

Summary

The present study deals with the inclusion of confinement in the non-linear structural calculation of rectangular and circular sections of reinforced concrete. On the one hand, it seeks to propose or adapt the account of confinement-making models, depending on the section's type (rectangular or circular). On the other hand, it aims to integrate these formulations in a structural non-linear calculation software.

The mechanical behavior to remember is nonlinear elastic until exhaustion of the bearing capacity.

The confinement considered in this study is internal and introduced through the frames in the case of the rectangular hoops and in the case of the circular section.

The results of the numerical calculations which the study has developed are confronted with results of reinforced concrete structures obtained from ground tests; making the study's results thus satisfactory.

It also results from the present study that the effects of transverse reinforcement on the behavior of the concrete structure are positive (addition of strength and ductility). They are derived from a superposition of curves obtained for the structure with the concrete confined to that with the unconfined concrete.

Key words: Confinement; nonlinear calculation; flat structures; rectangular section; circular section; reinforced concrete; modeling; transverse reinforcement.

RESUME

La présente étude s'intéresse à la prise en compte du confinement dans le calcul non linéaire des structures à section rectangulaire et circulaire en béton armé. Il s'agit d'une part, de proposer ou d'adapter les modèles de prise en compte du confinement selon le type de sections (rectangulaire ou circulaire) et d'autre part, d'intégrer ces formulations dans un logiciel de calcul non linéaire des structures.

Le comportement mécanique à retenir est élastique non linéaire et ce jusqu'à épuisement de la capacité portante.

Le confinement considéré est interne et est introduit par les cadres dans le cas de la section rectangulaire et des cerces dans le cas de la section circulaire.

Les résultats du calcul numérique ainsi développés, sont confrontés à des résultats d'essais des structures en béton armé. Les résultats ainsi confrontés sont satisfaisants.

Il résulte aussi de cette étude que, les effets des armatures transversales sur le comportement de la structure en béton sont positifs (apport de résistance et de ductilité). Ils sont tirés de la superposition des courbes obtenues pour la structure avec du béton confiné à celle avec le béton non confiné.

Mots clés : Confinement – calcul non linéaire – structures planes– section rectangulaire – section circulaire – béton armé – rupture – modélisation – armatures transversales.

I. INTRODUCTION GENERALE

Nombreuses sont les études qui caractérisent le comportement réel des sections en béton armé en vue de prédire leurs modes de rupture en compression et en traction mais sans tenir compte de l'influence des armatures transversales. Actuellement, quelques modèles permettent de caractériser le comportement du béton confiné par des aciers transversaux.

Le comportement des éléments structuraux en béton armé, est directement lié aux lois contraintes déformation des matériaux constituants. Le comportement du béton confiné est l'élément primordial qui permet l'évaluation de la capacité portante et la ductilité de courbure et de déplacement exigés dans les régions potentielles de rotule plastiques.

Le but de cette étude est la prise en compte du confinement dans le calcul non linéaire des structures à section rectangulaire et circulaire en béton armé. Il s'agit d'une part, d'adapter le modèle de prise en compte du confinement selon le type de sections (rectangulaire ou circulaire) et d'autre part, d'intégrer ces formulations dans un logiciel de calcul non linéaire des structures.

La méthodologie adoptée dans ce travail fait appel à des modèles qui tiennent compte de la contribution du béton tendu et des armatures transversales pour le confinement du béton. Un logiciel de calcul non linéaire des structures, développé par Kachi [03], Bouafia, Kachi, Muller [06], Kachi, Fouré, Bouafia, Muller [02] ainsi que la prise en compte du confinement proposée par Iddir, Bouafia, Kachi [04], est utilisé et appliqué pour apprécier l'effet des caractéristiques du béton et des armatures ainsi que les espacements des armatures transversales et aussi, pour estimer le comportement mécanique et tracer les courbes de chargement. Ceci nous a permis d'évaluer la capacité portante des structures planes en béton armé jusqu'à rupture.

Une série d'exemples d'applications effectuées à l'aide du programme de calcul numérique développé, il s'agit des poutres, poteaux et portiques en béton armé.

II- SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

II.1.Introduction :

Dans ce chapitre nous exposerons les points principaux de l'étude bibliographique que nous avons faite, concernant le calcul non linéaire et les modèles utilisés dans notre analyse qui tiennent compte du comportement réel des matériaux, ensuite nous exposerons le confinement interne et les modèles analytiques existants.

Conséquemment le modèle du béton confiné utilisé dans notre étude est sélectionné en l'occurrence celui de BOUAFIA. Y et IDDIR. K et KACHI. M.S [04].

II. 2. Aperçu bibliographique sur l'analyse numérique non linéaire :

II. 2.1. Comportement non linéaires des structures :

L'hypothèse du comportement des structures linéaires a un domaine de validité restreint. En effet, la modélisation du comportement réel des matériaux faits appels a une relation contraintes-déformations qui est non linéaire, aussi, de nos jours les structures sont de plus en plus légères et soumise à des excitations importantes, ce qui conduit à des grands déplacements et a une relation déplacements-déformations non linéaire ainsi on distingue différentes sources de non linéarités possibles dans les structures [22] :

- Les **non linéarités matérielles** en petits déplacements et petites et grandes déformations, où la relation contraintes-déformations est non linéaire. Elles peuvent provenir de la loi de comportement, de la fissuration du matériau, du comportement du béton tendu entre deux fissures.
- Les **non linéarités géométriques** en grands déplacements et petites déformations, où la relation déplacements-déformations peut être non linéaire. Elles peuvent provenir des instabilités de forme de pièces élancées ou de structure élancées à nœuds déplaçable.
- Les **non linéarités géométriques** en grands déplacements et grandes déformations, où les relations contraintes-déformations et déplacements-déformations sont généralement non linéaires. C'est le cas le plus complexe de l'analyse non linéaire des structures.
- Les **non linéarités** provenant des **conditions aux limites**, dans ce cas les forces de réactions ou de liaisons entre plusieurs structures dépendent d'une manière non linéaire des déplacements. On peut les trouver lors des modélisations de choc, contact et frottement.

En effet dans ce mémoire on ne s'intéresse pas aux **non linéarités** provenant des **conditions aux limites**, et les **non linéarités géométriques** en grands déplacements et grandes déformations.

II. 2.2. Évolution de l'analyse non linéaire :

Les bases de l'analyse non linéaire matérielle ont été les premières à être établies à cause de leur simplicité. Deux différentes approches ont été proposées : la méthode des déformations initiales et celle du module tangent. Dans la première méthode, pour un accroissement de charge, on calcul un accroissement des déformations plastiques qui sont ensuite considérées comme des déformations initiales pour corriger l'état des contraintes dans le milieu étudié. Cette technique ne pouvant s'appliquer dans le cas des matériaux sans écrouissage a été vite abandonnée en faveur de la technique du module tangent, actuellement connue sous le nom de méthode incrémentale, où on effectue le calcul d'une matrice tangente qui dépend des lois de comportement incrémentales. En 1969 **Zienkiewicz et al** [16] ont proposé plus tard la technique dite de contraintes initiales. Puis en 1973 **Frey** [16] à démontrer que cette dernière approche n'est qu'un cas particulier de la méthode générale dite incrémentale.

Après une série d'applications spécifiques, les équations d'une formulation générale de l'analyse non linéaire géométrique ont été établies par **Yagmai** [16] en 1968 pour la description lagrangienne actualisée où la dernière position d'équilibre de la structure est considérée comme la configuration de référence, et par **Marcial et Oden** [16] à peu près à la même époque pour la description lagrangienne totale où l'on fixe l'état initial comme référence (Frey [16] 1978). Dans les deux cas, les déformations étaient supposées infinitésimales.

A. Grelat [01] a été parmi les premiers à prendre en compte dans la simulation ces deux types de non linéarité. Le comportement du béton comprimé a été modélisé par la loi de Sargin, et celui des zones tendues a été simulé à l'aide d'une forme originale de loi de comportement où le béton est représenté par un diagramme de contrainte fictive triangulaire à partir de la fibre neutre. Ses travaux ont été complétés par **O. Naït-Rabah** [10] qui a étendu les simulations numériques aux structures tridimensionnelles. Afin d'améliorer les simulations des grands déplacements et des grandes rotations, **F. Robert** [05] a proposé d'y introduire une description corotationnelle du mouvement pour le traitement de la non linéarité géométrique. D'autres auteurs ont complété des codes existant en développant des éléments finis spécifiques comme par exemple, **B. Espion** [26] qui a proposé un élément fini plan de

poutre à 9 degrés de liberté.

Une présentation exhaustive sur l'analyse non linéaire peut être trouvée dans les références [16], [05].

II. 2.3. Travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures planes :

Le début de l'analyse non linéaire remonte à 1968, quand **NILSON** [09] propose une analyse non linéaire de structures en béton armé en utilisant la méthode des éléments finis. Aussi dans la même année un article de **JENNINGS** [05], va être le point de départ d'une série de travaux, dont le présent. La non linéarité géométrique en 2D, peut-être prise en compte de façon exacte, grâce à l'additivité et la commutativité des rotations planes.

-En 1970, **FRANKLIN** [10] à développer une étude tenant compte que des effets de non linéarité matérielle, il a élaboré une formulation plane où apparaissent pour chaque nœud d'un élément de poutre 3 degrés de liberté (2 translations et une rotation). Les lois de comportement sont données point par point (multilinéaire). La rigidité du béton tendu entre deux fissures est négligée.

-Dans la même année, **GUNNIN** [10] est le premier qu'a introduit la non linéarité géométrique, la matrice des contraintes initiales (ou rigidité géométrique) est absente. En ce qui concerne les effets de non linéarité matérielle, les rigidités extensionnelles (E.A) et les rigidités flexionnelles (E.I) sont supposées constantes le long de l'élément, tout en négligeant la résistance du béton tendu, puis dans la même année **LAZARO** [05] qui apporte une correction à la formulation de GUNNIN en tenant compte de la fissuration.

-En 1972, **MENEGOTTO** et **PINTO** [10] ont utilisé une méthode qui tient compte de la non linéarité géométrique en introduisant l'hypothèse des petits déplacements lors du passage du repère intrinsèque d'un élément à un repère fixe. Et la prise en compte aussi de la non linéarité matérielle dans un repère mobile lié à la position déformée de l'élément.

-En 1978, **GRELAT** [01] c'est inspiré des travaux de MENEGOTTO et PINTO [10], a développé un programme de calcul des ossatures planes en béton armé, en introduisant la loi de SARGIN pour le comportement du béton en compression, et en se basant sur le diagramme parabolique pour le béton tendu.

-En 1979, **FERRARO-MAIA** [14] poursuit le travail de GRELAT au CEBTP, en développant la prise en compte des effets différés et de la précontrainte. Cette dernière est introduite par la méthode interne explicitée par FAUCHART [14]. L'influence de l'inclinaison des câbles dans la formation de la matrice de rigidité n'est pas prise en compte.

-En 1986, **ESPION** [26] introduit un élément de poutre plane à 9 degrés de liberté. Cette approche est plus complète et réaliste vis-à-vis de non linéarité matérielle et géométrique. La tension stiffening et les effets différés sont pris en compte. Son modèle a été confronté avec de nombreux résultats publiés.

Dans les travaux cités précédemment, la déformation d'effort tranchant n'est pas prise en compte.

-En 2006, **KACHI MS., FOURE B., BOUAFIA Y., MULLER P.** [02], [03], poursuivent les travaux de GRELAT [01] et NAIT-RABAH [10], en développant un modèle qui tient compte de l'effet combiné de la flexion plane et de l'effort tranchant en élasticité non linéaire appliqué aux poutres en béton armé et précontraint. Le programme développé a été validé sur plusieurs poutres en béton armé et précontraint qui ont fait l'objet d'essais.

II-3. Rappels sur le comportement des matériaux :

II.3.1. Le béton ordinaire :

II.3.1.1. Comportement du béton en compression

A- Diagramme de calcul (parabole rectangle) :

Les vérifications où bien les calculs aux états ultimes du béton doivent être en utilisant un diagramme non linéaire dit 'parabole rectangle' et cela dans le but de simplifier les calculs, ce diagramme parabole rectangle se compose d'un arc de parabole ayant son sommet ε_0 qui est égal à 2‰ et d'un palier horizontal où ε compris entre ε_0 et ε_{cu} qui est égale à 3.5‰ (voir figure I.1).

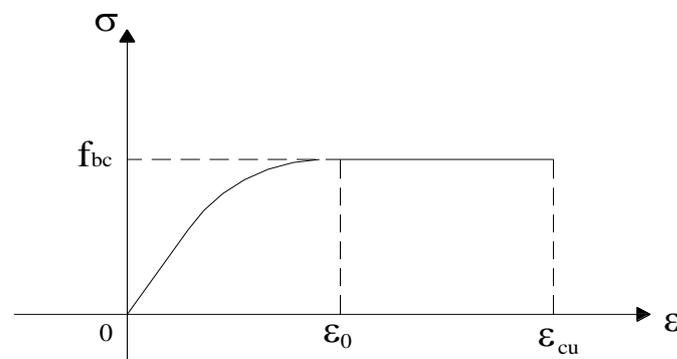


Figure II.1 : Loi Parabole Rectangle

Les relations entre contraintes et déformations sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \varepsilon_{bc} \leq 2\text{‰} \quad : \sigma_{bc} = 0.25 f_{bc} 10^3 \cdot \varepsilon_{bc} (4 - 10^3 \cdot \varepsilon_{bc}) \\ 2\text{‰} \leq \varepsilon_{bc} \leq 3.5\text{‰} \quad : \sigma_{bc} = f_{bc} \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

Avec
$$f_{bc} = \frac{0.85 \cdot f_{cj}}{\gamma_b}$$

0.85 : c'est un coefficient de diminution de la résistance du béton dans le temps et aussi il tient compte de l'effet du fluage.

γ_b vaut 1.5 sauf en cas de combinaisons accidentellement pour lesquelles il vaut alors 1.15

B- Diagramme réel (la loi de SARGIN) :

Pour décrire le comportement du béton en compression, on admet un comportement élastique non linéaire qui sera décrit par la loi de SARGIN (figure II.2).

Ce modèle est essentiellement employé dans le calcul des structures en béton armées .Il présente l'avantage de la facilité de déterminer les paramètres du modèle d'après les essais en laboratoire.

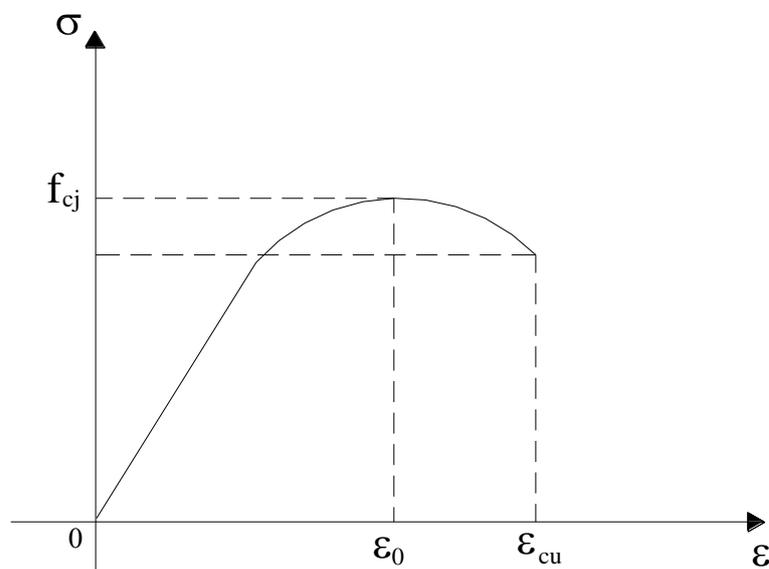


Figure II.2 : Comportement du béton en compression selon SARGIN [01].

La contrainte est donnée par la relation qui suit :

$$\sigma = f_{cj} \frac{k_b \bar{\varepsilon} - (k_b - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \bar{\varepsilon} - k_b \bar{\varepsilon}^2} \quad (\text{II.2})$$

où $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

- Le paramètre K_b ajuste la branche ascendante de la loi et il est donné par:

$$K_b = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_0}{f_{cj}}$$

. f_{cj} : résistance à la compression du béton à l'âge j,

. ε_0 : déformation de pic correspondant à f_{cj} ,

. E_{b0} : module élastique du béton à l'origine.

Le paramètre K'_b permet d'ajuster la forme de la branche décroissante de la courbe.

- Avec $K'_b = 0$, on obtient des courbes avec une branche qui descend brutalement, ce qui correspond à un béton ayant un comportement élastique fragile.

- Avec $K'_b = 1$, on obtient au contraire des courbes avec une branche descendante assez plates qui correspondent à un béton ayant un comportement ductile (plastique).

Pour un béton normal, on prend généralement $K'_b = K_b - 1$

II.3.1.2. Comportement du béton en traction

Généralement, dans la pratique (règlements), la résistance à la traction du béton ainsi que la contribution du béton tendu entre deux fissures sont négligées.

Pour une représentation convenable de la déformabilité réelle d'un élément fissuré, en particulier en flexion simple, il est admis de tenir compte de la résistance du béton à la traction, ainsi que de la participation du béton tendu en phase fissurée. On attribue alors à celui-ci un diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre (figure I.3).

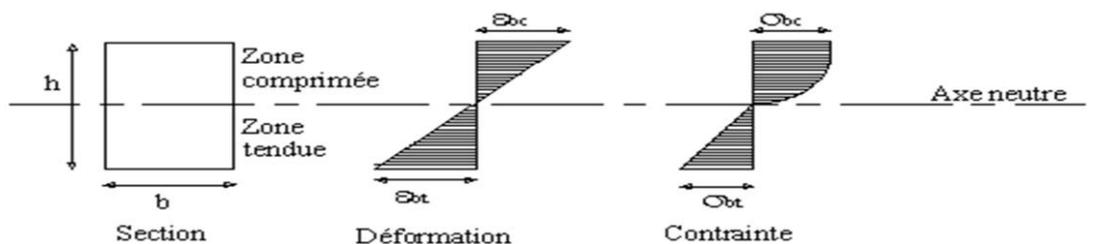


Figure II.3 : Comportement du béton avant fissuration.

Les fibres du béton tendu sont affectées d'un module de déformation E_{bt} qui est défini à partir de la contrainte et de la déformation instantanée du bord tendu.

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}}$$

Au - delà de la fissuration en traction on tient compte d'une participation du béton tendu situé entre deux fissures successives. La contrainte ne s'annule pas brusquement, mais, décroît selon une loi parabolique (figure I.4). On étudie ainsi le comportement moyen d'une zone de poutre.

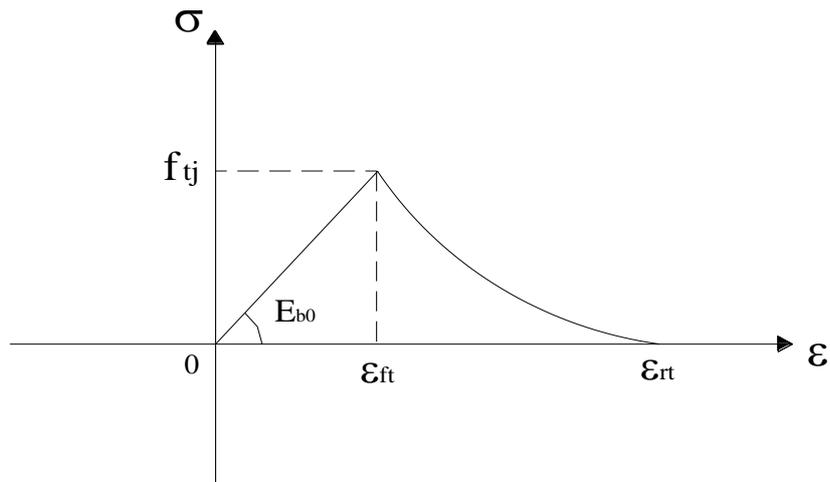


Figure II.4 : Contribution du béton tendu après fissuration A.GRELAT [01].

f_{tj} : Résistance du béton à la traction,

ϵ_{ft} : Déformation de traction correspondant à f_{tj} ,

ϵ_{rt} : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

E_{bo} : Module d'élasticité longitudinale du béton.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \bullet \text{ si } |\epsilon_{bt}| < \epsilon_{ft} \\
 \qquad \sigma_{bt} = E_{bo} \cdot \epsilon_{bt} \\
 \bullet \text{ si } |\epsilon_{bt}| < \epsilon_{rt} \text{ et } |\epsilon_{bt}| > \epsilon_{ft} \\
 \qquad \sigma_{bt} = - f_{ft} \frac{(\epsilon - \epsilon_{rt})^2}{(\epsilon_{rt} - \epsilon_{ft})^2} \qquad \text{(Fissuration avec participation du béton tendu.)} \\
 \bullet \text{ si } |\epsilon_{bt}| > \epsilon_{rt} \\
 \qquad \sigma_{bt} = 0 \qquad \text{(Fissuration sans participation du béton tendu).}
 \end{array} \right. \qquad \text{(II.3)}$$

II.3.2. Les Aciers :

II.3.2.1. Les aciers passifs

La loi contrainte - déformation est supposée identique en traction et en compression sous chargement monotone, elle dépend de la nature de l'acier.

On distingue les aciers naturels et les aciers écrouis.

II.3.2.1.1. Aciers naturels

A-Diagramme caractéristique

Ils sont caractérisés par une loi élasto-plastique parfaite (figure II.5)

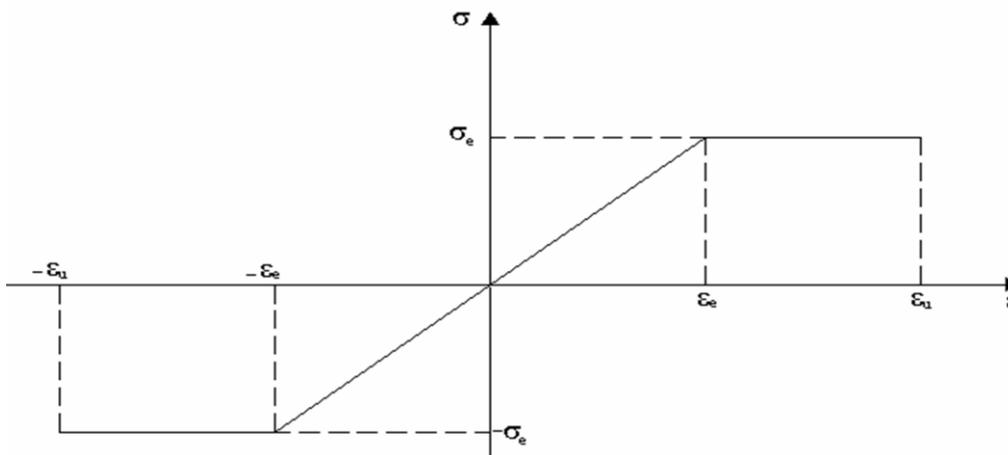


Figure II.5: diagramme caractéristique des aciers naturels.

Les relations entre contraintes et déformations sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = E_a \cdot \varepsilon & \text{pour } \varepsilon_r \leq \varepsilon_e \\ \sigma = \sigma_e & \text{pour } \varepsilon_e < \varepsilon < \varepsilon_u \\ \sigma = 0 & \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_u \end{array} \right. \quad (\text{II.4})$$

Avec les relations qui se déduisent par symétrie du cote de la traction.

Les déformations extrêmes sont fixées par le règlement BAEL à 10 ‰

E_a : Module longitudinal de l'acier,

ε_e : Déformation limite élastique de l'acier,

σ_e : Contrainte limite élastique de l'acier,

ε_u : Déformation ultime de l'acier.

B-Diagramme de calcul

Le diagramme de calcul se déduit du diagramme caractéristique (idéalisé) par une affinité parallèle à la droite de Hooke et de rapport $1/\gamma_s$, et en conservant la pente E_s de la droite d'élasticité (figure I.6).

Le coefficient γ_s est pris égale à 1.15 sauf vis-à-vis des combinaisons accidentelles pour lesquelles on adopte 1.

$$\varepsilon_{se} = \frac{\sigma_e / \gamma_s}{E_s}$$

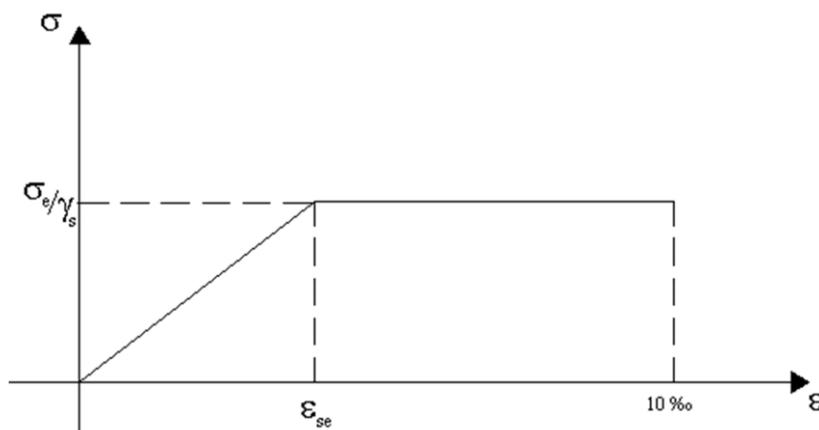


Figure II.6: Diagramme de calcul des aciers naturels.

II.3.2.1.2. Aciers écrouis

On adopte la loi préconisée par les règlements qui supposent un comportement linéaire élastique jusqu'à 70 % de la limite élastique (σ_e). Au - delà, une courbe $\varepsilon = f(\sigma)$ du cinquième degré (figure I.7).

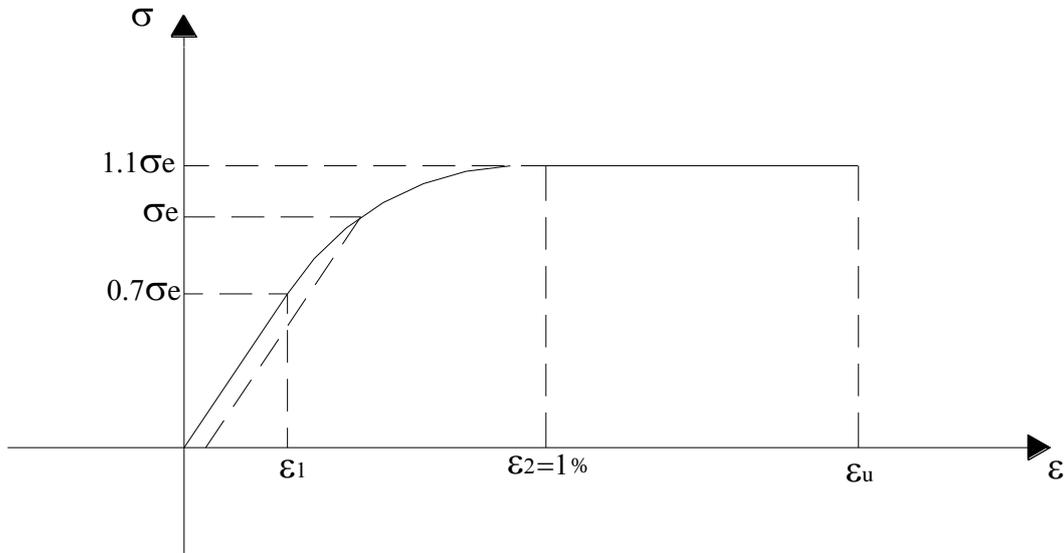


Figure II.7: Comportement des aciers écrouis.

Les relations se traduisent par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = E_a \cdot \varepsilon & \text{pour } \sigma < 0.7\sigma_e \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E_a} + 0.823 \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 0.7 \right) & \text{pour } 0.7\sigma_e < \sigma < 1.1\sigma_e \\ \sigma = 1.1\sigma_e & \text{pour } 1\% < \varepsilon < \varepsilon_u \end{array} \right. \quad (\text{II.5})$$

Les relations en traction se déduisent par symétrie.

I.3.2.2. Les aciers actifs :

Le comportement des armatures de précontrainte est représenté par la loi, du même type que celle des aciers écrouis de béton armé, recommandée par le nouveau règlement

BPEL 83.

$$\sigma_p = E_p \cdot \varepsilon_p \quad \text{pour } 0 < \sigma_p < 0,9 \cdot f_c$$

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100 \cdot \left(\frac{\sigma_p}{f_c} - 0,90 \right)^5 \quad \text{pour } 0,9 f_c \leq \sigma_p < 1,1 f_c \quad (\text{II.6})$$

$$\sigma_p = 1,06 f_c \quad \text{pour } \varepsilon_p \geq 0,02$$

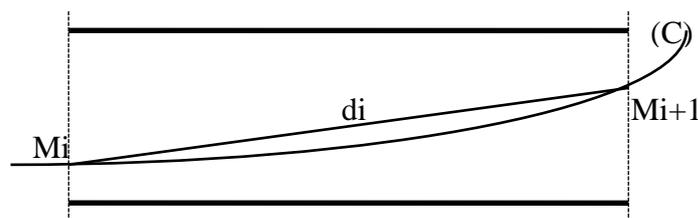
II.4. ETUDE DE LA PRECONTRAINTE :

II.4.1. GENERALITES :

Dans le cadre de cette étude, on se limitera au cas de la précontrainte intérieure au béton. Celle-ci est définie géométriquement câble par câble. Les aires des gaines sont déduites du béton au moment de l'intégration des rigidités dans la section du béton.

II.4.2. GEOMETRIE DE LA PRECONTRAINTE :

Etant donné une suite de points $M_i (x_i, y_i)$ pour $(i = 1, n)$, définis comme points de passage du câble dans le repère fixé, lié à la structure, on cherche à déterminer une courbe (C) passant par ces points et représentant de façon réaliste le tracé du câble dans la poutre.



d_i : Représente la distance du point M_i au point M_{i+1}

Figure (II.8) : Distance entre 2 points consécutifs dans un tronçon de poutre

La position et l'orientation du câble en un point sont données en pratique, en fonction de l'abscisse curviligne "s" mesurée de l'origine du câble.

II.4.2. EVALUATION DES TENSIONS DANS LES CABLES :

La tension initiale du câble de précontrainte, mesurée au vérin est un paramètre connu avec certitude. Cependant la tension dans les câbles varie d'une section à une autre et en

fonction du temps. Ces variations qui vont généralement dans le sens d'une réduction de forces sont dénommées pertes de précontrainte classées en deux catégories selon leur origine :

- pertes instantanées : elles se produisent lors de la mise sous tension, et sont dues principalement ; au frottement du câble sur la gaine, au tassement des organes d'ancrage et à la non simultanée des mises en tension des différents câbles,
- pertes différées : liées à l'évolution rhéologique des matériaux acier et béton avec le temps. Ces pertes sont supposées négligeables dans le cadre de cette étude.
Nous ne considérons comme pertes instantanées que les pertes de tension par frottement de l'armature et les pertes de tension par rentrée d'ancrage.

Les pertes dues au non simultanée de mise en tension des câbles sont directement intégrées dans l'analyse non linéaire.

II.4.2.1. Pertes par frottement :

Elles se produisent par frottement du câble sur la gaine, lors de mise en tension de celui-ci. La tension en tout point du câble, à la mise en tension, est donnée par :

- Câble tendu par l'origine :

$$\sigma_o(s) = \sigma_o \cdot e^{-f \cdot \alpha(s) - \zeta \cdot s} \quad (\text{II.7})$$

- Câble tendu par l'extrémité :

$$\sigma_L(s) = \sigma_o \cdot e^{-f \cdot (\alpha(l) - \alpha(s)) - \zeta \cdot (l-s)} \quad (\text{II.8})$$

- Câble tendu simultanément par l'origine et l'extrémité :

$$\sigma(s) = \text{Sup} [\sigma_o(s), \sigma_L(s)] \quad (\text{II.9})$$

Avec :

l : Longueur du câble,

f : coefficient de frottement angulaire de l'armature sur la gaine (en rd^{-1}),

ζ : Coefficient de frottement de l'armature par unité de longueur,

$\sigma_o = \sigma_o(s)$: Tension à l'ancrage,

$\alpha(s)$: Somme des déviations angulaires planes comptées en valeur absolue entre l'origine

et la section d'abscisse curvilignes.

