REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique

Département d'Automatique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme

MASTER ACADEMIQUE EN AUTOMATIQUE

OPTION: COMMANDE DES SYSTEMES

Présenté par Mr. HALOUI MOULOUD

Mr. SLIMI MASSINISSA



Synthèse D'un observateur backstepping pour l'équation de la chaleur

Mémoire soutenu publiquement le.../07/2017devant le jury composé de :

М

Grade, UMMTO, Président

M MAIDI.A

Μ

Grade, UMMTO, Examénateur

Μ

Grade, UMMTO, Encadreur

Grade, UMMTO, Examénateur

Promotion 2016/ 2017

Ce travail a été préparé à: l'Université Mouloud MAMMERI, Tizi-Ouzou.

REMERCIEMENTS

Nous remercions avant tout le bon dieu de nous avoir donné la santé, le courage et la volonté pour finir ce travail.

Nous tenons à remercier notre promoteur Mr MAIDI.A

pour son aide, le temps qu'il nous a consacré et ses orientations et surtout pour sa patience tout au long de ce travail.

Nous sommes aussi reconnaissants à tous les enseignants qui ont contribué à notre réussite.

Nous remercions également les membres de jury qui feront l'honneur de juger notre travail, d'apporter leurs réflexions et suggestions scientifiques.

Nos remerciements les plus chaleureux s'adressent à nos familles et surtout nos parents qui sont la source de cette réussite et qui nous ont soutenu et encourager pour aller au bout de ce travail.

Nos derniers remerciements s'adressent à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Merci à tous.

Dédicaces

Je dédie ce travail **à l'âme de mon père**, à ma très bonne mère, pour son soutien et tous les efforts qu'elle m'a donné le long de mon parcours et je la souhaite bonne santé et longue vie. A toutes mes sœurs et mes frères. A mes cousins et mes cousines. Je dédie ce travail aussi à mes très chers amis. A tous mes enseignants qui ont fait leurs possibles pour nous donner le maximum d'informations concernant notre étude Et à toute la promotion 2016/2017

SLIMI MASSINISSA

Dédicaces

Je dédie ce projet de fin d'études spécialement :

A la mémoire de ma sœur Khaddouja

Que dieu t'accueillera en son vaste paradis

A mes parents

Que dieu leur préserve une longue vie et une bonne santé

A ma sœur Akkila et sa fille Malak et tous mes frères et

sœurs

A mes neveux et nièces surtout Walid

Et tous mes amis et amies de la promotion automatique spécialité

commande des systèmes 2016/2017

surtout silia, Massinisa, khaloudja, mohammed, nawal,

A tous ceux qui m'aiment et que j'aime et toute personne qui m'a marqué et que j'ai marqué

Mouloud

Sommaire :

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre1 : Généralités sur les systèmes à paramètres distribu	és
I.1- Introduction	3
I.2- Définition des systèmes a paramètres distribués	3
I.3- Modélisation des systèmes à paramètre distribués	
I.4- Conditions aux limites	5
I.5- Classification des systèmes à paramètres distribués (SPD)	7
I.6- Types de commandes d'un système à paramètres distribués	8
I.6.1 - Commande répartie8	
I.6.2- Commande par zones8	
I.6.3- Commandes ponctuelle	8
I.6.4- Commandes par balayage	9
I.6.5- Commandes aux frontières (aux limites)	9
I.7- Types d'observations d'un système à paramètres distribués	9
I.7.1- Observation répartie	9
I.7.2-Observations ponctuelle	9
I.7.3- Observations par balayage	9
I.7.4-Les observations par moyennage spatial.	9
I.8 - Méthodes usuelles de représentation des SPR	
I.8.1-Méthodes spectrales	
I.8.2-Méthodes de discrétisation spatiale	

I.9 - Exemple de système distribué	
I.9.1-Réacteur chimique	11
I.9.2- Cordes vibrantes	
I.10 - Conclusion	

Chapitre II : Modélisation de l'équation du transfert de la chaleur

II.1-Introduction	14
II.2- Modes de transfert de chaleur	14
II.3- Méthode générale pour la résolution des problèmes de conduct	ion
thermique	15
II.4 - Modélisation du phénomène de diffusion de la chaleur	16
II.4.1-Lois physiques à utiliser pour la modélisation	16
II.4.2- Modèle mathématique	17
II.5- Normalisation	
II.6 - Conclusion	20
Chapitre III : Simulation de l'équation de la chaleur par la méthode	des lignes
III.1- Introduction	21
III.2- Définition	21
III.3- Principes et avantages de la méthode des lignes	21
III.4- Différences finies	22
III.4.1- Approximation des dérivées par la formule de Taylor	
III.4.2- Notation indicielle (cas d'une dimension)	23

III.4.3- Schémas numériques	23
III.4.4- Consistance, convergence et stabilité des méthodes numériques	24
III.5-Discrétisation de l'équation de la chaleur (à une dimension)	24
III.6- Simulation du modèle discrétisé de l'équation de la chaleur	27
III.7- Conclusion	28

Chapitre IV : Observateur Backstepping pour l'équation de la chaleur

IV.1-Introduction	29
IV.2- Notion d'observateur	29
IV.3- Observabilité et observateurs pour les systèmes à paramètres distribués	30
IV.3.1- Observabilité	30
IV.3.2- Synthèse d'observateurs pour les systèmes distribués linéaires	
IV.4 - Synthèse d'un observateur backstepping	33
IV.5 - Simulation du système réel et le système estimé	37
IV.5 .1- Simulation	37
IV.5 .2- Interprétation des résultats	41
IV.6- Conclusion	41

Conclusion générale	42
Références bibliographique	

La formulation de la plupart des phénomènes (mécaniques, biologiques ou économiques) en systèmes distribués présente l'avantage de les décrire avec précision et permet de conserver à chaque paramètre du modèle sa signification physique. Les systèmes distribués ou à paramètres répartis évoluent en fonction de la variable de temps et d'une variable d'espace.

Mathématiquement, ces systèmes peuvent être décrits par des équations aux dérivées partielles (E.D.P). Citons comme exemples l'équation de la chaleur qui régit un système de nature parabolique, et l'équation des ondes qui régit un système de nature hyperbolique et qui intervient dans différents domaines tels les échangeurs thermiques, l'analyse de structures flexibles liées aux satellites artificiels, la modélisation de l'acoustique des salles, etc.

Le phénomène de diffusion thermique est régi par une équation aux dérivées partielles du type parabolique plus communément appelée "équation de la diffusion". Cette équation est linéaire tant que le coefficient de conductivité thermique et la chaleur spécifique ne dépendent que des coordonnées d'espace et de temps . Cette condition ne se rencontre que pour très peu de corps car il est plus fréquent de voir la conductivité et la chaleur spécifique dépendre de la température.

Pour résoudre cette équation, plusieurs moyens sont à la disposition de l'ingénieur ou du chercheur. Il se pose donc un problème de choix au niveau du type de méthode le mieux adapté. Les méthodes analytiques classiques sont limites aux problèmes linéaires. Les méthodes numériques basées sur le passage aux différences finies ou aux éléments finis sont l'outil le mieux adapté a l'heure actuelle à la résolution de l'équation. Parmi les méthodes d'approximation utilisée, on retrouve la méthode des lignes basée sur l'approximation de la dérivée spatiale.

