REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UniversitéMouloud Mammeri de Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences
DépartementdeMathématiques

Tasdawitn'Tizi-Ouzou

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme Master II en Recherche Opérationnelle

THÈME

Méthode Adaptée pour la résolution d'un problème quadratique convexe à variables bornées.

Réalisé par :

- Mr : LOUNACI Youcef.
- Mr : LOUNI Rachid.

Devant le jury :

- *Président* :Mr. OUANES M. M.C.A U.M.M.T.O
- *Rapporteur* :Mr. OUKACHA B. M.C.A U.M.M.T.O
- *Examinateur* :Mr. TALEB Y. M.A.A U.M.M.T.O
- Examinateur :Mr. KASDI K. M.A.A U.M.M.T.O

Promotion : 2011 - 2012

Remerciements

D'abord nous remercions le bon dieu de nous avoir donné santé, courage et foie pour réaliser ce travail avec volonté.

Tous nos vifs remerciements ; les notre profondes reconnaissances s'adressent à notre promoteur Mr OUKACHA Brahim à qui nous tenons à témoigner notre sincère gratitude de nous avoir confié ce sujet intéressant et pour les conseils, et son aide pour accomplir notre travail.

Que Monsieur le président et Messieurs les membres de jury trouvent ici l'expression de notre gratitude de notre respect pour nous avoir fait l'honneur d'examiner et juger notre travail.

Nous remercions nos très chers parents pour leurs soutiens et leurs encouragements durant notre cycle d'étude.

En fin nous remercions toute personne ayant participé d'une manière ou d'une autre à la réalisation de notre travail.

Rachid, Youcef

REMERCIEMENTS

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

- *A la mémoire de mon père, qui a toujours cru en moi et qui m'a toujours encouragé, je ne saurais exprimer mon regret de ne pas l'avoir parmi nous aujourd'hui, puisse-t-il reposer en paix.*
- *A mon adorable et chère mère que j'aime énormément, pour sa présence et son soutien, pour son dévouement mais surtout pour la confiance qu'elle a toujours eu en moi et à laquelle tous les mérites sont rendus, ma mère toi qui attendais se jour avec impatience.*
- *Je tien aussi a dédié ce modeste travail à ma grande famille.*
- *A mes frères, mes sœurs et ma belle-sœur.*
- *A tous mes oncles et mes tantes.*
- *A tous mes cousins et mes cousines.*
- *A mon neveu et mes nièces à vous les adorables (Sami, Kahina, Chahinaz, ainsi que la Petite et Aimable Manel).*
- *Tous mes chers amis et tout le groupe des anciens.*
- *Toute la section Recherche Opérationnelle et spécialement : Rahim, Hidouche, Nora.*
- *A mon Binôme Joseph.*
- *Tous les gens que j'aime dont je n'ai pas cité les noms.*

Rachid

DÉDICACES

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- *Mes très chers vava d yemma pour leurs sacrifices et leur soutien moral tout au long de mon cursus.*
- *Mes sœurs et mes frères.*
- *Mon neveu l'adorable Mathys.*
- *A toute ma famille.*
- *A toute la famille LOUNACI.*
- *Tous mes chers amis surtout Meziane, Kamel et Brahim.*
- *Toute la section Recherche Opérationnelle et spécialement : Rahim, Hidouche.*
- *A mon Binôme Rachid.*
- *Toute la section Science Exacte (2004 – 2007) et spécialement Rachid, Bachir, Hamid, Djaffer.*
- *A tout le groupe des anciens*
- *Tous ceux qui me sont chers et dont je n'ai pas cité le nom.*

Youcef

DEDICACES

TABLES DES MATIERES

Introduction générale

« Rien ne se passe dans le monde qui ne soit la signification d'un certain maximum ou d'un certain minimum.» «L.Euler ».

L'optimisation et plus particulièrement la programmation mathématique, vise à résoudre des problèmes où l'on cherche à déterminer parmi un grand nombre de solutions candidates, celle qui donne le meilleur rendement. Plus précisément, on cherche à trouver une solution satisfaisant un ensemble de contraintes, et qui minimise ou maximise une fonction donnée. L'application de la programmation mathématique est de plus en plus en expansion croissante et trouve beaucoup d'applications dans plusieurs domaines pratiques.

Faire de la programmation mathématique, c'est d'abord considérer un modèle. Celui-ci appartient à une catégorie de modèles normatifs, c'est-à-dire de modèles qui donnent une mesure, suivant un ou plusieurs critères, qu'il s'agit ensuite d'optimiser. Ce qui permet d'obtenir les meilleures mesures dans un espace de solution défini par les relations existantes entre les différents paramètres et variables du système modélisé.

En effet, la programmation mathématique monocritère se résume à rechercher un n-uplet x^*dans R^{n} qui maximise (ou minimise) une fonction scalaire (fonction objectif) sous des contraintes. De tels problèmes se formulent généralement ainsi :

$$\max_{x \in S} f(x),$$

Où

$$S = \{x \in R^n / h(x) = O, g(x) \leq 0, x \in X\} \quad (1)$$

Ici toutes les contraintes d'inégalités sont non strictes, vu que les problèmes où apparaissent des contraintes d'inégalités strictes sont assez difficiles, à cause du fait que le domaine réalisable ne sera plus nécessairement fermé. Sachant qu'on peut toujours remplacer une égalité par une paire d'inégalités non-strictes, on pourrait formuler un modèle général où il n'y aurait que des contraintes d'inégalités.

L'optimisation quadratique est l'une des théories de la programmation mathématique la mieux adaptée à la formulation des problèmes pratiques [35]. Cette branche est très importante d'un point de vue pratique que théorique.

Plusieurs méthodes ont été développées pour la résolution de ce type de problèmes, parmi lesquelles on peut citer :

- ✓ **L'activation des contraintes [1] :** elle est utilisée dans le cas où S est donné par des contraintes d'inégalités, et où on considérera certaines contraintes d'inégalités comme des contraintes d'égalités pendant un certain nombre d'itérations. Cette méthode est utile pour les problèmes de taille raisonnable, ou pour lesquels on a une idée des contraintes actives (contrainte d'égalité) à l'optimum.

- ✓ **Algorithme du gradient avec projection [2] :** Cet algorithme est utilisé dans le cas où **S** est un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et le problème $min_{x\epsilon S}\|x - x_0\|$ admet une solution unique. C'est la projection de x_0 sur $\boldsymbol{S}$**,** notée $P_s x_0$. Cet algorithme génère la suite des itérés par la relation $x_{k+1=P_S}(x_k - \alpha_k g_k)$. La méthode du gradient avec projection est un algorithme efficace pour identifier les contraintes actives en la solution en un nombre fini d'étapes ; c'est pour cela qu'elle peut être combinée avec la méthode de l'activation des contraintes.

- ✓ **Les algorithmes de point intérieur [3] :** Ces méthodes, étudiées maintenant depuis plus de 20 ans, ont d'abord été développées en 1984 par Karmarkar [4] dans le cadre de problèmes linéaires, avant d'être généralisées à d'autres problèmes plus généraux, notamment la programmation quadratique et/ou convexe [3]. Dans cette méthode, les itérés approchent la solution par l'intérieur de S et nécessitent un nombre d'itérations qui croît de façon polynomiale avec le nombre de variables.

Avant 1984, tout problème d'optimisation linéaire se résolvait par la méthode du simplexe développée par Dantzig [5] ou par une variante de celle-ci. Des recherches ont été menées pour mettre au point une autre méthode mais aucune de celles proposées n'améliorait celle du simplexe. Aussi, pendant une quarantaine d'années, cette méthode domina l'optimisation linéaire. Puis, dans les années 70, la théorie de la complexité devint une partie intégrante de l'optimisation linéaire, si bien que les méthodes développées doivent converger en un temps polynomial, c'est-à-dire de résoudre le problème en un nombre d'opérations qui doit être borné par un polynôme fonction de la taille du problème. Mais la méthode du simplexe n'a pas cette propriété, comme l'ont montré Klee et Minty [6]. On se demanda alors si un algorithme d'optimisation linéaire avait cette propriété. En 1979, Khachian proposa un algorithme de programmation linéaire appelé méthode des ellipses de Khachian [7]. Bien que convergeant polynomialement en théorie, cet algorithme convergeait en pratique moins vite que le simplexe. Toutefois, Khachian montra théoriquement l'existence d'algorithmes à convergence polynomiale. Il restait maintenant à en trouver qui soient efficaces en pratique. Ce que fit Karmarkar en 1984 [8]. Il proposa en effet un algorithme de points intérieurs à convergence polynomiale pour résoudre des problèmes d'optimisation linéaire. Cela provoqua un regain d'intérêt pour les méthodes de points intérieurs, aussi bien en programmation linéaire qu'en programmation non linéaire.

Le succès des méthodes de points intérieurs pour la résolution des problèmes de programmation linéaire entraîna son extension aux problèmes de programmation non linéaire et en particulier aux problèmes de programmation quadratique convexes [9,10] ainsi qu'aux problèmes non linéaires convexes [11,12]. Il en découla l'envie de généraliser cette approche aux problèmes non linéaires et non convexes. El-Bakry et al. [13], McCormick et Falk [14], Akrotirianakis et al. [15], Nocedal [16,17,18] ont développé des algorithmes du type primaldual à convergence globale pour les problèmes non linéaires non convexes. Une bibliographie complète des différentes versions de ces méthodes peut être trouvée dans [19].

Le mémoire que nous présentons ici propose un algorithme de résolution d'un problème de programmation quadratique convexe à variables bornées. En s'inspirant de la méthode directe de support pour la résolution d'un programme linéaire, conçu par R. Gabassov et F.M. Kirillova [20,21], une nouvelle méthode dite adaptée pour la résolution d'un programme quadratique convexe à variables bornées a été réalisée, dont l'avantage par rapport à la méthode de simplexe [22] réside dans le gain en temps et en espace mémoire qu'elle présente. L'avantage réside aussi dans le fait qu'elle manipule les bornes des variables telles qu'elles se présentent ; sans chercher à les modifier. De plus, elle permet de calculer les solutions optimales à ε prés où ε est un nombre positif ou nul choisi à l'avance.

Ce travail commence par une introduction et s'articule autour de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on à passer en revue quelques rappels d'algébre et certains résultats classiques importants, concernant les fonctions quadratiques, la convexité, les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tcher. Nous avons aussi exposé une variante de la méthode de Wolfe, proche de la méthode du simplexe, adapté au cas standard.

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution du même problème standard par la méthode directe de support.

Dans le troisième chapitre, on présente l'algorithme de la méthode adaptée de support pour la résolution d'un programme quadratique convexe à variable bornées.

Le quatrième chapitre est consacré à l'implémentation des deux méthodes précédentes sous le logiciel MATLAB. On achève notre travail par une conclusion générale.

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne quelques rappels sur l'algèbre linéaire et la programmation mathématique.

On rappelle tout d'abord les propriétés essentielles des formes quadratiques, ainsi que la notion des ensembles et fonctions convexes. Par la suite, on résume les résultats fondamentaux sur l'optimisation non linéaire à la fin on expose une variante de la méthode de Wolfe.

1.1.1 Vecteurs et matrices

Définition 1.1.1 : Soient $n, m \in N^*$. Une matrice d'ordre m x n à cœfficients dans R est un tableau a deux dimensions, ayant m lignes et n colonnes, representé sous la forme suivante :

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}(\mathrm{I}, \mathrm{J}) = \{\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}, \quad \mathrm{i} \in \mathrm{I}, \mathrm{j} \in \mathrm{J}\} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & \cdots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1} & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix}$$

Où $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ et $J = \{1, 2, \ldots, \mathrm{n}\}$ représentent respectivement l'ensemble des indices des lignes et colonnes de A. Pour des calculs pratiques, la matrice A se note aussi

$$A = (a_1, a_2, \ldots \ldots \ldots a_j, \ldots \ldots \ldots a_n) = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ . \\ . \\ . \\ A_j^T \\ . \\ . \\ A_m^T \end{pmatrix}, \qquad a_j = A(I, j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

Tel que a_j est un vecteur-colonne de dimension m.

$A_i^T = A(\, i,\ J) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots \ldots \ldots a_{in})$ est un vecteur-ligne de dimension n.
La matrice A est dite carrée si on a $n = m$; de plus, si $A = A^T$, la matrice est dite symetrique. La matrice identité d'ordre n sera notée I_n.

1.1.2. Matrices et vecteurs partitionnés

On peut effectuer le produit d'une matrice A et d'un vecteur x, après les avoir partitionnés judicieusement. On dit alors qu'on a effectué le produit par blocs. En effet, si l'on a

$$A = [A_1 | A_2], \qquad x = \left[\frac{x_1}{x_2}\right]$$

Alors en peut écrire :

$$Ax = [A_1 | A_2] \left[\frac{x_1}{x_2}\right] = A_1 x_1 + A_2 x_2$$

De même, pour

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \hline b_2 \end{bmatrix}$$

L'équation $Ax = b$ peut alors s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \end{Bmatrix}$$

On peut partitionner une matrice d'une manière arbitraire. Par exemple, si $A = A(I, J)$ est une matrice d'ordre $(m\ x\ n)$, J_B et J_N sont deux sous-ensembles quelconques de J, tels que :

$$|J_B| = m \ , \ \mathrm{J_B} \cup J_N = J \ , \ \mathrm{J_B} \cap J_N = \emptyset,$$

alors on peut partitionner A de la façon suivante :

$$A = \left(a_1, a_2, \ldots \ldots \ldots a_j, \ldots \ldots \ldots a_n\right) = [A_B|A_N],$$

avec

$$\mathrm{A_B} = \mathrm{A(I, J_B)}, \text{ et } \mathrm{A_N} = \mathrm{A(I\,, J_N)}.$$

Si $x = x(J) = x = \begin{bmatrix} x_B \\ \hline x_N \end{bmatrix}$, avec $x_B = x(J_B)$, $x_N = x(J_N)$, alors on peut écrire :

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \sum_{j \in j_B} a_j x_j + \sum_{j \in J_N} a_j x_j = A(I, J_B)x(J_B) + A(I, J_N)x(J_N) = A_B x_B + A_N x_N.$$

1.2. Espace vectoriel

Un vecteur (point) x de R^n est une collection ordonnée $x = (x_1, x_2, \ldots \ldots .., x_n)^T$ de n réels x_j, $\mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$ appelés composantes de x. Le nombre n est appelé dimension du vecteur.

L'espace R^n est l'ensemble de toutes les collections de ce type. Il est muni des deux opérations linéaires de base :

- **Addition** : La somme de deux vecteurs $x, y \in R^n$ est un vecteur de R^n, defini par : $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots \ldots .., x_n + y_n)^T$, (1.1)
- **Multiplication par des réels** : Soit $x = (x_1, x_2, \ldots \ldots .., x_n)^T$ un vecteur de R^n.La multiplication du vecteur x par le réel λ est aussi un vecteur de R^n, défini comme suit :

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \ldots .., \lambda x_n)^T, \tag{1.2}$$

La structure que nous obtenons (l'ensemble de tous les vecteurs n-dimensionnels avec les deux opérations qu'on vient de définir) s'appelle l'espace vectoriel réel.

1.2.1. Sous-espace linéaire

Un sous-ensemble S non vide de R^n est appelé sous-espace linéaire de R^n si les deux opérations (1.1) et (1.2) sont stables dans S, autrement dit :

$$\forall\, x, y \in S, \ \forall\, \alpha, \beta \in R \Longrightarrow \alpha x + \beta y \in S.$$

1.2.2. Sous-espace affine

Un sous-ensemble A de E est un sous-espace affine si :

$$\forall\, x, y \in A, \ \forall\, \alpha \in R, \qquad \alpha x + (1 - \alpha) y \in A.$$

Autrement dit, un sous-espace affine contient toujours la droite passant par deux de ses points x et y.

1.2.3. Combinaison linéaire

Etant donnés k vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_k$, et un ensemble de k scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Le vecteur b est dit combinaison linéaire des vecteurs $\{a_i\}_{i=1,\ldots,k}$ s'il s'écrit sous la forme :

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots \ldots + \lambda_k a_k. \tag{1.3}$$

L'expression (1.3) peut être écrite sous forme du produit d'une matrice et d'un vecteur comme suit :

$$b = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_k \end{pmatrix} = A\lambda,$$

Où a_j est la $j^{ième}$ colonne de la matrice A, et λ_j est le $j^{ième}$ élément du vecteur colonne λ.

Une combinaison linéaire où tous les cœfficients sont nuls est appelée combinaison linéaire triviale ; dans le cas contraire elle est appelée combinaison linéaire non triviale.

1.2.4. Indépendance et dépendance linéaire

Les vecteurs $a_1, a_2, \ldots a_k$ sont dits linéairement indépendants si :

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots \ldots + \lambda_k a_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

Les vecteurs a_i, $i = 1, \ldots \ldots, k$, sont dits linéairement dépendants s'il existe une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs, avec des scalaires λ_j , $j = 1, \ldots \ldots, k$, tous non nuls.

1.2.5. Noyau et image d'une matrice

Définition 1.2.1. Soit A une matrice d'ordre $m \times n$.

- Le noyau de A est l'ensemble

$$N(A) = \{x \in R^n : Ax = 0\},$$

- L'image ou l'espace image de A est l'ensemble

$$R(A) = \{y \in R^m : \exists x \in R^n, \qquad Ax = y\}.$$

Proposition :

- $N\ (A)$ est un sous-espace vectoriel de R^{n}.
- $R(A)$ est le sous-espace vectoriel de R^{m}, engendré par les colonnes de A.

