République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de MASTER II

Spécialité : MATHEMATIQUES

Option : Modélisation Mathématique

Intitulé du mémoire

Sur le problème d'existence de solutions purement Stepanov presque périodiques des équations différentielles

---

Réalisé par :

Hasni AREZKI

Dirigé par :

M^{me} **Bedouhene Fazia**

Devant le jury d'examen composé de :

Morsli	Mohamed	Professeur	UMMTO	Président
Bedouhene	Fazia	Professeur	UMMTO	Rapporteur
Smaali	Mannal	MCA	UMMTO	Examinatrice
Mellah	Omar	MCB	UMMTO	Examinateur
Challali	Nouredine	MAA	UMMTO	Examinateur

Promotion: 2015/2016

Remerciements :

Je remercie vivement les membres de jury pour l'honneur qu'il me font en acceptant de juger ce travail.

Il m'est particulièrement agréable de remercier mon aimable promotrice Madame Khellas Fazia, pour m'avoir proposé ce thème, pour ses orientations et sa disponibilité qui m'ont permis de mener mon travail à bien.

Enfin, j'exprime mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces:

Je dédie ce travail à mon père et ma mère ,
mes soeurs lynda et ouerdia
ma nièce dyhia
mes frères remdane et hmed.
à tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

Table des matières

Introduction générale

La question d'existence (et d'unicité) de solution Bohr (Stepanov) presque périodique a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs, une literature très abondante est dédiée à cette question (voir e.g. [5], [6], [10], [11], [12], [13], [21], [22]). Quelques résultats sur les solutions Stepanov presque périodiques des équations différentielles indiquent que ces solutions sont en fait Bohr presque périodiques. Cela est dû spécialement aux théorèmes de type Bohr–Neugebauer et de Favard, puisque les solutions sont supposées être bornées.

Notre travail est une synthèse de quelques avancées de la théorie des équations différentielles à coefficients Stepanov presque périodiques. Nous discuterons, en particulier, de deux travaux récents et complémentaires de Andres et Pennequin. Le premier (voir [12]) clarifie le lien entre la nature d'une solution d'une équation différentielle en temps continu (de forme particulière) et sa discrétisée canonique dans un espace de Banach. L'objectif étant de donner une extension du théorème de Meisters [18] de deux manières différentes.

Le deuxième (voir [13]) porte sur la non-existence de solutions bornées purement Stepanov presque périodique lorsque les coefficients de l'équation sont Stepanov presque périodiques. Il est démontré que dans un espace de Banach uniformément convexe, toute fonction Stepanov presque périodique ayant une dérivée Stepanov presque périodique est Bohr presque périodique.

Notre travail est réparti en deux chapitres :

Dans le chapitre I, nous faisons quelques rappels et mises au point sur les fonctions presque périodiques. Nous établissons une étude comparative entre les deux notions de presque périodicité de Bohr et de Stepanov.

Dans le Chapitre II, nous présenterons et développerons des résultats obtenus par les auteurs J. Andres et D Pennequin [12, 13].

Chapitre 1

Fonctions presque périodiques de Bohr et de Stepanov

Dans ce chapitre nous faisons une synthèse sur les fonctions presque périodiques de Bohr et de Stepanov à partir des références [1, 16, 17]. Nous rassemblons les outils nécessaires pour la compréhension de ce manuscrit, entre autres la presque périodicité de Bohr et de Stepanov, la propriété de Bohl-Bohr-Amerio et ses conséquences et l'opérateur de Nemytskii.

1.1 Définitions et propriétés des fonctions presque périodiques de Bohr et de Stepanov

1.1.1 Presque périodicité de Bohr

Nous considérons dans toute la suite de ce mémoire $(\mathbb{E}, |\cdot|_{\mathbb{E}})$ un espace de Banach muni de la norme $|\cdot|_{\mathbb{E}}$, notons par $C(\mathbb{R},\mathbb{E})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace de Banach $(\mathbb{E}, |\cdot|_{\mathbb{E}})$ et par μ la mesure de Lebesgue.
L'ensemble des fonctions continues périodiques présente des insuffisances à savoir qu'il n'est pas stable par rapport aux opérations usuelles et par passage à la limite uniforme. En 1923, Harald Bohr a relaxé la notion de périodicité en introduisant la notion de presque périodicité de manière à ce que l'ensemble des fonctions qui la satisfont forme un sous espace vectoriel fermé de $C(\mathbb{R},\mathbb{E})$ contenant toutes les fonctions continues périodiques.

Définition 1.1.1. On dit qu'un sous ensemble A de $\mathbb{E}$ est relativement dense s'il existe un réel $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur l de $\mathbb{E}$ rencontre A.

Définition 1.1.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ une fonction continue, f est dite uniformément presque périodique ou Bohr presque périodique si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $l > 0$ de sorte que, pour tout $a \in \mathbb{E}$, il existe un $\tau \in [a, a+l]$ satisfaisant :

$$\|f(.+\tau) - f(.)\|_\infty < \epsilon$$

τ est appelée une $\epsilon-$translation de f.
En d'autres termes, f est uniformément presque périodique si l'ensemble de toutes les $\epsilon-$translations de f qu'on note par $E(\epsilon,f(x))$ est relativement dense dans $\mathbb{E}$.
On note l'ensemble des fonctions Bohr presque périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$ par $AP(\mathbb{R},\mathbb{E})$

On notera au passage qu'une fonction continue périodique est presque périodique le contraire n'est pas vrai, voici un exemple de fonction presque périodique non périodique.

Exemple 1.1.1 ([4]). La fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+\sin\sqrt{2}x$ est presque périodique bien qu'elle ne soit pas périodique. En utilisant le fait que $\|\cos x\|_\infty=\|\sin x\|_\infty=1$,

$$\begin{aligned}\|f(x+\tau)- \quad f(x) \quad &\|_\infty\\ =\quad &\|\sin(\sqrt{2}\tau)\cos(\sqrt{2}x)+\sin(\sqrt{2}x)(\cos\sqrt{2}\tau-1)\\ +\quad &\sin x(\cos\tau-1)+\cos x\sin\tau\|_\infty\\ \leq\quad &|1-\cos\tau|+|1-\cos(\sqrt{2}\tau)|+|\sin\tau|+|\sin\sqrt{2}\tau|,\end{aligned}$$

pour $\epsilon>0$ donné, soient m, $n\in\mathbb{N}$ telle que $|m-\sqrt{2}n|<\frac{\sqrt{\epsilon}}{4\pi}$.
Si on choisit $\tau=2n\pi$ $(\cos\tau=1,\ \sin\tau=0)$
on aura

$$|f(x+\tau)-f(x)|<|1-\cos(\sqrt{2}\tau)|+|\sin\sqrt{2}\tau|,$$

mais

$$\sqrt{2}\tau=(\sqrt{2}n)2\pi=(m+\alpha)2\pi,\text{ où }|\alpha|<\frac{\epsilon}{4\pi},$$

ainsi

$$\cos(\sqrt{2}\tau)=\cos 2\pi\alpha\text{ et }\sqrt{2}\tau=2\pi\alpha,$$

comme

$$|1-\cos\theta|\leq|\theta|\text{ et }|\sin\theta|\leq|\theta|,\text{ pour tout }\theta,$$

alors

$$\begin{aligned}\|f(x+\tau)-f(x)\|_\infty &\leq 2\pi|\alpha|+2\pi|\alpha|\\ &= 4\pi|\alpha|<4\pi\frac{\epsilon}{4\pi}=\epsilon.\end{aligned}$$

On peut toujours choisir m et n satisfaisant $|m-\sqrt{2}n|<\frac{\epsilon}{4\pi}$ avec m et n variant dans $\mathbb{N}$, du coup il existe un ensemble $\{\tau\}_\epsilon$ appelée l'ensemble des ϵ translations de f.

Définition 1.1.3 (normalité ou critère de Bochner). Une fonction continue f est dite normale si, pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$, on peut extraire une sous suite $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $f(x+h'_n)$ soit uniformément convergente.

Définition 1.1.4. Un polynôme trigonométrique est une application $T : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ de la forme

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \exp(i\lambda_k x), \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_k \in \mathbb{R},\ a_k \in \mathbb{C}.$$

On note l'espace des polynômes trigonométrique par $P(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

Définition 1.1.5. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ possède la propriété d'approximation polynômiale si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique T_ϵ tel que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - T_\epsilon(x)|_{\mathbb{E}} \leq \epsilon.$$

Le théorème fondamental suivant fait le lien entre la presque périodicité de Bohr, l'approximation polynômiale et le fait d'être normale.

Théorème 1.1.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ une fonction continue, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- *f possède la propriété d'approximation polynômiale,*
- *f est normale,*
- *f est Bohr presque périodique.*

La preuve étant longue et technique, le lecteur est orienté vers le rapport de Giraudo [9] pour de plus amples détails.

On a les propriétés des fonctions Bohr presque périodique suivantes

Propriétés 1.1.1 ([15]). *Voici quelques propriétés des fonctions Bohr presque périodiques*

1. *Si f une fonction presque périodique, pour tout $a \in \mathbb{R}$ les applications $x \mapsto af(x)$, $x \mapsto f(ax)$, et $x \mapsto f(a + x)$, sont presque périodique.*
2. *Si f une fonction presque périodique $|f|$ est presque périodique.*
3. *Si f et g deux fonctions presque périodiques, alors $f * g$ et $f + g$ sont presque périodiques.*
4. *Une limite uniforme de fonctions presque périodiques est presque périodique.*
5. *Les parties réelles et imaginaires d'une fonction presque périodique sont presque périodiques.*

Ces propriétés nous assurent que l'espace des fonctions Bohr presque périodique présente une structure d'espace vectoriel.

1.1.2 Opérateurs de Nemytskii

Les opérateurs de Nemytskii sont une classe d'opérateurs non linéaires continus bornés dans les espaces L^p, ils prennent leurs nom du mathématicien Viktor Vladimirovich Nemytskii.

Définition 1.1.6. Étant donnés un espace $\mathbb{E}$ et une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, L'opérateur de superposition ou de Nemytskii construit sur f est

$$\mathcal{N}_f : [t \mapsto u(t)] \mapsto t \mapsto [f(t, u(t)].$$

Opérateurs de Nemytskii dans les espaces des fonctions presque périodiques de Bohr

La condition suffisante assurant que l'opérateur de Nemytskii envoie un espace de fonctions $AP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ dans un espace du même type est que f soit uniformément presque périodique en le paramètre(par rapport à t), elle a été introduite par Yoshisawa [23]. Rappelons cette notion

Définition 1.1.7 ([23] Définition 2.1 p. 5-6). On appelle $APU(\mathbb{R}\times\mathbb{E}, \mathbb{E})$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ continues telles que pour toute partie K compacte de $\mathbb{E}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $l = l(K,\epsilon) > 0$ telle que pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $\tau \in [r, r + l]$ satisfaisant :

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times K} |f(t + \tau,x) - f(t,x))|_{\mathbb{E}} = 0.$$

Remarque 1.1.1 ([3]). On notera qu'une fonction continue de x et ne dépendant pas de t satisfait cette hypothèse; une fonction presque périodique en t et ne dépendant pas de x également.

Théorème 1.1.2 ([3]). *Soit $f \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{E})$, alors l'opérateur $\mathcal{N}_f$ est continu de $AP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ sur $AP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. Réciproquement, si l'opérateur $\mathcal{N}_f$ est continu de $AP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ sur $AP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors $f \in APU(\mathbb{R} \times \mathbb{E}, \mathbb{E})$.*

Ce résultat est due à P. Cieutat.

1.1.3 Généralisations de la Bohr-presque périodicité

Presque périodicité de Stepanov : La presque périodicité trouve aussi un sens pour les fonctions localement intégrables (pas nécessairement continues). L'idée consiste à remplacer dans la définition de la Bohr presque périodicité la norme infinie par une norme du type L^p. On obtient ainsi plusieurs extensions de la presque périodicité (selon la norme choisie). Les plus connues sont celles de Stepanov, Weyl et Besicovitch (voir [1], [16], [15]). Nous nous limiterons dans le cadre de ce mémoire à la presque périodicité au sens de Stepanov.

