

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERY, Tizi-Ouzou**



**Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique**

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme

***MASTER ACADEMIQUE EN AUTOMATIQUE
OPTION : COMMANDE DES SYSTEMES***

Thème

**Stabilisation d'une Equation de la Chaleur par
la Commande Backstepping**

Proposé par :

M .MAIDIA

Dirigé par :

M.MAIDIA

Soutenu le : / /2013

Présenté par :

➤ ***M^{elle} .HAMEL Dyhia***

➤ ***M^{elle} .HADJ KADDOUR Rina***

Promotion 2013

Ce travail a été préparé à : l'université Mouloud MAMMERY, Tizi-Ouzou.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à exprimer nos profondes reconnaissances à notre promoteur M^r A. MAIDI. Nous le remercions chaleureusement de nous avoir encadrés durant ce travail ; pour ses qualités humaines et ses qualités scientifiques qui nous ont permis de réaliser ce mémoire dans les meilleures conditions possibles, trouve ici l'expression de nos profondes gratitudee.

Nos gratitudee vont également à M^r AKKOUCHE pour son aide et sa simplicité ainsi que nous saluons chaleureusement les enseignants qui ont contribué à nos études à leurs conseils et encouragement.

Nous étendons nos vifs remerciements aux membres du jury qui nous feront l'honneur d'accepter de lire et d'évaluer notre travail.

Nous remercions également toutes les personnes, qui nous ont encouragées pour aller jusqu'au bout, en l'occurrence, nos familles qui nous ont aidés financièrement et moralement, ainsi tous nos amis.

Enfin, pourquoi ne pas le dire, dans cette épreuve ou seule le courage et la maîtrise des connaissances ne suffisent pas, la force qui donne l'impulsion ne peut provenir que du Bon dieu.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire aux personnes qui me sont chères :

- Mes chers parents.

- Mon cher fiancé.

- Mon frère et mes sœurs en particulier soussou.

- Ma belle famille.

- Sans oublier les petits coucous Imane, Melissa et Ghillas.

- À toute ma famille, ainsi à tous mes amis(es) en particulier

Rina.

Dyhia

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

À la mémoire de mon père et de ma sœur Iysa.

À ma très chère mère.

À mon cher mari.

À mes frères.

À mes sœurs ainsi leurs époux.

À ma belle famille.

À mon neveu.

À mes nièces : Dania, Helena, Lydia et Lemesia.

- À tous mes amis (es) en particulier Dyhia.

Rina

SOMMAIRE

SOMMAIRE

Introduction Générale	01
 Chapitre I : Description Mathématique des Systèmes à Paramètres Distribués	
I.1. Introduction.....	03
I.2. Systèmes à paramètres distribués	03
I.3. Description mathématique d'un système à paramètres distribués	04
I.4. Les différents types de conditions aux limites.....	06
➤ Condition de Dirichlet.....	06
➤ Condition de Neumann.....	06
➤ Condition de Fourier	06
I.5. Commandes d'un système à paramètres distribués	06
I.5.1. Commande répartie	07
I.5.2. Commande par zone	08
I.5.3. Commande ponctuelle	08
I.5.4. Commande par balayage.....	08
I.5.5. Commande aux frontières (aux limites).....	08
I.6. Observations d'un système à paramètres distribués	08
I.6.1. Observation répartie.....	09
I.6.2. Observation ponctuelle	09
I.6.3 Observation par balayage.....	09
I.6.4. Observation par moyennage spatial	09
I.7. Classification des Systèmes à Paramètres distribués (SPD)	10
I.8. Problème bien posé.....	11
I.9. Méthodes usuelles de représentation des systèmes à paramètres distribués.....	11
I.9.1 .Méthodes spectrales.....	11
I.9.2. Méthodes de discrétisation spatiale	12
I.10. Conclusion.....	13
 Chapitre II : Modélisation et Normalisation de L'équation de Chaleur	
II.1. Introduction	14

II.2. Modes de transfert thermique.....	14
➤ Conduction thermique	14
➤ Convection.....	14
➤ Rayonnement	15
II.3. Diffusion de chaleur par conduction	16
II.3.1. Loi de Fourier	16
II.3.2. Phénomène de la conduction thermique	18
II.4. Equation de chaleur.....	18
II.4.1. Notion de chaleur.....	18
II.4.2 Equation de conduction de la chaleur.....	19
II.5. Normalisation.....	23
II.6. Conclusion	24

Chapitre III : Etude de la Stabilité et Résolution de L'équation de la Chaleur

III.1. Introduction	25
III.2. Rappels et généralités	25
III.2.1. Stabilité des systèmes dynamiques : Stabilité de Lyapunov	25
III.2.2. Définition de la Stabilité de Lyapunov des systèmes linéaires	26
III.3. Méthode directe de Lyapunov	26
III.4. Analyse de la stabilité de l'équation de la chaleur	27
III.5. Méthode de séparation des variables	29
III.5.1. Définition du système à réaction-diffusion	29
III.5.2. Définition de la méthode de séparation des variables	30
III.5.3. Principe mathématique de la méthode.....	30
III.6. Conclusion.....	34

Chapitre IV : Commande Backstepping

IV.1. Introduction.....	35
IV.2. Principe mathématique de la technique backstepping	35
IV.3. Discrétisation mathématique du système.....	38
IV.3.1. Simulation du système non commandé.....	40
IV.3.1.1. Interprétation des résultats	42
IV.4. Choix de la commande	42