1.2.6. Rang d'une matrice

Définition 1.2.2. On appelle rang d'une matrice, la dimension de l'image de la matrice A:

$$rang(A) = dimR(A). \tag{1.4}$$

Théorème 1.1. "Théorème de la dualité"
Soit A une matrice d'ordre $m\ x\ n$, alors

$$dim\ R(A) = dim\ R(A^T)\ ou\ rang(A) = rang(A^T).$$

Théorème 1.2. "Théorème du noyau-image"
Soit A une matrice d'ordre $m\ x\ n$, alors

$$dim\ R(A) + dim\ \mathrm{N}(A^T) = n.$$

1.3. Sous-espace complémentaire orthogonal

Le produit scalaire de deux x et y est le scalaire défini par :

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Le produit scalaire possède les propriétés suivantes :

- Commutativité : $x^T y = y^T x$;
- Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs: $x^T(y + z) = x^T y + x^T z$;
- Positivité : $x^T x \geq 0 \quad et \quad x^T x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Si $x^T y = 0$, les vecteurs x et y sont dits orthogonaux et on note $x \perp y$. Deux parties A et B de R^{n} sont dites orthogonales si :

$$\forall a \in A,\ \ \forall b \in B, \quad a^T b = 0.$$

Soit A une partie de R^n. On appelle orthogonal de A, le sous-ensemble de R^n défini par :

$$\mathrm{A}^{\perp} = \{x \in R^n / \forall\ a \in A, \qquad x^T \mathrm{a} = 0\}.$$

1.4. Discussion générale sur l'existence et le nombre de solutions d'un système linéaire

Soien m t et n deux nombres entiers. Un système de m équations linéaires à n inconnus $x_1, x_2, \dots \dots .., x_n$ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.5}$$

Où les coefficients a_{ij} sont des réels. Les nombres $b_1, b_2, \dots \dots .., b_m$ sont appelés les membres libres du système (1.5) ou les seconds membres. En posant

$$A = \left(a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\right),$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

Le système (1.5) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{b}. \qquad (1\ .6)$$

Tout vecteur x vérifiant les équations (1.5) s'appelle solution du système. Le système (1.5) est dit compatible s'il possède une ou plusieurs solutions. Dans le cas contraire, il est dit incompatible ou impossible.

D'une maniere générale, le système (1.6) possède une solution si le vecteur $\mathrm{b} \in \mathrm{R(A)}$, i.e, appartient au sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice A. Lorsque le vecteur b est nul, le système (1.6) est dit homogène. Tout système homogène possède la solution triviale $\mathrm{x} = 0$.

Définition 1.4.1 : Le système linéaire (1.6) est dit de rang complet en lignes si :

$\mathrm{rang(A)} = \mathrm{m}$, avec $\leq \mathrm{n}$, et de rang complet en colonnes si $\mathrm{rang(A)} = \mathrm{n}$, avec $\mathrm{m} \geq \mathrm{n}$.

Lemme 1.4.1 : Soit $\mathrm{m} \leq \mathrm{n}$ et $\mathrm{rang\,A} = \mathrm{m}$. Alors le système $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ admet toujours des solutions, quel que soit le second membre b :

(a) une solution unique si $\mathrm{m} = \mathrm{n}$,

(b) une infinite de solutions si $\mathrm{m} < \mathrm{n}$.

1.5. Propriétés des formes quadratiques [24]

Définition1.5.1 : Une fonction $\mathrm{F} : R^n \to \mathrm{R}$, est dite forme quadratique de n variables $x_1, x_2, \dots \dots .., x_n$ si elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x, \qquad (1.7)$$

Où $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un n-vecteur-ligne et $A = (a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ une matrice carrée d'ordre n.

Pour $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$, le coefficient du terme $x_i x_j$ s'écrit $a_{ij} + a_{ji}$. En vertu de cela, la matrice A peut-être supposée symétrique. En effet, en définissant de nouveaux coefficients

$$d_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

On obtient une nouvelle matrice D symétrique telle que :

$$D = \left(d_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\right) \quad \text{avec} \quad d_{ij} = d_{ji} = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}.$$

Il est clair qu'après une redéfinition des coefficients, la valeur de la forme quadratique F (x) reste inchangée pour tout point $x \in R^n$:

$$\mathrm{F}\,(x) = x^T A x = x^T D x.$$

1.5.1. Gradient d'une forme quadratique

Définition 1.5.2 : Soit $F : R^n \to R$ une fonction réelle continument différentiable. Son gradient au point x est défini par :

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \qquad (1.8)$$

Soit une forme quadratique et D sa matrice symétrique associée :

$$F\,(x) = x^T D x. \qquad (1.9)$$

En écrivant la matrice D sous forme de vecteurs-colonnes

$$D = (d_1, d_2, \dots, d_n),$$

L'expression (1.9) peut se mettre sous la forme suivante

$$F(x) = \left(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\right) \begin{pmatrix} d_1^T x \\ d_2^T x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_j^T x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n^T x \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j d_j^T x.$$

La dérivée partielle de F par rapport à chaque variable x_j est donneé par :

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = x_1 d_{1j} + \cdots + x_{j-1} d_{(j-1)j} + d_{jj}^T x + x_j d_{jj} + \cdots + x_n d_{nj}$$

$$= x_1 d_{1j} + \cdots + x_{j-1} d_{(j-1)j} + x_j d_{jj} + \cdots + x_n d_{nj} + d_j^T x \quad = 2 d_j^T x.$$

Par conséquent, le gradient de $F\ (x)$ est :

$$\nabla F(x) \ = \ 2Dx \qquad (1.10)$$

Définition 1.5.3 : Soit une fonction réelle de classe C^2, $F : R^n \to R$. Le Hessien de la fonction F est défini par :

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \left(\nabla \frac{\partial F}{\partial x_1}, \nabla \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, \nabla \frac{\partial F}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix} \qquad (1.11)$$

Définition 1.5.4 : Soit $F : R^n \to R$ une fonction de classe C^1. La dérivée directionnelle de F dans la direction d au point x est :

$$\frac{\partial F}{\partial d} = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(x+td) - F(x)}{t} \ = \frac{\partial F(x+td)}{\partial x_1} d_1 + \cdots + \frac{\partial F(x+td)}{\partial x_n} d_n$$

$$= \nabla F(x)^T d.$$

1.5.2. Forme quadratique définie et semi-définie positive

Soit $F\ (x) \ = \ x^T D x$ une forme quadratique avec D symétrique.

Définition 1.5.5 :

- $F\ (x)$ est dite définie positive si : $x^T D x > 0$, $\forall x \in R^n$ et $x \neq 0$. Elle est dite semi-définie positive ou définie non négative si : $x^T D x \ \geq \ 0$, $\forall x \ \in \ R^n$.

- F (x) est dite définie négative si : $x^T\ Dx \ < \ 0$, $\forall x \ \in \ R^n$ et $x \ \neq \ 0$. Elle est dite semi-définie négative ou définie non positive si : $x^T D x \ \leq \ 0, \forall x \ \in \ R^n$.

Définition 1.5.6 : Une matrice symétrique D est dite matrice définie positive (non négative) et on note $D \ > \ 0$ ($D \ \geq \ 0$) si elle est associée à une forme quadratique définie positive (non négative).

1.5.3. Critère de Sylvester pour les formes quadratiques définies et semi-définies

L'intérêt du critère du Sylvester est de caractériser une forme quadratique définie ou semi-définie. Pour cela, considérons la matrice symétrique suivante :

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Le mineur de la matrice D, formé des lignes $i_1, i_2, \dots, i_p$ et les colonnes $j_1, j_2, \dots, j_p$ sera noté comme suit :

$$D\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_p \\ j_1, j_2, \dots, j_p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ce mineur est dit principal si $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_p = j_p$, c'est-à-dire s'il est formé de lignes et de colonnes portant les mêmes numéros. Les mineurs suivants

$$D_1 = d_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{bmatrix} d_{11} d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

Sont appelés mineurs principaux successifs. Alors, le critère de Sylvester se formule comme suit :

Théorème 1.3. (Critère de Sylvester)

- Pour qu'une matrice symétrique D soit définie positive $(D > 0)$, il est nécessaire et suffisant que tous ses mineurs principaux successifs soient positifs :

$$\mathrm{D}_1 > 0, \mathrm{D}_2 > 0, \dots, \mathrm{D}_\mathrm{n} > 0, \tag{1.12}$$

- Pour que la matrice D soit semi-définie positive $(D > 0)$, il est nécessaire et suffisant que tous ses mineurs principaux soient non négatifs :

$$D\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_P \\ i_1, i_2, \dots, i_P \end{pmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p < n, p = 1,2, \dots, n \qquad (1\ .13)$$

1.6. Propriétés des formes quadratiques semi-définies positives

Les matrices symétriques définies ont des propriétés très intéressantes. En voici quelques-unes :

Propriété 1.6.1. Soit la matrice *D* partitionnée de la manière suivante :

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{11} & \mathrm{D}_{12} \\ \mathrm{D}_{21} & \mathrm{D}_{22} \end{pmatrix}.$$

Si $\mathrm{D} > 0$ $(\mathrm{D} \geq 0)$, alors les sous-matrices principales D_{11} et D_{22} sont aussi définies positives (non négatives).

D'une maniere genérale, toute sous-matrice principale d'une matrice définie positive (non négative) est aussi définie positive (non négative).

Propriété 1.6.2. Un élément de la diagonale d'une matrice symétrique D définie non négative ne peut s'annuler que si les autres éléments de la même ligne et colonne s'annulent aussi.

Propriété 1.6.3. Soit D une matrice symétrique définie non négative. Si $x \in \mathrm{R}^\mathrm{n}$ est un point quelconque fixe tel que $x^T Dx = 0$, alors on aura : $\mathrm{D}x = 0$.

1.7 Notions sur la convexité [25]

La convexité joue un rôle central dans la théorie classique de l'optimisation. Elle est un outil indispensable pour la recherche des conditions à la fois nécessaires et suffisantes d'optimalité.

1.7.1. Ensembles convexes

Définition 1.7.1. Un ensemble C de R^n est dit convexe, si

$$\forall x_1, x_2 \in C, \lambda \in [0,1], le\ vecteur\ x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C.$$

1.7.2. Propriétés des ensembles convexes

Propriété 1.7.1 : Soit une famille $\{C_i\}, i = 1, \dots, k$ d'ensembles convexes, alors on a :

- $C = \bigcap_{i=1}^{k} C_i$ est un ensemble convexe.
- $C = \prod_{i=1}^{k} C_i$ est un ensemble convexe.

Propriété 1.7.2 : Si C est convexe, et $\lambda \in R$, alors l'ensemble $K = \{x/x = \lambda x_1, x_1 \in C\}$ est convexe.

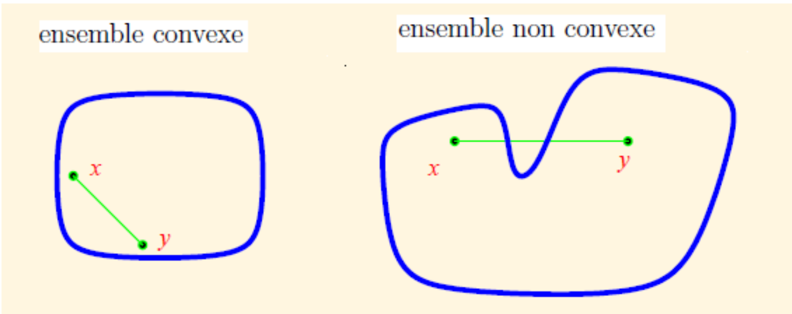


Fig.1.1 : Ensemble convexe

1.7.3. Fonctions convexes

Définition 1.7.2 : Une fonction réelle F définie sur un ensemble convexe C de R^n, est dite convexe, si pour tous les points $x, y \in C$, et pour tout nombre réel positif ou nul λ tel que $0 \leq \lambda \leq 1$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\, F(x) + (1-\lambda)F(y) \tag{1.14}$$

Définition 1.7.3 : Une fonction convexe $F(x), x \in C$, est dite strictement convexe si l'inégalité (1.14) est stricte pour tous les points $x_1, x_2 \in C, avec\ x_1 \neq x_2 et \lambda \in]0,1[$.

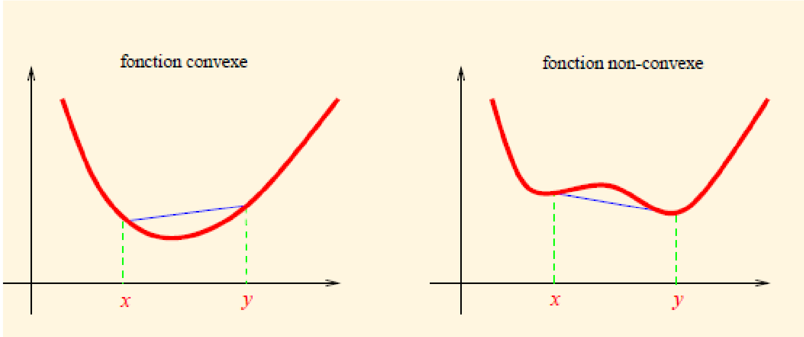


Fig.1.2 : Fonction convexe

1.7.4. Propriétés des fonctions convexes

Théorème 1.5 : Si F est continûment différentiable, les conditions (a) et (b) ci-dessous sont equivalentes ; de plus, les conditions (a), (b) et (c) ci-dessous sont (equivalentes si F est deux fois continûment différentiable :

(a) F est convexe;

(b) $\forall x \in C, \forall y \in C: F(y) - F(x) \geq [\nabla F(x)]^T (y - x);$

(c) $\forall x \in C$, le Hessien $\nabla^2 F(x)$ est une matrice semi-définie positive.

Alors d'après ce théorème, on déduit facilement qu'une fonction quadratique $F(x) = x^T D x + c^T x$ est convexe si et seulement si sa matrice associée D est semi-définie positive.

1.8. Programmation non linéaire avec contraintes [26]

Un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes se formule de la maniere suivante :

$$\min_{x \in S} F(x), \qquad (1.15)$$

$$\text{où } S = \{x \in R^n, h_i(x) = 0, i = 1,2, \ldots, k, g_i(x) \leq 0, i = k+1, \ldots, m\}$$

désigne l'ensemble des solutions realisables. On suppose que les fonctions F et g_i $(i = 1, \ldots, m)$ sont de classe C^1, i.e., continûment différentiables sur R^n.

Definition 1.8.1:

- Un vecteur $x \in R^n$ est appelé solution réalisable ou plan du problème (1.15) s'il vérifie toutes les contraintes du problème, c'est-à-dire, que $x \in S$.
- Une solution réalisable x^0 est appelée solution optimale du problème (1.15) si

$$F(x^0) \leq F(x), \forall x \in S, \text{ et on note } min_{x \in S} F(x) = F(x^0).$$

- $x^0 \in S$ est appelé minimum local du problème (1.15) s'il existe un réel $\varepsilon > 0$, tel que:
  $F(x^0) \leq F(x), \forall x \in S \cap B(x^0, \varepsilon)$ ou $B(x^0, \varepsilon) = \{x \epsilon R^n, \|x - x^0\| \leq \varepsilon\}$
  est la boule de centre x^0 et de rayon ε.

Définition 1.8.2 : Soit $x \in S$. On dit qu'un vecteur $d \in R^n$ est une direction admissible en x s'il existe un nombre réel $\overline{\alpha} > 0$, tel que :

$$x + \alpha d \in S, \forall \alpha \in [0, \overline{\alpha}]. \quad (1.16)$$

Si x est un point intérieur, alors toutes les directions sont admissibles.

Théorème 1.6 : Soit la fonction $\mathrm{F}: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ de classe C^1. Si x^0 est un point minimum local (ou global) du problème (1.15), alors pour toute direction admissible $\mathrm{d} \in \mathrm{R}^n$ en x^0, on a

$$d^T \nabla F(x^0) \geq 0 \quad (1.17)$$

1.8.1. Conditions d'optimalité sans contraintes

Soit le programme non linéaire et sans contraintes suivant :

$$min_{x \in R^n} F(x). \quad (1.18)$$

La fonction F est supposée au moins deux fois continûment différentiable. Soit x^0 un minimum local pour ce problème. Alors, pour tout $\propto > 0$ assez petit, on a nécessairement :

$$F(x^0) \leq F(x^0 + \alpha d), \forall d \in R^n$$

Ceci implique :

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{F(x^0 + \alpha d) - F(x^0)}{\alpha} = d^T \nabla F(x^0) \geq 0$$

De plus, la direction $d = -\nabla F(x^0)$ est admissible, alors

$$[\nabla F(x^0)]^T \nabla F(x^0) = ||\nabla F(x^0)||^2 \leq 0 \Leftrightarrow \nabla F(x^0) = 0$$

Ainsi, on a donc le théorème suivant :

Théorème 1.7 :(Condition necessaire de premier ordre)
Si x^0 est un minimum local pour le problème (1.18), et si de plus F est différentiable en x^0, alors :

$$\nabla F(x^0) = 0 \quad (1.19)$$

Un point vérifiant la condition (1.19) est appelé point stationnaire. Au deuxième ordre on obtient :

$$F(x^0) \leq F(x^0 + \alpha d),$$

$$F(x^0) \leq F(x^0) + \alpha \nabla F(x^0)^T + \frac{\alpha^2}{2} d^T \nabla^2 F(x^0) d + \sigma(\alpha^2)$$

Où $\sigma(\alpha^2)$ dénote une fonction telle que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sigma(\alpha^2)}{\alpha^2} = 0$$

Comme x^0 est un minimum local, on a :

$$0 \leq \frac{\alpha^2}{2} d^T \nabla^2 F(x^0) d + \sigma(\alpha^2).$$

En divisant par α^2 et en prenant la limite on aura le théorème suivant :

Théorème 1.8. (conditions nécessaires du second ordre)
Soit x^0 un minimum local (global) pour le problème (1.18) de F sur R^n et si de plus F est deux fois continûment différentiable en x^0, alors :

(i) $\nabla F(x^0) = 0$ (stationnarité),
(ii) $d^T \nabla^2 F(x^0) d \geq 0, \forall d \in R^n$.

Théorème 1.9 : (Conditions suffisantes du deuxième ordre) Soit x^0 un point vérifiant :

(i) $\nabla F(x^0) = 0$ (stationnarité),
(ii) $d^T \nabla^2 F(x^0) d > 0, \forall d \in R^n, d \neq 0$.

Alors x^0 est un minimum local strict.

1.8.2. Conditions d'optimalité pour le cas des contraintes linéaires de type égalités

Le problème se formule sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min_x F(x) \\ g_i(x) = A_i^T x - b_i = 0, \forall i \in I = \{1,2,\dots,m\} \end{cases} \tag{1,20}$$

Où F : $R^n \rightarrow$ R est une fonction continûment différentiable, b est un vecteur de R^m et A une matrice d'ordre $m \times n$, formée des vecteurs colonnes et lignes suivants:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n);\ A = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ . \\ . \\ . \\ A_m^T \end{pmatrix}; et\ g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ . \\ . \\ . \\ g_m(x) \end{pmatrix}$$

Est une fonction vectoriel définie de R^n dans R^m.