Soient $f,g \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$, $1 \leq p < \infty$, on introduit la norme et la distance de Stepanov par:

$$\|f\|_{S^p_L} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{L} \int_x^{x+L} |f(t)|^p_{\mathbb{E}} dt \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$D_{S^p_L}(f,g) = \|f - g\|_{S^p_L} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{L} \int_x^{x+L} |f(t) - g(t)|^p_{\mathbb{E}} dt \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Comme toutes les normes de Stepanov sont équivalentes pour tout L, i.e. pour $L_1, L_2 \in \mathbb{R}_+$, il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$ telles que

$$k_1 \|f\|_{S^p_{L_1}} \leq \|f\|_{S^p_{L_2}} \leq k_2 \|f\|_{S^p_{L_1}}.$$

On peut se limiter à $L = 1$.

Définition 1.1.8. Une fonction $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$, $1 \leq p < \infty$ est dite Stepanov presque périodique si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $l > 0$ de sorte que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un $\tau \in [a,a+l]$ satisfaisant :

$$D_{S^p}(f(.+\tau) - f(.)) < \epsilon$$

τ est appelée une $S\ \epsilon-$translation de f.
En d'autres termes, f est Stepanov presque périodique si l'ensemble de toutes les $S^p_l\ \epsilon-$translations de f qu'on note par $SE(\epsilon,f(x))$ est relativement dense.
On note l'ensemble des fonctions Stepanov presque périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$ d'ordre p par $SE(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

Lorsque $p = \infty$, on dit qu'une fonction $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est essentiellement Stepanov presque périodique bornée lorsque:$\exists l > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists \tau \in [a,a+l]$ satisfaisant :

$$\sup_{x \in R} \|f \mathbb{I}_{[x,\, x+1]}\|_\infty < +\infty.$$

Remarque 1.1.2. En posant $p = \infty$ dans la norme de Stepanov, l'espace de $SE^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ devient l'espace $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ car

$$\|f \mathbb{I}_{[x,\, x+1]}\|_\infty = \|f\|_\infty$$

Le premier sens étant évident, on montre l'autre sens, $\forall \epsilon > 0$, il existe un ensemble A de mesure positive tel que $|f|_\mathbb{E} \geq \|f\|_\infty - \epsilon$ dans l'ensemble A. Ainsi, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $A \cap [x, x+1]$ a une mesure positive et $|f|_E \|f\|_\infty - \epsilon$ dans $A \cap [x, x+1]$, donc

$$\|f \mathbb{I}_{[x,\, x+1]}\|_\infty \geq \|f\|_\infty - \epsilon$$

Définition 1.1.9 (S^p normalité). Une fonction $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, $1 \leq p < \infty$ est dite S^p-normale si pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, on peut extraire une sous suite $(h'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $f(x + h'_n)$ soit S^p-convergente.

Définition 1.1.10. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ possède la propriété d'approximation polynômiale si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique T_ϵ tel que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_a^{a+1} |f(x) - T_\epsilon(x)|_\mathbb{E} dx \leq \epsilon.$$

L'espace $S(\mathbb{R},\mathbb{E})$ s'obtient comme l'adhérence de $P(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, $S = \overline{P}^{\|\cdot\|_{S^p}}$.

Le théorème suivant est analogue au théorème 1.1.1, il fait le lien entre la presque périodicité de Stepanov, l'approximation polynômiale et le fait d'être normale au sens de Stepanov.

Théorème 1.1.3 ([15]). *Les trois espaces définit dans les définitions 1.1.9, 1.1.8, 1.1.10 sont équivalents.*

Dans ce qui suit, on présentera certaines propriétés des fonctions Stepanov presque périodiques. Comme l'espace des fonction Bohr presque périodiques, ces propriétés assurent que l'espace des fonctions Stepanov presque périodiques présente aussi une structure d'espace vectoriel.

Propriétés 1.1.2. *Soient les fonctions* $f,h \in SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ *et* $g \in SAP^q(\mathbb{R},\mathbb{E})$, $1 \leq p, q < \infty$ *telle que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *on a :*

1. $f + h \in SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$,
2. $f.g \in SAP(\mathbb{R},\mathbb{E})$,

Démonstration. 1. D'après Levitan [17], on peut trouver une $\epsilon-$translation τ commune à f et g.

En utilisant l'inégalité de Minkowski.

$$\begin{aligned}
&\left[\int_x^{x+1} |(f(x+\tau) + g(x+\tau)) - (f(x) + g(x))|_{\mathbb{E}}^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
\leq\ & \left[\int_x^{x+1} |f(x+\tau) - f(x)|_{\mathbb{E}}^p dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_x^{x+1} |g(x+\tau) - g(x)|_{\mathbb{E}}^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
\leq\ & 2\epsilon.
\end{aligned}$$

2. Pour tout $\epsilon > 0$, prenons une $\epsilon-$translation τ commune à f et g.

En vertu de l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\int_x^{x+1} |f(x+\tau)g(x+\tau) - f(x)g(x)|_{\mathbb{E}} dx \\
\leq\ & \int_x^{x+1} |f(x+\tau)|_{\mathbb{E}} |g(x+\tau) - g(x)|_{\mathbb{E}} dx + \int_x^{x+1} |g(x)|_{\mathbb{E}} |f(x+\tau) - f(x)|_{\mathbb{E}} \\
\leq\ & \left(\int_x^{x+1} |f(x+\tau)|_{\mathbb{E}}^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^{x+1} |g(x+\tau) - g(x)|_{\mathbb{E}}^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
+\ & \left(\int_x^{x+1} |g(x)|_{\mathbb{E}}^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^{x+1} |f(x+\tau) - f(x)|_{\mathbb{E}}^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
<\ & 2A\epsilon
\end{aligned}$$

avec

$$A = \max\left\{\sup_x \left(\int_x^{x+1} |f(x)|_{\mathbb{E}}^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \sup_x \left(\int_x^{x+1} |g(x)|_{\mathbb{E}}^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

□

La caractérisation de Danilov des fonctions Stepanov presque périodique

On note par $S_D(\mathbb{R},\mathbb{E})$ l'ensemble des fonctions mesurables, telles que pour touts $\epsilon, \delta > 0$,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}(\mu\{t \in [\xi, \xi+1], |f(t+\tau) - f(t)|_{\mathbb{E}} \geq \epsilon\}) < \delta$$

et par $M'_p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$, telles que : $\|f\|_{S^p} < \infty$, et

$$\lim_{\delta\to 0^+} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \sup_{T\subset[\xi,\xi+1],\, \mu(T)<\delta} \int_T |f(t)|^p_{\mathbb{E}} dt = 0.$$

Danilov a donné une autre caractérisation de la Stepanov presque périodicité en termes des classes $S_D(\mathbb{R},\mathbb{E})$ et $M'_p(\mathbb{R},\mathbb{E})$. Plus précisément,

Théorème 1.1.4 ([7]).

$$SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E}) = M'_p(\mathbb{R},\mathbb{E}) \cap S_D(\mathbb{R},\mathbb{E}).$$

Cette caractérisation a permit à Andres et Pennequin d'obtenir un résultat de superposition d'une fonction Stepanov presque périodique avec une fonction continue moyennant une condition de croissance polynômiale sur la fonction continue.

Lemme 1.1.1 ([7]). *Soit F continue de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ une fonction linéairement bornée i.e.*

$$\forall x \in \mathbb{E},\, |F(x)|_{\mathbb{E}} \leq a|x|^{\frac{p}{q}}_{\mathbb{E}} + b \quad a, b > 0 \text{ et } p, q \geq 1.$$

Pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ dans $SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$.
on aura

$$F \circ f \in SAP^q(\mathbb{R},\mathbb{E}).$$

Démonstration. On a $f \in SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$, comme

$$f \in S_D(\mathbb{R},\mathbb{E})$$

on aura

$$F \circ f \in S_D(\mathbb{R},\mathbb{E}). \tag{1.1}$$

Il reste à montrer que

$$F \circ f \in M'_q(\mathbb{R},\mathbb{E})$$

pour tout intervalle borné T, on a

$$\int_T |F(f(t))|^p_{\mathbb{E}} dt \;\; \leq \;\; 2^{q-1} \int_T a^q |f(x)|^{\frac{p}{q}}_{\mathbb{E}} + b^q dt$$

$$\leq \quad 2^{q-1}a^q \int_T |f(x)|_{\mathbb{E}}^{\frac{p}{q}} dt + b^q m,$$

comme $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, on aura $F \circ f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, pour tout $\delta > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$ et $T \subset [\xi, \xi + 1]$, telle que $\mu([\xi, \xi + 1]) < \delta$
on aura

$$\int_T |F(f(t))|^p_{\mathbb{E}} dt \leq 2^{q-1}a^q \int_T |f(x)|_{\mathbb{E}}^{\frac{p}{q}} dt + b^q \delta$$

comme $f \in M'_p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et de la dernière inégalité, on déduit que:

$$F \circ f \in M'_q(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2), on déduit que

$$F \circ f \in M'_q(\mathbb{R}, \mathbb{E}) \cap S_D(\mathbb{R}, \mathbb{E})$$

donc

$$F \circ f \in SAP^q(\mathbb{R}, \mathbb{E}).$$

□

Remarque 1.1.3. Si F est seulement continue et f est dans $SAP^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, nous ne pouvons pas affirmer que $F \circ f \in SAP^q$.
En effet, considérons la fonction f définie par : $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$, f_n est $4n$ périodique et

$$f_n(x)/[-2n, 2n] = \beta_n \left(1 - \frac{2}{\alpha_n}|x - n|_{\mathbb{E}}\right) \mathbb{I}_{[n - \frac{2}{\alpha_n}, n + \frac{2}{\alpha_n}]}$$

avec $\alpha_n \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ et $\beta_n > 0$,f_n est périodique, continue et bornée donc f_n Stepanov presque périodique et on a $\|f_n\|_{S_{ap}} = 2\alpha_n\beta_n$, si on suppose que $\sum_n \alpha_n\beta_n < \infty$ alors f est Stepanov presque périodique comme limite uniforme de fonctions Stepanov presque périodiques. On choisit $F(\cdot) = \exp(\cdot)$

$$\exp(f(x)) = \exp\left(\sum_n f_n\right) \geq f_N, \text{ pour tout } N \text{ dans } [2, +\infty[$$

$$\|\exp(f_n)\| = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \exp(\beta_N - 1) \geq \frac{\alpha_N \beta_N^2}{6}.$$

Si $\alpha_N\beta_N^2 \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, alors

$$\|\exp(f)\|_{S^1} \geq \frac{\alpha_n\beta_n^2}{6} \to \infty$$

1 ce qui donne $\exp(f)$ n'est pas dans Stepanov presque périodique.
Un exemple de suite α_n, β_n vérifiant les conditions précédentes est $\alpha_n = \frac{1}{n^5}$ et $\beta_n = n^3$.

1.2 Comparaison entre les fonctions presque périodiques de Bohr et les fonctions presque périodiques de Stepanov

La notion de Stepanov presque périodicité est la généralisation la plus naturelle de la notion de Bohr presque périodicité, principalement pour deux raisons :

– **Premièrement** : Toute fonction Bohr presque périodique est Stepanov presque périodique $AP(\mathbb{R},\mathbb{E}) \subset SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ comme

$$\|\cdot\|_{S^p} \leq \|\cdot\|_\infty.$$

la réciproque n'est pas toujours vraie. Le théorème suivant nous fournit une condition supplémentaire pour obtenir l'uniforme presque périodicité à partir de la notion de Stepanov presque périodicité.