IV.5. Commande backstepping de l'évolution de la température dans la tige.....	42
III.5.1. Détermination du gain de la commande (Noyau)	43
IV.5.2. Conversion du gain de la commande (noyau) à une équation intégrale	45
IV.5.3. Méthode des approximations successives	46
IV.5.3.1. Introduction	46
IV.5.3.2. Principe de la méthode	46
IV.6. Simulation numérique du système commandé.....	49
IV.6.1. Interprétation des résultats	51
IV.7. Conclusion	51
Conclusion Générale	52

Liste des figures

Figure II.1 Représentation schématique du transfert thermique par convection.	14
Figure II.2 Représentation schématique du transfert thermique par convection.	15
Figure II.3 Représentation schématique du transfert thermique par rayonnement.....	16
Figure II.4 Tube de flux de chaleur	17
Figure II.5 Evolution de la température dans une tige homogène.....	20
Figure IV.1 Schéma de discrétisation mathématique.....	39
Figure IV.2 Evolution spatio-temporelle de la température dans la tige métallique.	41
Figure IV.3 Evolution de la température en fonction du temps dans la tige.....	42
Figure IV.4 Représente la commande $u(t)$ en fonction du temps.....	49
Figure IV.5 Evolution de la température en fonction du temps dans la tige métallique.....	50

Liste des tableaux

Tableau IV.1. Résumé de la conception de la commande pour l'équation de réaction-diffusion.....	48
--	----

INTRODUCTION

GÉNÉRALE

L'automatique comporte un certain nombre d'outils théoriques permettant de prévoir et d'appliquer ses concepts afin de remplir les objectifs qui sont en relation directe avec elle. Ces outils sont nécessaires à l'élaboration d'un asservissement sur un procédé particulier et sont présents à différents stades de celle-ci. Comme exemples de sous-domaines où l'on peut rencontrer ces outils théoriques, citons la modélisation de systèmes, l'identification des paramètres d'un procédé, la construction de lois de commande, le réglage de paramètres de ces lois et la vérification de la stabilité du système asservi. Cette liste n'étant bien entendu pas exhaustive.

Les progrès réalisés dans les domaines de mathématique et d'informatique ont contribué, ces dernières années, et aider les automaticiens à s'attaquer aux systèmes les plus complexes, parmi lesquels nous retrouvons les systèmes dynamiques à paramètres distribués (SPD). Ces derniers sont modélisés par les équations aux dérivées partielles (EDP) puisque leurs variables caractéristiques dépendent de la variable spatiale et de la variable temporelle.

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont omniprésentes dans toutes les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation ou de l'électromagnétisme. Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, la prévision météorologique, la démographie, ou les finances. Ce sont des équations indispensables pour la résolution de presque la totalité des problèmes. En automatique, la commande des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles et leur stabilisation constitue un domaine de recherche très actif.

Parmi les commandes utilisées pour la stabilisation des systèmes dynamiques, nous retrouvons la commande « backstepping ». Cette dernière est non linéaire et permet de concevoir une loi de commande non linéaire sous forme d'un retour d'état.

L'objectif de ce travail est l'application de cette commande pour la stabilisation d'un modèle « benchmark » décrit par l'équation de la chaleur présentant un terme de réaction modélisant la source d'instabilité. L'exemple étudié concerne la diffusion de la chaleur dans une barre métallique dont le but de cette application est d'assurer la stabilité.

Le plan de ce mémoire se décompose comme suit :

Le chapitre **I** porte sur des généralités sur les systèmes à paramètres distribués (SPD), et les différents types de commandes et observations possibles. Ensuite, nous s'intéresserons à la classification des systèmes à paramètres distribués établie sur la base des équations aux dérivées partielles (EDP) de deuxième ordre qui modélise une grande partie des systèmes physiques.

Le chapitre **II** est consacré à la modélisation d'un transfert de chaleur par conduction dans une tige. Nous commencerons par la présentation des différents modes de transfert de chaleur, puis nous s'intéresserons à la modélisation du phénomène de diffusion de la chaleur et nous terminerons ce chapitre par la normalisation de l'équation de la chaleur.

Le chapitre **III** présente des généralités sur la stabilité des systèmes plus précisément au sens de « Lyapunov », puis nous étudierons la stabilité de l'équation de la chaleur en utilisant quelques inégalités mathématiques très utiles. Le chapitre se termine par la résolution d'une équation de la chaleur avec un terme source (un terme déstabilisant) avec la méthode de séparation des variables.

Dans le chapitre **IV** nous allons présenter l'application de la commande « backstepping » pour stabiliser la distribution de la température d'une tige métallique dont la dynamique est décrite par l'équation de la chaleur ayant un terme de réaction qui constitue la source de l'instabilité. Nous commencerons le chapitre en énonçant le principe de la méthode « backstepping », puis nous enchaînerons avec la conception de la loi de commande stabilisant l'équation de la chaleur. Les résultats de simulation en boucle fermée seront présentés à la fin du chapitre.

Enfin, nous terminerons notre mémoire par une conclusion générale.

CHAPITRE I :

DESCRIPTION MATHÉMATIQUES DES SYSTÈMES A PARAMÈTRES DISTRIBUÉS

I.1. Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter les notions relatives aux systèmes à paramètres distribués (parfois appelés à paramètres reparties ou de dimension infinie) utilisées le long de ce mémoire. Ces notions portent sur la définition, la modélisation mathématique, la classification et les différentes méthodes de représentation de ce type de système.

En effet, nous commençons par la description mathématique d'un système à paramètres distribués (SPD), les différents types de commandes et les observations possibles.

Ensuite, nous s'intéressons à la classification des systèmes à paramètres distribués établie sur la base des équations aux dérivées partielles (EDP) de deuxième ordre qui modélise une grande partie des systèmes physiques.