Proposition 1.8.1 : Un vecteur $d \in R^n$ est une direction admissible au point x si et seulement si :

$$Ad = 0. \tag{1.21}$$

De plus on a, $x(\alpha) = x + \alpha d \in S, \forall \alpha \in R$.

Remarque 1.8.1 : Pour que l'ensemble des solutions réalisables S ne soit pas vide ou ne soit pas réduit à un point isolé, on considèrera que rang $A = m < n$.

Définition 1.8.3. La fonction $L(x,\lambda) = F(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$ est appelée fonction de Lagrange associée au problème (1.20).

Le vecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \epsilon R^m$, formé des multiplicateurs de Lagrange λ_i, est unique grâce à la remarque (1.8.1).

Théorème 1.10 : Soit x^0 un minimum du problème (1.20). Alors, il existe nécessairement un vecteur $\lambda \in R^m$ vérifiant

$$\nabla F(x^0) + A^T\lambda = 0 \tag{1.22}$$

Si de plus A est de rang complet en lignes, alors λ est unique. La condition (1.22) peut être donnée autrement, en utilisant la fonction de Lagrange :

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla F(x) + A^T\lambda = 0. \tag{1.23}$$

De plus, un minimum local est tout d'abord un point réalisable, qui vérifie :

$$Ax = b \Rightarrow \nabla_\lambda L(x, \lambda) = Ax - b = 0. \tag{1.24}$$

En combinant les relations (1.23) et (1.24), on obtient alors la condition necessaire d'optimalité de premier ordre pour le problème (1.20).

Théorème 1.11. (Théorème de Lagrange,)
Soit x^0 un minimum local (ou global) pour le problème (1.20). Alors, il existe un vecteur multiplicateur de Lagrange $\lambda^0 \epsilon R^m$, tel que:

$$\nabla L(x^0, \lambda^0) = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \nabla_{\lambda^0} L(x^0, \lambda^0) = 0 \\ \nabla_{x^0} L(x^0, \lambda^0) = 0 \end{Bmatrix} \tag{1,25}$$

Le couple (λ^0, x^0) est appelé point stationnaire de la fonction de Lagrange.

La condition necessaire du second ordre pour le problème (1.20) est la suivante :

Théorème 1.12. Soit x^0 un minimum local pour le problème (1.20) et λ^0 un vecteur multiplicateur de Lagrange vérifiant (1.25), alors la matrice $\nabla^2 F(x^0)$ est semi-définie positive sur l'ensemble des points de la variété linéaire $Ay = 0$. Autrement dit,

$$y^T \nabla^2 F(x^0) y \geq 0, \forall y \in \mathcal{M}_0 = \{y = R^n : Ay = 0\}. \tag{1.26}$$

La condition suffisante de second ordre est la suivante :

Théorème 1.13. Soit (x^0, λ^0) un couple de vecteurs vérifiant la condition necessaire d'optimalité de premier ordre du problème (1.20), i.e

$$\nabla L(x^0, \lambda^0) = 0.$$

Pour que x^0 soit un minimum local du problème (1.20), il est suffisant que la matrice$\nabla^2 F(x^0)$ soit définie positive sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{M}_0$.

1.8.3. Conditions d'optimalité pour le cas des contraintes linéaires de type inégalités

Considérons maintenant un problème non linéaire avec contraintes linéaires de type inégalités :

$$\begin{cases} \min\limits_{x} F(x) \\ g_i(x) = A_i^T x - b_i \leq 0, \forall i \in I = \{1,2, \dots, m\} \end{cases} \tag{1.27}$$

Définition 1.8.4. Soit x une solution réalisable du problème (1.27). L'ensemble des contraintes actives (saturées) au point x est l'ensemble d'indices suivants :

$$I_0 = I_0(x) = \{\mathrm{i} \in \mathrm{I}: A_i^T = b_i\}$$

Lemme 1.8.1. Pour les contraintes d'inégalités du problème (1.27), un vecteur $\mathrm{d} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ est une direction admissible au point x si et seulement si

$$A^T d \leq 0, \forall i \in I_0(x) \tag{1,28}$$

Lemme 1.8.2. (Farkas)
Soit $(m + 1)$ vecteurs de $\mathrm{R}^{\mathrm{n}}, \mathrm{c}, \mathrm{A_i}, \mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{m}$, avec $\mathrm{m} < \mathrm{n}$.
Si pour chaque vecteur $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ vérifiant $\mathrm{A_i^T x} \leq 0, \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{m}$, on a $C^T x \leq 0.$ Alors il existe des coefficients $\lambda_\mathrm{i} \geq 0, \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{m}$, tels que :

$$\mathrm{c} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \lambda_\mathrm{i} \mathrm{A_i}. \tag{1,29}$$

Théorème 1.14. (Théorème de Karush-Kuhn-Tucker 1951)[27]
Soit x^0 un minimum local (ou global) du problème (1.27). Alors il existe un m-vecteur $\lambda^0 \geq 0$ tel que :

(i) Pour la fonction de Lagrange $\mathrm{L}(\mathrm{x}^0, \lambda^0) = \mathrm{F}(\mathrm{x}^0) + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \lambda_\mathrm{i}^0 \mathrm{g_i}(\mathrm{x}^0)$; la condition de stationnarité est vérifiée :

$$\nabla F(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 A_i = 0, \tag{1,30}$$

(ii) La condition de complémentarité (écarts complémentaires) est remplie :

$$\lambda_i^0 g_i(x^0) = 0, \forall i \in I. \tag{1,31}$$

1.9. Programmation convexe

L'hypothèse de convexité apporte élégance et simplicité a la théorie de l'optimisation. En particulier, les conditions nécessaires d'optimalité deviennent également suffisantes, et tout le résultat acquiert un caractère global.

Définition1.9.1 : On dit qu'un problème de programmation mathématique est convexe (respectivement strictement convexe), s'il consiste à minimiser une fonction convexe (respectivement strictement convexe) sur un domaine convexe.

L'étude des problèmes convexes et des algorithmes de résolution correspondants est l'objet de la programmation convexe. L'hypothèse de convexité est cruciale en optimisation. Notons que :

- Les problèmes convexes sont synonymes de minimisation.
- Les problèmes convexes sont les bons problèmes de la théorie : ceux pour lesquels il existe des algorithmes de résolution efficaces.
- L'hypothèse de convexité ne garantit cependant ni l'existence ni l'unicité d'une éventuelle solution.

Pour tout problème de programmation convexe, nous avons les propriétés suivantes :

Propriété 1.9.1. Soit F une fonction convexe définie sur un convexe $C \in R^n$. Alors l'ensemble des points où F atteint son minimum est convexe.

Propriété 1.9.2. Tout minimum local est minimum global.

Propriété 1.9.3. Si la fonction F est strictement convexe, alors son minimum global lorsqu'il existe est atteint en un seul point x^0.

Considérons d'abord le problème sans contraintes donné sous la forme (1.18), où F est une fonction convexe de classe C^1.

Théorème 1.15. Soit F une fonction convexe continûment différentiable sur R^n. Alors les conditions suivantes sont equivalentes :

(i) x^0 est un minimum global de F sur R^n;
(ii) x^0 est un minimum local de F sur R^n;
(iii) x^0 est un point stationnaire de F, i.e, $\nabla F(x^0) = 0$.

Considérons maintenant le problème avec contraintes donné sous la forme (1.27), où F est une fonction convexe de classe C^1.

Théorème 1.16. Considérons (x^0, λ^0) un couple de vecteurs vérifiant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker :

(i) $\nabla L_x(x^0, \lambda^0) = 0, \qquad \lambda_i^0 \geq 0, i \in I;$
(ii) $\lambda_i^0 g_i(x^0) = 0, i \in I.$

Alors le vecteur x^0 constitue un minimum global de (1.27).

Démonstration. En effet, le théorème 1.5 nous permet d'écrire

$$F(x) - F(x^0) \geq (x - x^0)^T \nabla F(x^0), \forall x \in S,$$

d'où

$$F(x) - F(x^0) \geq -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 A_i^T (x - x^0), \forall x \in S.$$

Comme $\lambda_i^0 = 0, i \in I \backslash I_a(x^0)$, alors on aura

$$\begin{aligned} F(x) - F(x^0) \quad &\geq -\sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 \, A_i^T (x - x^0) \\ &\geq -\sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 \, (A_i^T x - A_i^T x^0) \\ &\geq -\sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 (A_i^T x - b_i) \geq 0, \qquad \forall x \in S. \end{aligned}$$

Par conséquent, x° est un point minimum global de F sur S.

Ainsi, les conditions de KKT sont donc à la fois nécessaires et suffisantes de minimalité (c'est le théorème de KKT-convexe).

1.10. Problème quadratique convexe (P.Q.C)[28]

Il s'agit d'une classe de problèmes d'optimisation où la fonction objectif est quadratique, s'écrivant sous la forme $(x) = {}^1\!/_2\ x^T Dx + c^T x,$, avec D symétrique, que l'on minimise sur un polyèdre convexe fermé. Ce genre de problèmes est convexe dès lors que la matrice D est semi-définie positive.

Remarque 1.10.1. On remarquera qu'un problème linéaire est un problème quadratique dégénéré ($D = 0$), et c'est toujours un problème convexe.

L'étude des problèmes quadratiques (convexes ou pas) constitue un domaine propre de la théorie de la programmation quadratique ; le résultat le plus remarquable est le suivant :

Théorème 1.17. Tout problème quadratique convexe dont la valeur est finie admet (au moins) une solution.

1.11. Résolution d'un P.Q.C. Méthode du simplexe quadratique de Wolfe (1959) [29]

1.11.1 Introduction

Beaucoup d'algorithmes ont été développés pour la résolution du problème de programmation quadratique convexe, mais il serait intéressant de connaitre la méthode la plus classique de Wolfe, qui n'est autre que la méthode du simplexe légèrement modifiée.

Le principe de cette méthode est la résolution du système de Kuhn-Tucher et consiste à trouver une solution réalisable pour un système linéaire avec une condition supplémentaire de type $x_j\,\delta_j = 0$, où x et δ sont des vecteurs de même dimension, En d'autre termes, c'est trouver une solution réalisable basique initiale en résolvant un problème de programmation linéaire, assujetti à la nouvelle condition. Voyons les cas suivants :

1.11.2 Cas d'un P.Q.C. standard

Formulons le théorème de KKT pour le problème suivant :

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{2}\, x^T D x + c^T x \to \min \\ \qquad Ax = b, \\ \qquad x \geq 0, \end{cases} \tag{1.32}$$

Où $D^T = D \geq 0, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, rang\ A = m < n.$

Ce problème peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^T Dx + c^T x \rightarrow \min$$

$$Ax - b \leq 0, \quad (1.33)$$

$$-Ax + b \leq 0,$$

$$-x \leq 0.$$

Le point de minimum x^0 est alors caractérisé par les équations et les inégalités suivantes :

Il existe deux m-vecteurs $\lambda_1^0 \geq 0,\ \lambda_2^0 \geq 0$, ainsi qu'un n-vecteur $\delta^0 \geq 0$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x^0, \lambda_1^0,\ \lambda_2^0, \delta^0) = 0, \\ \lambda_1^{0^T}(Ax^0 - b) = 0, \\ \lambda_2^{0^T}(-Ax^0 + b) = 0, \\ \delta^{0^T}\ x^0 = 0, \\ Ax^0 - b = 0, \\ x^0 \geq 0, \end{cases}$$

Où

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2, \delta) = \frac{1}{2}x^T Dx + c^T x + \lambda^T{}_1(Ax - b) + \lambda^{\mathrm{T}}{}_2(-Ax + b) - \delta^T x,$$

$$\frac{\sigma \mathcal{L}}{\sigma x}(x, \lambda_1, \lambda_2, \delta) = Dx + c + D^T\lambda_1 - \ A^T\lambda_2 - \delta.$$

En posant $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \lambda \in\ \mathbb{R}^m$, le point x^0 est défini par le système suivant :

$$\begin{cases} Dx^0 + A^T\lambda^0 - \delta^0 = -c, & (L_1) \\ Ax^0 = b, & (L_2) \\ \delta^{0^T}\ x^0 = 0, & (L_3) \\ \lambda^{0^T}(Ax^0 - b) = 0, & (L_4) \\ x^0 \geq 0, \lambda^0\ \in\ \mathbb{R}^m, \delta^0 \geq 0. \end{cases}$$

Comme l'équation (L_4) est tout le temps vérifiée, le système se réduit ainsi :

$$\begin{cases} Dx^0 + D^T\lambda^0 - \delta^0 = -c, & (L_1) \\ Ax^T = b, & (L_2) \\ \delta^{0^T}\ x^0 = 0, & (L_3) \\ x^0 \geq 0, \lambda^0\ \in\ \mathbb{R}^m, \delta^0 \geq 0. \end{cases}$$

Un tel système n'est pas linéaire par rapport au multi-vecteur $(x^0, \lambda^0, \delta^0)$ à cause de l'équation(L_3). On obtient donc un système linéaire de $(n+m)$ équations à $(n+m+n)$ Inconnus, constitué des équations (L_1) et (L_2), avec en plus n fonctions non linéaires $\delta_j x_j = 0, j = \overline{1,n}$ .pour trouver une solution telle que $\delta_j x_j = 0, j = \overline{1,n}$, il suffit d'obtenir une solution réalisable basique du système linéaire, avec x_j basique et δ_j non basique vice-versa. Pour cela, on appliquera la première phase de simplexe et on choisira l'indice j_0 du vecteur qui entre dans la base de telle sorte que les vecteurs colonnes correspondants à x_{j0} et δ_{j0} ne se retrouvent pas en même temps dans la base. Pour appliquer la méthode du simplexe, il faut alors écrire le système $(L_1), (L_2)$ sous la forme standard, à savoir que le second membre doit être positif ou nul, ainsi que le vecteur λ^0 qui doit être réécrit sous la forme :

$$\lambda_i^0 = \alpha_i^0 - \alpha_{m+1}^0 \ , \ \alpha_{m+1}^0 \geq 0, \alpha_i^0 \geq 0, \ , i = \overline{1,m} \ .$$

1.5.3 Algorithme

Algorithme

Début

1. Introduire les données D, A, b, c ;
   Appliquer les équations de KKT au problème ;
   Déterminer les équations de KKT ;
2. Déterminer des paramètres du programme linéaire :
   Introduire les variables artificielles u_i ;
   Construire la matrice des contraintes A ;
   Construire le vecteur de second membre b ;
   Construire le vecteur des coûts c ;
3. Initialiser le vecteur solution (x, λ, δ, u) ;
   Déterminer l'ensemble des indices J_B, J_N ;
   Extraire les éléments de base x_B, c_B, A_B ;
4. Calculer le vecteur des potentiels $u^T = c_B^T A_B^{-1}$;
   Calculer le vecteur des estimations $E_N^T = u^T A_N - c_N^T$;
   Si $E_N^T \geq 0$ alors la solution actuelle est optimale ;
   Sinon aller à (5) ;
   FinSi ;
5. Déterminer la variable qui entre en base tout en vérifiant la condition
   $$\delta_j x_j = 0, j = \overline{1,n} ;$$
   Déterminer la variable qui sort de la base ;
   Mettre à jour x_B, c_B, A_B, J_B, J_N et ***aller en 4*** ;

Fin.

1.11.3. Exemple numérique

Soit le problème quadratique suivant :

$$F(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 \rightarrow \min,$$

$$\textbf{\textit{S.c}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Le problème se formule ainsi :

$$F(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 \rightarrow \min,$$

$$\textbf{\textit{S.c}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_1, x_2x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Si (x_1, x_2, x_3, x_4) est un point de minimum de la fonction $F(x)$, alors $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^2$;

$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \delta_4 \geq 0$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x, \lambda, \delta) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(x, \lambda, \delta) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3}(x, \lambda, \delta) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_4}(x, \lambda, \delta) = 0, \\ et \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ \delta_j x_j = 0, \\ x_j \geq 0, \delta_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \end{cases} \quad (1.35)$$

Où

$\mathcal{L}(x, \lambda, \delta) = x_1^2 + x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 + \lambda_1(x_1 + 2x_2 + x_3 - 4) + \lambda_2(2x_1 + x_2 + x_4 5) - \delta_1 x_1 - \delta_2 x_2 - \delta_3 x_3 - \delta_4 x_4.$

Alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - 2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \delta_1 = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = x_1 + 12x_2 + 8 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - \delta_2 = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = \lambda_1 - \delta_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \delta_3, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_4} = \lambda_2 - \delta_4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = \delta_4, \\ \text{et} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ \delta_j x_j = 0, \\ x_j \geq 0,\ \delta_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \end{cases} \tag{1.35}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \delta_3 + 2\delta_4 - \delta_1 = 2, & (L_1) \\ x_1 + 12x_2 + 2\delta_3 + \delta_4 - \delta_2 = -8, & (L_2) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, & (L_3) \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, & (L_4) \\ \delta_j x_j = 0, & (L_5) \\ x_j \geq 0,\ \delta_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}, \end{cases}$$

En multipliant (L_2) par (-1) le système (1.35) c'écrit donc :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - \delta_1 + \delta_3 + 2\delta_4 = 2, \\ -x_1 - 12x_2 + \delta_2 - 2\delta_3 - \delta_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ \delta_j x_j = 0, \\ x_j \geq 0,\ \delta_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,4}, \end{cases}$$

Nous avons obtenu un système linéaire de 4 équations avec 8 inconnues et 4 équations non linéaires. Pour trouver une solution telle que $\delta_j x_j = 0$ avec $j = \overline{1,4}$, il suffit d'obtenir une solution réalisable basique (x, δ) du système linéaire avec x_j basique et δ_j hors base ou vice-versa. Pour cela, il faut choisir l'indice j_0 entrant dans la base de telle sorte que les vecteurs-colonnes correspondant à x_{j0} et δ_{j0} ne se trouve pas en même temps dans la base.

