V_j \quad (2.16)$$

L'espace V_{j+1} contient des signaux plus *grossiers* que dans l'espace V_j

2- Densité de l'espace engendré

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (2.17)$$

La projection de $f(t)$ dans V_j converge vers $f(t)$ quand $j \rightarrow -\infty$

3- Racine de l'analyse nulle

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (2.18)$$

La projection de $f(t)$ converge vers la fonction nulle quand $j \rightarrow +\infty$

4- Invariance par dilatation

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1} \quad (2.19)$$

5- Invariance par translation

$$\forall k \in \mathbb{Z} \text{ Si } f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t - k) \in V_0$$

Si $f(t)$ est dans V_j , ses translatées sont dans V_j

6- Existence d'une base

Il existe une fonction $\phi(t)$ telle que la famille des fonctions $\{\phi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée dans V_0 . La fonction $\phi(t)$ joue le rôle de fonction père, toutes les fonctions de V_0 sont des versions translatées de cette fonction. Les espaces V_j constituent des bases d'approximation. La projection d'une fonction $f(t)$ de $L^2(\mathbb{R})$ sur le sous espace V_j est une

approximation de $f(t)$, à l'échelle 2^j ou à la résolution 2^{-j} , pour plus d'information, le lecteur peut se référer à [26] et [28].

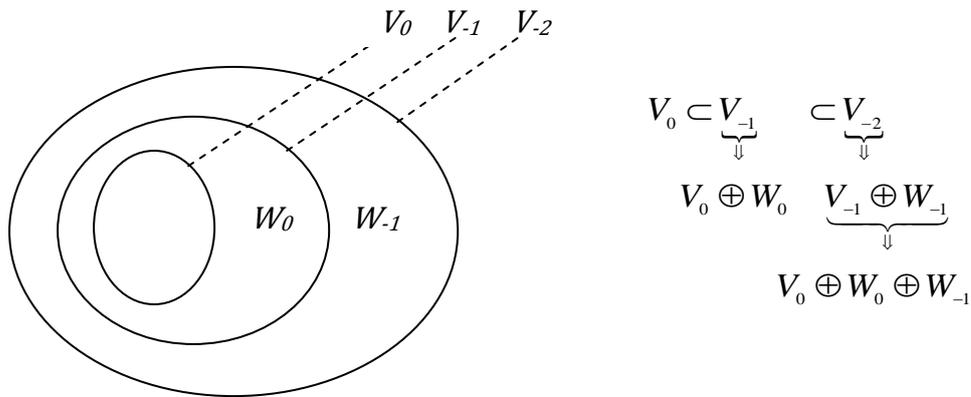


Figure. 2.3 Les espaces emboîtés de l'analyse multi-résolution

2.4.4 Fonction d'échelle et d'ondelette [35]

La fonction d'échelle a comme propriété de pouvoir engendrer une base orthonormée de V_j par dilatation et translation :

$$\phi_{j,k} = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k); \text{ Avec } j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.20)$$

Les $\phi_{j,k}$ constituent les fonctions de base de l'espace V_j . On pourra projeter n'importe quelle fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ sur la base ainsi créée.

On pose :

$$a(j, k) = \langle f, \phi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \phi_{j,k} dt \quad (2.21)$$

L'approximation à la résolution j définie par la suite discrète des nombres $a(j, k)$. L'espace des détails W_j est l'espace tel que

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j$$

C'est l'espace contenant la différence d'information entre une approximation à la résolution j et une approximation à la résolution $j - 1$, le passage de l'espace fin V_{j-1} vers l'espace moins fin ou grossier V_j s'accompagne forcément d'une perte d'information. Pour quantifier ces informations perdues, on a besoin d'une base de fonctions supplémentaire. Ces fonctions supplémentaires génèrent un espace W_j qui est le complémentaire de V_j dans V_{j-1} . Toutes les fonctions de V_{j-1} peuvent être décomposées sur l'union des deux bases V_j et W_j .

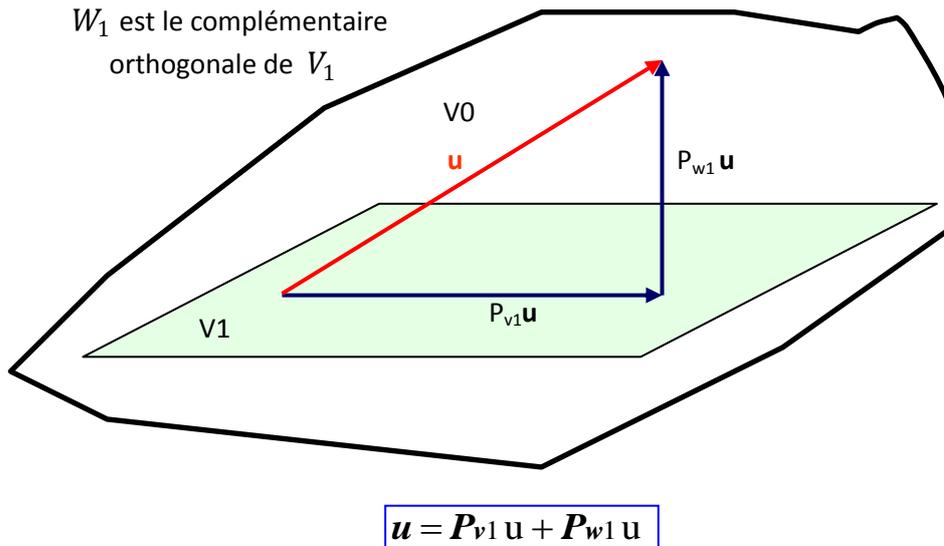


Figure. 2.4 Projection d'un vecteur U appartenant a un espace V_0 dans espace V_1

Les fonctions ondelettes, par dilatation et translation, engendrent une base orthonormée des W_j .

$$\psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} t - k); \text{ Avec } j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.22)$$

Les $\psi_{j,k}$ constituent les fonctions de base de l'espace W_j

Les coefficients de détail sont définis par :

$$d(j, k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi_{j,k} dt \quad (2.23)$$

Les équations à deux échelles pour la fonction d'échelle et l'ondelette nous permettent d'écrire :

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h[k] \cdot \phi(2t - k); \text{ avec } h[k] = \sqrt{2} \int \phi(t) \cdot \phi(2t - k) dt \quad (2.24)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g[k] \cdot \phi(2t - k); \text{ avec } g[k] = \sqrt{2} \int \psi(t) \cdot \phi(2t - k) dt \quad (2.25)$$

On rappelle que dans le cas où on a $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base dans l'espace V , tout vecteur w (fonction) peut être écrit comme:

$$w = \sum_j \alpha_j v_j \quad (2.26)$$

En général, les α_j sont difficiles à déterminer sauf pour une base orthonormée :

$$\alpha_j = \langle w, v_j \rangle \quad (2.27)$$

On peut alors écrire :

$$w = \sum_j \langle w, v_j \rangle v_j \quad (2.28)$$

2.4.5 Algorithme de Mallat

L'algorithme de Mallat [21], [22] et [23], est le plus utilisé dans le cas des analyses orthogonales et bi-orthogonales, une présentation complète est donnée dans [34].

Analyse

Nous avons vu que l'analyse multi-résolution nous permettait de décomposer un signal en coefficients d'approximations et de détails, ceci à partir d'une fonction d'échelle $\phi(t)$ et d'une ondelette $\psi(t)$. En fait chacune de ces fonctions est estimée au moyen des séquences $h(n)$ et $g(n) = (-1)^n h(1-n)$ et il suffit de connaître les valeurs de la suite $h(n)$ pour effectuer la décomposition en multi-résolution. Une fonction de $f \in V_{j-1}$ peut être exprimée comme la somme de la projection orthogonale de f dans V_j et de la projection orthogonale de f dans W_j . On aura alors à décomposer la fonction f ayant une échelle donnée, en une somme de coefficients d'échelle et de coefficients de détails à l'échelle grossière suivante.

$$\begin{aligned} f_{j-1}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-1,k} \phi_{j-1,k}(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

La première somme peut être vue comme une approximation de f à une échelle grossière, la seconde comme les détails enlevés de f pour avoir l'approximation. Les coefficients $a(j,k)$ et $d(j,k)$ sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} a(j,k) &= \langle f, \phi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \phi_{j,k}(t) dt \\ &= \int f(t) 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k) dt \quad \text{En utilisant la formule (2.20)} \\ &= \int f(t) 2^{-j/2} [\sqrt{2} \sum_n h[n] \cdot \phi(2(2^{-j}t - k) - n)] dt \\ &= \sum_n h(n) \int f(t) 2^{\frac{j-1}{2}} \phi(2^{-(j-1)}t - (2k+n)) dt \\ &= \sum_n h(n - 2k) a(j-1, n) \end{aligned}$$

On voit bien que les coefficients d'approximation à la résolution ' j ', s'obtiennent donc à partir des coefficients d'approximation à la résolution ' $j-1$ ' d'une façon récursive selon :

$$a(j,k) = \sum_n h(n - 2k) a(j-1, n) \quad (2.30)$$

De même pour les coefficients de détails on aura :

$$d(j,k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi_{j,k}(t) dt$$

$$d(j, k) = \sum_n g(n - 2k) a(j - 1, n) \quad (2.31)$$

Ils se calculent également à partir des coefficients d'approximation à l'échelle ' $j - 1$ ' mais en utilisant le filtre $g(n)$. Ces deux dernières relations montrent comment faire le passage d'une approximation d'un niveau j à un niveau $j + 1$. Leur calcul peut être interprété comme un produit de convolution entre $\tilde{h}[k]$ et $a(j + 1, k)$ (respectivement $\tilde{g}[k]$ et $a(j + 1, k)$ évalué pour un indice sur deux ; ou encore comme un filtrage de la séquence $a(j + 1, k)$ par le filtre de réponse impulsionnelle $\tilde{h}[k]$ (respectivement $\tilde{g}[k]$) suivi par un sous échantillonnage de rapport 2. Ceci est illustré dans le schéma suivant :

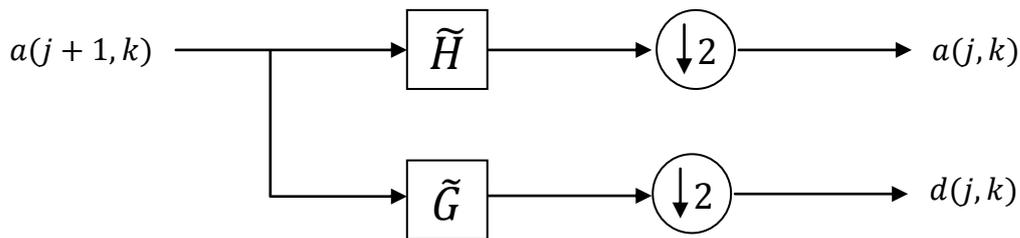


Figure. 2.5 Algorithme d'analyse de Mallat

Synthèse

Nous avons vu au paragraphe précédent que l'approximation $f_{(j-1)}(t)$ du signal $f(t)$ à la résolution ' $j - 1$ ' comme étant la somme de l'approximation de la projection de $f(t)$ dans V_j à et de la projection de $f(t)$ dans W_j

$$\begin{aligned} f_{(j-1)}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-1,k} \phi_{j-1,k}(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \end{aligned}$$

En utilisant le produit scalaire de cette équation avec $\phi_{j-1,k}(t)$, on obtient

$$a_{j-1,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j-1,k}(t) \rangle + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \langle \psi_{j,k}(t), \phi_{j-1,k}(t) \rangle$$

Le produit scalaire de l'équation précédente peut s'écrire

$$\langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j-1,k}(t) \rangle = \int 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k) 2^{-\frac{j-1}{2}} \phi(2^{-(j-1)}t - k)$$

Par changement de variable $u = 2^{-j}t - k$

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j-1,k}(t) \rangle &= \sqrt{2} \int \phi(u) \cdot \phi(2u + 2l - k) dt \\ &= \sqrt{2} \int \phi(u) \cdot \phi(2u - (k - 2l)) dt \\ &= h[k - 2l] \quad \text{en utilisant l'équation (2.24)} \end{aligned}$$

Finalement la formule de reconstruction aura comme expression

$$a_{j-1,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h[k-2l] a_{j,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} g[k-2l] d_{j,l} \quad (2.32)$$

La figure (2.6), illustre l'algorithme de reconstruction

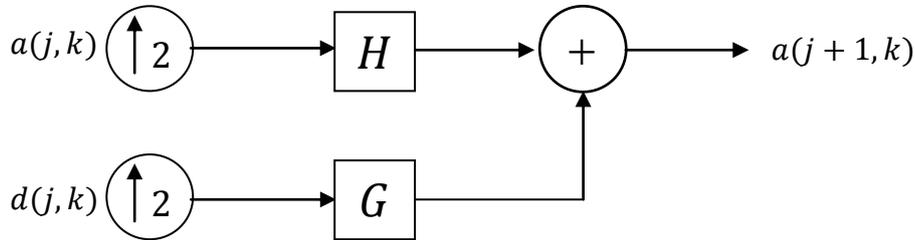


Figure. 2.6 Algorithme de reconstruction de Mallat

2.4.6 Les bancs de filtres

Un banc de filtres est un ensemble de filtres qui décompose le contenu fréquentiel d'un signal en un ensemble de signaux, chacun contient une partie de la fréquence du signal original. Du fait que la combinaison des bandes passantes de ces filtres couvre la totalité des fréquences originales, ces filtres sont dits complémentaires. Un simple banc de filtres consiste en un filtre passe-bas et un autre passe-haut, les deux ont une fréquence de coupure à la moitié de la bande.

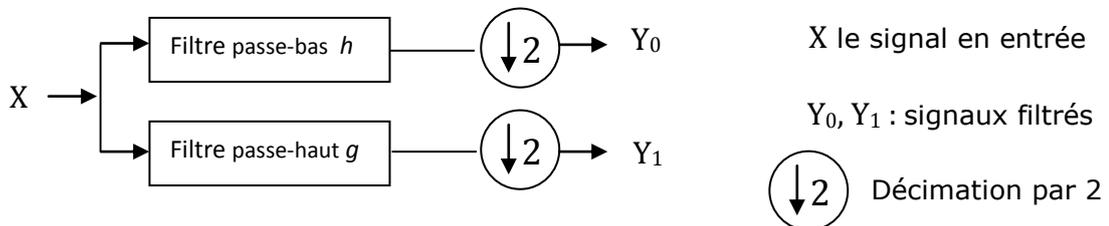


Figure. 2.7 Banc de filtres simple

2.4.7 Ondelettes orthogonales [36]

Soit V un espace vectoriel de dimension n et $\{\phi_j / j = 1, \dots, n\}$ une base de cette espace. Cette base est qualifiée de orthogonale si est seulement si

$$\langle \phi_j, \phi_i \rangle = 0 \quad \forall i \neq j ; i, j = 1, \dots, n$$

Normée si est seulement si

$$\langle \phi_j, \phi_j \rangle = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

2.4.8 Ondelettes bi-orthogonales [37]

Deux familles de fonctions duales sont considérées, l'une sera utilisée pour l'analyse (transformée directe) et l'autre pour la reconstruction ou synthèse (transformée inverse). Ces familles sont

orthogonales entre elles mais ne sont pas orthogonales en elles-mêmes. Nous avons besoin de deux familles duales de sous-espaces emboîtés définies par les deux familles de fonctions d'échelle, chacune formant une base non orthogonale. Les propriétés à respecter sont l'indépendance linéaire et l'existence et l'unicité de la décomposition. Si on note V_j et \tilde{V}_j les deux familles de sous-espaces, on a :

$$V_j \subset V_{j-1} \text{ et } \tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j-1}$$

Les sous-espaces complémentaires sont définis différemment car ils sont complémentaires au sous-espace dual :

$$W_j \perp \tilde{V}_j \text{ et } \tilde{W}_j \perp V_j$$

Dans le cas bi-orthogonal, l'analyse est effectuée de la même manière que dans le cas orthogonale :

$$a(j, k) = \sum_n h(n - 2k) a(j - 1, n)$$

$$d(j, k) = \sum_n g(n - 2k) a(j - 1, n)$$

Par contre, la reconstruction est assurée par les filtres conjugués, soit :

$$a(j - 1, k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}[n - 2k] a_{j,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{g}[n - 2k] d_{j,l} \quad (2.33)$$

La relation imposée entre les filtres étant :

$$h(n) = (-1)^n h(1 - n) \text{ et } g(n) = (-1)^n \tilde{h}(1 - n)$$

2.4.9 Passage à deux dimensions

La transformée en ondelettes 2D découle directement de la transformée en ondelette 1D. Ainsi la méthode la plus simple pour obtenir les fonctions d'ondelettes et d'échelle en deux dimensions est de multiplier deux fonctions à une dimension [20]. On obtient la fonction d'échelle 2D par multiplication de deux fonctions d'échelle 1D $\phi(x, y) = \phi(x) \phi(y)$. L'obtention des fonctions d'ondelettes est réalisée par multiplication de deux fonctions d'ondelettes 1D ou d'une fonction d'ondelettes et d'une fonction d'échelles. Ainsi une transformée en ondelette 2D possède trois fonctions d'ondelettes $\psi(x, y)^H = \phi(x) \psi(y)$, cette première fonction d'ondelettes permet de récupérer les détails horizontaux ; $\psi(x, y)^V = \psi(x) \phi(y)$, pour les détails verticaux ; $\psi(x, y)^D = \psi(x) \psi(y)$, pour les détails diagonaux.

La TOD 2D peut être implémentée en utilisant un banc de filtres, illustrée par la figure ci-dessous.

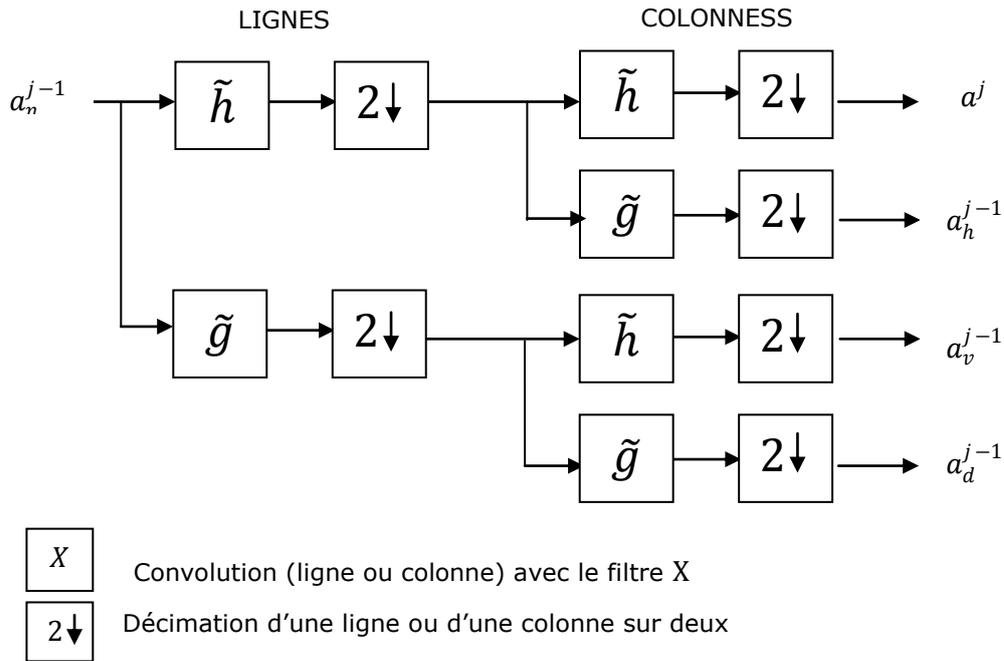


Figure 2.8 Algorithme de décomposition d'une image à une résolution

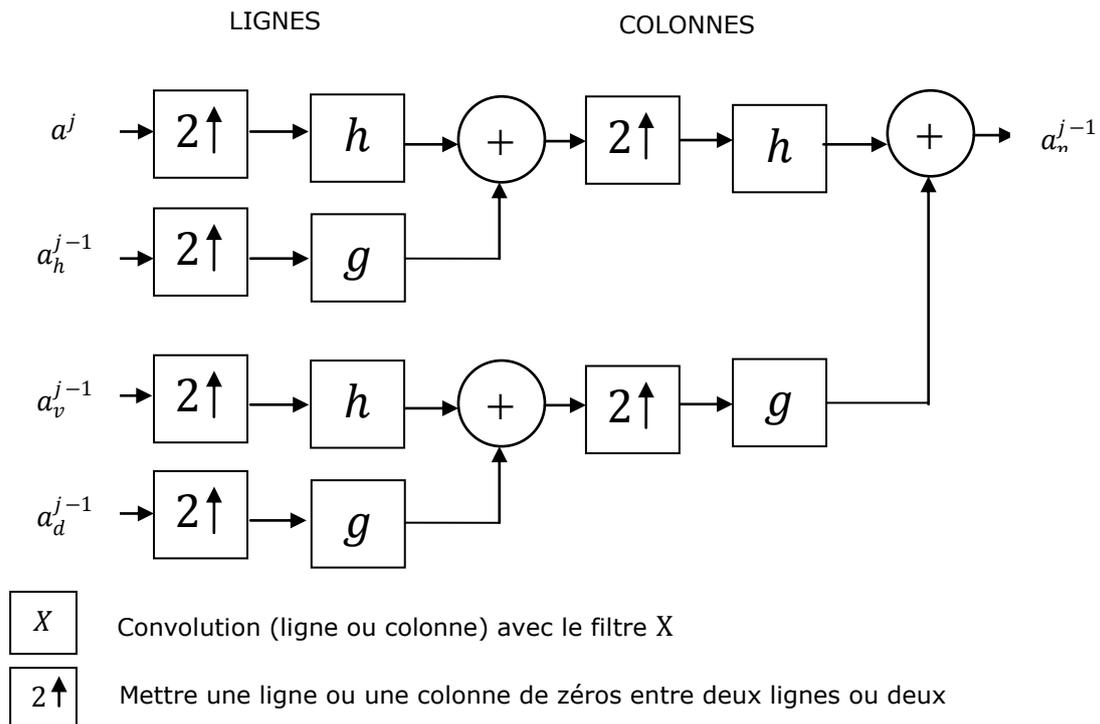


Figure. 2.9 Algorithme de reconstruction d'une image à une résolution

$\tilde{h}[n]$ Filtre passe-bas, décomposition ; $\tilde{g}[n]$ Filtre passe-haut, décomposition

$h[n]$ Filtre passe-bas, reconstruction ; $g[n]$ Filtre passe-haut, reconstruction

$\tilde{h}[n] = h[-n]$ et $\tilde{g}[n] = g[-n]$

$h[L - 1 - n] = (-1)^n g[n]$, L est la longueur de filtre (en nombre de points).

En vue d'obtenir la décomposition désirée il faut procéder à un balayage des lignes alterné avec un balayage des colonnes. En effet, le balayage des lignes conduit à décomposer l'image verticalement en des coefficients d'approximations et de détails. Après chaque balayage des lignes, le balayage des colonnes permet de décomposer l'image horizontalement en deux parties approximation et détail, on obtient alors bien la décomposition désirée illustrée par la figure (2.10).

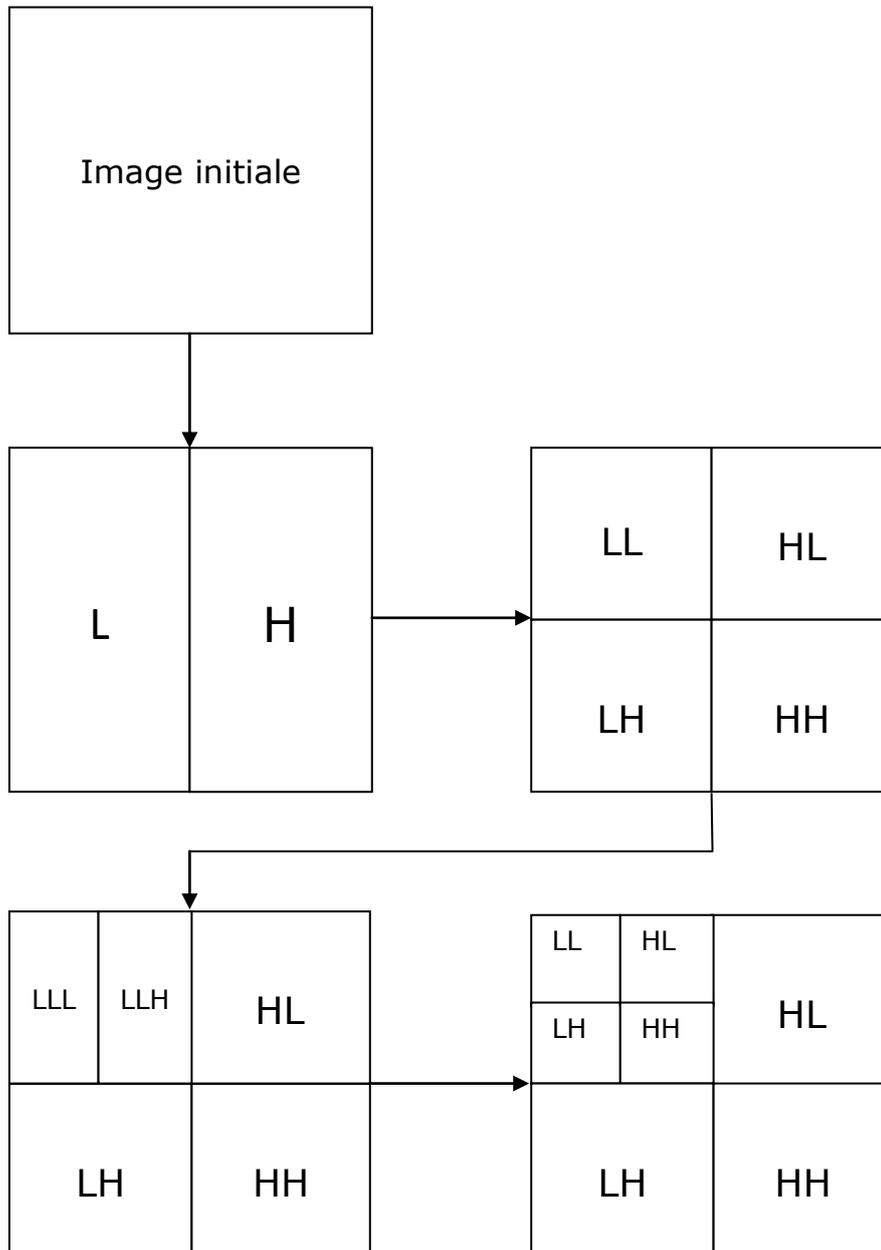


Figure. 2.10 Décomposition pyramidale de Mallat d'une image

Par analogie à la représentation précédente de la figure (2.10) la transformation en ondelette de la fameuse 'Léna' est représentée comme suit :

L'observation de l'image, en figure (2.11), permet d'illustrer les transformations subies par l'image lors de l'application de TOD 2D

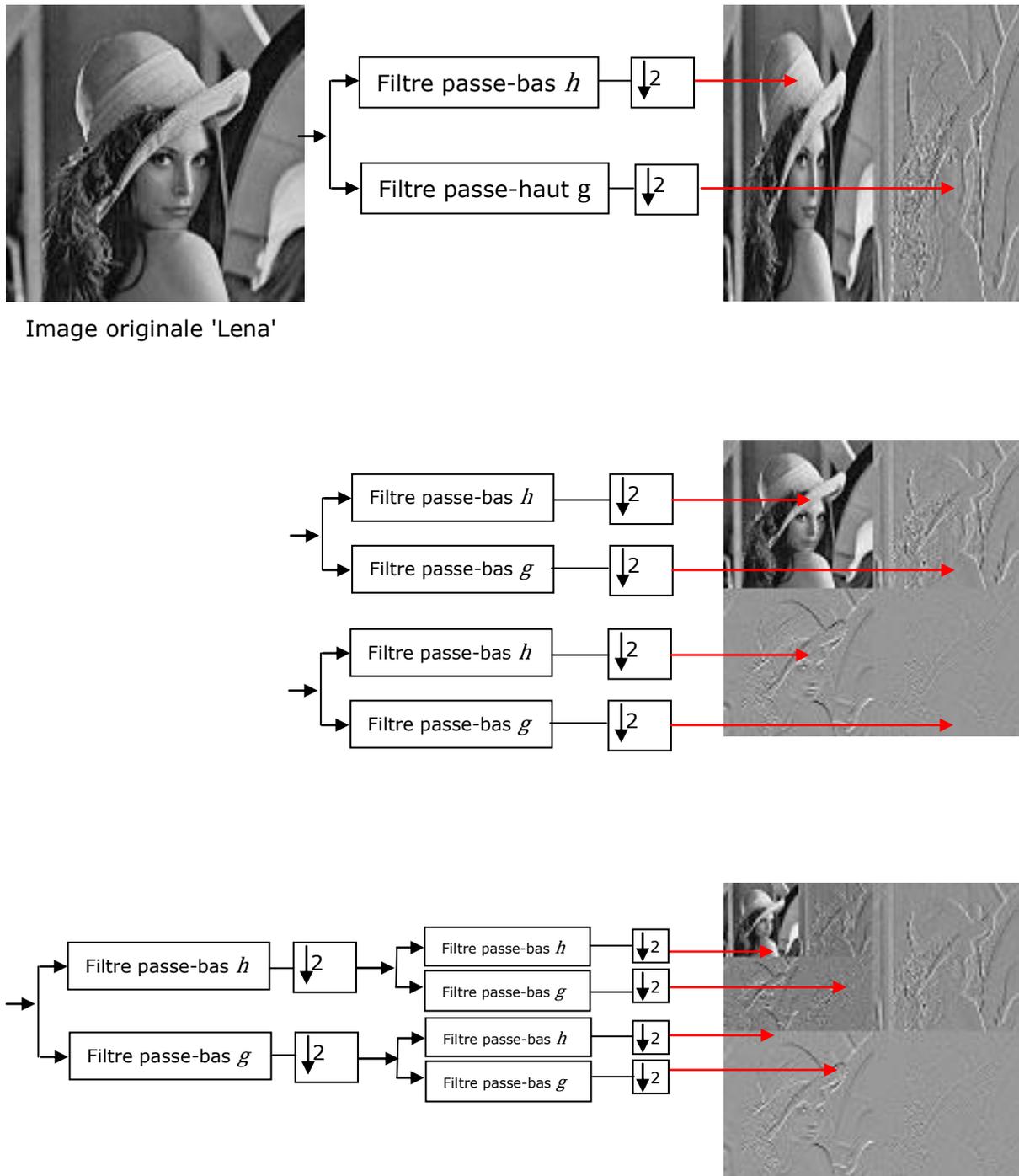


Figure 2.11 Transformée en Ondelettes d'une image

2.4.10 Différentes ondelettes

Pour finir, on peut énumérer différents types d'ondelettes, continues ou discrètes, couramment utilisées

- Ondelettes continues
 - ondelette de Morlet
 - ondelette Sombbrero
- Ondelettes discrètes
 - Ondelettes orthogonales : Haar, Shannon, Meyer, Battle-Lemarié Daubechies, Coiflets, spline
 - ondelettes bi-orthogonales : Cohen-Daubechies-Feauveau, Chui
 - ondelettes semi-orthogonales : spline

2.4.11 Quelle ondelette choisir ?

Le choix de l'ondelette dépend surtout de l'application : en traitement d'images, on préfère utiliser des ondelettes bi-orthogonales qui permettent d'allier les propriétés de linéarité en phase (symétrie du traitement droite-gauche) avec la compacité des supports des filtres utilisés. Effet, ce choix est basé sur le fait de trouver des bancs de filtres qui compactent le maximum d'énergie, tout en garantissant une bonne qualité de reconstruction de l'image [33].