Dans le cas de la post -tension ou de pré-tension, les règles BPEL préconisent la valeur suivante :

$$\sigma_0 = \text{Min} (0,8.f_{\text{prg}} ; 0,9.f_{\text{peg}}) \quad (\text{II.10})$$

Où :

f_{prg} : contrainte de rupture garantie,

f_{peg} : limite d'élasticité garantie.

II.4.2.2. Pertes par rentrée d'ancrage :

La perte par recul d'ancrage apparaît lorsque la force de traction de l'armature de précontrainte exercée par le vérin, est reportée directement au béton par l'ancrage. Elle intervient au moment où la tension du vérin est relâchée. En général cette perte n'affecte qu'une faible partie de la longueur du câble. Cependant pour les câbles courts, elle peut agir sur toute la longueur. Dans le cas d'un câble à deux ancrages actifs l'ordre de relâchement est pris en considération.

Soit C le point où se fait la rentrée d'ancrage. Les diagrammes des contraintes dans le câble, en fonction des abscisses curvilignes, avant et après rentrée d'ancrage sont symétriques par rapport à l'horizontale passant par C, figure (II.9).

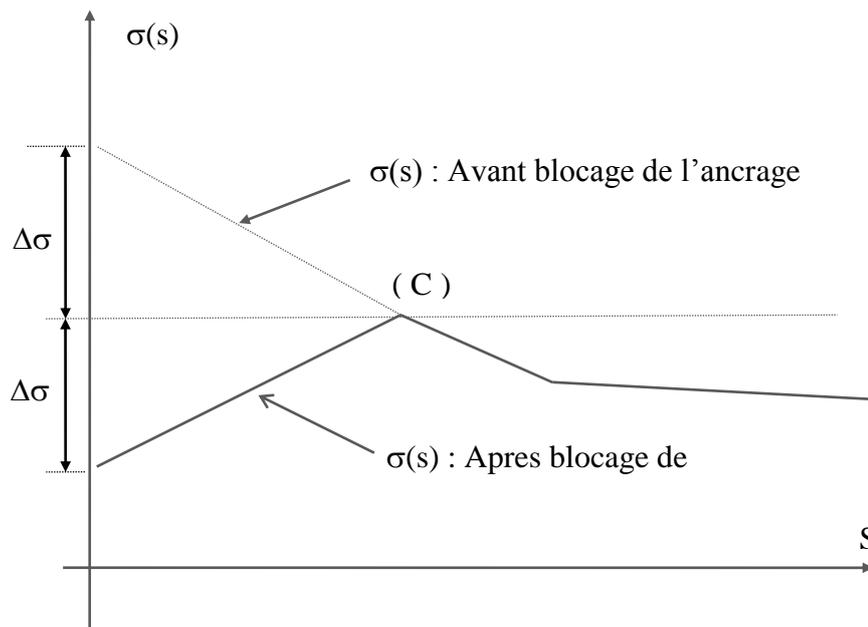


Figure (II.9) : Effet du blocage de l'ancrage gauche

Le recul d'ancrage g (valeurs connues expérimentalement, dépendant du procédé utilisé), s'exprime en fonction de l'aire A déterminée par le diagramme des tensions avant et après rentrée d'ancrage par :

$$A = g \cdot E_p \quad (\text{II.11})$$

Où, E_p désigne le module d'élasticité longitudinal du câble

Le traitement du diagramme des tensions dans le câble après rentrée de l'ancrage gauche est le suivant :

Étant donné le diagramme des contraintes avant rentrée d'ancrage, défini par les points

$B_0(O, \sigma_0)$, $B_1(s_1, \sigma_1)$, $B_2(s_2, \sigma_2)$,, $B_n(s_n, \sigma_n)$, on calcule la quantité $(g \cdot E_p)$ et on la compare successivement aux aires A_1, A_2, \dots, A_n . On s'arrête au premier point B_i pour lequel :

$$A_i > g \cdot E_p \quad (\text{II.12})$$

L'aire A_i est déterminée par la relation de récurrence suivante :

$$A_i = A_{i-1} + (S_i - S_{i-1}) (\sigma_{i-1} - \sigma) + 2 \cdot (\sigma_{i-1} - \sigma) \cdot d_{i-1}$$

$$A_0 = 0, \quad i = 1, n$$

$$d_i = \sum_{j=1}^i d(B_{j-1}, B_j)$$

Le point $C(s_c, \sigma_c)$ est sur le segment (B_{i-1}, B_i) .

La quantité $(g \cdot E_p)$ est telle que :

$$g \cdot E_p = A_{i-1} + (2d_{i-1} + x) \cdot (\sigma_{i-1} - \sigma_c) \quad (\text{II.13})$$

avec :

$$x = S_c - S_{i-1}$$

Considérons le segment B_{i-1}, B_i

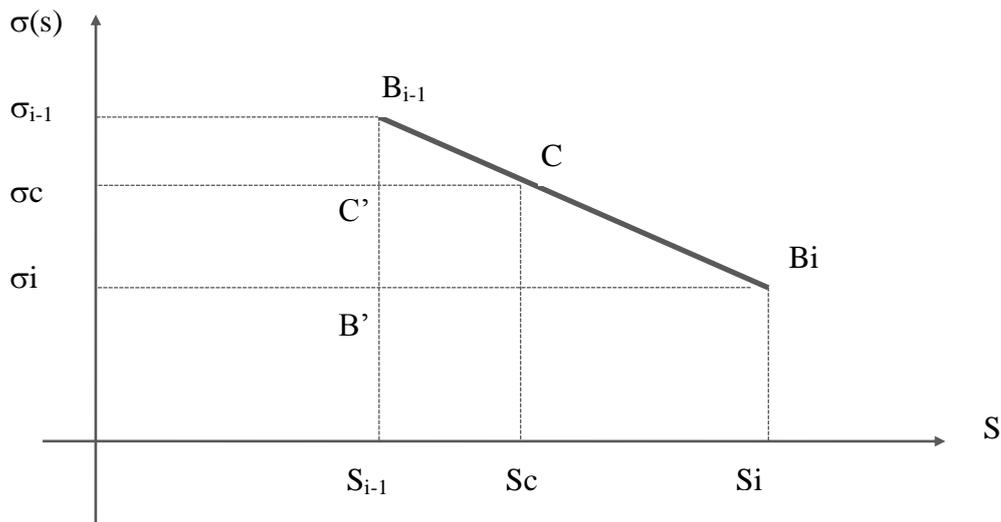


Figure (II.10): Position du point C jusqu'à où se fait sentir la rentrée d'ancrage.

Les triangles $B_{i-1}CC'$ et $B_{i-1}B_iB'_i$ sont semblables, alors :

$$\sigma_{i-1} - \sigma_c = \frac{\sigma_{i-1} - \sigma_i}{S_i - S_{i-1}} \cdot x \quad (\text{II.14})$$

En substituant l'équation (II.45) dans l'équation (II.44) on arrive à une équation du second degré en x :

$$g \cdot E_P = A_{i-1} + (2d_{i-1} + x) \cdot \frac{\sigma_{i-1} - \sigma_i}{S_i - S_{i-1}} \cdot x \quad (\text{II.15})$$

$$x^2 + 2d_{i-1} \cdot x - \frac{(g \cdot E_P - A_{i-1}) \cdot (S_i - S_{i-1})}{(\sigma_{i-1} - \sigma_i)} = 0 \quad (\text{II.16})$$

L'équation (II.46) admet deux racines. La valeur de x solutions du problème est telle que :

$$x = -d_{i-1} + \left(d_{i-1}^2 + \frac{(g \cdot E_P - A_{i-1}) \cdot (S_i - S_{i-1})}{(\sigma_{i-1} - \sigma_i)} \right)^{1/2} \quad (\text{II.17})$$

Si l'on atteint l'ancrage passif (droit) sans satisfaire la condition (II.12), on translate vers le bas le dernier diagramme obtenu de façon à satisfaire cette condition.

Le cas de l'ancrage droit est traité par la même façon, par inversedu sens des abscisses curvilignes.

Le diagramme résultant de ce traitement est le diagramme retenu comme tension initiale dans le câble.

II.4.3. ACTION DE LA PRECONTRAINTÉ :

L'effet de la précontrainte est introduit, en tenant compte du phasage éventuel sur la mise en tension des câbles. A la mise en tension (et juste après rentrée d'ancrage) la précontrainte exerce sur la section du béton un effort de compression égal et opposé à l'effort de traction dans le câble. Cet effort est appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble au point où il traverse la section.

Sous l'action de cette précontrainte et éventuellement des sollicitations extérieures, la section considérée subit un état de déformation. A partir de cet état, on considère que les câbles de précontrainte concernés par la mise en tension deviennent parfaitement solidaires au béton et travaillent comme des aciers de béton armé avec des pré déformations par rapport à la section droite.

II-5. Le béton confiné :

II-5.1. Généralités sur le béton confiné :

II.5.1.1. Introduction :

Le béton est matériau dont les performances en traction sont faibles par rapport à celles de la compression. Pour l'utilisation efficace d'un tel matériau, il a été nécessaire de le renforcer par des aciers longitudinaux qui reprennent les efforts de traction. Ce renforcement a permis le développement du béton armé dans le domaine de la construction. Ou encore mieux en plus des armatures longitudinales le béton a été renforcé avec d'autres types d'armatures appelées armatures transversales ou armatures de confinement d'où le béton confiné.

II.5.1.2. Confinement du béton armé :

Le confinement du béton est assuré par le ferrailage transversal, généralement sous forme de spirales ou de cadres en acier étroitement espacés. Pour de faibles contraintes dans le béton, l'intervention du ferrailage transversal en tant qu'armature de confinement est non significative par conséquent le béton est considéré comme non confiné. Le béton devient effectivement confiné lorsque les contraintes développées par le noyau du béton s'approchent de la résistance uni-axiale. Les déformations transversales deviennent très importantes en raison de la fissuration interne progressive dans le béton qui s'appuie sur le ferrailage transversal, qui à son tour répond par une réaction de confinement sur le béton.

Par conséquent, le ferrailage transversal fournit un confinement passif.

Richart, Brandtzaey, et Brown [11] ont trouvé à partir d'essais de compression triaxiale effectués sur des cylindres en béton confinés latéralement par une pression hydrostatique la relation suivante:

$$f'_{cc} = f'_{c0} + k_1 f_l \quad (\text{II.18})$$

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0} \left(1 + k_2 \frac{f_l}{f'_{c0}} \right) \quad (\text{II.19})$$

Où :

- f'_{cc} et ε_{cc} : sont la contrainte maximale et la déformation maximale correspondante du béton sous la pression latérale du fluide f_l .
- f_l : pression latérale du fluide.
- f'_{c0} et ε_{c0} : sont respectivement la contrainte et la déformation du béton non confiné.

- k_1 et k_2 : des coefficients qui sont des fonctions du mélange du béton, et de la pression latérale.

Où et désignent respectivement la résistance maximale et la déformation correspondante sous l'action d'une pression hydrostatique latérale ; et désignent respectivement la résistance du béton non confiné et la déformation correspondante ; k_1 et k_2 sont des coefficients fonction de la composition du béton et de l'étreinte latérale.

Selon les résultats expérimentaux, les coefficients k_1 et k_2 ont été évalués moyennement aux valeurs respectives 4.1 et 5 k_1 . Il a été également conclu que la résistance du béton confiné par une pression hydrostatique passive est sensiblement égale à celle d'un béton soumis à une pression passive latérale équivalente de confinement dû à la présence d'armature en spires étroitement espacées.

On a constaté que l'équation (II.11) s'applique approximativement au béton confiné par des cerces. La figure (II.11) montre des courbes contrainte-déformation obtenues à partir de trois ensembles de cylindres de béton confinés par des spires circulaires examinées par Iyengar, Desayi, et Reddy [12]. Chaque ensemble désigne une contrainte différente du béton non confiné.

L'augmentation de la contrainte et de la ductilité avec la quantité de l'acier transversale est très significative. Les essais ont démontré que le confinement du béton par les cerces est beaucoup plus efficace que par les cadres rectangulaires ou carrés. La figure (II.12) montre des courbes contrainte-déformation des prismes en béton examinés par Bertero et Felippa [13] qui contiennent diverses quantités d'armatures transversales en forme rectangulaire ou carré.

L'effet de la quantité d'acier transversal sur la ductilité est prononcé, cependant son effet sur la résistance est faible.

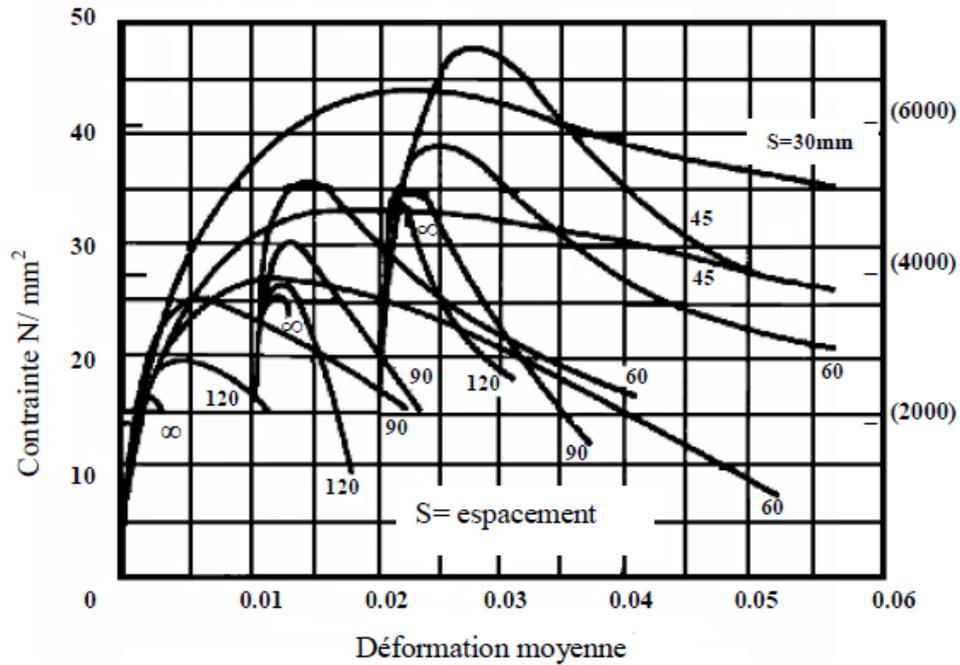


Figure (II.11): Courbes contrainte-déformation des cylindres en béton confiné par des spires ($d_s = 150\text{mm}$, $h = 300\text{mm}$, $\varnothing_t = 6.5\text{mm}$). (Iyengar, Desayi, et Reddy [12]).

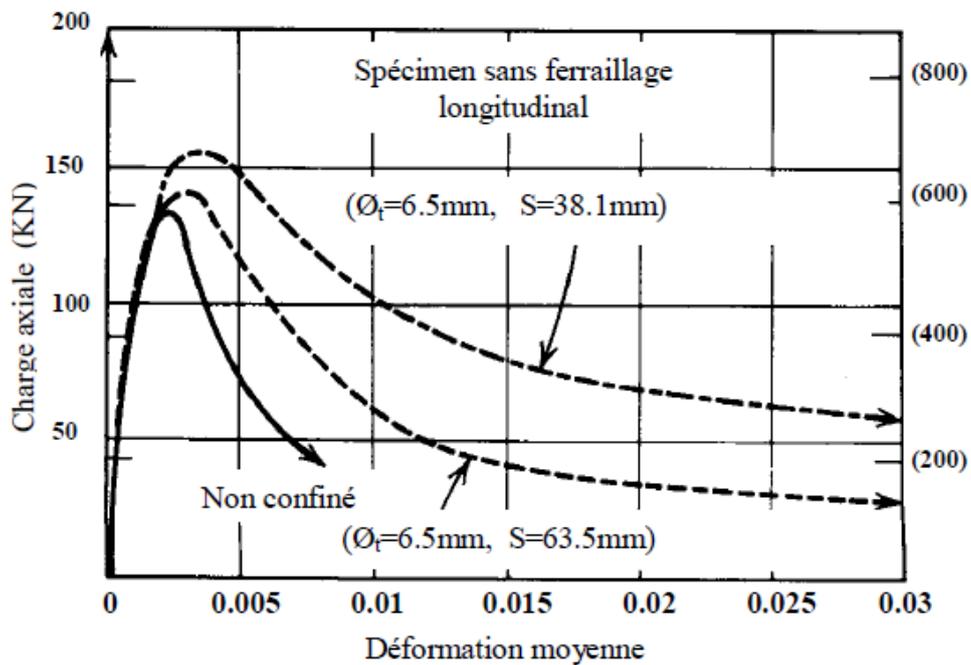


Figure (II.12): Courbes charge axiale déformation pour des prismes en béton Confiné de section carrés. (Bertero et Felippa [13])

La raison de la différence considérable entre le confinement par des cerces en acier et le confinement par les cadres en acier rectangulaires ou carrés est illustrée dans figure (3.3). Les cerces, de par leurs formes, génèrent une traction constante de l'acier transversal et fournissent une pression de confinement uniforme autour de la circonférence, qui s'approche dans son intensité à celle de la pression hydrostatique. Cependant, les cadres carrés développent des réactions importantes de confinement uniquement au niveau des angles; étant donné que la pression du béton sur les côtés du cadre tend à faire fléchir les côtés vers l'extérieur, comme dans la figure (3.3). Par conséquent une partie considérable de la section droite est considérée comme non confinée. En raison de l'action de courbement interne entre les angles, le béton est considéré effectivement confiné seulement dans les angles et dans la région centrale de la section. [15]

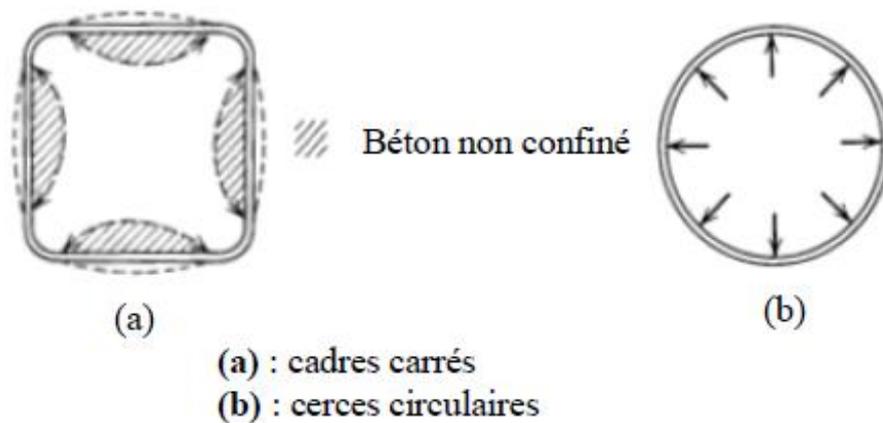


Figure (II.13): Confinement du béton.

II.5.1.3. paramètres influents:

Plusieurs études ont montré que les éléments en béton fortement comprimés, munis d'aciers transversaux nécessaires pour la résistance uniquement, se comportent d'une manière brutale. En effet, le béton inscrit entre deux lits successifs d'armature transversale se gonfle et se désintègre et l'armature longitudinale flambe. L'élément est ainsi dans l'incapacité de fournir une résistance additionnelle pour pouvoir supporter une charge plus grande. Par contre, la présence d'une armature transversale supplémentaire, bien disposée latéralement, contribue à confiner le béton du noyau de la section. Soumise à la même charge ultime, la section dans ce cas se dérobo à l'effort par déformations inélastiques et ce n'est que le béton d'enrobage qui éclate. Ceci illustre bien le comportement ductile des sections de béton confiné où le ferrailage transversal permet : d'agir comme armature de cisaillement ;

- d'augmenter la capacité de résistance et de déformation du béton confiné en compression ;

➤ d'empêcher le flambement prématuré des armatures longitudinales comprimées ;

Il est évident selon les figures (3.1) et (3.2) que le confinement par le ferrailage transversal n'a un effet significatif sur la courbe (σ - ϵ) que lorsque la contrainte latérale dans les aciers transversaux générée par l'action extérieure soit conséquente.

La relation contrainte déformation du béton confiné dépend de plusieurs facteurs notamment:

1. Le rapport du volume d'acier transversal au volume du béton confiné, parce qu'un contenu élevé du ferrailage transversal signifiera une pression de confinement élevée.
2. La résistance élastique de l'acier transversal, parce que celle-ci donne une limite supérieure à la pression de confinement [18].
3. L'espacement de l'acier transversal, augmente l'efficacité du confinement et contrôle-la condition de non flambement comme illustré dans la figure (3.4).

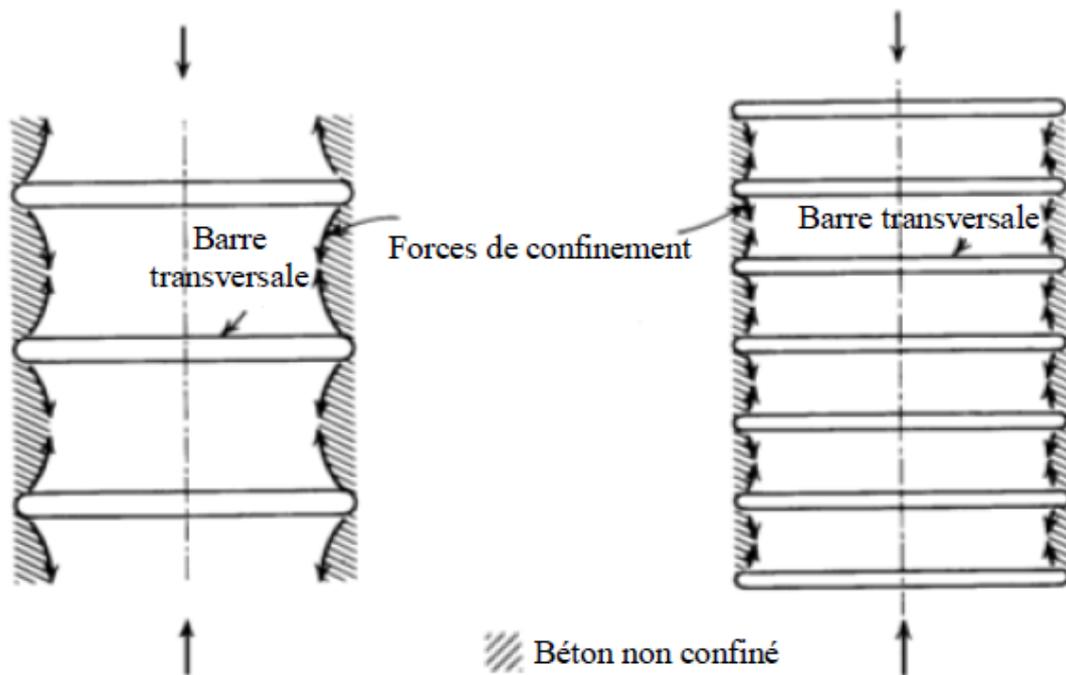


Figure (II.14): Effet de l'espacement du ferrailage transversal Sur L'efficacité du confinement [17]

4. Forme et configuration de l'armature transversale, comme il a été expliqué dans le paragraphe 2, le confinement par les cerces 'cadres circulaires' est plus efficace car il s'approche du cas idéal celui de la pression hydrostatique, voir figure (I.15).

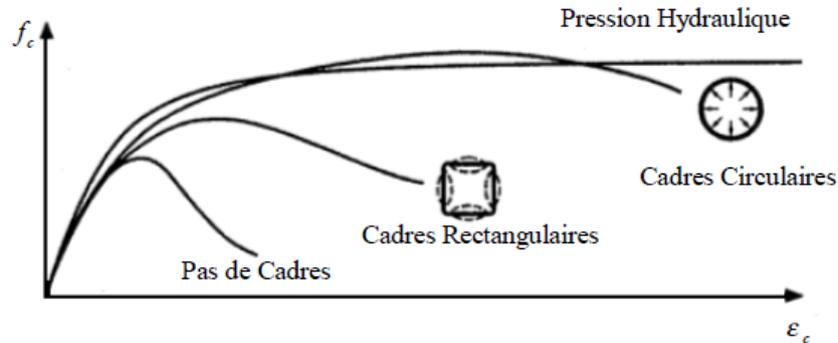


Figure (II.15): Influence de la forme de l'armature transversale [20]

La figure (I.16) montre le gain en résistance et en déformation dans le noyau du béton confiné pour des sections pourvues relativement de mêmes taux d'armature longitudinale et transversale et d'un même espacement.

Spécimens ayant la configuration A exhibent une faible amélioration dans la résistance du béton et la ductilité, cependant les spécimens ayant la configuration C présentent le plus de gain en résistance et en ductilité.

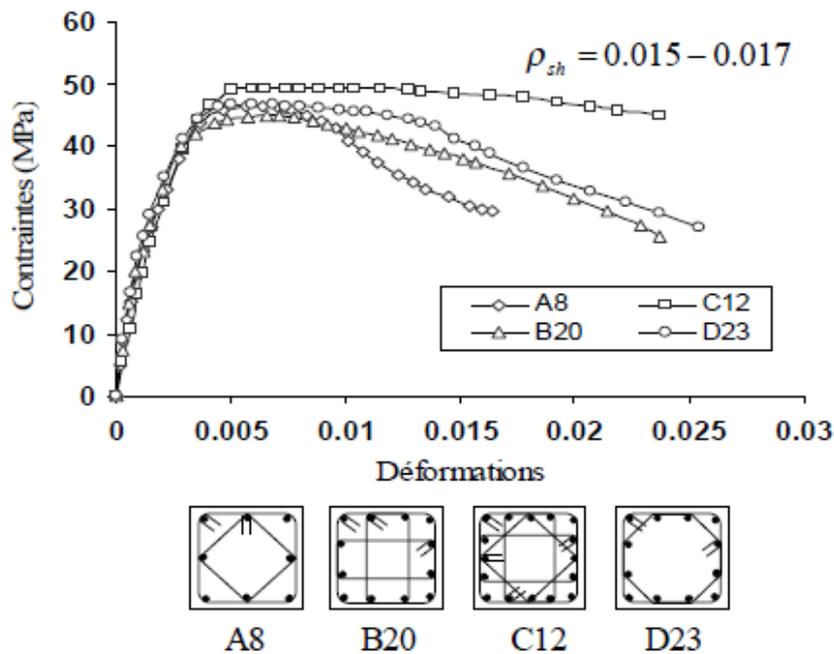


Figure (II.16): Influence de la configuration de l'armature transversale [21]

5. La résistance du béton, parce que le béton de faible résistance est un peu plus ductile que le béton de haute résistance.

6. Le rapport entre le diamètre de la barre transversale à la longueur non soutenue des barres longitudinales, effectivement, une barre transversale de faible diamètre n'est efficace qu'au droit des angles étant donné sa faible rigidité flexionnelle, cependant l'augmentation du diamètre transversale par rapport à la longueur des barres maintenues va sans doute améliorer l'action du confinement en raison de l'importance cette fois de la rigidité flexionnelle de la barre s'opposant efficacement à l'expansion volumétrique du béton à l'intérieur du noyau, dans le cas d'une spire circulaire cette variable n'a aucune signification : de par sa forme la spire sera mise en traction axiale et génère une pression radiale uniforme au béton.

7. La quantité et les dimensions des barres longitudinales. Les barres longitudinales sont habituellement de grand diamètre, et le rapport du diamètre de barre à la longueur non maintenue est généralement pris de façon que les barres puissent confiner efficacement le béton. Cependant, les barres longitudinales doivent être placées étroitement contre l'acier transversal, parce que celui-ci fournit les réactions de confinement aux barres longitudinales, et si le mouvement des barres longitudinales est nécessaire pour les mettre en contact efficace avec l'acier transversal, l'efficacité de confinement sera réduite.

En dehors de l'acier transversal le béton n'est pas confiné, et cet enrobage possède des caractéristiques contrainte-déformation différentes du béton à l'intérieur du noyau. Le béton d'enrobage commence généralement à se détacher quand la résistance non confiné est atteinte, en particulier si le taux du ferrailage transversal est élevé, parce que la pression développée par un grand nombre de barres transversales crée un plan ou une surface de faiblesse entre le béton confiné et non confiné et précipite l'éclatement. Ainsi pour des taux d'aciers transversaux élevés la contribution du béton d'enrobage aux contraintes élevées devrait être ignorée. On suppose généralement que le béton d'enrobage a les caractéristiques du béton non confiné jusqu'à la contrainte d'éclatement. Si le contenu en acier transversal est faible, le béton d'enrobage tendra à éclater moins aisément et tendra à agir plus avec le noyau confiné. Dans ce cas le béton d'enrobage peut être pris en compte [17]

II.5.2. Modélisation de la section en béton confiné :

II.5.2.1. Introduction :

Les études récentes montrent que la résistance et la déformation longitudinale correspondante pour un béton confiné par une pression hydrostatique d'un fluide peuvent être représentées par les relations suivantes :

$$f'_{cc} = f'_{c0} + k_1 f_l$$
$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0} \left(1 + k_2 \frac{f_l}{f'_{c0}} \right)$$

Ou :

- f'_{cc} et ε_{cc} : sont la contrainte maximale et la déformation maximale correspondante du béton sous la pression latérale du fluide f_l .
- f_l : pression latérale du fluide.
- f'_{c0} et ε_{c0} : sont respectivement la contrainte et la déformation du béton non confiné.
- k_1 et k_2 : des coefficients qui sont des fonctions du mélange du béton, et de la pression latérale.

D'après Richart et al. [19], La résistance du béton confiné par une pression latérale hydrostatique est approximativement la même que pour un béton confiné avec une pression de confinement passive des spirales en acier étroitement espacés. Notre proposition est basée sur ce principe simple.

II.2.2.2. Modélisation :

2.1. Cas d'une section circulaire :

Résistance à la compression du béton confiné f'_{cc} :

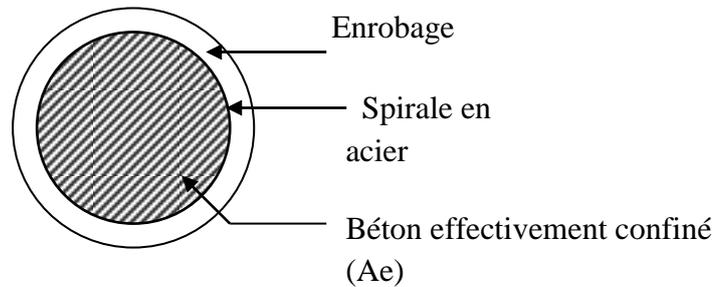


Figure I.17: section circulaire confinée par spirale en acier.

La résistance à la compression du béton confiné est donnée par [23] :

$$f_{cc} = f_{c0} \left(-1,254 + 2,254 \sqrt{1 + \frac{7,94 f'_l}{f_{c0}} - \frac{2 f'_l}{f_{c0}}} \right) \quad (\text{II.20})$$

- f_{c0} : résistance à la compression du béton non confiné.
- f'_l : pression de confinement latérale effective.

$$f'_l = f_l \times k_e \quad (\text{II.21})$$

- f_l : pression latérale du renforcement transversale supposer uniformément distribuée sur la surface du béton.
- k_e : coefficient de confinement effectif.

$$k_e = \frac{A_e}{A_{cc}}$$

- A_e : section effectivement confinée.

$$A_{cc} = A_c(1 - \rho_{cc}) \quad (\text{II.22})$$

ρ_{cc} : rapport entre la section des armatures longitudinales et la section du béton.

A_c : section interne comprise entre les spirales.