Dans notre travail, on s'intéresse à la synthèse d'un observateur backstepping pour l'équation de chaleur, le travail présenté dans ce mémoire qui s'inscrit d'un point de vue théorique dans, le domaine de simulation des systèmes d'écrit par des EDP.

Ainsi, le mémoire est organisé comme suit:



Le chapitre 1: présente des généralités sur les systèmes à paramètres distribués.

Le chapitre 2: est consacré à la modélisation du phénomène du transfert de la chaleur.

Le chapitre 3: décrit la simulation de l'équation de la chaleur par la méthode des lignes.

Le chapitre 4: est consacré à la synthèse d'un observateur backstepping pour l'équation de la chaleur.



I.1. Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'expliquer les notions de base des systèmes à paramètres distribués dans le domaine de l'automatique et du contrôle.

On définit d'abord les systèmes à paramètre distribués et la modélisation ainsi que la classification des systèmes à paramètres distribués.

Ensuite, on s'intéresse aux types de commandes et d'observations, les méthodes de représentations usuelles utilisées pour ces systèmes et on termine par un exemple.

I.2. Définition des systèmes a paramètres distribués

Les systèmes à paramètres distribués sont des systèmes décrits essentiellement par des EDP linéaires ou non linéaires, mais il y'a d'autre types de modèles possibles, par exemple: les équations intégrales ou intégro-différentielles ou des équations algébriques. Des systèmes d'EDP sont représentés dans des espaces fonctionnels de dimension infinie.

Les variables indépendantes sont le temps et l'espace, les variables spatiales pouvant être mono ou multidimensionnels. Les systèmes distribués évoluent donc en fonction de la variable de temps et d'une variable d'espace.

Citons comme exemples l'équation de la chaleur qui régit un système de nature parabolique, et l'équation des ondes qui régit un système de nature hyperbolique et qui intervient dans différents domaines physiques. [1]

I.3. Modélisation des systèmes à paramètre distribués

Les systèmes à paramètres distribués sont décrits mathématiquement par un ensemble d'équations aux dérivées partielles mettant en jeu des variables d'espace et de temps.

La modélisation de ces systèmes est encore plus complexe, en effet une fois le modèle mathématique établi, il est généralement nécessaire de faire des approximations des équations aux dérivées partielles en vue de simplifier la représentation pour réaliser les calculs et la simulation.



D'une façon générale, un systèmes à paramètres distribués à deux variables indépendantes, une variable temporelle et une variable d'espace, dans le cas monodimensionnel, désignées respectivement par t et z, est décrit par les données suivantes: [2][3]

- Un domaine géométrique Ω borné de Rⁿ, de frontière ∂Ω (généralement supposée assez régulière).
- Un intervalle de temps $I = [0, t_f]$.
- Une équation d'évolution à l'intérieur du domaine $\Omega \times I/$

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = M(T(z,t)) + N(U(z,t))$$
(I.1)

avec $z \in \Omega$ et $t \in T$.

• Une équation de sortie $\Omega \times T$:

$$y(z,t) = L(T(z,t))$$
(I.2)

• une condition initiale $(t = 0) sur \Omega$:

$$P(T(z,0)) = 0 (I.3)$$

• les conditions aux limites(sur la frontière $\partial \Omega$) si elles existent :

$$K(T(z,t)) = u_l(z,t), z \in \partial\Omega$$
(I.4)

M(.), N(.), L(.), P(.) et K(.) sont des operateurs matriciels différentiel ne comportant que des dérivées par rapport à z.

M(.), N(.) et L(.) sont appelées respectivement opérateur d'état, opérateur de commande et opérateur de sortie (ou d'observation).

Les espaces assurant l'existence et l'unicité de la solution sont à caractériser en utilisant des propriétés des opérateurs M et N. Quand cela est possible, il est intéressant de se ramener à des conditions aux limites homogènes c'est-à-dire que les inconnues s'annulent aux frontières.



• L'état *T* du système est représenté par la fonction vectorielle (de dimension infinie) :

$$T(z,t) = \begin{bmatrix} T_1(z, t) \\ T_2(z, t) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ T_n(z, t) \end{bmatrix}$$

Avec les fonctions u(z, t) et $u_l(z, t)$ représentent les commandes (entrées) du système.

Remarque I.1

Les systèmes à paramètres distribués étant représentés par des équations aux dérivées partielles, leur résolution requiert de bien poser ces problèmes en ajoutant des données supplémentaires par l'intermédiaire de contraintes. Ces contraintes sont les conditions initiales, les conditions aux limites, les conditions de continuité ou les conditions de raccordement à l'environnement.

I.4 . Conditions aux limites

Considérons une barre métallique que nous assimilerons, pour simplifier, à un segment de droite de longueur l pour décrire le phénomène d'évolution de la température T(z, t), il faut préciser la condition initiale T(z, o) = T0, et ce qui se passe "au bord" c'est-à-dire en z = 0 et z = l. [4]

• Condition de Dirichlet :

Si l'on suppose que les extrémités de la barre sont maintenues à des températures données $T_0(t)$, $T_l(t)$, on aura évidement :

$$T(0,t) = T_0(t)$$
 (I.5)

$$T(l,t) = T_l(t) \tag{I.6}$$



• Condition de Neumann :

Si le dispositif est tel que le flux de chaleur est donné au bord, c'est le gradient de la température qui est ainsi fixé et les conditions aux limites sont alors

$$-c\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0} = g_0(t) \tag{I.7}$$

$$c \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=l} = g_l(t) \tag{I.8}$$

• Condition de Fourier :

Si maintenant la donnée est la température extérieure T_{ex} , on sait que le gradient de la température au bord (flux de chaleur) sera proportionnel à la différence $(T - T_{ex})$:

$$\left[c\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z=0} = -k(T - T_{ex}) \tag{I.9}$$

$$\left[c\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z=l} = -k(T - T_{ex}) \tag{I.10}$$

Avec :

k: constante $\in \mathbb{R}$.

c: caractérise la diffusion de la chaleur (la conductivité).

Ce sont, en général, des conditions de types $\left[c\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z=0;z=l} = f(q)$ qui sont les plus fréquentes dans les cas réalistes, f(q) pouvant être non linéaire : par exemple quand l'échange se fait par rayonnement.



I. 5. Classification des systèmes à paramètres distribués (SPD)

La résolution numérique d'une EDP dépend en premier lieu du type de l'EDP ou du système d'EDP qu'il faut résoudre. La discussion sera restreinte à la catégorie d'EDP la plus souvent rencontrée, celle des EDP linéaires. Une EDP est quasi-linéaire si les termes contenant les dérivées d'ordre le plus élevé sont linéaires. Par exemple, toutes les EDP linéaires du 2ème ordre qui dépendent de deux variables peuvent s'écrire :**[2]**

$$a\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial t \partial z} + c\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} = F\left(z,t,\frac{\partial T}{\partial z},\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$
(I.11)

Où T(z,t) est la fonction inconnue et F inclut tous les autres termes sans dérivées secondes de l'équation.les coefficients a, b, c sont supposés constant et indépendants de la variable d'espace z.

Un grand nombre des EDP rencontrées dans les applications sont du deuxième ordre (transfert thermique, vibration, mécanique des fluides).