2.5 Application à la compression d'images

Suite à la transformation d'une image par ondelettes discrètes, il n'y a pas directement de compression de la taille de l'image. En effet, une image de 512×512 pixels sur 8 bits donne, après traitement par la TOD, 512×512 coefficients sur 8 bits, répartis entre les coefficients de détails (CD) et les coefficients d'approximations (CA). Comme dans tout encodage par transformation, le calcul de la transformée du signal à compresser est une des étapes de traitement en vue de la compression. La transformation vise principalement à assurer la décorrélation des pixels voisins pour permettre une quantification scalaire plus performante.

Comme vue précédemment, l'algorithme de Mallat sur 3 niveaux, donne une décomposition de ce type :

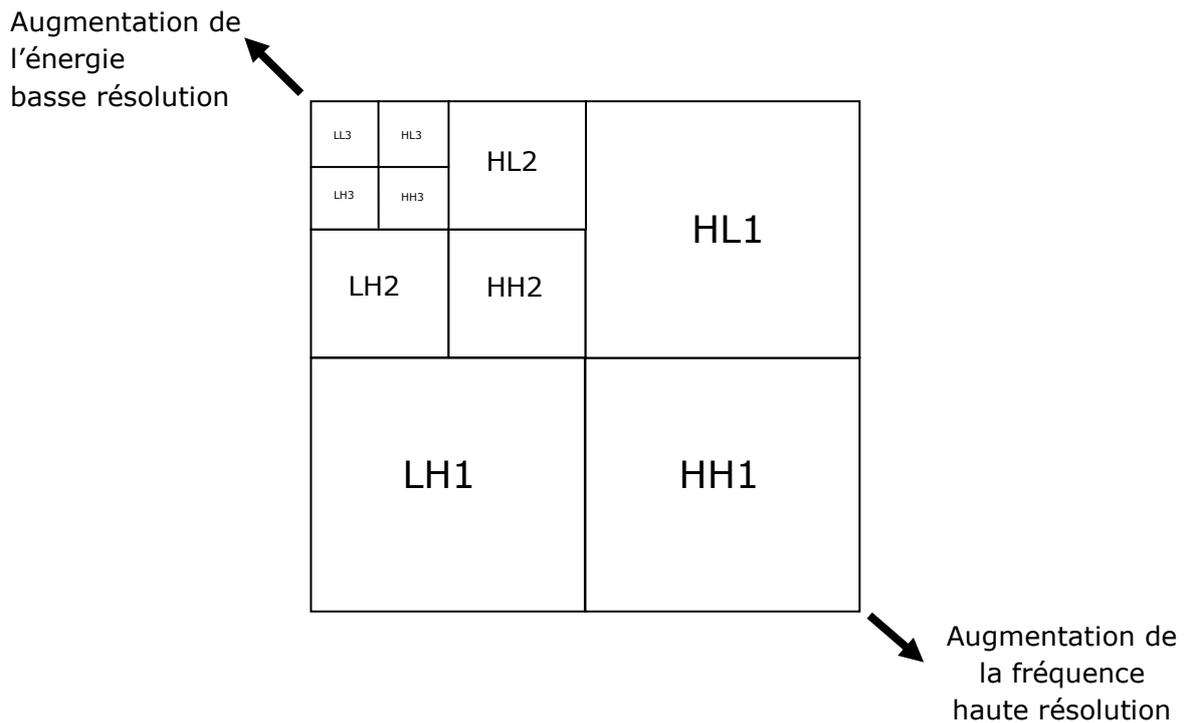


Figure 2.12. Répartition de l'information après une décomposition à 3 niveaux

Les hautes fréquences (issues du filtrage passe-haut) dont l'entropie est relativement faible, occupent la majeure partie de l'image. L'information, itération après itération est concentrée dans la partie supérieure gauche de l'image. Cette partie regroupe les coefficients d'approximations, issus du filtrage passe-bas de l'image. On dit classiquement que la transformée en ondelette procède à une compaction de l'entropie [41]. Cette nouvelle forme de l'image doit être exploitée en vue d'assurer une compression de l'image.

Un compresseur par ondelettes possède les éléments suivants :

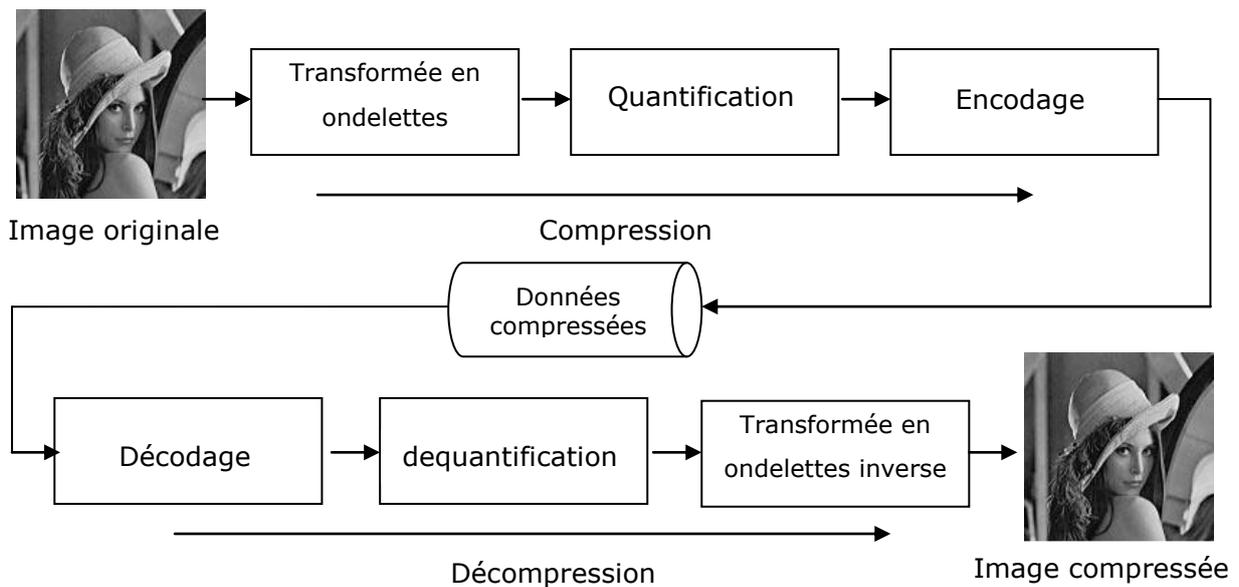


Figure 2.13 Structure conventionnelle d'un compresseur par ondelette

Une transformée en ondelettes est appliquée à l'image source. Les coefficients dans les différentes sous-bandes obtenues, sont ensuite quantifiés. La quantification est adaptée en fonction de la bande traitée. Les bandes de hautes fréquences sont quantifiées plus grossièrement que les bandes de basses fréquences. Enfin, un algorithme de compression (comme Huffman, encodage arithmétique ou un algorithme plus spécifique) est utilisé en vue de compresser l'image. Pour retrouver l'image d'origine, on décompresse l'image, le processus inverse est réalisé. Le signal compressé est décompressé, dequantifié puis la transformée en ondelettes inverse est appliquée en vue de retrouver l'image initiale.

Plusieurs algorithmes de compression utilisant les ondelettes ont été proposés, dont les plus utilisés sont le EZW, le FZW, JPEG 2000, le SPIHT.

Bien que n'importe quel algorithme de compression puisse être utilisé pour compresser l'image (décomposée en sous-bandes) après sa transformation en ondelettes, certains algorithmes tirent mieux profit de la décomposition en sous-bandes de l'image que d'autres. L'algorithme EZW est à la base de nombreux autres algorithmes utilisés pour réaliser de la compression par ondelettes.

Les deux grands principes utilisés par cette technique de compression sont :

Le seuillage

En effet, lors de la transformation par ondelettes, plus la forme du signal analysé (image) est en correspondance avec celle de l'ondelette analysante, plus le coefficient d'ondelette est important. Le coefficient d'ondelette est issu de la corrélation entre l'image et l'ondelette. De ce fait, si l'ondelette est correctement choisit, les coefficients d'ondelettes élevés correspondent aux zones de l'image où est concentrée le plus d'information. Ainsi en vue de compresser l'image, on peut penser à annuler tous les coefficients qui sont en dessous d'un seuil. Les coefficients de faibles valeurs contiennent peu d'information utile. Lors de l'utilisation d'un seuil, le problème du choix du seuil se pose. Comment déterminer la valeur en dessous de laquelle l'information contenue dans le coefficient peut être jugée négligeable ? Cette question est d'autant plus importante dans le cas d'un seuillage statique, c'est à dire qui reste fixe au cours de la compression. L'algorithme EZW [42] utilise un seuillage dynamique. Le seuil varie donc au cours de la compression qui se fait de façon itérative. Le nombre d'itération dépend de la compression désirée. Plus le nombre d'itérations sera grand, moins la compression sera importante mais plus la qualité de l'image après décompression sera bonne.

Utilisation de l'arborescence de l'image

Dans la décomposition en trois niveaux d'une image, on trouve 1 série de coefficients d'approximations LL3 et 3 séries de HL : HL1, HL2, HL3; 3 séries de LH : LH1, LH2, LH3; 3 séries de HH : HH1, HH2, HH3. Dans ces séries de coefficients de même nature, les coefficients descendent les uns des autres. Prenons les coefficients HH, un coefficient HH dans le plus haut niveau de décomposition HH3 possède 4 descendants (enfants) dans HH2. Chaque coefficient de HH2 possède 4 enfants dans HH1. L'algorithme EZW cherche à exploiter ces relations de

descendance entre les coefficients. Ainsi, lors du balayage de l'image, tous les coefficients d'un niveau sont balayés avant de passer au niveau suivant; ceci donne lieu au balayage en Z de la figure 2.14. La création d'un arbre de zéro (zerotree) part du principe que si un coefficient dans un haut niveau de décomposition (décomposition grossière) n'est pas significatif par rapport à un seuil T , alors il est fortement probable que ces enfants soient aussi non significatifs par rapport à ce même seuil T .

Pour définir si un coefficient est significatif au cours d'une itération donnée, l'algorithme compare ce coefficient au seuil T de l'itération en question. Si le coefficient est supérieur au seuil ($|C_{i,j}| > T$), il est jugé comme significatif, autrement il est considéré comme non significatif.

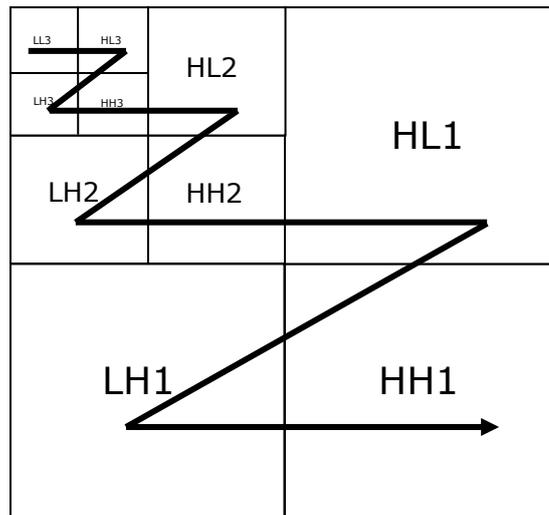


Figure 2.14 Balayage de l'image assuré par l'algorithme EZW

L'algorithme SPIHT (Set Partitioning In Hierarchical Trees) proposé par Said et Pearlman [43] est une modification de l'algorithme EZW. Une des caractéristiques principales de la méthode de codage SPIHT est de ne pas transmettre les données explicitement. En effet, cette méthode est basée sur la transmission progressive de l'information. Pour cela, on va coder les pixels et les ensembles qui vérifient la condition $2^n \leq |C_{i,j}| < 2^{n+1}$, puis nous allons décrémenter la valeur de n ; où n est définie par l'équation :

$$\begin{cases} T_0 = 2^n \\ n = \left\lfloor \log_2\left(\frac{X_0}{2}\right) \right\rfloor \end{cases} \quad (2.34)$$

Où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière et X_0 représente la plus grande valeur.

La norme JPEG2000 utilise aussi la transformée en ondelettes pour traiter les images. Dans cette dernière, les ondelettes sont justes une maille d'un dispositif complexe qui vise à obtenir une compression efficace et une grande flexibilité lors de la décompression. En effet, la norme JPEG2000 [44] est basée sur le principe de la compression unique et de la décompression multiple.

L'image peut notamment être décompressée par morceau, ce qui permet à l'utilisateur de zoomer sur les zones qui l'intéressent.

2.6 Discussion

Au cours de ce chapitre nous avons présenté les fondements de la transformée en ondelettes et de l'analyse en multi-résolution de manière la plus synthétique possible. En premier lieu nous avons exposé le principe de base de la théorie, puis nous avons posé la transformation en ondelettes dans le cas continu et discret dans son cadre mathématique. Puis nous avons établi le lien entre la transformation en ondelettes et l'analyse en multi-résolution. Nous avons introduit la technique de bancs de filtres pour exposer la transformation en ondelettes rapide.

L'emploi de l'analyse multi-résolution dans le traitement d'images fournit un certain nombre d'avantages selon l'application envisagée soit dans la Compression : le taux de compression d'image pourra être adapté à la qualité désirée. En effet, en éliminant les détails contenus dans certains niveaux de résolution, jugés peu importants, nous pourrions augmenter le taux de compression, en conservant uniquement l'information nécessaire.

Bien évidemment, la transformée en ondelettes ne se limite pas aux applications citées ci-dessus, elle est appliquée dans la détection de contours, la reconnaissance de visage, la détection de mouvements et d'une manière générale dans la plupart des applications reposant sur l'analyse d'images.

Chapitre 3

Les bandelettes

3.1 Introduction	43
3.2 Première génération de bandelettes	43
3.2.1 Géométrie	43
3.2.2 Bandelettes.....	45
3.3 Seconde génération de bandelettes	50
3.3.1 Corrélacion des coefficients d'ondelettes	50
3.3.2 Corrélacion géométrique	52
3.3.3 Base de bandelettes orthogonales.....	53
3.3.4 Algorithme de calcul.....	58
3.3.5 Transformée en bandelettes par groupement.....	62
3.4 Discussion	75

3.1 Introduction

Les ondelettes orthogonales ou bi-orthogonales permettent une représentation efficace des zones de régularités homogènes des images, que ce soit les singularités ponctuelles, les textures homogènes ou les zones uniformément régulières. Cependant, elles ne capturent pas les régularités géométriques des images le long des contours, bien que ceci soit un aspect essentiel des images. Nous proposons ici la construction d'une nouvelle représentation permettant de capturer à la fois cette régularité le long des contours et la régularité de zones. Elle est basée sur une nouvelle famille de bases, les bandelettes, vivant le long de contours et permettant de capturer les singularités le long de ceux-ci.

3.2 Première génération de bandelettes

La première génération de la transformée en bandelettes a été proposée par Le Pennec dans sa thèse [46]. Elles sont obtenues à partir de déformations d'ondelettes anisotropes permettant via une rectification d'exploiter la régularité de la fonction selon sa direction de régularité maximale. Les bases de bandelettes décomposent une image selon des vecteurs multi échelles allongés le long d'un flot géométrique indiquant des directions de régularité de l'image.

3.2.1 Géométrie

Le lien entre les directions de régularité maximale et contours est fort puisque la tangente à un contour est une direction de régularité maximale. La notion de direction de régularité est cependant plus générale et plus facile à estimer.

3.2.1.1 Contours, courbes et flots

Les approches issues de la vision recherchent les contours dans les images et les considèrent comme une source centrale d'information. La géométrie de l'image est représentée par ses contours, c'est-à-dire par des courbes. Chaque courbe C peut être paramétrée par sa paramétrisation normale, la paramétrisation par l'abscisse curviligne s

$$C = \{c(s) = (c_1(s), c_2(s)), s \in \mathbb{R}, c_1: \mathbb{R} \mapsto [0,1] \text{ et } c_2: \mathbb{R} \mapsto [0,1]\} \quad (3.1)$$

ou par n'importe quelle autre paramétrisation. Au-delà de l'information de position, la courbe donne une information de direction, sa tangente indique la direction qui ne la traverse pas et qui est donc une direction de régularité maximale.

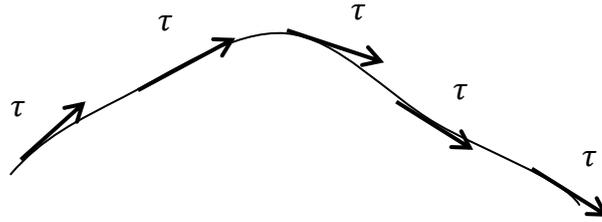


Figure. 3.1 Un contour \mathcal{C} et son flot τ défini par sa tangente.

On parle de flot τ le long du contour pour désigner le vecteur unitaire de cette direction de régularité maximale le long du contour

$$\tau(c(s)) = c'(s) = \begin{pmatrix} c_1'(s) \\ c_2'(s) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Ce flot peut s'étendre au voisinage du contour grâce à cette notion de régularité maximale et est beaucoup mieux défini que la position. En effet, pour tout contour la direction de régularité peut être mesurée tandis que la position ne peut être déterminée que dans le cas des contours nets.

3.2.2 Bandelettes

Les bandelettes sont obtenues à partir d'une déformation locale w de l'espace permettant d'aligner la direction de régularité avec une direction fixe et de se ramener à une base séparable.

3.2.2.1 Déformation de l'espace

On souhaite trouver une transformation w du plan telle que l'action de son gradient ∇w sur la direction $\tau(x)$ au point x donne une direction constante τ_0

$$(\nabla w)(\tau(x)) = \tau_0 \quad (3.3)$$

Afin de rectifier celle-ci. La courbe \mathcal{C} peut dans ce cas être paramétrée par c de sorte que

$$\mathcal{C} = \{ (x_1, c(x_1)) \} \quad (3.4)$$

et la transformation w est alors

$$w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 - c(x_1)) \quad (3.5)$$

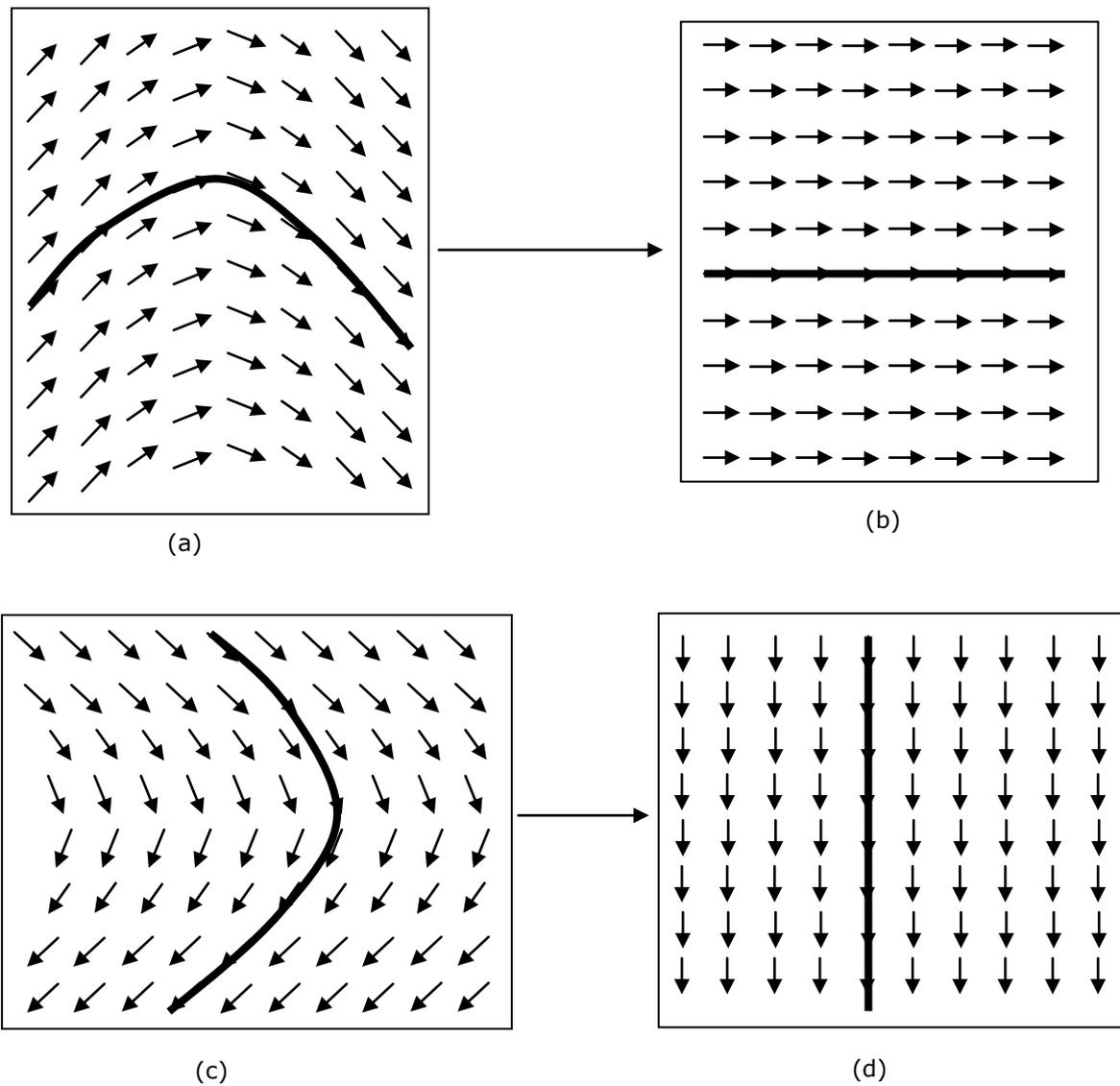


Figure. 3.2 Déformation horizontale et déformation verticale : (a) une courbe horizontale et son flot, (b) la courbe rectifiée et son flot strictement horizontal, (c) une courbe verticale et son flot, (d) la courbe rectifiée et son flot strictement vertical.

3.2.2.2 Opérateur de déformations sur les fonctions

Dans le cas des flots constants selon la direction verticale et jamais verticaux, on définit un opérateur de déformation W qui agit sur les fonctions à partir de la transformation w définie en 3.2.1 de sorte que

$$Wf(w(x)) = f(x) \quad (3.6)$$

Soit
$$Wf(x) = f(w^{-1}(x)) \quad (3.7)$$

$$Wf(x) = f(x_1, x_2 + c(x_1)) \quad (3.8)$$

3.2.2.3 Bandelettes

On souhaite maintenant introduire des bases utilisant la régularité géométrique. Pour cela, on se ramène à la fonction Wf obtenue en 3.2.2 qui est régulière selon la direction horizontale et potentiellement irrégulière selon la direction verticale. On décompose alors celle-ci dans une base séparable B

$$B = \{ g_{m_1}^1(x_1)g_{m_2}^2(x_2) \}, \quad m_1 \in \mathbb{Z} \text{ et } m_2 \in \mathbb{Z} \quad (3.9)$$

où les familles $g_{m_1}^1, m_1 \in \mathbb{Z}$ et $g_{m_2}^2, m_2 \in \mathbb{Z}$ sont deux bases monodimensionnelles. Ceci permet de traiter différemment les deux directions.

On calcule dans cette décomposition des produits scalaires

$$\langle Wf, g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2 \rangle \quad (3.10)$$

On se ramène à des produits scalaires avec f à l'aide de la transposée de l'opérateur W

$$\langle Wf, g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2 \rangle = \langle f, W^* g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2 \rangle \quad (3.11)$$

Avec

$$W^* g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2(x_1, x_2) = g_{m_1}^1(x_1) g_{m_2}^2(x_2 - c(x_1)) \quad (3.12)$$

Comme on le vérifie avec le calcul suivant :

$$\langle Wf, g_{m_1}^1(x_1)g_{m_2}^2(x_2) \rangle = \int_x Wf(x) g_{m_1}^1(x_1)g_{m_2}^2(x_2) dx \quad (3.13)$$

Soit en insérant l'expression de Wf

$$\int_x f(x_1, x_2 + c(x_1)) g_{m_1}^1(x_1)g_{m_2}^2(x_2) dx \quad (3.14)$$

Puis par un changement de variable en x_2

$$\int_x f(x_1, x_2) g_{m_1}^1(x_1)g_{m_2}^2(x_2 - c(x_1)) dx \quad (3.15)$$

$$\langle Wf, g_{m_1}^1(x_1)g_{m_2}^2(x_2) \rangle = \langle f, g_{m_1}^1(x_1)g_{m_2}^2(x_2 - c(x_1)) \rangle \quad (3.16)$$

Les produits scalaires

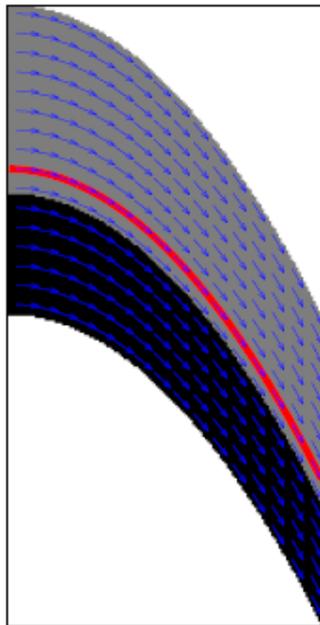
$$\langle f, W^* g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2 \rangle \quad (3.17)$$

correspondent à la décomposition de f dans une base orthonormée, celle définie par

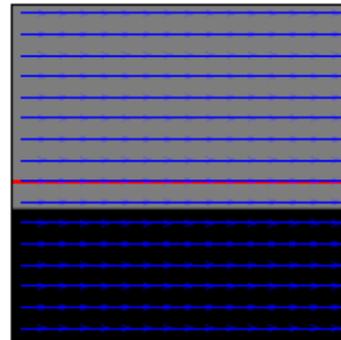
$$B_c = \{ W^* g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2 \}, \quad m_1 \in \mathbb{Z} \text{ et } m_2 \in \mathbb{Z} \quad (3.18)$$

$$B_c = \{ g_{m_1}^1(x_1)g_{m_2}^2(x_2 - c(x_1)) \}, m_1 \in \mathbb{Z} \text{ et } m_2 \in \mathbb{Z} \quad (3.19)$$

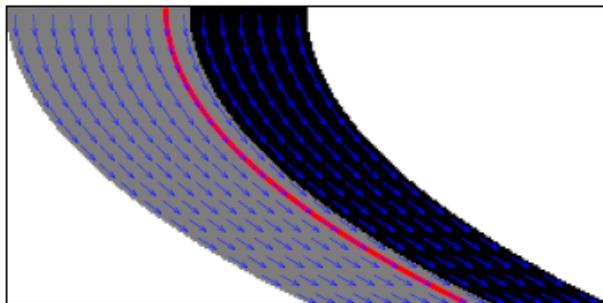
On appelle bandelette les éléments de cette base.



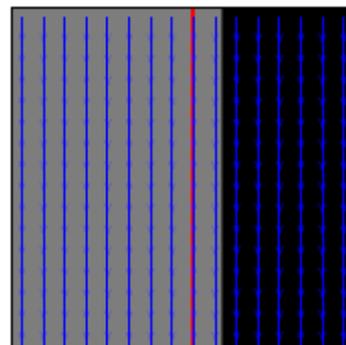
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure. 3.3 Déformation des images : (a) une image ayant un flot horizontale, (b) son image par l'opérateur W , (c) une image ayant un flot vertical, (d) son image par l'opérateur W .