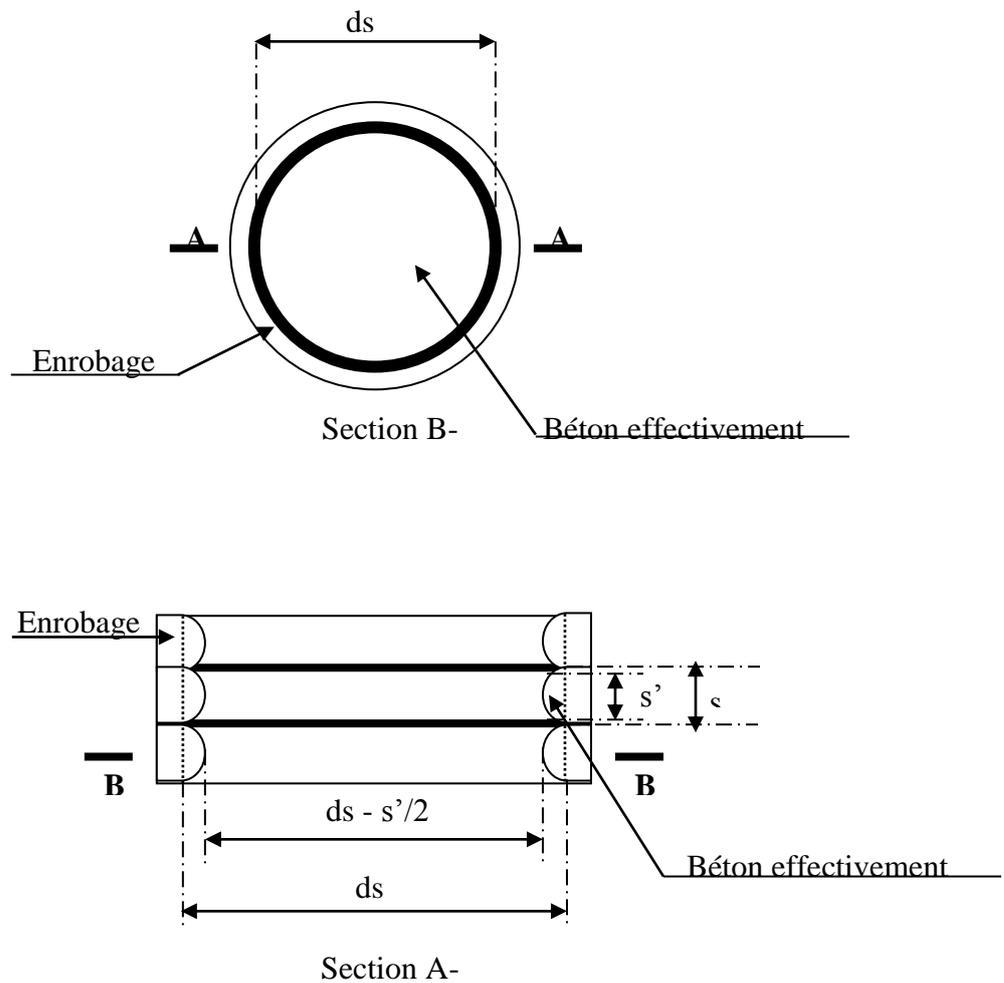


Figure II.18 : béton effectivement confiné (cas d'une section circulaire confinée par spirale en acier).

$$A_e = \frac{\pi}{4} \left(ds - \frac{s'}{2} \right)^2$$

$$A_e = \frac{\pi}{4} ds^2 \left(1 - \frac{s'}{2ds} \right)^2 \quad (\text{II.23})$$

$$A_{cc} = \frac{\pi}{4} ds^2 (1 - \rho_{cc}) \quad (\text{II.24})$$

Donc :

$$Ke = \frac{A_e}{A_{cc}} = \frac{\left(1 - \frac{s'}{2ds} \right)}{1 - \rho_{cc}}$$

$$Ke = \frac{\left(1 - \frac{s'}{2ds} \right)}{1 - \rho_{cc}} \quad (\text{II.25})$$

L'équilibre des forces dans une section donnée est :

$$2f_{yh} \times A_{sp} = f_l \times s \times ds$$

- f_{yh} : contrainte limite des aciers transversaux.
- A_{sp} : section des aciers transversaux.
- f_l : contrainte de confinement latérale.
- s : distance entre les extrémités des spirales (voir section A-A).
- ρ_s : rapport entre le volume des armatures de confinement transversales et le volume du béton confiné.

$$\rho_s = \frac{4A_{sp}}{ds \times s} \quad ; \quad s \times ds = \frac{4A_{sp}}{\rho_s}$$

$$f_l = \frac{2f_{yh} \times A_{sp}}{s \times ds}$$

$$\text{Donc } f_l = \frac{1}{2} \rho_s \times f_{yh}$$

En remplaçant (7) et (8) dans (2) :

$$f'_l = \frac{1}{2} \rho_s \times f_{yh} \times \frac{\left(1 - \frac{s'}{2ds}\right)}{1 - \rho_{cc}}$$

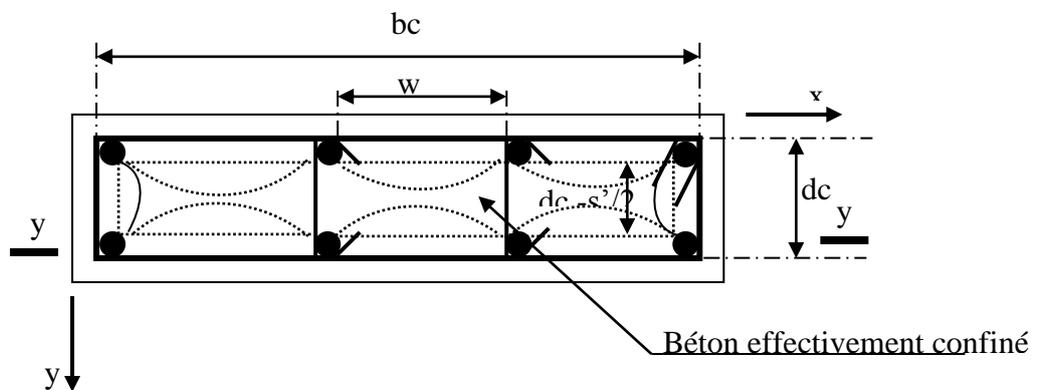
$$f'_l = \frac{1}{2} \rho_s \times ke \times f_{yh} \quad (\text{II.25})$$

2.2. Cas d'une section rectangulaire :

Pour une section rectangulaire la section effectivement confinée est celle obtenue après avoir soustraites toutes les paraboles non confinées.

Pour une parabole la section est de $(\omega'_i)^2/6$.

- (ω'_i) : la distance entre deux armatures longitudinales adjacentes.



Section z-z

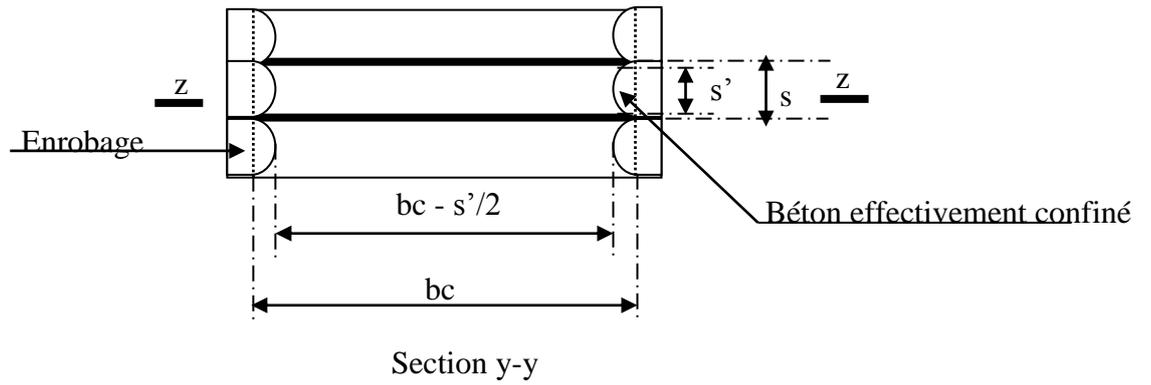


Figure II.19 : béton effectivement confiné (cas d'une section rectangulaire confinée par armatures transversales).

Pour une section de n barres longitudinales la section non confiné a soustraire est :

$$A_i = \sum_{i=1}^n \frac{(\omega'_i)^2}{6} \quad (\text{II.26})$$

$$A_e = \left(bc \times dc - \sum_{i=1}^n \frac{(\omega_i)^2}{6} \right) \times \left(1 - \frac{s'}{2bc} \right) \times \left(1 - \frac{s'}{2dc} \right) \quad (\text{II.27})$$

$$A_{cc} = bc \times dc (1 - \rho_{cc}) \quad (\text{II.28})$$

$$k_e = \frac{A_e}{A_{cc}} = \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{(\omega_i)^2}{6 \times bc \times dc} \right) \times \left(1 - \frac{s'}{2bc} \right) \times \left(1 - \frac{s'}{2dc} \right)}{(1 - \rho_{cc})}$$

$$ke = \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{(\omega_i')^2}{6 \times bc \times dc}\right) \times \left(1 - \frac{s'}{2bc}\right) \times \left(1 - \frac{s'}{2dc}\right)}{(1 - \rho_{cc})} \quad (\text{II.30})$$

On peut exprimer :

$$\rho_x = \frac{A_{sx}}{s \times dc}$$

$$\rho_y = \frac{A_{sy}}{s \times bc}$$

$$f'_{lx} = \frac{A_{sx}}{s \times dc} f_{yn} = \rho_x \times f_{yh} \quad (\text{II.31})$$

$$f'_{ly} = \frac{A_{sy}}{s \times bc} f_{yn} = \rho_y \times f_{yh} \quad (\text{II.32})$$

On aura :

$$f'_{lx} = ke \times \rho_x \times f_{yh} \quad (\text{II.33})$$

$$f'_{ly} = ke \times \rho_y \times f_{yh} \quad (\text{II.34})$$

La distribution de la contrainte de confinement latérale se fait selon un angle de 45°, la valeur de f_l est donnée par :

$$f_{l45} = \frac{f'_{lx} + f'_{ly}}{2} \quad (\text{II.35})$$

II.5.3. Quelques modèles de calcul :

3. 1. Modèle d'Hognestad [24]

La loi de comportement du béton reprend le modèle d'Hognestad [Hognestad, 1951] permet de reproduire l'adoucissement après fissuration, le comportement unilatéral du béton (refermeture des fissures) ainsi que l'adoucissement après avoir atteint la résistance en compression et la prise en compte du confinement sur cet adoucissement et la résistance en compression. Deux fonctionnements d'ouverture et refermeture de fissures sont possibles, (Figure II.19).

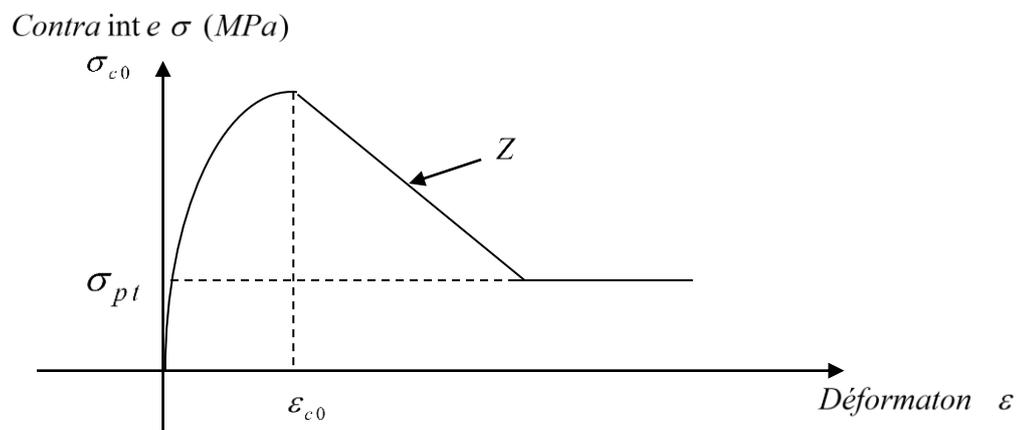


Figure II.20: Loi de comportement du béton confiné [Hognestad, 1951]

1. Comportement en compression

Sous chargement monotone, la loi est du type parabole puis linéaire avec adoucissement. Un plateau avec une contrainte résiduelle non nulle peut-être défini après l'adoucissement. En utilisant les conventions génie civil (déformation positive en compression) :

$$\text{Pour } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{c0}, \quad \frac{\sigma}{\sigma_{c0}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) \quad (\text{II.36})$$

$$\text{Pour } \varepsilon_{c0} < \varepsilon, \quad \frac{\sigma}{\sigma_{c0}} = 1 + Z \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{c0}) \quad (\text{II.37})$$

Avec:

- $\varepsilon_{c0} = 2 \cdot \frac{\sigma_{c0}}{E}$ et de plus il faut prendre la contrainte résiduelle ;
- $\sigma_{pt} = 20\%$ de la contrainte maximale ;
- $(\varepsilon_{c0}, \sigma_{c0})$ Sont les coordonnées du pic de la courbe de compression ;
- Z : pente après le pic ;
- σ_{pt} : contrainte résiduelle.

2. La prise en compte du confinement en compression

La ductilité d'une section en béton armé et donc le comportement sismique de la structure dépendent fortement du confinement du béton et le paramètre Z qui est directement fonction du confinement apporté par les cadres.

Si $Z < 0$: la valeur de Z est calculée à partir des coefficients α et ω_w . De plus, dans ce cas, la contrainte et la déformation au pic corrigées d'un facteur β :

$$\sigma'_{c0} = \beta \cdot \sigma_{c0} \quad \text{et} \quad \varepsilon'_{c0} = \beta^2 \cdot \varepsilon_{c0} \quad (\text{II.38})$$

Avec : $\beta = \min(1 + 2,5 \cdot \alpha \cdot \omega_w, 1,125 + 1,25 \cdot \alpha \cdot \omega_w)$

Donc :

$$Z = \frac{\beta - 0,85}{\beta \cdot (0,1 \cdot \alpha \cdot \beta + 0,0035 + \varepsilon_{c0})} \quad (\text{II.39})$$

Les coefficients α et ω_w sont déterminés à l'aide des formules suivantes :

$$\alpha = \left(1 - \frac{8}{3n}\right) \left(1 - \frac{s}{2 \cdot b_c}\right) \left(1 - \frac{s}{2 \cdot h_c}\right)$$

$$\beta = \frac{A_{cadre} \cdot f_{yt}}{b_c \cdot h_c \cdot f_{cu}} \sum \left(\frac{l_w}{s}\right)$$

Avec :

n : Nombre de barres de flexion ;

b_c et h_c : Dimension de la surface de béton confiné par les cadres ;

s : Espacement des cadres ;

A_{cadre} : Section d'un cadre ;

l_w : Longueur totale des cadres ;

f_{cu} : Contrainte ultime pour le béton ;

f_{yt} : Contrainte de plastification des cadres.

Si $Z > 0$: Les coefficients α et ω_w sont ignorés, et la valeur de Z peut être déterminée à l'aide des formules précédentes.

3. Comportement en traction

Le béton possède une résistance en traction mais est fragile après fissuration. La loi est linéaire par morceau en traction :

- jusqu'au pic, le comportement est linéaire, la résistance en traction est notée σ_{pt} ;
- l'adoucissement est linéaire la déformation ultime est proportionnelle à la déformation au pic, le facteur de proportionnalité étant noté ε_{rt} ,
- un plateau résiduel a été introduit, la résistance résiduelle est notée (ε_{rt}).

L'avantage de ce type de modèle, réside dans la prise en compte implicite de l'effet de l'effort normal sur le moment fléchissant résistant maximal ainsi que sur la ductilité de la section.

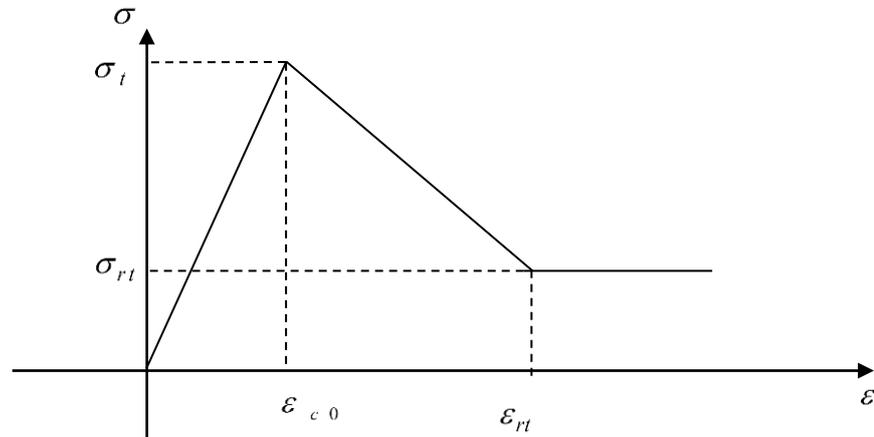


Figure II.21: Comportement en traction du béton [Hognestad, 1951]

3. 2. Modèle Mander et al [23]

$$\sigma_{cc} = \frac{f_{cc} x^n}{n-1+x^n} \quad (\text{II.40})$$

Avec :

σ_{cc} : Contrainte du béton confiné ;

f_{cc} : Résistance limite du béton confiné ;

3. 3. Modèle B. Bousalem Æ N. Chikh [25]

$$f_c = \frac{f_{cc} x^n}{n-1+x^n} \quad (\text{Partie ascendante})$$

$$f_c = f_{cc} - E_s (\varepsilon_c - \varepsilon_{cc0}) \geq 0.3 f_{cc} \quad (\text{Partie descendante})$$

$$E_c = 1100\sqrt[3]{f_{c0}}$$

$$E_s = \frac{4 \times f_{c0}^2}{k_e \times \rho_s \times f_{yh}}$$

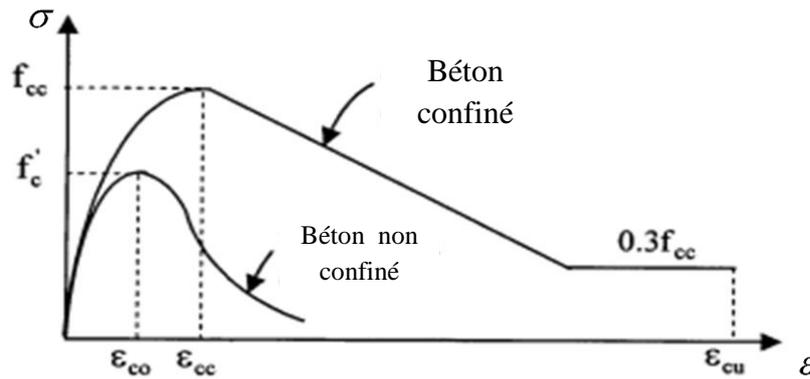


Figure II.22: Loi de comportement du béton confiné proposée par B. Bousalem & N. Chikh

Avec :

f_c : Contrainte du béton non confiné ;

f_{cc} : Contrainte du béton confiné ;

E_s : Module correspondant à la branche descendante du béton confiné ;

k_e : Coefficient de confinement effectif ;

f_{yh} : Contrainte limite des aciers transversaux ;

ρ_s : Rapport entre le volume des armatures de confinement transversales et le volume du béton confiné,

f_{c0} : Contrainte du béton non confiné à l'âge j

ε_{cc0} : Déformation au pic, correspondante à la contrainte du béton confiné ;

ε_c : Déformation du béton confiné.

3. 4. Loi de comportement de Sheick et Uzumeri (1983) [27]

Sheick et Uzumeri publient une explication rationnelle concernant l'effet de confinement du béton. La détermination de la résistance du béton confiné se définit comme une fonction :

- de la valeur de la résistance au centre du béton ;
- du volume total d'acier ;
- de l'espacement des étriers ;
- de la limite élastique des étriers ;
- de la configuration des étriers ;
- de l'effet des dimensions de la section.

La résistance à la compression maximale du béton confiné f_{cc} est donnée par la formule suivante :

$$f_{cc} = 0,85 f'_c \left(1 + \frac{A_e \beta \sqrt{\rho_s f'_s}}{P_{occ}} \right) \quad (\text{II.41})$$

Avec :

- A_e : surface du béton confiné
- f'_c : contrainte du béton non renforcé ;
- f'_s : limite élastique de l'acier ;
- ρ_s : rapport entre le volume latéral de renforcement et le volume du béton confiné ;
- β constante ;
- $P_{occ} = 0,85 f'_c (c_x \cdot c_y - A_s)$ (II.42)
- c_x : distance d'axe à axe des étriers extérieurs dans une direction ;

$-c_y$: distance d'axe à axe des étriers extérieurs.

3. 5. Modèle Saatcioglu et al [04]

$$\sigma_{cc} = f_{cc} \left[2x - (x)^2 \right]^{\frac{1}{(1+2K)}} \quad (\text{Partie ascendante})$$

$$\sigma_{cc} = f_{cc} - Z (\varepsilon_c - \varepsilon_{cc0}) \geq 0.2 f_{cc} \quad (\text{Partie descendante})$$

$$Z = \frac{0.15 \times f_{cc}}{(\varepsilon_{85} - \varepsilon_{cc0})}$$

Avec :

σ_{cc} : Contrainte

du béton confiné ;

f_{cc} : Résistance limite du béton confiné ;

K : Coefficient de confinement effectif ;

ε_{cc0} : Déformation correspondante à la contrainte du béton confiné ;

ε_{85} : Déformation correspondante à 85% de f_{cc} ;

3. 6. Modèle Hoshikuma et al [04]

$$\sigma_{cc} = E_c \varepsilon_c \left[1 - \frac{1}{n} x^{n-1} \right] \quad (\text{Partie ascendante})$$

$$\sigma_{cc} = f_{cc} - E_{des} (\varepsilon_c - \varepsilon_{cc}) \geq 0.5 f_{cc} \quad (\text{Partie descendante})$$

$$x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc0}} \quad \text{et} \quad E_{des} = \frac{11.2 \times f_{c0}^2}{\rho_{sh} \times f_{yh}}$$

Avec :

σ_{cc} : Contrainte du béton confiné ;

ε_c : Déformation du béton confiné ;

f_{cc} : Résistance limite du béton confiné ;

E_{des} : Module de déformation régit la partie descendante poste pic ;

f_{yh} : Contrainte limite des aciers transversaux ;

ρ_{sh} : Rapport entre le volume des armatures de confinement transversales et le volume du béton confiné,

f_{c0} : Contrainte du béton non confiné à l'âge j.

3. 7. Modèle proposé par Bouafia.Y, Iddir. K et Kachi. M.S

Le modèle de confinement proposé par BOUAFIA. Y et IDDIR. K et KACHI. M.S [19] est développé suite à une analyse rigoureuse des modèles analytiques existants et une exploitation des données expérimentales.

La courbe définissant la relation contrainte –déformation du béton confiné est défini par les trois relations suivantes :

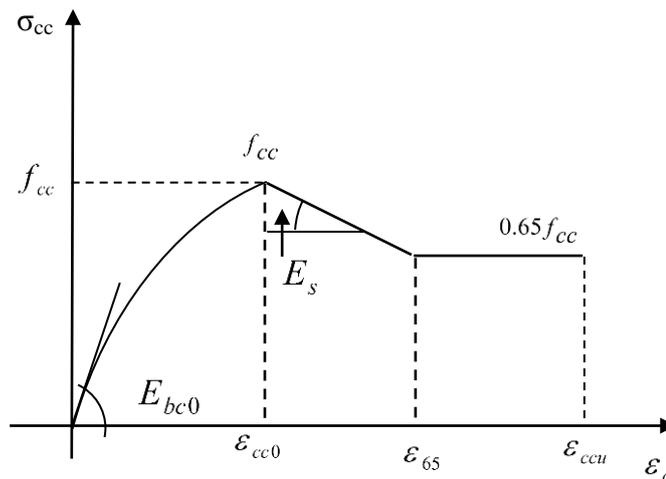


Figure II.23: Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton confiné

La première partie est une courbe ascendante non linéaire, la loi de Sargin a été modifiée pour tenir compte du confinement :

$$\ast \underline{0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{cc}} : \sigma_{cc} = f_{cc} \times \frac{k_c \times \bar{\varepsilon}_c + (k'_c - 1) \times \bar{\varepsilon}_c^2}{1 + (k_c - 2) \times \bar{\varepsilon}_c + k'_c \times \bar{\varepsilon}_c^2} \quad (\text{II.43})$$

Avec :

- f_{cc} : résistance à la compression maximale du béton confiné définie précédemment, elle est donnée par :

$$f_{cc} = f_{c0} \left(-1,254 + 2,254 \sqrt{1 + \frac{7,94 f'_l}{f_{c0}} - \frac{2 f'_l}{f_{c0}}} \right)$$

f'_l : Pression latérale du renforcement transversale supposer uniformément distribuée sur la surface du béton.

$$\text{Avec :} \quad \varepsilon_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \quad ; \quad \varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0} \times \left[1 + 5 \left(\frac{f_{cc}}{f_{c0}} - 1 \right) \right]$$

$$k_c = \frac{E_{bc0} \times \varepsilon_{cc}}{f_{cc}} \quad ; \quad k'_c = k_c - 1$$

La deuxième partie est descendante linéaire après le pic (poste pic), la relation est décrite par :

$$* \underline{\varepsilon_{cc} \leq \varepsilon < \varepsilon_{65}} :$$

$$\sigma_{cc} = f_{cc} - E_s (\varepsilon_c - \varepsilon_{cc}) \quad (\text{II.44})$$

Avec :

$$E_s = \frac{6 \times f_{c0}^2}{k_e \times \rho_s \times f_{yh}} \quad \varepsilon_{65} = \frac{0.35 \times f_{cc}}{E_s} + \varepsilon_{cc}$$

Et la troisième partie représente un palier de ductilité, la relation contrainte – déformation est donnée par :

$$* \underline{\varepsilon \geq \varepsilon_{65}} :$$

$$\sigma_{cc} = 0,65 f_{cc} \quad (\text{II.45})$$

Conclusion

A la lumière des résultats produits par les diverses études, il a été conclu que :

1. Le confinement est positivement affecté par plusieurs paramètres dont les plus déterminants sont:

- le taux et la configuration de l'armature transversale avec l'espacement approprié;
- la résistance des matériaux ;
- le taux et la distribution adéquate de l'armature longitudinale sur le périmètre de la section; ainsi que l'intensité de l'effort normal.

2. Le confinement offre deux avantages concernant le comportement sismique des éléments structuraux en béton:

- il augmente la résistance du béton, qui va compenser le manque causé par l'éclatement du béton d'enrobage.
- il redresse la pente de la partie descendante de la courbe $\sigma_C - \epsilon_C$; ainsi Il augmente la déformation maximum du béton ϵ_{cu} à des valeurs largement supérieures à celles du béton non confiné.

3. Les lois de comportement rapportées dans ce chapitre sont basées sur les contraintes réelles et les déformations correspondantes en élasticité non linéaire. Les contraintes et les déformations sont fonction de plusieurs paramètres mécaniques du béton et de l'acier respectivement, qui sont essentiellement :

- La résistance limite du béton en traction (béton tendu) qui vaut environ $1/10^{\text{ème}}$ de la résistance limite du béton en compression ;
- La contribution des armatures transversales qui augmentent la contrainte limite élastique du béton en compression par confinement.

La grande majorité des lois simulent de manière identique la partie ascendante des courbes ($\sigma - \epsilon$) du béton confiné et non confiné en compression. La partie descendante (post – pic) du béton confiné et non confiné présenté et décrite de manière différentes par les auteurs.

Le modèle proposé par Vecchio et Collins décrit le comportement du béton non confiné en traction en tenant compte des armatures longitudinales enrobées de béton.

Ceci est valable pour le béton situé au voisinage de ces armatures d'un rayon équivalent à 7.5 fois le diamètre de l'armature concernée.

Le modèle proposé par Mac Gregor, décrit le comportement du béton non confiné en compression. L'apparition des microfissures se produit pour des contraintes supérieures à 40 % de sa résistance, traduisant des pertes de rigidité jusqu'à rupture.

Le modèle de Sargin décrit le comportement du béton non confiné en compression jusqu'à rupture d'une façon simple en utilisant une seule loi de comportement $(\sigma_b, \varepsilon_b)$. Cette loi s'écrit en fonction de deux paramètres (K_b, K'_b) gouvernant les branches ascendante et descendante, respectivement.

Pour le béton confiné en compression, Le modèle proposé par Mander et al, décrit uniquement la partie ascendante (une seule relation). L'expression mathématique n'est pas assez souple pour tenir compte des exactitudes des paramètres. Cette expression est limitative.

Les modèles proposés par Saatcioglu et al, Hoshikuma, et Bousalem tiennent compte du béton confiné et leur domaine d'application se limite à des pourcentages de confinement allant de 20 à 25 %, et celui proposé par Iddir, Bouafia et Kachi (2009), le pourcentage de confinement allant de 10 à 25 %.

Le confinement en général est introduit par un coefficient de confinement effectif, le pourcentage d'armature transversal et la limite élastique des aciers.

Pour notre étude nous retiendrons deux lois de comportement qui prennent en compte le béton tendu, celle de A.Grelat[01] et la contribution des armatures transversales, celle de Iddir, Bouafia et Kachi (2009).

III) METHODE DE CALCUL

III.1. Principe general :

La structure réelle est idéalisée en une ossature composée d'éléments finis comme expliqué au chapitre I, dont les extrémités constituent l'ensemble des noeuds de la structure.

La prise en compte des effets des non linéarités matérielles et des effets du second ordre, rend le problème non linéaire. La discrétisation de la structure par éléments finis conduit donc à un système d'équation non linéaire dont la solution est inaccessible de façon directe.

Le problème non linéaire est résolu en utilisant une méthode itérative, basée sur la méthode des déplacements, dans une formulation incrementale à rigidité variable.

Pour un accroissement de chargement extérieur $\{\Delta P\}$ donné, on construit la matrice $[K]$ de la structure et le vecteur $\{A\}$ dû à l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles.

Pour chaque étape de chargement, le problème consiste à chercher l'accroissement de déplacement des noeuds $\{\Delta U\}$ solution du système non linéaire suivant :

$$\{\Delta P\} + \{A\} = [K] \cdot \{\Delta U\} \quad (\text{III.1})$$

La matrice de rigidité $[K]$ et le vecteur $\{A\}$ sont formés respectivement à partir des matrices $[K_x]$ et des vecteurs $\{A_x\}$ des différents éléments dans le repère absolu de la structure, compte tenu de l'équilibre des noeuds de la structure .

$[K_x]$ et $\{A_x\}$ sont formés en étudiant le comportement mécanique d'un certain nombre de sections transversales le long de l'élément dans un repère dit " intrinsèque " lié à la position déformée de l'élément.

Les effets de second ordre dus aux déplacements des noeuds sont introduits dans le passage du repère intrinsèque au repère fixe lié à la structure .

III.2. Etude d'une section droite en elasticite non lineaire :

III.2.1. HYPOTHESES ET NOTATIONS :

Nous nous intéressons à l'étude d'une section droite d'un élément de poutre en béton armé, béton précontraint, sollicitée en flexion. La section est étudiée dans l'hypothèse des petites déformations et du comportement élastique non linéaire. Elle est définie dans le repère principal Gyz.

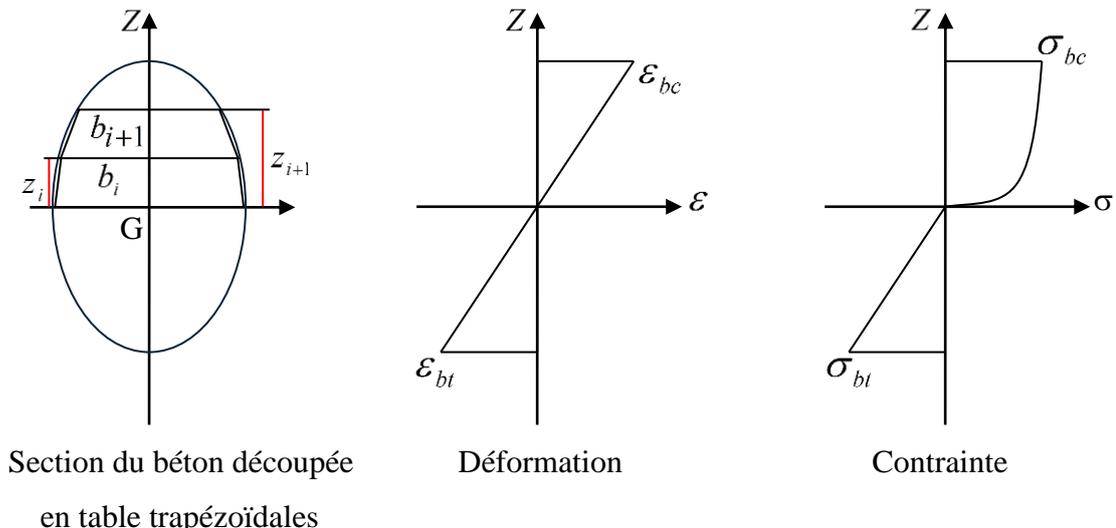


Figure III.1 : Diagramme contrainte et déformation dans une section droite.