I.2. Systèmes à paramètres distribués

Les SPD concernent un large spectre d'application dans le domaine des sciences de l'ingénieur, dont notamment : la thermique, l'électromagnétisme, la mécanique des fluides, le génie des procédés, la chimie, la biologie.... En effet, pour la quasi-totalité des systèmes physiques, les variables caractéristiques (paramètres et variables) sont rarement uniformes et homogènes par rapport à l'espace géométrique, par conséquent elles ne peuvent pas être considérées comme indépendantes de la variable d'espace. L'hypothèse de l'homogénéité est peut être utile quand il s'agit de situations très particulières. Par exemple, la température dans une enceinte thermique n'est pas la même en tout point mais elle est distribuée, ou encore l'évolution d'une épidémie dans une population sont toutes des variables de nature distribué et ne peuvent pas être ignorées dans les problèmes de commande.

Ainsi, la dynamique de nombreux systèmes physiques, ayant des applications industrielles essentielles, est décrite par des équations aux dérivées partielles. Parmi ces systèmes, nous pouvons citer les réacteurs (bios) chimiques, les décanteurs, les réacteurs thermiques, les échangeurs de chaleur et les fours industriels. De ce fait, leur espace d'état est

de dimension infinie, et les outils habituels de l'automaticien utilisés pour les systèmes à paramètres localisés (SPL), c'est-à-dire des systèmes décrits par des équations aux dérivées ordinaires (EDO), ne sont donc plus utilisables pour des systèmes à variables caractéristiques non homogènes spatialement. [1]

I.3. Description mathématique d'un système à paramètres distribués

Les équations aux dérivées partielles mettent en jeu des variables d'espace et de temps lorsque l'équation traduit un phénomène d'évolution. Ces équations ont leurs origines dans l'écriture des bilans macroscopiques de masse, de mouvement ou d'énergie, si bien qu'on les rencontre dans tous les domaines de la physique.

En effet, la modélisation de nombreuses classes de systèmes physiques conduit à des EDP. Ceux-ci sont appelés les systèmes à paramètres distribués (SPD), qui sont des systèmes décrits essentiellement par des EDP linéaires ou non linéaires dont les variables caractéristiques ou/et les paramètres sont non homogène spatialement. Ce type de système est de dimension infinie, c'est-à-dire que le nombre de variables caractérisant l'état du système est infini, contrairement au système à paramètres localisés qui sont décrit par des équations EDO qui sont de dimension finie. [2][3][4]

Cependant, il n'existe pas de méthodes générales pour étudier ces équations. Mais en générale, l'étude d'un système à paramètres répartis peut se ramener à l'étude d'un système à paramètres localisés obtenu par discrétisation du modèle SPD.

D'une façon générale nous pouvons décrire un système à paramètres distribués, dans le cas monodimensionnel, désignées respectivement par les variables τ et z , comme suit : [5]

- un domaine géométrique Ω borné de R^n , de frontière $\partial\Omega$.
- un intervalle de temps $\mathcal{T} =]0, \tau_f[$ (I.1)
- une équation d'évolution à l'intérieure du domaine $\Omega \times \mathcal{T}$:

$$\frac{\partial T(z, \tau)}{\partial \tau} = M(T(z, \tau)) + H(u(z, \tau)) \quad (\text{I.2})$$

Avec $z \in \Omega$ et $\tau \in \mathcal{T}$.

- Une équation de sortie $\Omega \times \mathcal{T}$:

$$y(z, \tau) = C(T(z, \tau)) \quad (\text{I.3})$$

- une condition initiale ($\tau=0$) sur Ω :

$$R(T(z, 0)) = T_0 \quad (\text{I.4})$$

La condition aux limites établissant les relations entre l'état et la commande aux limites (si elle existe) :

$$L(T(z', \tau)) = u_l(z', \tau), \quad z' \in \partial\Omega \quad (\text{I.5})$$

$H(\cdot), M(\cdot), L(\cdot), C(\cdot)$ et $R(\cdot)$ Sont des operateurs matriciels différentiels ne comportant que des dérivées par rapport à z .

$H(\cdot), M(\cdot)$ et $C(\cdot)$ Sont appelées respectivement opérateur d'état, opérateur de commande et opérateur de sortie (ou d'observation).

- L'état T du système est représenté par la fonction vectorielle (de dimension infinie) :

$$T(z, \tau) = \begin{bmatrix} T_1(z, \tau) \\ T_2(z, \tau) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_n(z, \tau) \end{bmatrix}$$

Avec les fonctions $u(z, \tau)$ et $u_l(z, \tau)$ représentent les commandes (entrées) du systèmes .

I.4. Les différents types de conditions aux limites

➤ Condition de Dirichlet

Dans le cas où les extrémités d'une barre métallique sont maintenues à des températures données que nous notons $T_1(\tau)$ et $T_2(\tau)$, nous aurons :

$$T(0, \tau) = T_1(\tau) \quad (\text{I.6})$$

$$T(l, \tau) = T_2(\tau) \quad (\text{I.7})$$

➤ Condition de Neumann

Si le dispositif est tel que le flux de chaleur est donné au bord, c'est le gradient de la température $\nabla(\tau)$ qui est ainsi fixé et les conditions aux limites sont alors :

$$-c \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \nabla_0(\tau) \quad (\text{I.8})$$

$$c \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=l} = \nabla_l(\tau). \quad (\text{I.9})$$

➤ Condition de Fourier

Si maintenant la donnée que nous disposons c'est la température à l'extérieure T_{ex} , nous savons que le gradient de la température au bord (flux de chaleur) sera proportionnel à la différence $(T - T_{ex})$:

$$\left[-C \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z=0} = -k(T - T_{ex}) \quad (\text{I.10})$$

$$\left[-C \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z=l} = -k(T - T_{ex}) \quad (\text{I.11})$$

Avec :

k : Constante $\in R$.