3.2.2.4 Rôle et choix des deux bases

Le choix des bases $\{g_{m_1}^1\}$ et $\{g_{m_2}^2\}$ est crucial pour l'efficacité des bandelettes. Leurs rôles sont très différents bien que finalement on choisisse d'utiliser des ondelettes monodimensionnelles dans les deux cas.

La base $\{g_{m1}^1\}$ est alignée avec la direction de régularité et doit donc permettre d'exploiter ceci. La base $\{g_{m2}^2\}$ est alignée avec une direction dans laquelle la fonction peut présenter des singularités, elle doit donc permettre de représenter efficacement celles ci.

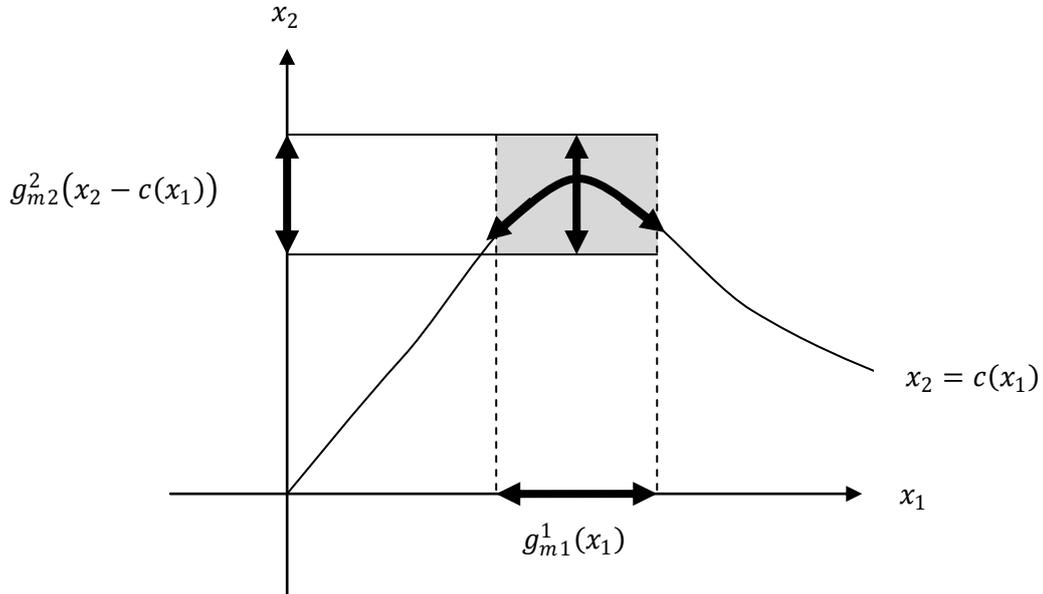


Figure. 3.4 Une bandelette au voisinage d'un contour paramétré par $x_2 = c(x_1)$

La bandelette $g_{m1}^1(x_1) g_{m2}^2(x_2 - c(x_1))$ a un support (grise) qui suit le contour, l'analyse selon x_1 suit le contour tandis que celle selon x_2 le traverse.

La base $\{g_{m1}^1\}$ est utilisée pour capturer une régularité uniforme, La base $\{g_{m2}^2\}$ pour sa part, doit permettre de reproduire efficacement les singularités. Les bases d'ondelettes monodimensionnelles permettent de représenter les régularités uniformes et les singularités, elles sont par conséquent utilisées. Dorénavant, les bandelettes sont issues d'un produit de deux ondelettes monodimensionnelles à support compact. Ces produits tensoriels correspondent aux ondelettes anisotropes. Les bases de bandelettes de l'espace tout entier sont de la forme

$$B_c = \{W * (\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2})\} (j_1, k_1) \in \mathbb{Z}^2, (j_2, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \quad (3.20)$$

$$B_c = \{\psi_{j_1, k_1}(x_1) \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1))\} (j_1, k_1) \in \mathbb{Z}^2, (j_2, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \quad (3.21)$$

3.2.2.5 Base de bandelettes

Au lieu de représenter la géométrie des images par des contours, qui sont bien souvent mal définis, celle-ci est définie par des flots géométriques. Les vecteurs d'un flot géométrique indiquent des directions où l'image a localement des variations régulières. Les bases orthonormées de bandelettes sont construites en divisant l'image en régions où ces flots restent parallèles.

Les bandelettes sont construites à partir d'ondelettes bidimensionnelles déformées le long du flot géométrique. Dans une région Ω , le flot géométrique est un champ de vecteur $\vec{\tau}(x_1, x_2)$ qui donne une direction dans laquelle la fonction f est régulière dans un voisinage.

Afin d'exploiter la régularité, les ondelettes bidimensionnelles sont déformées pour suivre le flot. L'image déformée $Wf(x_1, x_2) = Wf(x_1, x_2 + c(x_1))$ est régulière le long des lignes horizontales. On utilise alors pour la région déformée

$$\Omega' = W\Omega = \{ (x_1, x_2) : (x_1, x_2 + c(x_1)) \in \Omega \} \quad (3.22)$$

La base d'ondelettes bidimensionnelles de $L^2(\Omega')$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2) \\ \psi_{j,m_1}(x_1)\phi_{j,m_2}(x_2) \\ \psi_{j,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2) \end{array} \right\} j, m_1, m_2 \in I_{\Omega'} \quad (3.23)$$

L'opérateur de déformation W étant orthogonal, l'application de son inverse à ces ondelettes donne une base orthonormée de $L^2(\Omega)$ que l'on appelle base d'ondelettes déformées

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ \psi_{j,m_1}(x_1)\phi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ \psi_{j,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \end{array} \right\} j, m_1, m_2 \in I_{\Omega'} \quad (3.24)$$

Afin d'exploiter la régularité de la fonction f selon le flot, on remplace les ondelettes déformées de la forme

$$\{\phi_{j,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1))\}_{m_1, m_2} \quad (3.25)$$

par la famille de fonctions engendrant le même espace

$$\{\psi_{l,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1))\}_{l > j, m_1, m_2} \quad (3.26)$$

Cette opération est appelée bandéletisation et on vérifie qu'elle s'implémente par une simple transformée en ondelettes monodimensionnelles discrètes.

Les fonctions

$$\psi_{l,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \quad (3.27)$$

sont appelées bandelettes du fait de leur support allongés selon les lignes de flots. La base orthonormée de bandelettes du domaine Ω est donc définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{l,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ \psi_{j,m_1}(x_1)\phi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ \psi_{j,m_1}(x_1)\psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \end{array} \right\} j, l > j, m_1, m_2 \quad (3.28)$$

3.3 Seconde génération de bandelettes

La seconde génération de bandelettes développée par Peyré [47] ne suit pas le même raisonnement. Cette nouvelle transformée en bandelettes est construite au-dessus d'une transformée en ondelettes 2D.

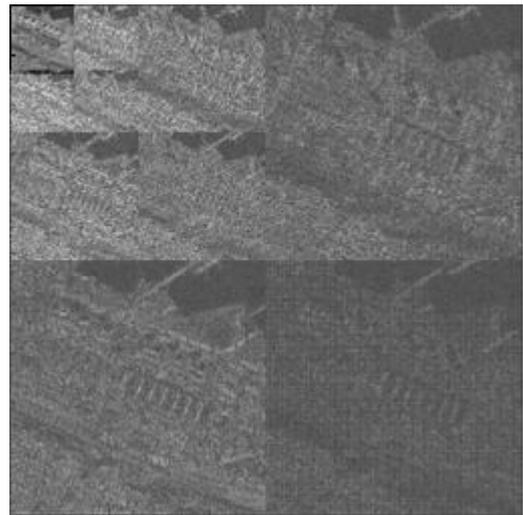
L'objectif de ces bandelettes est d'exploiter les régularités géométriques le long des contours dans les sous-bandes de la transformée en ondelettes. Pour cela, une approximation polynomiale est effectuée sur des bandes qui suivent la géométrie. Peyré étend la théorie des multi-ondelettes d'Alpert [48] au cas 2D : il utilise des polynômes déformés 2D à la place des polynômes 1D.

3.3.1 Corrélation des coefficients d'ondelettes

Après transformée en ondelettes, il est encore possible d'observer des dépendances entre les coefficients transformés. La figure 3.5(b), représente la transformée en ondelettes de l'image de la figure 3.5(a).



(a)



(b)

Figure.3.5 Image Arzew, Algérie (a) et la transformée en ondelettes de cette image (b).

Liu et Moulin [49] ont étudié les dépendances inter- et intra-échelles en mesurant l'information mutuelle entre deux ou plusieurs coefficients d'ondelettes. Ils ont signalé des dépendances statistiques entre coefficients d'ondelettes dans un voisinage très local. Dans [50] X. Delaunay, C. Thiebaut et V. Charvillat, ont étudié les dépendances statistiques entre coefficients d'ondelettes dans un voisinage très local, ils s'intéressaient aux coefficients de corrélation entre coefficients d'ondelettes non quantifiés.

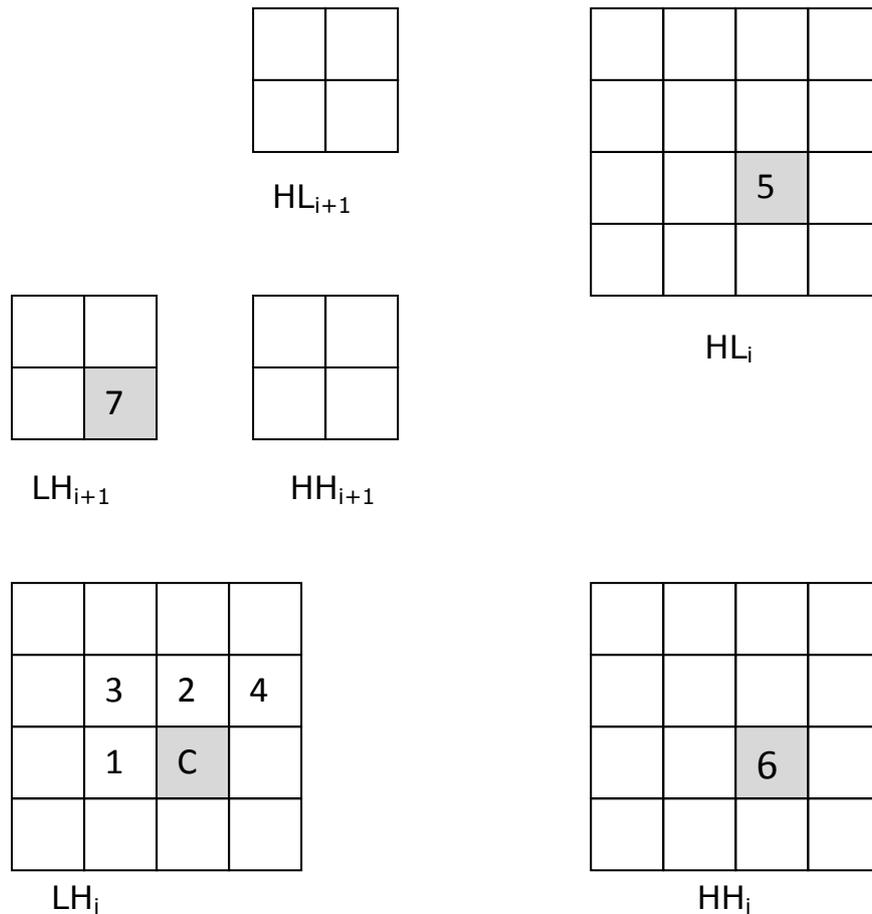


Figure. 3.6 – Définition d'un voisinage dans le domaine ondelettes.

On considère un coefficient d'ondelettes C , et on définit un ensemble de sept voisins dans la transformée en ondelettes. Ce voisinage est représenté sur la figure 3.6. Les voisins numérotés de 1 à 4 sont situés dans la même sous-bande que le coefficient C . Les voisins numérotés 5 et 6 sont les cousins du coefficient C dans les sous-bandes à la même résolution, et le voisin numéroté 7 est son parent dans la sous-bande à la résolution inférieure. Ce dernier n'est pas défini pour un coefficient dans les sous-bandes à la résolution 3. La figure 3.7 présente les coefficients de corrélation entre le coefficient C et chacun de ses sept voisins sur les transformées en ondelettes. Ces coefficients de corrélation ont été obtenus en considérant successivement l'ensemble des coefficients de chaque sous-bande comme les réalisations d'une variable aléatoire. On constate qu'il existe des coefficients de corrélation de plus de 0,4 en valeur absolue entre coefficients directement voisins (numérotés 1 et 2). Les coefficients de corrélation inter-sous-bandes et inter-échelles sont eux toujours inférieurs à 0,05 en valeur absolue. De plus, la corrélation entre les coefficients d'ondelettes diminue lorsque l'échelle de la transformée augmente.

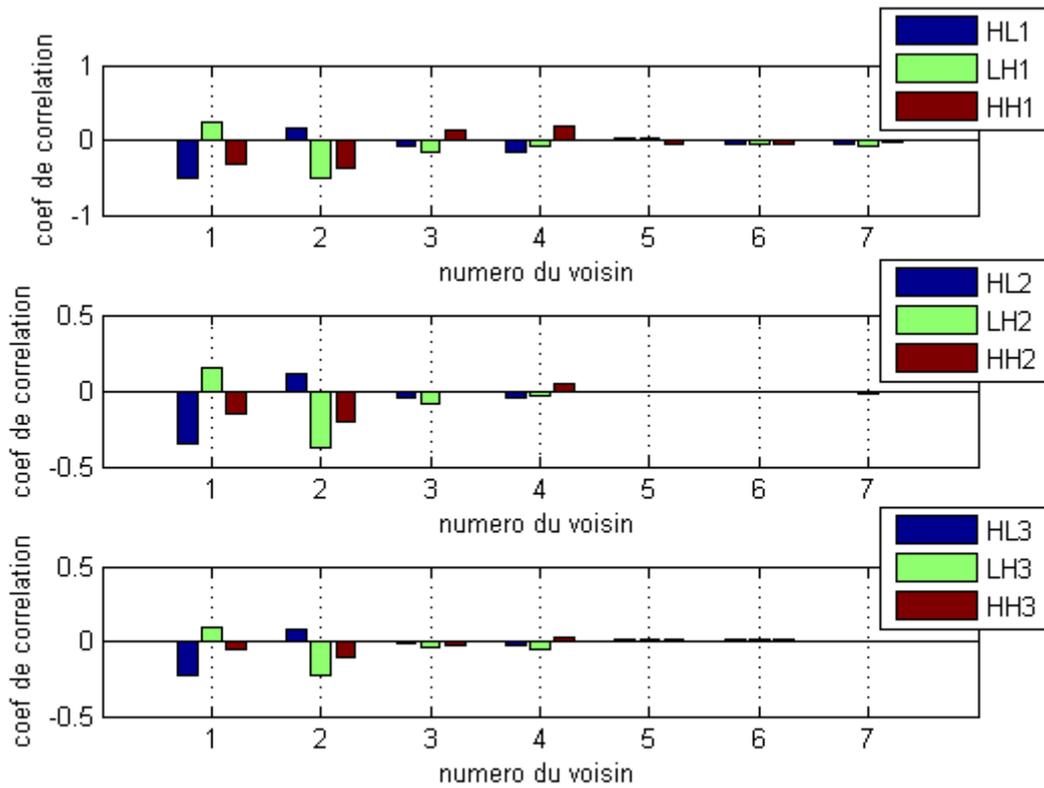


Figure. 3.7 Coefficients de corrélation entre coefficients d'ondelettes.

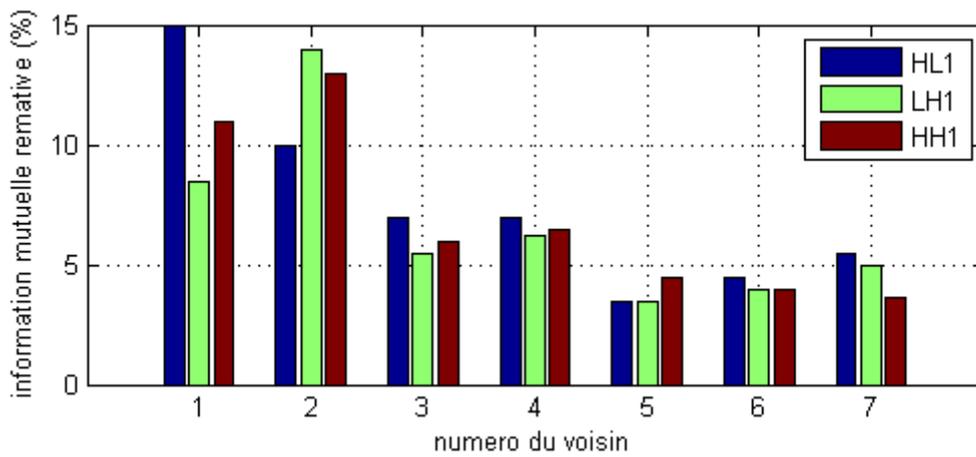


Fig. 3.8 Information mutuelle relative entre coefficients d'ondelettes

3.3.2 Corrélation géométrique

Dans la section précédente, nous avons mis en évidence l'existence de dépendances entre coefficients d'ondelettes voisins. Ces dépendances sont observables dans la transformée en ondelettes de n'importe quelle image naturelle et ont un caractère structural lié aux filtres d'ondelettes.

La transformée en ondelettes 2D séparable représente inefficacement les contours. En effet, cette transformée n'est capable d'exploiter les régularités géométriques que dans les directions des deux axes puisque les filtres sont appliqués horizontalement et verticalement, alors que des contours interviennent avec toutes les orientations. Des corrélations entre coefficients d'ondelettes peuvent exister le long d'un contour dans une image [51], elles ont un caractère exceptionnel puisqu'elles n'existent que dans certaines zones bien précises de la transformée en ondelettes. En étudiant les coefficients de corrélation de la transformée en ondelettes 2 à 2, on constate qu'il existe des corrélations supérieures à 0,7 même à longue distance.

L'objectif d'une transformée géométrique serait d'adapter l'orientation des éléments de base à la direction des contours. Cependant, il ne faut pas oublier le caractère exceptionnel de ces corrélations à longue distance qui ne peuvent être observées que le long des contours. Les dépendances statistiques observées dans la section précédente ont plus de poids. En effet, les contours ne représentent qu'une très petite partie des images naturelles. Les textures occupent une place beaucoup plus importante.

Discussion

La transformée en ondelettes possède des propriétés intéressantes du point de vue de la compression. En particulier, elle est utilisée dans les récents codeurs pour la compression d'images. Cependant, nous avons vu qu'il existe des dépendances statistiques entre coefficients d'ondelettes. Ces dépendances ont été décrites dans la littérature. Dans la section précédente et dans [50], nous avons mis en évidence des corrélations et de l'information mutuelle entre coefficients d'ondelettes voisins dans la transformée en ondelettes d'images satellite ainsi que des corrélations entre coefficients d'ondelettes dans le voisinage d'un contour.

Une approche différente consiste à utiliser une transformée dérivée des ondelettes afin d'éliminer ces dépendances dès l'étape de transformée. Dans la suite, nous avons choisi de nous intéresser à la transformée en bandelettes construite en dessus d'une transformée en ondelettes qui constitue un moyen peu complexe permettant une amélioration des résultats en compression par rapport à ceux obtenus avec la transformée en ondelettes.

3.3.3 Base de bandelettes orthogonales

Les bases de bandelettes orthogonales [47] sont introduites pour obtenir une approximation par seuillage dans une meilleure base.

3.3.3.1 Segmentation en quadtree

Une segmentation en quadtree de $[0,1]^2$ est obtenue par subdivisions successives du carré initial en quatre carrés de tailles égales. La figure 3.9(a) montre les étapes de subdivision menant à la construction d'un quadtree, tandis que la figure 3.9(b) illustre l'arbre quaternaire permettant de représenter cette subdivision.

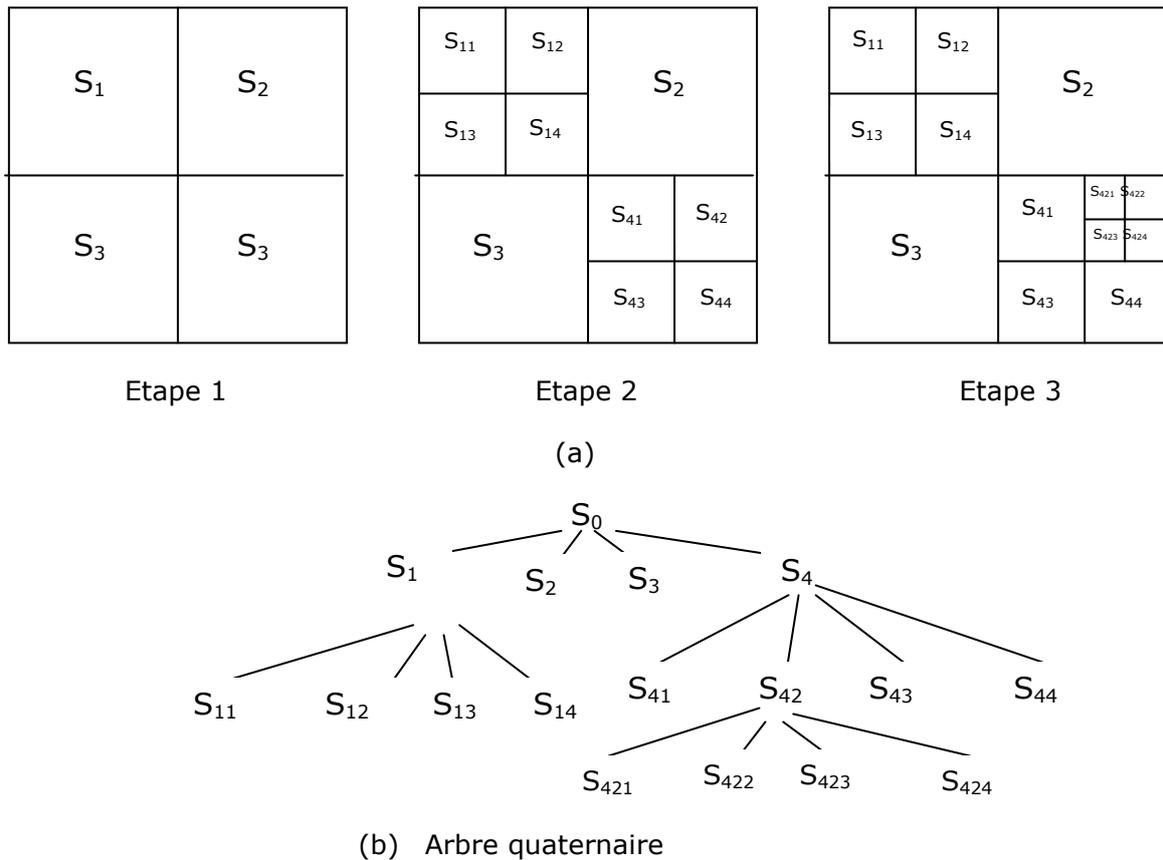


Figure. 3.9 Construction d'un quadtree par subdivisions successives.

Ceci mène à une segmentation de $[0,1]^2$ en des carrés de tailles dyadiques. On cherche une segmentation Q_j^k qui encapsule les courbes de singularité par un ensemble de carrés de taille b et qui remplissent les zones restantes par des grands carrés.

3.3.3.2 Construction d'une base de bandelettes

Soit $S \subset [0,1]^2$ un carré de largeur b en dessus d'une transformée en ondelettes à une échelle 2^j et orientation k contenant une courbe de singularité paramétrée horizontalement par γ , $\tilde{\gamma}_s$ une orientation approchée dans S , comme le montre la figure 3.10.

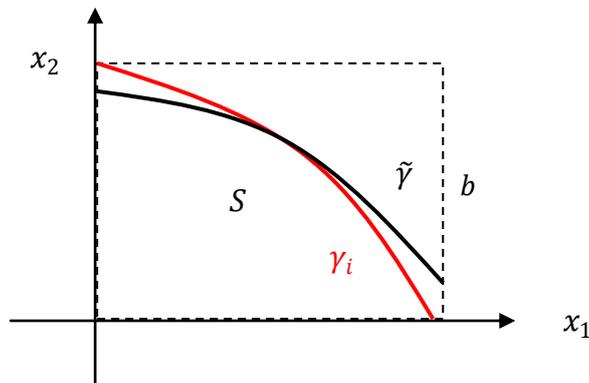


Figure 3.10 Courbe γ et son orientation approchée $\tilde{\gamma}$

On définit la base de bandelettes $\mathcal{B}(S, \tilde{\gamma})$ de $l^2(s)$ par

$$\mathcal{B}(S, \tilde{\gamma}) = \{ \Psi_{l_s} - 2j \log_2 b \leq l \leq 0 \} \text{ et } 0 \leq i \leq m_l - 1$$

Soit $\Gamma_j^k = (Q_j^k, \{ \tilde{\gamma}_s \})$, $S \in Q_j^k$ une segmentation en quadtree Q_j^k de $[0,1]^2$ à une échelle 2^j et orientation k , auquel on ajoute, pour chaque carré $S \in Q_j^k$ une géométrie approchée $\tilde{\gamma}$. Une base de bandelettes $\mathcal{B}(\Gamma_j^k)$ de l'espace entier de coefficients $l_j^2([0,1]^2)$ est définie par

$$\mathcal{B}(\Gamma_j^k) = \bigcup_{S \in Q_j^k} \mathcal{B}(S, \tilde{\gamma}_s) \quad (3.29)$$

Un vecteur de bandelettes $\Psi_\mu \in \mathcal{B}(\Gamma_j^k)$ est ainsi spécifié par $\mu = (j, k, S, \tilde{\gamma}_s, l, i)$ où

2^j est l'échelle de la transformée en ondelettes 2D et $k \in \{V, H, D\}$ est l'orientation. $S \in Q_j^k$ est un carré dyadique de largeur $b = L = 2^j$ où L est une puissance de 2. $\tilde{\gamma}_s$ est une géométrie approchée.

$l \in \{-2j \log_2 L, \dots, 0\}$ et $i \in \{1, \dots, 2^{-l}\}$ sont l'échelle et l'index d'un vecteur Ψ_{l_s} dans la base de bandelettes orthogonales $\mathcal{B}(S, \tilde{\gamma}_s)$.

Nous avons ainsi défini

$$\forall x_n \ S \in Q_j^k, \ \Psi_\mu[n] = \Psi_{li}[n] \quad \text{où} \quad \mathcal{B}(S, \tilde{\gamma}_s) = \{ \Psi_{li} \}_{l,i}$$

Ces vecteurs discrets $\Psi_\mu \in l^2([0,1]^2)$ peuvent être transformés en fonction $\tilde{\Psi}_\mu \in L^2([0,1]^2)$ en définissant

$$\tilde{\Psi}_\mu = \Psi_\mu[n] \psi_{j_n}^k \quad (3.30)$$

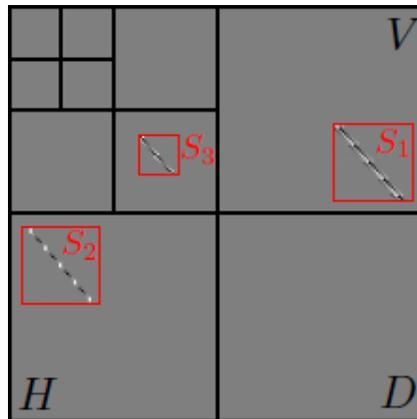
On peut ainsi transformer un ensemble $\{ \mathcal{B}(\Gamma_j^k) \} \ k, j \leq 0$ de bases de bandelettes discrètes en une unique base de fonctions de $L^2([0,1]^2)$ définie par

$$\mathcal{B}(\Gamma) = \bigcup_{k,j \leq 0} \{ \tilde{\Psi}_\mu \setminus \Psi_\mu \in \mathcal{B}(\Gamma_j^k) \} \quad \text{où} \quad \Gamma = \bigcup_{k,j \leq 0} \Gamma_j^k$$

La projection d'une fonction f sur les fonctions de $\mathcal{B}(\Gamma)$ est calculée en effectuant tout d'abord une transformée en ondelettes 2D, puis en projetant les coefficients en ondelettes f_j^k sur la base discrète 2D $\mathcal{B}(\Gamma_j^k)$.

La figure 3.11 montre plusieurs vecteurs discrets Ψ_{li} ainsi que les fonctions bandelettes interpolées $\tilde{\Psi}_{li}$. En haut de la figure, on peut voir la localisation des vecteurs discrets à l'intérieur de carrés dans le domaine des ondelettes à une échelle 2^j et orientation k . Ces fonctions sont aussi régulières que les fonctions d'ondelettes 2D utilisées. Bien que chaque quadtree segmente

l'espace des coefficients en carrés disjoints, la reconstruction après une décomposition en bandelettes souillée ne souffre pas d'effets de blocs.