L'axe Gx est normal au plan de la section droite et de la même orientation que la fibre moyenne de l'élément. La déformation longitudinale en un point d'une section droite est régie par la loi de conservation des sections planes.

Nous supposons que les aciers passifs, les câbles de précontrainte après mise en tension, sont parfaitement solidaires au béton.

L'effet de la précontrainte est introduite en tenant compte du phasage éventuel sur la mise en tension des câbles. A la mise en tension, l'action de la précontrainte, sur la section, est un effort de compression, égal et opposé à l'effort de traction dans le câble. Cet effort est appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble, au point où il traverse la section. Les câbles de précontrainte deviennent des éléments résistants, immédiatement après leur mise en tension, et possédant une pré-déformation par rapport à la section.

Dans le cadre de cette étude, l'analyse non-linéaire concerne essentiellement les sollicitations normales dues à un effort normal N et à un moment de flexion M, agissant dans le plan zy.

Quant à la sollicitation tangente, dans le béton due à l'effort tranchant T dans le plan zy , elle est calculée en supposant que la rigidité correspondante est constante et est prise égale à celle obtenue en élasticité linéaire .

Compte tenu de l'hypothèse des sections planes et de l'adhérence parfaite entre les matériaux constituant la section, la déformation longitudinale ε comptée positivement dans le sens des raccourcissements en un point courant de la section est donnée par :

$$\varepsilon = \varepsilon_g + z \cdot \phi \quad (\text{III.2})$$

Où :

ε_g : Allongement unitaire au centre de gravité de la section

ϕ : Rotation unitaire de flexion autour de l'axe Gy

Les déformations normales (ε_g, ϕ) , peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur $\{\delta_n\}$, défini par

$$\{\delta_n\} = (\varepsilon_g, \phi)^T \quad (\text{III.3})$$

De plus la déformation tangente, considérée dans l'hypothèse, peut s'écrire sous forme :

$$\{\delta_t\} = \gamma \quad (\text{III.4})$$

Où :

γ : Déformation de cisaillement de la section dans le plan zy .

Nous notons par $\{\Delta\delta_n\}$, la matrice colonne (2x1) contenant l'accroissement de déformation de la section droite sous sollicitations normales, par $\{\Delta\delta_t\}$ la déformation de la section droite sous sollicitations tangentes .

$$\{\Delta\delta_n\} = (\Delta\varepsilon_g, \Delta\phi)^T \quad (\text{III.5})$$

$$\{\Delta\delta_t\} = \Delta\gamma \quad (\text{III.6})$$

On montre qu'à une déformation $\{\delta_n\}$ et $\{\delta_t\}$ de la section droite , il correspond dans une armature adhérente et inclinée à la section , une déformation ε_a , telle que [18]:

$$\varepsilon_a = \cos^2 \alpha . (1, z_a) . \{\delta_n\} + \sin \alpha . \cos \alpha . \{\delta_t\} \quad (\text{III.7})$$

Où :

α : Angle que fait la ligne moyenne du câble avec l'axe Gx normal à la section droite .

Dans le cas d'une armature de précontrainte , la relation (III.7) doit être corrigée pour tenir compte de la pré-déformation ε_p^* du câble par rapport à la section droite , dont le calcul est développé en annexe N° 1 . La déformation ε_p^* dans le câble , correspond à l'état de la décompression de la section .

Elle exprime la différence entre la déformation du câble et la déformation de la section , dans la direction du câble , au moment de la mise en tension . La déformation dans le câble , au moment de la mise en tension correspond par la loi de comportement à la contrainte initiale σ_0 compte tenu des pertes instantanées .

La déformation dans l'armature de précontrainte d'ordre i peut donc s'écrire sous forme :

$$\varepsilon_{pi} = \cos^2 \alpha_i . (1, z_{pi}) . \{\delta_n\} + \sin \alpha_i . \cos \alpha_i . \{\delta_t\} + \varepsilon_{pi}^* \quad (\text{III.8})$$

III.2.2. CALCUL DES SOLLICITATIONS INTERNES :

III.2.2.1. Sollicitations dues au béton :

Les sollicitations normales à la section droite dues au béton peuvent s'écrire sous la forme d'un vecteur $\{F_{mn}\}$, défini dans le repère principal Gzy , lié à la section droite par :

$$\{F_{mn}\} = \begin{Bmatrix} N_m \\ M_m \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\Sigma_b} \sigma_m . \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} . d\Sigma_b \quad (\text{III.9})$$

Où :

σ_m : Contrainte normale en un point courant de la section du béton .

Σ_b : Section brute du béton d'une couche d'ordre i de la section droite ,

N_c : Nombre de couche sur la section droite du béton .

La variation des déformations normales $\{ \Delta \delta_n \}$ de la section droite , produit une variation de sollicitations normales $\{ \Delta F_{mn} \}$ dans le béton .

En tenant compte des relations (III.2) et (III.9) , nous pouvons écrire sous la forme matricielle :

$$\{ \Delta F_{mn} \} = [K_{1m}] \cdot \{ \Delta \delta_n \} \quad (III.10)$$

Avec :

$$[K_{1m}] = \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\Sigma_b} E_m \cdot \begin{bmatrix} 1 & z \\ z & z^2 \end{bmatrix} \cdot d\Sigma_b \quad (III.11)$$

E_m : Module élastique longitudinal en un point courant de la section du béton .Il relie l'accroissement de la contrainte normale $\Delta \sigma_m$ à l'accroissement de déformation longitudinal $\Delta \varepsilon_m$ correspondant au point courant.

$$\Delta \sigma_m = E_m \cdot \Delta \varepsilon_m \quad (III.12)$$

Les sollicitations tangentes dues au béton sont calculées en fonction des déformations correspondantes en supposant un comportement linéaire .

Elles peuvent s'écrire sous forme :

$$\{ F_{mt} \} = T = [K_{2m}] \cdot \{ \delta_t \} \quad (III.13)$$

Où :

$\{ \delta_t \}$: Déformation de la section sous sollicitations tangentes

$K_{2m} = G.A$: Rigidité de la section à l'effort tranchant dans le plan xz .

La rigidité à l'effort tranchant est constante , alors la relation (III.13) est aussi valable pour les accroissements d'efforts , dès lors :

$$\{\Delta F_{mt}\} = [K_{2m}] \cdot \{\Delta \delta_t\} \quad (III.14)$$

En tenant compte des relations (III.10) et (III.14) , nous pouvons écrire sous forme matricielle la relation liant les accroissements de déformations dans une section droite, et les accroissements de sollicitations internes développés dans le béton .

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{mn} \\ \Delta F_{mt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1m} & 0 \\ 0 & K_{2m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \delta_t \end{Bmatrix} \quad (III.15)$$

III.2.2.2. Sollicitations dues aux armatures passives :

Les sollicitations normales dues aux armatures passives, considérées concentrées en leur centre de gravité, peuvent s'écrire sous la forme d'un vecteur $\{F_{an}\}$ défini dans le repère principal Gyz , lié à la section droite, par :

$$\{F_{an}\} = \begin{Bmatrix} N_a \\ M_a \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_a} \sigma_{ai} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ z_{ai} \end{bmatrix} \cdot A_{ai} \quad (III.16)$$

La variation de déformation normale $\{\Delta \delta_n\}$ de la section droite , produit une variation des sollicitations normales $\{\Delta F_{an}\}$ dans les armatures passives . En tenant compte des relations (III.2) et (III.16) , on peut écrire sous forme matricielle :

$$\{\Delta F_{an}\} = [K_{1a}] \cdot \{\Delta \delta_n\} \quad (III.17)$$

Où :

$[K_{1a}]$: Matrice symétrique (2x2) définie par :

$$[\mathbf{K}_{1a}] = \sum_{i=1}^{Na} E_{ai} \cdot \begin{bmatrix} 1 & z_{ai} \\ z_{ai} & z_{ai}^2 \end{bmatrix} \cdot A_{ai} \quad (\text{III.18})$$

E_{ai} : Module élastique au niveau de l'armature passive d'ordre i . Il relie l'accroissement de contrainte normale $\Delta\sigma_{ai}$ à l'accroissement de déformations longitudinales $\Delta\varepsilon_{ai}$ correspondantes au niveau de l'armature.

$$\Delta\sigma_{ai} = E_{ai} \cdot \Delta\varepsilon_{ai} \quad (\text{III.19})$$

En négligeant les sollicitations tangentes dues aux armatures passives pendant la déformation de la section, on peut écrire sous forme matricielle, la relation liant les accroissements de déformations dans une section aux accroissements de sollicitation internes développées dans les armatures passives.

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{an} \\ \Delta F_{at} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\delta_n \\ \Delta\delta_t \end{Bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

III.2.2.3. SOLLICITATIONS NORMALES DUES AUX ARMATURES DE PRECONTRAINTE :

Les sollicitations normales à la section droite, dues aux armatures de précontrainte adhérentes, inclinées et supposées concentrées en leur centre de gravité, peuvent s'inscrire sous forme d'un vecteur $\{F_{pn}\}$, défini dans le repère principal Gyz , lié à la section droite par :

$$\{F_{pn}\} = \begin{Bmatrix} N_p \\ M_p \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_{p1}} \sigma_{pi} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ z_{pi} \end{bmatrix} \cdot A_{pi} \cdot \cos \alpha_i \quad (\text{III.21})$$

Où :

σ_{pi} : Contrainte normale dans le câble d'ordre i

A_{pi} : Section du câble i

α_i : Angle que fait la ligne moyenne du câble i avec l'axe Gx

N_{p1} : Nombre d'armatures de précontrainte adhérentes au béton dans la section droite .

De même les sollicitations tangentes dues aux armatures de précontrainte peuvent écrire sous forme d'un vecteur $\{F_{pt}\}$ défini dans le repère principal lié à la section droite par :

$$\{F_{pt}\} = T = \sum_{i=1}^{N_{p1}} \sigma_{pi} \cdot \sin \alpha_i \cdot A_{pi} \quad (III.22)$$

La variation de déformation $\{\Delta\delta_n\}$ et $\{\Delta\delta_t\}$ de la section droite , produit une variation de sollicitation interne $\{\Delta F_{pn}\}$ et $\{\Delta F_{pt}\}$ dans les armatures de précontrainte .

En vertu des relations (III.21) et (III.22) , nous pouvons écrire :

$$\{\Delta F_{pn}\} = \sum_{i=1}^{N_{p1}} E_{pi} \cdot A_{pi} \cdot \cos \alpha_i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ Z_{pi} \end{pmatrix} \cdot \Delta \varepsilon_{pi} \quad (III.23)$$

et

$$\{\Delta F_{pt}\} = \sum_{i=1}^{N_{p1}} E_{pi} \cdot A_{pi} \cdot \sin \alpha_i \cdot \Delta \varepsilon_{pi} \quad (III.24)$$

Où :

E_{pi} : Module élastique longitudinal de l'armature de précontrainte d'ordre i

Il relie l'accroissement de contrainte $\Delta\sigma_{pi}$ à l'accroissement de déformation $\Delta\varepsilon_{pi}$ au niveau de l'armature d'ordre i :

$$\Delta\sigma_{pi} = E_{pi} \cdot \Delta\varepsilon_{pi} \quad (III.25)$$

En tenant compte des relations (III.23) , (III.24) et (III.7) , nous arrivons à la relation matricielle liant les accroissements de déformations de la section aux accroissements de sollicitations internes développées dans les armatures de précontrainte :

$$\begin{Bmatrix} \{\Delta F_{pn}\} \\ \{\Delta F_{pt}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{1p}] & [K_{12p}] \\ [K_{12p}]^T & [K_{2p}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\Delta \delta_n\} \\ \{\Delta \delta_t\} \end{Bmatrix} \quad (III.26)$$

Avec :

$$[K_{1p}] = \sum_{i=1}^{Np1} E_{pi} \cdot A_{pi} \cdot \cos^3 \alpha_i \begin{bmatrix} 1 & z_{pi} \\ z_{pi} & z_{pi}^2 \end{bmatrix} \quad (III.27)$$

$$[K_{12p}] = \sum_{i=1}^{Np1} E_{pi} \cdot A_{pi} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos^2 \alpha_i \begin{bmatrix} 1 \\ z_{pi} \end{bmatrix} \quad (III.28)$$

$$[K_{2p}] = \sum_{i=1}^{Np1} E_{pi} \cdot A_{pi} \cdot \sin^2 \alpha_i \cdot \cos \alpha_i \quad (III.29)$$

$$[K_{12p}]^T = \sum_{i=1}^{Np1} E_{pi} \cdot A_{pi} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos^2 \alpha_i (1, z_{pi}) \quad (III.30)$$

III.2.3. Déformation de la section a l'équilibre :

La section droite est supposée soumise :

- Aux accroissements d'efforts sollicitants dus aux forces extérieures . Ces sollicitations peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur $\{\Delta F_{sn}\}$ contenant les accroissements de sollicitations normales et $\{\Delta F_{st}\}$ contenant les sollicitations tangentes :

$$\{\Delta F_{sn}\} = (\Delta N, \Delta M)^T \quad (III.31)$$

$$\{\Delta F_{st}\} = \Delta T \quad (III.32)$$

- A l'action de la précontrainte, lors de la mise en tension des câbles, qui peut s'écrire sous forme d'un vecteur $\{A_{sn}\}$, contenant les sollicitations normales et d'un vecteur $\{A_{st}\}$ contenant les sollicitations tangentés.

Compte tenu de la convention de signe adoptée au paragraphe (III.2.1) , nous avons :

$$\{A_{sn}\} = - \sum_{i=1}^{Np2} \sigma_{oi} \cdot \cos \alpha_i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ Z_{pi} \end{bmatrix} \cdot A_{pi} \quad (III.33)$$

et

$$\{A_{st}\} = - \sum_{i=1}^{Np2} \sigma_{oi} \cdot \sin \alpha_i \cdot A_{pi} \quad (III.34)$$

Où :

σ_{oi} : Contrainte initiale dans le câble d'ordre i après pertes instantanées.

$Np2$: Nombre de câbles de précontraintes, traversant la section, concernés par la mise en tension.

L'équilibre de la section droite se traduit par l'égalité des accroissements d'efforts sollicitants et les accroissements d'efforts internes .

$$\begin{bmatrix} \{\Delta F_{sn}\} \\ \{\Delta F_{st}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{A_{sn}\} \\ \{A_{st}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\Delta F_{mn}\} \\ \{\Delta F_{mt}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Delta F_{an}\} \\ \{\Delta F_{at}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Delta F_{pn}\} \\ \{\Delta F_{pt}\} \end{bmatrix} \quad (III.35)$$

En remplaçant les efforts internes par leurs expressions développées au paragraphe (III.2.2) , et les efforts externes par les relations (III.31) , (III.32) , (III.33) et (III.34), on arrive à la relation matricielle liant les accroissements d'efforts sollicitants et les accroissements de déformations dans une section droite en béton armé, béton précontraint .

$$\begin{bmatrix} \Delta F_{sn} \\ \Delta F_{st} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{sn} \\ A_{st} \end{bmatrix} = [K_s] \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \delta_t \end{bmatrix} \quad (III.36)$$

$[K_s]$: Représente la matrice de rigidité symétrique (3x3) de la section .

$$[K_s] = \begin{bmatrix} [K_{1m}] + [K_{1a}] + [K_{1p}] & [K_{12p}] \\ [K_{12p}]^T & [K_{2m}] + [K_{2p}] \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

Les sous matrices $[K_{1m}]$, $[K_{1a}]$, $[K_{1p}]$, $[K_{12p}]$ et $[K_{2p}]$ sont respectivement définies par les relations (III.11) , (III.18) , (III.27) , (III.28) , (III.29) .

La matrice $[K_{12p}]$, permet de coupler les effets dus aux sollicitations normales et les effets dus aux sollicitations tangentes .

Ce couplage est du à l'influence de l'inclinaison des câbles de précontrainte par rapport à la section droite .

Pour un accroissement donné d'efforts sollicitants, la résolution en déformation de l'équation (III.36) est itérative .

A l'équilibre de la section , l'accroissement de déformation $\{\Delta\delta\}$ est donné par :

$$\{\Delta\delta\} = [S_s] \cdot \{\Delta F_s\} + \{G_s\} \quad (\text{III.38})$$

Avec :

$$\{\Delta\delta\} = \begin{bmatrix} \{\Delta\delta_n\} \\ \{\Delta\delta_t\} \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta F_s\} = \begin{bmatrix} \{\Delta F_{sn}\} \\ \{\Delta F_{st}\} \end{bmatrix}$$

(III.39)

$$\{As\} = \begin{bmatrix} \{Asn\} \\ \{Ast\} \end{bmatrix}$$

$$\{Gs\} = [Ss] \cdot \{As\}$$

et $[S_s]$: Représente la matrice de souplesse de la section

$$[S_s] = [K_s]^{-1} \quad (III.40)$$

III.2.4. Methode iterative de resolution et critere de convergence :

En élasticité non-linéaire, il est facile de calculer les efforts développés par une déformation donnée. Cependant il n'existe pas de méthode directe permettant de calculer les déformations produites par des efforts donnés.

On est donc contraint à utiliser une méthode itérative pour la recherche de la solution en déformation.

Considérons un état d'équilibre de la section soumise à des sollicitations extérieures, qui peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur $\{Fs\}$, définit par :

$$\{Fs\} = (N, M, T)^T \quad (III.41)$$

On note par $\{\delta_s\}$, le vecteur de déformation de la section correspondant

$$\{\delta_s\} = (\varepsilon_g, \phi, \gamma)^T \quad (III.42)$$

Pour une variation $\{\Delta Fs\}$ de sollicitations, l'accroissement de déformation $\{\Delta \delta_s\}$ de la section est recherché, en utilisant la méthode des substitutions.

La méthode des substitutions consiste à construire une suite de solutions , $\{\Delta\delta\}_0, \{\Delta\delta\}_1, \dots, \{\Delta\delta\}_i$

$\{\Delta\delta\}_i$ étant calculé à partir de $\{\Delta\delta\}_{i-1}$, en résolvant le système linéaire :

$$\{\Delta Fs\} + \{As\} = [Ks]_{i-1} \cdot \{\Delta\delta\}_i \quad (\text{III.43})$$

Où :

$[Ks]_{i-1}$: est la matrice de rigidité de la section , à l'itération (i-1)

$\{As\}$: Action de la précontrainte à la mise en tension des câbles

En partant de la solution initiale nulle , le schéma de résolution s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\Delta\delta\}_0 &= \{0\} \\ \{\Delta\delta\}_i &= [Ss]_{i-1} \cdot \{\Delta Fs\} + \{Gs\}_{i-1} \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

Où :

$[Ss]_{i-1}$: Matrice de souplesse (inverse de $[Ks]_{i-1}$) de la section , à l'itération (i-1) et $\{Gs\}_{i-1}$ la matrice colonne (6x1), due à l'action de la précontrainte et dont l'expression est donnée par la relation (III.39) .

On considère que l'équilibre de la section est atteint lorsque pour deux itérations successives , la norme euclidienne η de déformations est inférieure à une tolérance Tu fixée à priori :

$$\eta = \left[\frac{\langle \Delta\delta_i - \Delta\delta_{i-1} \rangle \cdot (\{\Delta\delta\}_i - \{\Delta\delta\}_{i-1})}{\langle \delta s + \Delta\delta \rangle \cdot (\{\delta s\} + \{\Delta\delta\}_i)} \right]^{1/2} < Tu \quad (\text{III.45})$$

Avec : $\{\delta s\}$: Déformation à l'étape précédente équilibrée .

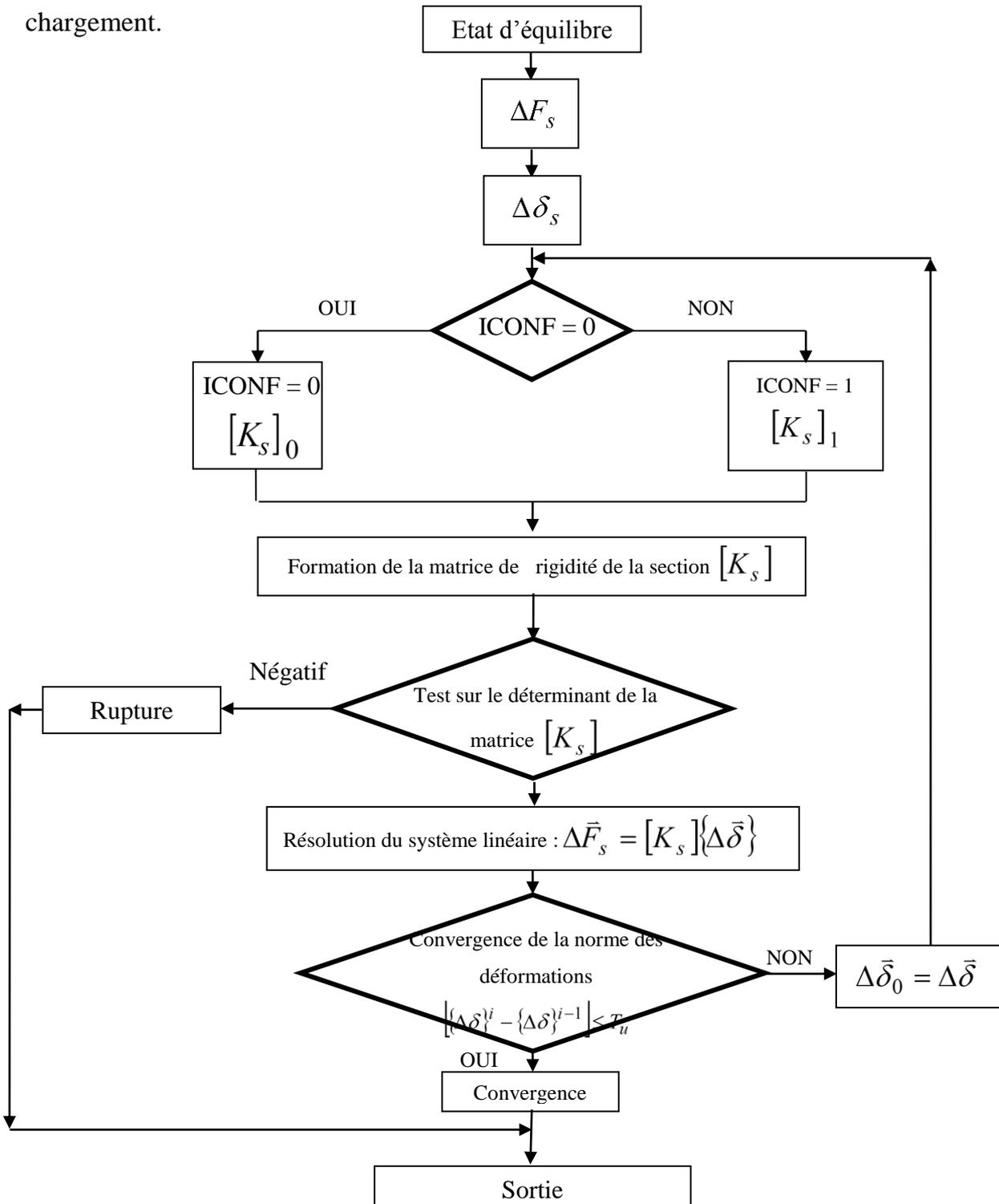
Généralement une dizaine d'itérations suffisent pour assurer la convergence [18].

Mathématiquement, ces problèmes se manifestent lorsque le déterminant de la matrice de rigidité de la section $[Ks]$ est voisin de zéro .

III.2.6. Organigramme :

Nous définissons ici l'organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section transversale lors d'un accroissement de sollicitations extérieures $\{\Delta F_s\}$ et de l'action due à la précontrainte $\{A_s\}$ à la mise en tension des câbles.

On suppose connu l'état de la section, déformations et sollicitations à une étape de chargement.



Organigramme IV-1 : Organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section

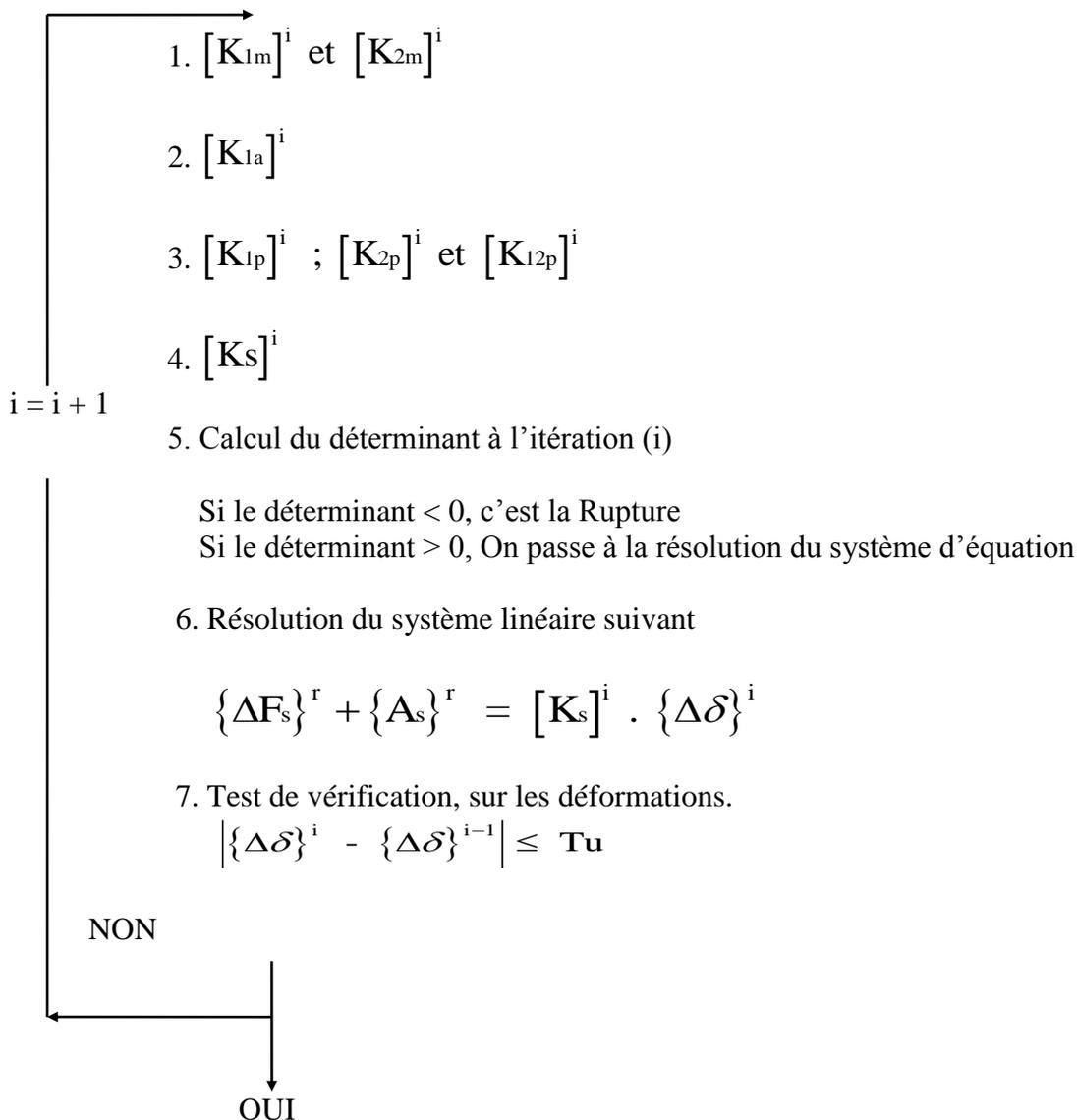
- $[K_s]_0$: Matrice de rigidité de la section du béton non confiné ; ICONF=0
- $[K_s]_1$: Matrice de rigidité de la section du béton confiné ; ICONF=1
- ICONF : Eléments en béton confiné.

III.2.5. Algorithme :

Pour une étape donnée r

- $\{A_s\}^r$: Effet de la precontrainte à l'étape r
- $\{\Delta F_s\}^r$: Accroissements d'efforts à l'étape r
- $\{\Delta \delta\}_o$: Accroissements de déformations initiales

i = 1



8. Equilibre de la section

N.B.: Tu : Précision voulue de l'ordre de 0,01.

III.3. Passage à la structure:

III.3.1. Generalites :

Dans ce chapitre, on établira la matrice de rigidité corde d'un élément poutre, en tenant compte de la non linéarité des matériaux et des effets du second ordre dus aux déplacements des noeuds.

Dans un premier temps on ne considère que les effets de la non-linéarité matérielle, en étudiant l'élément dans son repère intrinsèque (repère de l'élément après déformation). Les effets du second ordre s'introduisent en passant du repère intrinsèque au repère local, lié à la position initiale de la barre.

Les hypothèses admises dans le repère intrinsèque sont :

- les déformations sont infiniment petites,
- les déplacements sont petits,
- les forces sont conservatives,
- l'élément est chargé seulement en ses extrémités, supposé court , de sorte que les effets du second ordre dans ce repère soient négligeables,
- les efforts tranchants sont calculés d'après la théorie de l'élasticité linéaire.

Le problème non linéaire est résolu par une succession d'étapes de calcul linéaire. On utilise une résolution itérative basée sur la méthode des déplacements, dans laquelle on recalcule, à chaque étape, la matrice de rigidité tangente reliant les accroissements de déplacements aux accroissements d'efforts.

On détermine les accroissements de contraintes, donc les accroissements d'efforts internes ΔN ,

ΔM et ΔT dans les sections, en fonction des accroissements de déformation $\Delta \varepsilon_g$, $\Delta \varnothing$, $\Delta \gamma$.

Par l'intermédiaire des relations géométriques entre les déformations des sections et des déplacements, on passe aux relations entre les accroissements d'efforts et des déplacements aux noeuds des éléments. On obtient donc la matrice de rigidité corde de chaque élément dans son repère intrinsèque.

On passe ensuite dans le repère global, ce qui permet de construire la matrice de rigidité de l'ensemble de la structure.

III.3.2. Matrice de rigidite de l'element dans le repere intrinseque :

III.3.2.1. Notations :

Soit (x,z) , le repère intrinsèque, lié à la position déformée de l'élément.

Les efforts et les déplacements correspondants qui sont pris en compte dans l'analyse se trouvent sur la figure (III.2) avec leur sens positif.

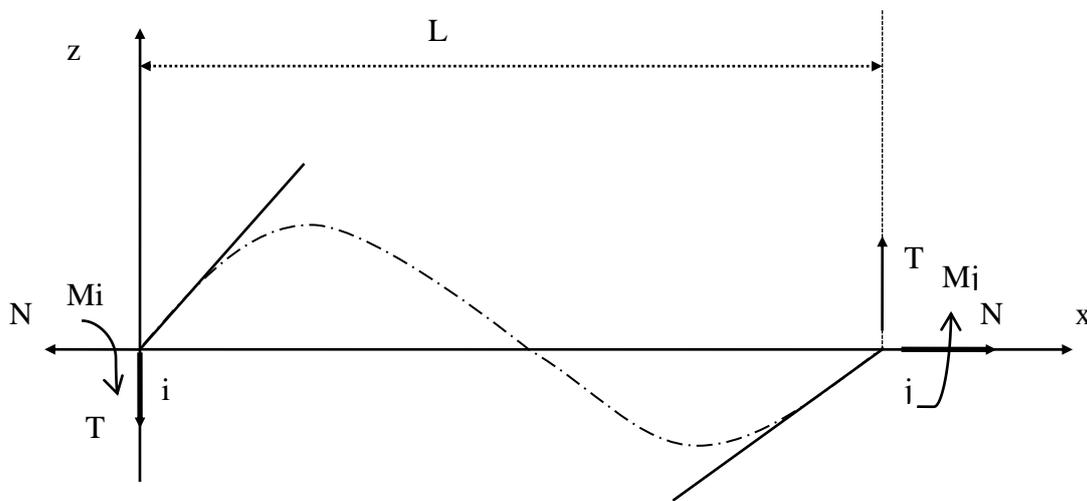


Figure III.2 : Efforts et déplacements correspondants dans le repère intrinsèque

La courbure $\varnothing(x)$ est positive lorsque la cavité de l'axe déformé est dirigée dans le sens positif de l'axe z .