Théorème 1.2.1 (Bochner [1]). *Toute fonction f Stepanov presque périodique uniformément continue dans $\mathbb{E}$ est Bohr presque périodique.*

Démonstration. Pour montrer le résultat précédant il suffit de montrer que l'ensemble des $\epsilon-$translations de f, $E(\epsilon,f(x))$ est relativement dense pour tout $\epsilon > 0$.
Pour cela, on montre qu'on peut correspondre à tout ϵ un $\delta > 0$, telle que

$$SE(\epsilon,f(x)) \subset E(\epsilon,f(x)),$$

f est une fonction uniformément continue, à tout ϵ on associe $0 < h < 1/2$ telle que

$$|f(x') - f(x'')|_{\mathbb{E}} < 1/4\epsilon, \ \ si \ |x' - x''|_{\mathbb{E}} \leq h.$$

Soit τ quelconque dans $SE(\epsilon h,f(x))$, on montre que $|f(x+\tau) - f(x)|_{\mathbb{E}} \leq \epsilon$, $\forall x$,
on suppose qu'il existe un x_0 telle que pour $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$
on a

$$|f(x_0+\tau) - f(x_0)|_{\mathbb{E}} > \epsilon.$$

f est uniformément continue,

$$|f(x+\tau) - f(x)|_{\mathbb{E}} > \epsilon/2;$$

on aura alors,

$$\int_{x_0-h}^{x_0-h+1} |f(x+\tau) - f(x)|_{\mathbb{E}} dx > \int_{x_0-h}^{x_0+h} |f(x+\tau) - f(x)|_{\mathbb{E}} dx > \epsilon h,$$

ce qui est absurde vu que τ est une S-translation de f,
on déduit que

$$|f(x+\tau) - f(x)|_{\mathbb{E}} \leq \epsilon$$

D'où le résultat. □

– **Deuxièmement** Bochner a donné une caractérisation élégante de la presque périodicité au sens de Stepanov via la presque périodicité au sens de Bohr d'une fonction à valeurs dans L^p. Plus précisément:

Définition 1.2.1. On définit la transformée de Bochner d'une fonction $f \in SAP^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ par:

$$\begin{array}{rcl} f^b : \mathbb{R} & \rightarrow & L^p([0,1],\mathbb{E}) \\ f^b(x) & = & \widetilde{f}(x) = f(x+\eta), \eta \in [0,1], x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

La transformation de Bochner transforme la presque périodicité de Stepanov en une presque périodicité de Bohr à valeurs dans un espace L^p.

Théorème 1.2.2 ([16]). *Si $f \in SAP^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors la transformée de Bochner de f, $f^b : \mathbb{R} \rightarrow L^p([0,1],\mathbb{E})$ est Bohr presque périodique.*

Démonstration. Une fonction f est Stepanov presque périodique, si à tout ϵ on correspond un ensemble $SE(g, \epsilon)$ telle que $\forall \tau \in SE(g, \epsilon)$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left[\int_0^1 |f(t+\tau+\eta) - f(t+\eta)|_{\mathbb{E}}^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon.$$

Soit une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow L^p(\mathbb{E})$,

$$g(t) = \{g(t,\eta), \eta \in [0,1]\} \text{ et } \|g(t)\| = \left\{ \int_0^1 |g(t,\eta)|_{\mathbb{E}}^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

en particulier, g continue et presque périodique si à tout ϵ, on correspond un ensemble $E(\epsilon, g(x))$ tel que $\forall \tau \in \{\tau\}_\epsilon$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|g(t+\tau) - g(t)\|_{\mathbb{E}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[\int_0^1 |g(t+\tau,\eta) - f(t,\eta)|_{\mathbb{E}}^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \tag{1.3}$$

soit $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\tilde{f}(t) = \{f(t+\eta), \eta \in [0,1]\}$; ainsi, on obtient une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $L^p([0,1],\mathbb{E})$ (comme $f(t) \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$)

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} |\tilde{f}(t+\tau) - \tilde{f}(t)|_{\mathbb{E}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \int_0^1 |f(t+\tau+\eta) - f(t+\eta)|_{\mathbb{E}}^p \right\}^{\frac{1}{p}} = 0,$$

de plus, f est Stepanov presque périodique.
En effet, à tout ϵ on correspond un ensemble $\{\tau\}_\epsilon$ telle que $\forall \tau \in SE(\epsilon, f(x))$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left[\int_0^1 |f(t+\tau,\eta) - f(t,\eta)|_{\mathbb{E}}^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon,$$

donc, $\tilde{f}$ est presque périodique, Si (1.3) est vérifiée $\forall \epsilon \geq 0$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{f}(t+\tau) - \tilde{f}(t)|_{\mathbb{E}} \leq \epsilon.$$

$\tilde{f}$ est uniformément presque périodique. Ce qui achève la démonstration. □

Grâce à la transformée de Bochner, on peut construire un opérateur linéaire T qui envoie $SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ dans $AP(\mathbb{R},\mathbb{E})$ définit par $T(f) = f^b$ pour tout f dans $SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$. De plus, T est une isométrie puisque $\|f^b\|_\infty = \|f\|_{S^p}$. Cette identification permet entre autre d'interpréter les différentes caractérisations de la Bohr presque périodicité (Définition de Bohr, critère de Bochner et approximation polynômiale), et ce dans le contexte de Stepanov.
Le tableau récapitulatif suivant donne les différentes caractérisations des deux notions:

	presque périodicité via les ϵ translations		presque périodicité via Bochner		presque périodicité via l'approximation pôlynomiale
Bohr	AP	$\Leftrightarrow$	normale	$\Leftrightarrow$	$\overline{P}^{\|\cdot\|_\infty}$
	$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$
Stepanov	SAP	$\Leftrightarrow$	S^p normale	$\Leftrightarrow$	$\overline{P}^{\|\cdot\|_{S^p}}$

TAB. 1.1 – *Différentes Caractérisations de la Bohr et Stepanov presque périodicité.*

Nous clôturons cette section par la présentation de quelques exemples qui pourraient renforcer la comparaison entre les deux concepts de la presque périodicité (au sens de Bohr et de Stepanov).

Exemple 1.2.1. Soit $f \in SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ non continue et non bornée.

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{pour } t \neq k\pi, \\ k & \text{pour } t = k\pi. \end{cases}$$

f n'est pas uniformément continue donc elle n'est pas uniformément presque périodique.

Propriétés 1.2.1 ([17], page 209-212). *Soit $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors la fonction*

$$\operatorname{sign}(f(x)) = \begin{cases} +1 & si\ f(x) > 0, \\ 0 & si\ f(x) = 0, \\ -1 & si\ f(x) < 0. \end{cases}$$

est dans $SAP^1(\mathbb{R},\mathbb{E})$.

Si f est une fonction périodique, il est évident que le signe de f est aussi une fonction périodique. Supposons maintenant que f est une fonction uniformément presque périodique. La question est, quelle est la nature des fonctions sign$f$*? Le théorème suivant nous dit que* sign f *est une fonction purement Stepanov presque périodique.*

Théorème 1.2.3. *Soit $F(z)(z = x+iy)$ est une fonction analytique Stepanov presque périodique, régulière dans la bande $a \leq x \leq b$ $(a < 0 < b)$. Si $x = 0, F(z) = F(iy) = f(y)$.*
f une fonction uniformément presque périodique alors le signe de f est une fonction Stepanov presque périodique

Preuve. Soit $\alpha > 0$, on définit l'ensemble $E_\alpha = \{y \in \mathbb{R}, |f(y)| > \alpha\}$. Soit τ est une $\alpha-$presque période de f. On a pour $y \in E_\alpha$

$$\text{sign } f(y+\tau) = \text{sign } f(y)$$

car dans le cas contraire on aurait

$$|f(y+\tau)-f(y)| = |f(y)| + |f(y+\tau)| > \alpha,$$

par conséquent, τ ne serait pas une α presque période de f.
Soit E_α^c l'ensemble complémentaire à E_α. Pour tout y, nous avons:

$$\int_y^{y+1} |\text{sign } f(y+\tau) - \text{sign } f(y)| dy \leq 2 \int_{E_\alpha^c \cap (y,y+1)} dy = 2\mu(E_\alpha^c \cap (y,y+1))$$

Pour conclure que sign$f$ *est Stepanov presque périodique, il suffit de montrer que*

$$\lim_{\alpha\to 0} \sup_{y\in\mathbb{R}} \mu(t \in [y,y+1], |f(t)| \leq \alpha) = 0. \tag{1.4}$$

Supposons le contraire. Soient

1. *$m_0 > 0$ un nombre fini fixé*
2. *une suite $\alpha_1,\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \cdots$ de nombres positifs décroissante vers 0,*
3. *une suite infinie y_n de nombres croissante,*

tels que

$$\mu(E_{\alpha_n}^c \cap (y_n,y_n+1)) > m_0.$$

Considérons la suite de fonctions $\varphi_n(y) = f(y+y_n)$, $n = 1,2,\cdots$. Pour chaque fonction $\varphi_n(y)$ dans l'intervalle $(0,1)$ il existe un ensemble U_n, de mesure supérieure à m_0, sur lequel l'inégalité suivante est vérifiée

$$|\varphi_n(y)| < \alpha_n.$$

Comme $\varphi_n(y)$ est une suite normale donc elle est uniformément convergente. Soit $\varphi(y)$ sa limite uniforme. Par ailleurs, soit U la limite supérieure de la suite d'ensemble U_n. Par définition, chaque point de U appartient à un nombre infini d'ensembles U_n. Par un résultat de la théorie de la mesure, on a que $\mu(U) > m_0$. Soit $y \in U$, cela signifie qu'il existe une suite infinie d'indices n_k, tel que $y \in U_{n_k}$. A partir de la définition de U_{n_k}, on a que $|\varphi_{n_k}(y)| < \alpha_{n_k}$ Par conséquent, pour $k \to \infty$ et $y \in U$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{n_k}(y) = \varphi(y) = 0$$

D'autre part, $\varphi(y)$ est une fonction analytique comme limite de fonctions analytiques régulières dans la bande $a \leq x \leq b (a < 0 < b)$. Nous avons une contradiction, pour une fonction analytique, non identiquement nulle ne peut pas s'annuler sur un ensemble de mesure strictement positive.
En particulier, ce théorème implique que le signe d'un polynôme trigonométrique réel est fonction Stepanov presque périodique.

1.2.1 Le théorème de Bohl-Bohr-Amerio et ses conséquences

On se pose la question suivante : sous quelles conditions, on peut assurer que l'intégrale d'une fonction f Stepanov presque périodique est Bohr presque périodique?.
La réponse à cette question nous fournit encore un champ de rencontre des deux notions de presque périodicité etudiées dans ce chapitre. Pour plus de détails sur les théorèmes cités dans cette partie, on envoie le lecteur à la référence [16] d'où ils sont extraits.

Théorème 1.2.4. *Soient $\mathbb{E}$ un espace de Banach uniformément convexe*[1] *et f une fonction uniformément presque périodique, si $F(x) = \int_0^x f(t)dt < \infty$ alors $F(x)$ est uniformément presque périodique.*

Théorème 1.2.5. *Si f est une fonction Stepanov presque périodique alors $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est uniformément continue.*

On rappelle ici la propriété de Bohl-Bohr-Amerio.

Théorème 1.2.6 (Bohl-Bohr-Amerio). *Soient $\mathbb{E}$ un espace de Banach uniformément convexe et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ une fonction dans $SAP^p(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ presque périodique avec $(1 < p < \infty)$ l'intégrale indéfinie $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est uniformément presque périodique si et seulement si elle est bornée pour la norme $\|.\|_{S^p}$.*

Démonstration.

$$\int_0^x \widetilde{f}(t)dt = \int_0^x f(t+\eta)dt = F(x+\eta) - F(\eta),\, \eta \in [0,1],$$

et

$$\int_0^{x+\tau} f(t)dt = F(x+\eta) - F(0),$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^x \widetilde{f}dt &= \int_0^{x+\tau} f(t)dt - \int_0^{\tau} f(t)dt \\ &= F(x+\tau) - f(\tau) = \widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(0). \end{aligned} \tag{1.5}$$

On a par hypothèse

$$\sup_{\mathbb{R}} \widetilde{F}(t) = \sup_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 |F(t+\eta)|_{\mathbb{E}}^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

1. [2] Un espace de Banach $\mathbb{E}$ est dit uniformément convexe si:$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$

$$(x, y \in \mathbb{E},\, \|x\| \leq 1,\, \|y\| \leq 1, \text{ et } |x-y|_{\mathbb{E}} > \epsilon) \Rightarrow \left| \frac{x+y}{2} \right|_{\mathbb{E}} < 1 - \delta.$$

Si $\mathbb{E}$ uniformément convexe, alors $L^p(\mathbb{E})$ l'est aussi pour $1 < p < \infty$ ([2] page 51).
On a démontré précédemment que la transformée de Bochner d'une fonction Stepanov presque périodique est uniformément presque périodique, de l'équation (1.5) et du théorème 1.2.4, on déduit que $\widetilde{F}$ est uniformément presque périodique, donc F est Stepanov presque périodique. D'après le théorème 1.2.5, F est aussi uniformément continue, donc F est uniformément presque périodique.