Il existe trois types d'EDP quasi-linéaires

EDP parabolique si $ac - b^2 = 0$ (exemple : équation de chaleur) EDP elliptique si $ac - b^2 > 0$ (exemple : équation de Laplace) EDP hyperbolique si $ac - b^2 < 0$ (exemple : équation d'onde)

Dans ce qui suit, on considère la classe particulière de systèmes, assez largement rependue notamment dans les domaines chimique, biochimique, thermique,..., pour laquelle b = c = 0. L'équation d'évolution est dans ce cas soit parabolique ($a \neq 0$), soit hyperbolique(a = 0).



Remarque I.2

La méthode numérique de résolution et les conditions terminales sont choisies à la base de cette classification. Pour que le problème soit bien posé, il faut vérifier l'existence d'une solution, l'unicité de cette dernière et la stabilité par rapport aux données du problème.

I.6. Types de commandes d'un système à paramètres distribués

I.6.1. Commande répartie :

Elles est Représentées par des fonctions définies sur $\Omega \times T$; dans de nombreux cas, la commande u(z, t) peut être décomposée comme suit :

$$u(z,t) = q(z).U_e(t)$$
 (I.12)

q(z) représente la structure géométrique du système d'actionneurs.

 $U_e(t)$: représente le signal d'entrée.

I.6.2. Commande par zones :

Cette commande es par un ensemble de fonctions définies sur un sous-ensemble de Ω . Si la commande est appliquée sur p zones, on a dans certain cas :

$$u(z,t) = \sum_{i=1}^{p} q_i(z) u_{ei}(t)$$
 (I.13)

I.6.3. Commandes ponctuelle :

Dans le cas particulier ou la zone de commande se réduit à un point situé dans Ω , la fonction $q_i(t)$ est remplacée dans l'équation précédente formellement par l'impulsion de Dirac, donnée comme suit :

$$u(z,t) = \sum_{i=1}^{p} u_{ei} \delta(z - z_i)$$
 (I.14)



I.6.4. Commandes par balayage :

Pour lesquelles les zones ou les points d'actions (actionneurs) sont mobiles dans Ω .

I.6.5. Commandes aux frontières (aux limites) :

Définie sur $\partial \Omega \times \theta$, elles peuvent être par zones, ponctuelles, fixes ou à balayage.[3]

I.7. Types d'observations d'un système à paramètres distribués

I.7.1. Observation répartie :

Le vecteur de sortie y(z, t) est définie pour tout $t \in T$ et tout z appartenant à un sousensemble de Ω comme suit :

$$y(z,t) = p(z).T(z,t)$$
 (I.15)

p(z): caractérise la structure géométrique du système d'observation.

I. 7.2. Observations ponctuelle :

Définies en certains points particuliers z_i sur l'espace Ω ; en général :

$$y(z_i, t) = \int_{\Omega} T(z, t) \,\delta(z - z_i) \mathrm{d}z = T(z_i, t) \tag{I.16}$$

I.7.3. Observations par balayage :

Obtenue par déplacement des points d'observations dans Ω .

I.7.4. Les observations par moyennage spatial:

Définies par l'intégrale

$$y(t) = \int_{\Omega} C(z). \ T(z,t) dz \tag{I.17}$$



C(z): caractérise la structure géométrique de l'ensemble des capteurs.

y(t): ne peuvent pas être assimilés à des points d'observations. [3]

I. 8. Méthodes usuelles de représentation des SPR

Ces méthodes d'approximation utilisées pour les EDP tentent pour la plupart de ramener le problème à une simple résolution d'équations différentielles ordinaires. Les plus utilisées de ces méthodes se classifient en deux catégories : les méthodes spectrales et les méthodes de discrétisation spatiale.

I. 8.1. Méthodes spectrales :

Les méthodes spectrales sont des méthodes basées sur le développement d'une fonction T(z,t) dans une base orthogonale de fonctions $\varphi_i(z)$ dites de projection. L'idée de cette méthode est de se ramener à un problème de résolution d'équations différentielles ordinaires en supposant que la solution est séparable et qui s'écrit sous la forme :

$$T_N(z,t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(z) \,\varphi_i(z)$$
 (I.18)

L'orthogonalité des fonctions de projection permet de reformuler le problème sous forme d'équations différentielles ordinaires plus simples à résoudre. Cette approximation est en quelque sorte un développement en séries de fonctions de la fonction inconnue. Il existe une variété de méthodes spectrales dans la littérature, comme la méthode Tau, la méthode des caractéristiques, la séparation des variables, etc.[2]

I. 8.2. Méthodes de discrétisation spatiale :

Les méthodes de décomposition spatiale, qui englobe les méthodes des éléments finis, des différences finies et des volumes finis, sont parmi les méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces problèmes. Elles nécessitent l'utilisation intensive des calculateurs. Ce sont des méthodes qui s'appliquent à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elles s'adaptent très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.



Les méthodes de décomposition spatiale sont basées sur une discrétisation du domaine en sous domaines sur lesquels une interpolation de la solution est réalisée en utilisant les valeurs sur les nœuds du maillage. Elles consistent à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations différentielles ordinaires ou algébriques. Elles font appel aux trois domaines suivants :

*Les sciences de l'ingénieur pour définir les comportements locaux : les équations aux dérivé partielles.

*Les méthodes numériques pour construire et résoudre le système d'équations algébriques.

*La programmation et l'informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur. [2]

I.9. Exemple de système distribué

I.9.1 Réacteur chimique :

Une réaction de premier ordre dans un réacteur tubulaire, en négligeant les variations radiales de concentration et en supposant la réaction isotherme, peut s'écrire (c désigne une concentration) : [4]

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial z} = -kc \qquad (I.19)$$
$$c(t,0) = c(t), \qquad c(z,0) = c_0(z)$$

La variable de commande peut être U(t) = c(t) et la variable de sortie y(t) = c(t, 1).





Figure **I.1**: réacteur chimique.

I.9.2 Cordes vibrantes :

C'est le cas d'une corde tendue flexible. Initialement la corde est tendue le long de l'axe z entre x = 0 et x = L, puis elle est mise en mouvement. La fonction y(x, t) représente le déplacement vertical d'un point de la corde. [4]

Pour de petites vibrations de la corde autour de sa position initiale, les lois de la mécanique aboutissent à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2}$$
(I.20)

Avec les conditions aux limites suivantes:

$$\forall t > 0; y(0, t) = y(L, t) = 0$$

 $\forall z, 0 < z < L, y(z, 0) = h(z)$

avec h fonction quelconque.

$$\forall z, 0 < z < L, \frac{\partial y(z, t)}{\partial t} = 0$$





Figure **I.2** : profil de la corde en vibration.

I.10. Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre les notions de base des systèmes à paramètres distribués (ou à paramètres répartis) couramment utilisées dans les sciences de l'ingénieur.

les modèles utilisés pour leur description sont des équations aux dérivées partielles, et l'espace d'état est de dimension infinie.

L'études de ces équations pose de nombreux problèmes car il n'existe pas de méthode générale pour l'étude d'équations aux dérivées partielles.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude d'un système à paramètres distribués de type parabolique qui est l'équation de la chaleur.



II.1. Introduction :

La chaleur est une forme d'énergie qui s'écoule sous l'effet d'une différence de température des hautes vers les basses températures. Le transfert de chaleur représente l'un des modes les plus communs d'échange d'énergie. Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température.