C : Caractérise la diffusion de la chaleur (la conductivité).

Remarques I.1 [6]

- « Les contraintes (condition initiale et conditions aux limites) sont en général imposées par la nature du problème que nous essayons de modéliser, l'équation aux dérivées partielles et ses conditions restrictives seront donc a priori cohérentes.
- De façon générale une équation aux dérivées partielles ne donne lieu à un problème raisonnable que si nous l'associons à un certain type de conditions restrictives, par exemple des conditions initiales pour des problèmes d'évolution (équation de la chaleur, équation des ondes) ou des conditions au bord pour l'équation de Laplace.»

I.5. Commandes d'un système à paramètres distribués

Les actions que nous pouvons envisager sur un système à paramètres distribués peuvent être de natures multiples, aussi bien à l'intérieure du domaine Ω que sur sa frontière $\partial\Omega$. Nous pouvons distinguer de façon formelle : [2]

I.5.1. Commande répartie

Représentée par des fonctions définies sur $\Omega \times \mathcal{T}$; dans de nombreux cas, la commande $u(z, \tau)$ peut être décomposée comme suit :

$$u(z, \tau) = q(z) \cdot u_e(\tau) \quad (\text{I.12})$$

$q(z)$: représente la structure géométrique du système d'actionneurs.

u_e : représente le signal d'entrée.

Cette formulation est une simplification de calcul dans la formulation du modèle et la détermination de la commande.

I.5.2. Commande par zone

Une zone Ω_i représente une portion du domaine spatiale ($\Omega = \cup_{i=1}^p \Omega_i$). Une commande par zone est définie sur un sous-domaine $\Omega_i \times \mathcal{T}$. Si, par exemple, la commande est appliquée sur p zones, nous avons donc :

$$u(z, \tau) = \sum_{i=1}^p q_i(z) u_{ei}(\tau). \quad (\text{I.13})$$

où $q_i(z)$ caractérise la structure géométrique du système d'actionneurs, et $u_{ei}(\tau)$ est le signal d'entrée relatifs à la zone i .

I.5.3. Commande ponctuelle

Dans le cas particulier où la zone de commande se réduit à un point situé dans Ω , la fonction $q_i(\tau)$ est remplacée dans l'équation précédente formellement par l'impulsion de Dirac, donnée comme suit :

$$u(z, \tau) = \sum_{i=1}^p u_{ei} \cdot \delta(z - z_i) \quad (\text{I.14})$$

I.5.4. Commande par balayage

Pour la quelle les zones ou les points d'actions (actionneurs) sont mobiles dans Ω .

I.5.5. Commande aux frontières (aux limites)

La commande est définie sur $\partial\Omega \times \mathcal{T}$, elle peut être par zones, ponctuelles, fixes ou à balayage.

I.6. Observations d'un système à paramètres distribués

Le vecteur de sortie du système coïncide généralement avec l'ensemble des observations, se déduit souvent des transformations linéaires sur le vecteur d'état. Par

analogie aux commandes citées ci-dessus, nous citons les différents types d'observations suivantes :

I.6.1. Observation répartie

Le vecteur de sortie $y(z, \tau)$ est défini pour tout $\tau \in \mathcal{T}$ et tout z appartenant à un sous-ensemble de Ω comme suit :

$$y(z, \tau) = p(z).T(z) \quad (\text{I.15})$$

$p(z)$: caractérise la structure géométrique du système d'observation.

I.6.2. Observation ponctuelle

Nous prenons quelques points particuliers z_i sur l'espace Ω sur lesquels nous allons définir la sortie pour chacun de ses points comme suit :

$$y(z, \tau) = \int_{\Omega} T(z, \tau)\delta(z - z_i)dz = T(z, \tau) \quad (\text{I.16})$$

I.6.3 Observation par balayage

Obtenue par déplacement des points d'observations à l'intérieur du domaine admissible.

I.6.4. Observation par moyennage spatial

Définie par l'intégrale suivant

$$y(z, \tau) = \int_{\Omega} c(z).T(z, \tau)dz \quad (\text{I.17})$$

$c(z)$: caractérise la structure géométrique de l'ensemble des capteurs fournissant le signal.

$y(\tau)$: ne peuvent pas être assimilés à des points d'observations.

I.7. Classification des Systèmes à Paramètres distribués (SPD) [7]

La classification des systèmes à paramètres distribués dépend du type de l'EDP. La discussion sera restreinte à la catégorie d'EDP la plus souvent rencontrée, celle des EDP linéaires. Une EDP est linéaire si elle ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées partielles de la variable dépendante, avec l'ordre d'une EDP est l'ordre de la plus grande dérivée présentée dans l'équation.

Dans les disciplines du génie mécanique, un grand nombre des EDP rencontrées dans les applications sont du 2^{ème} ordre (transfert thermique, vibration, mécanique des fluides).

Par exemple, toutes les EDP linéaires du 2^{ème} ordre, et qui dépendent de deux variables z et t , peuvent s'écrire :

$$a \frac{\partial^2 T(z,\tau)}{\partial \tau^2} + 2b \frac{\partial^2 T(z,\tau)}{\partial \tau \partial z} + c \frac{\partial^2 T(z,\tau)}{\partial z^2} = F \left(z, \tau, \frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) \quad (\text{I.18})$$

où T est la fonction inconnue et F inclut tous les autres termes $\left(z, \tau, \frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial T}{\partial \tau} \right)$ sans les dérivées secondes de l'équation et a, b, c sont des coefficients supposés constants et indépendants de la variable d'espace z .