□

D'une manière immédiate, le théorème de Bohl-Bohr-Amerio implique qu'il n'existe pas de fonction f purement Stepanov presque périodique ayant une dérivée Stepanov presque périodique (non bornée). Cette implication a comme importantes conséquences :

Conséquence 1.2.1. *La dérivée d'une fonction bornée purement Stepanov presque périodique non presque périodique ne peut pas être Stepanov presque périodique.*

Conséquence 1.2.2. *Pour que la dérivée d'une fonction Stepanov presque périodique soit elle-même Stepanov presque périodique, il est indispensable que la fonction soit elle-même presque périodique ou non bornée.*

Ces deux conséquences sont illustrées par les exemples suivants:

Exemple 1.2.2. [12] f est une fonction régulière (dérivable), obtenue comme somme d'une série de fonctions $2n-$périodiques f_n.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2(x-y_{n,k}+\epsilon_n)^2}{\epsilon_n^2}, & \text{pour } x \in (y_{n,k} - \epsilon_n, y_{n,k} - \frac{\epsilon_n}{2}], \\ 1 - \frac{2(x-y_{n,k})^2}{\epsilon_n^2} & \text{,pour } x \in (y_{n,k} - \frac{\epsilon_n}{2}, y_{n,k} + \frac{\epsilon_n}{2}], \\ \frac{2(x-y_{n,k}+\epsilon_n)^2}{\epsilon_n^2}, & \text{pour } x \in (y_{n,k} + \frac{\epsilon_n}{2}, y_{n,k} + \epsilon_n], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$y_{n,k} = (2k+1)n,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$0 < \epsilon_n < \frac{1}{2},\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty.$$

f n'est uniformément continue car elle n'est pas bornée,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x),$$

avec

$$f_n'(x) = \begin{cases} \frac{4(x-y_{n,k}+\epsilon_n)}{\epsilon_n^2}, & \text{pour } x \in (y_{n,k}-\epsilon_n, y_{n,k}-\frac{\epsilon_n}{2}], \\ -\frac{4(x-y_{n,k})}{\epsilon_n^2}, & \text{pour } x \in (y_{n,k}-\frac{\epsilon_n}{2}, y_{n,k}+\frac{\epsilon_n}{2}], \\ \frac{4(x-y_{n,k}+\epsilon_n)}{\epsilon_n^2}, & \text{pour } x \in (y_{n,k}+\frac{\epsilon_n}{2}, y_{n,k}+\epsilon_n], \\ 0 & \text{ailleurs .} \end{cases}$$

f' n'est pas bornée.

Exemple 1.2.3. Considérons les fonctions suivantes:

$$g(x) = 2 + \cos x + \cos \sqrt{2}x.$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{g(x)}\right), f' = \cos\left(\frac{1}{g(x)}\right)\left(\frac{\sin x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x}{g^2(x)}\right).$$

Il s'en suit de la première conséquence du théorème Bohl-Bohr-Amerio que f' ne peut pas être Stepanov presque périodique car f est bornée et purement Stepanov.
B. M. Levitan dans son livre ([17], page 212-213) a montré que f est purement S^1.presque périodique non uniformément presque périodique. En effet,soient $\alpha > 0$ et $\delta > 0$ choisis arbitrairement. Considérons $E_\alpha = \{y \in \mathbb{R}, |f(y)| > \alpha\}$ Soit τ une δ presque période de g. Nous avons pour tout $x \in E_\alpha$

$$\begin{aligned} |f(x+\tau) - f(x)| &= \left|\sin\left(\frac{1}{g(x+\tau)}\right) - \sin\left(\frac{1}{g(x)}\right)\right|_{\mathbb{E}} \\ &\leq \frac{2}{2}\sin\left(\frac{|g(x+\tau)-g(x)|_{\mathbb{E}}}{g(x+\tau)g(x)}\right) \\ &\leq \frac{\delta}{\alpha(\alpha-\delta).} \end{aligned}$$

L'inégalité précédente provient du fait que $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$, $\sin x \leq x$ et du fait qu'on a

$$|\ |g(x+\tau)|_{\mathbb{E}} - |g(x)|_{\mathbb{E}}\ | \leq |g(x+\tau) - g(x)|_{\mathbb{E}},$$

donc

$$-|g(x+\tau) - g(x)|_{\mathbb{E}} \leq |g(x+\tau)|_{\mathbb{E}} - |g(x)|_{\mathbb{E}} \leq |g(x+\tau) - g(x)|_{\mathbb{E}},$$

on aura

$$\begin{aligned} |g(x+\tau)| &\geq |g(x)|_{\mathbb{E}} - |g(x+\tau) - g(x)|_{\mathbb{E}} \\ &\geq \alpha - \delta. \end{aligned}$$

D'où, pour tout réel x

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} |f(x+\tau)-f(x)|_{\mathbb{E}}dx &\leq \int_{E_\alpha\cap[x,\,x+1]} |f(x+\tau)-f(x)|_{\mathbb{E}}dx + \int_{E_\alpha^c\cap[x,\,x+1]} |f(x+\tau)-f(x)|_{\mathbb{E}}dx \\ &\leq \frac{\delta}{\alpha(\alpha-\delta)} + 2\mu(E_\alpha^c \cap [x, x+1]).\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, par la propriété (1.4) on peut choisir α aussi petit de sorte que :

$$2\mu(E_\alpha^c \cap [x, x+1]) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Choisissons δ par la condition

$$\frac{\delta}{\alpha(\alpha-\delta)} < \frac{\epsilon}{2},$$

ainsi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |f(x+\tau)-f(x)|_{\mathbb{E}}dx < \epsilon,$$

par conséquent, τ est une S-ϵ presque période de f.

Il reste à montrer que f n'est pas uniformément continue. Par la continuité de g, soient x_n et x_n' deux suites positives telles que

$$g(x_n) = \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}; \qquad g(x_n') = \frac{1}{n\pi},$$

telles que

$$|x_n' - x_n|_{\mathbb{E}} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

On suppose le contraire, c'est à dire que f est uniformément continue. Seulement, on a

$$|f(x_n) - f(x_n')|_{\mathbb{E}} = \left|\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi - \sin n\pi\right|_{\mathbb{E}} = 1,$$

alors que

$$|x_n - x_n'|_{\mathbb{E}} \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

donc, f ne peut pas être uniformément continue.

Exemple 1.2.4 ([12]). Soit La fonction h définie par :

$$h(x) = g^2(x)\sin\left(\frac{1}{g(x)}\right),$$

avec g la même fonction que dans l'exemple précédent.

h est continue, bornée et Stepanov presque périodique comme produit de deux fonctions Stepanov presque périodique, la dérivée de h est donnée par

$$h'(x) = g'(x)\left[2g(x)\sin\left(\frac{1}{g(x)}\right) - \cos\left(\frac{1}{g(x)}\right)\right],$$

qui est Stepanov presque périodique comme produit de

$$g'(x) = -\sin x - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x),$$

et

$$2g(x)\sin\left(\frac{1}{g(x)}\right) - \cos\left(\frac{1}{g(x)}\right),$$

ce qui veut dire que h est elle même uniformément presque périodique déduction faite à partir de la deuxième conséquence du théorème de Bohl-Bohr-Amerio.

1.3 Fonctions presque périodiques dans le cadre discret

1.3.1 Les suites presque périodiques de Bohr

Dans cette section, nous nous intéressons à la notion de fonctions uniformément presque périodiques définies sur $\mathbb{Z}$, dite aussi suites presque périodiques valeurs dans un espace de Banach. Cette notion a été initié en 1928 par A. Walther dans le cas de suites réelles ou complexes, et indépendamment par K. Fan en 1942 dans le cas de suites qui sont à valeurs dans un espace de Banach. Cette notion développée récemment par de nombreux auteurs tel que Corduneanu et d'autres, a réussi à s'imposer dans divers domaines de sciences appliquées grâce aux modèles mathématiques discrets.

Définition 1.3.1. Une suite $\underline{x} : \mathbb{Z} \to \mathbb{E}^{\mathbb{Z}}$ est dite uniformément presque périodique si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier positif $N = N(\epsilon)$ (appelée longueur d'inclusion) tel que tout ensemble de N entiers consécutifs $\{m, \dots, m+N\}$ contienne $p \in \{m, \dots, m+N\}$, satisfaisant

$$|\underline{x}_{n+p} - \underline{x}|_{\mathbb{E}} < \epsilon,\, k \in \mathbb{Z},$$

p est appelée une ϵ-presque période de la suite $\underline{x}$.

Définition 1.3.2. Une suite est dite normale ou elle vérifie le critère de Bochner si pour toute suite d'entiers $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous suite $(m_{k_j})_j$ telle que la suite $(U_{n+m_{k_j}})_{j>0}$ converge uniformément.

On peut à partir de $\underline{x}$ définir son interpolée $f_{\underline{x}} : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ par :

$$\forall \in \mathbb{Z}, \forall\theta \in [0, 1],\, f_{\underline{x}}(k+\theta) = x_k + \theta(x_{k+1} - x_k).$$

Propriétés:[[8]]

1. $\underline{x}$ est une suite presque périodique.
2. $f_{\underline{x}}$ est presque périodique.

3. x_k est uniformément presque périodique si et seulement s'il existe une fonction presque périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$, $f(k) = x_k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ appelée l'extension linéaire de la fonction f.
4. Pour $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, toute suite de translations $\{x_k + m_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ contient une sous suite $\{x_k + m_{l_i}\}_{l\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément.

Démonstration. On montre le troisième point.
Nécessité : Supposons que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est presque périodique.

$$f(k) = x_k + (h-k)(x_{k+1} - x_k),\ h \in [k, k+1] \text{ et } k \in \mathbb{Z}.$$

Évidement , f est continue sur $\mathbb{R}$, nous allons montrer qu'elle est Bohr presque périodique La presque périodicité de x entraîne par définition que pour tout $\epsilon > 0$, il existe N entiers consécutifs qui contiennent une ϵ-presque période de la suite x, p satisfaisant :

$$|x_{n+p} - x|_{\mathbb{E}} < \epsilon,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

Remarquons que si $h \in [k, k+1[$, alors $h + p \in [k+p, k+p+1[$ et la valeur de la fonction f au point $h + p$ est

$$f(h+p) = x_{p+k} + (h-k)(x_{p+k+1} - x_{p+k}).$$

En tenant compte du fait que $(h-k) \in [0, 1[$ et de l'inégalité 1.6, on obtient :

$$\begin{aligned}
|x(h+p) - x(h)|_{\mathbb{E}} &= |x_{p+k} + (h-k)(x_{n+p+1} - x_{p+k}) - [x_k + (h-k)(x_{k+1} - x_k)]|_{\mathbb{E}} \\
&= |x_{p+k} - x_k + (h-k)[(x_{n+p+1} - x_{p+k}) - (x_{k+1} - x_k)]|_{\mathbb{E}} \\
&= |x_{p+k} - x_k| + |(h-k)|\,|[(x_{n+p+1} - x_{p+k}) - (x_{k+1} - x_k)]|_{\mathbb{E}} \\
&= |x_{p+k} - x_k| + |(x_{n+p+1} - x_{p+k})| + |(x_{k+1} - x_k)|_{\mathbb{E}} \\
&= 3\epsilon
\end{aligned}$$

cela signifie que p est une ϵ-translation associée à la longueur d'inclusion N. Donc, f est Bohr presque périodique.