Localisation en ondelettes

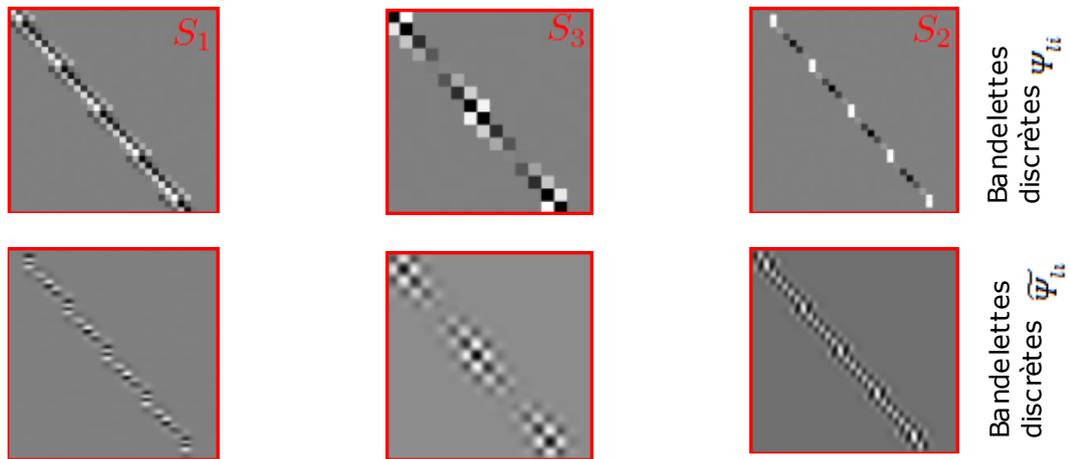


Figure 3.11 Dessin des bases de bandelettes pour plusieurs échelles 2^j

3.3.3.3 Construction du dictionnaire de bandelettes

Quantification de la géométrie

Soit T le seuil en dessous duquel les coefficients en bandelettes vont être rejetés pour l'approximation. Pour réduire le nombre de bases de bandelettes potentielles, on ne va considérer qu'un petit nombre de géométries quantifiées à l'intérieur de chaque carré S du quadtree. De façon plus précise, à partir d'une paramétrisation $\tilde{\gamma}$ on définit une géométrie quantifiée $\tilde{\gamma}_{T^2}$ avec une précision de T^2

$$\tilde{\gamma}_{T^2} = \sum_{i=0}^{p-1} Q_{T^2}(\langle \gamma, \theta_i \rangle) \theta_i \quad (3.31)$$

Où $\{\theta_i\}$ est la base de polynômes de Legendre. Nous avons utilisé le quantificateur

$$Q_{\tau}(x) = q\tau \quad \text{si} \quad \left(q - \frac{1}{2}\right)\tau \leq x \leq \left(q + \frac{1}{2}\right)\tau \quad (3.32)$$

Pour un pas de quantification $\tau = T^2$, on obtient un nombre fini de géométries \mathcal{G}_{T^2}

Construction du dictionnaire

Soit 2^j une échelle et k une orientation fixée. Le dictionnaire \mathcal{D}_j^k de bandelettes discrètes est composé des bases $\mathcal{B}(\Gamma_j^k)$ obtenues à l'aide de toutes les segmentations possibles en quadtree Q_j^k et de toutes les géométries approchées $\tilde{\gamma}_S$ à l'intérieur des carrés de la segmentation. En forçant les géométries $\tilde{\gamma}_S$ à appartenir à $\mathcal{G}_{T^2}(s)$ on définit un dictionnaire fini \mathcal{D}_{j,T^2}^k de bases de bandelettes discrètes

$$\mathcal{D}_{j,T^2}^k = \{\mathcal{B}(\Gamma_j^k) \in \mathcal{D}_j^k \setminus \Gamma_j^k = (Q_j^k, \{\tilde{\gamma}_S\}) \quad \text{et} \quad \forall S \in Q_j^k, \tilde{\gamma}_S \in \mathcal{G}_{T^2}(s)\}$$

On a vu précédemment qu'on peut transformer un ensemble $\{\mathcal{B}(\Gamma_j^k)\} k, j \leq 0$ de bases de bandelettes discrètes en une unique base de bandelettes de $L^2([0,1]^2)$. L'union de toutes ces bases forme un dictionnaire de base de $L^2([0,1]^2)$

3.3.3.4 Algorithme de meilleure base de bandelettes

On va maintenant décrire un algorithme rapide [47], [52] pour trouver une base de bandelettes qui mène à meilleur résultat d'approximation.

$$\text{Soit} \quad \mathcal{B}(\Gamma) = \{\tilde{\Psi}_\mu\}_\mu \in \mathcal{D}_{T^2} \quad \text{où} \quad \Gamma = \bigcup_{k,j} \Gamma_j^k \quad (3.33)$$

une base de bandelettes, où $\Gamma_j^k = (Q_j^k, \{\tilde{\gamma}_S\}_S)$ sont les paramètres qui décrivent cette base à chaque échelle. On définit

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{B}(\Gamma), T) = \sum_{|\langle \tilde{\Psi}_\mu, f \rangle| < T} |\langle \tilde{\Psi}_\mu, f \rangle|^2 + T^2 M \quad (3.34)$$

$$\text{Avec } M = M_B + M_S + M_G \quad \text{où} \quad M_B = \text{Card} \{\mu \mid |\langle \tilde{\Psi}_\mu, f \rangle| \geq T\}$$

est le nombre de coefficients de bandelettes au-dessus de T , M_S est le nombre de paramètres de segmentation nécessaire pour la description des quadtrees $\{Q_j^k\} j, k$ et M_G est le nombre de paramètres géométriques nécessaire pour décrire les géométries approchées $\{\tilde{\gamma}_S\}_S$.

Détermination de la base qui minimise le lagrangien

Soit $T \geq 0$ et soit f une fonction ayant une régularité géométrique C^α .

Soit $\mathcal{B}^*(\Gamma)$ la base définie par

$$\mathcal{B}^*(\Gamma) = \min(\mathcal{L}(f, \mathcal{B}(\Gamma), T))_{\mathcal{B}(\Gamma) \in \mathcal{D}_{T^2}}$$

Alors l'approximation f_M de f par seuillage à T dans la base $\mathcal{B}^*(\Gamma)$ satisfait

$$\|f - f_M\|_{L^2}^2 \leq CM^{-\alpha} \quad (3.35)$$

Où $M = M_B + M_S + M_G$ inclut le nombre M_B de coefficients en bandelettes au-dessus de T , le nombre M_S de coefficients nécessaire pour décrire les quadrees, le nombre M_G de coefficients nécessaire pour spécifier les géométries à l'intérieur de chaque quadree et C est une constante qui ne dépend que de f .

3.3.3.5 Compression dans une meilleure base de bandelettes

Soit T un pas de quantification fourni par l'utilisateur. Plus T est élevé, plus le nombre de coefficients de bandelettes mis à zéro lors de l'approximation va être grand et plus la compression sera agressive. Pour compresser une fonction f dans une base de bandelettes $\mathcal{B}(\Gamma) = \{\tilde{\Psi}_\mu\}_\mu \in \mathcal{D}_{T^2}$, on quantifie, on code ses coefficients transformés et on code également les paramètres géométriques $\Gamma = \{\Gamma_j^k\}$ qui décrivent la base où $\Gamma_j^k = (Q_j^k, \{\tilde{\gamma}_S\})$. Ceci donne lieu à une fonction reconstruite

$$f_R = \sum_{\mu} Q_T(\langle f, \tilde{\Psi}_\mu \rangle) \tilde{\Psi}_\mu \quad (3.36)$$

où le quantificateur est défini à l'équation 3.32 et

$$R = R_B + R_S + R_G = \sum_{j,k} (R_{B_j^k} + R_{S_j^k} + R_{G_j^k}) \quad (3.37)$$

est le nombre de bits nécessaire pour le codage de f_R ce qui inclut $R_{B_j^k}$ le nombre de bits nécessaire pour coder les coefficients de bandelettes

$$\langle f, \tilde{\Psi}_\mu \rangle = \langle f_j^k, \tilde{\Psi}_\mu \rangle$$

Pour une seule échelle 2^j et une orientation k .

$R_{S_j^k}$ est le nombre de bits nécessaire pour coder la segmentation en quadree Q_j^k .

$R_{G_j^k}$ est le nombre de bits nécessaire pour coder la géométrie approchée quantifiée $\tilde{\gamma}_S$ à l'intérieur de chaque carré S d'un quadree Q_j^k .

3.3.4 Algorithme de calcul

Dans cette section, nous décrivons l'algorithme de transformée en bandelettes rapide d'une image discrétisée [47].

3.3.4.1 Transformée en bandelettes discrète

Image discrétisée

Une image discrétisée \bar{f} de $N * N$ pixels est obtenue en projetant une fonction $f \in L^2([0,1]^2)$ sur un ensemble de fonctions d'échelles $\{\Phi_{Jn}\}_n$ à une résolution $2^J = N^{-1}$

$$\forall n \in \{0, \dots, N-1\}^2, \quad \bar{f}[n] = \langle f, \Phi_{Jn} \rangle \quad (3.38)$$

Où
$$\Phi_{Jn}(t) = 2^{-J} \Phi(2^{-J}t - n) \quad (3.39)$$

Fonction d'échelles en ondelettes

Les espaces intermédiaires $V_j \subset L^2([0,1]^2)$ peuvent se décomposer comme des sommes d'espace de détails en ondelettes

$$V_j = \bigoplus_{k,p < j} W_j^k \quad \text{et} \quad V_j = \text{vect} \{ \varphi_{jn} \mid n \in \{0, \dots, 2^{-j} - 1\}^2 \}$$

Les fonctions d'ondelettes et les fonctions d'échelles peuvent s'écrire à l'aide d'une cascade de filtrage passe-bas $\{g^k[n]\}_n$ et passe-haut $\{h^k[n]\}_n$

3.3.4.2 bases de bandelettes discrètes

Nous avons décrit à l'équation (3.30) comment transformer des vecteurs de bandelettes discrets $\psi_\mu \mathcal{B}(\Gamma_j^k)$ de l_j^2 en un ensemble de fonctions $\tilde{\psi}_\mu$. Pour $j > J$, on peut aussi transformer ces vecteurs en des vecteurs de l'espace de pixels de l'image l_j^2 comme suit

$$\bar{\mathcal{B}}(\Gamma_j^k) = \{ \bar{\psi}_\mu \}_{\mu} \quad \text{où} \quad \bar{\psi}_\mu = \sum_{(2^j n) \in [0,1]^2} \Psi_\mu[n] \bar{\psi}_{jn}^k$$

Une base discrète de bandelettes est définie par

$$\bar{\mathcal{B}}(\Gamma) = \cup_{k,j > J} \bar{\mathcal{B}}(\Gamma_j^k) \quad \text{où} \quad \Gamma = \cup_{k,j > J} \Gamma_j^k$$

L'ensemble de toutes les bases possibles de bandelettes discrètes $\bar{\mathcal{B}}(\Gamma)$ pour tous les ensembles de bases $\bar{\mathcal{B}}(\Gamma_j^k) \in \mathcal{D}_{j,T^2}^k, j > J$ forme le dictionnaire de bandelettes discrètes $\bar{\mathcal{D}}_{T^2}$.

3.3.4.3 Transformée en bandelettes discrètes

Le calcul d'une transformée en bandelettes discrètes d'une image \bar{f} correspond à la projection de cette image sur les vecteurs d'une base $\bar{\mathcal{B}}(\Gamma)$. Cette transformée est calculée à l'aide tout d'abord d'une transformée en ondelettes discrète rapide de l'image $\bar{f} \in l_j^2$ puis d'une transformée en bandelettes discrète de l'ensemble de coefficients d'ondelettes \bar{f}_j^k pour chaque échelle $2^j > 2^J$ et orientation k

3.3.4.4 Algorithme rapide

Nous décrivons maintenant l'algorithme de transformée en bandelettes rapide direct. Ceci inclut à la fois le calcul de la meilleure base de bandelettes $\mathcal{B}^*(\Gamma)$ ainsi que le calcul de la décomposition de \bar{f} dans cette base. L'algorithme inverse en découle immédiatement, puisqu'il ne nécessite pas la recherche de la meilleure base et qu'il consiste à inverser les transformées en ondelettes ainsi que les transformées de Haar sur les carrés des quadrees.

(1) Paramètres de l'algorithme

L'utilisateur fournit une image discrétisée \bar{f} de taille de $N * N$ pixels, et un seuil T qui contrôle le taux de compression de l'algorithme. On note $2^J = N^{-1}$

(2) Transformée en ondelettes 2D

On calcule la transformée en ondelettes discrète 2D de l'image d'origine \bar{f} . Ceci produit un ensemble de vecteurs de coefficients $\{\bar{f}_j^k\}_{k,j>J}$

Les vecteurs \bar{f}_j^k pour chaque échelle 2^j et orientation $k \in \{V, H, D\}$ peuvent être stockés dans une unique image ayant la même taille que l'image d'origine \bar{f} . Les étapes suivantes (3)-(7) implémentent la bandéletisation, qui est répétée pour chaque échelle et orientation.

(3) Sélection de chaque carré dyadique

Un carré dyadique est par définition un carré obtenu en subdivisant de façon récursive le carré $[0,1]^2$ en quatre carrés de même taille. Pour chaque carré S on regroupe les coefficients en ondelettes $\{\bar{f}_j^k[n]\}_{2^j n \in S}$ dans un vecteur noté f_S . Les étapes suivantes (4)-(7) sont répétées pour chaque carré dyadique S à chaque échelle 2^j et orientation k d'une transformée en ondelettes.

(4) Quantification de la géométrie

Nous devons maintenant trouver la meilleure géométrie approchée quantifiée $\tilde{\gamma}_S$ à l'intérieur d'un carré S . Nous devons donc tester toutes les bases de bandelettes $\mathcal{B}(S, \tilde{\gamma}_m^\Omega)$ de $l_j^2(S)$ pour les géométries

$$\tilde{\gamma}_m^\Omega = \sum_{i=0}^{p-1} (m_i T^2) \theta_i \quad \text{où} \quad |m_i| \leq A_\theta T^{-2} \quad \text{et} \quad \Omega \in \{V, H\}$$

Pour chaque ensemble possible de coefficients $m = \{m_i\}_i$ et orientation Ω . Nous ajoutons aussi à ces géométries le symbole spécial $\tilde{\gamma} = []$ dont la transformée correspondante est l'identité. Une géométrie horizontale $\tilde{\gamma}_m^H$ (respectivement une géométrie verticale $\tilde{\gamma}_m^V$) paramétrise une courbe approchée horizontale $(x, \tilde{\gamma}_m^H(x))$ (respectivement une courbe approchée verticale $(\tilde{\gamma}_m^V(y), y)$).

L'étape suivante (5) est répétée pour chaque géométrie potentielle $\tilde{\gamma}_m^\Omega$.

(5) Calcul de la transformée de Haar

(a) Réordonnement des points de la grille :

On sélectionne comme montré à la figure 3.12 chaque point $x_n = 2^j$, $n \in S$ sur la grille d'échantillonnage des coefficients f_S et on le projette orthogonalement sur la droite d^\perp perpendiculaire à d . Ceci donne un nouveau point \tilde{x}_n repéré par son abscisse sur la droite d^\perp . On peut ensuite classer les abscisses de tous les points et la valeur de $\varphi_d[n]$ est l'ordinal de \tilde{x}_n dans ce classement.

$$f_S \rightarrow \tilde{f}_S \quad \text{où} \quad \forall k \in \{0, \dots, N_S - 1\}, \tilde{f}_S[k] = f_S[(\varphi_d)^{-1}[k]]$$

La bijection

$$\varphi_d : \{n \setminus 2^j n \in S\} \mapsto \{0, \dots, N_S - 1\}^2$$

correspond à une numérotation des points à l'intérieur de S , c'est-à-dire à un réordonnement 1D de ces points le long d'un axe.

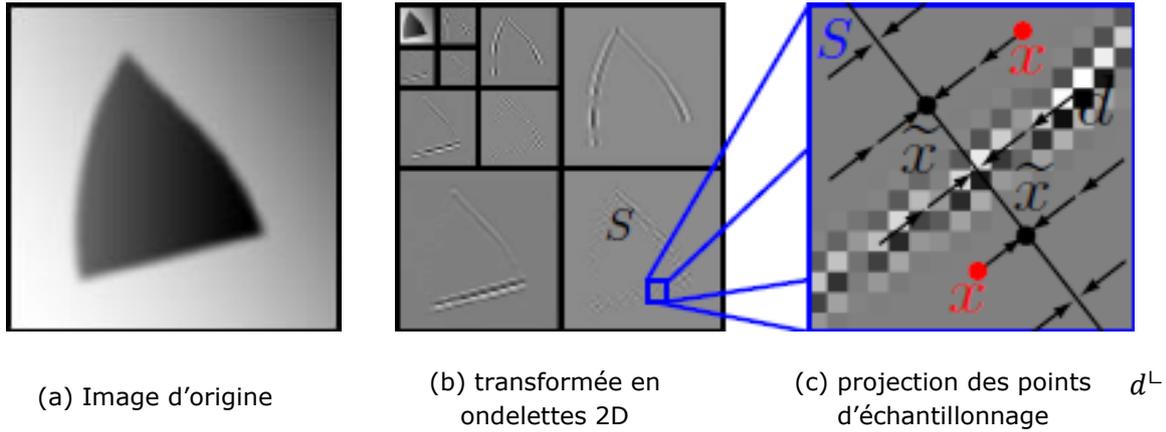


Figure 3.12 Réordonnement discret des points d'échantillonnage.

(b) Transformée de Haar 1D

De façon intuitive, si la direction d suit bien une courbe de discontinuité passant à travers S (voir la figure 3.12(c)), alors ce réordonnement sera capable de transférer la régularité directionnelle 2D de f_S dans une régularité isotrope 1D de \tilde{f}_S . C'est pour cela qu'une transformée de Haar 1D est efficace pour capturer cette régularité.

Pour une géométrie donnée $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_m^\Omega$, nous calculons l'ensemble des produits scalaires

$$A_{\tilde{\gamma}}(\tilde{f}_S)[l, i] = \langle \tilde{f}_S, \Psi_{li} \rangle \quad \text{où} \quad \mathcal{B}(S, \tilde{\gamma}) = \{\Psi_{li}\}_{li}$$

$A_{\tilde{\gamma}}(\tilde{f}_S)$ est la transformée de Haar d'un vecteur de coefficients d'ondelettes projeté sur l'axe d^L .

(6) Sélection de la meilleure géométrie

Pour un seuil donné T nous devons choisir la meilleure géométrie $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_m^\Omega$ qui minimise le Lagrangien

$$\mathcal{L}(\tilde{f}_S, \mathcal{B}(S, \tilde{\gamma}), T) = \sum_{(l,i) \in J_T} |A_{\tilde{\gamma}}(\tilde{f}_S)[l, i]|^2 + (\text{Card}(J_T) + M_G) T^2 \quad (3.42)$$

Où

$$J_T = \{(l, i) \mid |A_{\tilde{\gamma}}(\tilde{f}_S)[l, i]| > T\}$$

Et

$$\begin{cases} M_G = 1 & \text{si } \tilde{\gamma} = [] \\ M_G = p + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut ainsi définir la géométrie sélectionnée pour le carré S par

$$\tilde{\gamma}_S = \underset{\tilde{\gamma}_m^\Omega}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(\tilde{f}_S, \mathcal{B}(S, \tilde{\gamma}), T) \quad (3.43)$$

(7) Construction du quadtree

Une fois que l'on a calculé les coefficients transformés $A_{\tilde{\gamma}_S}(\tilde{f}_S)$ pour chaque carré dyadique, on doit choisir la meilleure segmentation en carré. Ceci revient à conserver uniquement un sous-ensemble

de carrés dyadiques de façon à obtenir une segmentation en quadtree. Une telle segmentation peut s'obtenir à partir de la segmentation complète en petits carrés, suivi d'une phase de regroupement par quatre des carrés. Grâce à l'additivité du Lagrangien et à la structure hiérarchique du quadtree, la minimisation de \mathcal{L} s'effectue à l'aide d'un algorithme rapide parcourant l'arbre de bas en haut. Cet algorithme a été introduit par Donoho dans [53]. A l'étape précédente (6), nous avons enregistré, pour chaque carré dyadique S la valeur $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(\tilde{f}_S, \mathcal{B}(S, \tilde{\gamma}), T)$ du Lagrangien restreint à S , de même que la meilleure géométrie quantifiée $\tilde{\gamma}_S$. Alors, pour chaque échelle 2^j et orientation k , on calcule la structure de quadtree à l'aide de l'algorithme suivant

(a) Initialisation du quadtree

Chaque carré S de taille $b = 2^j$ est une feuille. Enregistrer les géométries optimales $\tilde{\gamma}_S$ et initialiser \mathcal{L}_0 , le Lagrangien cumulatif du sous-arbre à $\mathcal{L}_0(S) = \mathcal{L}(S)$

(b) Commencer avec des carrés S de taille $2 * 2^j$

(c) Pour chaque carré S , on note (S_1, S_2, S_3, S_4) ses quatre sous-carrés et

$$\mathcal{L}'(S) = \mathcal{L}_0(S_1) + \mathcal{L}_0(S_2) + \mathcal{L}_0(S_3) + \mathcal{L}_0(S_4) + T^2 \quad (3.44)$$

Le Lagrangien du sous-arbre (le terme additionnel T^2 est du au cout d'un coefficient pour la subdivision). Les sous-carrés doivent être rassemblés si $\mathcal{L}(S) < \mathcal{L}'(S)$. Si c'est le cas, déclarer S comme une feuille, enregistrer la géométrie optimale $\tilde{\gamma}_S$. Mettre à jour

$$\mathcal{L}_0(S) = \min(\mathcal{L}(S), \mathcal{L}'(S))$$

(d) Tant que $b < 1$, faire $b \leftarrow 2 * b$ et répéter l'étape précédente.

3.3.5 Transformée en bandelettes par groupement

La transformée en bandelettes par groupements est une seconde version de la transformée en bandelettes utilisée pour la compression [47] et [51]. Dans cette version, les sous-bandes de la transformée en ondelettes sont segmentées en blocs de taille $4*4$ ce qui permet d'économiser le calcul et la transmission du quadtree. Un dictionnaire de bases orthonormales est défini. Chaque bloc de coefficients d'ondelettes est alors transformé dans chacune des bases de ce dictionnaire. Pour un bloc de coefficients d'ondelettes, la meilleure représentation de ce bloc en termes de débit-distorsion est retenue pour la compression. C'est à partir de cette transformée en bandelettes par groupements que les post-transformées étudiées dans ce travail sont construites. La transformée en bandelettes par groupements est expliquée en détails dans la section suivante.

3.3.5.1 La géométrie de 16 coefficients d'ondelettes

La géométrie des images naturelles est complexe. La topologie de l'ensemble des courbes est souvent compliquée avec de très nombreuses jonctions en T, croisements et enchevêtrements. Comme on peut le voir à la figure 3.13, il y a beaucoup d'effets chaotiques dus aux interactions entre la grille d'échantillonnage et une géométrie courbe et variable.

Pour toutes ces raisons, il est rare de pouvoir exploiter, dans une image typique, une régularité géométrique sur une longueur de plus d'une dizaine de pixels. A l'échelle la plus fine de la transformée en ondelettes, ceci se traduit par des corrélations sur environ 4 coefficients d'ondelettes. Etant donné le coût du codage d'une géométrie, il n'est de plus pas raisonnable de pouvoir gagner en compression en considérant des interactions de moins de 3 coefficients. Ces constatations ainsi que la pratique empirique de la transformée en bandelettes nous ont amenés à ne pas utiliser de quadtree, en se restreignant à des carrés S de côté fixe, c'est à dire des paquets de 4×4 coefficients d'ondelettes.

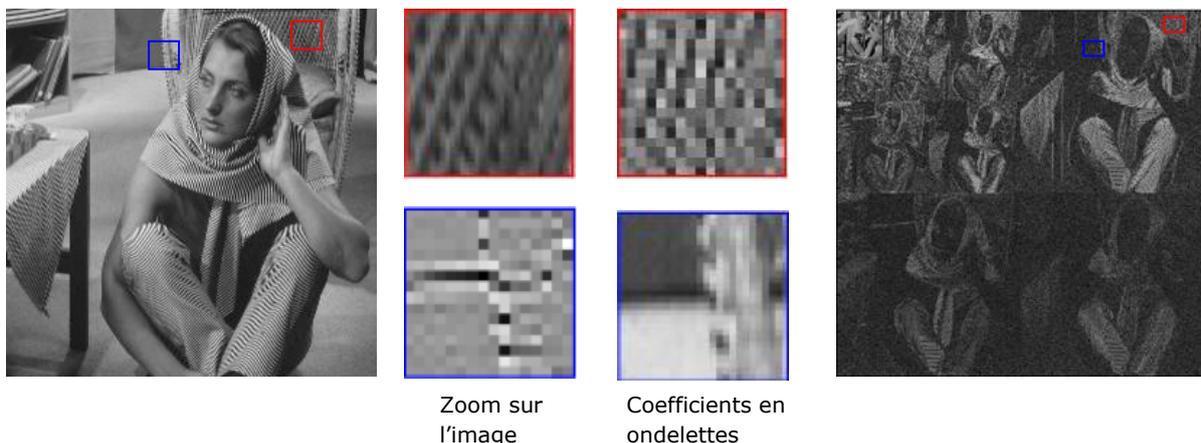


Figure 3.13 Configurations complexes de coefficients d'ondelettes.

Après la transformée en ondelettes, les sous-bandes sont segmentées en blocs de 4×4 coefficients, le fait de se restreindre à des groupes de telle taille comporte plusieurs avantages :

Comme on l'a déjà dit, ils contiennent les corrélations typiques que l'on trouve dans les images naturelles. Le fait de ne pas avoir de quadtree simplifie la procédure de codage. Enfin, en se concentrant sur seulement 16 coefficients, on peut mieux comprendre la nature des redondances des coefficients d'ondelettes. On va ainsi construire une transformée en bandelettes plus adaptée.

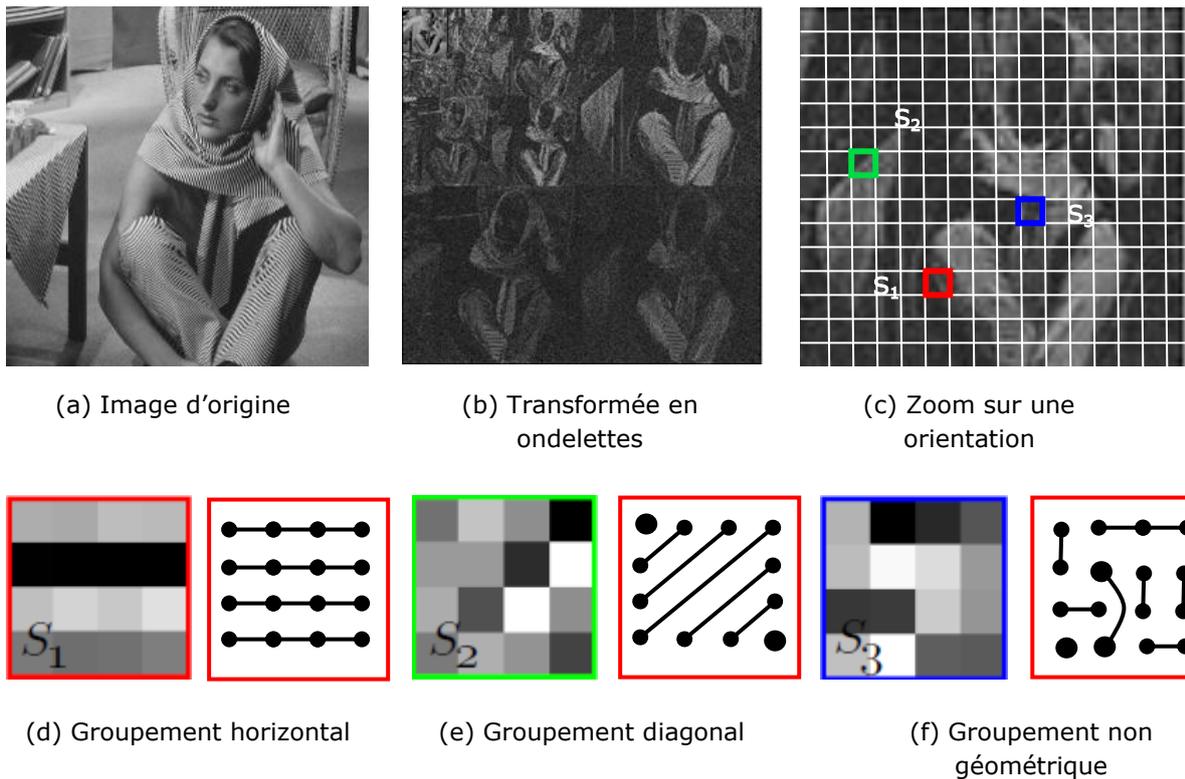


Figure 3.14 Zoom sur des carrés de côté 4*4 dans une transformée en ondelettes.

La figure 3.14 montre trois paquets typiques de 16 coefficients d'ondelettes. A chaque fois, on a effectué un regroupement adapté des coefficients.

Le carré S_1 correspond à une régularité purement horizontale. On a donc groupé les coefficients suivant les 4 lignes.

Le carré S_2 correspond à une régularité diagonale. On a donc groupé les coefficients selon les 7 lignes diagonales.

Le carré S_3 correspond à une géométrie chaotique (près d'une jonction). Les groupements correspondant sont donc très complexes.

Les groupements ont été effectués de façon manuelle pour garantir que les coefficients en ondelettes sont quasi-constants dans chaque groupe.

Plutôt que d'utiliser une transformée en bandelettes orthogonales classique, qui va transformer tous les coefficients d'un seul coup, une meilleure stratégie consiste à transformer chaque groupe de coefficients de manière indépendante. Ainsi, l'information n'est pas diffusée à travers les groupes, ce qui garantit une meilleure compression.

3.3.5.2 Construction de bases de bandelettes directionnelles [51]

La projection des coefficients d'ondelettes de chaque bloc dans les bases de bandelettes discrètes produit les coefficients de bandelettes, la reconstruction des coefficients d'ondelettes à partir des coefficients de bandelettes quantifiés est une approximation polynomiale des coefficients d'ondelettes originaux. Les pixels sont liés suivant les directions du schéma de la figure 3.15 et définissent des groupes, on obtient ainsi douze bases directionnelles associées à grille de 4*4 pixels. Les 12 configurations de groupement suivant ces directions et telles que définies par Peyré dans [47] sont représentées sur la figure 3.15. Si l'on suit strictement les directions définies dans le schéma de la figure 3.16, certains pixels de la grille 4*4 se retrouvent isolés.