Les sollicitations aux extrémités sont :

$$\{F_N\} = (N, M_i, M_j)^T \quad (\text{III.46})$$

L'effort tranchant T est fonction des moments de flexion M_i, M_j compte tenu de l'équilibre de l'élément.

Les déplacements correspondants sont :

$$\{S_N\} = (e, \theta_i, \theta_j)^T \quad (\text{III.47})$$

Où e représente la variation de longueur de l'élément.

$$e = u_i - u_j$$

Avec :

u_i : déplacement longitudinal de l'extrémité origine,

u_j : déplacement longitudinal de l'extrémité finale.

Soient $\{\Delta F_N\}$ et $\{\Delta S_N\}$ les accroissements d'efforts et des déplacements aux extrémités de l'élément.

$$\{\Delta F_N\} = (\Delta N, \Delta M_i, \Delta M_j)^T \quad (\text{III.48})$$

$$\{\Delta S_N\} = (\Delta e, \Delta \theta_i, \Delta \theta_j)^T \quad (\text{III.49})$$

III.3.2.2. Relation entre sollicitations dans une section et les efforts aux noeuds de l'élément :

L'élément n'étant chargé qu'en ses extrémités, et en négligeant les effets du second ordre dus à ses déformations dans le repère intrinsèque, les sollicitations dans une section transversale d'abscisse x sont linéaires .

En tenant compte de la condition d'équilibre et des conventions sur les sollicitations, on a :

$$\begin{cases} N(x) = -N \\ M(x) = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot M_i + \frac{x}{L} \cdot M_j \\ T(x) = \frac{1}{L}(M_i + M_j) \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

On peut écrire sous forme matricielle la relation liant les sollicitations dans une section aux efforts aux extrémités de l'élément dans le repère intrinsèque .

$$\{F_s\} = [L(x)] \cdot \{F_N\} \quad (\text{III.51})$$

Avec :

$$\{F_s\} = (N(x), M(x), T(x))^T \quad (\text{III.52})$$

et

$$[L(x)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{x}{L}\right) & x/L \\ 0 & 1/L & 1/L \end{bmatrix} \quad (\text{III.53})$$

En négligeant la variation de longueurs dans la calcul des variations de sollicitations, on peut écrire compte tenu de la relation (III.51) :

$$\{\Delta F_s\} = [L(x)] \cdot \{\Delta F_N\} \quad (\text{III.54})$$

III.3.2.3. Relation entre les déplacements des noeuds de l'élément et les déformations des sections :

Pour toute variation d'efforts $\{\delta F_N\}$ aux extrémités de l'élément engendre ;

- Un travail virtuel extérieur :

$$\delta W_e = \{\delta F_N\}^T \cdot \{S_N\} \quad (\text{III.55})$$

- Un travail virtuel de déformations δW_i tel que :

$$\delta W_i = \int_0^L \{\delta F_s\}^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (\text{III.56})$$

Où $\{\delta(x)\}$ représente la matrice colonne (3x1) contenant les déformations dans une section transversale d'abscisse x.

$$\{\delta(x)\} = (\varepsilon_g(x), \phi(x), \gamma(x))^T \quad (\text{III.57})$$

D'après le théorème du travail virtuel complémentaire :

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (\text{III.58})$$

Et compte tenu des équations (III.55) et (III.56)

$$\{\delta F_N\}^T \cdot \{S_N\} = \int_0^L \{\delta F_s\}^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (\text{III.59})$$

La variation de sollicitations $\{\delta F_s\}$ est statiquement admissible . On peut donc écrire compte tenu de l'équation (III.54) .

$$\{\delta F_s\} = [L(x)] \cdot \{\delta F_N\} \quad (\text{III.60})$$

D'où par substitution dans (III.59) .

$$\{\delta F_N\}^T \cdot \{S_N\} = \{\delta F_N\}^T \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (\text{III.61})$$

La variation $\{\delta F_N\}$ étant arbitraire, il vient :

$$\{S_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (\text{III.62})$$

En négligeant la variation de longueur dans le calcul des déplacements des noeuds , il en résulte de l'équation (III.62) :

$$\{\Delta S_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\Delta \delta(x)\} \cdot dx \quad (\text{III.63})$$

III.3.2.4. Relation entre les efforts et les déplacements des noeuds de l'élément :

En vertu de la relation (III.44), liant les accroissements de déformations aux accroissements de sollicitations dans une section transversale, la relation (III.63) devient :

$$\{\Delta S_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot ([S_s] \cdot \{\Delta F_s\} + \{G_s\}) \cdot dx \quad (\text{III.64})$$

En tenant compte de l'équation (III.54), on arrive à :

$$\{\Delta S_N\} = [K_N]^{-1} \cdot \{\Delta F_N\} + \{G_N\} \quad (\text{III.65})$$

Où :

$[K_N]^{-1}$: Matrice de souplesse réduite (3x3) de l'élément dans le repère intrinsèque xz

$$[K_N]^{-1} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot [S_s] \cdot [L(x)] \cdot dx \quad (\text{III.66})$$

Et $\{G_N\}$ une matrice colonne (3x1) définie par :

$$\{G_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{G_s\} \cdot dx \quad (\text{III.67})$$

L'inversion de la matrice $[K_N]^{-1}$, nous conduit à la matrice de rigidité réduite (3x3) de l'élément dans le repère intrinsèque, notée $[K_N]$.

De l'équation (III.65), on arrive à la relation matricielle liant les accroissements d'efforts aux accroissements de déplacements des noeuds de l'élément, dans le repère intrinsèque xz.

$$\{\Delta F_N\} + \{A_N\} = [K_N] \cdot \{\Delta S_N\} \quad (\text{III.68})$$

L'intégration des éléments de la matrice $[K_N]^{-1}$ est effectuée numériquement, dans le cas d'une analyse matériellement non-linéaire, par la règle de **SIMPSON**, en considérant sur l'élément un nombre impaire de section de calcul.

Par contre dans le cas où le comportement des matériaux, constituant l'élément est linéaire, la matrice de souplesse se réduit considérablement.

Et la matrice colonne $\{A_N\}$ étant définie par la relation.

$$\{A_N\} = [K_N] \cdot \{G_N\} \quad (\text{III.69})$$

III.3.3. Matrice de rigidite de l'element dans le repere local :

Dans ce paragraphe, on établit la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local, lié à la position initiale de l'élément, en tenant compte des effets du second ordre dus aux déplacements des noeuds. Ces effets s'introduisent dans le passage des efforts et déplacements du repère intrinsèque au repère local.

III.3.3.1. Notations :

Soit un élément de la structure de noeud origine i_0 et de noeud extrémité j_0 et x_0z_0 le repère local de référence.

Sous sollicitations, élément de la structure s'est déplacé et s'est déformé et les noeuds i_0 et j_0 se sont déplacés en des points notés i et j , figure (III.3).

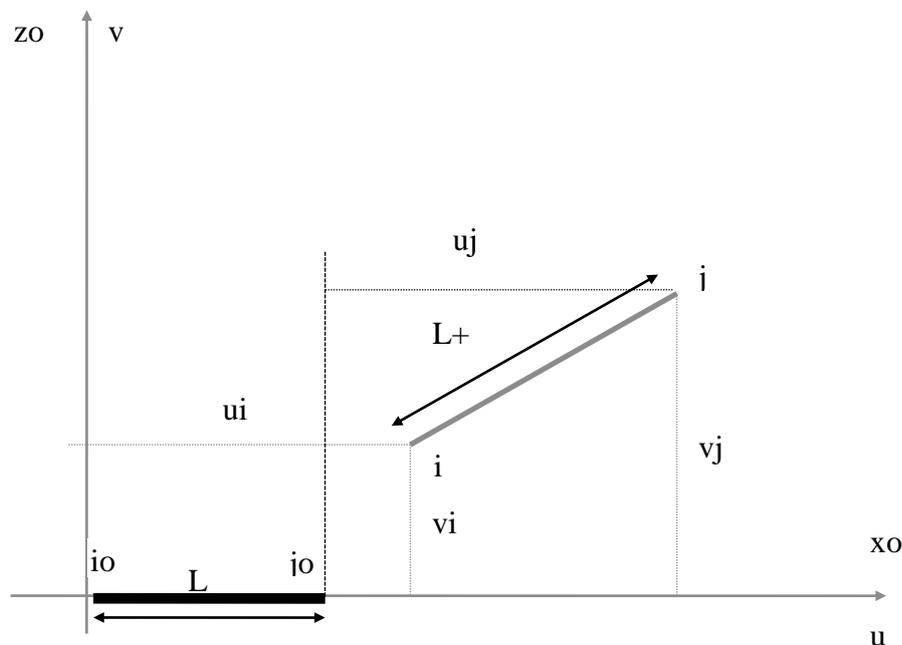


Figure III.3 : Géométrie de la barre déformée

Soient (u_i, v_i) (resp u_j, v_j) les composantes, dans le repère local de référence, du vecteur déplacement i_0i (resp j_0j). On note θ_{i_0} (resp θ_{j_0}) les rotations de la projection de la normale à la section i_0 (resp j_0) de la barre dans le plan x_0z_0 à l'instant t .

Nous noterons F_{x_0} , F_{z_0} , M_{i_0} , M_{j_0} les sollicitations aux extrémités de élément dans son repère local de référence et à l'instant t .

Nous noterons par $\{F_L\}$ et $\{S_L\}$, les matrices colonne (6x1) contenant respectivement les sollicitations et les déplacements aux extrémités de l'élément dans le repère local $x_o z_o$.

$$\{F_L\} = (F_{ix0}, F_{iz0}, M_{io}, F_{jx0}, F_{jz0}, M_{jo})^T \quad (\text{III.70})$$

$$\{S_L\} = (u_i, v_i, \theta_{io}, u_j, v_j, \theta_{jo})^T \quad (\text{III.71})$$

On introduit les matrices colonnes $\{F_U\}$ et $\{S_U\}$ de dimension (4x1) telles que :

$$\{F_U\} = (F_{xo}, F_{zo}, M_{io}, M_{jo})^T \quad (\text{III.72})$$

$$\{S_U\} = (u, v, \theta_{io}, \theta_{jo})^T \quad (\text{III.73})$$

Où :

$$\begin{aligned} u &= u_j - u_i \\ v &= v_j - v_i \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

En tenant compte des équations (III.71), (III.73) et (III.74), on a :

$$\{S_U\} = [T_o] \cdot \{S_L\} \quad (\text{III.75})$$

Avec :

$$[T_o] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.76})$$

Compte tenu des relations (III.70) et (III.72), la condition d'équilibre de l'élément dans le repère local $x_o z_o$ nous mène à écrire :

$$\{F_L\} = [T_o]^T \cdot \{F_U\} \quad (\text{III.77})$$

Enfin, on notera $\{\Delta F_u\}$ et $\{\Delta S_u\}$ respectivement les accroissements d'efforts et de déplacements aux extrémités de élément .

$$\{\Delta F_u\} = (\Delta F_{x0}, \Delta F_{z0}, \Delta M_{i0}, \Delta M_{j0})^T \quad (\text{III.78})$$

$$\{\Delta S_u\} = (\Delta u, \Delta v, \Delta \theta_{i0}, \Delta \theta_{j0})^T \quad (\text{III.79})$$

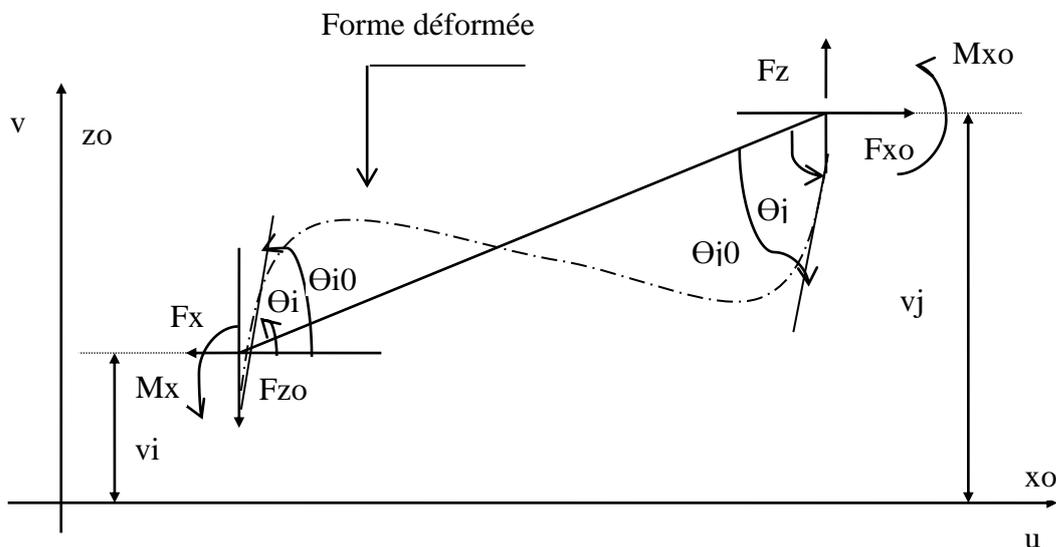


Figure III.4 : Projection de la barre déformée dans le plan (x_0, z_0) .

III.3.3.2. Relation entre accroissement d'efforts $\{\Delta F_u\}$ et accroissements de déplacement $\{\Delta S_u\}$:

Pour un instant t quelconque, on peut écrire d'après les figures (III.3) et (III.4) les relations géométriques suivantes :

$$\begin{cases} e = \sqrt{(L+u)^2 + v^2} - L \\ \theta_i = \theta_{i0} - \text{Arctg} \frac{v}{L+u} \\ \theta_j = \theta_{j0} - \text{Arctg} \frac{v}{L+u} \end{cases}$$

Avec: (III.80)

$$\theta = \text{Arctg} \frac{v}{L+u}$$

La différenciation des expressions (III.80) permet d'établir la relation entre les accroissements de déplacements nodaux $\{\Delta S_N\}$ dans le repère intrinsèque, et les accroissements de déplacements nodaux dans le repère local .

$$\{\Delta S_N\} = [B] \cdot \{\Delta S_U\} \quad (III.81)$$

Où $[B]$: Matrice de transformation géométrique , s'écrit :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial u} & \frac{\partial e}{\partial v} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial v} & 1 & 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial v} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.82)$$

Selon le théorème des travaux virtuels, en tenant compte du fait que les travaux des forces sont nuls dans un déplacement de corps rigide du repère intrinsèque en équilibre au repère local , nous pouvons dire que le travail virtuel des forces appliquées aux noeuds $\{F_N\}$ dans le repère intrinsèque, du à un déplacement virtuel $\{\Delta S_N\}$ est égal au travail des forces appliquées aux noeuds, dans le repère local, $\{F_U\}$ du à un déplacement $\{\Delta S_U\}$, c'est à dire :

$$\{F_N\}^T \cdot \{\Delta S_N\} = \{F_U\}^T \cdot \{\Delta S_U\} \quad \forall \{\Delta S_U\}, \forall \{\Delta S_N\} \quad (III.83)$$

Compte tenu de la relation (III.81), nous pouvons écrire :

$$\{F_U\} = [B]^T \cdot \{F_N\} \quad (III.84)$$

La différenciation de l'équation (III.84), nous conduit à :

$$\{\Delta F_U\} = [B]^T \cdot \{\Delta F_N\} + [\Delta B]^T \cdot \{F_N\} \quad (III.85)$$

Compte tenu des relations (III.68) et (III.81), nous avons :

$$\{\Delta F_U\} = [B]^T \cdot [[K_N] \cdot \{\Delta S_N\} - \{A_N\}] + [\Delta B]^T \cdot \{F_N\} \quad (III.86)$$

Considérant le terme $[\Delta B]^T \cdot \{F_N\}$. En vertu de la relation (III.82), les termes de la matrice $[B]$ ne dépendent que des dérivées partielles des fonctions e et θ qui sont fonction des déplacements relatifs u et v des noeuds i et j

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_N\} = \begin{bmatrix} \Delta\left(\frac{\partial e}{\partial u}\right) & \Delta\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right) & \Delta\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right) \\ \Delta\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right) & \Delta\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right) & \Delta\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (III.87)$$

Après un développement des termes de la matrice $[\Delta B]^T$, nous arrivons à :

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_N\} = [D] \cdot \{\Delta S_U\} \quad (III.88)$$

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_N\} = \begin{bmatrix} N \cdot \Delta \frac{\partial e}{\partial u} + (M_i + M_j) \cdot \Delta \frac{\partial \theta}{\partial u} \\ N \cdot \Delta \frac{\partial e}{\partial v} + (M_i + M_j) \cdot \Delta \frac{\partial \theta}{\partial v} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_N\} = \begin{bmatrix} N \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u^2} + (M_i + M_j) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} & N \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v \partial u} + (M_i + M_j) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} \\ N \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v \partial u} + (M_i + M_j) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} & N \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v^2} + (M_i + M_j) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}$$

On écrit alors [D] sous la forme suivante :

$$[D] = \begin{bmatrix} D1 & D2 & 0 & 0 \\ D2 & D3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{SYMETRIQUE}$$

Avec :

$$\begin{aligned} D1 &= N \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u^2} + (M_i + M_j) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} \\ D2 &= N \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u \cdot \partial v} + (M_i + M_j) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \cdot \partial v} \\ D3 &= N \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v^2} + (M_i + M_j) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

En remplaçant l'équation (III.88) dans l'équation (III.86), nous obtenons la relation liant les accroissements de déplacements et d'efforts aux extrémités de l'élément, dans le repère local intermédiaire :

$$\begin{aligned} \{\Delta F_U\} &= [B]^T \cdot [K_N] \cdot \{\Delta S_N\} - [B]^T \cdot \{A_N\} + [D] \cdot \{\Delta S_U\} \\ \{\Delta F_U\} &= \left([B]^T \cdot [K_N] \cdot [B] + [D] \right) \cdot \{\Delta S_U\} - [B]^T \cdot \{A_N\} \end{aligned} \quad (\text{III.90})$$

D'ou la relation :

$$\{\Delta F_U\} + \{A_U\} = [K_U] \cdot \{\Delta S_U\} \quad (\text{III.91})$$

Où :

$[K_U]$: Matrice de rigidité (4x4), de l'élément poutre dans le repère local intermédiaire, elle est définie par :

$$[K_U] = [B]^T \cdot [K_N] \cdot [B] + [D] \quad (\text{III.92})$$

En vertu des relations (III.75) et (III.77), on arrive à la relation liant les accroissements d'efforts aux accroissements de déplacements des noeuds de l'élément dans le repère local :

$$\{\Delta F_L\} + \{A_L\} = [K_L] \cdot \{\Delta S_L\} \quad (\text{III.93})$$

Où :

$[K_L]$: Matrice de rigidité systémique (6x6), de l'élément dans le repère local, elle est définie par ;

$$[K_L] = [T_0]^T \cdot ([B]^T \cdot [K_N] \cdot [B] + [D]) \cdot [T_0] \quad (\text{III.94})$$

et $\{A_L\}$: représente une matrice colonne (6x1) définie par :

$$\{A_L\} = [T_0]^T \cdot \{A_U\} \quad (\text{III.95})$$

ici ; $\{A_U\}$: représente une matrice colonne (4x1) définie par :

$$\{A_U\} = [B]^T \cdot \{A_N\} \quad (\text{III.96})$$

III.3.3.3. Relations simplifiées des matrices [D] et [B] dans le cas des petits déplacements :

Compte tenu de l'hypothèse des petits déplacements, on peut se contenter des termes du premier ordre dans le développement en série des termes des matrices [B] et [D] .

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & v/L & 0 & 0 \\ v/L^2 & -1/L & 1 & 0 \\ v/L^2 & -1/L & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.97})$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 2 \cdot v \cdot \frac{F_{zo}}{L^2} & -\frac{F_{zo}}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{F_{zo}}{L} & \left(\frac{F_{xo}}{L} - \frac{v \cdot F_{zo}}{L^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.98})$$

III.3.3.4. Cas d'une analyse sans effet du second ordre :

Dans certaines structures, les effets du second ordre sont pratiquement négligeables (Cas des poutres continues par exemple). Dans ce cas, il est intéressant de connaître les formes des matrices [B] et [D].

Si on néglige les effets de second ordre dus aux déplacements des noeuds de l'élément , cela revient à négliger les rotations d'ensemble de cet élément , c'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} v = 0 \\ \text{et} \\ F_{xo} = 0 \end{array} \right.$$

Il en résulte donc :

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & 1 & 0 \\ 0 & -1/L & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.99})$$

et :

$$[D] = [0]$$

III.3.4. Matrice de rigidité de l'élément dans le repère absolu :

III.3.4.1. Relation entre accroissements de déplacements et d'efforts dans le repère absolu :

La relation liant les grandeurs dans le repère local est indépendante des efforts et déplacements et ne dépend que de l'orientation initiale de la barre.

Soit un élément de la structure, de nœud origine i_0 et de nœud extrémité j_0 lié au repère local de référence x_0z_0 , et XZ le repère absolu lié à la structure, figure (III.5).

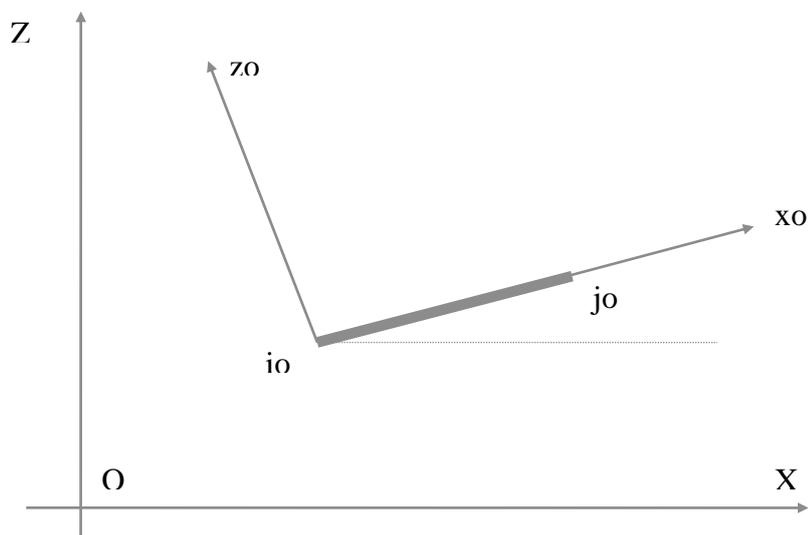


Figure III.5 : Repère absolu

On note par $\{F_x\}$ la matrice colonne (6x1) contenant les efforts appliqués aux extrémités d'un élément, dans le repère absolu OXZ.

$$\{F_x\} = (F_{ix}, F_{iz}, M_i, F_{jx}, F_{jz}, M_j)^T \quad (\text{III.100})$$

De même, on note par $\{S_x\}$ la matrice colonne (6x1) contenant les déplacements aux extrémités d'un élément, dans le repère absolu OXZ.

$$\{S_x\} = (X_i, Z_i, \zeta_i, X_j, Z_j, \zeta_j)^T \quad (\text{III.101})$$

Les incréments d'efforts et de déplacements dans le repère absolu sont :

$$\{\Delta F_x\} = (\Delta F_{ix}, \Delta F_{iz}, \Delta M_i, \Delta F_{jx}, \Delta F_{jz}, \Delta M_j)^T \quad (\text{III.102})$$

$$\{\Delta S_x\} = (\Delta X_i, \Delta Z_i, \Delta \zeta_i, \Delta X_j, \Delta Z_j, \Delta \zeta_j)^T \quad (\text{III.103})$$

Soit β l'angle de la direction initiale d'élément avec l'axe Ox.

La relation entre accroissement des efforts et des déplacements dans le repère absolu s'obtient au moyen de la matrice de rotation [RT], fonction de l'inclinaison initiale de la barre (β).

$$[RT] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.104})$$

La relation matricielle entre les déplacements des noeuds $\{S_L\}$ dans le repère local et les déplacements des noeuds $\{S_x\}$ dans le repère absolu s'écrit :

$$\{S_L\} = [RT] \cdot \{S_x\} \quad (\text{III.105})$$

Par analogie à l'équation (III.105), on peut écrire pour la transformation d'efforts :

$$\{F_x\} = [RT]^T \cdot \{F_L\} \quad (III.106)$$

La différenciation de l'équation (III.106), nous amène à :

$$\{\Delta F_x\} = [RT]^T \cdot \{\Delta F_L\} \quad (III.107)$$

En substituant à l'équation (III.107), l'équation (III.93), il vient :

$$\{\Delta F_x\} + \{A_x\} = [RT]^T \cdot [K_L] \cdot \{\Delta S_L\} \quad (III.108)$$

Où :

$\{A_x\}$: Matrice colonne (6x1), définie par :

$$\{A_x\} = [RT]^T \cdot \{A_L\} \quad (III.109)$$

$\{A_L\}$: Matrice colonne (6x1), définie par l'équation (III.95)

D'autre part la différenciation de l'équation (III.105), nous amène à :

$$\{\Delta S_L\} = [RT] \cdot \{\Delta S_x\} \quad (III.110)$$

En substituant à l'équation (III.108), l'équation (III.110), on arrive à la relation matricielle liant les accroissements d'efforts et les accroissements de déplacements aux extrémités d'un élément dans le repère absolu OXZ, lié à la structure :

$$\{\Delta F_x\} + \{A_x\} = [K_x] \cdot \{\Delta S_x\} \quad (III.111)$$

Avec :

$[K_x]$: Matrice de rigidité (6x6) d'un élément dans le repère absolu OXZ, et qui a pour expression

$$[K_x] = [RT]^T \cdot [K_L] \cdot [RT] \quad (III.112)$$

III.4. Conclusion :

La difficulté première de toute méthode itérative est de pouvoir démarrer le calcul à partir de certaines valeurs connues ; aussi dans cette étude, avant de commencer le calcul en élasticité non linéaire, nous résolvons d'abord le problème en élasticité linéaire au premier ordre, cela nous donne les valeurs de départ du calcul itératif.

-dans le chapitre suivant on va inclure dans cette méthode l'effet de confinement en utilisant la loi de comportement du béton confiné qui a été élaboré par Iddir, Bouafia et Kachi.

IV. ORGANISATION INFORMATIQUE DU CALCUL :

IV.1. Généralités :

Le calcul est effectué par étapes. Celles-ci sont caractérisées par des accroissements $\{\Delta P\}$ de charges. Une procédure itérative est utilisée à chaque étape, pour aboutir à l'état d'équilibre de la structure.

Au début d'une étape de calcul (repérée par l'indice r), on connaît les accroissements de charge $\{\Delta P\}$. Le but de l'analyse est de calculer le vecteur des accroissements de déplacements des nœuds $\{\Delta U\}$ tel que :

$$\{\Delta P\} + \{A\} = [K] \cdot \{\Delta U\} \quad (\text{IV.1})$$

Où :

$[K]$: Matrice de rigidité corde de la structure.

IV.2. Algorithme de résolution :

A chaque accroissement de chargement $\{\Delta P\}$ donné, le système non linéaire (IV.1) est résolu en utilisant la méthode des substitutions successives reliant les accroissements d'efforts appliqués aux nœuds aux accroissements de déplacements des nœuds.

Le problème non linéaire consiste à déterminer l'accroissement de déplacement $\{\Delta U\}$ correspondant à l'accroissement de chargement $\{\Delta P\}$ et à l'action $\{A\}$ éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles.

La méthode des substitutions utilisant les matrices de rigidités, consiste à construire une suite de solutions $\{\Delta U\}_0, \{\Delta U\}_1, \dots, \{\Delta U\}_i$.

$\{\Delta U\}_i$ étant calculée à partir de $\{\Delta U\}_{i-1}$, en résolvant le système linéaire suivant :

$$\{\Delta P\} + \{A\}_{i-1} = [K]_{i-1} \cdot \{\Delta U\}_i \quad (\text{IV.2})$$

$[K]_{i-1}$: Matrice de rigidité de la structure à l'itération (i-1)

$\{A\}_{i-1}$: Action de la précontrainte éventuelle à la mise en tension des câbles de précontrainte correspondant à l'itération (i-1).

Pour le démarrage de l'algorithme, on prend comme condition initiale:

$$\{\Delta U\}_0 = \{0\} \quad (IV.3)$$

L'application de l'algorithme exige la formation, à chaque itération d'une nouvelle matrice de rigidité de la structure $[K]$ et du vecteur de la précontrainte $\{A\}$.

On déclare la solution, en déplacement, du problème non linéaire est obtenue, lorsque entre deux solutions successives la norme euclidienne η_u des variations des déplacements est inférieure ou égale à une tolérance T_u fixée à priori.

$$\eta_u = \left(\frac{\langle \Delta U_i - \Delta U_{i-1} \rangle \cdot \left\{ \left\{ \Delta U \right\}_i - \left\{ \Delta U \right\}_{i-1} \right\}}{\langle U_s + \Delta U_i \rangle \cdot \left\{ \left\{ U_s \right\} + \left\{ \Delta U \right\}_i \right\}} \right)^{1/2} < T_u \quad (IV.4)$$

Où :

$\{U_s\}$: Vecteur déplacements des noeuds de la structure correspondant à la dernière étape stable.

$\langle \rangle$: désigne le vecteur ligne.

Si au bout d'un certain nombre d'itérations fixé auparavant, la relation (IV.4) n'est pas vérifiée on considère que la solution diverge. Le processus itératif est repris avec un pas de chargement égal à la moitié du pas de chargement précédent.

A chaque itération, le système linéaire (IV.2) est modifié pour prendre en compte les conditions aux limites de la structure.

IV.3. SéquenceS de calcul :

L'analyse de la structure est effectuée " pas à pas " pour des valeurs croissantes d'un paramètre α . On suppose connu l'état complet de la structure (déplacements, sollicitations, déformations) à l'étape r où le paramètre α vaut α_r .

Soit $\{\Delta P\}$ le vecteur des accroissements de charges extérieures, appliquées aux noeuds, lorsque le paramètre α passe de α_r à $\alpha_{r+1} = \alpha_r + \Delta\alpha$.

Soit l'organigramme simplifié, d'une étape de calcul.

1. On suppose connue la valeur des accroissements de déplacements $\{\Delta U\}_0$ des noeuds.

Cette valeur est prise égale à $\{0\}$, pour la première itération, ensuite c'est celle fournie par l'itération précédente.

2. On calcule la valeur des accroissements d'efforts internes $\{\Delta F_N\}$ aux extrémités des éléments, dans leur repère intrinsèque, en utilisant pour chaque élément, la relation (III.68)

La valeur de la matrice $[K_N]$ est celle obtenue à l'itération précédente.

Le vecteur $\{\Delta S_N\}$ des accroissements de déplacements aux extrémités d'un élément est calculé à partir de $\{\Delta U\}_0$.

3. La connaissance de $\{\Delta F_N\}$ et des déformations $\{\delta\}$ des sections correspondant à l'étape précédente, nous permettent d'étudier l'équilibre des sections.

En effet le vecteur des accroissements de sollicitations $\{\Delta F_s\}$ dans une section de calcul, est déterminé à partir de $\{\Delta F_N\}$ en utilisant la relation (III.54). L'action éventuelle de la précontrainte sur la section, est donnée par les relations (III.33) et (III.34).

L'équilibre d'une section est effectuée en résolvant le système non linéaire (III.36) par le procédé itératif exposé aux paragraphes (III.2.4) et (III.2.5).

Cependant, si l'équilibre d'une section n'est pas vérifié, ceci provient du fait d'une rupture de la section, ou du fait que le nombre d'itérations fixé à priori n'est pas suffisant pour aboutir à la convergence du processus itératif. Dans ce cas le calcul est repris avec un pas de chargement $\{\Delta P\}$ plus petit $\left\{\frac{\Delta P}{2}\right\}$.

4. Du fait de l'équilibre des sections, l'accroissement de déformations $\{\Delta \delta\}$ étant connu. L'intégration selon la méthode numérique donne la matrice de rigidité $[K_N]$ en chaque élément.

5. La matrice $[K_U]$ et le vecteur $\{A_U\}$ dans le repère local intermédiaire se déduisent par les équations (III.92) et (III.96).

6. Puis la matrice $[K_L]$ et le vecteur $\{A_L\}$ dans le repère local sont obtenus par les relations (III.94) et (III.95).