De ce fait, les transferts thermiques ont un rôle déterminant dans divers applications technologiques comme les échangeurs thermiques, fours, isolation thermique...etc.

La connaissance des lois physiques qui régissent ces modes de transferts thermiques est une chose essentielle, car elles nous permettent d'avoir un modèle mathématique accessible à l'analyse et au calcul.

Nous présentons dans ce chapitre des notions et modes des transferts de chaleur, et on détermine l'équation de la chaleur régissant le transfert de chaleur par conduction.

II.2. Modes de transfert de chaleur

On distingue trois mécanismes d'échange de chaleur entre milieux matériels:[5]

CONDUCTION :

C'est une transmission de chaleur dans la masse d'un milieu matériel, les zones chaudes cédant de la chaleur à celles qui le sont moins. C'est le cas lorsqu'on chauffe l'extrémité d'une barre.

RAYONNEMENT :

C'est une transmission d'énergie à distance, entre deux corps séparés ou non par un milieu matériel (transformation d'énergie thermique d'un émetteur en énergie électromagnétique, propagation, transformation partielle en énergie thermique sur un corps récepteur). C'est le cas de l'énergie qui nous vient du soleil.

CONVECTION :

C'est le phénomène observé entre un fluide en mouvement et une paroi, phénomène principal dans la plupart des échangeurs de chaleur. Lorsqu'on souffle sur son café on accélère son refroidissement en forçant le phénomène de convection.





Figure **II.1:** Les différents modes de transfert de chaleur.

II.3. Méthode générale pour la résolution des problèmes de conduction thermique

La solution de l'équation générale de la conduction avec la connaissance des conditions aux limites, nous donne la distribution de la température à l'intérieur du corps étudié et de même la quantité de chaleur échangée à travers sa surface.[6]

Pour arriver à cette solution il faut :

- Connaître la forme géométrique du corps.

- Ecrire l'équation générale de la conduction (conduction permanente ou stationnaire, non stationnaire, l'existence de source interne ou pas....etc.)

- Ecrire les conditions aux limites.

- Ecrire le profil de température à l'intérieur du corps.

Il est indispensable d'envisager les conditions thermiques qui existent aux limites du milieu solide.



On classifie les conditions aux limites comme suit :

• Conditions temporelles initiales :

La distribution de la température à l'intérieur et à la surface du corps est déterminée à l'instant initial :

• Conditions spatiales :

Parmi les conditions spatiales qu'on peut trouver on peut citer la condition de Dirichlet (température imposée sur la surface) qui stipule que la température à la surface du corps doit être connue.

II.4. Modélisation du phénomène de diffusion de la chaleur

Pour modéliser le transfert de chaleur dans la barre métallique, on considère les hypothèses simplificatrices suivantes : **[7]**

- Seule la direction suivant l'axe des " z " est considérée pour le flux de chaleur.
- La barre est supposé isolée avec l'environnement (pas de changement de température avec l'environnement).
- La barre ne produit pas de chaleur.
- Les paramètres physiques (masse volumique ρ, la chaleur spécifique c_p, la conductivité spécifique λ , V est le volume de l'élément (cylindre))sont constants.

II.4.1 Lois physiques à utiliser pour la modélisation :

1. La quantité de chaleur Q dans un élément de masse m d'une température T est donné par la formule suivante :

$$Q = c_p \mathrm{m} \mathrm{T} \tag{II.1}$$

Cp=



2. La théorie de la conduction repose sur la loi de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température.

$$\varphi = -\lambda S \frac{\partial T(z,t)}{\partial z}$$
(II. 2)
$$\lambda =$$

$$S =$$

La direction de flux de chaleur est dans le sens de diminution de la température

(direction de z) par conséquent $\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} < 0$, donc $\varphi > 0$.

II.4.2 Modèle mathématique :

Pour déterminer le modèle mathématique on considère l'élément suivant: [7]



Figure II.2: élément de la barre considéré pour la modélisation.

Masse de l'élément:

$$m = \rho V = \rho S \,\partial z \tag{II.3}$$

Avec V est le volume de l'élément (cylindre).

Le flux dans la direction positive est donné comme suit:

$$\varphi = \left[-\lambda S \frac{\partial T(z,t)}{\partial z}\right] - \left[\lambda S \frac{\partial T(z+\partial z,t)}{\partial z}\right]$$
(II. 4)

Donc:

$$\varphi = \lambda S \left[\frac{\partial T(z + \Delta z, t)}{\partial z} - \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right]$$
(II. 5)

Le flux stocké aussi dans cet élément est donné par la loi suivante:

$$\varphi = \frac{\partial Q}{\partial t} \tag{II.6}$$

$$\varphi = \rho V = \rho S \Delta z \, c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{II.7}$$

$$\lambda S \left[\frac{\partial T(z+\partial z,t)}{\partial z} - \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right] = \rho S \partial z \ c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$
(II.8)

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\frac{\partial T(z+\partial z,t)}{\partial z} - \frac{\partial T(z,t)}{\partial z}}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t}$$
(II.9)

Lorsque ∂z tend vers 0, on aura:

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial T(z, t)}{\partial t}$$
(II. 10)

Ou encore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$
(II. 11)

Avec

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \tag{II.12}$$



Cette équation représente l'équation de la chaleur.

Le rapport α est appelé la diffusivité thermique

Pour compléter le modèle il faut ajouter les conditions aux limites et la conditions initiales.

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ T(0,t) &= T1 \\ T(l,t) &= T2 \\ T(z,0) &= T_0 \end{cases}$$
(II. 13)

II.5. Normalisation

Avant d'introduire une méthode d'analyse pour l'équation de la chaleur, il faut avoir des variables sans dimensions. Ce modèle sans dimensions peut être exploité comme un modèle générale pour les problèmes de diffusion . **[8]**

Posons premier changement de variable :

$$y = \frac{z}{l} \tag{II. 14}$$

Nous remplaçons dans l'équation et nous aurons :

$$\frac{\partial T(y,t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{l^2} \frac{\partial^2 T(y,t)}{\partial y^2}$$
(II. 15)

T(0,t)=T1

$$T(l,t) = T2$$

Ensuite un deuxième changement de variable :

$$\tau = \frac{\alpha}{l^2}t \tag{II.16}$$

Nous aurons:



$$\frac{\partial T(y,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T(y,\tau)}{\partial y^2}$$
(II. 17)

Nous introduisons une nouvelle variable :

$$u = T - \overline{T} \tag{II. 18}$$

Avec :

$$\overline{T}(y) = T1 + y(T2 - T1)$$
(II. 19)

C'est le profil stationnaire qui est la solution du problème suivant :

$$\overline{T}''(y) = 0$$

$$\overline{T}(0) = T1$$
 (II. 20)

$$\overline{T}(1) = T2$$

Enfin, nous obtenons l'équation de la chaleur normalisée donnée comme suit :

$$u_{t=}u_{yy} \tag{II.21}$$

Avec les conditions aux limites :

$$u(0) = 0$$
$$u(1) = 0$$

II.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques généralités sur le transfert thermique. Puis, nous avons modélisé le phénomène de conduction dans une barre métallique. Le modèle obtenu est connus sous le nom de l'équation de chaleur (équation parabolique).