Configuration	#1	#2	#3	#4	#5	#6
Angle (rad)	$\text{atan}(1/3)$	$\text{atan}(1/2)$	$\pi/4$	$\text{atan}(2)$	$\text{atan}(2)$	$\pi/2$
Angle (degré)	18.4	26.6	45	63.4	71.6	90

Configuration	#7	#8	#9	#10	#11	#12
Angle (rad)	$-\text{atan}(3)$	$-\text{atan}(2)$	$-\pi/4$	$-\text{atan}(1/2)$	$-\text{atan}(1/3)$	0
Angle (degré)	-71.6	-36.4	-45	-26.6	-18.4	0

Tableau 3.1 Angles de différentes directions des groupes.

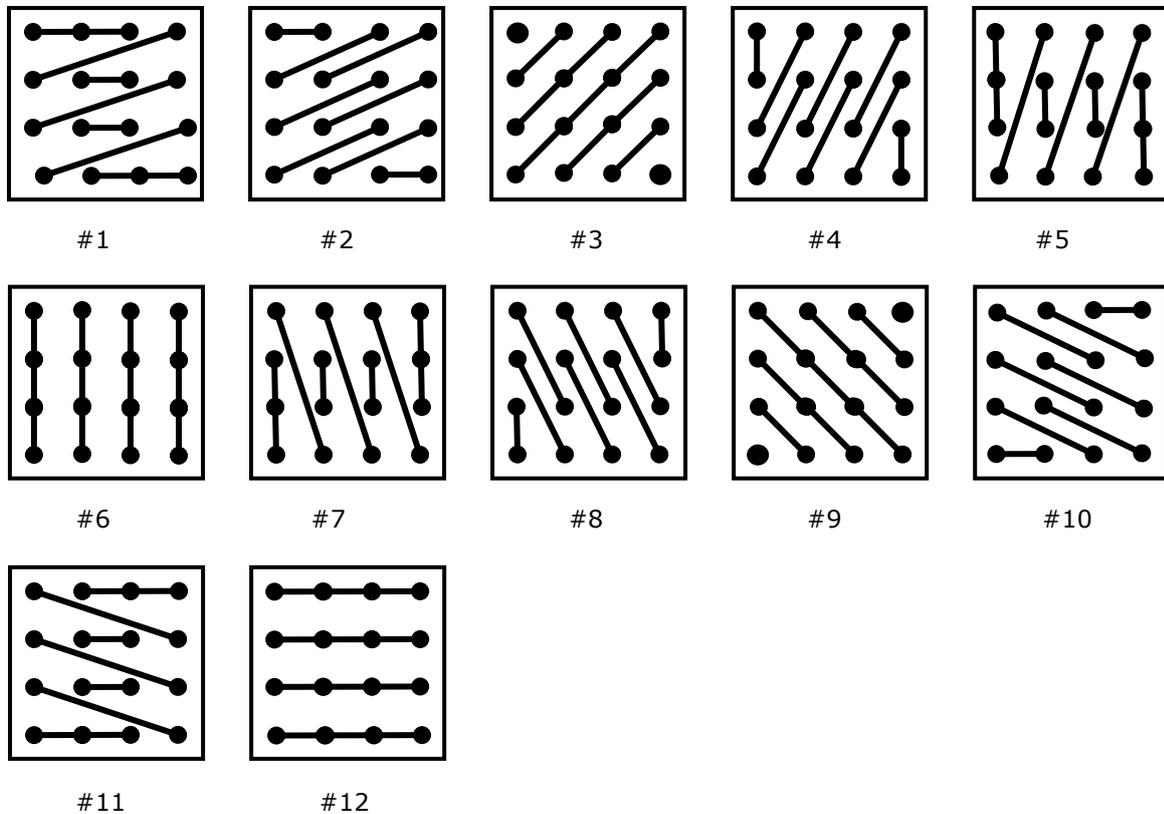


Figure 3.15 12 configurations des bases de bandelettes directionnelles.

On associe un ensemble de groupes pour une configuration donnée, noté G et constitué de N_G groupes: $G = \{G_i\}_{i=1}^{N_G}$. Si on note G_i un groupe de cet ensemble contenant g_i pixels. Les bases directionnelles sont obtenues à partir des bases de polynômes de Legendre. Quatre bases orthonormales de polynômes discrets sont définies du fait que les groupes peuvent contenir de un à quatre pixels, comme l'illustre la figure 3.16.

La base de Haar est définie dans le cas où $g_i = 2$. Dans ce cas obtient la moyenne et à la différence des pixels, les deux vecteurs normalisés de cette base sont $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ et $[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$. Pour les autres cas où $g_i > 2$ l'interprétation est très difficile.

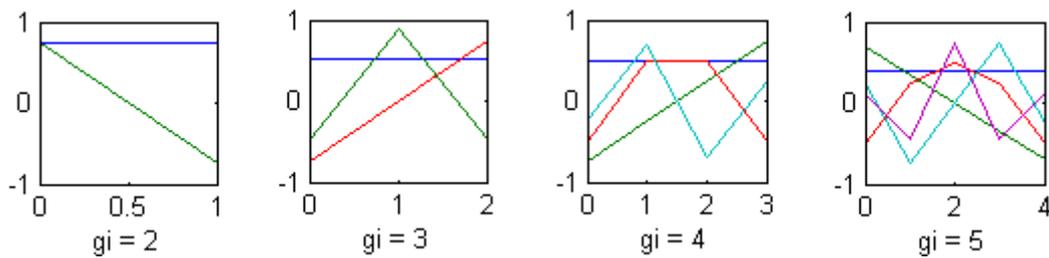


Figure 3.16 Bases de polynômes discrets de Legendre

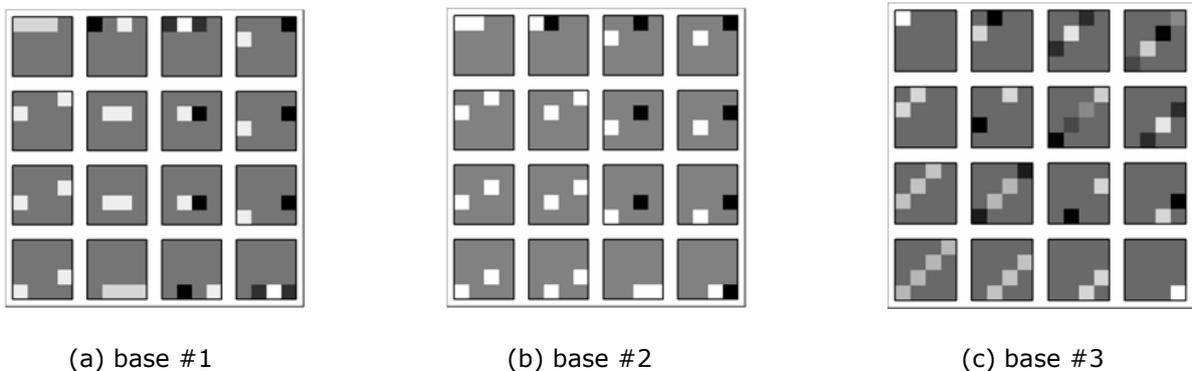


Figure 3.17 base de bandelettes directionnelles sur \mathbb{R}^{16}

Les différentes bases de $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ou \mathbb{R}^4 sont combinées dans l'espace \mathbb{R}^{16} en suivant les sous-espaces de la figure 3.18, on obtient ainsi les bases directionnelles de \mathbb{R}^{16} . La figure 3.17 représente les bases des directions #1, #2 et #3. On utilise 3 bases complémentaires pour compléter les 12 bases directionnelles, la base de DCT et deux bases de Haar notées H0 et H1. Ces 3 bases complémentaires permettent de prendre en compte des configurations qui ne sont pas décrites par les bases directionnelles et doivent permettre de mieux décrire les textures informes. Elles sont représentées sur la figure 3.18.

Peyré construit un dictionnaire de bases de bandelettes composé de 15 bases au total: 12 bases directionnelles et 3 bases complémentaires à savoir deux bases de Haar et une base DCT. On intègre à ce dictionnaire la base canonique de \mathbb{R}^{16} dont la transformée dans cette dernière est l'identité. La transformée correspondante a cette base est l'identité, elle affectée par l'indice $b = 0$.

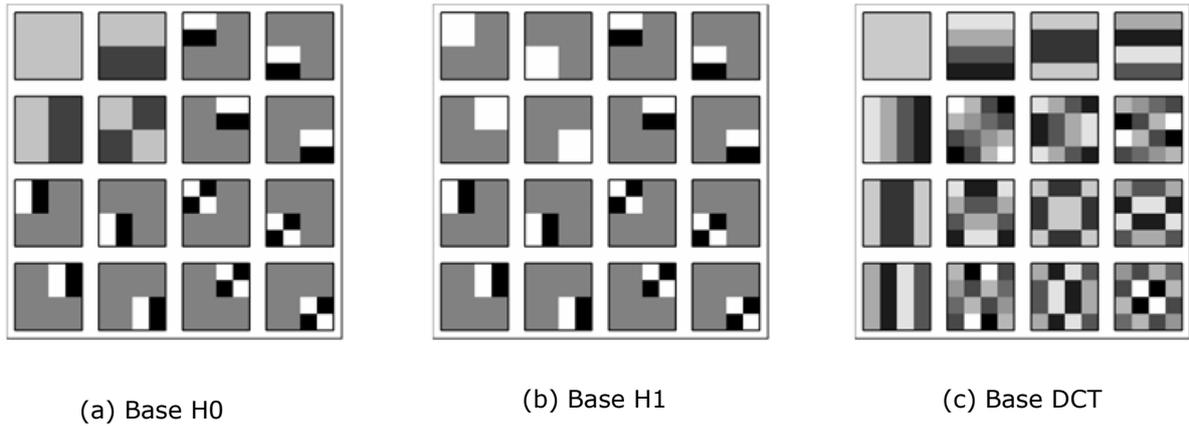


Figure 3.18 Les deux bases de Haar et la base DCT

3.3.5.3 Schéma de compression par transformée en bandelettes par bloc

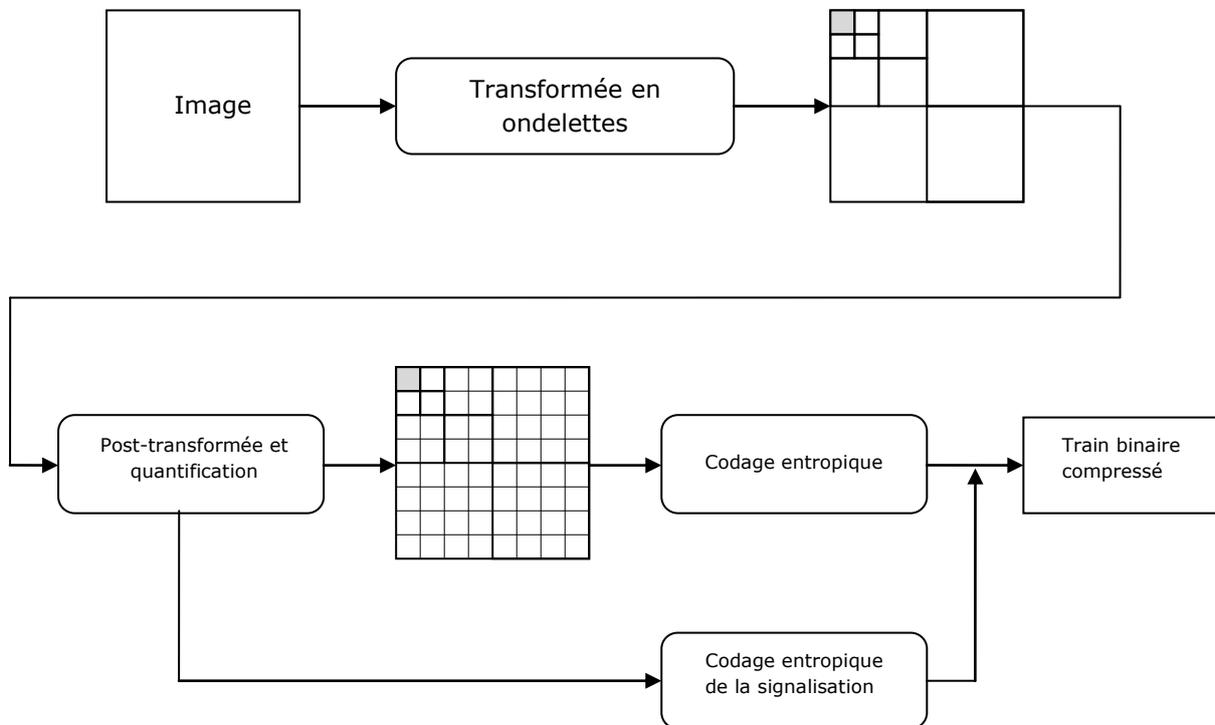


Figure 3.19 Schéma général de compression par transformée en bandelettes par bloc.

La figure 3.24 illustre le schéma de la compression en bandelettes. Dans un premier temps, on effectue la transformée en ondelettes de l'image. Les sous-bandes de la transformée en ondelettes sont ensuite segmentées en blocs de 4×4 coefficients. Les blocs ainsi obtenus sont ensuite transformés dans les bases de bandelettes et quantifiés pour obtenir la transformée en bandelettes de l'image et la signalisation de la transformée utilisée sur chaque bloc. Enfin on code entropiquement les coefficients quantifiés et la signalisation pour obtenir une image compressée.

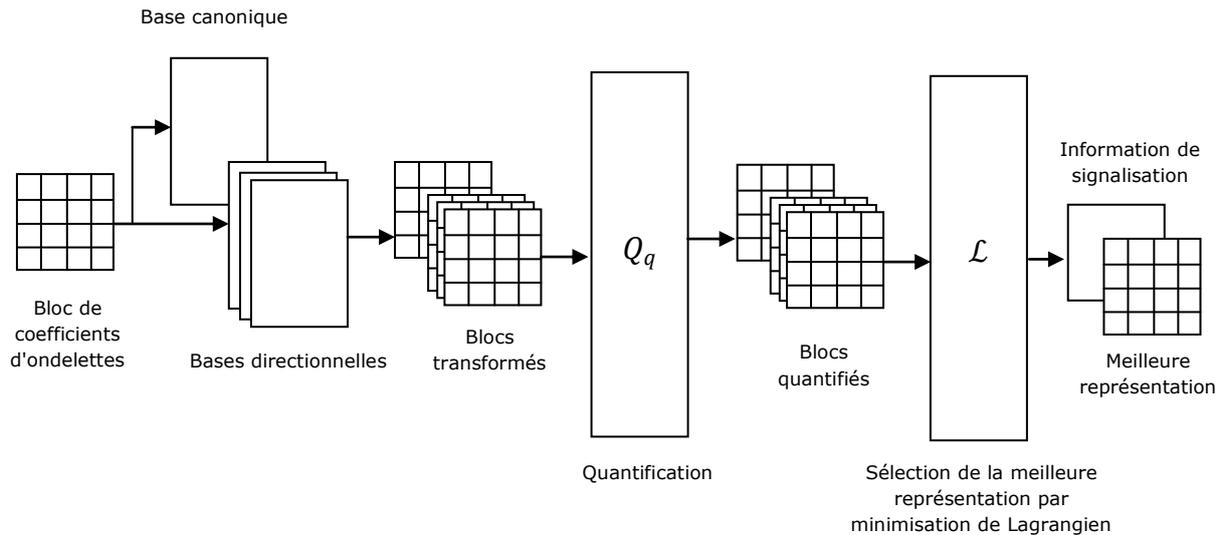


Figure 3.20 Schéma de sélection de la meilleure représentation d'un bloc de coefficients d'ondelettes

Chaque bloc de coefficients d'ondelettes est transformé dans chacune des bases de bandelettes du dictionnaire \mathcal{D} . La meilleure représentation en termes de débit-distorsion est retenue pour la compression. On désigne par f un bloc de coefficients d'ondelettes, il constitue un vecteur de l'espace \mathbb{R}^M , M est la dimension de l'espace des bases de bandelettes, on note ϕ_m vecteur de la base \mathcal{B}_b , b étant le numéro de la base de bandelettes dans le dictionnaire \mathcal{D} qui contient $N_{\mathcal{B}}$ bases auxquelles s'ajoute la base canonique qui est identifiée par l'indice $b = 0$, et dont la transformée est l'identité. Le dictionnaire \mathcal{D} est donc composé de 15 bases orthogonales et une base canonique. Le produit scalaire $\langle f, \phi_m \rangle$ est la projection du bloc de coefficients d'ondelettes sur les vecteurs de la base de bandelettes, il correspond au coefficient de bandelettes $a[m]$. Etant donné un vecteur de bloc de coefficients d'ondelettes f , sa représentation dans les bases de bandelettes peut être exprimée de la façon suivante

$$f = \sum_{m=1}^M \langle f, \phi_m \rangle \phi_m \quad (3.45)$$

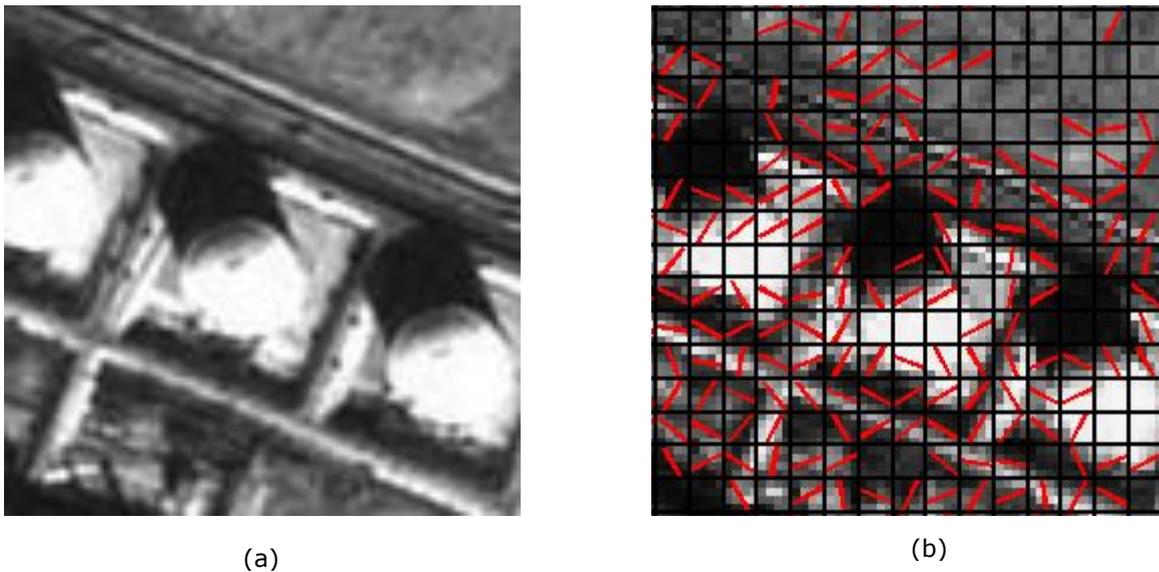
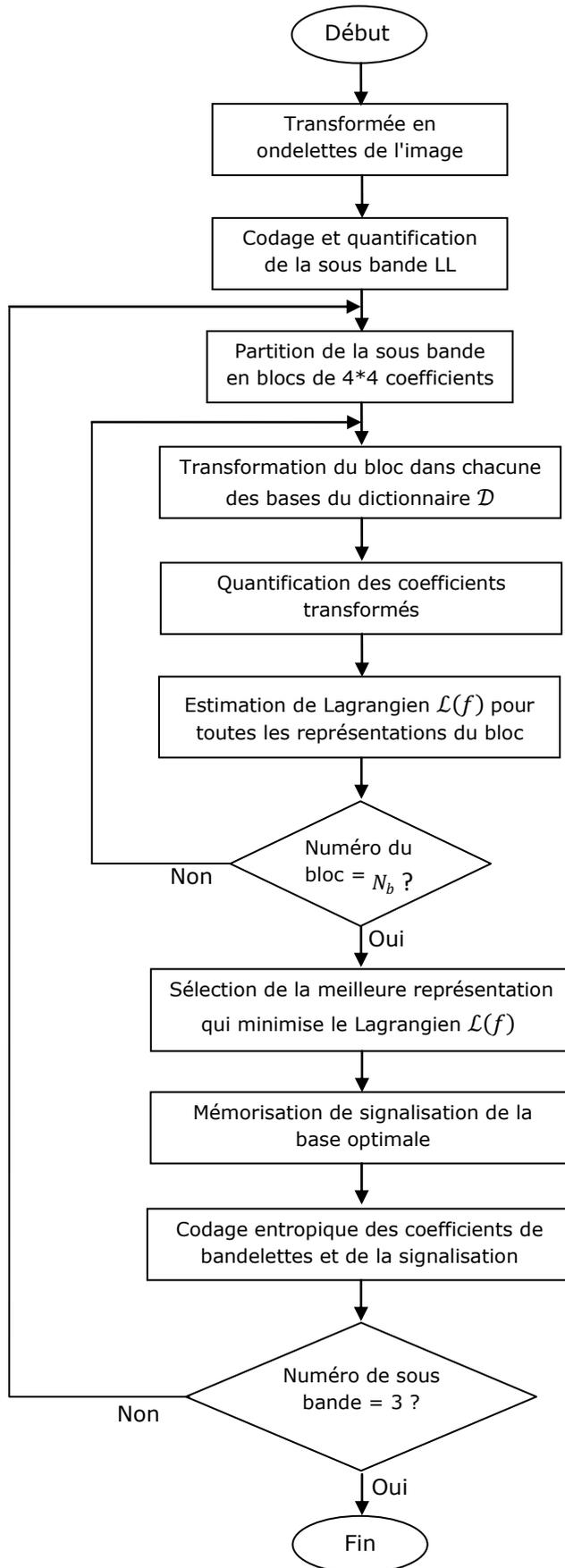


Figure 3.21 (a) Détail de l'image Arzew. (b) Sous bande de la transformée en ondelettes

3.3.5.4 Algorithme de compression en bandelettes

Les différentes étapes de la compression en bandelettes par groupement sont détaillées par l'organigramme 1. Les sous-bandes de la transformée en ondelettes HL, LH et HH sont désignées respectivement par les orientations 1, 2 et 3. N_b est nombre de blocs de coefficients d'ondelettes dans la sous bande de la transformée en ondelettes après la segmentation en blocs de 4*4 coefficients. L'utilisateur fournit une image et un pas de quantification q . Plus q est élevé, plus le nombre de coefficients de bandelettes mis à zéro lors de quantification va être grand et plus la compression sera agressive.



Organigramme 1

3.3.5.5 Quantification scalaire uniforme

C'est le type de quantifieur le plus simple, où les intervalles sont de longueur constante. Le pas de quantification est par conséquent fixe, il est noté q .

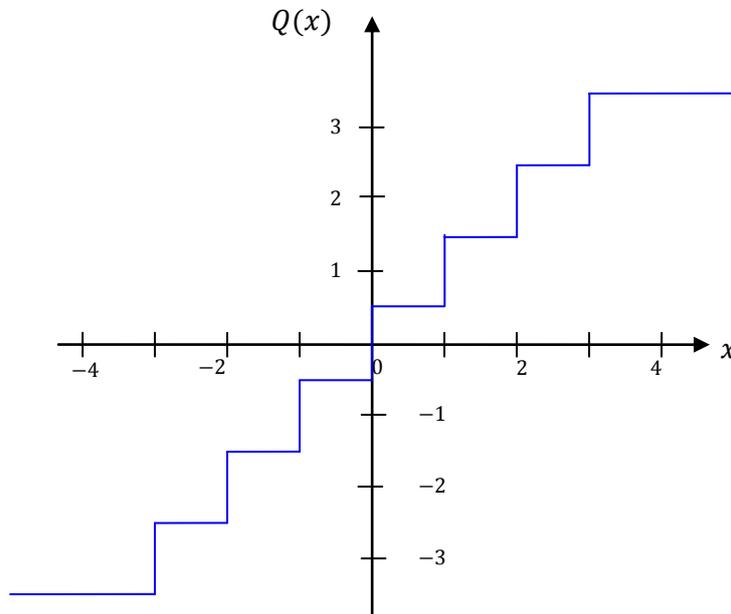


Figure 3.22 (a) Quantification scalaire uniforme avec un pas de quantification de 1.

Quantifieur à zone morte

C'est un type spécial de quantifieur, où l'intervalle autour de zéro est plus large. La zone morte qualifie par conséquent cet intervalle autour de zéro, autorise la totalité des valeurs de source reconnues comme insignifiantes, d'être quantifiées à une seule même valeur (généralement zéro), elle est de longueur $2q$ dans notre quantificateur

$$Q_q = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < q \\ \text{signe}(x) * \left(\frac{|x|}{q} + \frac{1}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.46)$$

Ce type de quantifieur est particulièrement utilisé en compression d'image, ou suite à une transformation de l'image par DCT, ondelettes ou bandelettes dans notre cas. Dans [54] Falzon et Mallat ont montré que le choix d'une zone morte de largeur $2q$ est un choix quasi-optimal pour les coefficients d'ondelettes, il est de même pour les coefficients de bandelettes du fait que la distribution des coefficients de bandelettes est proche de celle des coefficients d'ondelettes.

3.3.5.6 Allocation optimale de débits binaires et de distorsion

L'idéal serait de pouvoir maximiser la qualité visuelle de l'image reconstruite pour un débit binaire total aussi faible que possible. L'objectif de cette section est la minimisation d'un critère débit-

distorsion. Pour fixer les notations, désignons par D la distorsion quadratique totale due à la quantification qui est donnée par la formule suivante

$$D(f_q) = \sum_{m=1}^M |a[m] - Q_q(a[m])|^2 \quad (3.47)$$

Appelons R le nombre de bits total nécessaire pour coder l'image. Le problème posé est donc de trouver la meilleure représentation d'un bloc de coefficients d'ondelettes f dans les différentes bases \mathcal{B}_b du dictionnaire de bandelettes \mathcal{D} en minimisant le critère débit-distorsion de l'équation (3.48)

$$\mathcal{L}(f_q) = D(f_q) + \lambda R(f_q) \quad (3.48)$$

Avec λ le multiplicateur de Lagrange optimisé pour la compression. L'indice b^* de la meilleure base \mathcal{B}^* pour la représentation du bloc de coefficients d'ondelettes f parmi toutes les bases du dictionnaire est donné par la formule suivante

$$b^* = \min \mathcal{L}(f_q)$$

On définit le vecteur d'allocation $S = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_{N_b})$ qui nous permet de stocker les bases de bandelettes utilisées pour transformer chaque bloc de coefficients d'ondelettes où b_i est la base utilisée pour transformer le bloc f_i et N_b le nombre de blocs. On note $S^* = (b_1^*, b_2^*, \dots, b_i^*, \dots, b_{N_b}^*)$ le vecteur d'allocation optimal qui permet de minimiser les distorsions Df_q associées à chaque bloc f_q dans les différentes bases du dictionnaire \mathcal{D} . Dans [55] Le Pennec et Mallat supposent que λ et q sont reliés lorsque l'allocation est optimale, par conséquent il suffit de chercher le paramètre optimal q pour déduire le paramètre λ optimal. L'équation débit-distorsion ne dépend alors que d'un seul paramètre, le pas de quantification q par exemple. Si la fonction $J(q) = D(q) + \lambda R(q)$ présente un minimum, sa dérivée en ce point s'annule et on a

$$\frac{\partial D}{\partial q} = -\lambda \frac{\partial R}{\partial q} \quad (3.49)$$

La résolution de l'équation (3.49) nécessite d'abord l'expression de débit binaire R et de la distorsion D en fonction du pas de quantification q .

3.3.5.7 Débit des coefficients d'ondelettes et de bandelettes

Lorsque la proportion de coefficients d'ondelettes non nuls est comprise entre 2^{-7} et 2^{-1} , Falzon et Mallat ont montré dans [54] que le débit binaire est proportionnel au nombre de coefficients quantifiés non nuls M avec $R = \gamma_0 M$ et $\gamma_0 = 6.5$ sur la base d'un ensemble d'image de référence,

ils ont fait l'hypothèse que cette relation reste valable pour les coefficients de bandelettes. Dans le cas d'utilisation du quantificateur de l'équation (3.46), un coefficient d'ondelettes d'amplitude x induit une distorsion de l'ordre de $q^2/4$ pour une variation infinitésimale de q si le coefficient x est quantifié à $3/2 q$. Elle est de q^2 si le coefficient x est quantifié à 0. La distorsion totale est de $3/4 q^2$ si on met un coefficient à 0 par variation infinitésimale. La variation de la distorsion en fonction du pas de quantification est donnée par l'équation (3.50)

$$\frac{\partial D}{\partial q} \approx -\frac{3q^2}{4} \frac{\partial M}{\partial q} \quad (3.50)$$

Les équations (3.48), (3.49) et (3.50) nous permettent d'exprimer la relation qui reliant λ et q

$$\lambda = \frac{3}{4\gamma_0} q^2 \quad (3.51)$$

Si la proportion de coefficients non nuls devient très importante, les relations précédentes ne sont plus valables, dans ce cas de nouvelles expressions de la distorsion D et le débit R en fonction du pas de quantification q sont utilisées dans [57]

$$D = \frac{1}{12} q^2 \quad (3.52)$$

Dans [43], le débit R est donné par l'expression avec $h(X)$ l'entropie de l'image

$$R \approx h(X) - \log_2 q \quad (3.53)$$

Par combinaison des équations (3.52) et (3.53), on obtient une expression de λ en fonction de pas de quantification q

$$\lambda = \frac{\ln 2}{6} q^2 \quad (3.54)$$

Sous hypothèse de compression à bas et moyen débits c'est-à-dire lorsque la proportion de coefficients non nuls est comprise entre 2^{-7} et 2^{-1} , Le Pennec et Mallat ont fourni une expression de la distorsion D et de débit R en fonction du pas de quantification, ils aboutissent ainsi à une approximation du multiplicateur de Lagrange λ en fonction du pas de quantification q donnée par la relation suivante $\lambda = \frac{3}{4\gamma_0} q^2$, de coefficient multiplicatif de Lagrange $\frac{3}{4\gamma_0} = 0.11538$, avec $\gamma_0 = 6.5$. Pour la compression à haut débit, en suivant le raisonnement de Parisot, la relation reliant λ à q est donnée par l'équation $\lambda = \frac{\ln 2}{6} q^2$ de coefficient multiplicatif de Lagrange $\frac{\ln 2}{6} = 0.1155$. En effet, sous les deux hypothèses le multiplicateur de Lagrange étant toujours proportionnel au pas de quantification.