7. Le passage à $[K_x]$ et $\{A_x\}$ dans le repère absolu, lié à la structure est effectué par l'intermédiaire de la matrice de rotation $[RT]$, donnée par la relation (III.104), et en utilisant les relations (III.112) et (III.109).

8. La matrice de rigidité, $[K]$ et le vecteur second membre $\{A\}$ dû à l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles, sont formés en écrivant l'équilibre des nœuds dans le repère absolu, lié à la structure.

9. Les accroissements de déplacements des nœuds de la structure $\{\Delta U\}$ correspondant à l'itération en cours s'obtiennent en résolvant le système (IV.1) mentionné plus haut, en tenant compte des conditions aux limites de la structure.

10. Après avoir obtenu l'accroissement de déplacement des nœuds $\{\Delta U\}$ on procède par la relation (IV.4) à la vérification de la convergence.

Si le test de convergence n'est pas vérifié le calcul est répété avec la nouvelle valeur $\{\Delta U\}$.

Toutefois un défaut de convergence peut apparaître du fait de l'instabilité, d'ensemble, ou du fait que le nombre d'itérations fixé à priori n'est pas suffisant pour assurer la convergence ; dans ce cas le calcul est repris avec un pas de chargement plus petit égal à $\left\{\frac{\Delta P}{2}\right\}$.

11. Cumul :

A la fin de chaque étape ; on calcule les déformations totales de chaque section, les efforts totaux $\{F_u\}$ et les déplacements totaux $\{S_u\}$ aux extrémités des éléments dans le repère local, ainsi que les déplacements totaux des nœuds $\{U\}$ et les charges extérieures totales $\{P\}$ dans le repère absolu, lié à la structure, en cumulant les accroissements de cette étape aux valeurs de étape précédente.

12. Etape de correction :

Avant de passer à une nouvelle étape de chargement, on passe à la correction des déplacements des nœuds $\{U\}$ obtenus. Cette opération est indispensable pour le cas des structures sensibles aux effets du second ordre.

En effet, lors de la recherche de l'accroissement de déplacement $\{\Delta U\}$ des nœuds, les matrices $[B]$ et $[D]$ exprimant la non linéarité géométrique sont gardées constantes pendant l'étape, avec des valeurs obtenues à la fin de l'étape précédente.

Cette procédure a pour effet de sous-estimer l'ensemble des déplacements dus aux effets du second ordre.

Pour corriger ce défaut, on effectue donc une étape de correction dans l'étape en cours, en y introduisant l'effet d'un accroissement de charge fictif $\{\Delta P^*\}$ qui est la différence entre les charges réelles $\{P\}$ et les charges $\{P^*\}$ qui sont en équilibre avec les efforts $\{F_x\}$ calculés compte tenu des déplacements des nœuds $\{U\}$:

$$\{\Delta P^*\} = \{P\} - \{P^*\} \quad (\text{IV.5})$$

Le vecteur des charges $\{P^*\}$, est obtenu en écrivant, pour chaque nœud, la somme des forces $\{F_x\}$ exercées par le nœud sur les éléments qui le croisent.

Toutefois, les réactions d'appuis qui en résultent de l'équilibre des nœuds, ne sont pas considérées dans le vecteur $\{P^*\}$.

L'algorithme est dispensée de l'étape de correction, si la norme euclidienne η_f des efforts est inférieure ou égale à une certaine tolérance T_f choisie à priori :

$$\eta_f = \left[\frac{\langle \Delta P^* \rangle \cdot \{\Delta P\}}{\langle P \rangle \cdot \{P\}} \right]^{1/2} < T_f \quad (\text{IV.6})$$

Où : la notation $\langle \rangle$, désigne le vecteur ligne.

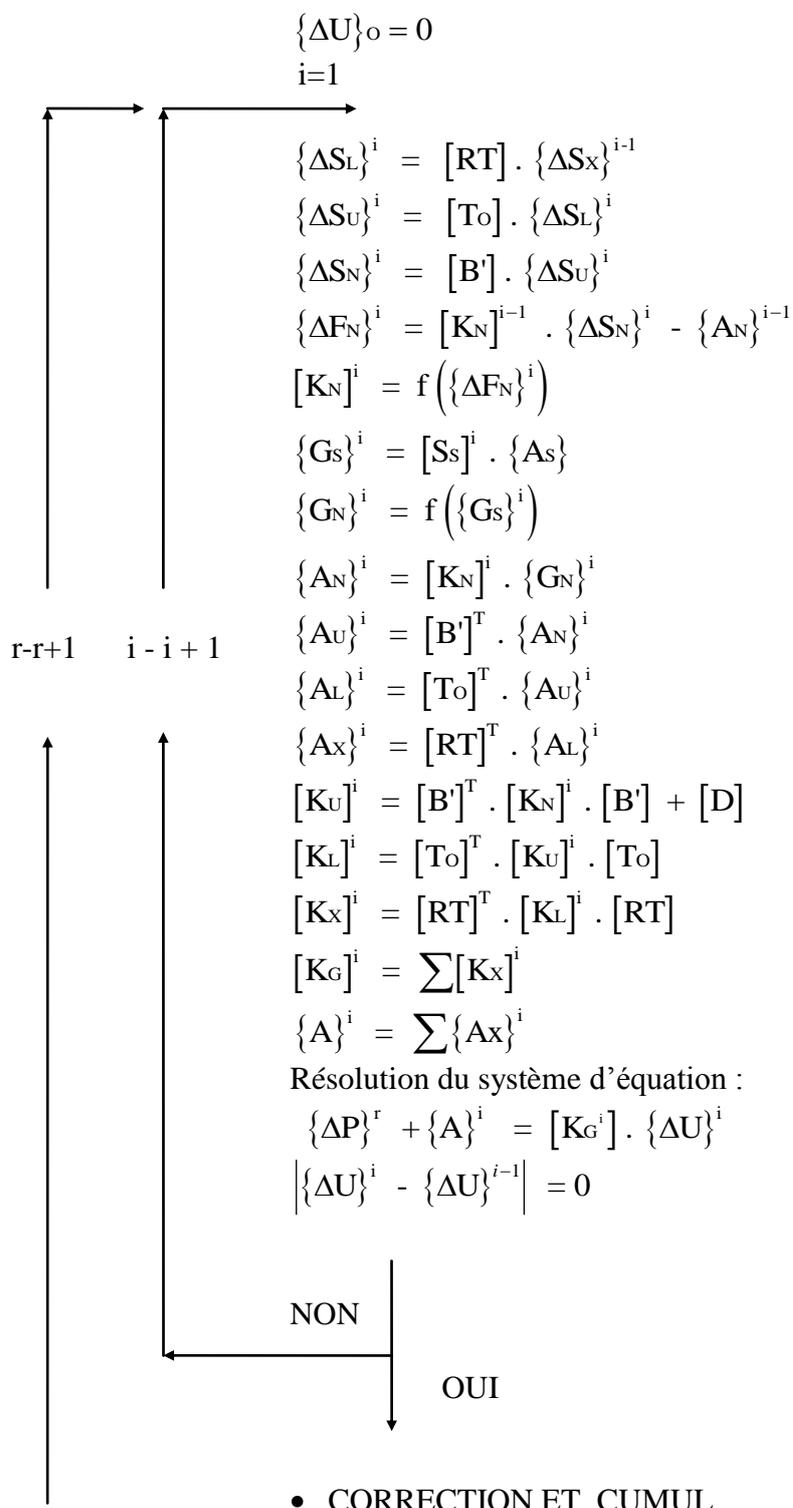
Dans le cas où la norme η_f est supérieure à T_f , une étape de correction suffit en général pour obtenir une valeur correcte des déplacements des nœuds.

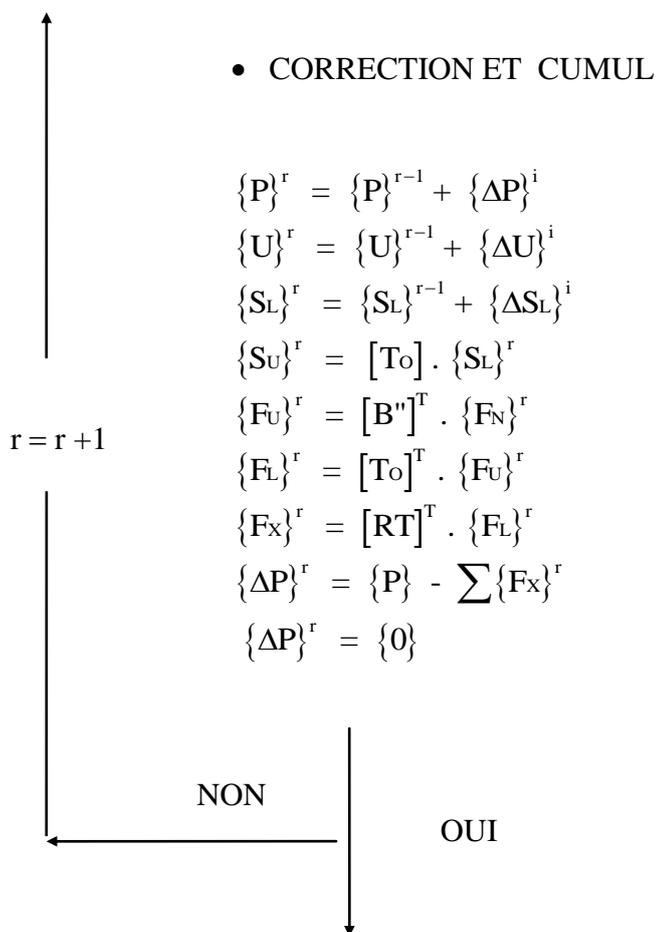
13. La charge de ruine est obtenue lorsque l'algorithme de résolution diverge pour un accroissement de charge inférieur ou égal à une précision fixée à priori.

IV.4. algorithme de calcul

$\{\Delta P\}^r$: Accroissement du chargement appliqué à l'étape r

$\{P\}$: Chargement cumulé jusqu'à l'étape (r-1).





• EQUILIBRE GEOMETRIQUE

Avec : $[B']$: Matrice approchée = $f(\{S_U\}^{r-1})$

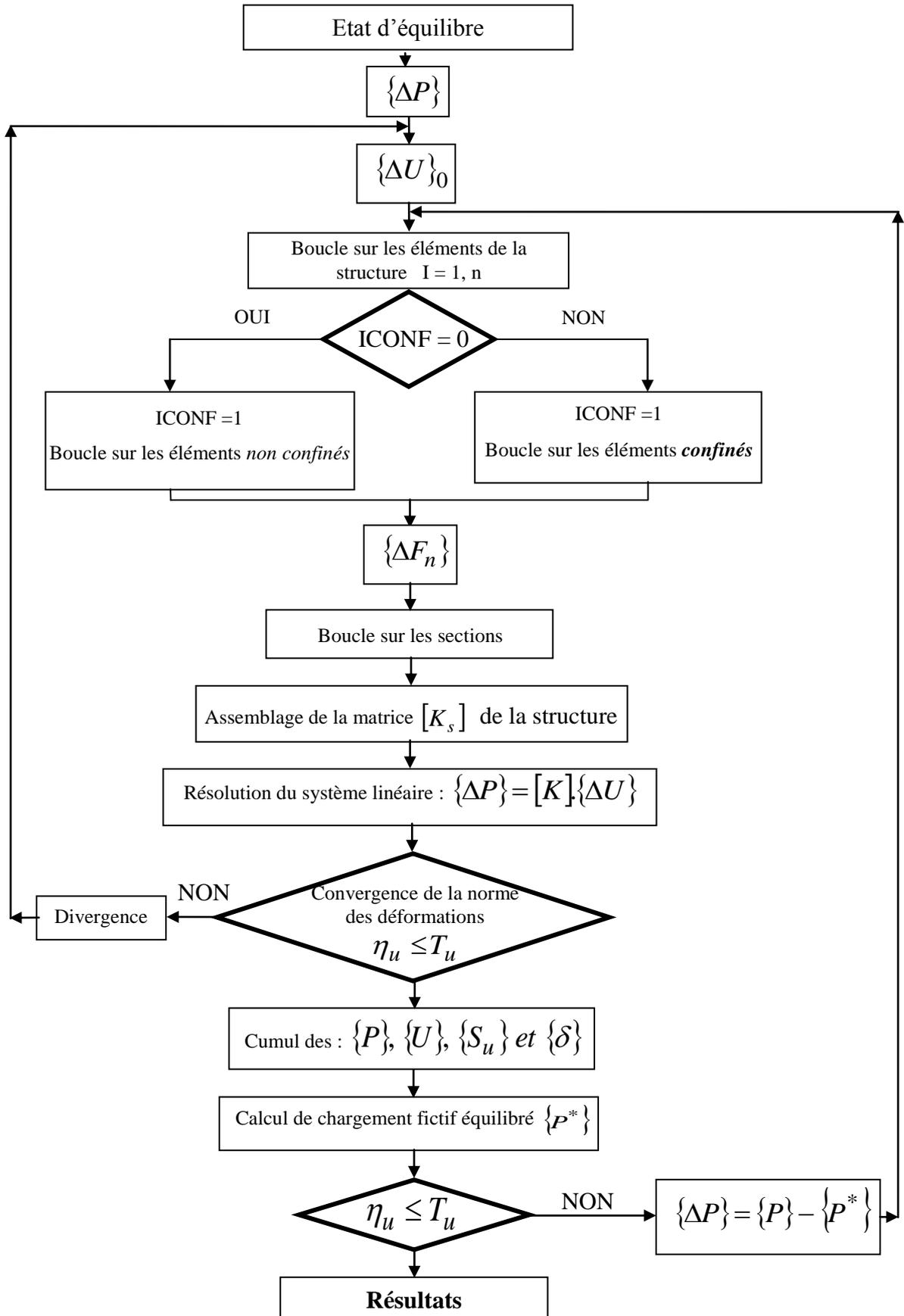
$[B'']$: Matrice exacte = $f(\{S_U\}^r)$

r : Numéro de l'étape

i : Numéro de l'itération

NB: Ce schéma de résolution avec calcul des résidus d'équilibre est nécessaire en petits déplacements lorsque les matrices $[B]$ et $[D]$ ne sont pas actualisées à chaque itération

IV.5. Organigramme simplifié d'une étape de chargement



Organigramme IV.2 : Organigramme simplifié d'une étape de chargement

IV.6. Taille et structure du programme :

Le programme mis au point permettra de créer pour une étape ou pour un certain nombre d'étapes la liste des :

- déplacements d'un ou de tous les nœuds de la structure,
- efforts nodaux équilibrés d'un ou de tous les nœuds de la structure,
- efforts internes aux extrémités de tous les éléments de la structure,
- déformations de toutes les sections de calcul.

Ces différentes listes nous permettent donc de connaître l'évolution du comportement de la structure en fonction du chargement appliqué.

Le programme est écrit en FORTRAN 77, et comporte environ 2200 lignes.

Il est composé d'un programme principal et de 40 sous programmes, dont les principaux, sont représentés ci-dessous :

N°	NOM	FONCTION
1	SSNOLI	Analyse incrémentale pas à pas du chargement de la structure jusqu'à la ruine.
2	RISEEL	Calcul de la matrice de rigidité de l'élément dans son repère locale.
3	SECTION	Construit la matrice de souplesse [S] de la section
4	RISESE	Calcul la matrice de rigidité de la section.
5	FORMT1	Formation de la matrice de rigidité [T1]
6	FORMT	Formation de la matrice [T]
7	FORML	Formation de la matrice [L(x)]
8	COORXY	Calcul les longueurs des éléments, ainsi que les angles qu'ils font avec le repère global de la structure.
9	ROTATION	Construit la matrice de passage [RT] du repère absolu au repère global
10	CONTB	Calcul de déformation dans le béton.
11	LIMITE	Introduit les conditions aux limites
12	BACSUB	Resoud le système linéaire $\{P\}=[K].\{U\}$
13	CHARGE	Construit le vecteur des charges extérieures {P}
14	FORMD	Formation de la matrice [D]
15	FORMR	Assemble les matrices de rigidité des barres (repère absolu) pour former la matrice de rigidité de la structure

Tableau (IV.1) : Tableau des fonctions des sous programmes principaux

IV.7. Présentation du fichier des données :

Les données sont introduites par lignes, les valeurs sont séparées par un blanc ou une virgule, les données sont ainsi lues :

- 1) Lecture des données relative à la structure :

NBNOEU NEL NTYPE NPI NIMP ISEC

- 2) BRUTE(I) Pois(I) POIB(I) AIRE(I) ICONF(I) I=1,NELE

- 3) Introduction des coordonnées de chaque nœud I dans le repère absolu :

K Coord (k,j) j = 1 , 2

- 4) Lecture de la connectivité :

K Fcon (k,j) j=1 , 2

- 5) Introduction des conditions d'appuis:

XNUM (i) Comp (i,j) j = 1 , 3

Avec I = 1, Nimp

- 6) Chargement :

NBCF NBCV (CHARGEMENT FIXE ET CHARGEMENT VARIABLE)

- 7) lecture des données relative à la section dans le repère générique:

NNE (i) NNS (i) TTYPE (i) NCABI (i)

BBL (i,j) ,j = 1 , NNE (i)

CBL (i,j) ,j = 1 , NNE (i)

OORD (i,j) ,j = 1 , NNE (i) + 1

SPRIM (i) SAT (i) DC BC (i) W (i)

FFE (i) FFT (i) EEC (i) RRB (i) RRC (i) RRBC (i)

RRCC(i) FYH(i) ASL(i) ASX(i) ASY(i)

EEPSRT (i) EEPSO (i) EEPSCU (i)

SSE (i) EES (i) EEPSU (i) SSR (i) KKS (i)

- 8) Coordonnées des aciers passifs par rapport au repère générique dans la section :

VVI (i,ies) ies = 1, NNS (i)

AAS (i, ies) ies = 1 , NNS (i)

9) Introduction de la précontrainte :

AAP(i) SSP(i) EEP(i) EEPSUP(i) SSPR(i) TTI(i) KKP(i)

10) Introduction des points de passage des câbles dans les sections d'extrémité de l'élément :

YC1(IL,J) YC2(IL,J) XC1(IL,J) XC2(IL,J)

11) Introduction de l'angle qui fait le câble avec l'axe x de référence :

(ANGP (IL,J),J=1,NPI)

ANGP : c'est l'angle de l'élément, et NPI c'est le nombre de câble

IV.7. Description des données :

Les données sont écrites en format libre (valeurs séparées par un blanc) .

1 NBNOEU NEL NTYPE NPI NIMP ISEC

NBNOEU : Nombre de nœuds

NEL : Nombre d'éléments

NTYPE : Nombre de types de section

NPI : Nombre de câbles de la précontrainte

NIMP : Nombre de nœuds d'appuis

ISEC : Nombre de sections par élément

2 BRUTE(I) Pois(I) POIB(I) AIRE(I) ICONF(I) I=1,NELE

BRUTE : Aire brute de la section de béton

Pois : Coefficient de poisson

POIB : Poids brute de la section de béton

AIRE : Aire réduite de la section de béton

ICONF : Indice de confinement =1 Béton confiné

=0 Béton non confiné

3 K Coord (k,j) j = 1 , 2

K : Numéro du noeud (k = 1, NBN)

Coord : Coordonnées des noeuds

4 K Fcon (k,j) j=1 , 2

K : Numéro de l'élément

Convec : Vecteur véhiculant la conductivité de l'élément

- 5 XNUM (i) Comp (i,j) $j = 1, 3$
 Avec $I = 1, Nimp$
 Xnum : Numéro du noeud d'appui (dans la liste des noeuds)
 i : Indice du noeud (dans la liste des noeuds d'appuis)
 j : Indice composante (1/Ox , 2/Oy , 3 rotations)
 Comp : Indice de la composante : = 1, appuis imposé
 = 0, appuis libre
- 6 NBCF NBCV
 NBCF : Nombre de nœuds chargés dans le chargement {Po}
 NBCV : Nombre de nœuds chargés dans le chargement {P1}
- 7 NUN(i) FFIX(i,j) $j=1,3$
 NUN : Numéro du noeud chargé par le chargement {Po} (dans la liste des noeuds) .
 $i = 1, NBCF$
 i : Indice des noeuds (dans la liste des nœuds chargés par {Po})
 FFIX (i,j) : $j = 1$ Composante selon Ox de l'effort appliqué au nœud i
 $j = 2$ Composante selon Oy de l'effort appliqué au noeud i
 $j = 3$ Composante couple
- 8 NON(i) FVAT(i,j) $j=1,3$
 NON : Numéro du nœud chargé par le chargement {P1} (dans la liste des nœuds).
 $i = 1, NBVC$
 i : Indice des nœuds (dans la liste des nœuds chargés par {P1})
 FVAT (i,j) : $j = 1$ Composante selon Ox de l'effort appliqué au nœud i
 $j = 2$ Composante selon Oy de l'effort appliqué au nœud i
 $j = 3$ Composante couple
- 9 DALP0 TOLP
 DALP0 : Pas d'accroissement du coefficient de chargement,
 TOLP : Tolérance.

Entre deux étapes consécutives, est augmenté de DALP. En cas de divergence, DALP0 est divisé par 2 . Le calcul est arrêté lorsque $DALP0 < TOLP$.

Les phases qui vont suivre de 10 à 22 sont répétées NTYPE fois ($i = 1, NTYPE$)

- 10 NNE (i) NNS (i) TTYPE (i) NCABI (i)
 NNE (i) : Nombre de trapèzes de béton
 NNS (i) : Nombre de lits d'armatures passives
 TTYPE (i) : Type d'acier (1: Naturel ; 2 : Ecrouis)
 NCABI (i) : Nombre de câbles de précontrainte
- 11 BBL (i,j) , j = 1 , NNE (i)
 BBL (i,j) : Base inférieure du trapèze d'ordre j
- 12 CBL (i,j) , j = 1 , NNE (i)
 CBL (i,j) : Base supérieure du trapèze d'ordre j
- 13 OORD (i,j) , j = 1 , NNE (i) + 1
 OORD (i,j) : Ordonnées des bases du trapèze d'ordre j par rapport à un axe
 de référence
- 14 PRIM(i) SAT(i) DC BC(i) W(i)
 PRIM (i): Distance entre les CDG des cadres.
 SAT (i) : Distance entre les extrémités des cadres.
 DC (i) : Hauteur nette de la section
 BC (i) : Largeur nette de la section
 W (i) : distance entre les armatures longitudinales.
- 15 FFE (i) FFT (i) EEC (i) RRB (i) RRC (i) RRBC(i)
 RRCC(i) FYH(i) ASL(i) ASX(i) ASY(i)
 FFE (i) : f_{cj} - contrainte maximale de compression du béton,
 FFT (i) : f_{tj} - contrainte maximale de traction du béton,
 EEC (i) : E_b - Module de Young élastique du béton,
 RRB (i) : Paramètre caractérisant la branche ascendante de la loi de SARGIN,
 RRC (i) : Paramètre caractérisant la branche descendante de la loi de SARGIN.
 RRBC (i) : Paramètre de la loi de SARGIN avec les paramètres de confinement.
 RRCC (i) : Paramètre de la loi de SARGIN avec les paramètres de confinement.
 FYH (i) : Contrainte limite des aciers.
 ASX (i) : Section d'acier selon X
 ASY (i) : Section d'acier selon Y

- 16 EEPSRT (i) EEPSO (i) EEPSCU (i)
 EEPSRT (i) : Déformation de rupture en traction
 EEPSO (i) : Déformation du pic en compression ε_o
 EEPSCU (i) : Déformation ultime de rupture en compression ε_u
- 17 SSE (i) EES (i) EEPSU (i) SSR (i) KKS (i)
 SSE (i) : σ_e : Limite élastique de l'acier passif
 EES (i) : E_a : Module de Young de l'acier passif
 EEPSU (i) : Déformation de rupture (10 ‰)
 SSR (i) : Contrainte de rupture (Acier Ecrouis)
 KKS (i) : Type d'acier (1: Naturel ; 2 écrouis)
- 18 VVI (i,ies) ies = 1, NNS (i)
 VVI (i,ies) : Côte de lit d'acier passif / axe de référence
- 19 AAS (i, ies) ies = 1 , NNS (i)
 AAS (i,ies) : Aire du lit d'acier passif
- 20 COMP(i),(i=1,INI=NELE x NYPE)
 COMP(i):Numéro de section de l'élément I
- 21 AAP(i) SSP (i) EEP (i) EEPSUP (i) SSRP (i) TTI (i) KKP (i)
 AAP(i) : La section d'armature de la précontrainte.
 SSP (i) : Limite élastique de l'acier actif,
 EEP(i) : Module élastique de l'acier actif ,
 EEPSUP (i) : Déformation de l'acier actif,
 SSPR (i) : Contrainte de rupture ,
 TTI (i) : Tension initiale du câble ,
 KKP (i) : = 1 pour section précontrainte ; = 0 pour section non précontrainte.
- 22 YC1(IL,J) YC2(IL,J) XC1(IL,J) XC2(IL,J)
 YC1 (IL,J) : Ordonnée initiales du câble d'ordre J dans l'élément (suivant l'axe OY)
 YC2 (IL,J) : Ordonnée finale du câble d'ordre J dans l'élément (suivant l'axe OY)
 XC1(IL,J) : Ordonnée initiales du câble d'ordre J dans l'élément (suivant l'axe OX)
 XC2(IL,J) : Ordonnée initiales du câble d'ordre J dans l'élément (suivant l'axe OX)

- 23 ANGP (IL,J) ,j=1,NPI ; IL=1,NEL
 ANGP (IL,J) : Angle qui fait la ligne moyenne du câble d'ordre J avec l'axe horizontal de la section.
- 24 PFI PSI SIGMO ITP
 PFI : Perte par frottement de câble.
 PSI : Perte de la ligne de câble.
 SIGMO : Contrainte de rupture.
 ITP : Mode de traction de câble.

IV.8. Conventions de signes :

- Les charges sont comptées positives vers les x ou les z positifs.
- Les moments sont positifs dans le sens trigonométriques.
- Le pas DALP pour l'accroissement du coefficient de chargement sera, en général , choisi de l'ordre du 1/10 de la valeur ultime prévue de ALP et est sans dimension

IV.9. Unités :

Elles sont imposées comme suit :

- Les longueurs = [m]
- Les aires = [m²]
- Les forces = [KN]
- Les contraintes = [KN/m²]
- Les moments = [KN.m]

IV.10. CONCLUSION :

Un important pas aura ainsi été franchi, celui de la mise au point d'un outil de calcul, Utile pour l'amélioration de nos connaissances, concernant la sécurité des constructions et l'interprétation d'essais expérimentaux, des modèles de structures effectués en laboratoire.

Le programme de calcul ainsi élaboré, a été aménagé de telle manière à introduire les effets de temps tels que la relaxation des aciers de précontrainte, le fluage et le retrait du béton. La structure générale du programme ne sera pas pour autant affectée dans sa globalité.

Quant aux limitations de ses dimensions, elles peuvent être augmentées si nécessaire, en fonction de l'importance de la structure à étudier et de la capacité de notre PC.

Afin de vérifier la méthode de calcul exposée, nous avons dû la tester sur certaines structures tirées dans la littérature et qui ont fait l'objet d'études expérimentales dans différents laboratoires de recherche. Comme structures, nous avons retenu des ossatures, en béton armé ordinaire.

Les résultats publiés portent essentiellement sur des structures simples : poutres continues et portique simple.

Les vérifications effectuées sur ces exemples, ont donnés des résultats assez satisfaisants.

Toutefois, pour certaines structures traitées, des écarts sont observés, plus particulièrement en phase de comportement ultime, entre le modèle mathématique et la réalité expérimentale.

Il s'agit généralement soit d'imperfections du dispositif expérimental (déplacement des appuis du portique et des poutres continues), soit de problèmes technologiques liés aux détails constructifs.

V.1. Exemples de structures en béton armé à section rectangulaire:

V.1.1. Poutre continue : Essai de Mattock

Il s'agit d'un exemple d'une poutre continue, tiré d'une série d'essais réalisés par A.MATTOCK.

1. Caractéristiques géométriques :

1.1. Poutre :

Elle comporte deux travées égales de 183 cm de portée, figure (V.1) et(V.2)

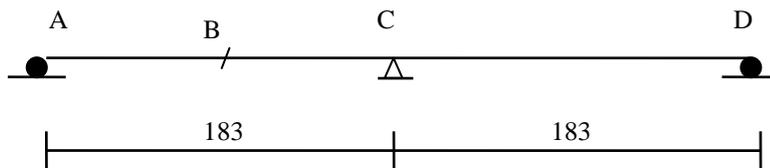


Figure V.1 : Poutre de A.MATTOCK [10]

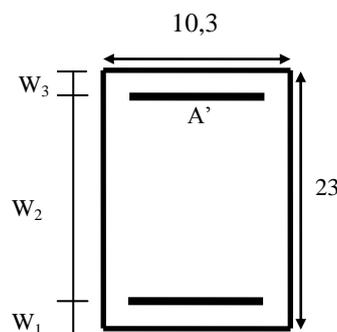
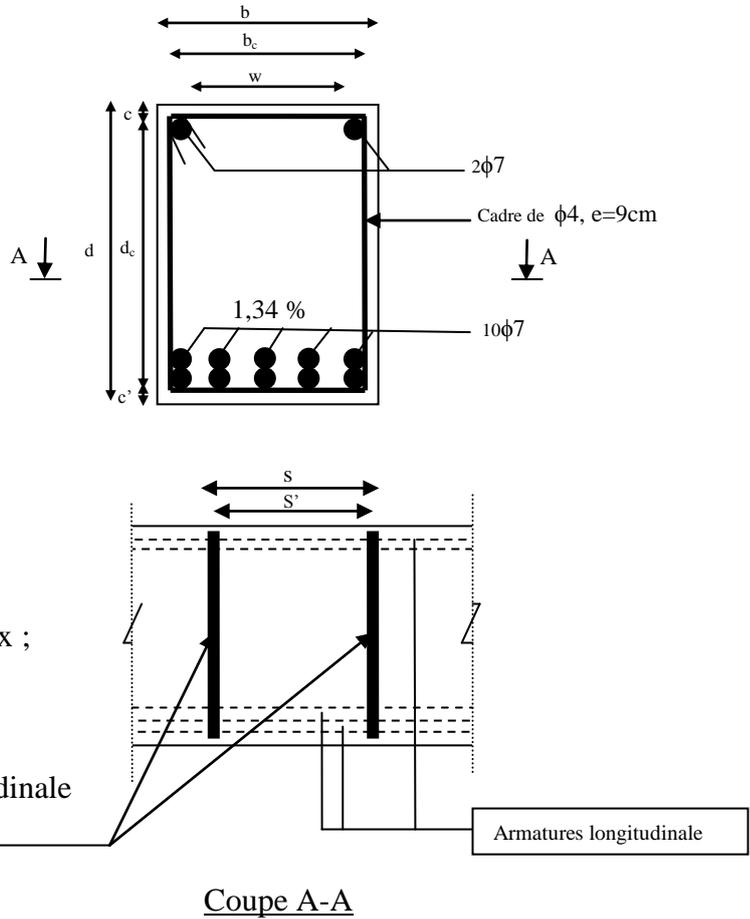


Figure V.2 : Géométrie et détails de la section de la poutre au point B.

2. section transversale :

-Les deux travées sont de sections rectangulaires de dimensions 10,3 x 23 cm. La répartition des armatures est variable entre appui et travée.
 Les sections B au droit de la charge P et C au niveau de l'appui central comportent le même pourcentage d'armatures tendues (1,34 %).

- b=10,3 cm
- d=23 cm
- b_c=8,3 cm
- d_c=21 cm
- w=11, cm
- s'=9 cm
- s=9,4 cm
- c=c'=1 cm



Armature transversale :

- f_{yh}=215 MPa
- A_{sl}=4,62 cm²
- A_{sx}=0,565 cm²
- A_{sy}=0,565 cm²

Avec:

- F_{yh}: contrainte limite des aciers transversaux ;
- A_{sx}, A_{sy} : section des aciers transversaux ;
- A_{sl}: section des armatures longitudinales ;
- S: distance entre les extrémités des cadres ;
- W: la distance entre deux Armatures longitudinale Adjacentes.

Figure V.3 : détail de la section transversale

3. chargement :

Au milieu de l'une des travées, est appliquée une charge P, croissante jusqu'à la rupture.