Nous posons :

$$\Delta = ac - b^2 \quad (\text{I.19})$$

le discriminant associé à cette EDP. Nous disons donc qu'il existe trois types d'EDP linéaires :

EDP elliptique si $ac - b^2 > 0$ (exemple : équation de Laplace)

EDP parabolique si $ac - b^2 = 0$ (exemple : équation de chaleur)

EDP hyperbolique si $ac - b^2 < 0$ (exemple : équation d'onde)

Si les trois paramètres a, b et c sont nulles, le type d'équation dépend des seules dérivées premières de $T(z, \tau)$, alors l'équation est hyperbolique d'ordre un.

Cette classification est importante car elle influence le choix d'une méthode numérique de résolution et la façon d'appliquer les conditions limites et initiales. Un

problème hyperbolique par exemple ne peut être traité, d'un point de vue numérique, de la même façon qu'un problème elliptique parce que le comportement de la solution n'est pas le même dans les deux cas. Cette classification est aussi valable pour les systèmes d'EDP linéaires d'un ordre supérieur.

I.8. Problème bien posé [6]

Considérons une équation aux dérivées partielles sur un domaine avec éventuellement des conditions auxiliaires sur la solution, nous disons que le problème est bien posé si nous avons

- existence d'une solution du problème,
- unicité de cette solution,
- stabilité par rapport aux données du problème.

Si la solution change beaucoup quand les données changent peu nous disons que le problème est sensible aux données.

I.9. Méthodes usuelles de représentation des systèmes à paramètres distribués [7]

La plupart des méthodes d'approximation utilisées pour les EDP tentent de ramener le problème à une simple résolution d'équations différentielles ordinaires (EDO), dont l'objectif est de se ramener à ce qui est bien connu, c'est-à-dire un SPL. Les plus utilisées de ces méthodes se classifient en deux catégories : les méthodes spectrales et les méthodes de discrétisation spatiale.

1.9.1 .Méthodes spectrales

Les méthodes spectrales sont des méthodes basées sur le développement d'une fonction $T(z, \tau)$ dans une base orthogonale de fonctions $\varphi_i(z)$ dites de projection ou de tests ou encore dites modales sont connues. L'idée de cette méthode est de se ramener à un problème de résolution d'équations différentielles ordinaires en supposant que la solution est séparable.

La solution approchée s'écrit sous la forme :

$$T_N(z, \tau) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(z) \varphi_i(\tau), \quad (\text{I.17})$$

L'orthogonalité des fonctions de projection permet de reformuler le problème sous forme d'équations différentielles ordinaires plus simples à résoudre. Cette approximation est en quelque sorte un développement en séries de fonctions (solution du problème est séparable) de la fonction inconnue. Il existe une variété de méthodes spectrales dans la littérature, comme la méthode Tau, la méthode des caractéristiques, la séparation des variables, etc.

I.9.2. Méthodes de discrétisation spatiale

Dans les domaines de la mécanique des solides et des fluides, ou encore de la thermique, le comportement des systèmes considérés est traduit à l'aide d'équations aux dérivées partielles; de plus, ces systèmes présentent en général des géométries très complexes. Les méthodes de décomposition spatiale, qui englobe les méthodes des éléments finis, des différences finies et des volumes finis, sont parmi les méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces problèmes. Elles nécessitent l'utilisation intensive des calculateurs. Ce sont des méthodes qui s'appliquent à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elles s'adaptent très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

Les méthodes de décomposition spatiale sont basées sur une discrétisation du domaine en sous-domaines sur lesquels une interpolation de la solution est réalisée en utilisant les valeurs sur les nœuds du maillage. Elles consistent à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations différentielles ordinaires ou algébriques. Elles font appel aux trois domaines suivants :

- les sciences de l'ingénieur pour définir les comportements locaux : les équations aux dérivées partielles,
- les méthodes numériques pour construire et résoudre le système d'équations algébriques,
- la programmation et l'informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

I.10. Conclusion

Comme nous venons de le mettre en évidence, la prise en compte de systèmes à paramètres répartis introduit de nombreuses difficultés supplémentaires du point de vue modélisation. Bien que la formulation mathématique de ces problèmes soit généralement connue, la recherche des solutions n'est pas triviale.

Elle nécessite le plus souvent une reformulation du problème sous forme d'approximations des propriétés du problème initial telles que la géométrie, la description des phénomènes aux frontières (conditions aux limites), les relations entre l'espace et le temps, ...etc.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter et modéliser un système à paramètres distribués à deux variables, qui sont le temps et l'espace, connu sous le nom de l'équation de la chaleur.

CHAPITRE II :

MODÉLISATION ET NORMALISATION DE L'ÉQUATION DE CHALEUR

II.1. Introduction

Un transfert thermique, appelé plus communément de chaleur, est un transfert d'énergie microscopique désordonnée. Cela correspond en réalité à un transfert d'agitation thermique entre particules au gré des chocs aléatoires qui se produisent à l'échelle microscopique.

La thermique se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps), l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

Ce chapitre porte essentiellement sur la modélisation d'un transfert de chaleur par conduction et la normalisation de l'équation de la chaleur afin d'avoir un modèle sans dimension plus simple à étudier.