3.3.5.8 Le débit des coefficients de bandelettes

Le débit nécessaire pour coder les coefficients de bandelettes est différent de celui des ondelettes, en effet les bandelettes nécessitent un débit supplémentaire appelé coût de la signalisation de la base de bandelettes sélectionnée parmi les bases du dictionnaire \mathcal{D} . Par conséquent le débit total est composé de deux parties: le débit R_c nécessaire pour coder les coefficients quantifiés et le débit de la signalisation R_b .

L'histogramme des coefficients d'ondelettes et des bandelettes de la figure 3.23 nous permet d'estimer le débit des coefficients de bandelette R_c par l'intermédiaire des probabilités $\Pr(Q_q(a[m]))$, le débit R_b de la signalisation quand à lui, s'obtient par les probabilités $\text{pr}(b)$ *a priori*, avec

$$\text{pr}(b) = \begin{cases} 0.5 & \text{si } b = 0 \\ \frac{0.5}{N_B} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.55)$$

En injectant les deux probabilités dans l'équation du débit total

$$\begin{aligned} R &= R_c + R_b \\ &= - \sum_{m=1}^M \log_2 \Pr(Q_q(a[m])) - \log_2 \text{pr}(b) \end{aligned}$$

D'où l'expression du débit total nécessaire aux coefficients quantifiés et à la signalisation

$$R = - \left(\sum_{m=1}^M \log_2 \Pr(Q_q(a[m])) + \log_2 \text{pr}(b) \right) \quad (3.56)$$

Après transformation, un certain nombre de blocs ne sont pas transformés dans les bases de bandelettes, en effet y a deux raisons pour favoriser ces blocs. La première est que, cela permet de diminuer le coût de signalisation qui est de $1 + \log_2(N_B)$ si le bloc n'est pas transformé. La deuxième raison est que sur les régions homogènes, la transformée en ondelettes est la meilleure représentation pour la compression.

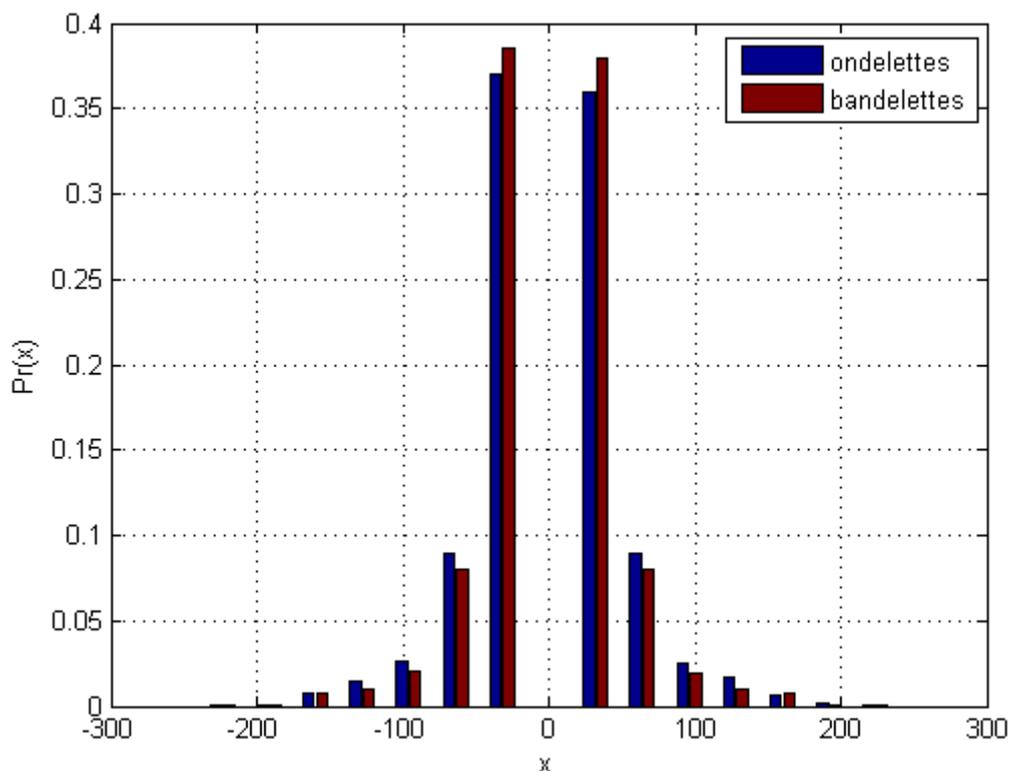


Figure 3.23 Histogrammes de la transformée en ondelettes et en bandelettes

3.4 Discussion

Dans le chapitre précédent nous avons d'abord présenté la première génération de la transformée en bandelettes qui a été proposée par Le Pennec dans sa thèse [46]. Ces bandelettes sont obtenues à partir de déformations d'ondelettes anisotropes permettant via une rectification d'exploiter la régularité de la fonction selon sa direction de régularité maximale. Ensuite nous avons vu la seconde génération de bandelettes développée par Peyré [47] qui ne suit pas le même raisonnement. Cette nouvelle transformée en bandelettes est construite au-dessus d'une transformée en ondelettes 2D. L'objectif de ces bandelettes est d'exploiter les régularités géométriques le long des contours dans les sous-bandes de la transformée en ondelettes. Enfin nous avons détaillé la transformée en bandelettes par groupement qui consiste à segmenter les sous-bandes de la transformée en ondelettes en blocs de 4×4 ce qui permet d'économiser le calcul et la transmission du quadtree. Chaque bloc de coefficients d'ondelettes est alors transformé dans chacune des bases de ce dictionnaire. Pour un bloc de coefficients d'ondelettes, la meilleure représentation de ce bloc en termes de débit-distorsion est retenue pour la compression. Nous avons vu également que sous hypothèse bas et moyen débits, Le Pennec et Mallat ont donné une formule théorique de multiplicateur de Lagrange optimal. Étrangement, en partant d'une hypothèse différente, l'hypothèse haute-résolution, nous avons obtenu la même formule avec la même constante multiplicative après application numérique.

Chapitre 4

Résultats expérimentaux et interprétations

4.1 Choix de la taille des blocs.....	77
4.2 Estimation expérimentale de temps d'exécution	78
4.3 Recherche expérimentale du coût débit-distorsion optimal	79
4.4 Études expérimentales des performances de la transformée en bandelettes.....	81
4.4.1 Les bases directionnelles.....	81
4.4.2 Estimation du débit de la transformée en bandelettes et en ondelettes	82
4.4.3 Performances de la transformée en bandelettes en compression	83
4.5 Le programme SPOT	88
4.6 Application aux images Spot Cinquième Génération.....	89
4.7 Discussion	93

Dans nos tests de compression, la transformée en ondelettes utilisée correspond aux ondelettes bi-orthogonales 9/7 de Cohen et al [37], c'est celle qui permet d'atteindre les meilleures performances en compression [33], c'est aussi la transformée en ondelettes utilisée dans la norme JPEG2000, le nombre de niveaux de décomposition en ondelettes a été fixé à 3, ce nombre de niveaux de décomposition est un compromis entre performances en compression et complexité calculatoire [59]. La transformée en bandelettes est effectuée comme décrit dans l'organigramme 1, elle correspond à la transformée en bandelettes par bloc.

4.1 Choix de la taille des blocs

Dans cette section, on s'intéresse à la taille de blocs permettant d'obtenir les meilleurs performances pour la transformée en bandelettes par groupement. X. Delaunay a étudié dans [51] les dépendances entre coefficients d'ondelettes voisins, il a montré qu'au delà d'une distance supérieure à 4 pixels entre deux coefficients d'ondelettes, les corrélations sont presque nulles. On s'attend donc à ce que l'exploitation de corrélations sur des blocs de taille supérieure à 4*4 coefficients n'apporte que très peu de gain. L'augmentation de la taille des blocs nous permet de diminuer le coût de la signalisation. En effet moins les blocs sont petits, plus il y en a dans une sous-bande, plus la signalisation est importante.

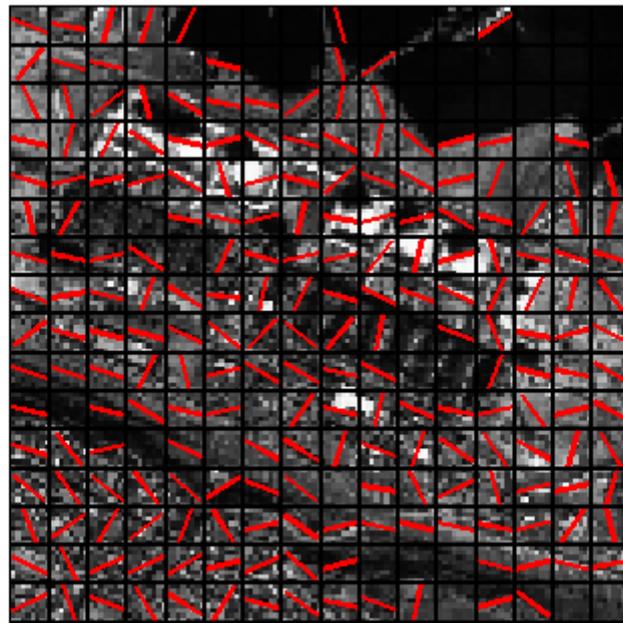


Figure.4.1 Blocs de taille 8*8 et les bases directionnelles sélectionnées

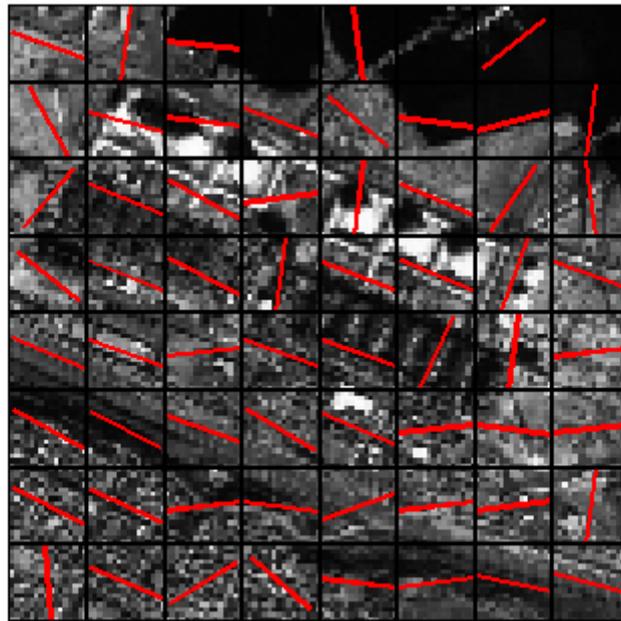


Figure.4.2 Blocs de taille 16*16 et les bases directionnelles sélectionnées

Plusieurs tailles de blocs ont été considérées : sur la figure 4.1, nous avons représenté des blocs de taille 8*8, avec cette configuration, nous avons constaté une perte moyenne de 0.06dB. Des blocs de taille de 16*16 pixels sont illustrés par la figure 4.2, la perte correspondante à cette configuration est de l'ordre de 0,1 dB. Les résultats de nos tests nous montrent que les meilleures performances sont atteintes avec des blocs de taille de 4*4 pixels.

4.2 Estimation expérimentale du temps d'exécution

Le temps d'exécution dépend des deux paramètres de bases, la taille des blocs et la résolution numérique de l'image. Dans cette section on s'intéresse au temps d'exécution nécessaire pour compresser une portion de l'image 'Arzew' de taille de 128*128 pixels codée sur 8 bits en fonction de la taille de blocs de bandelettes directionnelles. Le pas de quantification a été fixé à 28.

Taille de blocs	Temps d'exécution
4*4	48 secondes
8*8	93 secondes
16*16	230 secondes

Tableau 4.1 Temps d'exécution de la compression en bandelettes pour divers taille de blocs

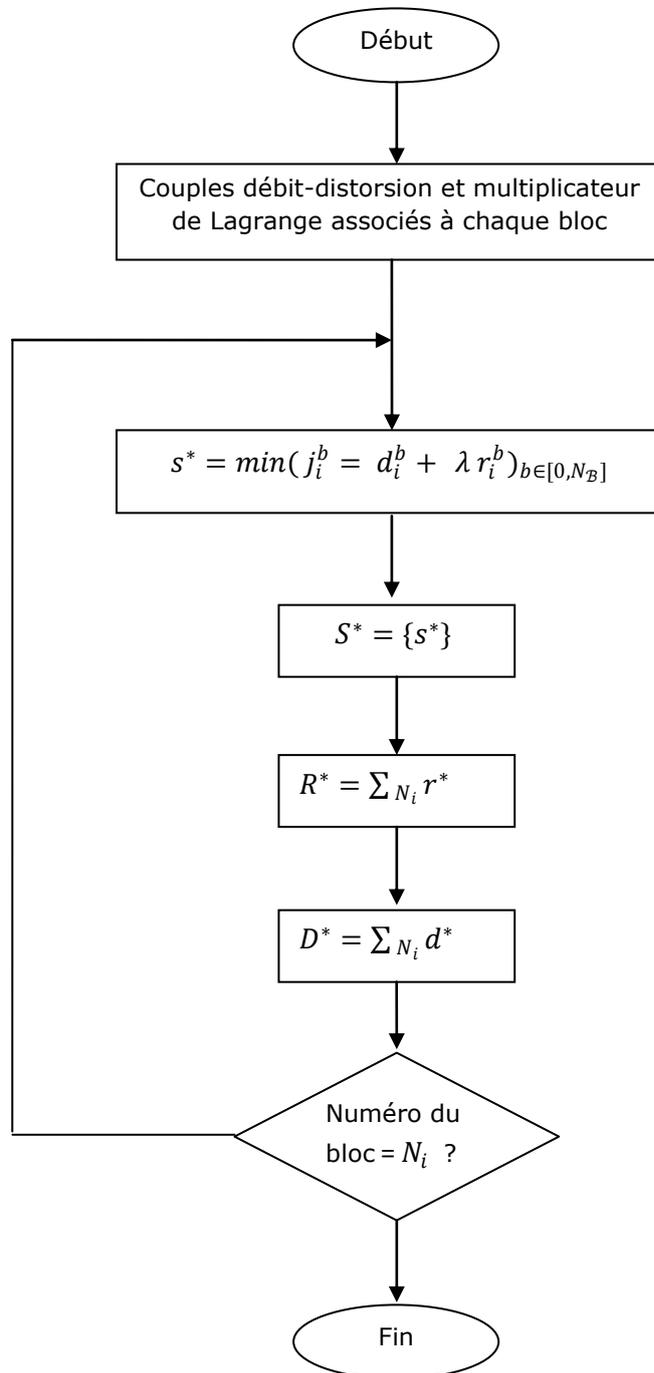
Dans le tableau 4.1 on peut voir que le temps d'exécution croît régulièrement avec la taille de blocs. Plus la taille des ces derniers est grande, plus la dimension de la base est grande, par exemple pour des blocs de taille 8×8 , l'espace de travail est \mathbb{R}^{64} . Il y a donc plus de vecteurs à stocker dans la mémoire du codeur et plus de ressources sont consommées au moment de la compression.

4.3 Recherche expérimentale du coût débit-distorsion optimal [51]

Shoham et Gersho ont proposé dans [60], une méthode d'optimisation, nous l'avons adaptée au cas des bandelettes et elle permet de donner des valeurs optimales pour le multiplicateur de Lagrange qui intervient dans le choix de la meilleure base de bandelettes. Avant de pouvoir utiliser l'organigramme 2 il faut d'abord calculer tous les couples débit-distorsion associés à chaque bloc de coefficients d'ondelettes. Dans le cas des bandelettes, il faut commencer par calculer le débit et la distorsion associés à toutes les représentations f_{iq}^b possibles de chaque bloc f_i . Pour le même pas de quantification q . Le quantificateur agit de la même manière sur tous les blocs. Chaque bloc de coefficients d'ondelettes f_i est transformé dans chacune des N_B bases du dictionnaire de bandelettes \mathcal{D} . Pour chaque représentation f_{iq}^b , $b \in [0, N_B]$ du bloc numéroté i , on calcule la distorsion d_i^b et une estimation du débit r_i^b nécessaire au codage de f_{iq}^b . L'organigramme 2 nous donne l'allocation optimale $S^*(\lambda)$ en injectant une valeur du multiplicateur de Lagrange λ et l'ensemble de couples débit-distorsion. Il permet de chercher l'allocation débit-distorsion optimale

$$S^*(\lambda) = \min (D(s) + \lambda R(s))_{s \in \mathcal{S}} \quad (4.1)$$

Le coût $j_i^b(\lambda)$ débit-distorsion de chaque bloc f_i est minimisé un par un pour minimiser en fin le coût total nécessaire au codage. En effet on associe une valeur pour le caractère débit-distorsion $j_i^b(\lambda) = d_i^b + \lambda r_i^b$, de chaque représentation f_{iq}^b du bloc f_i dans les différentes bases du dictionnaire de bandelettes et celle qui minimise ce coût est sélectionnée pour la compression. Graphiquement cela peut s'expliquer en matérialisant les couples débit-distorsion associés à chaque représentation de bloc après projection sur les différentes bases de bandelettes et la quantification par un quantificateur scalaire uniforme par un ensemble de points. L'intersection de la droite $d = -\lambda r + j$ passant par le point (r_i^b, d_i^b) avec l'axe des ordonnées d_i représente le coût $j_i^b(\lambda)$.

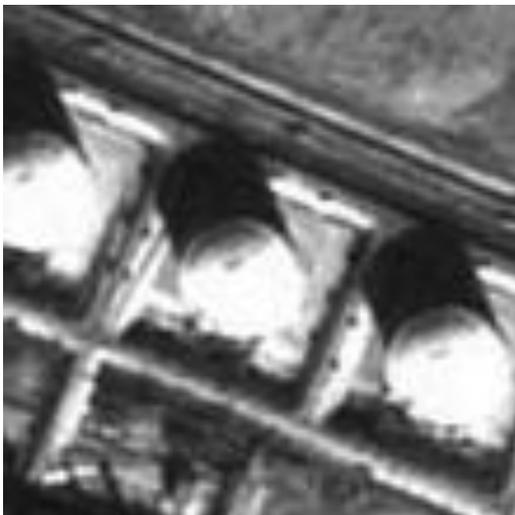


Organigramme 2. Calcul de l'allocation optimale S^* étant donnée une valeur du multiplicateur de Lagrange λ et un ensemble de couples débit-distorsion.

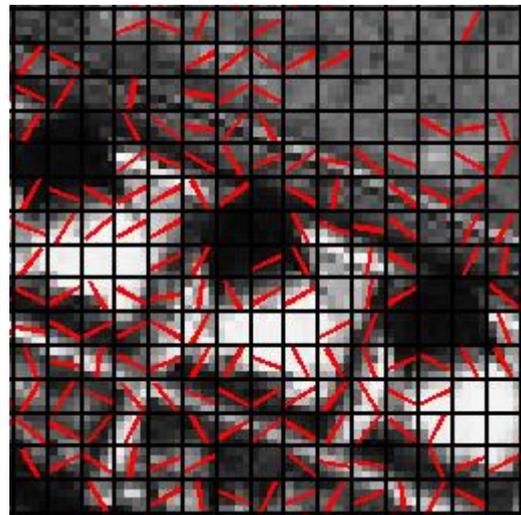
4.4 Études expérimentales des performances de la transformée en bandelettes

4.4.1 Les bases directionnelles

Les résultats d'analyse en bandelettes d'une image sont présentés sur la figure 4.2, Le pas de quantification a été fixé à $q = 21$. Les meilleurs représentations des blocs f_i dans les différentes bases de bandelettes ont été sélectionnées par minimisation du critère débit-distorsion de l'équation (3.48). Les directions des contours dans l'image ne concordent pas forcément avec les bases de bandelettes directionnelles. Plusieurs raisons peuvent être à l'origine de ce résultat. La taille des blocs étant très petite, il est donc difficile de distinguer une direction par l'œil humain, de plus le processus de la sélection de meilleurs bases de bandelettes directionnelles ne prend pas en considération l'information géométrique de l'image. Le seul paramètre qui entre dans la sélection des bases optimales est la distorsion engendrée par le quantificateur scalaire uniforme. La direction naturelle des coefficients d'ondelettes n'est pas prise en compte par processus de sélection. Par ailleurs, une base de bandelettes est susceptible d'exploiter des corrélations dans la direction pour laquelle elle a été construite ou dans la direction perpendiculaire. En effet, il y a deux sources de régularités dans la transformée en ondelettes d'une image : celles introduites par les contours et celles introduites par le filtrage en ondelettes. Les bases directionnelles ont été créées afin d'exploiter les régularités le long des contours. En fait, elles peuvent exploiter les deux types de régularités : les régularités basses fréquences le long des contours et les oscillations perpendiculaires aux contours qui sont dues au filtrage d'ondelettes passe-haut sur les contours.



(a) Portion de l'image 'Arzew'.



(b) Sous-bande de la transformée en ondelettes et bases de bandelettes sélectionnées sur chaque bloc

Figure 4.2 Image 'Arzew' et les bases de bandelettes sélectionnées sur la sous-bande de la transformée en ondelettes.

4.4.2 Estimation du débit de la transformée en bandelettes et en ondelettes

Les tableaux 4.1 et 4.2 reportent les résultats de la compression en ondelettes et en bandelettes des images de référence 'Lena' et 'Barbara' d'une résolution de 512*512 avec un pas de quantification $q = 21$.

	R(bpp)	PSNR(dB)
Lena	0.3812	34.3537
Barbara	0.7520	32.8200

Tableau 4.1 Résultats de la compression en ondelettes des images de référence 'Lena' et 'Barbara' avec un pas de quantification $q = 21$.

	R(bpp)	Rs	Rt	PSNR(dB)
Lena	0.3717	0.1002	0.4719	35.3863
Barbara	0.6939	0.1103	0.8042	33.9744

Tableau 4.2 Résultats de la compression en bandelettes des images de référence 'Lena' et 'Barbara' avec un pas de quantification $q = 21$. Rs: coût de la signalisation des bases. Rt: coût total

4.4.3 Performances de la transformée en bandelettes en compression

Dans cette section nous allons tenter de comparer les résultats obtenus avec la transformée en bandelettes et en ondelettes, la transformée en ondelettes est effectuée sur trois niveaux de décomposition, ce nombre de niveaux de décomposition permet un bon compromis entre les performances en compression et la complexité calculatoire, la transformée en bandelettes est effectuée en suivant les étapes de l'organigramme 1, les images de l'ensemble de test sont compressées successivement en utilisant divers pas de quantification q . Pour plus de lisibilité, les performances obtenues avec la transformée en bandelettes sont tracées relativement aux performances obtenues avec la transformée en ondelettes.

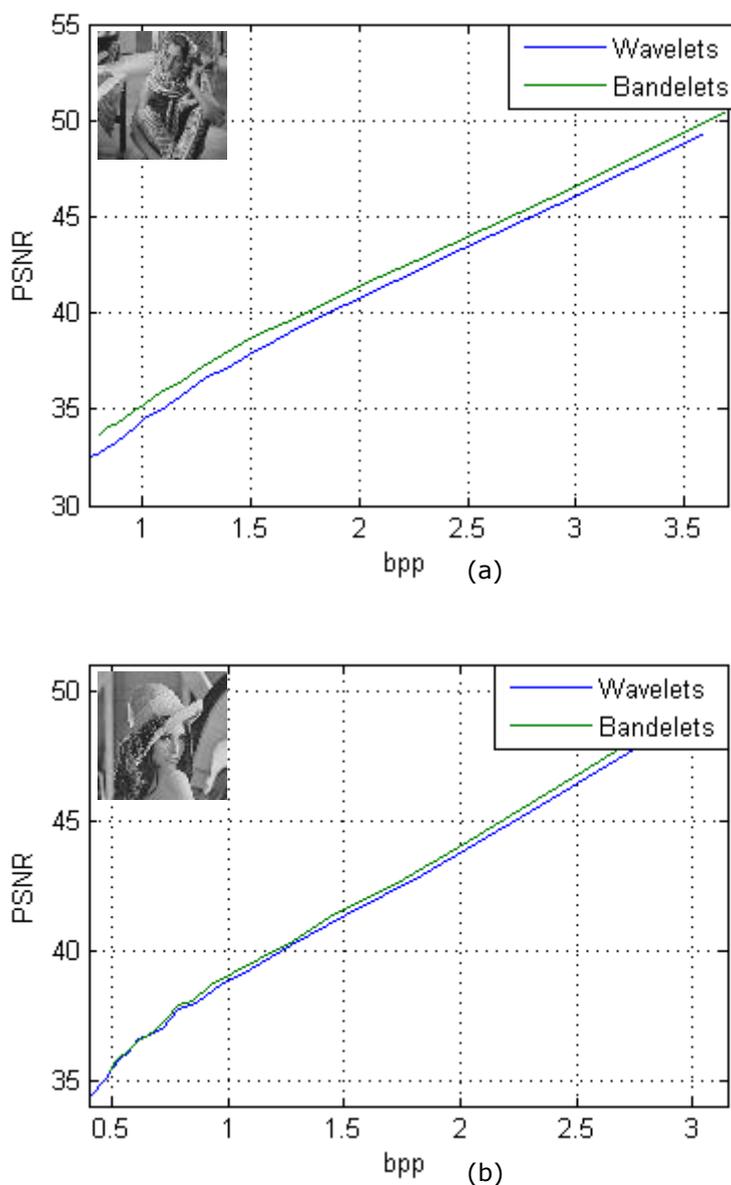


Figure 4.3 Courbe de distorsion en PSNR de la compression de la transformée en bandelettes et de la transformée en ondelettes, (a) pour l'image 'Barbara' et (b) pour 'Lena' en fonction de la compression en bits par pixel (bpp).

La figure 4.3 (a) présente la courbe de performance pour l'image de Barbara et la figure 4.3 (b) présente celle pour Lena. Les performances de la compression en bandelettes sont supérieures à celles des ondelettes en améliorant le PSNR pour un même taux de compression.

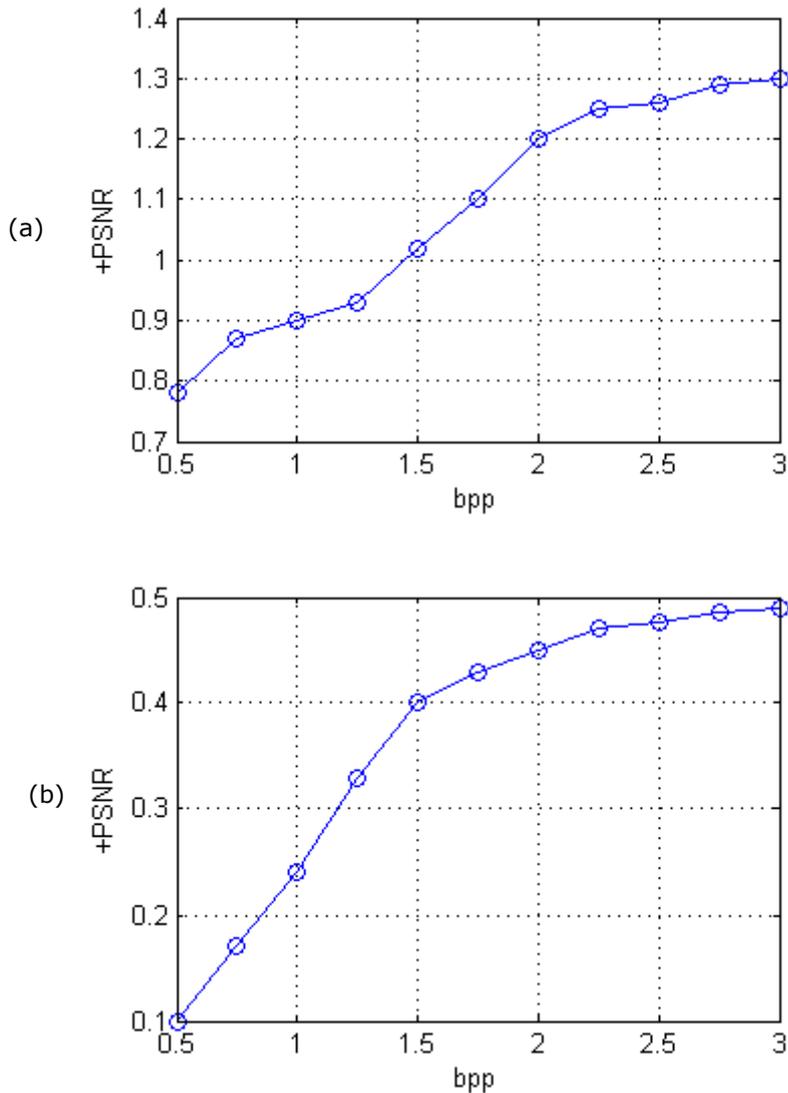


Figure 4.4 Différences de qualités obtenues entre la compression en bandelettes et la compression en ondelettes à débits constants, (a) pour l'image ' Barbara ' et (b) pour 'Lena '

On constate sur la figure 4.4 (a) que la transformée en bandelettes permet un gain de 0,6 dB en PSNR à 0,5 bpp jusqu'à 1,3 dB à 3 bpp pour Barbara, et un gain de 0.12 en PSNR à 0,5 bpp jusqu'à 0.5 dB à 3 bpp pour Lena.