Dans le chapitre suivant, on s'intéresse à la simulation de cette équation en utilisant la méthode des lignes.



III.1 Introduction:

L'analyse numérique est l'étude des algorithmes permettant de résoudre des problèmes continus comme l'algèbre linéaire, la recherche de solutions numériques d'équations différentielles et d'autres problèmes dans les sciences physiques et l'ingénierie.

Afin de résoudre numériquement l'équation de la chaleur établie dans le chapitre précédent, nous allons procéder par la méthode de semi-discrétisation (méthode des lignes) dans le but d'obtenir un système d'équations différentielles ordinaires dont la résolution nous permet de déterminer le profil de la température en fonction des variables du problème considéré.

III.2. Définition

La méthode des lignes est une méthode permettant de résoudre une équation aux dérivées partielles (EDP) en la transformant en un système d'équations différentielles ordinaires (ODE). Les dérivées partielles par rapport aux variables spatiales sont discrétisées pour obtenir un système d'ODE en fonction de la variable t. Le choix de la discrétisation spatiale et les positions des point de discrétisations spatiale affectent la performance de la méthode. **[9]**

III.3. Principes et avantages de la méthode des lignes

La méthode des lignes est un processus en deux étapes: [10]

- Les dérivées spatiales (valeurs aux limites) sont approximées algébriquement, en utilisant les différence finie, éléments finis ou d'autres.
- Le système résultant des ODE dans le temps est ensuite intégré par les méthodes numériques classiques comme la méthode d'Euler, la méthode Runge-Kutta...etc.

Le succès de cette méthode est expliqué par la disponibilité d'algorithmes numériques de haute qualité pour la solution de systèmes d'ODE.

Les avantages de cette approche sont les suivants:



- Les intégrations temporelles et spatiales sont séparées dans le sens où ils peuvent être traités séparément dans le codage ; cela ajoute un degré très attractif de flexibilité.
- Toutes les classes de PDE peuvent être résolues par la méthode des lignes (elliptiques, hyperboliques, paraboliques).

La méthode des lignes est devenue la technique la plus utilisée Pour résoudre les équations aux dérivées partielles.

III.4. Différences finies

III.4.1. Approximation des dérivées par la formule de Taylor :

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. [11]

En effet un problème aux dérivées partielles nécessite les données suivantes :

- un domaine spatial,
- une équation aux dérivées partielles,
- des conditions aux limites,
- une conditions initiale.

Soit u(z, t) une fonction de l'espace et du temps. Par définition:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(z + \Delta z, t) - u(z, t)}{\Delta z}$$
(III.1)

Si Δz est petit, un développement de Taylor de $u(z + \Delta z, t)$ au voisinage de z donne:

$$u(z + \Delta z, t) = u(z, t) + \Delta z \frac{\partial u}{\partial z}(z, t) + \frac{\Delta z^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z, t) + \cdots$$
(III.2)

En tronquant la série au premier ordre en Δz , on obtient :

$$\frac{u(z + \Delta z, t) - u(z, t)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial z}(z, t) + O(\Delta z)$$
(III. 3)



III.4.2. Notation indicielle (cas d'une dimension)

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur u(z) sur l'intervalle [0,1].

La recherche d'une solution discrète de la grandeur u amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de n + 1 points z_i pour i = 0, ..., n régulièrement espacés avec un pas Δz . Les points $z_i = i \Delta z$ sont appelés les nœuds du maillage.

Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie se ramène ainsi à la recherche de n valeurs discrètes de cette grandeur aux différents nœuds du maillage.

On note u_i la valeur discrète de u(z) au point z_i , soit $u_i = u(z_i)$. De même pour la dérivée de u(z) au nœud z_i , on note :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=z_{i}} = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{i} = \dot{u}_{i} \qquad (III.4)$$

Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u .[11]

III.4.3. Schémas numériques :

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté au-dessus s'écrit, en notation indicielle

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}}\right)_{i} = \frac{u_{i+1} - u_{i}}{\Delta \mathbf{z}} + O(\Delta z)$$
(III.5)

Ce schéma est dit "avant" ou "décentré avant".

Il est possible de construire un autre schéma appelé "arrière" :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}}\right)_{\mathbf{i}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta \mathbf{z}} + O(\Delta z)$$
 (III. 6)

Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développement de Taylor au voisinage de z_i .

Le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée première de u:



$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right)_{i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta z} + O(\Delta z^{2})$$
(III. 7)

Avec

$$u_{i+1} = u(z_i + \Delta z) \tag{III.8}$$

$$u_{i-1} = u(z_i - \Delta z) \tag{III.9}$$

Le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée seconde de u:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{i} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta z^2} + O(\Delta z^2)$$
(III. 10)

III.4.4. Consistance, convergence et stabilité des méthodes numériques

Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les trois principales sont la convergence, la stabilité et la consistance. Ces trois propriétés permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue. **[11]**

- la stabilité, c'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.
- la consistance, c'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tend vers la solution exacte des équations continues lorsque le pas de discrétisation Δt et Δz tendent vers zéro.
- la convergence, c'est la propriété qui assure que la solution numérique tend vers la solution exacte des équations continues. C'est évidemment la propriété la plus recherchée.

III.5. Discrétisation de l'équation de la chaleur (à une dimension)

Considérons le problème monodimensionnel de la conduction de la chaleur dans une barre de longueur l. Le champ de température T(z, t) vérifie l'équation de la chaleur :



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad (\text{III. 11})$$

où α est la diffusivité thermique.

A cette EDP s'ajoute deux conditions aux limites aux extrémités de la barre

$$T(0,t) = T_0(t) = U(t)$$
 (III. 12)
 $T(l,t) = T_l(t) = 25^{\circ}C$ (III. 12)
 $U(t)=$

ainsi qu'une condition initiale :

$$T(z,0) = 25^{\circ}C$$
 (III. 13)

on considère un maillage (ou grille de calcul) composé de n + 1 points z_i pour i = 0, ..., nrégulièrement espacés avec un pas Δz . Les points $z_i = i \Delta z$ sont appelés les nœuds du maillage.

On note T_i la valeur discrète de T(z) au point z_i , soit $T_i = T(z_i)$.

L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque nœud z_i comme suit :

$$\alpha \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = \dot{T}_i \qquad (\text{III. 14})$$

Approximons la dérivée seconde de T au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta z^2}$$
(III. 15)

L'équation discrétisée s'écrit :

$$\alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta z^2} = \dot{T}_i$$
(III. 16)



Il est très pratique d'utiliser une formulation matricielle en faisant apparaître le vecteur des températures inconnues discrètes:

Ainsi, pour i = 1, 2, 3 ..., n, on aura :

$$\dot{T}_1 = \alpha \frac{T_2 - 2T_1 + T_0}{\Delta z^2}$$

$$\dot{T}_2 = \alpha \frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{\Delta z^2}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$
(III. 17)
$$\vdots$$

$$\dot{T}_N = \alpha \frac{T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}}{\Delta z^2}$$

qu'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_{1} \\ \dot{T}_{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{T}_{N-1} \\ \dot{T}_{N} \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{\Delta z^{2}} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1} \\ T_{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_{N} \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{\Delta z^{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(t) + \frac{\alpha}{\Delta z^{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} T_{l}$$
(III. 18)

Ainsi, on obtient le modèle d'état associé à l'équation de chaleur discrétisée :

$$\dot{T}(t) = AT(t) + BU(t) + ET_l(t)$$
(III. 19)

Dans ce modèle, la matrice A obtenue est de structure tri-diagonale.