II.2. Modes de transfert thermique

Le transfert thermique est un processus complexe qui peut-être réalisé par la superposition de trois modes fondamentaux : conduction, convection et rayonnement. Dans le cas où l'un de ces trois modes est dominant, les autres peuvent être négligés, ce qui simplifie considérablement l'analyse du cas concerné. [8]

- **Conduction thermique:** l'énergie se propage au sein d'un même corps ou passe d'un corps à un autre sous l'influence d'un gradient de température. Bien qu'il n'y ait pas de transfert de matière, il s'agit d'un phénomène de diffusion. [9]

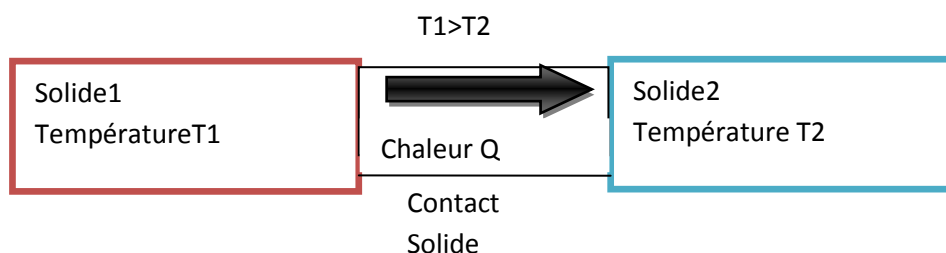


Figure II.1 Représentation schématique du transfert thermique par conduction.

- **Convection** : les différences de températures au sein d'un fluide engendrent des différences de masse volumique. Ainsi les particules se mettent naturellement en mouvement et les particules plus légères remontent. Ce déplacement de matière induit un déplacement de la chaleur. [9]

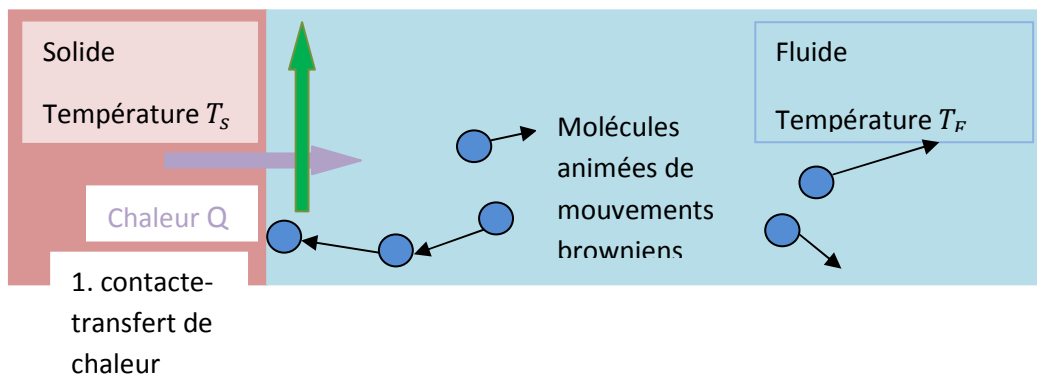


Figure II.2 Représentation schématique du transfert thermique par convection.

- **Rayonnement** : tous les corps émettent un rayonnement électromagnétique, on parle de rayonnement thermique. [9]

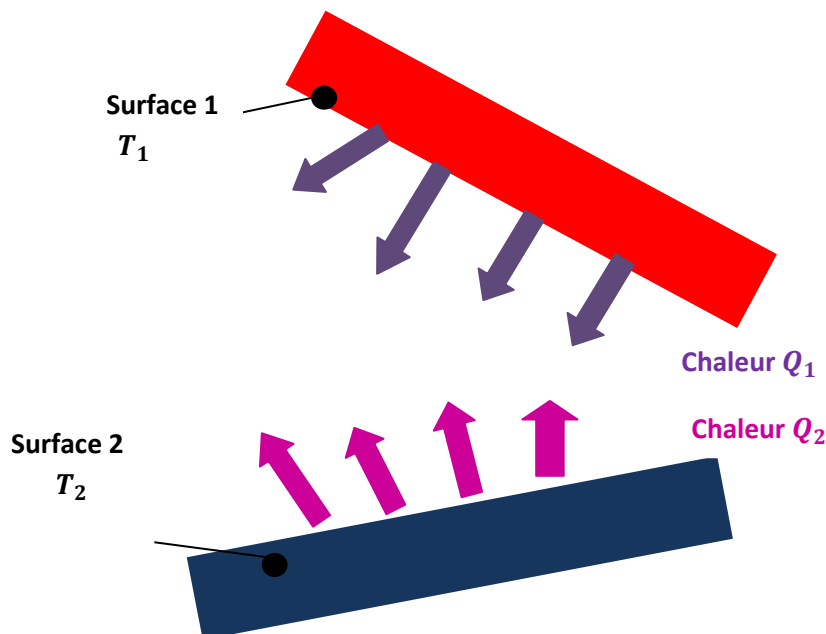


Figure II.3 Représentation schématique du transfert thermique par rayonnement

Au cours de notre mémoire nous s'intéresserons au transfert de chaleur par conduction, que nous étudierons dans ce qui suit.

II.3. Diffusion de chaleur par conduction

Le transfert de chaleur par diffusion prend lieu dans les solides et les fluides au repos. Sa modélisation a été pour la première fois abordée par « J. Fourier » dans son « traité analytique de la chaleur ».

II.3.1. Loi de Fourier [10]

La relation de Fourier est phénoménologique, c'est-à-dire issue des résultats expérimentaux. La figure II.4 représente un matériau homogène et isotrope sous la forme d'un tube supposé parfaitement isolé à sa périphérie. Notons par S la section du tube et l sa longueur. Les températures à ses deux extrémités notés T_1 et T_2 sont imposés constantes au cours du temps.