Appliquons la première phase du simplexe en considérant le problème de programmation linéaire suivant :

$$Z = -v_1 \longrightarrow \max$$

$$\text{S.c} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - \delta_1 + \delta_3 + 2\delta_4 + v_1 = 2, \\ -x_1 - 12x_2 + \delta_2 - 2\delta_3 - \delta_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_j \geq 0,\ \delta_j \geq 0,\ j = \overline{1,4},\ v_1 \geq 0. \end{cases} \tag{1.36}$$

Le vecteur $x = (x, \delta, v_1) = (0{,}0{,}4{,}5{,}0{,}8{,}0{,}0{,}2)$ est une solution réalisable initiale basique du problème (1.36), avec $A_B = (a_9, a_6, a_3, a_4) = L_4$. Dressons alors les tableaux des simplexes suivants :

		$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	v_1		
		c	0	0	0	0	0	0	0	0	-1		
c_B	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	θ	
-1	a_9	2	2	1	0	0	-1	0	1	2	1	1	
0	a_6	8	-1	-12	0	0	0	1	-2	-1	0	∞	$\rightarrow j_1 = 9$
0	a_3	4	1	2	1	0	0	0	0	0	0	4	
0	a_4	5	2	1	0	1	0	0	0	0	0	5/2	
Z = -2		E	-2	-1	0	0	1	0	-1	-2	0		
			$\uparrow j_0 = 1$										

Tab1.1 : Phase 1 du simplexe

Remarquons que $j_0 = 1$ est l'indice qui entre dans la base tandis que l'indice $j_1 = 9$ sort, car l'indice $j = 8$ ne peut pas être choisi à cause de la présence de a_4 dans la base, et ce, afin que la condition $x_4\delta_4 = 0$ soit assurée.

		$\bar{x}$	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	v_1	
		c	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
c_B	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	θ
0	a_9	1	1	1/2	0	0	-1/2	0	1/2	1	1/2	
0	a_6	9	0	-	0	0	-1/2	1	-3/2	0	1/2	
0	a_3	3	0	23/12	1	0	1/2	0	-1/2	-1	-1/2	
0	a_4	3	0	3/2 0	1	1	1	0	-1	-2	-1	
Z = 0		E	0	0	0	0	0	0	0	0	1	

Tab 1.2 : Phase 2 du simplexe

Le critère d'optimalité étant vérifié, il s'ensuit que le vecteur $\overline{x} = (1{,}0{,}3{,}3{,}0{,}9{,}9{,}0{,}0{,}0)$ est une solution optimale du problème linéaire. Par conséquent, la solution réalisable basique du système d'optimalité du problème quadratique est le vecteur $(\hat{x}, \hat{\delta})$ tels que

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = (1{,}0{,}3{,}3),$$

$$\hat{\delta} = \left(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\delta}_3, \hat{\delta}_4\right) = (0{,}9{,}0{,}0).$$

Donc le point de minimum du problème (1.34) est le vecteur $x^0 = (1{,}0)$, avec $F(x^0) = -1$.

1.11.4 Système d'optimalité pour un P.Q.C. à variables bornées [30]

Soit le problème de programmation quadratique

$$F(x) = \frac{1}{2}\, x^T D x + c^T x \longrightarrow \min,$$

$$Ax = b, \qquad (1.37)$$

$$d^- \leq x \leq d^+,$$

Où $D^T = D \geq 0, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, d^-, d^+ \in \mathbb{R}^n,\ rangA = m < n.$

Ce problème peut encore s'écrire sous la forme équivalente suivante :

$$F(x) = \frac{1}{2} x^T D x + c^T x \longrightarrow \min,$$

$$Ax - b \leq 0,$$

$$-Ax + b \leq 0,$$

$$-x + d^- \leq 0,$$

$$x - d^+ \leq 0.$$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour ce problème s'établissent comme suit : le vecteur $x^0 \in \mathbb{R}^n$ est un point de minimum pour le problème (1.37), aussi il existe des vecteurs $\lambda_1^0 \geq 0, \lambda_2^0 \geq 0, \delta_1^0 \geq 0, \delta_2^0 \geq 0$, tels que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}(x^0, \lambda^0, \delta^0) = \\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2} x^{0^T} D x^0 + c^T x^0 + \lambda_1^{0^T}(Ax^0 - b) + \lambda_2^{0^T}(-Ax^0 + b) + \delta_1^{0^T}(-x^0 + d^-) + \delta_2^{0^T}(x^0 - d^+)\right] = 0 \\ \lambda_1^{0^T}(Ax^0 - b) = 0, \\ \lambda_2^{0^T}(-Ax^0 + b) = 0, \\ \delta_1^{0^T}(-x^0 + d^-) = 0, \\ \delta_2^{0^T}(x^0 - d^+) = 0, \\ Ax^0 - b = 0,\ d^- \leq x^0 \leq d^+, \\ \delta_1^0, \delta_2^0 \geq 0, \lambda_1^0, \lambda_2^0 \geq 0. \end{cases}$$

En posant $\lambda^0 = \lambda_1^0 - \lambda_2^0$, $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$, le point x^0 est défini par le système d'optimalité suivant :

$$\begin{cases} Dx^0 + A^T \lambda^0 - \delta_1^0 + \delta_2^0 = -c, & (L_1) \\ Ax^0 = b, & (L_2) \\ \delta_1^{0^T}(-x^0 + d^-) = 0, & (L_3) \\ \delta_2^{0^T}(x^0 - d^+) = 0, & (L_5) \\ \lambda^0 \in \mathbb{R}^m,\ \delta_1^0, \delta_2^0 \geq 0,\ d^- \geq x^0 \geq d^+. \end{cases}$$

2.1 Introduction

La méthode de simplexe quadratique de Wolfe est la méthode la plus classique pour la résolution d'un P. Q .C. Dans ce chapitre, on applique la méthode de R-Gabassov et F.M.Kirillova [20,21] appelée Méthode Directe du Support, pour la construction d'un algorithme de résolution d'un problème de programmation quadratique convexe, donné sous forme standard.

Le principe de cette méthode est le suivant : partant d'un plan de support initial, formé d'une solution réalisable et de deux matrices non dégénérées correspondant respectivement aux contraintes et à la fonction objectif, chaque itération consiste à trouver une direction d'amélioration et un pas maximal le long de cette direction de façon à améliorer la valeur de la fonction objectif, tout en s'assurant de ne pas sortir du domaine admissible déterminé par les contraintes du problème.

2.2 Position du Problème et Définitions [31]

Le problème de la programmation quadratique convexe se présente sous la forme standard suivante :

$$F(x)=\frac{1}{2}x^T D\, x + c^T x \rightarrow min, \tag{2.1}$$

$$Ax = b, \tag{2.2}$$

$$x \geq 0, \tag{2.3}$$

Où $D^T = D \geq 0, c\ et\ x\ sont\ des\ n$-vecteurs, b un m-vecteur, A une matrice d'ordre $m \times n$, avec $rang\ A = m < n$; $I = \{1,2, \dots, m\}$: l'ensemble des indices des lignes de A,
$J = \{1,2, \dots, n\}$: l'ensemble des indices des colonnes de A.

soit une partition de l'ensemble J telle que $J = \{1,2, \dots, n\} = J_B \cup J_N$, avec $J_B \cap J_N = \emptyset$, $|J_B| = m$.

On peut alors écrire et fractionner les vecteurs et la matrice A de la manière suivante :

$x = x(J) = (x_j\ , j \in J)$,

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ -- \\ x_N \end{pmatrix}, \quad x_B = x(J_B) = (x_j\ , j \in J_B),\ x_N = x(J_N) = (x_j\ , j \in J_N),$$

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ -- \\ c_N \end{pmatrix}, \quad c_B = c(J_B) = (c_j\ , j \in J_B),\ c_N = c(J_N) = (c_j\ , j \in J_N),$$

$A = A(I,J) = (a_{ij},\ 1\leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$; $A = (a_j,\ j \in J)$, $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix}$,

$A = (A_B \mid A_N)$, $A_B = A(I, J_B)$, $A_N = (I, J_N)$.

Définition 2.2.1. Un vecteur x vérifiant les contraintes (2.2) et (2.3) est appelé plan ou solution réalisable du problème (2 .1) - (2.3).

Définition 2.2.2. *Un plan* x^0 est dit optimal si

$$F(x^0) = \frac{1}{2} {x^0}^T D\, x^0 + c^T x^0 = \min \left(\frac{1}{2} x^T D\, x + c^T x\right)$$

Où x est pris parmi tous les plans du problème (2 .1)-(2.3).

Définition 2.2.3. *Un plan* x^ε est appelé ε-optimal ou suboptimal si

$$F(x^\varepsilon) - F(x^0) = \frac{1}{2}(x^\varepsilon)^T D\, x^\varepsilon + c^T x^\varepsilon - \frac{1}{2}(x^0)^T D\, x^0 - c^T x^0 \leq \varepsilon$$

Ou x^0 est une solution du problème (2 .1) - (2.3) et ε est un nombre positif ou nul, donné à l'avance.

Définition 2.2.4. **L**'ensemble $J_B \subset J, |J_B| = m$ est appelé support des contraintes si

$$\det A_B = \det A(I, J_B) \neq 0$$

Définition 2.2.5. Le couple $\{x, J_B\}$, formé du plan x et du support J_B, est appelé plan de support des contraintes.

Définition 2.2.6. Le plan de support est dit non dégénéré si

$$x_j > 0, \forall\, j \in J_B \qquad (2,4)$$

2.3 Formule d'Accroissement de la Fonction Objectif

Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes du problème (2 .1) - (2.3). Considérons un autre plan quelconque $\bar{x} = x + \Delta x$.

L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$F(\bar{x}) - F(x) = \frac{1}{2}\bar{x}^T D \bar{x} + c^T \bar{x} - \frac{1}{2} x^T D\, x - c^T x$$

$$= \frac{1}{2}(x + \Delta x)^T D (x + \Delta x) + c^T (x + \Delta x) - \frac{1}{2} x^T D\, x - c^T x$$

$$= (\Delta x)^T (Dx + c) + \frac{1}{2} (\Delta x)^T D\Delta x ,$$

$$F(\bar{x}) - F(x) = g^T (x)\Delta x + \frac{1}{2} (\Delta x)^T D\Delta x \qquad (2.5)$$

Où $g(x) = Dx + c$ *est le gradient de la fonction (2.1), avec* $g(x) = g(J) = (g_j , j \in J)$ $g_B = g(J_B) , g_N = g(J_N)$.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{cases} Ax = b \\ A\overline{x} = b \end{cases} \Leftrightarrow A\overline{x} = A(x + \Delta x) = \mathrm{A}x + A \,\Delta x \Rightarrow A \,\Delta x = 0$$

En posant $\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta \mathrm{x_B} \\ \Delta \mathrm{x_N} \end{pmatrix}, \Delta x_{\mathrm{B}} = \Delta x(\mathrm{J_B}) , \Delta x_{\mathrm{N}} = \Delta x(\mathrm{J_N})$.

l'égalité $A \,\Delta x = 0$ peut s'écrire $A_{\mathrm{B}}\Delta x_{\mathrm{B}} + A_{\mathrm{N}}\Delta x_{\mathrm{N}} = 0;$

d'où $$\Delta x_{\mathrm{B}} = -A_{\mathrm{B}}^{-1} A_{\mathrm{N}} A x_{\mathrm{N}} \qquad (2.6)$$

La formule (2.5) devient alors :

$F(\overline{x}) - F(x) = g^T{}_B \,\Delta x_B + g^T{}_N \,\Delta x_N + 1/2(\Delta x_B, \Delta x_N)^T D(\Delta x_B, \Delta x_N)$.

En vertu de (2.6), on obtient donc

$$F(\overline{x}) - F(x) = g^T{}_B \,(-A_B^{-1} A_N \Delta x_N) + g^T{}_N \,\Delta x_N$$
$$+ 1/2 \,((-A_B^{-1} A_N \Delta x_N, \Delta x_N)^T D((-A_B^{-1} A_N \Delta x_N, \Delta x_N)$$
$$= [-g^T{}_B \,A_B^{-1} A_N + g^T{}_N \,]\Delta x_N + \frac{1}{2} \Delta x_N \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} \Delta x_N.$$

Où $I_N = I_N(J_N, J_N)$ est la matrice identité d'ordre $(n - m)$.

Posons

$$Z = Z(J, J_N) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix}, M = M(J_N, J_N) = Z^T DZ \qquad (2.7)$$

On définit le vecteur des potentiels u ainsi que le vecteur des estimations E comme suit :

$$u^T = g_B^T A_{\mathrm{B}}^{-1} \qquad ,E^T(J) = g^{\mathrm{T}} - u^{\mathrm{T}} A = (E_B^T, E_N^T),$$

où

$E_B^T = 0,\ E_N^T = g_N^T - u^T \mathrm{A_N}$.

Finalement l'accroissement (2.5) aura la forme suivante :

$$F(\overline{x}) - F(x) = E_N^T \Delta x_N + \frac{1}{2}(\Delta x_N)^T Z^T D Z \Delta x_N$$

$$F(\overline{x}) - F(x) = E_N^T \Delta x_N + \frac{1}{2}(\Delta x_N)^T M \, \Delta x_N. \qquad (2,8)$$

Soit J_{N0} et J_{N+}deux sous ensemble de J_N tels que

$J_{N0} = \{ j \in J_N \ / \ x_j = 0 \}, J_{N+} = \{ j \in J_N \ / \ x_j > 0 \}.$
Les sous-vecteurs x_N et E_N peuvent alors être fractionnés sous la forme suivante :

$x_N = \begin{pmatrix} x_{N0} \\ x_{N+} \end{pmatrix}$, $x_{N0} = (x_j, j \in J_{N0}), x_{N+} = (x_j, j \in J_{N+}).$

$E_N = \begin{pmatrix} E_{N0} \\ E_{N+} \end{pmatrix}$, $E = (E_j, j \in J_{N0}), E_{N+} = (E_j, j \in J_{N+}).$
La formule d'accroissement (2 ,8) peut s'écrire :

$$F(\overline{x}) - F(x) = E^T{}_{N0} \Delta x_{N0} + E^T{}_{N+} \Delta x_{N+} + \frac{1}{2}(\Delta x_N)^T M \, \Delta x_N. \qquad (2 .9)$$

2.4 Critère d'optimalité

Théorème 2.4.1.*"Critère d'optimalite"*
Soit $\{x, J_B\}$ *un plan de support des contraintes du problème* (2.1)-(2.3). *Alors les relations suivantes :*

$$\begin{cases} \mathrm{E_j} \geq 0, & \text{si } j \in J_{N0} \\ \mathrm{E_j} = 0, & \text{si } j \in J_{N+} \end{cases} \qquad (2.10)$$

Sont suffisantes pour l'optimalité du plan x.
Ces mêmes relations sont aussi nécessaires, si le plan de support des contraintes est non-dégénéré.

Démonstration. Condition suffisante :
Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes vérifiant les relations(2.10). Pour tout plan $\bar{x}$ du problème (2.1)-(2.3), la formule d'accroissement (2.9) nous permet d'écrire :

$$\Delta F = F(\bar{x}) - F(x) \geq E_{N0}^T \Delta x_{NO} + E_{N+}^T \Delta x_{N+},$$

Car la matrice M est semi-définie positive. D'où

$$F(\bar{x}) - F(x) \geq \sum_{j \in J_{NO}} E_j(\bar{x}_j - x_j) + \sum_{j \in J_{N+}} E_j(\bar{x}_j - x_j)$$

En vertu des relations (2.10), on aura :

$$F(\bar{x}) - F(x) \geq \sum_{j \in J_{NO}} E_j \bar{x}_j \geq 0,$$

Car $\bar{x}$ est un plan du problème (2.1)-(2.3). D'où $F(\bar{x}) \geq F(x)$.
Le vecteur x est par conséquent une solution optimale du problème (2.1) - (2.3).

Condition nécessaire : Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support optimal non –dégénéré du problème (2.1)-(2.3) et supposons que les relations (2.10) ne sont pas vérifiées, c-à-d, qu'il existe au moins un indice $j_0 \in J_N$, tel que

$E_{j0} < 0$, pour $j_0 \in J_{N0}$ ou bien $E_{j0} \neq 0, pour\ j_0 \in J_{N+}$.

On construit alors un autre plan $\bar{x} = x + \theta l$, où θ est un nombre réel positif, et $l = l(J)$ est un vecteur de direction que l'on construit comme suit :

$$\begin{cases} l_{j0} = -signE_{j0}, \\ l_j = 0,\ j \neq jo, j \in J_N \end{cases}$$

D'autre part, on doit avoir

$$A\bar{x} = Ax + \theta Al = b \Leftrightarrow Al = A_B l_B + A_N l_N = 0$$

D'où

$$l_B = -A_B^{-1} A_N l_N = A_B^{-1} a_{j0} signE_{j0}.$$

On a donc

$$\begin{cases} l_{j0} = -signE_{j0} \\ l_j = 0, j \neq jo, j \in J_N, \\ l_B = A_B^{-1} a_{j0} signE_{j0} \end{cases}$$

Le vecteur $\bar{x}$ vérifie la contrainte principale $A\bar{x} = b$. Pour que $\bar{x}$ soit un plan du problème (2.1)-(2.3), il doit en plus vérifier l'inégalité

$$\bar{x} \geq 0 \Leftrightarrow x + \theta l \geq 0$$

Soit, en écrivant composante par composante :

$$\begin{cases} \theta l_j \geq -x_j, \ j \in J_B, \\ \theta l_{j0} \geq -x_{j0}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta l_j \in [-x_j, +\infty[, \\ \theta sign E_{j0} \leq x_{j0}. \end{cases}$$

Pour $j_0 \in J_{N0}$, on a $E_{j0} < 0 \; et \; x_{j0} = 0 \Rightarrow \theta \geq 0$.

Pour $j_0 \in J_{N+}, \; E_{j0} \neq 0 \; \Rightarrow E_{j0} > 0 \; ou \; E_{j0} < 0$.

Si E$j_0 > 0, comme \;\; x_{j0} > 0, \; on \; a \; \theta sign E_{j0} \leq x_{j0} \Rightarrow \theta \leq x_{j0}$.

Si E$j_0 < 0, comme \;\; x_{j0} > 0, \; on \; a \; alors \; \theta sign E_{j0} \leq x_{j0} \Rightarrow \theta \geq -x_{j0}$.

Comme $x_j > 0, j \in J_B$, le vecteur $\bar{x}$ sera alors un plan du problème (2.1)-(2.3) pour un nombre θ positif assez petit.

La formule d'accroissement (2.8) nous donne

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) - F(x) &= E_N^T \Delta x_N + \tfrac{1}{2}(\Delta x_N)^T M \Delta x_N \\ &= \theta E_N^T l_N + \tfrac{1}{2}\theta^2 l_N^T M l_N \\ &= \theta(-E_{j0} sign E_{j0} + \tfrac{1}{2}\theta l_N^T M l_N) \\ &= \theta(-|E_{j0}| + \tfrac{1}{2}\theta l_N^T M l_N) = \varphi(\theta). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pour θ et l ainsi choisis on aura $-|E_{j0}| + \frac{1}{2}\theta l_N^T M l_N < 0.$ D'où $F(\bar{x}) - F(x) < 0$, ce qui contredit l'optimalité de x.