Inversement, soit f presque périodique, nous allons utiliser le critère de Bochner pour montrer que la suite $(f(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est presque périodique.
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$, il existe une sous suite $(U_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ ou encore, la suite $((U_{n_k})_{k\in\mathbb{N}})$ de $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, telle que la suite $f(U_{n_k} + m)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{Z}$, ce qui signifie que $f(m))_{m\in\mathbb{Z}}$ est presque périodique. □

Discrétisation de fonctions presque périodiques

Définition 1.3.3 ([20]). La discrétisation d'une fonction f est une suite de la forme $f(ak+b)_{k\in\mathbb{Z}}$, avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.3.1 ([20], [1]). On a les assertions suivantes :

- la fonction f est Bohr presque périodique, toutes ses discrétisations sont (Bohr)-presque périodique.
- l'ensemble des nombres entiers d'ϵ-translations sont les mêmes pour une fonction et sa discrétisée canonique. De ce fait, ceux de $\underline{x}$ et $f_{\underline{x}}$ sont les mêmes.
- **On notera que les liens entre continu et discret sont surtout dans ce sens :** Lorsqu'une suite est presque périodique (au sens de Bohr ou de Stepanov), elle est en particulier la discrétisée d'une fonction presque périodique. (au sens de Bohr).
- Lorsque $a = 1$ et $b = 0$, on parle de discrétisation canonique.

Exemple 1.3.1. f définie dans l'exemple 1.2.2 est une fonction purement Stepanov presque périodique qui a une discrétisation Stepanov presque périodique et une autre non Stepanov presque périodique.

Une première discrétisation : considérons la suite $f(k)_{k\in\mathbb{Z}}$, où

$$f_m(m(2k+1)) = 1, \textit{ pour } m \in \mathbb{N} \textit{ et } k \in \mathbb{Z}.$$

On obtient

$$f_m(1) = 1, \quad f_m(6) + f_{2m}(6) = 2,$$
$$f_m(20) + f_{2m}(20) + f_{2^2m}(20) = 3, \cdots .$$

En général :

$$\sum_{j=0}^{k} f_{2^jm}(2^k(2k+1)) = k+1, \text{ pour tout } k,\, m \in \mathbb{N}.$$

f est positive, donc pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut voir que

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} f(k) &= \limsup_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(k) \\
&\geq \limsup_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} f_{2^jm}(k) \\
&\geq \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} f_{2^jm}(2^k(2k+1)) = \lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty.
\end{aligned}$$

D'où la discrétisée $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de f qui est une fonction non Stepanov presque périodique.

Une deuxième discrétisation : considérons une autre discrétisation de f définie par $\left\{f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$. On montrera qu'elle est constante, donc Stepanov presque périodique

$$f(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_n(x - y_{n,k}).$$

φ_n définie comme suit :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{2(x+\epsilon_n)^2}{\epsilon_n^2}, & \text{pour } x \in \left(-\epsilon_n, \frac{\epsilon_n}{2}\right], \\ 1 - \frac{2x^2}{\epsilon_n^2}, & \text{pour } x \in \left(\frac{-\epsilon_n}{2}, \frac{\epsilon_n}{2}\right], \\ \frac{2(x-\epsilon_n)^2}{\epsilon_n^2}, & \text{pour } x \in \left(\frac{-\epsilon_n}{2}, \epsilon_n\right], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On pose $\overline{x} = \frac{1}{2} + p, p \in \mathbb{Z}$. Si $\varphi_n(\overline{x} - y_{n,k}) \neq 0$, alors $|\overline{x} - y_{n,k}| < \epsilon_n$, donc $d(\overline{x},\mathbb{Z})) < \epsilon_n$, mais $d(\overline{x},\mathbb{Z}) = \frac{1}{2} > \epsilon_n$, et on a $\varphi_n(\overline{x} - y_{n,k=}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout entier positif n. Ainsi, $f(\overline{x}) = 0$ pour $p \in \mathbb{Z}$ et on obtient $f(\frac{1}{2} + p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1.3.2. On considère la fonction f définie dans l'exemple 1.2.3, f est une fonction Stepanov presque périodique dont la discrétisée $\left\{f(\pi\left(k + \frac{1}{2}\right))\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$,

$$\begin{aligned} f\left(\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) &= \sin\left(\frac{1}{2 + \sin(k\pi) + \cos\left(\sqrt{2}\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{2 + \cos\left(\sqrt{2}\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)}\right), \end{aligned}$$

est uniformément presque périodique.

Comme $g_0(x) = 2 + \cos\sqrt{2}x \geq 1$ est une fonction $\sqrt{2}\pi$ périodique, donc $\left(\frac{1}{g_0(x)}\right)$, par définition sa discrétisation est aussi uniformément presque périodique.

Comme les valeurs de $f(x) = \sin\left(\frac{1}{g(x)}\right)$ et $\sin\left(\frac{1}{g_0(x)}\right)$ coïncident pour $x = \pi(k + \frac{1}{2})$, $k \in \mathbb{Z} \cdots$, $\left\{f\left(\pi(k + \frac{1}{2})\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est presque périodique.

Chapitre 2

Problème d'existence de solutions purement Stepanov presque périodiques des équations différentielles

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux oscillations presque périodiques de Stepanov introduites par J. Andres et D. Pennequin dans les articles (voir [12], [13]). Nous présenterons et développerons l'essentiel des résultats obtenus par les auteurs entre autres :

- L'étude de la notion de presque périodicité de Stepanov dans le cadre discret dont ils montrent qu'elle est équivalente à la notion de Bohr.
- Le lien entre suites et fonctions presque périodiques au sens de Stepanov.
- Le lien entre la nature d'une solution d'un système en temps continu et sa discrétisée canonique, problème déjà initié par Meisters, théorème 2.1.
- Non existence de solutions purement Stepanov à une équation différentielle non linéaire via l'opérateur de Nemytskii.

2.1 Les oscillations presque périodiques de Stepanov et leurs discrétisations

Commençons par énoncer le résultat de Meisters

Théorème 2.1 ([18]). *Soit $x(\cdot)$ le vecteur solution de l'équation différentielle*

$$x' = F(t,x) \tag{2.1}$$

avec :

1. *Soit x appartient à l'ouvert $D \subset \mathbb{C}^n$ qui est un espace vectoriel complexe de dimension n muni de la norme euclidienne.$F(\cdot,x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ est une fonction presque périodique,*
2. *$F(t,\cdot) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est lipscthitzienne i.e.*

$$|F(t,x) - F(t,y)|_{\mathbb{E}} \leq L|x-y|_{\mathbb{E}},\ x,y \in D,\ t \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}^+.$$

Et soit D contenant la fermeture de l'image de $x(\cdot)$. une condition nécessaire et suffisante pour que $x(\cdot)$ soit uniformément presque périodique à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ est telle que $\{x(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ soit une suite uniformément presque périodique dans $\mathbb{C}^n$.

Andres et Pennequin ont généralisé ce théorème de deux manières différentes.
Une première généralisation dans le cadre général de la fonction $x' = F(t,x)$, une deuxième généralisation dans le cadre de l'équation (2.4).

2.1.1 Étude des suites Stepanov presque périodiques

Nous allons expliquer ici que les suites Stepanov presque périodique sont en fait Bohr presque périodique. Définissons un analogue discret de la norme de Stepanov par:

$$\|\underline{x}\|_{S^1_T} := \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{1+T} \sum_{k=n}^{n+T} |x_k|_{\mathbb{E}} \right) \in [0,\infty], \text{ pour } T \in \mathbb{N}.$$

Nous constatons que $\|\underline{x}\|_{S^1_0} = \|\underline{x}\|_\infty$
posons

$$S^1_T = \{\underline{x} |\ \|\underline{x}\|_{S^1_T} < \infty\}.$$

Soit $f \in L^1_{loc(\mathbb{R},\mathbb{E})}$, nous rappelons ici l'expression de la norme de Stepanov, et nous introduisons une autre norme où la borne supérieure est seulement prise sur $\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{S^1_1} &= \sup_{a\in\mathbb{R}} \left(\int_a^{a+1} |f(t)|_{\mathbb{E}} dt \right) \in [0,\infty], \\ \|f\|^1_{S_{1,\mathbb{Z}}} &= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_n^{n+1} |f(t)|_{\mathbb{E}} dt \right) \in [0,\infty] \end{aligned}$$

et nous définissons les espaces S^1_1 et $S_{1,\mathbb{Z}^1}$ par :

$$S^1_1 = \{f |\ \|f\|_{S^1_1} < \infty\} \quad et \quad S^1_{1,\mathbb{Z}} = \{f |\ \|f\|_{S^1_{1,\mathbb{Z}}} < \infty\}.$$

L'espace S^1_1 (resp. $S^1_{1,\mathbb{Z}}$) muni de $\|.\|_{S^1_1}$ (resp.$\|.\|_{S^1_{1,\mathbb{Z}}}$), est un espace vectoriel normé.

Le point crucial est le lemme suivant :

Lemme 2.1.1 ([12]). *Pour tout $\underline{x} \in \mathbb{E}^{\mathbb{Z}}$, $T \in \mathbb{N}$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$:*

1. $\|\underline{x}\|_{S^1_0} = \|\underline{x}\|_\infty$;
2. $\left(\frac{1}{T+1}\right) \|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_{S^1_T} \leq \|\underline{x}\|_\infty$;
3. $\|f\|_{S^1_{1,\mathbb{Z}}} \leq \|f\|_{S^1_1} \leq 2\|f\|_{S^1_{1,\mathbb{Z}}}$;
4. $\|f\|_{S^1_1} \leq \|f\|_\infty$;
5. $\|f_{\underline{x}}\|_\infty = \|\underline{x}\|_\infty$.

Démonstration. 1. On a

$$\sum_{k=n}^{n+T} |x_k|_{\mathbb{E}} = \sum_{k=1}^{1+T} |x_k|_{\mathbb{E}} + \sum_{k=2}^{2+T} |x_k|_{\mathbb{E}} + \dots,$$

il suffit de remplacer dans l'expression de la norme, $T = 0$ on obtient le résultat.

2. On montre la première partie de l'inégalité $\left(\frac{1}{T+1}\right) \|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_{S_T^1}$
cela revient à montrer

$$\|\underline{x}\|_\infty \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=n}^{n+T} |x_k|_{\mathbb{E}},$$

soit $|x_j|_{\mathbb{E}} = \max |x_i|_{\mathbb{E}} = \|\underline{x}\|_\infty$, $i \in \mathbb{N}$
Alors,

$$|x_j|_{\mathbb{E}} \leq \sum_{k=j}^{T+j} |x_k|_{\mathbb{E}} \quad \text{(tout les termes sont positifs)} .$$

On montre la deuxième partie de l'inégalité

$$\|\underline{x}\|_{S_T^1} \leq \|\underline{x}\|_\infty,$$

cela revient à montrer

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=n}^{n+T} |x_k|_{\mathbb{E}} \leq (T+1)\|\underline{x}\|_\infty,$$

soient

$$|x_j|_{\mathbb{E}} = \sum_{k=j}^{T+j} |x_k|_{\mathbb{E}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=n}^{n+T} |x_k|_{\mathbb{E}},\, n \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, n\},$$

et

$$|x_l|_{\mathbb{E}} = \|\underline{x}\|_\infty$$

on a

$$|x_j|_{\mathbb{E}} = \sum_{k=j}^{T+j} |x_k|_{\mathbb{E}} = \overbrace{|x_j|_{\mathbb{E}} + \dots + |x_{T+j}|_{\mathbb{E}}}^{T+1 \text{ termes}} \leq (T+1)|x_l|_{\mathbb{E}} = (T+1)\|\underline{x}\|_\infty,$$

car

$$|x_l|_{\mathbb{E}} \geq |x_k|_{\mathbb{E}},\, \forall k \in \{j, \dots, j+T\}.$$

3. On a

$$\|f\|_{S_1^1} = \sup_{a\in\mathbb{R}} \left(\int_a^{a+1} |f(t)|_{\mathbb{E}} dt \right).$$

$$\int_a^{a+1} \|f(t)\|_{\mathbb{E}} dt \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \int_a^{a+1} dt = \|f\|_\infty.$$

4. On montre que $\|f_{\underline{x}}\|_\infty \geq \|\underline{x}\|_\infty$.

   On a

$$f_{\underline{x}}(k+\theta) = x_k + \theta(x_{k+1} - x_k),\ k \in \mathbb{Z}, \theta \in [0,1]$$

$$\begin{aligned} \|f_{\underline{x}}\|_\infty &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|f_{\underline{x}}(k+\theta)\| \\ &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\theta x_{k+1} + (1-\theta)x_k|_{\mathbb{E}} \\ &\leq \theta \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_{k+1}|_{\mathbb{E}} + (1-\theta)\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|_{\mathbb{E}} \\ &\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|_{\mathbb{E}}. \end{aligned}$$

□

Dans le cas discret Andres et Pennequin ont donné un résultat assez surprenant précisant que la notion de presque périodicité de Bohr et de Stepanov coïncident pour tout $T \in \mathbb{N}$ c'est ce que le point (1) et (2) impliquent i.e $S^1_T = l^\infty$, et que les normes ci-dessus définies sur S^1_T et l^∞ sont équivalentes.