III.6. Simulation du modèle discrétisé de l'équation de la chaleur

Les résultats de simulation du modèle sont donnés par les figures suivantes:



Figure **III.1:** Evolution spatio-temporelle de la température dans la tige métallique.

T(1, t)=1, T(0, t)=1- e^{-t} ,





Figure III.2: Evolution de la température en fonction du temps dans la tige métallique.

Dans les figures (III.1) et (III.2), nous avons tracé la température en fonction du temps.

A partir des résultats de simulation, le profil de la température montre que le système est stable et coïncide avec la pratique. En conclusion, cela montre que la méthode des lignes permet de simuler correctement et facilement les systèmes à paramètres distribués.

III.7. Conclusion

Ce chapitre illustre l'une des méthodes numériques qui est la méthode des lignes utilisée pour la résolution de l'équation de la chaleur.

Le principe de la méthode des lignes consiste à discrétiser les EDP qui représentent un système de dimension infinie (décomposition du domaine d'espace seulement). Cette semi-discrétisation conduit à des èquations drivées ordinaires EDOs qui décrivent un système de dimension qui peut être élevée mais reste finie.

La méthode est illustrée dans le cas d'une équation de chaleur. Cette méthode sera utilisée pour valider un estimateur backstepping pour l'équation de la chaleur.



IV.1 Introduction

La détermination de l'état d'un système est d'une grande importance quand on cherche à appliquer une commande en boucle fermée mais cet état ne peut être mesuré directement d'un point de vue physique. Le problème qui se pose alors est celui de la reconstruction d'un tel état à partir des mesures recueillies par le (ou les) capteur pendant un intervalle de temps donné : c'est le problème de l'observabilité, bien sûr le cas particulier intéressant est celui de la détermination de son état initial.

Dans ce chapitre, nous rappelons dans un premier lieu les notions d'observateur et d'observabilité des systèmes distribués. Nous présenterons ensuite une méthodologie de synthèse de l'observateur backstepping pour l'équation de chaleur.

IV.2. Notion d'observateur

Le problème d'estimation de l'état pour un système dynamique (en dimension finie ou infinie) observable, se définit comme la construction d'un système dynamique auxiliaire qui a pour entrées les entrées et les sorties mesurées du système et pour sortie l'estimation de l'état. De tels systèmes auxiliaires sont appelés observateurs.

Il existe plusieurs raisons pour lesquelles la reconstitution d'état est souhaitée, y compris des raisons techniques (construction et positionnement des capteurs) ou économiques (coût des capteurs). L'utilisation d'un observateur en automatique est sollicitée principalement dans trois situations : la supervision des procédés, la détection de défaillances et la synthèse de commande. **[12]**

Un schéma bloc du processus de reconstruction de l'état d'un système en boucle ouverte est donné par la Figure (IV.1)





Figure IV.1: principe d'un observateur d'état.

IV.3. Observabilité et observateurs pour les systèmes à paramètres distribués

IV.3.1 Observabilité :

Il est montré que les systèmes à paramètres distribués représentés par des équations aux dérivées partielles pouvaient s'écrire sous la forme abstraite **[13]**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
(IV.1)

Nous considérons pour la suite une formulation abstraite des systèmes continus linéaires. Ces systèmes peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & (dynamique) \\ y(t) = Cx(t) & (observation) \\ x(0) = x_0 & (état initial) \\ \forall t \ge 0 \end{cases}$$
(IV. 2)

- pour tout $t \ge 0$, $x(t) \in X$, $u(t) \in U$, $y(t) \in Y$ et X, U et Y sont respectivement les espaces d'état, de contrôle et de sortie;

- u: ℝ⁺ → U est une fonction de commande (entrée) localement intégrable ;
- y: ℝ⁺ → Y est une fonction d'observation (sortie) localement intégrable ;
- A : D(A) ⊂ X → X est générateur d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs

 $(\Phi(t)t \ge 0)$ avec $\Phi(t) \in L(X);$

- B : $U \rightarrow X$ est un opérateur de commande linéaire et borné ;

- $C: X \rightarrow Y$ est un opérateur d'observation linéaire et borné.

Nous noterons par

 $-\sum(A, B, C)$ le système (1);



- $\sum(A, B, -)$ le système (1) sans considération de la sortie (C = 0);

- $\sum (A, -, C)$ le système (1) sans considération de la commande (B = 0).

La solution du système $\sum (A, B, C)$ est donnée par

$$x(t, u, x_0) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t - s) Bu(s) ds$$
 (IV.3)

où Φ est le semi-groupe généré par l'opérateur A.

$$\Phi(t)$$
:

L'observabilité en dimension infinie reste identique à celui établi pour les systèmes en dimension finie. Il s'agit de se poser la question de la reconstruction de l'état initial $x(t_0) = x_0$ à partir de la connaissance des mesures et des sorties.

Nous considérons le système $\sum (A, B, C)$ et la solution du système donnée en. (IV.2) La sortie est alors donnée par:

$$y(t) = C\Phi(t)x_0 + C\int_0^t \Phi(t-s)Bu(s)ds$$
 (IV. 4)

et le problème d'observabilité se ramène à la reconstruction de l'état initial $x_0 \in X$ (avec u = 0) tel que

$$y(t) = C\Phi(t)x_0 = K(t)x_0, t \ge 0$$
 (IV.5)

où *K* est l'opérateur d'observation. Il peut être déni comme un opérateur linéaire et borné

$$K : \mathbf{x} \in X \to K(.) \mathbf{x} \in L^2(0, t, Y)$$
 (IV. 6)

Son opérateur adjoint est donné par:

$$K^* y = \int_0^t \Phi^*(s) C^* y(s) ds$$
 (IV. 7)

Le système $\sum (A, -, C)$ est dit exactement observable sur [0; t] si $X' \subset ImK^*$ où X' représente l'espace dual de l'espace X (L'espace dual est l'ensemble des forme



linéaires sur X). L'observabilité consiste à essayer de reconstruire tout état x à partir de sa sortie y, l'inclusion de X' dans l'image de K^* est donc justifiée.

IV.3.2 Synthèse d'observateurs pour les systèmes distribués linéaires :

L'approche usuelle de l'analyse des systèmes est basée sur les différents opérateurs définissant le modèle associé. Ceci est vrai dans le cas distribué comme dans le cas localisé. Considérons alors le système distribué linéaire (IV.1). **[14]**

Du point de vue de la théorie des systèmes, les systèmes à paramètres distribués ont une représentation d'état en dimension infinie. Deux approches utilisées pour synthétiser un observateur pour les systèmes à paramètres distribués. La première approche consiste à approximer le système de dimension infinie par un système de dimension finie en utilisant une discrétisation spatiale et la deuxième approche consiste à synthétiser un observateur en utilisant la structure distribuée du système et ensuite discrétiser le système observateur.