La figure 4.5 indique que le gain perceptuel est encore plus substantiel. Les images obtenues avec les bandelettes restent régulière le long de la géométrie utilisée tandis que celle obtenues avec les ondelettes présentent des effets oscillants.

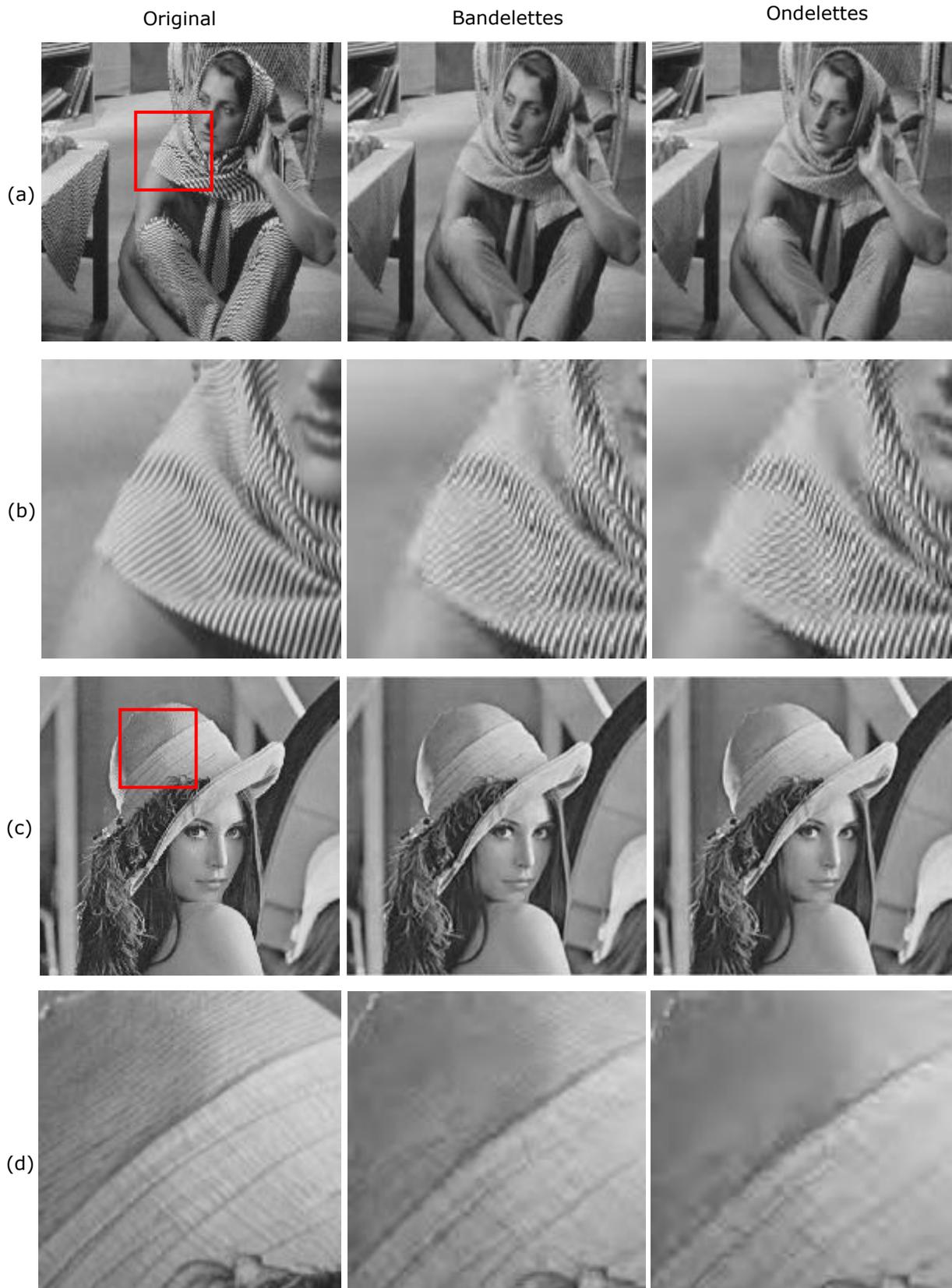


Figure 4.5 Résultat de compression : (a) Barbara, (b) détail de Barbara, (c) Lena et (d) détail de Lena. L'image de Barbara est comprimée à 0,48 bits par pixel en bandelettes et en ondelettes et les PSNR respectifs sont de 30.17 dB et 31.35 dB. Pour Lena, l'image est comprimée à 0.24 bits par pixels et les PSNR respectifs sont de 32.87 dB et 32.17 dB.

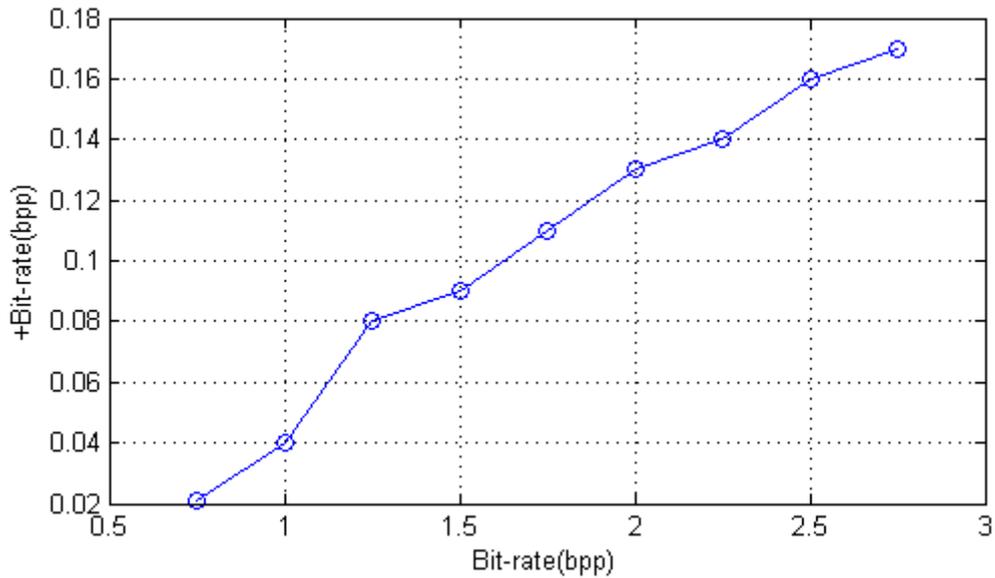


Figure 4.6 Différences de débit obtenues entre la compression en ondelettes et la compression en bandelettes à qualité constante.

Avec la transformée en bandelettes comme le montre la figure 4.6 on peut réduire le débit de 0.09 pour un débit en ondelettes de 1.5 bps soit 6% et de réduire le débit de 0.16 bps pour un débit en ondelettes de 2.5 bps soit 6.4% du débit total à qualité constante.

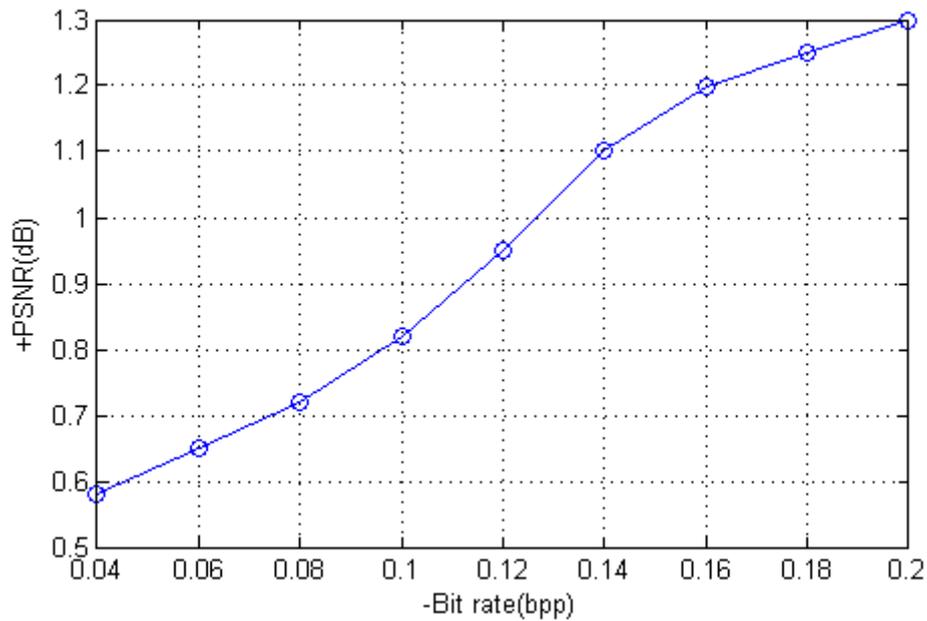


Figure 4.7 Différences de qualité obtenues entre la compression en bandelettes et la compression en ondelettes en fonction des différences de débit.

La figure 4.7 traduit les différences de qualité en fonction des différences débit obtenues avec la compression en bandelettes et la compression en ondelettes. Les débits totaux de la transformée en bandelettes sont supérieurs aux débits de la transformée en ondelettes car ils sont augmentés par la signalisation des bases. En revanche cette augmentation est compensée par l'augmentation des PSNR des bandelettes par rapport aux ondelettes. Ainsi, sur la figure 4.7 on peut constater qu'un gain de 0,95 dB en PSNR correspond à une augmentation du débit de 0,12 bpp et un gain de 1,3dB en PSNR correspond à une augmentation du débit de 0,2 bpp.

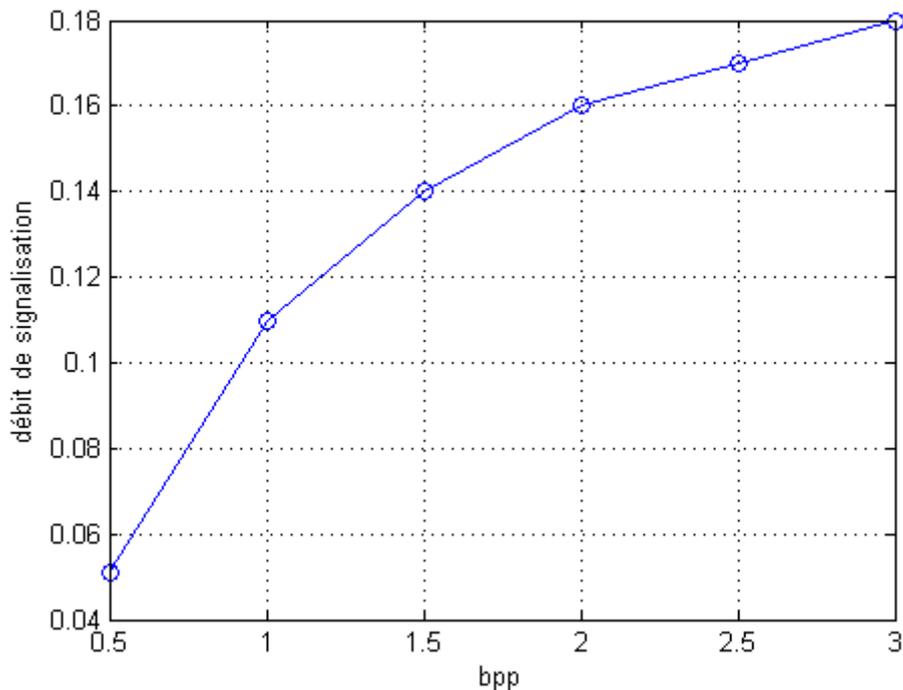


Figure 4.8 Coût de la signalisation des bases de bandelettes en fonction du débit total.

On peut constater sur la figure 4.8 que le débit de signalisation croît avec le débit. En effet plus le débit est important, plus le nombre de coefficients après quantification est grand et donc plus il y a de signalisation à transmettre au décodeur. Pour un débit total de 1 bpp, le coût moyen de la signalisation correspondant est de 0,11 bpp. A 3,0 bpp, il est de 0,18 bpp. Les résultats obtenus montrent que le processus de sélection des bases de bandelettes permet d'adapter le débit alloué à la signalisation en fonction du débit total. A haut débit, un plus grand nombre de blocs est transformé en bandelettes qu'à bas débit. Cependant, la proportion du débit total alloué à la signalisation diminue lorsque le débit total augmente: à un débit de 1 bpp, 11% du débit total est alloué à la signalisation ; à 3,0 bpp, seulement 6% du débit total est alloué à la signalisation.

4.5 Le programme SPOT

Définition

Le programme SPOT (Système Probatoire d'Observation de la Terre [7] ou Satellite pour l'Observation de la Terre) a été décidé par la France en 1978. Il est réalisé par le CNES.

SPOT 1^{ère} génération

Les satellites: SPOT 1 lancé en 1986, SPOT 2 en 1990 et SPOT 3 en 1993, font partie de la première génération des satellites SPOT. Ils intègrent quatre détecteurs optiques pour l'acquisition des images : un détecteur dans le vert (bande B1 : 500nm – 590 nm), dans le rouge (bande B2 : 610nm – 680 nm), dans le proche infrarouge (bande B3 : 790nm – 890 nm) à la résolution de 20m par pixel et un détecteur panchromatique (510nm – 730 nm) à la résolution de 10m par pixel. Les images panchromatiques ont une largeur de 6000 pixels soit une fauchée de 60km de large. Le débit binaire en sortie du module d'acquisition d'images est de 32 Mb/s. Afin de permettre la transmission d'un maximum d'images dans un canal de transmission limité, les images sont compressées à bord. La décorrélation des images est effectuée par un codage prédictif DPCM (Differential Pulse Code Modulation) et des codes de longueur fixe. La quantification du résidu est non-uniforme et adaptée à une hypothèse de distribution Laplacienne. Un pixel sur trois, la référence, est codé sur 8 bits. Les deux autres constituent le résidu et sont codés sur 5 bits. Ceci assure la compression des images avec un taux de compression de 1,33. Bien que les performances en compression soient faibles, cet algorithme est très simple à mettre en oeuvre puisque seulement 3 opérations par pixel sont nécessaires. Il était adapté aux performances limitées de l'électronique embarquée au moment de la conception de SPOT 1 [8], [9].

SPOT 2^{ème} génération

Les satellites SPOT4 et SPOT5 est la deuxième génération des satellites d'observation de la Terre, lancés respectivement en 1998 et en mai 2002, le premier utilise un détecteur de plus dans le moyen infrarouge (bande B4 : 1580nm – 1750 nm) mais ne dispose pas de canal panchromatique. Par contre la bande rouge B2 a une résolution de 10m par pixel. La technique de compression utilisée est la même que sur la première génération. SPOT5 quant à lui, permet l'acquisition d'images multi-spectrales avec quatre bandes spectrales. Les bandes B1 à B3 dans le vert, le rouge et le proche infrarouge ont une résolution de 10m par pixel. La bande B4 dans le moyen infrarouge a une résolution de 20m par pixel. Les images panchromatiques (480nm–710 nm) ont une résolution de 5 m. La fauchée est de 60 km. La résolution des images peut-être améliorée à 2,5m après traitement grâce à un mode super-résolution et à deux barrettes (lignes de détecteurs) de 12000 pixels décalées d'un demi-pixel: acquisition en mode quinconce [10]. Le débit binaire en sortie du module d'acquisition d'images est de 128 Mb/s.

4.6 Application à des images Spot Cinquième Génération

Comparons maintenant les résultats obtenus avec les transformées en bandelettes et en ondelettes sur un ensemble d'images de test de Spot 5. Dans chaque cas, la transformée en ondelettes correspond aux ondelettes bi-orthogonales 9/7 effectuée sur 3 niveau de décomposition, ce nombre de niveaux de décomposition a été choisi parce qu'il représente un bon compromis entre les performances en compression (débit et distorsion) et la complexité calculatoire. Les résultats sont moyennés sur l'ensemble des images de test. Dans la figure 4.18 les images de l'ensemble de test sont compressées successivement en utilisant divers pas de quantification q les résultats obtenues avec la transformée en bandelettes sont tracées relativement aux résultats obtenues avec la transformée en ondelettes.

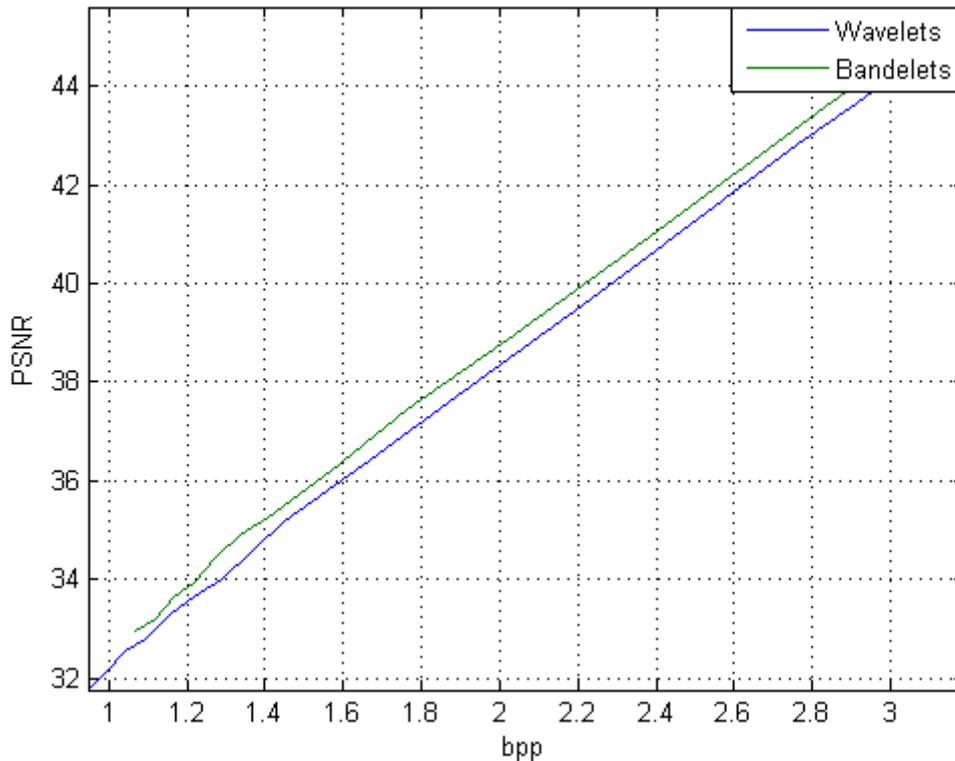


Figure 4.9 Résultats de la compression de la transformée en ondelettes et de la transformée en bandelettes moyennés sur l'ensemble des images de test.

Les résultats tracés sur la figure 4.9 sont les résultats de référence permettant d'avoir accès aux valeurs de PSNR en fonction de du débit en bits par pixel. Les performances de la compression en bandelettes sont nettement supérieures à celles des ondelettes en améliorant le PSNR pour un même taux de compression.

Sur la figure 4.10, on peut observer un gain typique des bandelettes par rapport aux ondelettes de l'ordre de 0.4 dB à 0.5 bpp jusqu'à 0.8 dB à 3bpp

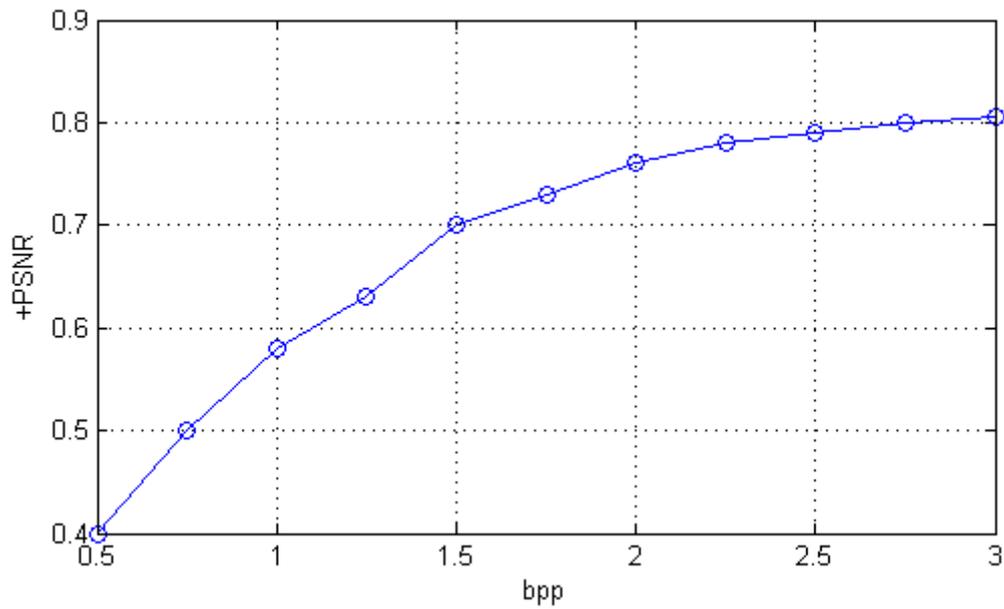


Figure 4.10 Différences de qualités obtenues entre la compression en bandelettes et la compression en ondelettes à débits constants moyennés sur l'ensemble des images de test.

La figure 4.11 montre un gain perceptuel important par rapport aux ondelettes, car la géométrie des images est mieux respectée et les phénomènes d'oscillations près des contours sont diminués.

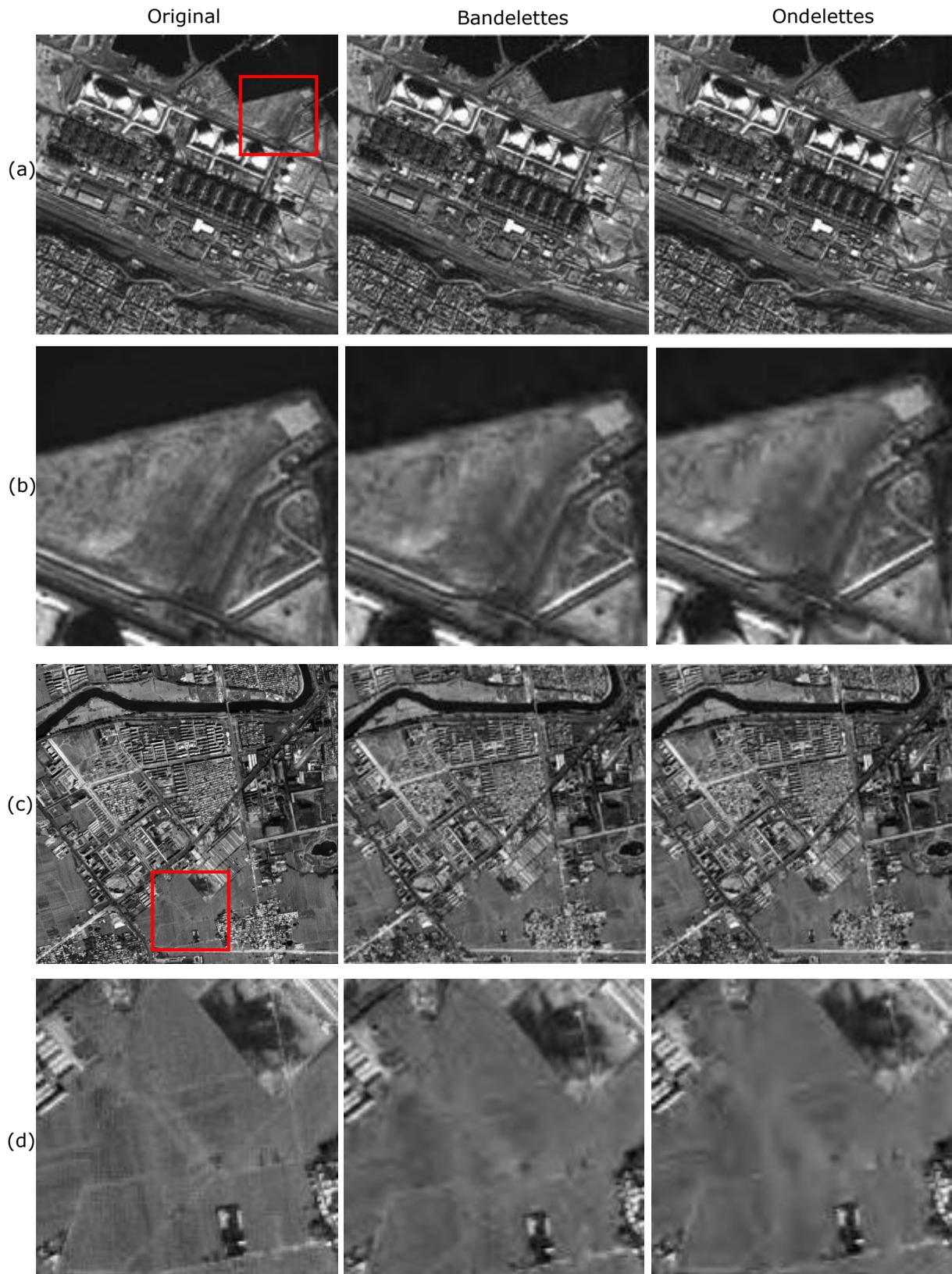


Figure 4.11 Résultat de compression : (a) Arzew-Algérie, (b) détail de Arzew-Algérie, (c) Shaanxi-Chine et (d) détail de Shaanxi-Chine. L'image d'Arzew est comprimée à 0,62 bits par pixel en bandelettes et en ondelettes et les PSNR respectifs sont de 29.29 dB et 30.58 dB. Pour Shaanxi, l'image est comprimée à 0.90 bits par pixels et les PSNR respectifs sont de 28.09 dB et 29.05 dB.

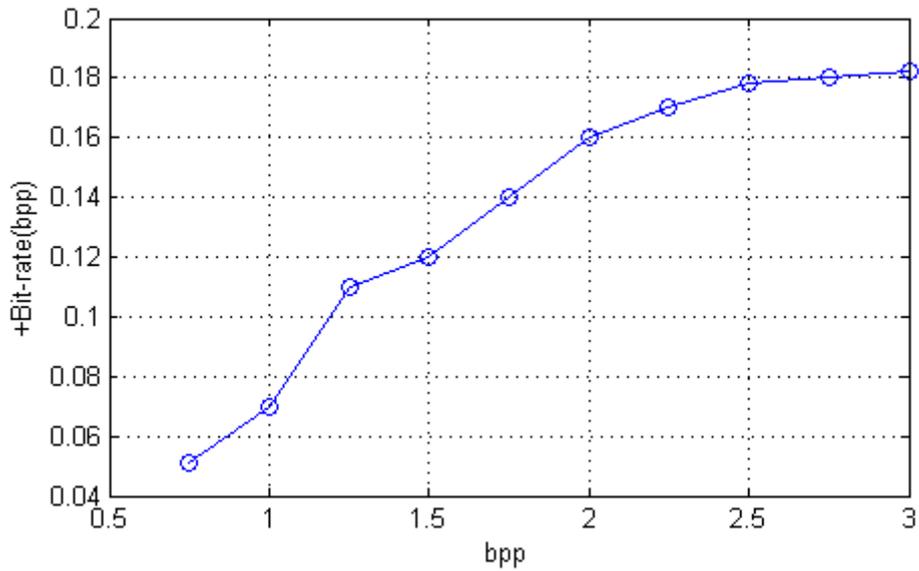


Figure 4.12 Différences de débit obtenues entre la compression en ondelettes et la compression en bandelettes à qualité constante.

La transformée en bandelettes permet comme on peut le constater sur la figure 4.12 de réduire le débit de 0,07 bpp pour un débit en ondelettes de 1 bpp soit 7% et une réduction de 0,18 bpp pour un débit en ondelettes de 3 bpp soit 6,0% à qualité constante.

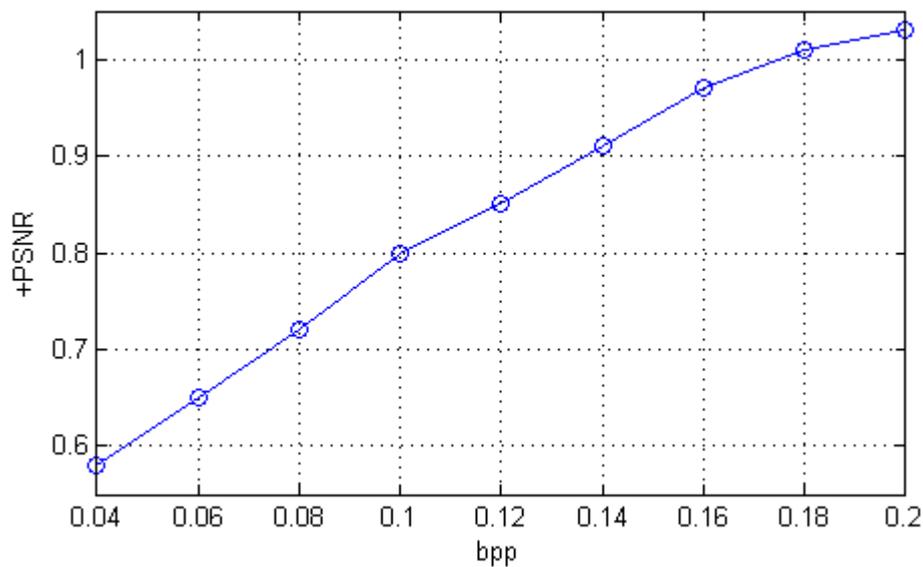


Figure 4.13 Différences de qualité obtenues entre la compression en bandelettes et la compression en ondelettes en fonction des différences de débit.