De plus, (3) assure que $S^1_1 = S^1_{1,\mathbb{Z}}$ vu le lien qu'on souhaite faire entre temps discret et temps continu pour les oscillations Stepanov presque périodiques.

La proposition suivante rend plus précis ces liens avec la fonction $f_{\underline{x}}$.

Proposition 2.1.1 ([12]). *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $\underline{x} \in l^\infty$
2. $\underline{x} \in S^1_T$, *pour tout* $T \in \mathbb{N}$;
3. $\underline{x} \in S^1_T$, *pour un* $T \in \mathbb{N}$;
4. $f_{\underline{x}} \in S^1_1$;
5. $f_{\underline{x}} \in S^1_{1,\mathbb{Z}}$;
6. $f_{\underline{x}} \in L^\infty$.

De plus, toutes les normes $\|.\|_\infty$, $\|.\|_{S^T_1}$, $\underline{x} \to \|f_{\underline{x}}\|_\infty$, $\underline{x} \to \|f_{\underline{x}}\|_{S^1_1}$ *sont équivalentes.*

Démonstration. On montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\underline{x} \in \mathbb{E}^{\mathbb{Z}}$,

$$\|f_{\underline{x}}\|_{S^1_{1,\mathbb{Z}}} \geq C\|f_{\underline{x}}\|_\infty.$$

Ce qui permettra d'écrire :

$$C\|f_{\underline{x}}\|_\infty \leq \|f_{\underline{x}}\|^1_{S_{1,\mathbb{Z}}} \leq \|f_{\underline{x}}\|_{S^1_1} \leq 2\|f_{\underline{x}}\|^1_{S_{1,\mathbb{Z}}} \leq 2\|f_{\underline{x}}\|_\infty = 2\|\underline{x}\|_\infty$$

Le résultat sera alors vérifié.
Cherchons la valeur de C, fixons $n \in \mathbb{Z}$,
Nous avons

$$\int_n^{n+1} |f_{\underline{x}}(t)|_{\mathbb{E}} dt = \int_0^1 |(1-\theta)x_n + \theta x_{n+1}|_{\mathbb{E}} d\theta \geq \int_0^1 |(1-\theta)|x_n|_{\mathbb{E}} - \theta|x_{n+1}||_{\mathbb{E}} d\theta.$$

Posons $u = |x_n|_{\mathbb{E}}$, $v = |x_{n+1}|_{\mathbb{E}}$, nous avons $(u, v) \in (\mathbb{R}^+)^2$,
et comme

$$\begin{aligned} \int_0^1 |(1-\theta)u - \theta v|_{\mathbb{E}} d\theta &= \int_0^1 |u - \theta(u+v)|_{\mathbb{E}} d\theta. \\ &= \int_0^{\frac{u}{u+v}} u - \theta(u+v) d\theta + \int_{\frac{u}{u+v}}^1 -(u - \theta(u+v)) d\theta \\ &= \frac{u^2+v^2}{2(u+v)}. \end{aligned}$$

Nous supposons que $u \geq v$, donc $u^2 + v^2 \geq u^2$, $4u \geq 2u + 2v$,
d'où

$$\int_0^1 |(1-\theta)u - \theta v|_{\mathbb{E}} d\theta \geq \frac{u}{4};$$

ce qui donne

$$\int_n^{n+1} |f_{\underline{x}}(t)|_{\mathbb{E}} dt \geq \frac{\max\{|x_n|_{\mathbb{E}}, |x_{n+1}|_{\mathbb{E}}\}}{4}.$$

Nous considèrons la norme infinie

$$\|f_{\underline{x}}\|_{S^1_{1,\mathbb{Z}}} \geq \frac{1}{4}\|\underline{x}\|_\infty = \frac{1}{4}\|f_{\underline{x}}\|_\infty.$$

Alors, pour $C = \frac{1}{4}$:

$$\|f_{\underline{x}}\|_{S^1_{1,\mathbb{Z}}} \geq \frac{1}{4}\|f_{\underline{x}}\|_\infty.$$

□

La proposition précédente induit la conséquence suivante qui dit que la notion de suite presque périodique. au sens de Stepanov est équivalente à la notion de suite presque périodique. au sens de Bohr. De plus, ce lien se lit également sur la fonction $f_{\underline{x}}$ puisque pour elle, être Stepanov ou Bohr presque périodique c'est équivalent :

Conséquence 2.1.1.

$$\begin{aligned} \underline{x} \text{ est Stepanov-p.p.} &\Leftrightarrow \underline{x} \text{ est Bohr-p.p.} \\ &\Leftrightarrow f_{\underline{x}} \text{ est Stepanov-p.p.} \\ &\Leftrightarrow f_{\underline{x}} \text{ est Bohr-p.p.} \end{aligned}$$

Démonstration. Pour $f_{\underline{x}}$ le fait d'être stepanov implique son coté (uniformément) bornée et donc lipschitzienne vue sa construction; or toute fonction Stepanov presque périodique et uniformément continue uniformément presque périodique. □

Remarque 2.1.1. On peut dire que $\underline{x}$ est S^1_T presque périodique si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier positif $N = N(\epsilon)$ tel que tout ensemble de N entiers consécutifs $\{m, \dots, m+N\}$ contienne $p \in \{m, \dots, m+N\}$, satisfaisant

$$\|x_{n+p} - x_n\|_{S^1_T} < \epsilon,\, k \in \mathbb{Z}.$$

Des conditions (1) et (2) du lemme 2.1.1 les normes $\|.\|_\infty$, $\|.\|_{S^1_1}$, $\|.\|_{S^1_T}$ sont équivalentes, donc la définition ne change pas si on utilise l'une de ces trois normes. De plus,

$$\forall (k,p) \in \mathbb{Z}^2,\, f_{\underline{x}(.+p)-\underline{x}}(k) = f_{\underline{x}}(k+p) - f_{\underline{x}_p}(k) = x_{k+p} - x_k.$$

On obtient la même définition avec les normes $x \to \|f_{\underline{x}}\|_\infty$, $x \to \|f_{\underline{x}}\|_{S^1_1}$,

2.2 Généralisations du théorème de Meisters

2.2.1 La première généralisation du théorème de Meisters

La première manière de généraliser Le théorème 2.1 est la suivante :

Théorème 2.2.1. *Soit $x(\cdot) \in AC_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ la solution de l'équation différentielle (2.4) dans un espace de Banach $\mathbb{E}$ de dimension finie, où*

- *$F(\cdot, x) : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ une fonction essentiellement bornée au sens de la norme $\|\cdot\|_{S^p}$. Pour tout sous ensemble ouvert D de $\mathbb{E}$.*
- *$F(t, \cdot) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ satisfaisant, pour tout $x,y \in D$, la condition de Lipschitz*

$$|F(t,x) - F(t,y)|_{\mathbb{E}} \leq L|x-y|_{\mathbb{E}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Et soit D contient la fermeture de l'image de $x(.)$. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que $x(.)$ soit une solution uniformément presque périodique de (2.1) à valeurs dans $D \subset \mathbb{E}$ est que $\{x(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ soit une suite uniformément presque périodique dans $D \subset \mathbb{E}$.

Pour démontrer ce théorème on aura besoin de ces deux lemmes:

Lemme 2.2.1 ([18]). *Soit $C \subset D$, et $F(t,x)$ une fonction définit sur C^n, si x est restreint à C, on dira que est une famille de fonctions uniformément continues presque périodiques dans C^n*

Lemme 2.2.2 ([18]). *Si $x(k)$ est une suite presque périodique dans $\mathbb{E}$. Pour tout nombre réel positif ϵ, l'ensemble des $\epsilon-$translations communes à $x(k)$ et toutes les fonctions de la famille $\{F(t,x),\, x \in C \subset D\}$ est relativement dense.*

Démonstration. On suppose que $\{x(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite presque périodique dans $\mathbb{E}$ et que $x(t)$ satisfait l'équation différentielle (2.1) pour tout $t \in \mathbb{R}$, on montre que $x(t)$ est uniformément presque périodique, on pose R l'image de $x(t)$.
Premièrement, on montre que l'image de $x(t)$, R est bornée, on a

$$|x(t)|_{\mathbb{E}} \leq |x(t) - x(k)|_{\mathbb{E}} + \sup_{i\in\mathbb{Z}} |x(i)|_{\mathbb{E}}. \tag{2.2}$$

$\sup |x_i|_{\mathbb{E}} < \infty$, car toute suite presque périodique est bornée. De plus,

$$\begin{aligned} |F(t,x(k))|_{\mathbb{E}} &\leq |F(t,x(k)) - F(t,x(0))| + |F(t,x(0))|_{\mathbb{E}} \\ &\leq L \sup_k |x(k) - x(0)|_{\mathbb{E}} + \sup_i |F(t,x(0))|_{\mathbb{E}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$|F(t,x(k))|_{\mathbb{E}}$ est bornée, $\forall k \in \mathbb{Z}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle peut s'écrire sous la forme de Newton-Leibnitz

$$x(t) = x(0) + \int_0^t F(s,x(s))ds$$

On utilise (2.3), on pose $M = \sup_{k,t} |F(t,x(k))|_{\mathbb{E}}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $k \leq t \leq k+1$

$$\begin{aligned} |x(t) - x(k)|_{\mathbb{E}} &\leq \left| \int_k^t F(s,x(s))ds - \int_k^t F(s,x(k))ds \right|_{\mathbb{E}} \\ &+ \left| \int_k^t F(s,x(k))ds \right|_{\mathbb{E}} \\ &\leq L \int_k^t |x(s) - x(k)|_{\mathbb{E}} ds + M. \end{aligned}$$

en vertu de l'inégalité de Gronwall, on aura

$$|x(t) - x(k)|_{\mathbb{E}} \leq M \exp(L) \text{ pour } k \leq t \leq k+1$$

Deuxièmement, on montre que $x(t)$ est uniformément presque périodique sachant que $x(k)$ est uniformément presque périodique. Pour $x \in \overline{R} \subset D$ ($\overline{R}$ bornée comme fermeture de R qui est bornée, comme $\mathbb{E}$ est de dimension finie, $\overline{R} \subset D$ est compacte), en utilisant le lemme 2.2.1, $F(t,x)$ est uniformément continue dans $\mathbb{E}$. Par le lemme 2.2.2, on prend τ une $\epsilon-$translation commune à $x(k)$ et toutes les fonctions de la famille $\{F(t,x),\, x \in \overline{R} \subset D\}$, pour $t \in \mathbb{R}$, on prend $k = [t]$ (la partie entière de t),

$$\begin{aligned} |x(t+\tau) - x(t)|_{\mathbb{E}} &= \left| \int_0^{t+\tau} F(s,x(s))ds - \int_0^t F(s,x(s))ds \right|_{\mathbb{E}} \\ &= \int_0^{k+\tau} [F(s,x(s))]ds - \int_0^k [F(s,x(s))]ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \int_{k+\tau}^{t+\tau}[F(s,x(s))]ds - \int_{k}^{t}[F(s,x(s))]ds|_{\mathbb{E}} \\
&\leq |x(k+\tau)-x(k)|_{E} + \int_{k}^{t}|F(s+\tau,x(s+\tau)) - F(s,x(s+\tau))|_{\mathbb{E}}ds \\
&+ \int_{k}^{t}|F(s,x(s+\tau)) - F(s,x(s))|_{\mathbb{E}}ds \\
&= (I)+(II)+(III)
\end{aligned}$$

on a

Premièrement $(I) \leq \epsilon$, $x(k)$ est presque périodique

Deuxièmement $(II) \leq \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{t}^{t+1}|F(s+\tau,x(s+\tau)) - F(s,x(s+\tau))|_{\mathbb{E}}ds$, car $k=[t]$