Par conséquent, les relations (2.10) sont suffisantes, et aussi nécessaires pour l'optimalité du plan x dans le cas où x est non dégénéré.

2.5 Critère de Suboptimalité

Pour estimer l'écart qui existe entre la valeur optimale $F(x^0)$ et une autre valeur $F(x)$ d'un plan de support des contraintes quelconque $\{x, J_B\}$, il suffit de remplacer dans la Formule d'accroissement (2.8) le vecteur $\bar{x}$ par x^0 et de minorer l'expression. On aura donc :

$$F(x^0) - F(x) \geq \sum_{j \in J_N} E_j \left(x_j^0 - x_j\right).$$

D'où :

$$F(x) - F(x^0) \geq \sum_{j \in J_N} E_j \left(x_j - x_j^0\right).$$

Puisque la solution optimale x^0 est admissible et en supposant que $E_N \geq 0$, nous aurons

$$\langle x_j^0 \geq 0, j \in J \rangle \Rightarrow \langle x_j - x_j^0 \leq x_j - 0 \rangle \Rightarrow \langle E_j(x_j - x_j^0) \leq E_j x_j \rangle.$$

Par conséquent, on obtient la majoration suivante :

$$F(x) - F(x^0) \leq \sum_{j \in J_N} E_j x_j = \beta(x, J_B). \qquad (2.12)$$

Le nombre $\beta(x, J_B)$ est appelé *estimation de suboptimalité*. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.5.1.(*Condition suffisante de suboptimalité*)
Soit $\{x, J_B\}$ *un plan de support des contraintes du problème* (2.1)
(2.3) *et* ε *un nombre positif ou nul arbitraire* .
Si $E_N \geq 0$ *et si* $\beta(x, J_B) \leq \epsilon$, *alors le plan* x *est* $\epsilon - optimal$.

Démonstration :
En vertu de (2.12), nous avons

$$F(x) - F(x^0) \leq \sum_{j \in J_N} E_j x_j = \beta(x, J_B) \leq \epsilon \Longrightarrow F(x) - F(x^0) \leq \epsilon.$$

Alors le plan *x* est donc $\epsilon - optimal$

2.6. Méthode de résolution :

Avant d'entamer la méthode de résolution donnons quelques définitions essentielles.

Définition 2.6.1 on appelle support de fonction objectif (2.1) l'ensemble des indices
$J_S \subset J_N$ tel que $\det M_S = det M(J_S, J_S) \neq 0$, où M est la matrice (2.7), on posera
$J_{NN} = J_N \backslash J_S$.

- On appelle support du problème (2.1)-(2.3) l'ensemble $J_P = \{J_B, J_S\}$ formé du support des contraintes J_B et de celui de la fonction objectif J_S.
- On appelle plan de support du problème (2.1)-(2.3) la paire $\{x, J_P\}$ formée du plan *x* et du support J_P ; il est dit accordé si $E(J_S) = 0$.
- La direction *l* est dite admissible si $Al = 0$.

  Elle est dite l'amélioration si en outre $E^T l < 0$, $(\varphi(\theta) \leq 0)$.

2.6 .1 Algorithme de résolution :

Etant donné un nombre réel positif ou nul quelconque ϵ et un plan de support initial $\{x, J_P\}$, le but de l'algorithme est alors de construire un plan ϵ-*optimal* x^ϵ ou carrément un plan optimal x^0.

L'itération de l'algorithme consiste à faire le passage de $\{x, J_P\}$, vers $\{\overline{x}, \overline{J}_P\}$, tel que $F(\overline{x}) \leq F(x)$. Pour cela, construisons le nouveau plan $\overline{x}$ de la manière suivante :
$\overline{x} = x + \theta l$, où *l* est un *n*-vecteur appelé direction d'amélioration ; θ est le pas le long de cette direction.

Dans cet algorithme, on choisira la métrique du simplexe. On ne fera donc varier qu'une seule composante parmi celles qui ne vérifient pas les relations (2.10).
Pour que l'accroissement soit maximal, il faut choisir l'indice J_0 tel que :

$$|E_{j0}| = \max(|E_j|, j \in J_{NNO}),$$

Où $J_{NNO} \subset J_N$ est l'ensemble des indices non optimaux. On calcule l_{NN} de manière à assurer $E^T l < 0$, on posera alors :

$$l_{j0} = -\text{sign}E_{j0}, l_j = 0, j \neq j_0, j \in J_{NN}.$$

On calculera la composante l_s de manière à assurer $\overline{E}_j = E_j(x + \theta l) = 0, j \in J_S$. En vertu de (2.7) nous avons :

$$E_N^T = ({g^T}_B, {g^T}_N)\begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} = g^T(x)Z.$$

Comme $l = Zl_N$, on aura donc

$$\overline{E}_N^T = g^T(x + \theta^0 l)Z = E_N^T + \theta^0 l^T DZ = E_N^T + \theta^0 l_N^T Z^T DZ = E_N^T + \theta^0 l_N^T M.$$

Finalement, on a

$$\overline{E}_N = E_N + \theta^0 M l_N.$$

Puisque $E(J_S) = 0$, alors l'équation $\overline{E}\,(J_S) = 0$ est équivalente à

$$M(J_S, J_S)l(J_S) + M(J_S, J_{NN})l(J_{NN}) = 0.$$

D'où

$$l(J_S) = -M_S^{-1}M(J_S, J_{NN})l(J_{NN}).$$

Ensuite, on calcule l_B de manière à avoir $Al = 0$:

$$l_B = l(J_B) = -A_S^{-1}M(A_S l_S + A_{NN} l_{NN}).$$

Alors pour l'indice j_0, nous avons les formules suivantes pour la construction de la direction de x l'amélioration $l = (l_j, j \in J) = (l(J_B), l(J_S), l(J_{NN})$:

$$\begin{cases} l_{j0} = -\text{sign}E_{j0}, \\ l_j = 0, j \neq j_0, j \in J_{NN}, \\ l(J_S) = M_S^{-1}\, M(J_S, j_0)\text{ sign } E_{j0}, \\ l(J_B) = A_B^{-1}\left[A(I, J_S)l(J_S) - A(I, I_{j0})sign\ E_{j0}\right]. \end{cases} \qquad (2.13)$$

D'autre part, le pas θ doit vérifier les relations suivantes :

1. $-\theta l_j \leq x_j, j \in J_B$.
2. $-\theta l_j \leq x_j, j \in J_S$.
3. $\theta\text{sign } E_{j0} \leq x_{j0}$.

En calculant les différentes valeurs maximales que peut prendre le pas θ dans ces relations, on aura :

$$\theta_{j1} = \min_{j \in J_B}(\theta_j),\ \ o\text{ù } \theta_j = \begin{cases} -x_j/l_j & \text{si } l_j < 0, \\ \infty, & \text{si } l_j \geq 0. \end{cases}$$

$$\theta_{j_s} = \min_{j \in J_S}(\theta_j),\ \ o\text{ù } \theta_j = \begin{cases} -x_j/l_j & \text{si } l_j < 0, \\ \infty, & \text{si } l_j \geq 0. \end{cases}$$

$$\theta_{j0} = \begin{cases} x_{j0} & \text{si } E_{j0} > 0, \\ \infty, & \text{si } E_{j0} < 0. \end{cases}$$

Ensuite, déterminons le pas θ_F pour lequel le passage de x à $\bar{x}$ doit assurer une diminution maximale de la fonction objectif, i.e, d'après (2.11) nous devons avoir :

$$\frac{\partial\varphi(\theta)}{\partial\theta} = 0 \iff -\left|E_{j0}\right| + \theta l_N M l_N = 0.$$

On en déduit que la valeur de θ_F est égale à :

$$\theta_F = \begin{cases} \dfrac{\left|E_{j0}\right|}{l_N^T M l_N}, & \text{si } l_N^T M l_N > 0, \\ \infty, & \text{si } l_N^T M l_N = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, le pas maximal θ^0 le long de la direction l vaut :

$$\theta^0 = \min\left(\theta_{j0}, \theta_{j1}, \theta_{jS}, \theta_F\right).$$

Le nouveau plan s'écrit $\bar{x} = x + \theta^0 l$. Si $\bar{E}_N \geq 0$ et $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \epsilon$, alors le plan $\bar{x}$ est ϵ-optimal et on peut arrêter l'algorithme.

Sinon, on changera J_P de la manière suivante :

- Si $\theta^0 = \theta_{j0}$, alors $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S, \bar{J}_P = J_P$;
- Si $\theta^0 = \theta_{j1}$, alors $\bar{J}_B = (J_B/j_1) \cup j_0, \bar{J}_S = J_S, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$;
- Si $\theta^0 = \theta_{jS}$, alors $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S/j_S, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$;
- Si $\theta^0 = \theta_F$, alors $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \cup j_0, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$;

On recommencera alors une nouvelle itération avec le nouveau plan de support accordé $\{\bar{x}, \bar{J}_P\}$.

Remarque 2.6.1 : Le passage de $\{x, J_P\} \longrightarrow \{\bar{x}, \bar{J}_P\}$ assure les conditions

$$\det \bar{A}_B \neq 0, \det \bar{M}_S \neq 0, \text{ et } \bar{E}(\bar{J}_S) = 0.$$

2.6.2 Finitude de la méthode

La finitude de la méthode de résolution présentée ci-dessus est garantie pour peu qu'une certaine réglé soit observée, à savoir qu'il faut commencer par changer en premier lieu les composantes non optimales, ne correspondant pas aux composantes critiques du plan courant *x*.

Soit J_{NNO} l'ensemble des indices non optimaux, formés des sous-ensembles suivants :

$$J_{NNO} = J_E \cup J_{cr}$$

Avec $J_E = \{\, j \in J_{NN}/x_j > 0, E_j \neq 0\}$et $J_{cr} = \{j \in J_{NN}/x_j = 0, E < 0\}$.

Théorème 2.6.1. Tant que $J_E \neq \emptyset$ l'indice j_0 est toujours choisi dans J_E .

Pour la démonstration de ce théorème, nous renvoyons le lecteur aux références suivantes : [28, 6, 32]

2.7 Algorithme de la méthode

La méthode est résumée dans l'algorithme suivant :

Algorithme

Début

0. Soit un nombre réel positif ou nul quelconque ϵ et un plan du support initial $\{x\ ,J_P\}$ tel que $J_P = \{J_B\ ,\ J_S\}$, avec $J_S = \emptyset$ pour plus de facilité ;

1. Calculer le vecteur des estimations $E_N^T = g_N^T - u^T A_N$;

2. Test d'optimalité du plan de support $\{x, J_B\}$;

❖ ***Si*** $E_N \geq 0$ alors

Calculer la valeur des estimations $\beta(x\ ,\ J_B)$;

- ***Si*** $\beta(x\ ,\ J_B) = 0$ alors le processus de résolution s'arrête avec $\{x\ ,J_P\}$ plan de support optimal ;
  FinSi
- ***Si*** $\beta(x\ ,\ J_B) \leq \epsilon$ alors le processus de résolution s'arrête avec $\{x\ ,J_P\}$ plan de support ϵ-optimal ;
  FinSi
- ***Si*** $\beta(x\ ,\ J_B) > \epsilon$ alors ***aller en (3)*** ;

FinSi

❖ ***Sinon*** $(E_N \ngeq 0)$ ***aller directement en 3*** ;

FinSi

3. Changement du plan x en $\bar{x}$: $\bar{x} = x + \theta^0 l.$

- Choisir l'indice j_0 tel que $|E_{j0}| = \max(|E_j|, j \in J_{NNO})$, où J_{NNO} est l'ensemble des indices non optimaux ;

- Calculer le pas $\theta^0 = \min\{\theta_{j1}, \theta_{j0}, \theta_{jS}, \theta_F\}$;

- Calculer $\bar{x} = x + \theta^0 l$;

4. Test d'optimalité du nouveau plan $\bar{x}$;

❖ ***Si*** $\bar{E}_N \ngeq 0$ alors

- ***Si*** $\beta(\bar{x}\ ,\ J_B) \leq \epsilon$ alors le processus de résolution s'arrête avec $\{\bar{x}\ ,\ J_P\}$ plan de support ϵ-optimal ;
- ***Sinon*** aller en ***5*** ;

FinSi

❖ ***Sinon*** $(\bar{E}_N \geq 0)$ ***aller directement en 5*** ;

FinSi

5. Changement de support J_P en $\bar{J}_P$;

Si $\theta^0 = \theta_{j0}$ alors

$\bar{J}_B = J_B$; $\bar{J}_S = J_S$; $\bar{J}_P = J_P$;

FinSi

Si $\theta^0 = \theta_1$ alors

$$\bar{J}_B = (J_B/j_1) \cup j_0, \bar{J}_S = J_S, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \quad \bar{J}_S\} ;$$

FinSi
Si $\theta^0 = \theta_S$ alors

$$\bar{J}_B = J_B, \quad \bar{J}_S = J_S/j_S, \quad \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \quad \bar{J}_S\};$$

FinSi
Si $\theta^0 = \theta_F$ alors

$$\bar{J}_B = J_B, \quad \bar{J}_S = J_S \cup j_0, \quad \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \quad \bar{J}_S\};$$

FinSi
Aller en 1 avec le nouveau plan de support $\{\, \bar{\boldsymbol{x}}\ ,\ \boldsymbol{J_P}\}$.

Fin.

2.8 Exemple numérique :

Soit le problème de programmation quadratique suivant :

$$F(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 \to \text{min},$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 5,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

On a :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $x = (0,0,4,5)$ un plan initial du problème. Posons $J_B = \{3,4\}$, $J_N = \{1,2\}$. nous avons alors $A_B = (a_3, a_4) = I_2$ et $A_N = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_B^{-1}\, A_N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons la matrice $M = Z^T DZ$, avec

$$Z = Z(J, J_N) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$M = Z^T DZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Calculons le vecteur gradient $g(x) = (g_B, g_N)$:

$$g(x) = Dx + c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } g_N = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

D'où le vecteur des estimations :

$$E_N = g_N - \left(g^T{}_B A_B^{-1} A_N\right)^T = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Posons $J_S = \emptyset,\ J_{NN} = J_N / J_S = \{1,2\}$, la paire $\{x\ ,\ J_P\}$ est alors le plan de support du problème considéré.

Itération :

Le critère d'optimalité n'étant pas vérifié pour l'indice $j_0 = 1$,

- Calculons alors la direction d'amélioration l :

$$\begin{cases} l_{j0} = l_1 = -\text{sign}E_1 = 1, & \text{car } E_1 < 0, \\ l_j = 0, & \text{si } j \neq j_0. \end{cases}$$

$$l(J_{NN}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$l(J_S) = \left(l_j, j \in J_S\right) = 0, \text{ car } (J_S = \emptyset)$$

$$l(J_B) = \left(l_j, j \in J_B\right) = -A_B^{-1} A(I,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Calculons le pas θ^0 le long de cette direction :

$$\theta_{j0} = \theta_1 = \infty,\ car\ E_1 < 0,$$

$$\theta_{j1} = \min_{j \in J_B} \theta_j = \min\{\theta_3, \theta_4\}, \text{ avec } \begin{cases} \theta_3 = 4 \\ \theta_4 = 5/2 \end{cases}$$

$$\theta_{j1} = \theta_4 = 5/2 \Rightarrow j_1 = 4$$

$$\theta_{jS} = \infty, \text{car } J_S = \emptyset,$$

$$\theta_F = \frac{|E_1|}{\propto}, \text{ avec } \propto = l_N^T M l_N = 2,$$

$$\theta_F = 2/2 = 1.$$

Donc $\theta^0 = \min\left\{\theta_{j0}, \theta_{j1}, \theta_{jS}, \theta_F\right\} = \theta_F = 1.$ on a alors le nouveau plan :

$$\bar{x} = x + \theta^0 l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\bar{J}_B = J_B = \{3,4\};\ \bar{J}_S = \{1\};\ \bar{J}_{NN} = \{2\};\ \bar{J}_P = \left\{\bar{J}_B, \bar{J}_S\right\}.$$

On recommence alors une nouvelle itération avec le plan de support $\{\bar{x}, \bar{J}_P\}$:

Calculons alors le nouveau vecteur des estimations :

$$g(\overline{x}) = D\overline{x} + c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{E}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Le critère d'optimalité (2.10) étant vérifié, le vecteur $x^0 = (1,0,3,3)$ est alors un plan optimal avec $F(x^0) = -1$.

3.1 Introduction

La méthode de support que nous avons présentée dans le chapitre précédent est une méthode d'amélioration basée sur la métrique du simplexe, mais les plans de support admettent encore d'autres métriques pour les directions d'amélioration.

Le principe de cette méthode est pratiquement le même que celui de la méthode directe de support, c'est-à-dire, qu'au lieu d'utiliser la métrique du simplexe en changeant un seul indice non basique j_0, on utilisera plutôt une autre métrique dite adaptée qui consiste à considérer tous les indices non optimaux en fonction desquels on construit une direction d'amélioration de la fonction objectif, et le pas optimal le long de cette direction.

3.2 Position du problème et définitions [35]

Le problème de la programmation quadratique convexe à variables bornées se présente sous la forme canonique suivante :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^T D\, x + c^T x \rightarrow \min, \tag{3.1}$$

$$Ax = b, \tag{3.2}$$

$$d^- \leq x \leq d^+, \tag{3.3}$$

où d^-,d^+, c et x sont des n-vecteurs, $rang(A) = m < n$,$D = D^T \geq 0$
$I = \{1, 2, ..., m\}$, $J = \{1, 2, ..., n\}$, J_B sont les indices des variables basiques bornées J_N sont les indices des variables non basiques bornées, $J = J_B \cup J_N$, avec $J_B \cap J_N = \emptyset$, $|J_B| = m$.