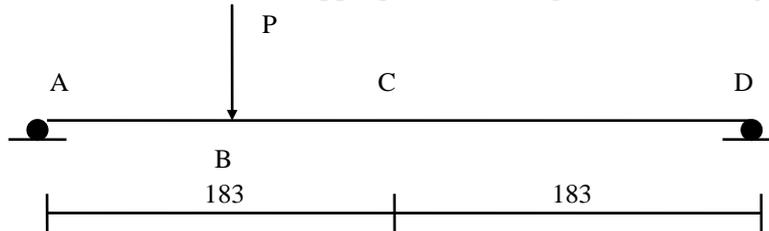


Figure V.4: point d'application des charges sur la poutre

4. Caractéristiques mécaniques des matériaux :

1. béton :

-La résistance à la compression f_{cj} du béton de la poutre, a été mesurée sur des cubes. La valeur donnée est égale à 29,40 MPa.

Le comportement du béton en compression est idéalisé par la loi de SARGIN. Le module d'élasticité du béton à l'origine, E_{bo} est estimé à 25 GPa.

Le calcul avec prise en compte du béton tendu est effectué en prenant pour la résistance du béton à la traction $f_{tj} = 10 \%$ de la valeur de la résistance en compression considérée dans les calculs.

2. Aciers :

Les aciers utilisés sont des aciers naturels dont le diagramme contraintes - déformations est supposé élasto-plastique avec raffermissement. Les caractéristiques mécaniques données sont la limite d'élasticité $\sigma_e = 400$ MPa et la contrainte de rupture $\sigma_r = 533$ MPa.

Le module d'élasticité à l'origine des aciers est estimé à 200 GPa.

La déformation ϵ_s correspond à la fin du palier élastique (ou début du raffermissement) est prise égale à 5 ‰.

La structure est modélisée comme suit :

4. Modélisation de la poutre :

La poutre est discrétisée en éléments finis de faible longueur représenté sur la (figure V.5)

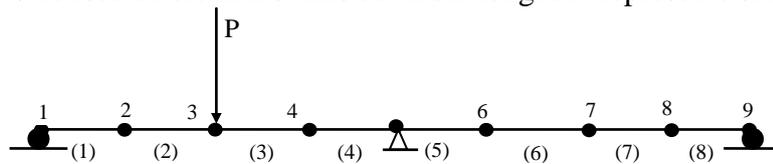


Figure V.5 : modélisation adopté pour la poutre

5. Résultats obtenus :

Après avoir introduit toutes les données nécessaire de la poutre dans le programme écrit en langage Fortran nous avons obtenus les résultats suivant :

Le tableau ci-dessous donne les chargements (en KN) à la rupture selon l'essai et le calcul, dans la section du milieu de la travée, pour béton non confiné et béton confiné avec des armatures transversale $e=9$ cm.

	Expérience	Calcul	Calcul / Expérience
Charge (KN)(béton non confiné)	74,20	70,10	0,94
Charge (KN) (béton confiné $e=9$ cm)	74,20	73,07	0,98

Tableau (V.1) : Charge de rupture

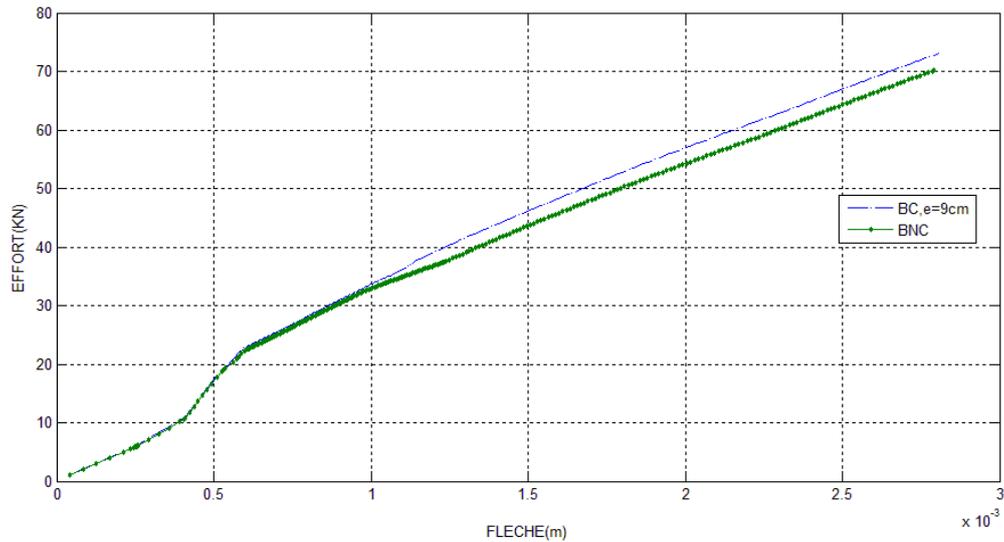


Figure V.6 : Evolution de la flèche en travée en fonction de la charge.

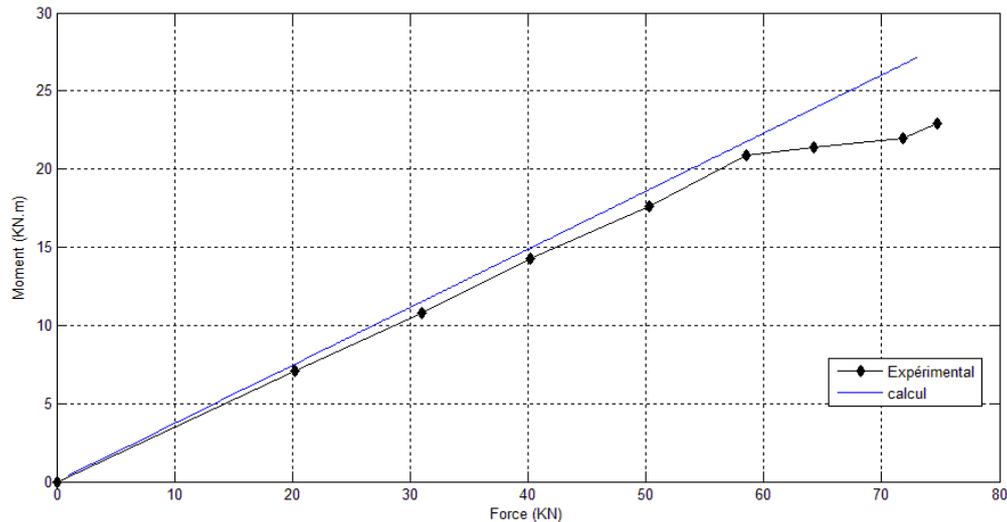


Figure V.7 : Evolution du moment en travée en fonction de la charge.

-On constate pour espacement des cadres $e=9\text{cm}$, la charge de rupture est proche de celle de l'expérience.

-pour un chargement inférieur à 33KN la courbe de charge-flèche de béton non confiné coïncide avec celle de béton confiné avec espacement de 9cm , donc le début de confinement commence quand la charge P dépasse 33KN .

-Nous remarquons que le moment en travée calculé avec espacement de 9cm est en bon accord avec l'expérience.

Contrairement au calcul, la dernière étape de chargement expérimental s'effectue alors que les aciers sont dans leur phase de raffermissement post palier.

Il semblerait que la limite élastique réelle des aciers est inférieure à la valeur donnée et le palier plastique réel des aciers doit être plus faible que celui considéré dans les calculs.

V.1.2. Poutre continue : essai de DUDECK.

Il s'agit d'un exemple d'une poutre continue sur trois appuis testée par DUDECK, et qui a fait l'objet d'une étude numérique par THANNON [23].

Caractéristiques géométriques :

2.1 poutre :

Elle comporte deux travées égales de 84 cm de portée chacune.

Les deux travées sont de sections rectangulaires de dimensions 60 x 80 mm

La section en n'importe quel point de la poutre continue est représentée par la figure (V.5).

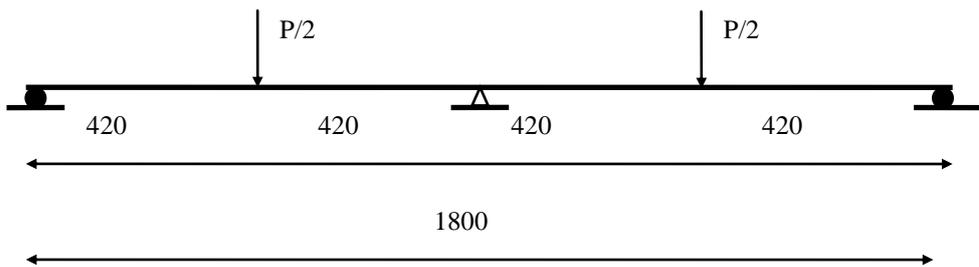


Figure V.8: Poutre de DUDECK [23]

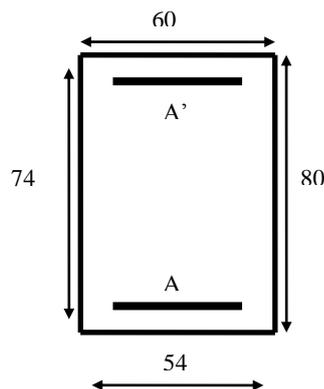


Figure V.9 : Géométrie et détails de la section de la poutre

Le coefficient de poisson est pris égal à 0.

2.2 Section transversale :

$b=0,06$ cm

$d=0,08$ cm

$b_c=0,054$ cm

$d_c=0,074$ cm

$w=11$, cm

$s^*=5$ cm

$s=5,4$ cm

$c=c^*=0,3$ cm

Armatures transversales:

transversale

$y_h=215$ MPa

$A_{sl}=1,008$ cm²

$A_{sx}=0,071$ cm²

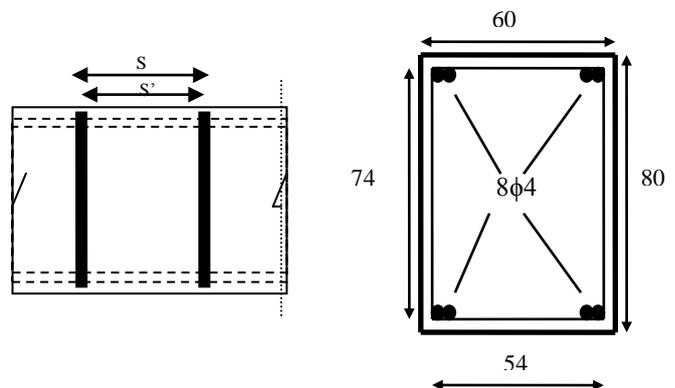


Figure V.10 détail de la section

$$As_y = 0,071 \text{ cm}^2$$

2. Chargement : Au milieu de chaque travée, est appliquée une charge $P/2$, croissante jusqu'à la rupture.

3. caractéristique mécaniques des matériaux :

3.1 Acier :

Les aciers utilisés sont des aciers naturels, dont la limite élastique est $\sigma_e = 490 \text{ MPa}$.

Le module d'élasticité à l'origine des aciers est estimé à 196 GPa .

3.2 Béton :

La résistance à la compression f_{cj} du béton de la poutre est égale à 32 MPa . Le comportement du béton en compression est idéalisé par la loi de SARGIN. Le module d'élasticité du béton à l'origine, E_{b0} est égale à $16,66 \text{ GPa}$. Le calcul avec prise en compte du béton tendu est effectué en prenant pour la résistance du béton à la traction f_{tj} la valeur de $1,67 \text{ MPa}$. La déformation ultime de compression du béton est égale à $0,0027$.

4. Modélisation :

La poutre est discrétisée en éléments finis de faible longueur représenté sur la (figure V.5)

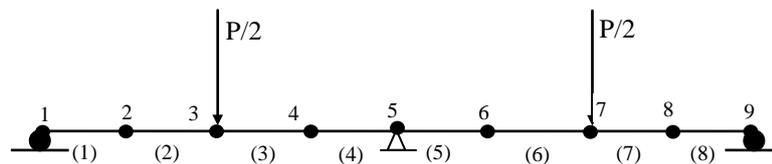


Figure V.11 modélisation adoptée pour la poutre

5. Résultats obtenus :

Après avoir introduit toutes les données nécessaires de la poutre dans le programme écrit en langage Fortran nous avons obtenus les résultats suivant :

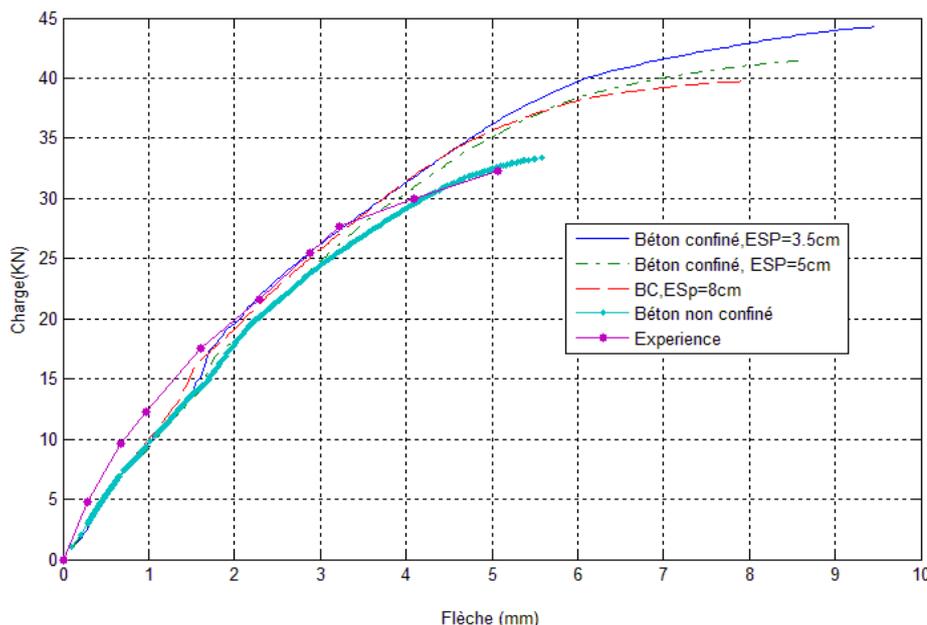


Figure V.12 : Evolution de la flèche en travée en fonction de la charge.

Nous constatons un bon accord entre la courbe expérimentale et les deux études numériques (pour un espacement de 5 cm), quant à l'allure générale de la courbe.

Notre modèle théorique tend à s'écarter de la courbe expérimentale à mesure que nous nous rapprochons de la rupture, et cela en surestimant les déplacements.

Nous enregistrons aussi, un problème de divergence au voisinage de la rupture ultime lors de l'équilibre de la section, qui se manifeste par une valeur isolée qui s'écarte nettement de la courbe numérique.

V.1.3. Portique à noeuds deplacables articulé en pieds :

Il s'agit d'un essai de portique rectangulaire bi-articulé réalisé en grande Bretagne par W.B.CRANSTON . Cet essai a fait l'objet de trois études numériques GRELAT [10], ESPION [7] et NAIT RABAH [18] .Ce portique est soumis à deux charges verticales d'intensité égales

à $P/2$ et une charge horizontale H appliquée en tête d'une colonne.

Les deux systèmes de charge P et H sont appliqués, instantanément, de manière croissante et maintenus dans un rapport constant tel que : $\frac{H}{P} = 0,1$.

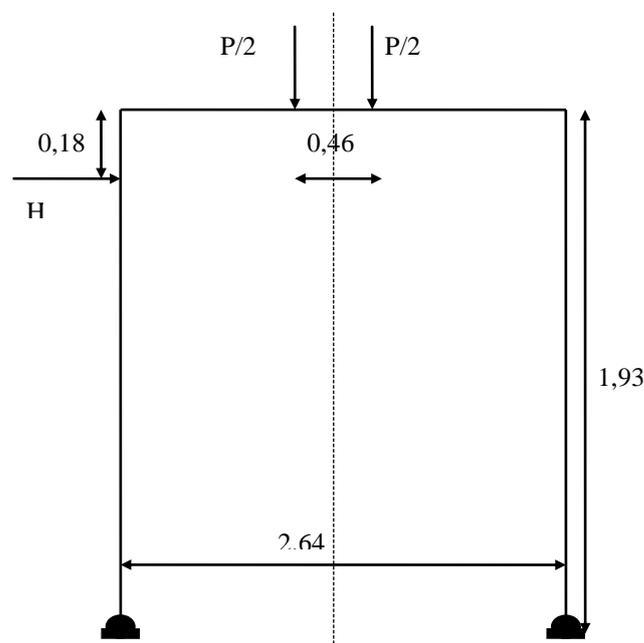


Figure V.13 : Portique articulé de CRANSTON [18]

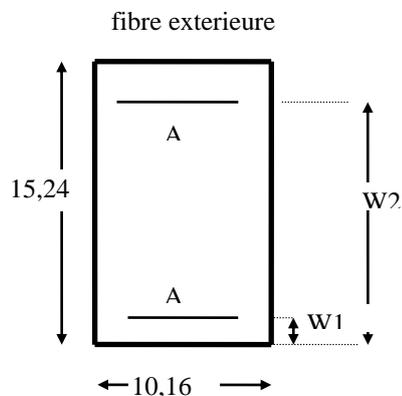


Figure V.14 : Géométrie et détails de la section droite

Section transversale :

$b=10,16$ cm

$d=15,24$ cm
 $b_c=8,87$ cm
 $d_c=13,95$ cm
 $w=6,67$ cm
 $s^2=10,00$ cm
 $s=11,20$ cm
 $c=1,41$ cm
 $c^2=1,41$ cm

Armatures transversales :

$F_{yh}=380$ MPa
 $A_{sl}=28,353 \cdot 10^{-3}$ m²
 $A_{sx}=5,65487$ m²
 $A_{sy}=5,65487$ m²

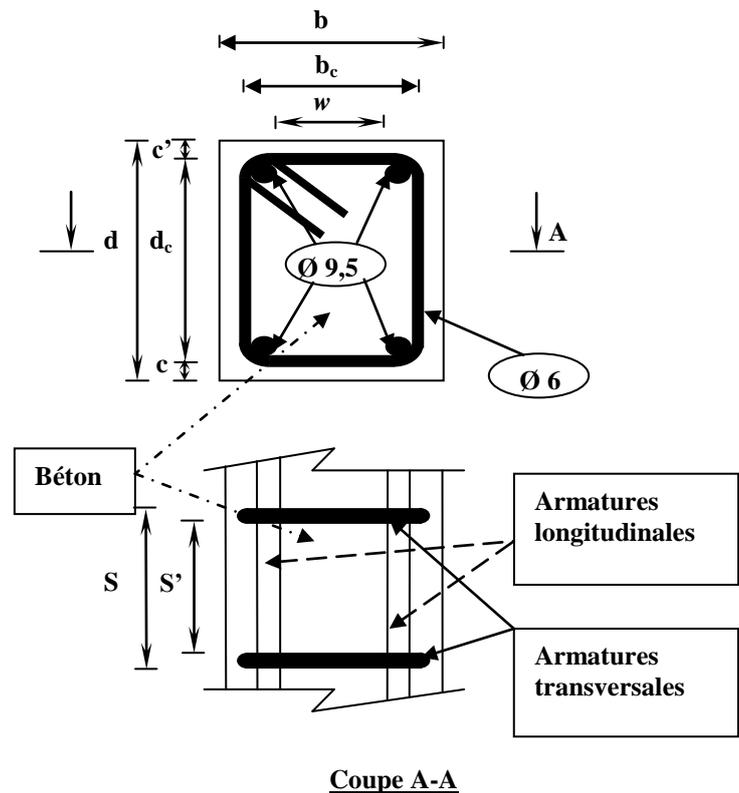


Figure V.15 : Détails de la section

Les armatures longitudinales varient le long du portique. Cette distribution nous mène à discrétiser la structure en 20 éléments .

Les barres d'acier utilisées sont de diamètre ϕ 9,5 et la répartition longitudinale adoptée est représentée dans le tableau ci-après :

Type de section	éléments	A1 (cm ²)	A2 (cm ²)	W1 (cm)	W2 (cm)
1	1 - 20	1,42	1,42	1,42	13,82
2	2- 6 -15 -19	1,42	2,84	1,42	13,82
3	8 - 13	2,84	1,42	1,42	13,82
4	7 - 14	2,84	2,84	1,42	13,82
5	3-4-5-16-17-18	1,42	4,26	1,42	13,82
6	9 - 10 - 11 - 12	4,26	1,42	1,42	13,82

Tableau (V.2) : Répartition longitudinale des armatures

La limite d'élasticité des aciers est donnée égale à 278 Mpa. Le module d'élasticité E_a est estimé à 200 GPa .

Pour le comportement du béton en compression, le compte rendu des essais fait mention de la résistance sur cube d'environ 40 MPa. La loi de comportement est idéalisée par celle de SARGIN ($K = 2$, $K' = 0$) en prenant pour la résistance caractéristique à la compression σ_{bj} , 85 % de celle obtenue sur cube . La déformation du pic ε_{bo} correspondant à σ_{bj} est estimé à

2 ‰. Le module d'élasticité E_{bo} du béton à l'origine est déduit de la relation : $E_{bo} = \frac{2 \cdot \sigma_{bj}}{\epsilon_{bo}}$.

La résistance du béton à la traction, f_{tj} est supposée égale à 24,90 MPa. Cette valeur correspond à celle utilisée par ESPION dans son étude numérique.

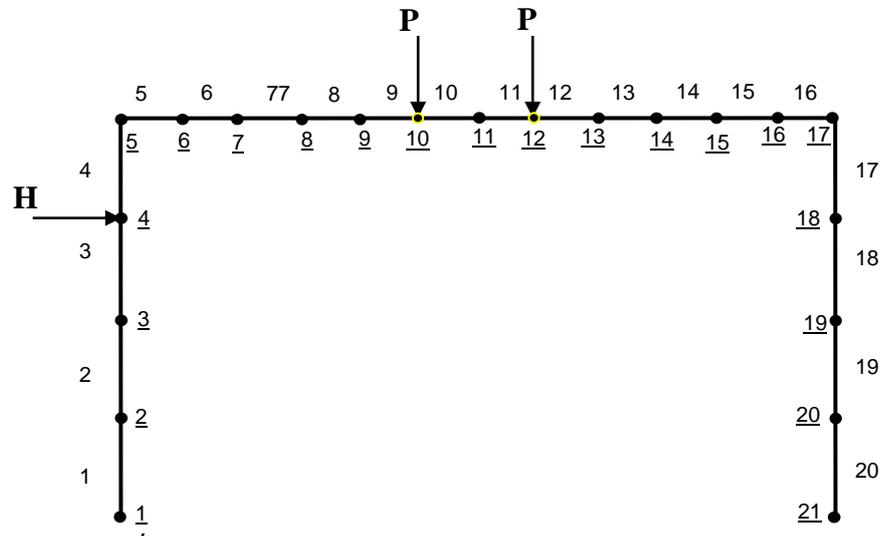


Figure V.16: Modélisation adoptée pour portique

Résultats obtenus :

Après avoir introduit toutes les données nécessaire de la poutre dans le programme écrit en langage Fortran nous avons obtenus les résultats suivant :

Le tableau ci-dessous donne les chargements (en KN) à la rupture selon l'essai et le calcul, dans la section du milieu de la travée.

Essai de CRANSTON : Portique à nœuds déplaçables articulé en pieds :

I-évaluation de la flèche sous la charge P :

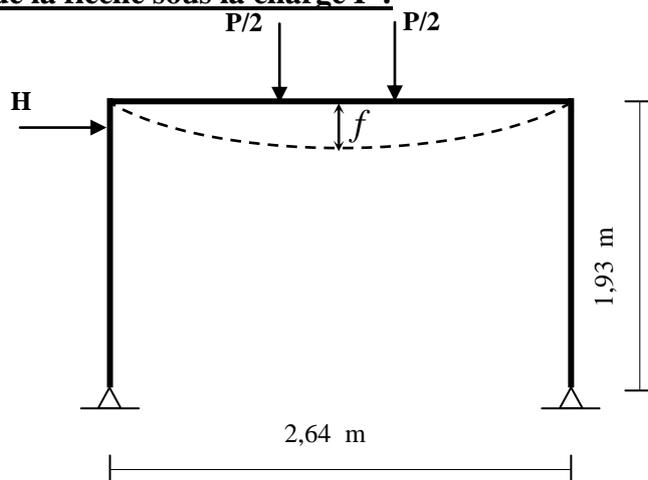


Figure V.17 : Evaluation de la flèche sous la charge (P)

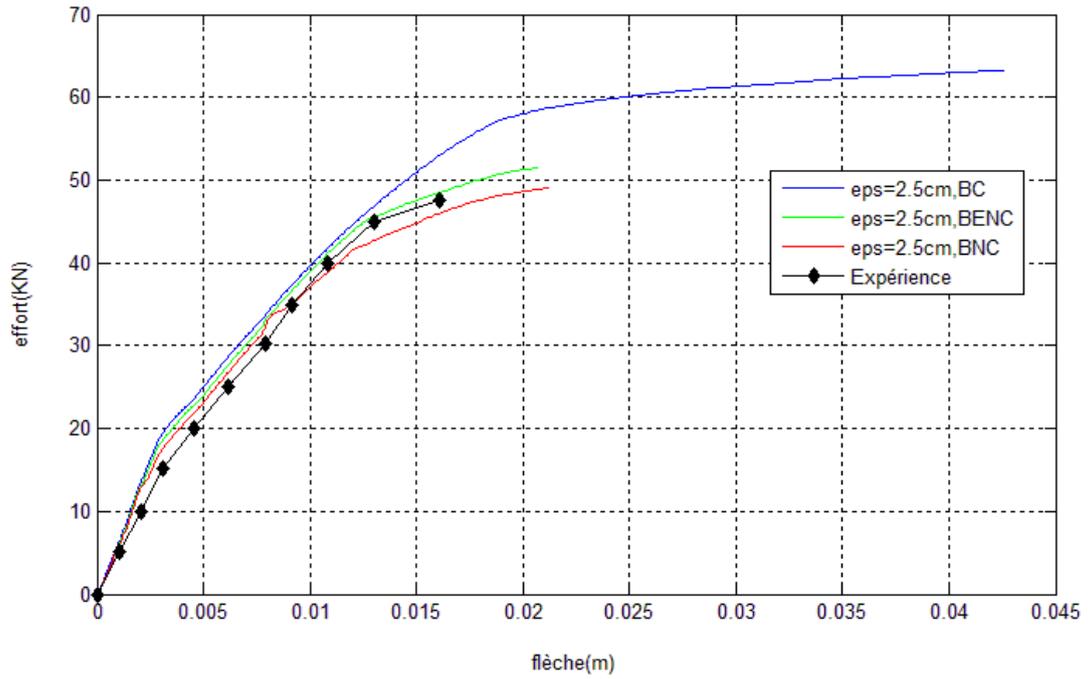


Figure V.18 : diagramme effort-flèche avec espacement des cadres égaux à 2.5cm

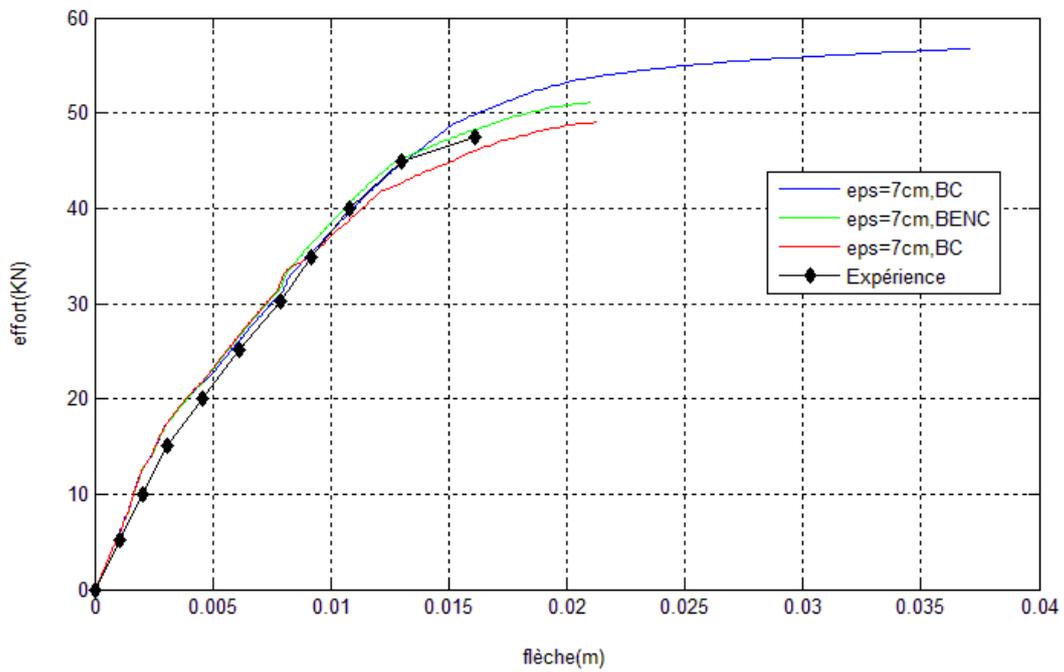


Figure V.19 : diagramme effort-flèche avec espacement a des cadres égaux à 7 cm

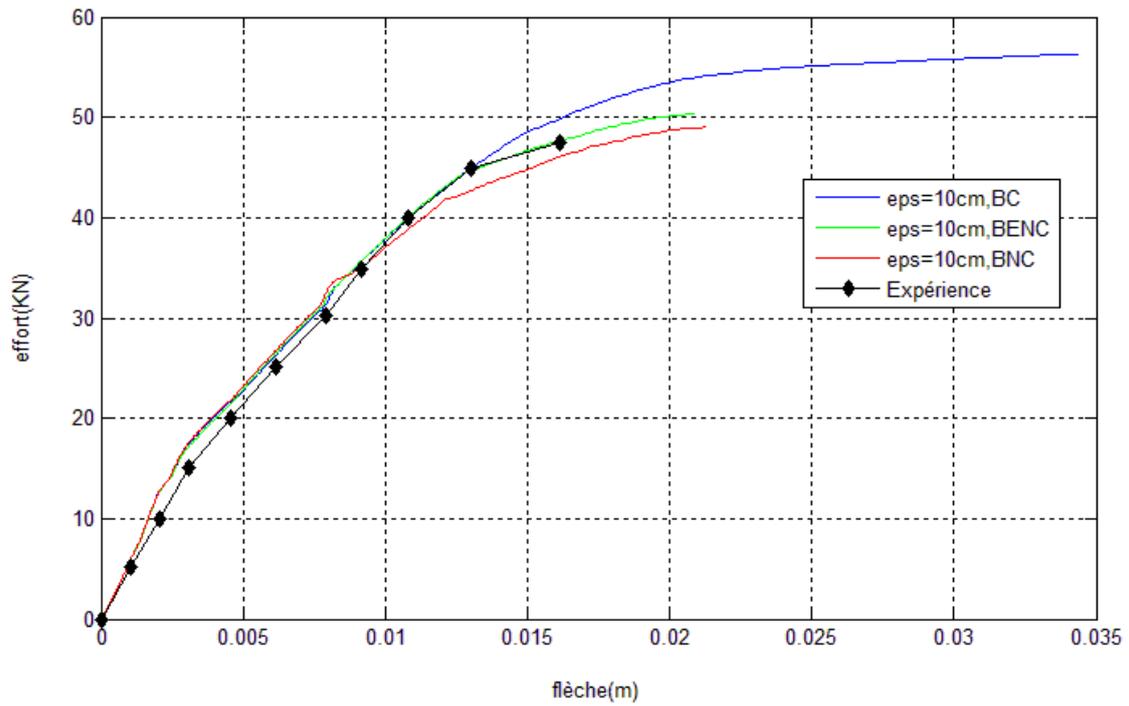


Figure V.20 : diagramme effort-flèche avec espacement des cadres égaux à 10 cm
Superposition des différentes courbes obtenues avec le béton du portique entièrement confiné et partiellement confiné.