La démarche qui nous permet de synthétiser un observateur repose sur les étapes suivantes:

 i) Tout d'abord nous mettons le système sous la forme d'une représentation d'état dans l'espace d'état qui est un espace de Hilbert.

ii) Nous montrons l'observabilité du système et finalement nous synthétisons un gain garantissant la stabilité de l'équation d'erreur.

L'observateur le plus utilisé est celui de Luenberger. Cet observateur est simple et basé sur le placement des pôles des systèmes linéaires. Plus précisément, la structure de l'observateur de Luenberger pour les systèmes linéaires (IV.1) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$
(IV.8)

Maintenant, si nous posons

$$\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t}) - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \tag{IV.9}$$

Comme étant l'erreur d'estimation, alors nous obtenons:

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \qquad (IV.10)$$



et par conséquent, nous pouvons choisir le gain L de l'observateur de sorte que l'erreur e(t)

converge exponentiellement vers l'origine.

la théorie des observateurs des systèmes linéaires est simple à analyser. Elle repose sur l'algèbre linéaire et le calcul matriciel.

IV.4. Synthèse d'un observateur backstepping

Considérons l'équation de chaleur instable avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u_t = u_{zz} + \lambda u \\ u_z(0) = 0 \\ u(1) = U(t) \end{cases}$$
(IV. 11)

Où U(t) représente la commande en boucle ouverte.

Supposons que seul u(0) est disponible pour la mesure. Nous démontrons qu'à partir des informations sur les limites, il est possible de reconstruire l'état dans le domaine. **[8]**

Nous concevons l'observateur suivant pour ce système :

$$\begin{cases} \hat{u}_t = \hat{u}_{zz} + \lambda \hat{u} + p_1(z) [u(0) - \hat{u}(0)] \\ \hat{u}_z(0) = p_{10} [u(0) - \hat{u}(0)] \\ \hat{u}(1) = U(t) \end{cases}$$
(IV.12)

Ici, la fonction $p_1(z)$ et la constante p_{10} sont des gains d'observateur à déterminer.

C'est utile à noter que la structure de l'observateur ci-dessus celle définie en dimension finie.

Rappelons que la structure d'observateur pour le système de dimension finie :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$
(IV. 13)

est :



$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \qquad (IV. 14)$$

Où *L* est le gain d'observateur.

Les gains d'observateur $p_1(z)$ et p_{10} forment un vecteur à dimension infinie analogue à L.

Notre objectif est de trouver $p_1(z)$ et p_{10} tel que \hat{u} converge vers u lorsque le temps tend vers l'infini. Pour ce faire, nous introduisons la variable d'erreur : **[8]**

$$\tilde{u} = u - \hat{u} \tag{IV.15}$$

Nous considérons le système d'erreur :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t &= \tilde{u}_{zz} + \lambda \tilde{u} - p_1(z) \tilde{u}(0) & (\text{IV. 16.1}) \\ \tilde{u}_z(0) &= -p_{10} \tilde{u}(0) & (\text{IV. 16.2}) \\ \tilde{u}(1) &= 0 & (\text{IV. 16.3}) \end{aligned}$$

Avec la transformation d'état utilisée dans la méthode backstepping définie comme suit :

$$\widetilde{u}(z) = \widetilde{w}(z) - \int_0^z p(z, y) \,\widetilde{w}(y) dy \qquad (\text{IV. 17})$$

Nous essayons de ramener le système d'erreur (IV. 16) à l'équation de chaleur exponentiellement stable suivante :

$$\begin{cases} \widetilde{w}_t = \widetilde{w}_{zz} \\ \widetilde{w}_z(0) = 0 \\ \widetilde{w}(1) = 0 \end{cases}$$
(IV. 18)

La différenciation de la transformation (IV. 17) par rapport aux variables t et z donne :

$$\widetilde{u}_{t}(z) = \widetilde{w}_{t}(z) - \int_{0}^{z} p(z, y) \, \widetilde{w}_{yy}(y) dy$$

$$= \widetilde{w}_{t}(z) - p(z, z) \widetilde{w}_{z}(z) + p(z, 0) \widetilde{w}_{z}(0) + p_{y}(z, z) \widetilde{w}(z) - p_{y}(z, 0) \widetilde{w}(0) - \int_{0}^{z} p_{yy}(z, y) \, \widetilde{w}(y) dy \qquad (IV. 19)$$



 $\widetilde{w}_{yy} =$

 $p_{yy} =$

$$\widetilde{u}_{zz}(z) = \widetilde{w}_{zz}(x) - \widetilde{w}(x)\frac{d}{dz}p(z,z) - p(z,z)\widetilde{w}_{z}(z) - p_{zz}(x,x)\widetilde{w}(y) - \int_{0}^{z} p_{zz}(x,y)\widetilde{w}(y)dy$$

(IV.20)

En substituant (IV. 17), (IV. 19) et (IV. 20)dans (IV. 16)on obtient :

$$\widetilde{w}_{t}(z) - p(z,z)\widetilde{w}_{z}(z) + p(z,0)\widetilde{w}_{z}(0) + p_{y}(z,z)\widetilde{w}(z) - p_{y}(z,0)\widetilde{w}(0) - \int_{0}^{z} p_{yy}(z,y)\widetilde{w}(y)dy = \widetilde{w}_{zz}(z) - \widetilde{w}(x)\frac{d}{dx}p(x,x) - p(x,x)\widetilde{w}_{zz}(x) - p_{zz}z\widetilde{w}(y) - \int_{0}^{x} p_{zz}(x,y)\widetilde{w}(y)dy + \lambda\widetilde{w}(z) - \lambda\int_{0}^{z} p(z,y)\widetilde{w}(y)dy - p_{1}(z)\widetilde{w}(0)$$
(IV.21)

En tenant compte de l'équation (IV. 18) et après arrangement, l'équation (IV. 21) devient :

$$\lambda(\widetilde{w}(z) - \int_0^z p(z, y)\widetilde{w}(y)dy) - p_1(z)\widetilde{w}(0) = 2\widetilde{w}(z)\frac{d}{dz}p(z, z) - p_y(z, 0)\widetilde{w}(0) + \int_0^z (p_{zz}(z, y) - p_{yy}(z, y))\widetilde{w}(y)dy.$$
(IV.22)

Pour satisfaire la condition (IV. 22), on doit imposer les conditions suivantes :

$$p_{zz}(z, y) - p_{yy}(z, y) = -\lambda p(z, y)$$
(IV. 23)

$$\frac{d}{dz}\mathbf{p}(z,z) = \frac{\lambda}{2}, \qquad (IV.24)$$

$$p_1(z) = \lambda p_y(z, 0). \tag{IV. 25}$$

Les conditions aux limites (IV. 16.1) et (IV. 16.2) fournissent les deux autres conditions suivantes:

$$p_{10} = p(0,0) \tag{IV.26}$$



$$p(1, y) = 0.$$
 (IV. 27)

En tenant compte de ces conditions (IV. 26) et (IV. 27) les conditions (IV. 23) *et* (IV. 25) peuvent s'écrire comme suit :

$$p_{zz}(z,y) - p_{yy}(z,y) = -\lambda p(z,y),$$
 (IV. 28)

$$p(1, y) = 0$$
, (IV. 29)

$$P(z,z) = \frac{\lambda}{2} (z-1),$$
 (IV. 30)

Ces trois conditions forment une PDE bien posée que nous pouvons résoudre explicitement. Pour faire ça, nous introduisons le changement