On peut alors écrire et fractionner les vecteurs et la matrice de la manière suivante :

- $d^- = d^-(J) = (d_j^-, j \in J)$;

- $d^+ = d^+(J) = (d_j^+, j \in J)$;

- $c = c(J) = (c_j, j \in J)$,

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ -- \\ c_N \end{pmatrix}, \quad c_B = c(J_B) = (c_j, j \in J_B), \quad c_N = c(J_N) = (c_j, j \in J_N);$$

- $x = x(J) = (x_j, j \in J)$,

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ -- \\ x_N \end{pmatrix}, \quad x_B = x(J_B) = (x_j, j \in J_B), \quad x_N = x(J_N) = (x_j, j \in J_N);$$

- $A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = (a_j, j \in J)$,

$A = (A_B|A_N), \quad A_B = A(I, J_B), \quad A_N = A(I, J_N);$

Définition3.2.1. "solution réalisable"
Un vecteur (x) *vérifiant les contraintes* (3.2) (3.3) *est appelé plan ou solution réalisable du problème* (3.1)-(3.3).

Définition3.2.2. "solution optimale"
Un plan (x^0) *est dit optimal si :*

$$F(x^0) = \quad \frac{1}{2}x^{0^T} D\ x^0 + c^T x^0 = \min_x\left(\frac{1}{2}x^T D\ x + c^T x\right),$$

où (x) *est pris parmi tous les plans du problème* (3.1)-(3.3).

Définition3.2.3. "solution suboptimale"
Un plan (x^ϵ) *est appelé* ϵ*-optimal ou suboptimal si*

$$F(x^\epsilon) - F(x^0) \leq \epsilon,$$

où ϵ *est un nombre positif ou nul, donné à l'avance et* (x^0) *est une solution optimale du problème* (3.1)-(3.3).

Définition3.2.4. "support des contraintes"
L'ensemble $J_B \subset J$, $|J_B| = m$ *est appelé support des contraintes si :* $\det A_B \neq 0$

Définition3.2.5. "plan de support"
Le couple $\{x, J_B\}$ *, formé d'une solution réalisable* x *et d'un support* J_B *, est appelé plan de support du problème* (3.1)-(3.3).

Définition3.2.6. "plan de support non dégénéré"
Le plan de support est dit non dégénéré, si

$$d_j^- < x_j < d_j^+, \quad \forall j \in J_B.$$

3.3 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{ x, J_B \}$ un plan de support du problème (3.1)-(3.3).

Considérons un autre plan quelconque $\overline{x} = x + \triangle x$,l'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$F(\overline{x}) - F(x) \quad = \quad (g(x))^T \triangle x + \frac{1}{2}(\triangle x)^T D \triangle x, \tag{3.4}$$

où $g(x) = Dx + c$ est le gradient de la fonction (3.1), avec $g(x) = g(J) = (g_j, j \in J)$,

$$g = \begin{pmatrix} g_B \\ -- \\ g_N \end{pmatrix}, \quad g_B = g(J_B) = (g_j, j \in J_B), \quad g_N = g(J_N) = (g_j, j \in J_N).$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{cases} Ax = b, \\ A\overline{x} = b. \end{cases} \Leftrightarrow A\,\overline{x} = A\,x = b.$$

$$A(\triangle x + x) = A\,\triangle x + A\,x = b \Leftrightarrow A\triangle x = 0.$$

$\triangle x = \begin{pmatrix} \triangle x_B \\ -- \\ \triangle x_N \end{pmatrix}$, $\triangle x_B = \triangle x(J_B)$, $\triangle x_N = \triangle x(J_N)$, l'égalité $A\triangle x = 0$ peut être alors écrite $A_B \triangle x_B + A_N \triangle x_N = 0$, d'où

$$\triangle x_B = -A_B^{-1}\, A_N\, \triangle x_N. \tag{3.5}$$

et définissons le vecteur des potentiels u ainsi que le vecteur des estimations E comme suit :

$$u^T = g_B^T A_B^{-1}, \quad E^T = g^T - u^T A = (E_B^T, E_N^T),$$

avec

$$E_B^T = 0, \quad E_N^T = g_N^T - u^T A_N \quad .$$

La formule (3.4) devient alors :

$$F(\overline{x}) - F(x) \quad = g_B^T\ \Delta x_B + g_N^T\ \Delta x_N + \frac{1}{2}\ (\Delta x_B, \Delta x_N)^T D\ (\Delta x_B, \Delta x_N).$$

En vertu de (3.5), on obtient donc

$$F(\overline{x}) - F(x) = g_B^T\ (-A_B^{-1} A_N \Delta x_N + g_N^T\ \Delta x_N) + 1/2\ (-A_B^{-1} A_N \Delta x_N, \Delta x_N)^T\ D\ \ (-A_B^{-1} A_N \Delta x_N, \Delta x_N)$$

$$= \left[-g_B^T\ A_B^{-1} A_N + g_N^T\ \right]\Delta x_N + 1/2\ \ \Delta x_N \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} \Delta x_N.$$

Où $I_N = I_N(J_N, J_N)$ est la matrice identité d'ordre $(n-m)$.

Posons

$$Z = Z(J, J_N) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix}, M = M(J_N, J_N) = Z^T D\ Z \qquad (3.6)$$

Finalement, l'accroissement de la fonction objectif (3.4) aura la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(\overline{x}) - F(x) &= E_N^T \triangle x_N + \frac{1}{2}(\triangle x_N)^T Z^T D Z(\triangle x_N) \\ &= E_N^T \triangle x_N + \frac{1}{2}(\triangle x_N)^T\ M\ \triangle x_N. \end{aligned} \qquad (3.7)$$

3.4 Critère d'optimalité *[35]*

Théorème 3.1 ***"Critère d'optimalité"***
Soit $\{x, J_B\}$ *un plan de support des contraintes du problème* (3.1)- (3.3) *. Alors les relations suivantes :*

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & si \quad x_j = d_j^- \\ E_j \leq 0, & si \quad x_j = d_j^+ \\ E_j = 0, & si \quad d_j^- < x_j < d_j^+, \quad j \in J_N \quad ; \end{cases} \qquad (3.8)$$

sont suffisantes pour l'optimalité du plan x.
Ces mêmes relations sont aussi nécessaires, si le plan de support des contraintes est non dégénéré.

Démonstration

Condition suffisante : Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes du problème (3.1)-(3.3) vérifiant les relations (3.8). Pour tout plan $\overline{x}$ du problème (3.1)-(3.3), la formule d'accroissement (3.7) nous permet d'écrire :

$$F(\overline{x}) - F(x) \geq E_N^T\ \triangle x_N$$

car la matrice M est semi-définie positive. D'où

$$F(\overline{x}) - F(x) \geq \sum_{j\in J_N, E_j>0} E_j\ (\overline{x}_j - x_j) + \sum_{j\in J_N, E_j<0} E_j\ (\overline{x}_j - x_j)$$

Comme $d_j^- \leq \overline{x}_j \leq d_j^+$, alors $\overline{x}_j - d_j^- \geq 0$ et $\overline{x}_j - d_j^+ \leq 0$, et en vertu des relations (3.8), on aura

$$F(\overline{x}) - F(x) \geq \sum_{j\in J_N, E_j>0} E_j\ (\overline{x}_j - d_j^-) + \sum_{j\in J_N, E_j<0} E_j\ (\overline{x}_j - d_j^+) \geq 0$$

D'où: $F(\overline{x}) \geq F(x)$

Par conséquent, le vecteur x est une solution optimale du problème (3.1)-(3.3).

Condition Nécessaire : Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support optimal non dégénéré du problème (3.1)-(3.3), et supposons que les relations (3.8) ne sont pas vérifiées, c-à-d, qu'il existe au moins un indice $j_0 \in J_N$, tel que :

$$\begin{array}{lll} E_{j_0} > 0, & \text{pour} & x_{j_0} > d_{j_0}^-, j_0 \in J_N\ , \\ & \textit{ou bien} & \\ E_{j_0} < 0, & \text{pour} & x_{j_0} < d_{j_0}^+, j_0 \in J_N\ , \end{array}$$

On construit un autre plan $\overline{x} = (x + \theta l\ )$, où θ est un nombre réel positif, et $l = l(J)$ est un vecteur de direction que l'on construit comme suit :

$$\begin{cases} l_{j_0} = -signE_{j_0} \\ l_j = 0, j \neq j_0, j \in J_N \end{cases}$$

D'autre part, on doit avoir $A\,\overline{x} = A\,x + \theta A l = b \Leftrightarrow A_B l_B + A_N l_N = 0.$

D'où:

$$l_B = -A_B^{-1} A_N l_N = A_B^{-1} a_{j_0} signE_{j_0}\ .$$

En vertu de la procédure de construction de la direction d'amélioration l, le vecteur $\overline{x}$ satisfait la contrainte principale (3.2), et pour qu'il soit un plan du problème (3.1)-(3.3), il doit en plus vérifier les inégalités (3.3):

$$d^- \leq \overline{x} \leq d^+ \Leftrightarrow d^- \leq x + \theta l\ \leq d^+ \Leftrightarrow d^- - x \leq \theta l\ \leq d^+ - x,$$

Soit, en écrivant composante par composante :

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_B \ ,$$

$$d_{j_0}^- - x_{j_0} \leq \theta l_{j_0} \leq d_{j_0}^+ - x_{j_0}, \quad j \in J_N \ ,$$

En vertu de la non-dégénérescence du plan de support $\{ x , J_B \}$, le pas θ^0 ainsi construit est strictement positif, et le vecteur $\overline{x} = x + \theta l$ est une solution réalisable du problème (3.1)-(3.3) pour tout θ tel que $0 < \theta \leq \theta^0$.
La formule d'accroissement de la fonction objectif (3.7) nous donne alors :

$$\begin{aligned} F(\overline{x}) - F(x) &= E_N^T \triangle x_N + \frac{1}{2}(\triangle x_N)^T M \triangle x_N \\ &= \theta E_N^T l_N + \frac{1}{2}\theta^2 l_N^T M l_N \\ &= -\theta E_{j_0} \, sign E_{j_0} + \frac{1}{2}\theta^2 l_N^T M l_N \\ &= \theta \left(-|E_{j_0}| + \frac{1}{2}\theta l_N^T M l_N \right) \end{aligned}$$

Pour $\theta > 0$ assez petit, on aura $-|E_{j_0}| + \frac{1}{2}\theta l_N^T M l_N < 0$. D'où $F(\overline{x}) - F(x) < 0$, ce qui contredit l'optimalité de x.

Donc les relations (3.8) sont forcément vérifiées si le plan de support optimal est non-dégénéré.

3.5 Critère de suboptimalité

Pour estimer l'écart qui existe entre la valeur optimale $F(x^0)$ et une autre valeur $F(x)$ d'un plan de support des contraintes quelconque $\{ x , J_B \}$, remplaçons dans la formule d'accroissement (3.7) le vecteur $\overline{x}$ par x^0 et en minorant cette expression, on aura donc :

$$\begin{aligned} F(x^0) - F(x) &= E_N^T \triangle x_N + \frac{1}{2}(\triangle x_N)^T M \triangle x_N \\ &= \sum_{j \in J_N} E_j \, (x_j^0 - x_j) + \frac{1}{2}(\triangle x_N)^T M \triangle x_N \\ &\geq \sum_{j \in J_N} E_j \, (x_j^0 - x_j) \quad , \qquad \text{car } M \geq 0. \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} F(x) - F(x^0) &\leq \sum_{j \in J_N} E_j \ (x_j - x_j^0) \\ &\leq \sum_{j \in J_N \ , \ E_j \ >0} E_j \ (x_j - x_j^0) + \sum_{j \in J_N \ , \ E_j \ <0} E_j \ (x_j - x_j^0) \end{aligned}$$

Nous avons $d_j^- \leq x_j^0 \leq d_j^+, j \in J_N$, alors on aura :

$$E_j \ (x_j - x_j^0) \leq E_j \ (x_j - d_j^-), \text{ si } E_j \ > 0,$$

$$E_j \ (x_j - x_j^0) \leq E_j \ (x_j - d_j^+), \ \ si \ E_j \ < 0.$$

Par conséquent, on obtient la majoration suivante :

$$F(x) - F(x^0) \leq \sum_{j \in J_N \ , \ E_j \ >0} E_j \ (x_j - d_j^-) + \sum_{j \in J_N \ , \ E_j \ <0} E_j \ (x_j - d_j^+) \tag{3.9}$$

Le nombre

$$\beta \ (x, J_B \ ) \ = \sum_{j \in J_N \ , \ E_j \ >0} E_j \ (x_j - d_j^-) + \sum_{j \in J_N \ , \ E_j \ <0} E_j \ (x_j - d_j^+)$$

est appelé estimation de suboptimalité.

Théorème3.2. ***"Condition suffisante de suboptimalité"***
Soit $\{ \ x, \ J_B \ \}$ un plan de support des contraintes du problème (3.1)-(3.3), et ϵ un nombre positif ou nul arbitraire.
si $\beta \ (x, J_B \ ) \ \leq \epsilon$, alors le plan x est ϵ -optimal.

Démonstration. En vertu de (3.9), nous avons

$$F(x) - F(x^0) \ \leq \ \ \beta \ (x, J_B \ )$$

Comme $\beta \ (x, J_B \ ) \leq \epsilon$, alors on aura $F(x) - F(x^0) \ \leq \epsilon$.

Le plan x est donc ϵ-optimal. Dans le cas particulier où $\epsilon = 0$, la relation réalisable x est par conséquent optimale.

3.6 Construction de l'algorithme *[35]*

Avant de présenter la méthode de résolution, donnons quelques définitions essentielles.

Définition3.6.1. "Support de la fonction objectif"
On appelle support de la fonction objectif du problème (3.1)-(3.3), l'ensemble des indices $J_S \subset J_N$ tel que :

$$\det M(J_S, J_S) \neq 0.$$

On posera $J_{NN} = J_N \setminus J_S$

Définition3.6.2. "Support du problème"
L'ensemble des indices $J_P = \{J_B, J_S\}$ est appelé support du problème (3.1)-(3.3), où J_B est le support des contraintes et J_S est le support de la fonction objectif.

Définition3.6.3. "Plan de support"
On appelle plan de support du problème (3.1)-(3.3), la paire $\{x, J_P\}$ formée du plan x et du support J_P ; il est dit accordé si $E(J_S) = 0$.

3.6.1 Construction d'une direction d'amélioration adaptée

La méthode de support que nous avons vue dans le chapitre précédent est une méthode d'amélioration basée sur la métrique du simplexe, mais les plans de support admettent encore d'autres métriques pour les directions d'amélioration. Considérons la métrique suivante pour les composantes non basiques de la direction admissible l :

$$d_j^- - x_j \leq l_j \leq d_j^+ - x_j, \;\; j \in J_{NN} = J_N \setminus J_S \,, \tag{3.10}$$

Cette métrique dépend du plan courant x , et de ce fait, elle est dite adaptée. Afin de calculer les composantes de la direction admissible d'amélioration l , considérons l'accroissement

$$\triangle F = F(x+l) - F(x) = \sum_{j \in J_N \,/E_j > 0} E_j \, l_j + \sum_{j \in J_N \,/E_j < 0} E_j \, l_j + \frac{1}{2} l_N^T M l_N.$$

En tenant compte de la métrique (3.10), la partie linéaire de $\triangle F$ atteint son minimum pour les valeurs des composantes de $l\ (J_{NN})$ suivantes :

$$l_j = \begin{cases} d_j^- - x_j & \text{si } E_j > 0, \\ d_j^+ - x_j & \text{si } E_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_j = 0. \end{cases} \qquad \text{pour } j \in J_{NN} \,, \tag{3.11}$$

Nous calculons la composante l_S d'une manière à assurer que $\overline{E}_j = E_j(x+\theta l) = 0, \quad j \in J_S$. donc

$$M(J_S, J_S)l(J_S) + M(J_S, J_{NN})l(J_{NN}) = 0,$$

D'où:

$$l(J_S) = -M_S^{-1}M(J_S, J_{NN})l(J_{NN}). \tag{3.12}$$

Puis, nous calculons l_B tel que $Al = 0$:

$$l_B = -A_B^{-1}(A_S l_S + A_{NN} l_{NN}). \tag{3.13}$$

Ainsi, on a

$$l = \begin{cases} l_j = \begin{cases} d_j^- - x_j & \text{si } E_j > 0\,; \\ d_j^+ - x_j & \text{si } E_j < 0\,; \\ 0 & \text{si } E_j = 0. \end{cases} & j \in J_{NN} \\ \\ l_S = -M_S^{-1}M(J_S, J_{NN})l(J_{NN}); & j \in J_S \\ \\ l_B = -A_B^{-1}(A_S l_S + A_{NN} l_{NN}). & j \in J_B \end{cases}$$

3.6.2 Calcul du pas θ^0

On construit alors un nouveau plan $\overline{x}$ sous la forme :

$$\overline{x} = x + \theta^0 l$$

où l est la direction d'amélioration définie par (3.11) -(3.13)et le nombre θ^0 est le pas le long de cette direction, avec:

$\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\}$.Les nombres 1 ,θ_{j_1} et θ_{j_s} se calculent de façon à ce que les contraintes directes sur le vecteur $\overline{x}$ soient vérifiées :

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_j \leq d_j^+ - x_j, \ j \in J_B \ , \tag{3.14}$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{NN} \ , \tag{3.15}$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_j \leq d_j^+ - x_j, \ j \in J_S \ , \tag{3.16}$$

En calculant les différentes valeurs maximales que peut prendre les pas θ dans ces relations, on aura :

$$\theta_{j_1} = \min\{\theta_j \ , j \in J_B \}$$

$$\theta_{j_s} = \min\{\theta_j \ , j \in J_S \}$$

$$\theta_j = \min\{\theta_j \ , j \in J_B \cup J_S\}, \text{ avec } \theta_j = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_j}, & \text{si } l_j > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_j}, & \text{si } l_j < 0, \\ \infty, & \text{si } l_j = 0. \end{cases}$$

le nombre θ^0 =1 représente le pas correspondant aux indices de J_{NN} .