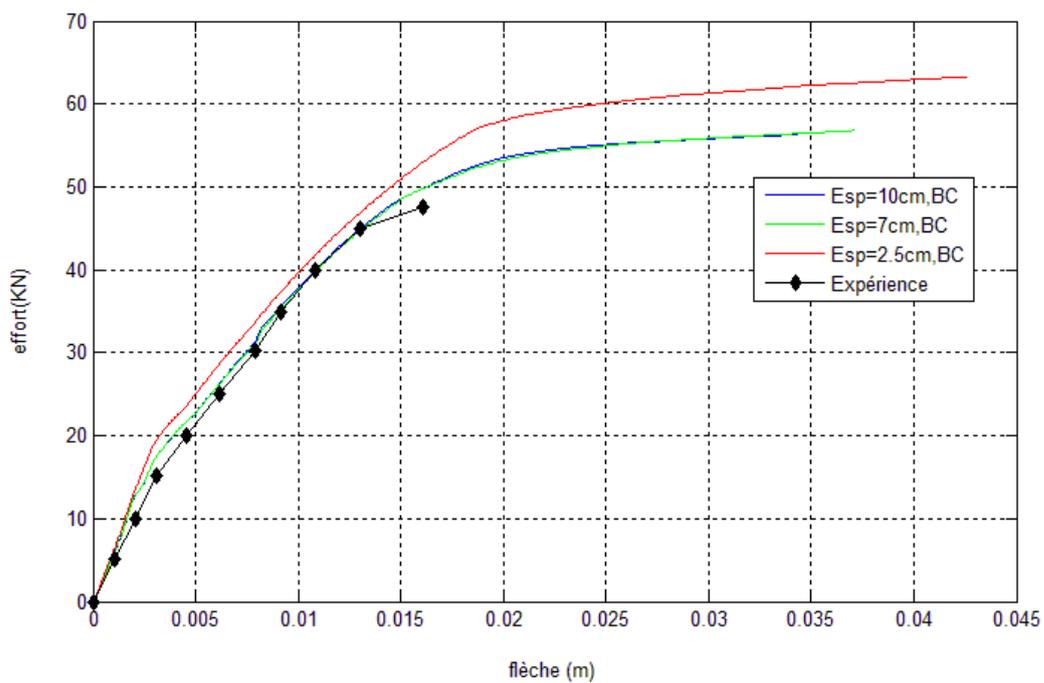


Figure V.21: diagramme effort-flèche résultant du béton confiné avec des espacements des cadres variables

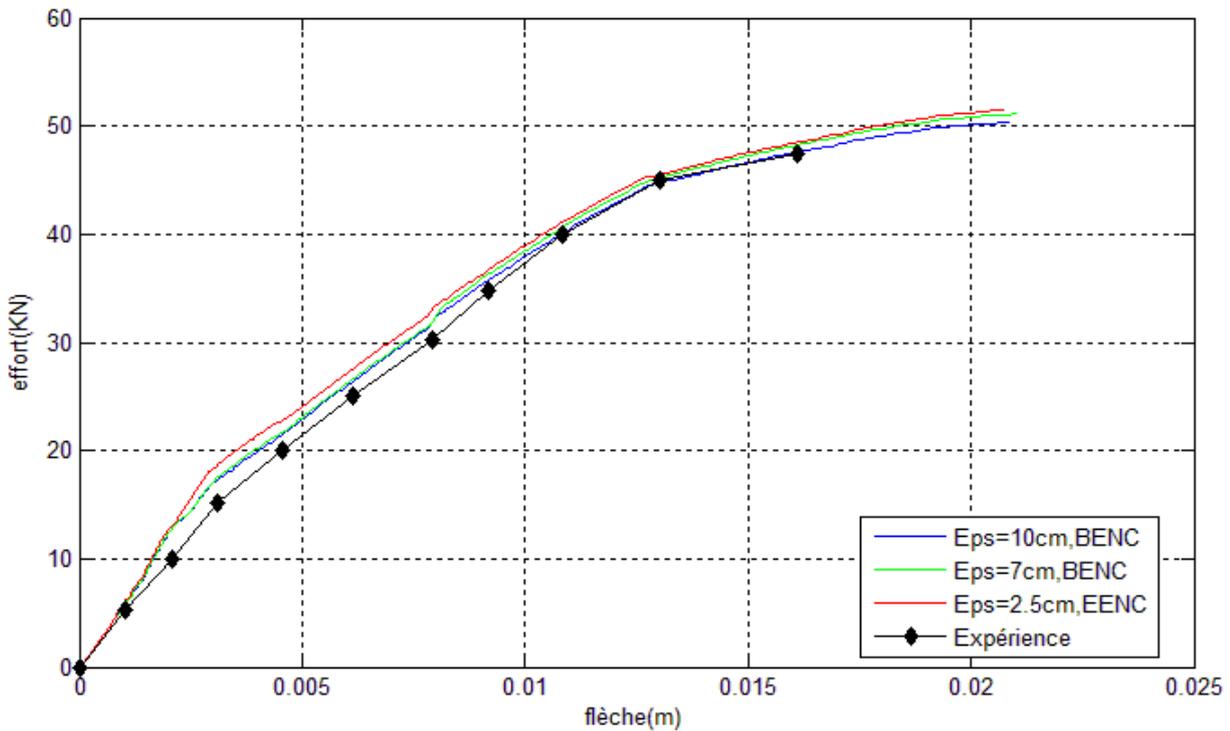


Figure V.22: diagramme effort-flèche résultant du BENC avec des espacements des cadres variables

- Constats

Les courbes calculées mettent en évidence la contribution des armatures transversales dans la résistance globale de la structure.

Les armatures transversales exercent des pressions latérales sur le béton à partir de la valeur de l'effort égal à 14,33 KN qui correspond à une flèche de $2,08 \cdot 10^{-3}$ m, (Figurer. V-18) : c'est le début de confinement.

L'effort résistant et la ductilité augmentent pour un espacement des armatures transversales de 2,5cm, et il diminue quand ces espacements deviennent de plus en plus grands (7, 10 cm, ...). Pour chaque espacement lui correspond un coefficient de confinement (ρ (%)).

Pour un espacement supérieur à 10 cm, il n'y a pas de confinement. Les courbes calculées vont être au-dessous de la courbe expérimentale.

La courbe calculée la plus proche de celle expérimentale (pratiquement confondues) correspond à un espacement de 10 cm. Cet espacement correspond à un pourcentage de confinement ($\rho\%$) de 0,466 %.

La (figure. V-20), où les éléments nodaux du portique sont confinés montre la même progression d'effort et de la flèche, sauf pour la courbe obtenue avec un espacement 2,5 cm où l'on observe un recul de la flèche par rapport aux courbes dont l'espacement est de 7 et 10 cm, respectivement. Ceci est probablement dû au changement brusque de la résistance limite du béton en compression d'un élément à un autre élément voisin.

II-Evaluation du déplacement horizontal au sommet du portique sous la charge H :

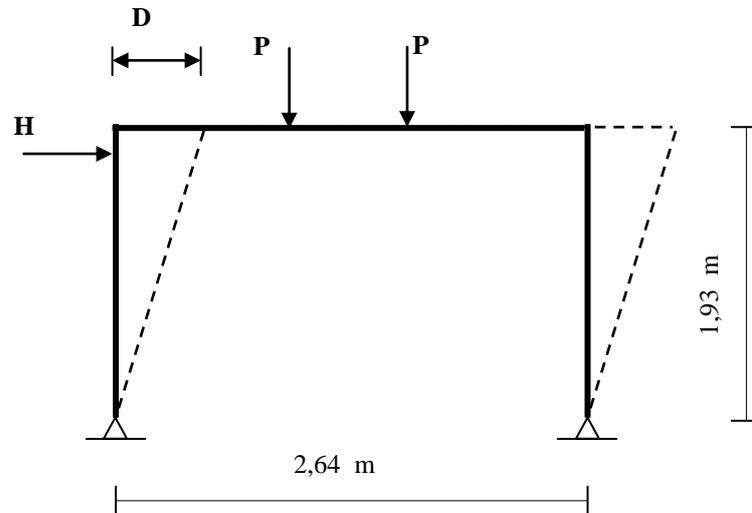


Figure V.23 : Evaluation de déplacement au sommet du portique sous la charge (H)

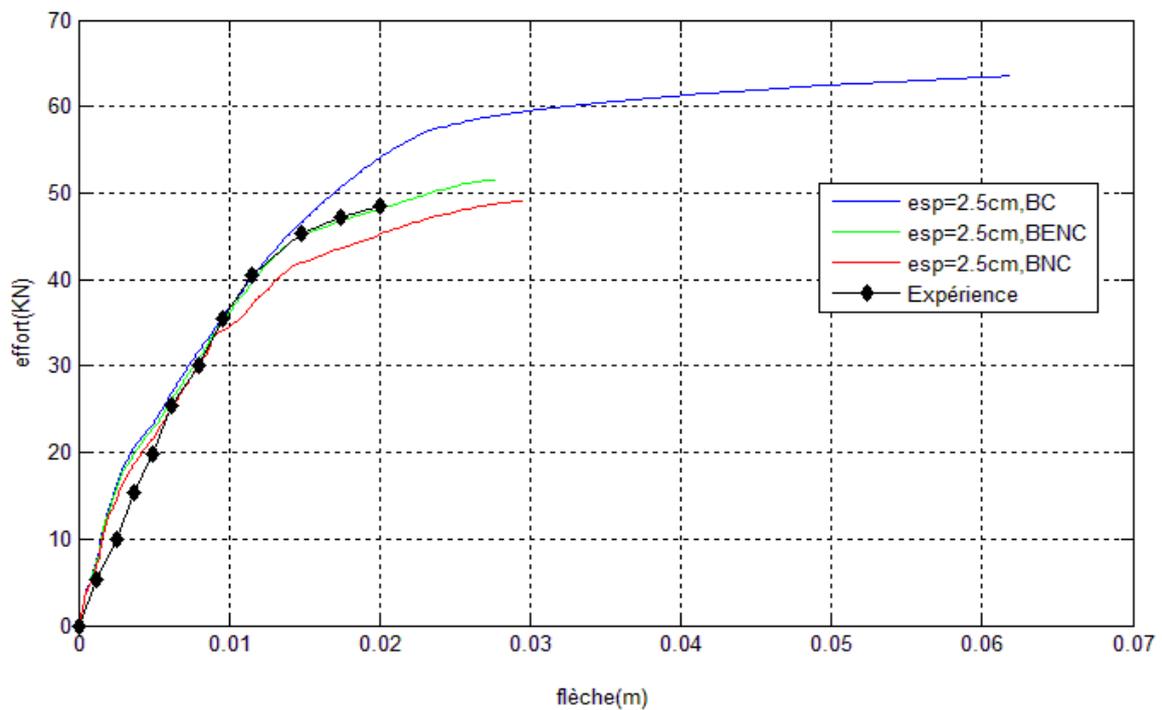


Figure V.24 : diagramme effort-flèche avec espacement des cadres égales à 2,5 cm

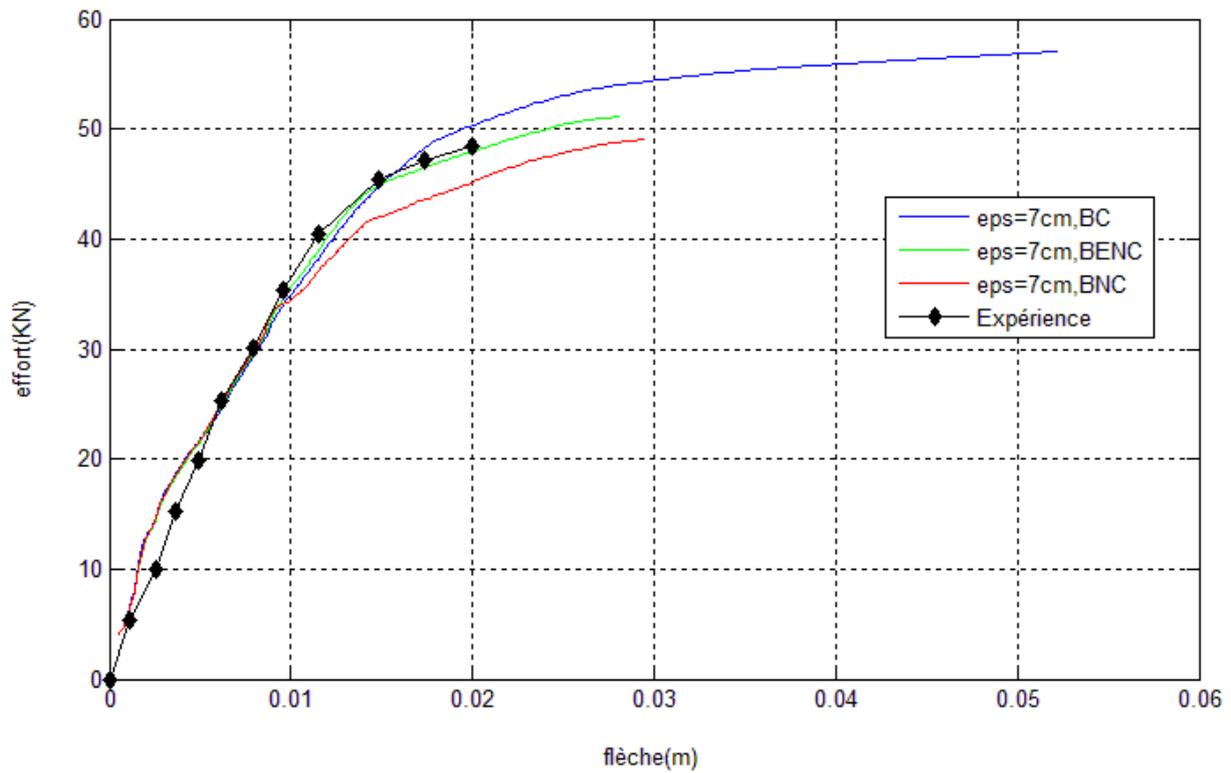


Figure V.25: diagramme effort-flèche avec espacement des cadres égale à 7 cm.

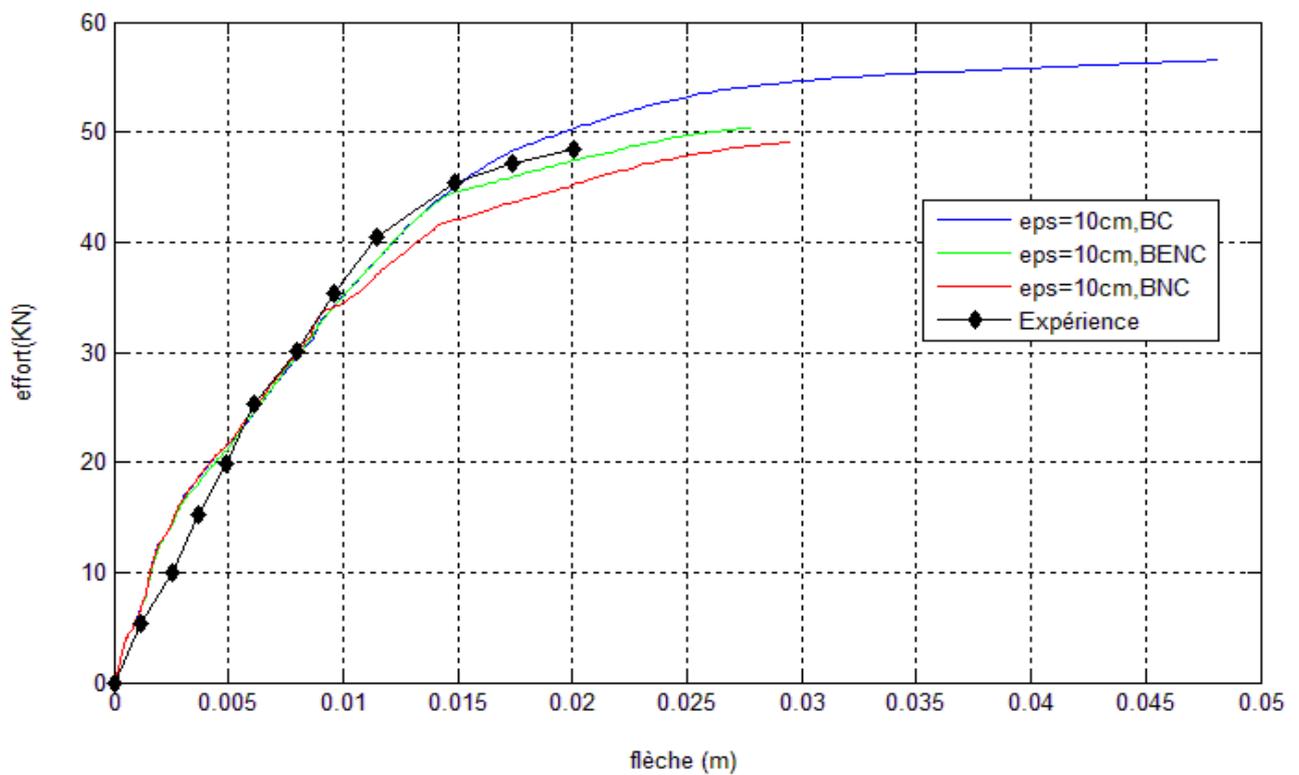


Figure V.26: diagramme effort-flèche avec espacement des cadres égale à 10 cm.

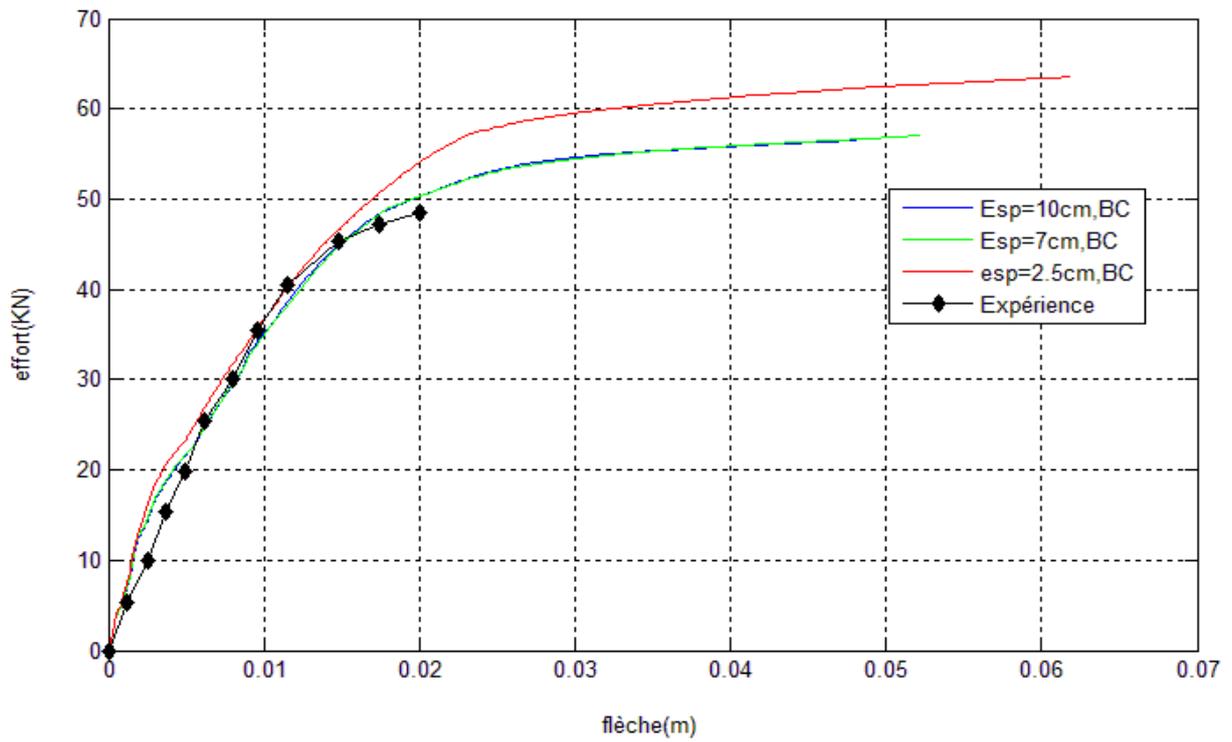


Figure V.26: diagramme effort-flèche résultant du BC avec des espacements des cadres variables

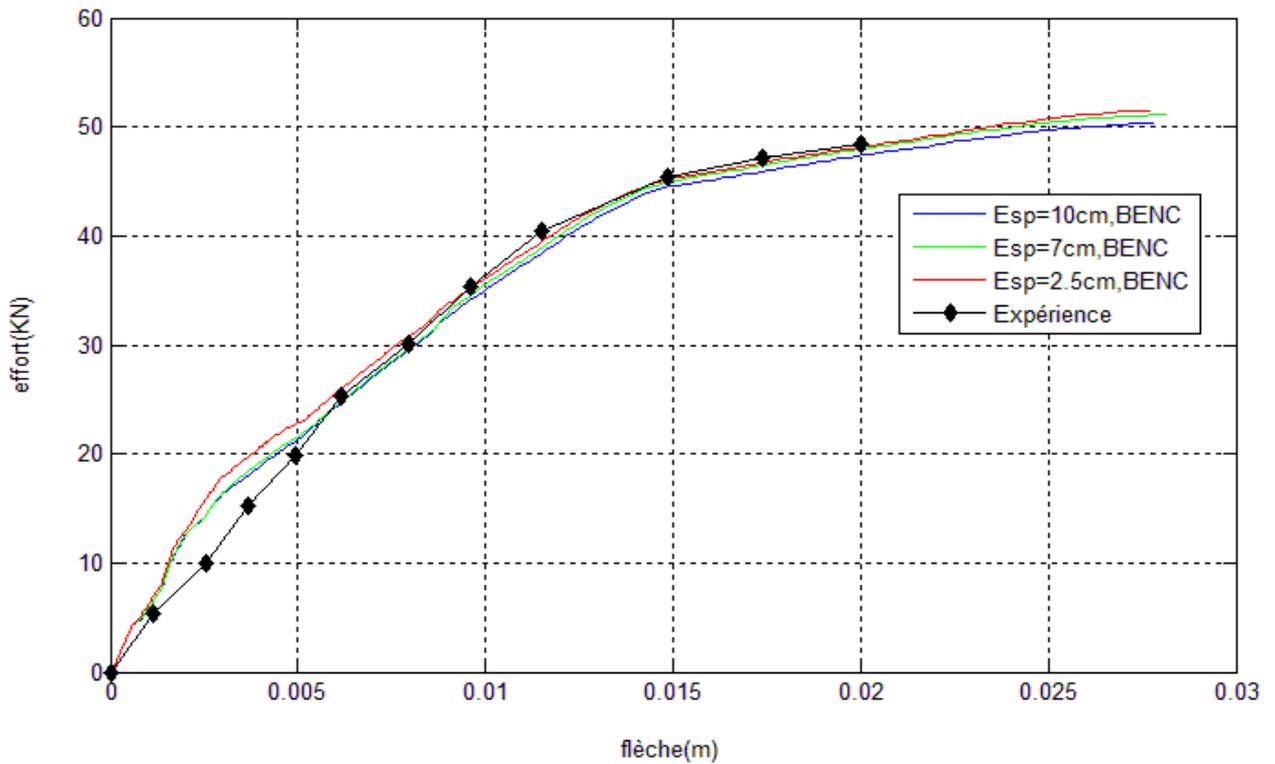


Figure V.27: diagramme effort-flèche résultant du BENC avec des espacements des cadres variables

- Constats

La capacité portante du portique, sous l'effet de la charge horizontale, dépend des espacements des cadres (S') (10cm, 7cm et 2,5cm), du pourcentage de confinement ($\rho \%$) et éventuellement de la résistance limite du béton à la compression.

La (figure V-23), montre que les armatures transversales dont l'espacement est égal à 10 cm exercent des pressions latérales sur le béton à partir d'un déplacement égal à $3,32 \cdot 10^{-3}$ m qui correspond à un effort de 15,77 KN ; le confinement apparaît et se fait sentir à partir de cette valeur.

Les (Figures V-24 et V-25) dont les espacements des cadres sont 2,5 et 7 cm respectivement, montrent que la pression latérale des armatures transversales sur le béton est pratiquement appliquée dès le début du chargement. Ceci met en évidence l'apport des armatures transversales en termes d'effort et de ductilité. L'espacement de 7 cm permet d'avoir un confinement optimum : au-delà de cet espacement, l'apport n'est plus significatif.

La (Figure V-23), montre que la courbe obtenue avec le béton des éléments nodaux confiné est la plus proche de celle expérimentale pour un espacement de 10 cm. Cet espacement correspond à un pourcentage de confinement ($\rho \%$) de 0,466 %.

Et quand l'espacement devient grand, il n'y a pas de confinement.

Enfin, on constate dans toutes les courbes obtenues, soit sous la charge verticale soit sous la charge horizontale, que l'augmentation du pourcentage de confinement ($\rho \%$), qui est fonction des espacements des armatures transversales, procure une augmentation de la ductilité pour la structure et qu'un espacement de 7 cm est « suffisant ».

V.2. Exemples de structures en béton armé à section circulaire:

Nous avons effectué le calcul avec le programme sur un pieu dont l'étude expérimentale a été réalisée au CEBTP.

Le pieu a un diamètre de 500 mm et de 4m de long .il est soumis à une flexion composée. L'effort normal de compression est de 1370 kN (appliqué à l'aide d'une précontrainte extérieure). Le pieu est renforcé longitudinalement par 5 barres d'acier HA de diamètre 16mm (correspondant à 0,5 % en volume) selon le min du DTU 13.2 et transversalement par des HA 6.les caractéristiques géométriques et le détail de ferrailage est résumé dans le tableau(V.3) suivant :

Béton			Armatures longitudinales				Armatures transversales			
Repère	f_{cj} (MPa)	f_{ij} (MPa)	E_{ij} (MPa)	Barres	f_e (MPa)	E_a (GPa)	f_u (MPa)	barres	f_e (MPa)	E_a (GPa)
Pieu zhan	42.41	4.35	38059.47	5HA16	475	20	475	HA6	428	200

Tableau V.31 : Caractéristiques du béton et des armatures passives [Zhan (1991)].

La confrontation du calcul par la présente étude aux résultats expérimentaux est illustrée à la

Figure V.28 :

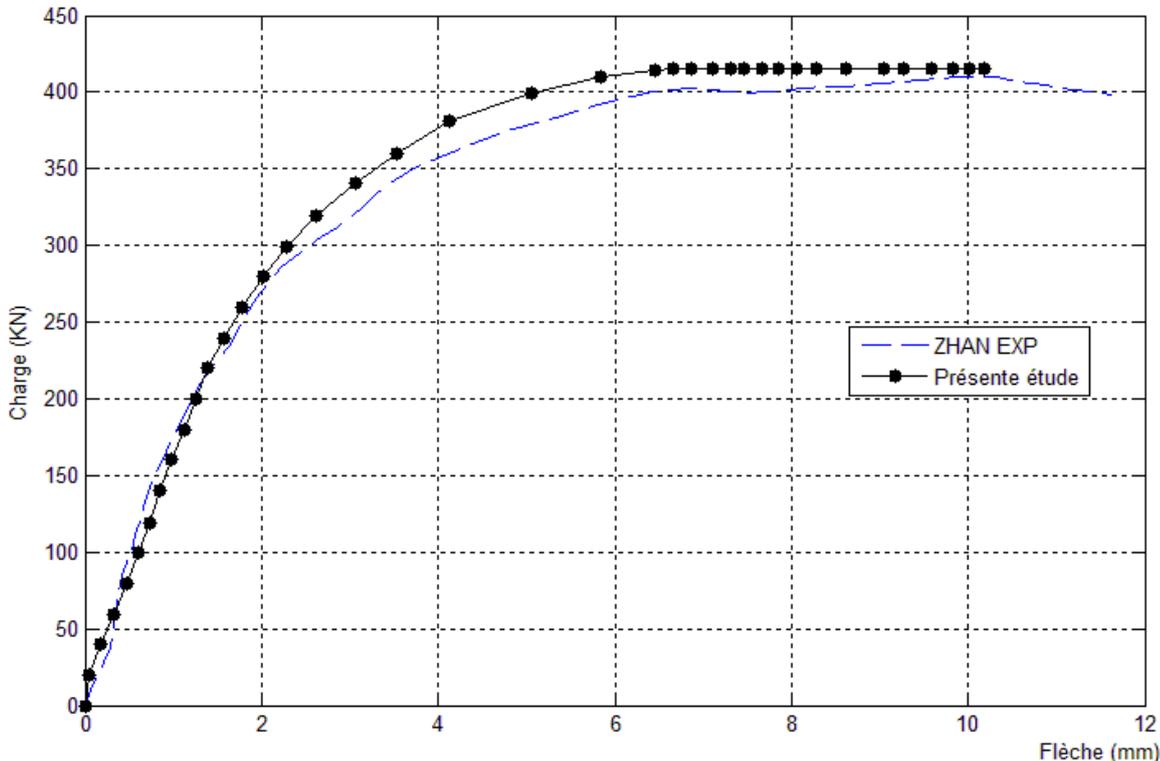


Figure V.28 : Evolution de la flèche en fonction de la charge pour le pieu de Zhan.

On peut constater sur la figure (V.28) la corrélation entre le calcul et l'expérience est excellente, et l'évaluation de la charge de ruine calculée est 409,96 KN pour une charge de ruine réelle 415,00 KN, soit un écart de 1,2%.

Conclusion :

- L'application à plusieurs types expérimentaux a montré en général un bon accord entre l'expérience et le calcul numérique, et cela pour les structures à section rectangulaire et circulaire.
- Le programme développé a été confronté à des différents résultats expérimentaux, des essais de flexion sur des poutres en béton armé (la poutre de MATTOCK) et celle de DUDECK.
- L'étude du portique de Cranston donne des résultats numériques proches de la charge expérimentale à la ruine.
 - L'étude du pieu de ZHAN montre un bon accord entre le calcul et l'expérimental
 - L'écart observé entre les courbes expérimentales et numériques est dû essentiellement à la négligence de l'effet de l'effort tranchant dans la phase non linéaire, et aussi les effets différés.
- La modélisation de ces différentes structures et la confrontation avec les résultats expérimentaux à partir de l'évolution de la flèche en fonction de la charge, permettent de valider la capacité de l'outil de calcul.

Conclusion générale

La présente étude s'intéresse à la prise en compte du confinement dans le calcul non linéaire des structures à section rectangulaire et circulaire en béton armé. Il s'agit d'une part, d'adapter le modèle de prise en compte du confinement selon le type de sections (rectangulaire ou circulaire) et d'autre part, d'intégrer ces formulations dans un logiciel de calcul non linéaire des structures.

Les courbes de capacités sont établies en introduisant, dans un programme écrit en langage FORTRAN 90, les lois réelles régissant le comportement mécanique du béton confiné et non confiné.

Il résulte de cette étude que les effets des armatures transversales sur le comportement de la structure en béton sont positifs. Ils sont tirés d'une part, de la superposition des courbes obtenues à partir de la structure en béton confiné, partiellement confiné et en béton non confiné.

- L'augmentation de la contrainte de compression du béton (avec confinement) dépend des espacements des armatures transversales. Plus les espacements sont proches, plus la contrainte de compression est importante.

- La structure entièrement confinée se comporte mieux en termes de résistance et de déplacement, lorsque les armatures transversales sont disposées tout le long des éléments de celle-ci, en gardant le même espacement (confinement le long de tous les éléments).

- Dans le cas où les éléments nodaux du portique sont confinés, la discontinuité de la résistance limite du béton en compression est à l'origine de la diminution de la flèche à la rupture. Cette dernière se produit lorsque le critère de rupture est atteint dans le béton des éléments non confinés.

- La structure en béton confiné est capable de se déformer sans qu'elle perde significativement sa rigidité. Elle possède un palier de ductilité important par rapport à la structure en béton non confiné.

-La comparaison des résultats donnés avec les résultats du programme montre une bonne concordance pour les exemples analysés. La confrontation

calcul/essai est satisfaisante et décrit correctement le comportement des structures en béton confiné à section rectangulaire et circulaire jusqu'à la rupture.

En perspective

- Définir un seuil (de début) de confinement.
- Un critère de rupture des armatures transversales.
- Mettre en évidence l'influence de l'angle d'inclinaison (α) des armatures transversales ($\alpha = 90^\circ$ dans la présente étude).
- A base de deux lois de comportement du béton en compression utilisées (non confiné et confiné), établir une loi permettant peut être d'adoucir la variation brusque de la résistance.
- Prise en compte du béton confiné dans l'étude des voiles de contreventement.