La figure 4.13 traduit les différences de qualité en fonction des différences des débits obtenues avec la compression en bandelettes et la compression en ondelettes. Par exemple, un gain de 0,9 dB en PSNR correspond à une augmentation du débit de 0,14 bpp et un gain de 1,2 dB en PSNR correspond à une augmentation du débit de 0,14 bpp.

4.7 Discussion

Nous avons, dans ce chapitre, mené une étude assez approfondie des performances de la transformée en bandelettes par blocs, nous avons vu que cette dernière permet d'améliorer les résultats en compression par rapport à la transformée en ondelettes. Nous avons tracé, les performances obtenues avec la transformée en bandelettes relativement aux performances obtenues avec la transformée en ondelettes et nous avons obtenu des résultats nettement supérieurs avec les bandelettes. Dans la construction de la transformée en bandelettes, deux étapes sont fondamentales afin d'améliorer la compression : la constitution du dictionnaire de bases de bandelettes et l'optimisation du critère de choix de la base de bandelettes utilisée pour transformer chaque bloc. Les résultats de nos tests montrent un gain perceptuel important des bandelettes par rapport aux ondelettes, car la géométrie des images est mieux respectée et les phénomènes d'oscillations près des contours sont diminués. Nous avons comparé les performances en compression de la transformée en bandelettes aux performances de la transformée en ondelettes, nous avons obtenu un gain typique des bandelettes par rapport aux ondelettes de l'ordre de 0.6dB pour l'image Lena et de 1.3dB pour l'image Barbara. Nous avons adapté notre méthode à des images de Spot5, nous avons obtenu des résultats assez satisfaisants du point de vue taux de compression, rapport signal sur bruit crête (PSNR), comparons les résultats de la transformée en bandelettes avec ceux de la transformée en ondelettes nous avons obtenu un gain moyen sur l'ensemble des images de test de 0.8 dB.

Conclusion et perspectives

Au cours de ce travail, nous avons étudié les possibilités offertes par la transformée en bandelettes pour la compression d'images. Nous avons d'abord exposé le principe de base de la théorie des ondelettes ainsi que les fondements de la transformée en ondelettes et de l'analyse en multi-résolution. Les ondelettes orthogonales ou bi-orthogonales permettent une représentation efficace des zones de régularités homogènes des images, que ce soit les singularités ponctuelles, les textures homogènes ou les zones uniformément régulières. Cependant, elles ne capturent pas les régularités géométriques des images le long des contours. Nous avons ensuite présenté la première génération de la transformée en bandelettes proposée par Le Pennec dans sa thèse [46]. Ces bandelettes sont obtenues à partir de déformations d'ondelettes anisotropes permettant via une rectification de capturer à la fois la régularité le long des contours et la régularité de zones. Nous avons mis en évidence les dépendances qui subsistent entre coefficients après transformée en ondelettes des images. Nous avons vu la seconde génération de la transformée en bandelettes, la première version de ses bandelettes développée par Peyré [47] est construite au-dessus d'une transformée en ondelettes 2D, ces bandelettes exploitent les régularités géométriques le long des contours dans les sous-bandes de la transformée en ondelettes, les géométries considérées sont linéaires à l'intérieur des blocs issus d'une segmentation en *quadtree* des sous-bandes de la transformée en ondelettes de l'image. La transformée de Haar monodimensionnelle est effectuée sur les coefficients d'ondelettes de chaque bloc réordonnés selon la direction de la géométrie. La seconde version est la transformée en bandelettes par groupement. Dans cette version les sous-bandes de la transformée en ondelettes sont segmentées en blocs de 4×4 ce qui permet d'économiser le calcul et la transmission du *quadtree*. Chaque bloc de coefficients d'ondelettes est alors transformé dans chacune des bases de ce dictionnaire. Pour un bloc de coefficients d'ondelettes, la meilleure représentation de ce bloc en termes de débit-distorsion est retenue pour la compression. Nous avons optimisé plusieurs paramètres de la transformée en bandelettes. Nous avons vu que la post-transformée de blocs de taille supérieure à 4×4 n'a pas d'intérêt puisqu'en général les corrélations ne sont significatives qu'entre coefficients d'ondelettes séparés par moins de trois coefficients. De plus, la compression avec des blocs de plus grande taille est moins performante. Sous hypothèse bas et moyen débits, Le Pennec et Mallat ont donné une formule théorique de multiplicateur de Lagrange optimal. Étrangement, en partant d'une hypothèse différente, l'hypothèse haute-résolution, nous avons obtenu la même formule avec la même constante multiplicative après application numérique. Nous avons mené une étude assez approfondie des performances de la transformée en bandelettes par blocs, nous avons vu que cette dernière permet d'améliorer les résultats en compression par rapport à la transformée en ondelettes dans le cas d'un simple codage. Nous avons tracé, les performances obtenues avec la transformée en bandelettes relativement aux performances obtenues avec la transformée en ondelettes et nous avons obtenu des résultats nettement supérieurs avec les bandelettes. Dans la

construction de la transformée en bandelettes, deux étapes sont fondamentales afin d'améliorer la compression : la constitution du dictionnaire de bases de bandelettes et l'optimisation du critère de choix de la base de bandelettes utilisée pour transformer chaque bloc. Les résultats de nos tests montrent un gain perceptuel important des bandelettes par rapport aux ondelettes, car la géométrie des images est mieux respectée et les phénomènes d'oscillations près des contours sont diminués. Nous avons comparé les performances en compression de la transformée en bandelettes aux performances de la transformée en ondelettes. Nous avons obtenu un gain typique des bandelettes par rapport aux ondelettes de l'ordre de 0.5dB pour l'image Lena et de 1.3dB pour l'image Barbara. Nous avons adapté notre méthode à des images de Spot5, nous avons obtenu des résultats assez satisfaisants du point de vue taux de compression, rapport signal sur bruit crête (PSNR), comparons les résultats de la transformée en bandelettes avec ceux de la transformée en ondelettes nous avons obtenu un gain moyen sur l'ensemble des images de test de 0.8 dB. Les performances des bases de bandelettes dépendent de type d'image à traiter, en effet les images ayant des contours intervenant dans toutes les directions présentant des régularités géométriques dans la direction de ces derniers donnent de meilleurs résultats. Au cours de notre travail nous avons utilisé des bases de bandelettes directionnelles, cependant la transformée en bandelettes choisie sur chaque bloc n'étant pas forcément liée à la géométrie du bloc, nous proposons donc des bases de bandelettes non-directionnelles et des bases de bandelettes construites par ACP pour exploiter au mieux les dépendances qui ne sont pas prises en compte par les bases de bandelettes directionnelles.

Annexe A

Images

Les images utilisées pour les tests en compression au cours de cette thèse sont des images SPOT cinquième génération, les images ont une résolution de 5m et 2.5m, elles sont en niveau de gris avec 256 niveaux soit 8 bits par pixel. Les segments d'images de taille 512*512 représentés ci-dessous ont été utilisés pour les tests en compression.

Ensemble d'images de test



Arzew, Algérie



Maures, France



Shaanxi, Chine



Ljubljana, Slovénie



Alicante, Espagne



Fleuve de Sénégal, Sénégal

Annexe B

Preuves diverses

Théorème d'optimisation de l'allocation débit-distorsion

La preuve de ce théorème peut être trouvée dans [45]. Elle est retranscrite ici.

Théorème. Soit le problème d'allocation contraint suivant :

$$\min_{S \in \mathcal{S}} D(S) \quad \text{D.1}$$

$$R(S) \leq R_T \quad \text{D.2}$$

Pour tout $\lambda \geq 0$, la solution $S^*(\lambda)$ au problème non contraint

$$\min_{S \in \mathcal{S}} D(S) + \lambda R(S) \quad \text{D.3}$$

est aussi la solution au problème contraint avec la contrainte $R(S) \leq R(S^*(\lambda))$

Démonstration

Pour la solution $S^*(\lambda)$ au problème non contraint D.3 on a

$$\forall S \in \mathcal{S}, D(S^*) + \lambda R(S^*) \leq D(S) + \lambda R(S)$$

ce qui est équivalent à

$$\forall S \in \mathcal{S}, D(S^*) - D(S) \leq \lambda (R(S) - R(S^*))$$

Comme cette inégalité est vérifiée pour tout $S \in \mathcal{S}$, elle est aussi vérifiée pour tout S de n'importe quel sous-ensemble de \mathcal{S} . En particulier, elle est vérifiée pour tout S du sous-ensemble \mathcal{S}^* qui permet de respecter la contrainte $R(S) \leq R(S^*(\lambda))$. Ce sous-ensemble est défini par

$$\mathcal{S}^* = \{S | R(S) \leq R(S^*(\lambda))\}$$

comme $\lambda \geq 0$, on a

$$\forall S \in \mathcal{S}^*, D(S^*) - D(S) \leq 0$$

$D(S^*)$ est donc minimum sur le sous-ensemble \mathcal{S}^* qui permet de respecter la contrainte $R(S) \leq R(S^*(\lambda))$. L'objectif est donc atteint.

Calcul de la distorsion sous hypothèse de quantification haute résolution

Sous hypothèse d'une quantification scalaire uniforme à haute résolution, l'erreur quadratique moyenne D s'exprime en fonction du pas de quantification q .

$$D \approx \frac{q^2}{12} \quad D 4$$

Démonstration

L'erreur quadratique moyenne d_k sur l'intervalle de quantification $I_k = [kq, (k+1)q]$ de largeur q vaut

$$d_k = \int_{I_k} (x - Q_q(x))^2 p(x) dx$$

Où $p(x)$ est la densité de probabilité des coefficients x . L'erreur quadratique moyenne due à la quantification scalaire uniforme infinie vaut donc

$$D = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{I_k} (x - Q_q(x))^2 p(x) dx$$

Sous hypothèse haute résolution, la densité de probabilité $p(x)$ est presque constante sur chaque intervalle de quantification. On a donc $p(x) \approx p_k$ pour tout $x \in I_k$ avec p_k la densité de probabilité moyenne sur l'intervalle I_k . L'erreur quadratique moyenne est donc approchée par

$$D \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k \int_{I_k} (x - Q_q(x))^2 dx$$

Or un coefficient quantifié $x \in I_k$ est reconstruit au milieu de l'intervalle de quantification $I_k = [kq, (k+1)q] : Q_q(x) = \left(k + \frac{1}{2}\right)q$. La densité de probabilité étant constante sur chaque intervalle de quantification, cette valeur de reconstruction permet de minimiser la distorsion. On a donc

$$D \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k \int_{I_k} \left(x - \left(k + \frac{1}{2}\right)q\right)^2 dx$$

Par changement de variable $t = x - (k + 1)q$ cette intégrale s'écrit

$$D \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k \int_{-q/2}^{q/2} t^2 dt$$

$$\approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k \frac{q^3}{12}$$

Or $q p_k$ est la probabilité d'apparition d'un coefficient x dans l'intervalle I_k . Pour une quantification scalaire uniforme infinie on a donc $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q p_k = 1$ d'où l'expression de la distorsion D en fonction du pas de quantification q sous hypothèse haute résolution et pour une quantification scalaire uniforme infinie

$$D \approx \frac{q^2}{12}$$

Calcul du débit sous hypothèse de quantification haute résolution

Sous hypothèse d'une quantification scalaire uniforme à haute résolution, le débit moyen R s'exprime en fonction du pas de quantification q et de l'entropie différentielle du signal à quantifier $h(X)$

$$R \approx h(X) - \log_2 q \quad \text{D 5}$$

Démonstration

Le débit entropique d'une source sans mémoire et produisant des tirages indépendants et identiquement distribués est

$$R = - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pr(k) \log_2 \Pr(k)$$

Où $\Pr(k)$ est la probabilité d'apparition d'un coefficient x dans l'intervalle I_k . Sous hypothèse haute résolution, cette probabilité peut être approchée par $\Pr(k) \approx q p_k$ où p_k est la densité de probabilité moyenne sur l'intervalle I_k . Pour une quantification scalaire uniforme infinie, le débit entropique est donc approché par

$$R \approx - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q p_k \log_2 q p_k$$

$$\approx - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q p_k \log_2 q - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q p_k \log_2 p_k$$

Or on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q p_k = 1$$

Et

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q p_k \log_2 p_k \approx \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \log_2(P(x)) dx$$

L'entropie différentielle du signal à quantifier est définie par

$$h(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \log_2(P(x)) dx$$

D'où l'expression du débit entropique R en fonction du pas de quantification q et l'entropie différentielle $h(X)$

$$R \approx h(X) - \log_2 q$$

Annexe C

C1 Coefficients des filtres d'ondelettes Orthogonales

Désignation	n	$\sqrt{2} * h(n)$
Haar	0	+0.707106781187
	1	+ 0.707106781187
Daubechies 04	0	+ 0.4829629131445341
	1	+0.8365163037378079
	2	+ 0.2241438680420134
	3	-0.1294095225512604
Daubechies 06	0	+ 0.3326705529500825
	1	+ 0.8068915093110924
	2	+0.4598775021184914
	3	-0.1350110200102546
	4	-0.0854412738820267
	5	+ 0.0352262918857095
Daubechies 08	0	+ 0.2303778133088964
	1	+ 0.7148465705529154
	2	+ 0.6308807679398587
	3	-0.0278937694168599
	4	-0.1870348117190931
	5	+ 0.0308413818355607
	6	+ 0.0328830116668852
	7	-0.0105974017850690
Daubechies 10	0	
	1	+0,1601023979741929
	2	+0,6038292697971895
	3	+0,7243085284377726
	4	+0,1384281459013203
	5	-0,2422948870663823
	6	-0,0322448695846381
	7	+0,0775714938400459
	8	-0,0062414902127983
	9	-0,0125807319990820
	10	+0,0033357252854738

Daubechies 12	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11	+0,1115407433591095 +0,4946238003984533 +0,7511339080210959 +0,3152503517091982 -0,2262646939654400 -0,1297668675672625 +0,0975016055873225 +0,0275228655303053 +0,0315820393174862 +0,0005538422011614 +0,0047772575109455 -0,0010773010853085
Désignation	n	$\sqrt{2} * h(n)$
Daubechies 14	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13	+0,0778520540850037 +0,3965393194818912 +0,7291320908461957 +0,4697822874051889 -0,1439060039285212 -0,2240361849938412 +0,0713092192668272 +0,0806126091510774 -0,0380299369350104 -0,0165745416306655 +0,0125509985560086 +0,0004295779729214 -0,0018016407040473 +0,0003537137999715
Daubechies 16	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	+0,0544158422401072 +0,3128715909143166 +0,6756307362973495 +0,5833346836342139 -0,0158291052563853 -0,2840133429615824 +0,0004274845739124 +0,1287474266204863 -0,0173693010018090 -0,0440882539307971 +0,0139810279174001 +0,0087460940471063 -0,0048703529934520 -0,0003917403733770 +0,0006734494064506 -0,0001174767841248

Daubechies 18	0	+0,0380779473638778
	1	+0,2438347746125858
	2	+0,6048231236900955
	3	+0,6572880780512736
	4	+0,1331973858249883
	5	-0,2932737832791663
	6	-0,0968407832229492
	7	+0,1485407493381256
	8	+0,0307256814793385
	9	-0,0676328200613279
	10	+0,0002509471148340
	11	+0,0273616621236798
	12	-0,0047232047377518
	13	-0,0042815036824635
	14	+0,0018476468830563
	15	+0,0002303857635232
	16	-0,0002519631989427
	17	+0,0000393473203163
	18	
Désignation	n	$\sqrt{2} * h(n)$
Daubechies 20	0	+0,0266700579005473
	1	+0,1881768000776347
	2	+0,5272011889315757
	3	+0,6884590394534363
	4	+0,2811723436605715
	5	-0,2498464243271598
	6	-0,1959462743772861
	7	+0,1273693403357541
	8	+0,0930573646035547
	9	-0,0713941471663501
	10	-0,0294575366281399
	11	+0,0332126710593612
	12	+0,0036065535669870
	13	-0,0107331754833007
	14	+0,0013953517470688
	15	+0,0019924052951925
	16	-0,0006858566949564
	17	-0,0001164668551285
	18	+0,0000935886703202
	19	-0,0000132642028945

C2 Ondelettes bi-orthogonales

Désignation	n	$h(n)$	$\tilde{h}(n)$
5/3	-2	-0.125	0.25 0.5 0.25
	-1	0.25	
	0	0.75	
	1	0.25	
	2	-0.125	
5/7	-3	-0.05 0.25 0.60 0.25 -0.05	-0.010714285714
	-2		-0.053571428571
	-1		0.260714285714
	0		0.607142857142
	1		0.260714285714
	2		-0.053571428571
9/7	-4	0.026748757411 -0.016864118443 -0.078223266529 0.266864118443 0.602949018236 0.266864118443 -0.078223266529 -0.016864118443 0.026748757411	-0.045635881557
	-3		-0.028771763114
	-2		0.295635881557
	-1		0.557543526229
	0		0.295635881557
	1		-0.028771763114
	2		-0.045635881557
	3		
	4		

Remarque

Seuls les filtres passe-bas sont donnés, les filtres passe-haut se déduisent en appliquant les formules suivantes:

Pour les filtres orthogonaux:

$$g(n) = (-1)^n h(1 - n)$$

Dans la pratique, on préfère utiliser la formule suivante qui donne un filtre causal ayant exactement le même support que $h(n)$

$$g(n) = (-1)^{1-n} h(L - 1 - n)$$

Pour les filtres bi-orthogonaux:

$$g(n) = (-1)^{1-n} \tilde{h}(1 - n)$$

$$\tilde{g}(n) = (-1)^{1-n} h(1 - n)$$

Bibliographie

- [1] **M.Nelson**, "*La compression de données Texte, Image, Son*", Edition Dunod, 1993.
- [2] **N. Moreau**, "*Techniques de compression des signaux*", Edition Masson, 1995.
- [3] **V. K. Goyal**. "*Theoretical foundations of transform coding*". *IEEE Signal Processing Magazine*, p. 9–21, septembre 2001.
- [4] **A.Buzo, A.H.Gray Jr, R.M.Gray, J.D.Markel**, "*Speech coding based up on vector quantization*", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-28, pp. 562-574, Oct. 1980.
- [5] **A.Gersho, R.M.Gray**, "*Vector quantization and signal compression* ", Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [6] **Olivier RIOUL**, "*ONDELETTES REGULIERES : APPLICATION A LA COMPRESSION D'IMAGES FIXES*", Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, France, Mars 1993.
- [7] L'aventure du programme SPOT. CNES Presse, novembre 2003.
- [8] **C. Lambert-Nebout, C. Latry, G. Moury, C. Parisot, M. Antonini et M. Barlaud**. "*Onboard optical image compression for future high resolution remote sensing systems*". Dans *Proceedings of SPIE*, tome 4115, p. 332–346. 2000.
- [9] **C. Lambert Nebout, C. Latry et G. Moury**. "*La compression embarquée d'images pour les systèmes optiques d'observation spatiale*". Dans *GRETSI '01*. 2001.
- [10] **C. Latry et B. Rouge**. SPOT5 THR mode. Dans "*Earth observing systems*" III, p. 480–491. SPIE, San Diego, CA, 1998.
- [11] **DAVID A. HUFFMAN**. "*A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes*". *IRE Proc*, vol. 40, pages 1098–1101, 1952.
- [12] **D.T. Pham**. "*Fast algorithms for mutual information based independent component analysis*". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52(10), p. 2690–2700, octobre 2004.
- [13] **A. Said**. "*Example of application for image compression, 1999*".
URL http://www.cipr.rpi.edu/~pearlman/papers/ex_spiht-ezw.pdf.
- [14] **G. Peyré et S. Mallat**. "*Discrete bandelets with geometric orthogonal filters*". Dans *International Conference on Image Processing*, tome 1, p. 65–68. IEEE, septembre 2005.
- [15] **X. Delaunay, M. Chabert, V. Charvillat, G. Morin et R. Ruiloba**. "*Satellite image compression by directional decorrelation of wavelet coefficients*". Dans *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, p. 1193–1196. IEEE, Las Vegas, NV, avril 2008.
- [16] **N.SADOUN**, "*Compression d'Images Fixes par une Méthode Hybride*", thèse de magister en électronique, UMMTO, juin 2005.

- [17] **S. Ameer, A.H.Adane, M.Lahdir**, "*Compression d'images MÉTÉOSAT en sous bandes par transformation discrète en cosinus et quantification vectorielle*", télédétection, vol.2, n°4, pp.255-266, 2002.
- [18] **D. ALOUACHE**, "*Segmentation multi-résolution d'images texturées basée sur la transformation en ondelettes : Application aux images Météosat.*", thèse de magister en électronique, UMMTO, juin 2010.
- [19] **M.SAFIA Abdelmunaime**. "*Application de la transformation en ondelettes à la classification texturale multi-résolution des images satellitales*". Centre Régional Africain des sciences et Technologies de l'ESPACE en Langue Française. 2003. Thèse de mastère
- [20] **S. Grgic** "*Performance Analysis of Image Compression Using Wavelets*, IEEE Trans. On Industrial Electronics, vol. 48, no. 3, June 2001
- [21] **S. Mallat**. "*Multi-resolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L_2(R)$* ", Trans. Am. Math. Soc. vol. 315, N°1, pp. 69-87, sep. 1989.
- [22] **S. Mallat**. "*Multi-frequency channel decomposition of images and wavelet models*", IEEE Trans. on Acoustic Speech and Signal Proc., vol.37,N°12 , pp. 2091-2110, dec. 1989.
- [23] **S. Mallat**, "*A theory for multi-resolution signal decomposition : the wavelet representation*", IEEE, PAMI, vol. 11, N°7, pp. 674-693, july 1989.
- [24] **I. Daubechies**, "*Orthonormal bases of compactly supported wavelets*", Com. on Pure Appl. Math., vol. 41, pp. 909-996, nov. 1988.
- [25] **MALLAT S.** "*A Wavelet tour of signal processing*". Academic Press, San Diego, 2eme edition, 1999.
- [26] **Bernard Delyon**. "*Ondelettes orthogonales et bi-orthogonales*", IRMA, Université de Rennes-I.
- [27] **Florian Bomers**. "*Wavelets in real time audio processing: Analysis and simple implementation*". 2000
- [28] **A.Cohen**. "*Ondelettes et traitement numérique du signal*". 1992. Edition MASSON.
- [29] **Frédéric Truchetet**. "*Ondelettes pour le signal numérique*". Paris, 1998. Editions Hermes.
- [30] **René Alt**. "*La transformée en ondelettes*". Université Pierre et Marie Curie
- [31] **Luc Claustres**. "*Introduction aux Ondelettes*". DESS2IN 2002-2003.
- [32] **KRICHA Anis, KHALIFA Nawres, MBANAIBEYE Jerome, HAMROUNI Kamel**. "*Compression d'images scintigraphiques par régions d'intérêt basée sur l'algorithme de SPIHT*". Laboratoire des Systèmes et Traitement du Signal (LSTS). Mars 2004.
- [33] **J.D. Villasenor, B.Belzer and J.Liano** "*Wavelet Filter Evaluation for image Compression*", Proc. In IEEE International conference on Image Processing ICIP'97, Vol.1, pp.624-627,1997.
- [34] **O. Rioul, P. Duhamel**, "*Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transform*", IEEE Transaction on information theory, vol.38, N°2, pp. 569-586, mar.1992.

- [35] **J.Odegard, C.Burrus**, "*Smooth biorthogonal wavelets for applications in image compression*", DSP Workshop, Loen, Norway, 1996.
- [36] **G. Donovan, J. Geronimo, D. Hardin, P. Massopust**, "*Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions*", SIAM J. Math. Anal., vol. 27, N_4, pp. 1158-1192, 1996.
- [37] **A.Cohen, I.Daubechies, J.C.Feauveau**, "Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets", Comm. On Pure and Applied Mathematics, 1992, vol.XLV, pp.485-560.
- [38] **Nabila SMAIL**. "*Contribution à l'analyse et à la recherche d'information en texte intégral. Application de la Transformée en Ondelettes pour la recherche et l'analyse de textes*".Université Paris-Est. 2009. Thèse de doctorat.
- [39] **Erwan Le Pennec**. "*Modélisation d'images par ondelettes*", Mémoire de DEA, France, 1997
- [40] **Demaeyer Jonathan, Bebronne Michael et Forthomme Sébastien**"*Les ondelettes*" Université Libre de Bruxelles, Faculté des Sciences, Département de Physique.
- [41] **E. Yeung** "*Image Compression Using Wavelets*", IEEE, CCECE, 1997
- [42] **Jerome M. Shapiro**"*Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients*", IEEE Transactions on Signal Processing. Vol. 41. N° 12. Decembre 1993.
- [43] **Amir Said, William A. Pearlman**, "*A new Fast and efficient Image codec based on set partitioning in Hierarchical Trees* ", IEEE, June 1996.
- [44] JPEG2000, .URL <http://www.jpeg.org/jpeg2000/>.
- [45] **Erwan Le Pennec, Stéphane Mallat**. "*Representation d'Image par Bandelettes et Application à la Compression*". CMAP / Ecole Polytechnique 91128 PALAISEAU
- [46] **E. Le Pennec**. "*Bandelettes et représentation géométrique des images*". Thèse de doctorat, École Polytechnique, France, décembre 2002.
- [47] **G. Peyré**. "*Géométrie multi-échelle pour les images et les textures* ". Thèse de doctorat, École Polytechnique, France, 2005.
- [48] **B. K. Alpert**. "*A class of bases in L^2 for the sparse representation of integral operators* ". SIAM Journal on Mathematical Analysis, 24, p. 246–262, 1993.
- [49] **J. Liu et P. Moulin**. "*Information-theoretic analysis of interscale and intrascale dependencies between image wavelet coefficients*". *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(11), p. 1647–1658, novembre 2001.
- [50] **X. Delaunay, C. Thiebaut et V. Charvillat**. Compression embarquée d'images satellites : vers l'exploitation de la géométrie. Dans "*Compression et Représentation des Signaux Audiovisuels*", p. 12–17. France Telecom R&D, Caen, France, novembre 2006.
- [51] **X. Delaunay**. "*Compression d'images satellite par post-transformées dans le domaine ondelettes*", Thèse de doctorat, Université de Toulouse, France, novembre 2008.
- [52] **E. Le Pennec and S. Mallat**. "*Bandelet Image Approximation and Compression* ". SIAM Multiscale Modeling and Simulation, page to appear, 2005.
- [53] **D. Donoho**. Wedgelets : "*Nearly-minimax estimation of edges*". Ann. Statist, 27 :353-382, 1999.

- [54] **F. Falzon et S. Mallat.** "*Analysis of low bit image transform coding*". IEEE Transactions on Signal Processing, 46(4), p. 1027–1042, avril 1998.
- [55] **E. Le Pennec et S. Mallat.** "*Sparse geometric image representations with bandelets*". IEEE Transactions on Image Processing, 14(4), p. 423–438, avril 2005.
- [56] **C. Parisot.** "*Allocations basées modèles et transformée en ondelettes au fil de l'eau pour le codage d'images et de vidéos*". Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, janvier 2003.
- [57] **B. M. Oliver, J. R. Pierce et C. E. Shannon.** "*The philosophy of PCM*". Proceedings of the IRE, 36(11), p. 1324–1331, novembre 1948.
- [58] **H. Gish et J. Pierce.** "*Asymptotically efficient quantizing*". IEEE Transactions on Information Theory, 14(5), p. 676–683, 1968.
- [59] CCSDS. Image Data Compression Informational Report CCSDS 120.1-G-1 Green Book, juin 2007.
- [60] **Y. Shoham et A. Gersho.** "*Efficient bit allocation for an arbitrary set of quantizers*". IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 36(9), p. 1445–1453, septembre 1988.
- [61] **STEPHANE MALLAT and GABRIEL PEYRE** "*Orthogonal Bandelet Bases for Geometric Images Approximation*".
- [62] **STEPHANE MALLAT. GABRIEL PEYRE** "*A review of Bandlet methods for geometrical image representation*". Numer Algor DOI 10.1007/s11075-007-9092-4, April 2007.
- [63] **Xiaobo Qu, Jingwen Yan, Guofu Xie, Ziqian Zhu and Bengang Chen** "*A novel image fusion algorithm based on bandelet transform*". CHINESE OPTICS LETTERS / Vol. 5, No. 10 / October 10, 2007.
- [64] **STEPHANE MALLAT and GABRIEL PEYRE,** "*A Matlab Tour of Second Generation Bandelets*".
- [65] **Ch. Dossal, E. Le Pennec, S. Mallat,** "*Bandlet Image Estimation with Model Selection*"
- [66] **E. LE PENNEC AND S. MALLAT,** "*BANDELET IMAGE APPROXIMATION AND COMPRESSION*", MULTISCALE MODEL. SIMUL, Vol. 4, No. 3, pp. 992–1039, March 2005.
- [67] **Gabriel Peyré, Stéphane Mallat,** "*DISCRETE BANDELETS WITH GEOMETRIC ORTHOGONAL FILTERS*".
- [68] **Gabriel Peyré, Stéphane Mallat,** "*Surface Compression with Geometric Bandelets*".