Quand à θ_F, il se calcule de façon que le passage de x à $\overline{x}$ puisse assurer une diminution maximale de la fonction objectif, tout en gardant le même signe pour les E_j et $\overline{E}_j$, où

$E_N^T = (g(x))^T Z \qquad \overline{E}_N^T = (g(x+ \ \theta^0 l))^T Z$

Finalement, nous avons

$$\overline{E}_N = E_N + \theta^0 M l_N = E_N + \theta^0 \delta_N.$$

On posera donc $\theta_F = \sigma_{j^*} = \min \sigma_j, j \in J_{NN}$, avec

$$\sigma_j = \begin{cases} -\frac{E_j}{\delta_j}, & \text{si } E_j\delta_j < 0, \\ \infty, & \text{si } E_j\delta_j \geq 0. \end{cases}$$

$$\delta_j = M(j, J_N)l_N.$$

Nous devons prendre le pas θ^0 comme suit :

$$\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\}$$

Le nouveau plan est $\overline{x} = x + \theta^0 l$

3.6.3 Estimation de suboptimalité

Calculons la nouvelle estimation de suboptimalité $\beta(\overline{x}, J_B)$ en fonction de $\beta(x, J_B)$:

$$\beta(\overline{x}, J_B) = \sum_{j \in J_N, \overline{E}_j > 0} \overline{E}_j(\overline{x}_j - d_j^-) + \sum_{j \in J_N, \overline{E}_j < 0} \overline{E}_j(\overline{x}_j - d_j^+).$$

$$= \sum_{j \in J_N, \overline{E}_j > 0} \overline{E}_j(x_j + \theta^0 l_j - d_j^-) + \sum_{j \in J_N, \overline{E}_j < 0} \overline{E}_j(x_j + \theta^0 l_j - d_j^+)$$

$$= \sum_{j \in J_N, E_j > 0} (E_j + \theta^0 \delta_j)(x_j + \theta^0 l_j - d_j^-) + \sum_{j \in J_N, E_j < 0} (E_j + \theta^0 \delta_j)(x_j + \theta^0 l_j - d_j^+)$$

$$= \sum_{j \in J_N, E_j > 0} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{j \in J_N, E_j > 0} E_j \theta^0 l_j + \sum_{j \in J_N, E_j > 0} \theta^0 \delta_j (x_j - d_j^-) + \sum_{j \in J_N, E_j > 0} \theta^0 \delta_j \theta^0 l_j$$

$$+ \sum_{j \in J_N, E_j < 0} E_j(x_j - d_j^+) + \sum_{j \in J_N, E_j < 0} E_j \theta^0 l_j + \sum_{j \in J_N, E_j < 0} \theta^0 \delta_j (x_j - d_j^+) + \sum_{j \in J_N, E_j < 0} \theta^0 \delta_j \theta^0 l_j .$$

En vertu des relations (3.11), on aura alors

$$\beta(\overline{x}, J_B) = \beta(x, J_B) +$$

$$\theta^0 \sum_{j \in J_N, E_j > 0} E_j(d_j^- - x_j) + \theta^0 \sum_{j \in J_N, E_j < 0} E_j(d_j^+ - x_j) + \theta^0 \sum_{j \in J_N, E_j > 0} \delta_j(-l_j)$$

$$+\theta^0 \sum_{j \in J_N, E_j < 0} \delta_j(-l_j) + \theta^{0^2} \sum_{j \in J_N, E_j > 0} \delta_j l_j + \theta^{0^2} \sum_{j \in J_N, E_j < 0} \delta_j l_j .$$

$$= \beta(x, J_B) - \theta^0 \beta(x, J_B) - \theta^0 \delta_N^T l_N + \theta^{0^2} \delta_N^T l_N.$$

Donc on obtient la formule suivante

$$\beta(\overline{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B) - \theta^0(1 - \theta^0) l^T M l . \tag{3.17}$$

Si $\bar{E}_N \geq 0$ et $\beta((\overline{x}, J_B) \leq \epsilon$, alors le plan $\overline{x}$ est ϵ-optimal et nous pouvons arrêter l'algorithme ; sinon, on procèdera au changement du support.

3.6.4 Changement de support

Si $\bar{E}_N \ngeq 0$ ou $\beta((\overline{x}, J_B) > \epsilon$, nous allons changer le support J_P par un nouveau support $\overline{J}_P$ de la manière suivante :

- Si $\theta^0 = 1$,

  alors le vecteur $x^0 = x + l$ est une solution optimale du problème (3.1)-(3.3).

- Si $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$,

  contrairement à la méthode de simplexe, le choix de l'indice j_0 n'est pas unique, ce qui fait la particularité de cette méthode. Lorsque ce cas se réalise pour un indice $j_1 \in J_B$, nécessairement on a alors

$$l_{j_1} = -\sum_{j \in J_N} e_{j_1}^T A_B^{-1} a_j l_j = -\sum_{j \in J_N} x_{j_1 j} l_j \neq 0,$$

  où e est un vecteur unitaire de dimension m dont la composante j_1 vaut 1 . Il existe alors $j_0 \in J_N$ tel que $x_{j_1 j} \neq 0$. Cette dernière condition nous assure par conséquent, que $\overline{J}_B = (J_B \backslash j_1) \cup j_0$ est bel et bien un support.

  Si on peut avoir $x_{j_1 j_0} \neq 0$, avec $j_0 \in J_S$, on posera donc

$$\overline{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \ \overline{J}_S = J_S \setminus j_0$$

  Sinon, on choisira un indice $j_0 \in J_{NN}$ tel que $l_{j_0} \neq 0$, alors

$$\overline{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \ \overline{J}_S = J_S$$

- Si $\theta^0 = \theta_{j_s}$, alors

$$\overline{J}_B = J_B \ , \quad \overline{J}_S = J_S \setminus j_s$$

- Si $\theta^0 = \theta_F$, alors

$$\overline{J}_B = J_B \ , \ \overline{J}_S = J_S \cup j_*$$

Nous commencerons alors une nouvelle itération avec le nouveau plan de support $\{\overline{x}, \overline{J}_P\}$, Si $\beta((\overline{x}, \overline{J}_B) \geq \epsilon$.

où le support $\overline{J}_P$ satisfait les conditions algébriques

$$\det \overline{A}_B = \det A(I, \overline{J_B}) \neq 0 \ \ et \ \ \det M(\overline{J}_S, \overline{J}_S) \neq 0.$$

3.7 Algorithme de la méthode

La méthode est résumée dans l'algorithme suivant :

Algorithme Méthode adaptée pour la programmation quadratique convexe à variables bornees

Début

❶ Soit un nombre réel positif ou nul quelconque ϵ, et un plan de support initial $\{x, J_P\}$ tel que $J_P = \{J_B, J_S\}$, avec $J_S = \emptyset$ pour plus de facilité ;

❷ Calculer le vecteur des potentiels $E_N^T = g_N^T - u^T A_N$;

❸ Test d'optimalité du plan de support $\{x, J_P\}$;
SI $E_N \geq 0$, alors
Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(x, J_B)$;
SI $\beta(x, J_B) = 0$, alors
le processus de résolution s'arrête avec $\{x, J_P\}$ plan de support optimal ;
FIN SI
SI $\beta(x, J_B) \leq \epsilon$, alors
le processus de résolution s'arrête avec $\{x, J_P\}$ plan de support ϵ-optimal ;
FIN SI
SI $\beta(x, J_B) > \epsilon$, alors aller en ❹ ;
FIN SI
FIN SI
SINON$(E_N \ngeq 0)$, aller directement en ❹ ;
FIN SI

❹ Changement du plan x par $\overline{x}$ tel que $\overline{x} = x + \theta^0 l$

- Calculer la direction d'amélioration l
- Calculer le pas $\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\}$;
- Calculer $\overline{x} = x + \theta^0 l$

❺ Test d'optimalité du nouveau plan $\overline{x}$;
SI $\overline{E}_N \geq 0$, Alors
SI $\beta(\overline{x}, J_B) \leq \epsilon$, alors
le processus de résolution s'arrête avec $\{\overline{x}, J_P\}$ plan de support ϵ-optimal ;
SINON, aller en ❻ ;
FIN SI
SINON $(\overline{E}_N \ngeq 0)$, aller directement en ❻ ;
FIN SI

❻ `Changement de support` J_P `en` $\overline{J}_P$;

SI $\theta^0 = 1$, $\beta(\overline{x}, J_B) = 0$ Alors

le vecteur $\overline{x} = x + l$ est une solution optimale, . **FIN**

FIN SI

SI $\theta^0 = \theta_{j_1}$, Alors

SI $\exists j_0 \in J_S$ tel que $x_{j_1 j_0} \neq 0$, alors

$\overline{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \overline{J}_S = J_S \setminus j_0, \overline{J}_P = \{\overline{J}_B, \overline{J}_S\}$;

SINON, on choisira $j_0 \in J_{NN}$ tel que $l_{j_0} \neq 0$, alors

$\overline{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \overline{J}_S = J_S, \overline{J}_P = \{\overline{J}_B, \overline{J}_S\}$;

FIN SI

FIN SI

SI $\theta^0 = \theta_{j_s}$, alors

$\overline{J}_B = J_B, \overline{J}_S = J_S \backslash j_s, \overline{J}_P = \{\overline{J}_B, \overline{J}_S\}$;

FIN SI

SI $\theta^0 = \theta_F$, alors

$\overline{J}_B = J_B, \overline{J}_S = J_S \cup j_*, \overline{J}_P = \{\overline{J}_B, \overline{J}_S\}$;

FIN SI

`aller en` ❶ `avec le nouveau plan de support` $\{\overline{x}, \overline{J}_P\}$.

FIN

3.8 . Exemple Numérique :

Soit le problème quadratique suivant :

$$F(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 \rightarrow min$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 4,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

On a

$$D= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c= \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $x = (0,0,4,5)$ un plan initial de problème. Posons $J_B = \{3,4\}, J_N = \{1,2\}$. Nous avons alors $A_B = (a_3, a_4) = I_2$ et $A_N = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, -A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminant la matrice $M = Z^T DZ$, avec Z=Z$(J, J_N) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

D’où

$$M = Z^T DZ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Calculant le vecteur gradient $g(x) = (J_B, J_N)$:

$$g(x)= Dx + c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, J_N = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

D’où le vecteur des estimations :

$E_N = g_B - (g_B^T A_B^{-1} A_N)^T = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$J_S = \emptyset, J_{NN} = J_N \setminus J_S = \{1,2\}$. La paire $\{x, J_P\}$, avec $J_P = \{J_B, J_S\}$ est alors le plan de support du problème considéré.

Itération 1 : Le critère d’optimalité n’étant pas vérifié pour l’indice $j_0 = 1$,

- Calculons alors la direction d'amélioration l :

$$\begin{cases} l_{j0} = l_1 = -signE_1 = 1, & car\ E_1 < 0 \\ l_j = 0, & si\ j \neq j_0 \end{cases}$$

$$l(J_{NN}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$l(J_S) = 0, \qquad car\ J_S = \emptyset$$

$$l(J_B) = -A_B^{-1}\, A(I,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Calculons le pas θ^0 le long de cette direction :

$$\theta_{j0} = \theta_1 = \infty, \qquad car\ \ E_1 < 0,$$

$$\theta_{j1} = min_{j\in J_B}\theta_j = \min\{\theta_3, \theta_4\}, \text{ avec } \begin{cases} \theta_3 = 4 \\ \theta_4 = 5\backslash 2 \end{cases}$$

$$\theta_{j1} = \theta_4 = 5\backslash 2 \Rightarrow j_1 = 4$$

$$\theta_{js} = \infty, \text{car } J_S = \emptyset,$$

$$\theta_F = \frac{|\ E_1\ |}{\alpha}, \text{ avec } \alpha = l'_N M l_N = 2,$$

$$\theta_F = 2\backslash 2 = 1$$

Donc $\theta^0 = min\{\theta_{j0}, \theta_{j1}, \theta_{js}, \theta_F\} = \theta_F = 1$. On a alors le nouveau plan :

$$\overline{x} = x + \theta^0 l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\overline{J}_B = J_B = \{3,4\}\ ;\ \overline{J}_S = \{1\}\ ;\ \overline{J}_{NN} = \{2\}\ ;\ \overline{J}_P = \{\overline{J}_B, \overline{J}_S\}\ .$$

On recommence alors une nouvelle itération avec le plan de support $\{\overline{x}, \overline{J}_P\}$:

Calculons alors le nouveau vecteur des estimations :

$$g(\overline{x}) = D\overline{x} + c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{E}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Le critère d'optimalité (3 .10) étant vérifié, le vecteur $x^0 = (1,0,3,3)$ est alors un plan optimal avec $F(x^0) = -1$.

Conclusion

La méthode que nous avons développée est inspirée de la méthode directe de support décrite dans le chapitre précédent. Nous avons proposé une autre métrique dite adaptée pour la direction d'amélioration, sa particularité est le fait de changer tous les indices non optimaux à la fois

On peut aussi généraliser ce problème dans le cas de la programmation quadratique convexe à variables mixtes dont la forme canonique se présente ainsi :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2} x^T D_1 x + c^T x + \frac{1}{2} y^T D_2 y + p^T \rightarrow min, \\ S.C: \\ \quad Ax + Hy = b \\ \quad d^- \leq x \leq d^+ \\ \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Où c, x , sont des n_x-vecteurs, p, y , sont des n_y-vecteurs, b est un m-vecteur, $A\ et\ H$ sont des matrices d'ordre $(m \times n_x)$ et $(m \times n_y)$ respectivement, avec

rang $(A \setminus H) = \text{m} < n_x + n_y$.

$d^- \epsilon R^{n_x}, d^+ \epsilon R^{n_y}$, les matrices $D_1 et\ D_2$ sont symétriques et semi-définies positives.

Soient les ensembles d'indices suivants :

$I = \{1, 2, \ldots, \text{m}\}$, ,$J_x = \{1, 2, \ldots, n_x\}$, $J_y = \{n_x + 1, \ldots, n_x + n_y\}$,J_{xB} et J_{yB} sont les indices des variables basiques bornées et simple respectivement, ,J_{xN} et J_{yN} sont les indices des variables non basiques bornées respectivement, $J = J_x U J_y$, $J_x = J_{xB}\ U\ J_{xN}$,$J_y = J_{yB}\ U\ J_{yN}$ avec $J_{xB} \cap J_{xN} = \emptyset, J_{yB} \cap J_{yN} = \emptyset$ et $|J_{xB}| + |J_{yB}| = m$.

Posons :

$J_B = j_{xB}$ U J_{yB}, $J_N = J \setminus J_B = J_{xN}$ U J_{yN} , et notons par $A_H$la matrice (A \ H) d'ordr $m \times (n_x + n_y)$.e

On peut alors écrire et fractionner les vecteurs et la matrice de la manière suivante :

- $d^- = d^-(J_x) = (d_j^-,\ j \in J_x)$;
- $d^+ = d^+(J_x) = (d_j^+,\ j \in J_x)$;
- $c = c(J_x) = (c_j,\ j \in J_x)$;
- $c = \binom{c_B}{c_N}$, $c_B = c(J_{xB}) = (c_j, j \in J_{xB})$, $c_N = c(J_{xN}) = (c_j, j \in J_{xN})$
- $x = x(J_x) = (x_j,\quad j \in J_x)$;

- $x = (\frac{x_B}{x_N}),\ x_B = x(J_{xB}) = (\ x_j, j \in\ J_{xB})\ , x_N = x(J_{xN}) = (\ x_j\ , j \in\ J_{xN})$

- $p = p(J_y) = (p_j, \quad j \in J_y\ )\ ;$

- $p = (\frac{p_B}{p_N}),\ p_B = p\big(J_{yB}\big) = (\ p_j, j \in\ J_{yB})\ , p_N = p\big(J_{yN}\big) = (\ y_j\ , j \in\ J_{yN})$

- $y = y(J_y) = (y_j, \quad j \in J_y\ )\ ;$

- $y = (\frac{y_B}{y_N}),\ y_B = y\big(J_{yB}\big) = (\ y_j, j \in\ J_{yB})\ , y_N = y(J_{xN}) = (\ y_j\ , j \in\ J_{yN})$

- $A = A(I, J_x) = \big(a_{ij}\ ,\ \ i \in I, \ \ J \in J_x\big); A = \big(a_j, j \in J_x\big), \qquad a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$

- $A = (A_B / A_N), A_B = A(I, J_{xB}), \quad A_N = A(I, J_{xN}).$

- $H = H\big(I, J_y\big) = \big(h_{ij}\ ,\ \ i \in I, \ \ J \in J_y\big); A = \big(h_j, j \in J_y\big), \qquad h_j = \begin{pmatrix} h_{1j} \\ \vdots \\ h_{mj} \end{pmatrix},$

- $H = (H_B / H_N), H_B = H\big(I, J_{yB}\big), \quad H_N = H\big(I, J_{yN}\big).$

- $A_H = A_H(I, J) = \big(a_{Hij}, \quad i \in I, \ \ j \in J_x \cup J_y\big) = \big(a_{Hij}, \quad j \in J_x \cup J_y\big) = (A \backslash H).$

$A_H = \big(A_{H_B} \backslash A_{H_N}\big), = A_{H_B} = A_H(I, J_{x_B} \cup J_{y_B}) = (A_B \backslash H_B),$

$A_{H_N} = A_H(I, J_{x_N} \cup J_{y_N}) = \ (A_N \backslash H_N).$

- $D = \begin{pmatrix} D_1(J_x, J_x) & 0 \\ 0 & D_2(J_y, J_y) \end{pmatrix}.$

5.1. Introduction

L'évolution de l'utilisation du matériel informatique a révolutionne les méthodes de travail des ingénieurs et chercheurs sans oublier l'enseignement. Le traitement numérique des données, leur visualisation, ainsi que les techniques de modélisation et de simulation se sont notamment généralisés.

Dans ce domaine, un logiciel commercial est devenu, ces dernières années, presque incontournable : il s'agit de Matlab de la société The Mathworks. Ce dernier met à la disposition de l'utilisateur un environnement performant pour mener à bien les calculs numériques.

Ce mémoire a également pour but de développer une implémentation informatique sous Matlab de la méthode du ***Support*** ainsi que la méthode ***Adaptée*** .

5.2. Choix du langage

Le choix s'est porte sur l'emploi du langage du logiciel Matlab 2008, car il répond aux critères suivants :

- La maniabilité du langage : constitue d'un ensemble de possibilités faisant en sorte que le programmeur travaille avec aisance, assure d'une part par la syntaxe du langage et d'autre part par un aspect visuel clair représentatif à la fois du détail et du global.
- Le bagage du langage : il contient une interface graphique puissante ainsi qu'une grande variété de méthodes scientifiques implémentées (prédéfinies).
- La possibilité de travailler avec des fonctions facilite aux utilisateurs leurs travaux en leur évitant les répétitions.
- Facilite de manipulation des matrices (elles sont considérées comme une seul variable).