Un flux de chaleur apparaît dans la direction des hautes températures vers les basses températures. Les lignes de flux sont définies comme des lignes perpendiculaires aux isothermes du tube. Notons \vec{z} le vecteur tangent aux lignes de flux. Comme le tube est parfaitement isolé sur sa périphérie, aucune ligne de flux ne sort du tube et donc le flux est constant tout le long du tube.

« J. Fourier » obtient expérimentalement que lorsque les températures sont stabilisés dans le temps (régime stationnaire), il existe une relation liant le flux à l'écart de la température entre l'entrée et la sortie sous la forme :

$$\vec{\phi} = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{l} \vec{z} \quad (\text{II.1})$$

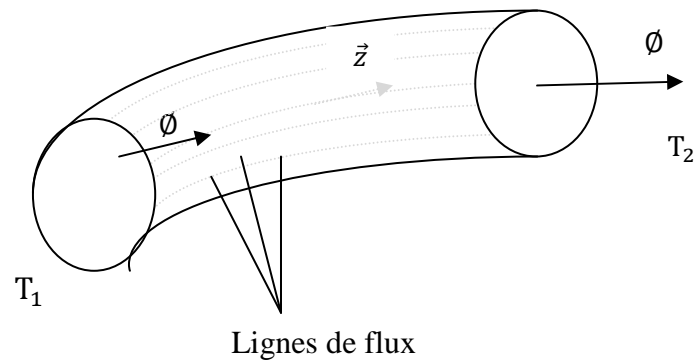


Figure II.4 Tube de flux de chaleur

Lorsque nous faisons tendre la longueur l vers zéros, nous trouvons l'expression de flux de conduction sous la forme différentielle :

$$\vec{\phi} = -\lambda S \frac{dT}{dz} \quad (\text{II.2})$$

En générale la relation a une configuration tridimensionnelle, nous obtenons :

$$\vec{\phi} = -\lambda S \vec{\nabla} T \quad (\text{II.3})$$

L'opérateur $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ désigne le gradient. Nous définissons la densité de flux comme le rapport de flux a la section de passage :

$$\vec{\phi} = \frac{\vec{\phi}}{S} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (\text{II.4})$$

Remarque II.1

« Le signe (-) indique que le transfert thermiques tendent à uniformiser la température du milieu, et se font du chaud vers le froid. »

La relation (II.4) montre bien que les lignes de flux sont perpendiculaires aux isothermes. Dans le système de cordonnés cartésiennes, cette relation s'écrit

$$\vec{\phi} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{z} \right) \quad (\text{II.5})$$

Cette loi traduit le fait que l'énergie thermique se propage des points les plus chauds vers les plus froids, et que le flux est d'autant plus intense que l'écart de température par unité de longueur est grand.

Le coefficient de proportionnalité λ est la conductivité thermique du corps considéré, est exprimée en $[W / m.K]$. Elle peut varier d'un point à l'autre du corps. La connaissance de la conductivité thermique des matériaux reste un problème majeur. Cette grandeur dépend d'un certain nombre de paramètres :

- nature chimique du matériau,
- nature de la phase considérée (solide, liquide, gazeuse),
- température. [11]

II.3.2. Phénomène de la conduction thermique

La conduction est définie comme étant le mode de transfert de chaleur provoqué par la différence de température entre deux régions d'un milieu solide, liquide ou gazeux. L'effet macroscopique est une légalisation des températures du système. Cependant si certaines zones sont maintenues à température constante par apport de chaleur (réservoir de chaleur) ou évacuations de chaleur (puits de chaleur), il s'établit un transfert continu de la chaleur de la région chaude vers la région froide.

II.4. Equation de chaleur

II.4.1. Notion de chaleur

Il s'agit de l'énergie transmise entre deux morceaux du solide. Cette énergie est transférée sous forme thermique, car en négligeant les dilatations, il n'y a pas de mouvements macroscopiques, donc pas d'énergie propagée sous forme ordonnée de travail mécanique.

II.4.2. Equation de conduction de chaleur

L'équation de chaleur caractérise l'évolution de la température dans un corps ou fluide en fonction du temps τ et de la variable d'espace z , décrite par une équation aux dérivées partielles parabolique.

Pour la modélisation de cette dernière nous considérons un domaine Ω de l'espace à N dimensions (noté R^N avec $N \neq 0$). Supposons que le domaine occupé par un matériau homogène, isotrope conducteur de chaleur (métal) est la tige de longueur l placée le long de l'axe de la variable d'espace z , de conductivité uniforme c . La température $T(z, \tau)$ est en fonction de la variable spatiale z et de temps τ . Les extrémités de la tige sont maintenues constantes à des températures T_1 et T_2 .

Avec :

φ_1, φ_2 sont les flux de chaleur (quantité de chaleur par unité de temps qui traverse la surface dans la direction z).

La figure II.5 montre la distribution de la température dans la tige métallique.

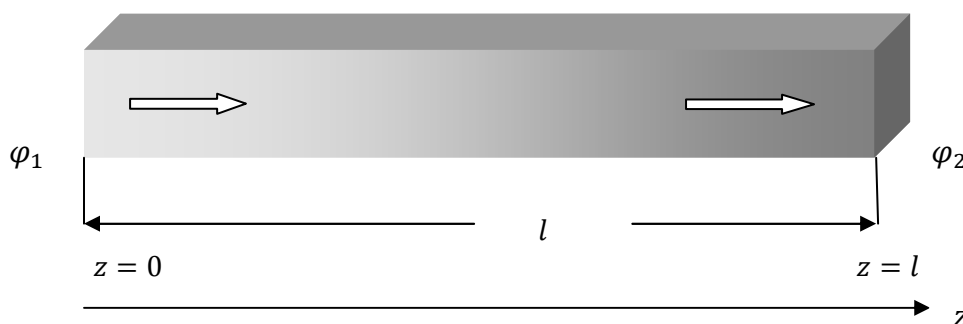


Figure II.5 Evolution de la température dans une tige homogène.