Troisièmement $(III) \leq L\int_{k}^{t}|x(s+\tau)) - x(s)|_{\mathbb{E}}ds$, car $F(t,\cdot)$ est Lipschitzienne

donc, en utilisant le lemme de Gronwall,

$$\begin{aligned}
|x(t+\tau)-x(t)|_{\mathbb{E}} &\leq \epsilon + \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{t}^{t+1}|F(s+\tau,x(s+\tau)) - F(s,x(s+\tau))|_{\mathbb{E}}ds \\
&+ L\int_{k}^{t}|x(s+\tau)-x(s)|_{\mathbb{E}}ds \\
&\leq 2\epsilon\exp(L).
\end{aligned}$$

$x(t)$ est presque périodique, on dira que τ est une $2\epsilon\exp(L)$ presque période de $x(t)$. □

2.2.2 La deuxième généralisation du théorème de Meisters

Considérons un cas particulier de l'équation $x' = F(t,x)$ qui est :

$$x' = \varphi(x) + p(t) \tag{2.4}$$

avec φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $p \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, x une solution qui est bien entendu une fonction localement absolument continue i.e. $x \in AC^p_{loc} \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Lorsque $p \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, on obtient la notion classique de solution i.e. $x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Comme conséquence de la propriété de Bohl-Bohr-Amerio, on a les deux propositions suivantes :

Proposition 2.2.1. *Toute solution $x(\cdot)$ Stepanov presque périodique de l'équation* (2.4) *est uniformément presque périodique si l'une des propriétés suivantes est satisfaite :*

1. *φ est bornée et p essentiellement bornée ;*
2. *x est bornée et p est essentiellement bornée ou Stepanov presque périodique.*

Démonstration. La bornitude des deux fonctions φ, p implique que x' l'est aussi, et donc $x(.)$ **est uniformément continue** ce qui implique que $x(.)$ est uniformément presque périodique. La bornitude de $x(.)$ implique que $\varphi(x(.))$ est aussi uniformément presque périodique. Ainsi, si p est Stepanov presque périodique et non essentiellement bornée, de la conséquence 2 de la propriété de Bohl-Bohr-Amerio, on déduit que toute solution $x(.)$ Stepanov presque périodique bornée est uniformément presque périodique. □

Remarque 2.2.1. 1. L'équation (2.4) avec $\varphi(x) = 0$ et $p(t) = h'(t)$, (h est la fonction définie dans l'exemple 1.2.4 a comme solution la fonction $h(t)$, toutes les conditions de la propositions sont vérifiée.

2. L'équation (2.4) avec $\varphi(x) = -x$ et $p(t) = h(t) + h'(t)$ a la même solution $h(t)$, les deux dernières conditions sont vérifiées.

Proposition 2.2.2. *Pour avoir une solution purement Stepanov presque périodique de 2.1.1, il est nécessaire d'être dans l'une des trois situations suivantes :*

1. *x et φ non bornées ;*
2. *x et p non bornées ;*
3. *p est ni Stepanov presque périodique ni bornée.*

Démonstration. 1. Si x n'est pas bornée, on est dans les deux premières situations, x ne peut pas être Bohr presque périodique (de la propriété de Bohl-Bohr-Amerio) .

2. Si x est bornée
   - Si p est Stepanov presque périodique non essentiellement bornée, la dérivée x' est non essentiellement bornée, mais on a x est bornée donc, de la propriété de Bohl-Bohr-Amerio on aura que x est uniformément presque périodique.
   - si p est non Stepanov presque périodique si p est ni Stepanov presque périodique ni bornée, on est dans la troisième situation et de la propriété de Bohl-Bohr-Amerio on aura que x n'est pas uniformément presque périodique car x' n'est pas Stepanov presque périodique

□

Remarque 2.2.2. 1. L'équation (2.4) avec $\varphi \equiv 0$ et $p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(t)$ définie dans l'exemple 1.2.2 a comme solution $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ qui est purement Stepanov, on est dans la deuxième situation.

2. L'équation (2.4) avec $\varphi = -x$ et $p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) + f'_n(t)$ ayant la même solution S_{ap} $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ et on est dans la situation 1.

3. L'équation (2.4) avec $\varphi = -x$ et $p(t) = \sin\left(\frac{1}{g(t)}\right) + \cos\left(\frac{1}{g(t)}\right)\left(\frac{\sin t + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t}{g^2(t)}\right)$ avec $g(t) = 2 + \cos t + \cos\sqrt{2}t$, a une solution purement Stepanov $x(t) = \sin\left(\frac{1}{g(t)}\right)$, on est dans le cas de la troisième situation.

Le théorème suivant représente la deuxième généralisation. Selon le théorème de Milman–Pettis (voir [2], page 51), un espace de Banach uniformément convexe est réflexif. De plus, un espace de Banach réflexif admet la propriété de Radon–Nikodym (voir [19], page 694).

Théorème 2.2.2. *On suppose que $x(\cdot)$ est une solution de Caratheodory localement absolument continue (i.e. $x(\cdot) \in AC_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$) à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{E}$ satisfaisant la propriété de Radon–Nikodym (par exemple un Banach réflexif), et que :*

1. $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ est Lipschitzienne.

2. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ est Stepanov presque périodique.

Alors, pour que $x(\cdot)$ soit une solution presque périodique de (2.4), *il est nécessaire et suffisant que sa discrétisée $\{x(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ soit une suite (Stepanov) presque périodique*

Démonstration. La partie nécessaire est triviale comme conséquence de la remarque 1.3.1, la descritisée d'une fonction uniformément presque périodique est (Stepanov) presque périodique (voir la proposition 1.3.1).

La partie suffisante, l'espace $\mathbb{E}$ satisfait la propriété de Radon–Nikodym [14], donc la dérivée $x'(\cdot)$ de $x(\cdot)$ qui est une solution de Caratheodory est localement Lebesgue-Bochner intégrable et on a la formule de Newton-Leibnitz

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)ds.$$

Pour montrer que $x(\cdot)$ est uniformément presque périodique, il suffit de montrer qu'elle possède un ensemble relativement dense des ϵ-presque périodes.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on prend $k = [t]$ (la partie entière de t),

$$\begin{aligned}
|x(t+\tau) - x(t)|_{\mathbb{E}} &= \left|\int_0^{t+\tau}[\varphi(x(s)) + p(s)]ds - \int_0^t [\varphi(x(s)) + p(s)]ds\right|_{\mathbb{E}} \\
&= |\int_0^{k+\tau}[\varphi(x(s)) + p(s)]ds - \int_0^k [\varphi(x(s)) + p(s)]ds + \\
&+ \int_{k+\tau}^{t+\tau}[\varphi(x(s)) + p(s)]ds - \int_k^t [\varphi(x(s)) + p(s)]ds|_{\mathbb{E}} \\
&\leq |x(k+\tau) - x(k)|_E + \int_k^t |\varphi(x(s+\tau)) - \varphi(x(s))|_{\mathbb{E}}ds + \int_k^t |p(s+\tau) - p(s)|_{\mathbb{E}}ds \\
&\leq \|x_{.+\tau} - x\|_\infty + L\int_k^t |x(s+\tau) - x(s)|_{\mathbb{E}}ds + \int_k^{k+1} |p(t+\tau) - p(t)|_{\mathbb{E}}dt.
\end{aligned}$$

D'après la proposition 2.1.1, on déduit :

$$\|x_{.+\tau} - x\|_\infty = \|f_{\underline{x}}(.+\tau) - f_{\underline{x}}(.)\|_\infty$$

$$\leq \frac{1}{C}\|f_{\underline{x}}(.+\tau)-f_{\underline{x}}(.)\|_{S_1^1}$$
$$= 4\|f_{\underline{x}}(.+\tau)-f_{\underline{x}}(.)\|_{S_1^1},$$

de plus,

$$\int_k^{k+1}|p(t+\tau)-p(t)|_{\mathbb{E}}dt \leq \|p(t+\tau)-p(t)\|_S.$$

Donc,

$$|x(t+\tau)-x(t)|_{\mathbb{E}} \leq 4\|f_{\underline{x}}(\cdot+\tau)-f_{\underline{x}}(.)\|_S + L\int_k^t |x(s+\tau)-x(s)|_E ds + \|p(.+\tau)-p(.)\|_S,$$

comme $\underline{x} = \{x(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est Stepanov presque périodique, donc sa discrétisation canonique $f_{\underline{x}}$ est p.p, donc Stepanov presque périodique. Alors il existe un ensemble relativement dense $\{\tau\}_\infty$ des $\epsilon-$stepanov presque périodes qui sont les mêmes pour $f_{\underline{x}}$ et p, (voir [17], page 203-204). L'inégalité ci-dessus implique que

$$|x(t+\tau)-x(t)|_{\mathbb{E}} \leq 5\epsilon + L\int_k^t |x(s+\tau)-x(s)|_{\mathbb{E}} ds,$$

en vertu de l'inégalité de Gronwall, on aura

$$|x(t+\tau)-x(t)|_{\mathbb{E}} \leq 5\epsilon\exp(L),\ \forall t\in\mathbb{R},$$

de plus, on dira que τ est une $5\epsilon\exp(L)$ presque période de $x(t)$.
Le théorème est démontré. □

Remarque 2.2.3. L'équation

$$x' + x = h(t) + h'(t),$$

où, $h(t)$ est la fonction définie dans l'exemple 1.2.4, qui représente un exemple d'application du théorème précédant, la fonction $h+h'$ est une fonction Stepanov presque périodique et $x(\cdot) = h(\cdot)$ est une fonction uniformément presque périodique dont la discrétisation est uniformément presque périodique.

Remarque 2.2.4. L'équation

$$x + x' = \widetilde{f}(t) + \widetilde{f}'(t),$$

où, $\widetilde{f}(\cdot) = f\left(\cdot + \frac{1}{2}\right)$ et f est la fonction définie dans l'exemple 1.2.2, un contre exemple, il ne vérifie pas les conditions du théorème précédant car la fonction $\widetilde{f}(t) + \widetilde{f}'(t)$ n'est pas Stepanov presque périodique. D'autre part, $\widetilde{x}(\cdot) = \widetilde{f}(\cdot)$ est une fonction Stepanov presque périodique dont la discrétisation est uniformément presque périodique car $\widetilde{x}(k) = 0$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\widetilde{x}(\cdot)$ doit être (uniformément continue) presque périodique

La remarque précédente nous suggère de formuler la proposition suivante qui rend plus précis la deuxième conséquence du théorème de Bohl-Bohr-Amerio.

Proposition 2.2.3 ([12]). *Dans un espace de Banach $\mathbb{E}$ satisfaisant la propriété de Radon-Nikodym, il n'existe pas de fonction purement Stepanov $g \in AC_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ qui a au moins une discrétisation uniformément presque périodique et qui a une dérivée Stepanov presque périodique.*

Démonstration. Procédons par l'absurde.
Supposons qu'une telle fonction existe. soient $g \in AC_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ telle que $\{g(ak + b)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est Stepanov presque périodique Soit $f : x \mapsto g(ax + b)$. On peut dire que f est purement stepanov et f' est Stepanov presque périodique et sa discrétisation standard est Stepanov presque périodique.
considérons l'équation
$$x + x' = f(t) + f'(t).$$
Pour cette équation, on a $p(t) = f(t) + f'(t)$ qui est Stepanov presque périodique et $\varphi(x) = -x$ qui est lipschitzienne. Cette équation admet $x(\cdot) = f(\cdot)$ comme unique solution Stepanov presque périodique comme $\{x(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Par hypothèse du théorème précédant, on aura $x(.)$ uniformément presque périodique, ce qui est absurde.

□

Conséquence 2.2.1. *Pour avoir une solution $x(\cdot)$ purement Stepanov de l'équation (2.4) où φ et p satisfont les conditions 1 et 2 du théorème 2.2.2 aucune de ses discrétisées $\{x(ak + b)\}$ ne doit être Stepanov presque périodique (uniformément presque périodique). En particulier, si $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ de telles solutions doivent être non bornées.*

2.3 Non-existence de solutions purement Stepanov presque periodiques via l'opérateur de Nemytskii

L'objectif de cette section est d'améliorer la conséquence 2.2.1 au sens où dans des situations plus générales, et sous les mêmes hypothèses 1 et 2 du théorème 2.2.2, au moins dans un espace uniformément convexe l'équation (2.4) n'admet pas de solutions purement Stepanov.