5.2.1. Généralités sur le langage

Matlab est un logiciel parfaitement dédie a la résolution de problèmes d'analyse numérique ou de traitement du signal. Permet d'effectuer des calculs matriciels ou de visualiser les résultats sous forme graphique. La formulation des problèmes s'apparente à la formulation mathématique des problèmes a résoudre. L'utilisation de ce logiciel consiste à lancer des lignes de commandes, qui peuvent le plus souvent ressembler à la programmation en C.

Le nom Matlab vient de MATrix LABoratory, les éléments de données de base manipules par Matlab étant des matrices (mais pouvant évidemment se réduire a des vecteurs et des scalaires) qui ne nécessitent ni dimensionnement ni déclaration de type. Contrairement aux langages de programmation classiques, les fonctions du Matlab permettent de manipuler directement et interactivement ces données matricielles, rendant ainsi le Matlab particulièrement efficace en calcul numérique, analyse et visualisation de données en particulier. Il existe deux modes de fonctionnement sur Matlab :

- ✓ **Le mode interactif :** les instructions sont exécutées au fur et à mesure qu'elles sont données par l'usager.
- ✓ **Le mode exécutif :** dans ce cas, l'utilisateur utilise un fichier "M-file" contenant toutes les instructions à exécuter.

4.2.2. Programmation avec Matlab

Il existe deux façons pour l'écriture des fonctions Matlab : soit directement dans la fenêtre de commandes, soit en utilisant l'éditeur de développement de Matlab, en sauvegardant les programmes dans des fichiers texte avec l'extension ".m".

Fichiers *.m

Les programmes sauvegardes dans les fichiers Matlab (*.m) sont alors directement utilisables comme des fonctions Matlab à partir de la fenêtre de commande. Pour cela, le fichier doit se trouver dans le répertoire Matlab, qui est en pratique le dossier Work.

Création d'une fonction

La création d'une fonction dans Matlab se fait par la syntaxe suivante :

$$\textbf{\textit{function}}\ [s_1,\ s_2, \ldots] = \textbf{\textit{nomfonction}}(e_1, e_2, \ldots).$$

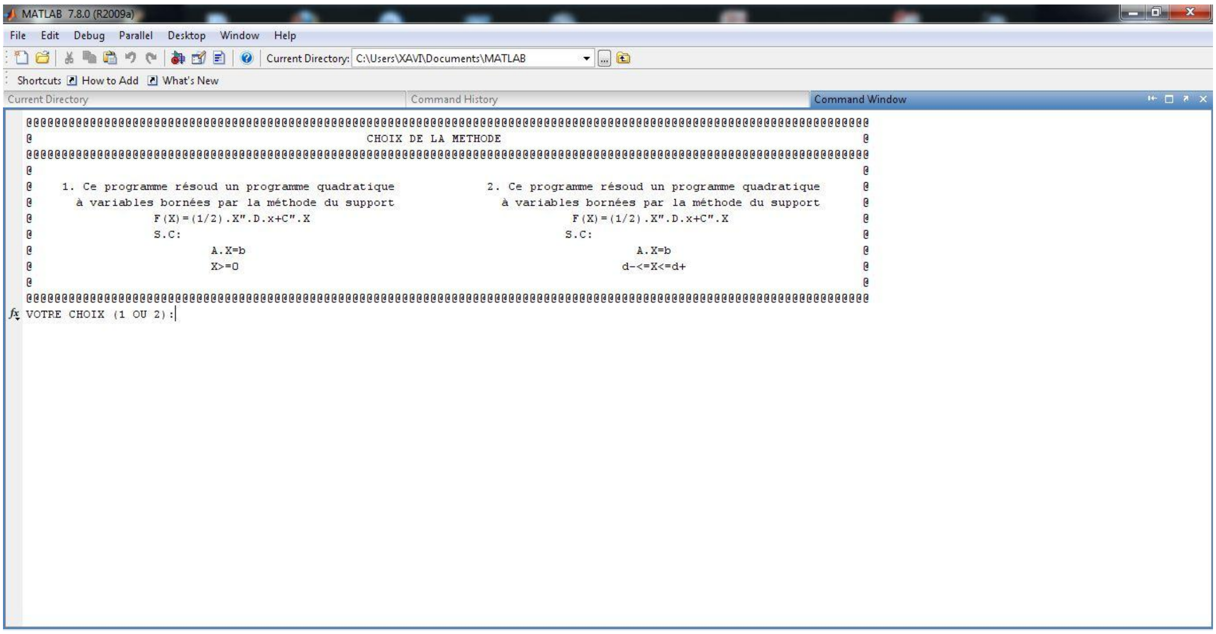
Les variables s_i, sont les paramètres de sortie de la fonction, et les variables e_j sont ses paramètres d'entrée.

Remarque 4.2.1. Le fichier *.m (M-file) doit avoir le même nom que la fonction qu'il contient.

4.3. Présentation de l'application

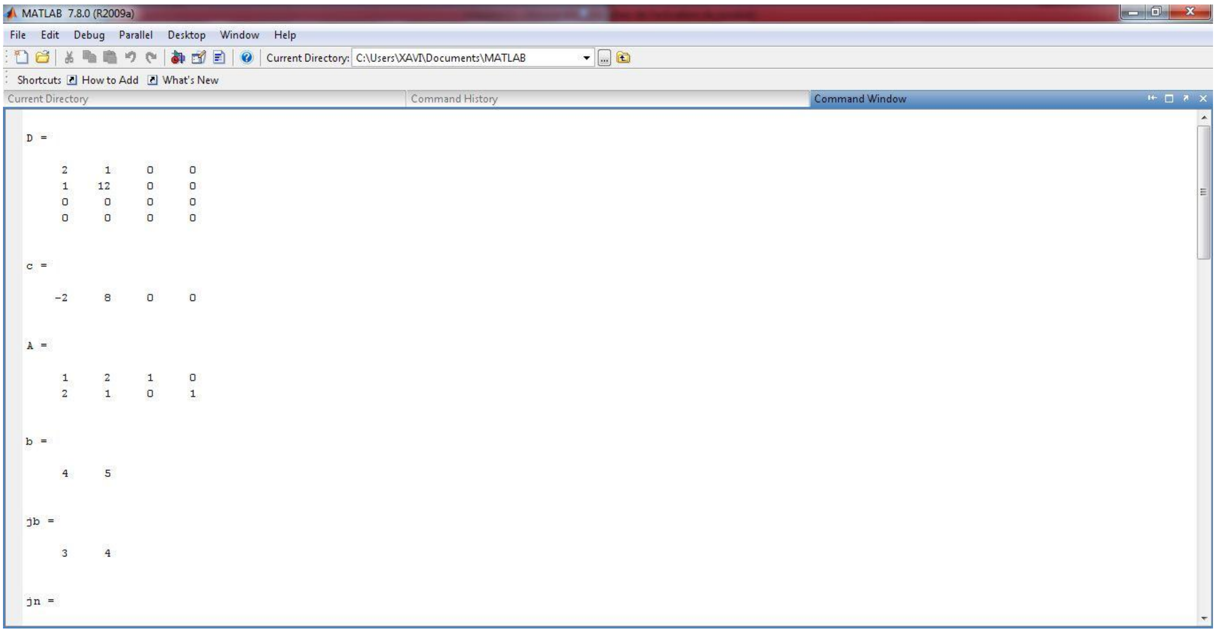
Nous présentons dans ce qui suit quelques fenêtres de notre programme.

4.3.1. Menu Principale

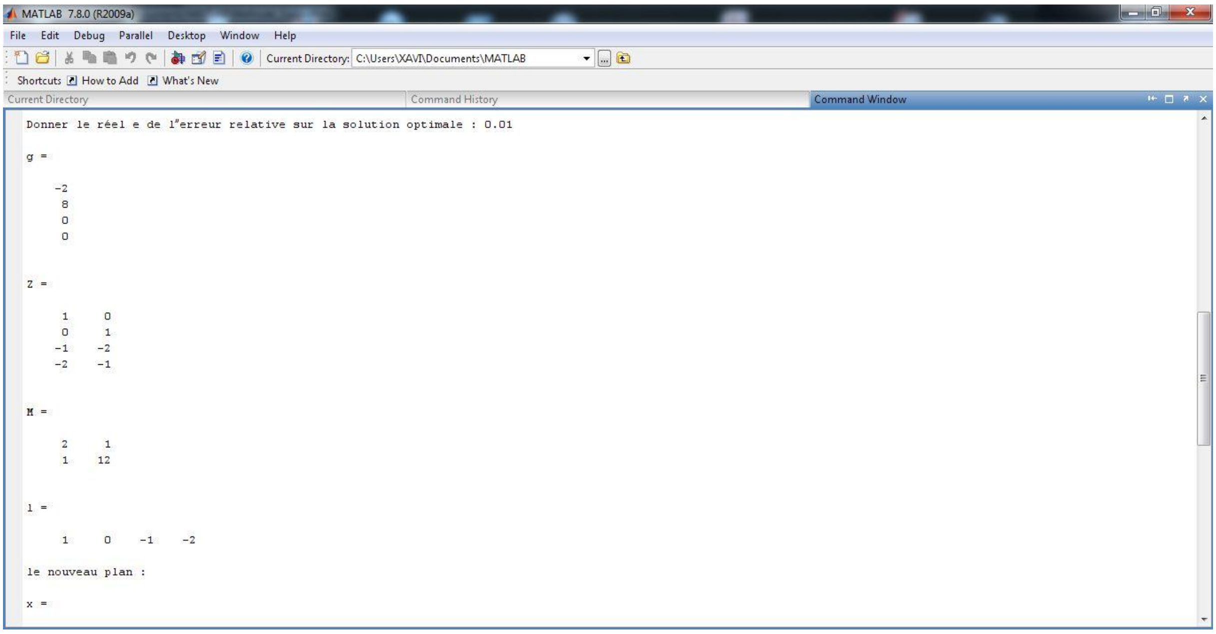


4.3.2. Exécution d'un exemple :

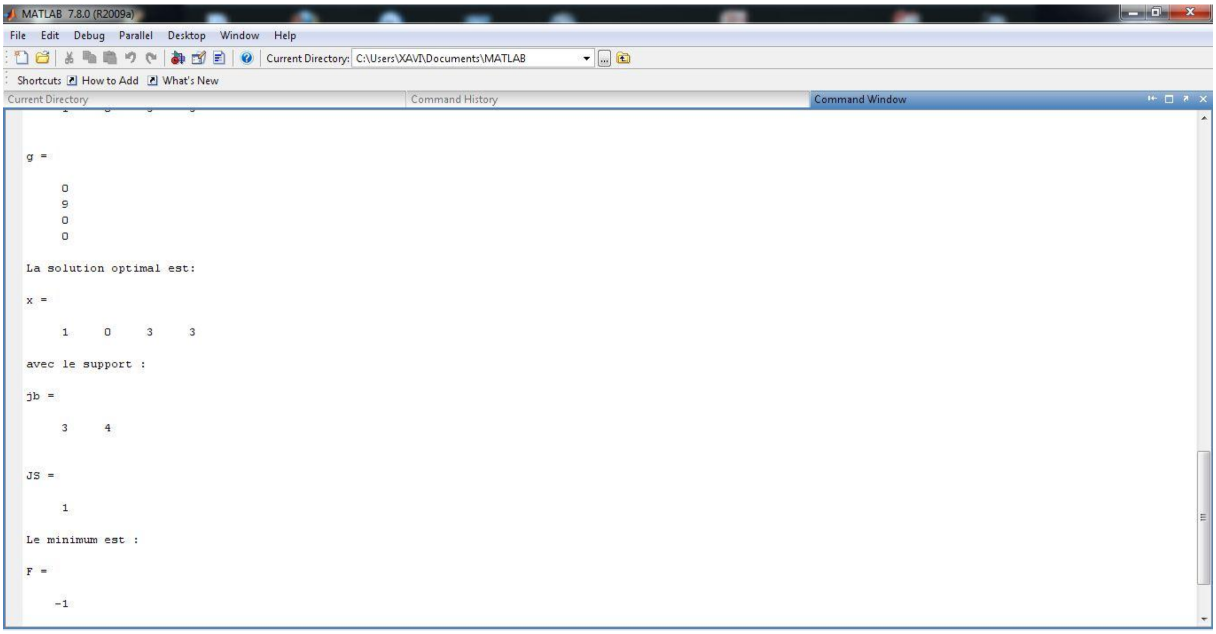
- Saisir les données du problème



- Donner le réel $e > 0$ de l'erreur relative sur la solution optimal puis exécuter



- Affichage de la solution



BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Fletcher. pratical methods of optimization, volume 2. Constrained Optimization. A Wiley-Interscience Publication, john wiley and sons edition, 1981.

[2] P.E Gill and W. Murray. Numerical Methods for constrained Optimization. Academic Press INC, 1974.

[3] Y. E. Nesterov and A.S. Nemirovsky. Interio-point Polynomial methods in Convex Programming. SIAM Publication, Philadelphia, 1994.

[4] N. K. Karmarkar. A new polynomial-time Algorithm For Linear Programming. Combinatorika 4, pages 373-395, 1984.

[5] P.Brucher. An o(n) algorithm for quadratic Knappsack problems. Operatios research Letters, 3 :163-166, 1984.

[6] R. Gabassov, F.M. Kirillova and O.I. Kostyukova and V.M. Raketskii. Méthodes constructives d''Optimization, volume 4 : problèmes convexes. University de Minsk, 1987.

[7] R. Gabassov, F.M. Kirillova and O.I. Kostyukova. Solution of linear quadratic external problems. Soviet Math. Dokl., 31 :99-103, 1985.

[8] R. Gabasov, F.M. Kirillova and O.I. Kostyukova. Méthodes de résolution d'un problème général de programmation linéaire. Actes de l'Académie des Sciences de Biélorussie, Minsk, 23(03) : 197-200, 1979.

[9] F.J. Gould and J.W. Tolle A necessary and sufficient qualification for constrained optimization. Applied mathematics., S.I.A.M. J., 20 :164-172, 1971.

[10] A.J. Levin. On an algorithm for the minimization of convex functions. Soviet Math. Dokl 6(1): 286-290, 1965.

[11] F. Marguerite and P. Wolfe. An algorithm for quadratic programming. Naval Reseach logistic Quarterly. Page: 95-110, 1956.

[12] Wu. Li and John Swetits. Newton methods for convex regression, data smoothing, and quadratic programming with bound constraints. SIAM J. Page 466-488, 1993.

Bibliographie

Bibliographie

[13] R.W. Cottle. On the convexity of quadratic forms over convex sets. Operations research, 15 :170-172, 1967.

[14] E. Polak. Comptational Methods in Optimization : A Unified Approach. Academic Presss, New York. London,1971.

[15] K. M. Anstreicher and N.M. Brixies. A new bonde for the quadratic assignment problem based on convex quadratic programming. Mathematical programming, 89(3): 341-357, 2001.

[16] SC. Fang CJ. Lin, SY. Wu, L. Qi, and J. Zhang. Solving quadratic semidefinite programming problems by using relaxed cutting-plane shema. Nonlinear programming and variational Inequalities. Journal of computational and applied mathematics. 129(1-2) :89-104, 2001.

[17] W.W. Hager, P.M. Pardalos, I.M. Roussos, and H.D. Sahinoglou. Active constraints, indefinite quadratic test problems, and complexity. JOTA, 68 : 499-511, 1991.

[18] G. Hadley. Nonlinear and dynamic programming. Addition- Wesley publ. co., Inc., Masssachussetts. 1964

[19] P.E Gill and W. Murray. Numericallly stable methods for quadratic programming. mathematical programming, 14 :349-372, 1978.

[20] R. Gabasov and F.M. Kirillova. Méthode de programmation linéaire, volume 1,2 et 3. Edition de l'université Minsk, 1977, 1978 et 1980.

[21] R. Gabasov and F.M. Kirillova. Méthode d'optimization. Edition de l'université Minsk, 1981.

[22] G.B. Dantzig. Programming in linear structure, volume 17 (1). Enconometrica, 1949.

[23] R. Gabasov, O.I. Kostyukova and F.M. Kirillova. Résolutions des problèmes extrêmaux linéaire-quadratiques. Actes de l'Académie des Sciences (URSS), 280 (03) : 529-533, 1985.

[24] R. Gabasov and F.M. Kirillova and Raketskii V.M. On methods for solving the general problem of convex quadratic programming. Soviet Math. Dokl., 23 :653-657, 1981.

[25] J.stoer and C. witzgall.convexity and Optimization in Finite Dimension .Spinger verlag,1970

[26] E.A.Kostina and O.I Kostykova. Algorithme for programs equality and inequality constraints.Journal of applied Mathematics and and physics (Russia), 42(7):1012-1026,2001.

[27] J. Abadie. On the Kuhn-Theorem, in : Nonlinear programming. North Holand, Amsterdam, j. abadie edition, 1967.

[28] R. Gabasov and F.M. Kirillova and O.I. Kostyukova and V.M. On methods for solving the general problem of convex quadratic programming. Soviet Math. dokl., 23 :653-657, 1981.

[29] P.Wolfe.The simplex method for quadratic programming.Econometrica,(27): 382-398,1959.

[30] Xia You-sheng.ODE methods for solving convex programming problems with bounded variables. Chinese J. Num. Math. and Appl., 18(1) :46-52, 1996.

[31] M.O. Bibi. Support method for solving a linear quadratic problem with polyhedralconstraints on control. Optimization, 37 :139-149, 1996.

[32] M.O. Bibi. And N. Ikheneche Optimization par la méthode adaptée d'un problème linéaire-qudratique convexe à variables bornées. Résumés des communications du Colloque International MSS'4, U.S.T.H.B. alger, pages 1-6, 17-18-19 Avril 2004.

[33] A. Faradji. Algorithmes de Minimisation d'une fonctionnelle quadratique. master's thesis, université de Tizi-ouzou, 1998.

[34] L. Abdelhek Méthode adaptée pour la résolution d'un problème de programmation quadratique convexe a variables mixtes MÉMOIRE DE MAGISTER.

[35] A. Nacéra Méthode de support pour la minimisation d'une fonction quadratique convexe mémoir de magistère

Bibliographie

Chapitre I

Rappels sur l'algèbre linéaire et la programmation mathématique

Chapitre II

Méthode dirècte de support pour la résolusion d'un P.Q.C standard

Chapitre III

Méthode adaptée pour la résolution d'un P.Q.C à variables bornées

Chapitre IV

Implimentation sous MATLAB