Nous aurons:

$$\bar{\mathbf{p}}_{\overline{\mathbf{z}}\mathbf{z}}(\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{y}}) - \bar{\mathbf{p}}_{\overline{\mathbf{y}}\overline{\mathbf{y}}}(z,y) = -\lambda p(\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{y}}), \tag{IV.31}$$

$$\bar{p}(\bar{z}, 0) = 0$$
, (IV. 32)

$$\bar{p}(\bar{z}, z) = -\frac{\lambda}{2} z, \qquad (IV.33)$$

Cette PDE admet comme solution :

$$\bar{p}(\bar{z},\bar{y}) = -\lambda \bar{y} \frac{I1(\sqrt{\lambda(\bar{z}^2 - \bar{y}^2)})}{(\sqrt{\lambda(\bar{z}^2 - \bar{y}^2)})}$$
(IV.34)

Ou en fonction variables originales:

$$p(z, y) = -\lambda(1-z) \frac{I_2(\sqrt{\lambda(2-z-y)(z-y)})}{\sqrt{\lambda(2-z-y)(z-y)}}$$
(IV.35)

avec I2 est la fonction de Bessel définie comme suit :

$$I_2(z) = \frac{2I_1(z)}{z} - I'_1(z)$$
(IV. 36)

Avec



$$I_{I}(z) = \sum_{m}^{\infty} \frac{(-1)^{m} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+1}}{m! (m+1)!}$$
(IV. 37)

Les gains de l'observateur, obtenus en utilisant (IV. 25) et (IV. 26) sont

$$p_1(z) = p_y(z,0) = \frac{\lambda(1-z)}{z(2-z)} I_2(\sqrt{\lambda z(2-z)}), \qquad (IV.38)$$

$$p_{10} = p_y(0,0) = -\frac{\lambda}{2}.$$
 (IV. 39)

Ainsi, l'observateur est donné comme suit :

$$\tilde{u}_{t} = \tilde{u}_{zz} + \lambda \tilde{u} - \frac{\lambda(1-z)}{z(2-z)} I_{2}(\sqrt{\lambda z(2-z)}\tilde{u}(0))$$

$$\tilde{u}_{z}(0) = \frac{\lambda}{2}\tilde{u}(0)$$

$$\tilde{u}(1) = 0$$
(IV. 40)

IV.5. Simulation du système réel et le système estimé

IV.5.1 Simulation :

Après la discrétisation par la méthode des lignes des modèles (IV. 40) et (IV. 40)qui consistent à remplacer les dérivées secondaires par rapport à z et en remplaçant u et \tilde{u} par T (température réelle) et \hat{T} (température estimée) on trouve les deux modèles d'état suivants

• Pour la température réelle :

$$\dot{T}(t) = AT(t) + BU(t)$$
(IV. 40)

Avec les conditions aux limites :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z=0} = 0, \quad T_l(t) = U(t)$$

• Pour l'observateur :

$$\dot{T}(t) = AT(t) + BU(t) + \left(\frac{\lambda(1-z)}{z(2-z)}\right) I_2(\sqrt{\lambda z(2-z)} (T(0) - \hat{T}(0))$$
(IV. 42)



Pour la simulation nous avons pris :

$$T(z,t) = 5, \ \hat{T}(z,t) = 10$$

Avec la commande

$$U(t) = 5(1 - e^{-0.2t}),$$

 $\lambda = 1,$

Pour les conditions initiales, nous avons pris :

et

$$T(z,t) = 5,$$

et

$$\widehat{T}(z,t) = 10$$
 ,

Les résultats de simulation obtenus sont donnés par les figures ci-dessous.





Figure IV.2: Evolution spatio-temporelle de la température dans la tige métallique.





Figure IV.3 : Evolution de la température en fonction du temps dans la tige métallique.



Figure **IV.4:** Evolution de la température réelle et la température estimée en fonction du temps à la position z = 0.

 $T_e = \textit{température éstimée}~~;~T_r = \textit{température réel}~~;$





Figure **IV.5:** Erreur d'estimation de la température à la position z = 0.





Figure IV.6: profiles spatiaux de la température à l'instant t= 0,5s.



Figure **IV.7**: l'erreur d'estimation en fonction du temps et de la longueur.



IV.5.2 Interprétation des résultats :

Les résultats obtenus montrent la convergence de l'estimation. En effet lorsque t tend vers l'infini, l'erreur d'estimation tend vers zéro. L'estimateur backstepping permet d'estimer la totalité du vecteur d'état à partir des mesures effectuées à aux frontières.

VI.6 Conclusion

Les observateurs sont la partie essentielle du contrôle des systèmes où tous les états du système ne sont pas connus ou pas disponible pour la mesure en ligne.

Dans ce chapitre, nous avons synthétisé l'observateur backstepping pour l'équation de chaleur. La convergence et l'efficacité de cet observateur a été démontrée par simulation.



Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'estimation d'état.

L'objectif consiste à concevoir un observateur backstepping de l'équation de la chaleur et de montrer son efficacité dans la reconstruction du profil de la température.

Tout d'abord on a défini les systèmes à paramètres distribués, puis on a modélisé le phénomène de diffusion de la chaleur . Par la suite, nous avons utilisé la méthode des lignes basée sur les différences finies pour simuler le modèle obtenu. A la fin nous avons synthétisé un estimateur backstepping pour le système thermique.

D'après les résultats obtenus on peut confirmer que l'observateur backstepping est une solution intéressante pour résoudre le problème de la reconstruction d'état d'un système à paramètres distribués. Par conséquent, il est intéressant d'appliquer cette technique d'estimation pour d'autres systèmes paraboliques.



Figure I.1 : Réacteur chimique
Figure I.2 : Profil de la corde en vibration
Figure II.1 : Les différents modes de transfert de chaleur15
Figure II.2 : Elément de la barre considéré pour la modélisation
Figure III.1: Evolution spatio-temporelle de la température dans la tige métallique27
Figure III.2 : Evolution de la température en fonction du temps dans la tige métallique28
Figure. IV.1: Principe d'un observateur d'état
Figure IV.2 : Evolution spatio-temporelle de la température dans la tige métallique
Figure IV3 : Evolution de la température en fonction du temps dans la tige métallique38
Figure IV.4 : Evolution de la température réelle et la température estimée en fonction du
temps à la position z = 0
Figure IV.5 : Erreur d'estimation de la température à la position $z = 0$
Figure IV.6 : Profiles spatiaux de la température à l'instant t= 0,5s40
Figure IV.7 : Erreur d'estimation en fonction du temps et de la longueur41

Résumé:

Dans notre travail, on s'intéresse à la synthèse d'un observateur backstepping pour l'équation de chaleur, le travail présenté dans ce mémoire qui s'inscrit d'un point de vue théorique dans, le domaine de simulation des systèmes d'écrit par des EDP. On présente tout d'abord des généralités sur les systèmes à paramètres distribués, puis on a modélisé le phénomène du transfert de la chaleur et ensuite on a décrit la simulation de l'équation de la chaleur par la méthode des lignes. Le dernier chapitre est consacré à la synthèse d'un observateur backstepping pour l'équation de la chaleur.

Mots clés : systèmes à paramètres distribués, EDP, équation de la chaleur, méthode des lignes, observateur backstepping.