Proposition 2.3.1 ([13]). *Soit $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, où $\mathbb{E}$ est un espace de Banach satisfaisant la propriété de Radon–Nikodym. Si f et f' sont bornées au sens de la norme de Stepanov, alors f est bornée en norme infinie. En particulier, si $f \in AC_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, où $\mathbb{E}$ est uniformément convexe, est telles que f et f' sont presque périodiques au sens de Stepanov, i.e. $f, f' \in SAP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, alors f est presque périodique au sens de Bohr.*

Démonstration. La première partie, E possède la propriété de Radon Nikodym et comme $f \in$

$AC_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ et comme la dérivé de f existe presque partout, on pourra écrire le formule

$$f(t)-f(s)=\int_s^t f'(u)du,$$

notons $k=[t]$, on a

$$|f(t)-f(k)|_{\mathbb{E}} \leq \|f'\|_{S^1}, \tag{2.5}$$

en effet,

$$|f(t)-f(k)|_{\mathbb{E}} \leq \int_k^t |f'(s)|_{\mathbb{E}} ds \leq \int_k^{k+1} |f'(s)|_{\mathbb{E}} ds \leq \|f'\|_{S^1},$$

ceci donne

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|_{\mathbb{E}} \leq \|f'\|_{S^1} + \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|_{\mathbb{E}},$$

au même temps, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(n)=\int_n^{n+1} f(n)dt=\int_n^{n+1} f(n)-f(t)dt+\int_n^{n+1} f(t)dt,$$

en utilisant l'équation (2.5), on obtient

$$\begin{aligned} |f(n)|_{\mathbb{E}} &= \int_n^{n+1} |f(n)-f(t)|_{\mathbb{E}} dt+\int_n^{n+1} |f(t)|_{\mathbb{E}} dt \\ &\leq \|f'\|_{S^1}+\|f\|_{S^1} \end{aligned}$$

ainsi, on aura

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|_{\mathbb{E}} \leq 2\|f'\|_{S^1}+\|f\|_{S^1}.$$

Pour la seconde partie, si $f \in AC_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est telles que f et f' sont simultanément Stepanov presque périodique, on voit que f est bornée et donc f est Bohr presque périodique en vertu de la propriété de Bohl-Bohr-Amerio. □

Remarque 2.3.1. Cette proposition est également valide pour $f \in SAP^{(}\mathbb{R},\mathbb{E})$ et $f' \in SAP^q(\mathbb{R},\mathbb{E})$ pour tout $p,q \geq 1$ puisque nous avons :

$$\forall p \geq 1, \|f\|_{S^1} \leq \|f\|_{S^p}.$$

On étudie l'opérateur de Nemytskii dans le cadre de Stepanov, afin d'obtenir des résultats de non existence de solutions purement Stepanov. On parle ici de l'opérateur de Nemytskii non autonome.

Proposition 2.3.2. *On suppose que*

1. $f(t,\cdot) \in L^\infty(\mathbb{E},\mathbb{E})$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.
2. $[t \mapsto f(t,\cdot)] \in SAP^q(\mathbb{R},L^\infty(\mathbb{E},\mathbb{E}))$.

Alors l'opérateur $\mathcal{N}_f = f(t,\cdot)$ *envoie* $SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ *dans* $SAP^q(\mathbb{R},\mathbb{E})$ *avec* $p,q \geq 1$.

Démonstration. Du lemme 3 de Danilov (voir[7]) on sait que si $z \in SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$, alors $\mathcal{N}_f(z) \in S_D(\mathbb{R},\mathbb{E})$, (1).
On prend maintenant

$$b(t) = \sup_{x\in\mathbb{E}} |f(t,x)|_{\mathbb{E}},$$

On obtient

$$\begin{aligned} |b(t+\tau) - b(t)| &\leq \sup_{x\in\mathbb{E}} |f(t+\tau,x) - f(t,x)|_{\mathbb{E}} \\ &\leq \|f(t+\tau,\cdot) - f(t,\cdot)\|_\infty \end{aligned}$$

Ainsi, si τ est une $\epsilon-$ translation de $F = [t \to f(t,\cdot)]$, on a

$$\|b(t+\tau) - b(t)\|_{S^p} \leq \|F(\cdot+\tau) - F(\cdot)\|_{S^p} \leq \epsilon.$$

Qui vérifie que $b \in SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$, ce qui implique que $\mathcal{N}_f(z) \in M'_q(\mathbb{R},\mathbb{E})$ (2), comme

$$\int_T |f(t,z(t))|^q_{\mathbb{E}} dt \leq \int_T |b(t)|^q_{\mathbb{E}} dt.$$

(1) et (2) implique que

$$\mathcal{N}_f(z) \in SAP^q(\mathbb{R},\mathbb{E})$$

□

Théorème 2.3.1 ([13]). *On suppose que l'opérateur de Nemytskii* $\mathcal{N}_f$ *envoie* $SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ *dans* $SAP^q(\mathbb{R},\mathbb{E})$*, où* $\mathbb{E}$ *un espace Banach uniformément convexe et* $p,q \geq 1$. *Alors toute solution de* $x' = F(t,x)$ *qui est dans* $SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ *est Bohr presque périodique*

Démonstration. La dérivée d'une solution $x(\cdot) \in SAP^p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ sera dans $SAP^q(\mathbb{R},\mathbb{E})$. De la remarque 2.3.1 on dira que $x(\cdot)$ et $x'(\cdot)$ sont dans $SAP(\mathbb{R},\mathbb{E})$, en appliquant la deuxième partie de la proposition 2.3.1, on déduit que la solution $x(\cdot)$ rst uniformément presque périodique. □

Exemple 2.3.1. L'opérateur de nemytskii construit sur l'équation $F(x,t) = \varphi(x) + p(t)$, $\varphi(x)$ lipschitzienne et p est Stepanov presque périodique envoie l'espace $SAP(\mathbb{R},\mathbb{E})$ en lui même. Il n'y aura donc pas de solutions purement Stepanov.

Appendice

.1 Propriété de Radon-Nikodym

Le théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue est un théorème d'analyse, une branche des mathématiques qui est constituée du calcul différentiel et intégral et des domaines associés.

Définition .1.1. Soit $(\mathbb{E}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que la mesure μ est σ-finie lorsqu'il existe un recouvrement dénombrable de $\mathbb{E}$ par des sous-ensembles de mesure finie, c'est-à-dire lorsqu'il existe une suite $(\mathbb{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$, tous de mesure finie, avec

$$\mathbb{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}_n.$$

Définition .1.2. Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(\mathbb{E}, \mathcal{A})$. On dit que ν est absolument continue par rapport à μ, et on note $\nu \ll \mu$, si pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Théorème .1.1 (théorème de Radon Nikodym). *Un espace de Banach $\mathbb{E}$ admet la propriété de Radon Nikodym si pour tout espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et toute mesure $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{E}$ a variation bornée telle que $\nu \ll \mu$, on peut trouver $f \in L^1(\Omega, \mathbb{E})$ telle que*

$$\nu(A) = \int_A f(x)d\mu \text{ pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

f est appelée la dérivée de Radon Nikodym et est noté par $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Exemple .1.1. Si $f : (\mathbb{E}, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ est mesurable alors la mesure de ν de densité f par rapport à μ définie par

$$\nu(A) = \int_{\mathbb{E}} \mathbb{I}_A f d\mu.$$

On note souvent $f\frac{d\nu}{d\mu}$ et on l'appelle dérivée de Radon-Nikodym en référence au théorème qui établit la réciproque de ce théorème qui établit la réciproque de cet exemple sous la condition que μ et ν sont toutes deux $\sigma-$finies.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au problème d'existence de solutions purement Stepanov presque périodiques des equations différentielles. Ce problème a été consigné dans les travaux de Andres et Pennequin [12, 13] où ils ont montré que de telles solutions n'existent pas. A la lumière de cette étude, nous avons vu que pour avoir des solutions purement Stepanov presque périodique, sous des hypothèses naturelles imposées sur le côté de droite telles que Lipschitz en la variable espace et la Stepanov presque périodicité en la variable temps, aucun de ses discrétisation ne doit être (Stepanov) presque périodique. Au moins dans les espaces euclidiens, ces solutions doivent être, sous les mêmes conditions, non bornées.

Les perspectives ouvertes par ce travail s'orientent vers l'étude des systèmes dynamiques régis par des équations différentielles ou équations aux différences ayant des solutions purement Stepanov presque périodiques où il est question de caractériser les équations ayant des solutions purement Stepanov presque périodiques. Une autre perspective de recherche consiste à interpréter le problème des oscillations dans le cas stochastique.

Bibliographie

[1] A. S. Besicovitch. *Almost periodic functions.* Dover Publications, 1954.

[2] H. Brezis. *Analyse onctionnelle théorie et application.* Masson, 2 edition, 1987.

[3] P. Cieutat. *Solutions presque-p ´eriodiques d'équations d'évolution et de systèmes non linéaires.* PhD thesis, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne, 1996.

[4] R. L. Cooke. Almost-periodic functions. *Mathematical Association of America*, 88(7):515–526, 1981.

[5] C. Corduneanu. Some almost periodicity criteria for ordinary differential equations. *Libertas Mathematica 3*, 3:21–43, 1983.

[6] C. Corduneanu. Almost periodic solutions to differential equations in abstract spaces. *spaces. Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 42(9-10):753–758, 1997.

[7] L. I. Danilov. Measure-valued almost periodic functions and almost periodic selections of multivalued maps. *Sb. Math*, 188(10):3–24, 1979.

[8] A. M. Fink. *Almost periodic differential equations.* Lecture notes in mathematics, 377. Springer-Verlag, 1974.

[9] D. Giraudo. Fonctions presque périodiques. Technical report, Univérsité de Rouen, 2011.

[10] A. Haraux. Asymptotic behavior of two-dimensional, quasi-autonomous, almost-periodic evolution equations. *Journal of Differential Equations*, 66(5):62–70, 1987.

[11] A. M. Bersani J. Andres. Almost - periodicity problem as a fixed- point problem for evolution inclusions. *Topol. Meth. Nonlin. Anal*, 18:337–349, 2001.

[12] D. Pennequin J. Andres. *On Stepanov almost periodic oscillations and their discretizations. Journal Of Difference Equations And Applications*, 18:1665–1682, 2012.

[13] D. Pennequin J. Andres. On the non existence of purely almost periodic solutions of ordinary differential equations. *Proc. American Mathematical society*, 140:2825–2834, 2012.

[14] L. Górniewicz J. Andres. *Topological fixed point principles for boundary value problems.* Topological Fixed Point Theory and Its Applications 1. Springer Netherlands, 2003.

[15] R. F. Grande J. Andres, A. M. Bersani. Hierarchy of almost-periodic function spaces. *Rendiconti Di Matematica*, 26:121–188, 2006.

[16] G. Prouse L. Amerio. *Almost periodic functions and functional equations.* The University Series in Higher Mathematics. Springer-Verlag New York, 1 edition, 1971.

[17] B. M. Levitan. *Almost periodic functions.* State Publishing House for Theoretical Technical Literature, 1959 (In Russian).

[18] G. H. Meisters. *On almost periodic solutions of a class of differential equations. Proc. Amer. Math. Soc*, 10:113–119, 1959.

[19] S. Th. Kyritsi-Yiallourou N.S. Papageorgiou. *Handbook of applied analysis.* Springer, Berlin, 2009.

[20] D. Pennequin. *Contributions aux oscillations multifréquentielles en temps discret et en temps continu.* PhD thesis, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 2014.

[21] L. Radovà. Theorems of bohr–neugebauer-type for almost-periodic differential equations. *Math. Slovaca 54*, 2:169–189, 2004.

[22] A. S. Rao. On differential operators with bohr–neugebauer property, journal = Journal of differential equations, year = 1973, volume = 13, number = , pages = 490-494,.

[23] T. Yoshizawa. *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions.* Springer-Verlag, N.Y., 1975.