Nous déduisons que la forme la plus simple, parmi les formes compliquées pour l'expression du flux de chaleur est bien la loi de «Fourier »:

$$\vec{\varphi} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{z} \quad (\text{II.6})$$

Avec

φ : est la densité de flux [w/m^2].

D'après la première loi de la thermodynamique, la quantité de chaleur ΔQ qui est emmagasinée dans un matériau de masse volumique ρ , de longueur Δz , durant une augmentation de température ΔT est :

$$\Delta Q = c_p \rho \Delta z \Delta T \quad (\text{II.7})$$

D'après la définition la quantité de chaleur qui entre pendant un intervalle de temps $\Delta \tau$ est :

$$\Delta Q = -(\varphi_2 - \varphi_1) \Delta \tau \quad (\text{II.8})$$

En appliquant le théorème de la moyenne pour l'équation (II.8), nous aurons :

$$\Delta Q = -\Delta z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Delta \tau \quad (\text{II.9})$$

D'après la définition la quantité de chaleur qui entre pendant un intervalle de temps $\Delta \tau$ est :

$$c_p \rho \Delta z \Delta T = -\Delta z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Delta \tau \quad (\text{II.10})$$

En allégeant cette équation (II.10), nous la divisons par $\Delta z \Delta \tau$ avec $\Delta \tau \rightarrow 0$, alors nous obtenons l'équation de la chaleur établit a partir des lois de conservation suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T(z,\tau)}{\partial \tau} = - \frac{\partial \varphi(z,\tau)}{\partial z} \quad (\text{II.11})$$

c_p : Capacité calorifique massique ($J/Kg K$).

ρ : La masse volumique (Kg/m^3).

Compte tenue de la loi de Fourier

$$\rho c_p \frac{\partial T(z,\tau)}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\lambda \frac{\partial T(z,\tau)}{\partial z} \right) \quad (\text{II.12})$$

Remarque II.2

« Bien souvent, le coefficient de conduction sera pris constant, mais il peut dépendre de la position (si nous mettons des matériaux différents en contact), et il peut aussi dépendre de la température si nous chauffons trop, ou si nous voulons résoudre de manière très précise. »

Si nous ne sommes pas dans ces cas, nous écrivons la forme simplifiée classique :

$$\rho c_p \frac{\partial T(z,\tau)}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 T(z,\tau)}{\partial z^2}. \quad (\text{II.13})$$

En fin, nous notons aussi :

$$\frac{\partial T(z,\tau)}{\partial \tau} = c \frac{\partial^2 T(z,\tau)}{\partial z^2} \quad (\text{II.14})$$

Où :

$$c = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (\text{II.15})$$

C : est le coefficient de « diffusivité thermique » ($m^2 s^{-1}$) caractérise la vitesse de diffusion de la chaleur dans le matériau.

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles. Il y a deux variables, x et t sont toutes les deux indépendantes.

Pour la résolution il faut ajouter à cette équation qui est valable dans le domaine Ω , une relation appelée condition aux limites, qui indique ce qui se passe aux frontières $\partial\Omega$ du domaine, et une autre relation qui indique quel est l'état initial de la température. Par convention, nous choisissons l'instant $\tau = 0$ pour être le temps initial, et nous choisissons une condition initiale. Maintenons la température constante aux extrémités T_1 et T_2 , la température vérifie les conditions aux limites de Dirichlet. [12]

Ces conditions aux limites sont :

$$T(0, \tau) = T_1 \quad (\text{II.16})$$

$$T(l, \tau) = T_2 \quad (\text{II.17})$$

Et la condition initiale est :

$$T(z, 0) = T_0(z) \quad (\text{II.18})$$

En rassemblant à la fin l'équation et ces conditions (les conditions aux limites et la condition initiale) satisfaites par la température, nous obtenons l'équation de chaleur suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} - c \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

$$T(0, \tau) = T_1 \quad (\text{II.19})$$

$$T(l, \tau) = T_2$$

$$T(z, 0) = T_0(z)$$

Avec

$T(z, t)$ est la température dans la tige en un point donné de l'axe z à un instant donné t .

Le problème (II.19) est constitué d'une équation aux dérivées partielles munies de conditions aux limites et d'une condition initiale. A cause de la présence de conditions aux limites, nous disons (II.19) est un problème aux limites, mais nous disons aussi que c'est un problème de « Cauchy » à cause de la donnée initiale en temps. [12]

Remarques II.3 [13]

- *Les métaux sont de bons conducteurs de chaleur, car ils ont une bonne conductivité thermique.*
- *$\lambda(T)$ croît avec la température pour les gaz.*
- *$\lambda(T)$ décroît avec la température pour le cuivre, le zinc, les aciers doux, le plomb, mais croît avec la température pour l'aluminium et les aciers inoxydables.*

- $\lambda(T)$ est quasi constant pour les huiles de moteur.
- $\lambda(T)$ pour l'eau augmente avec T , puis diminue.

II.5. Normalisation [14]

Notre objectif est d'écrire l'équation de chaleur avec des variables sans dimensions qui décrivent l'erreur entre la température réelle et le profil d'équilibre de la température. Nous procédons comme suit :

nous faisons le changement de variable suivant :

$$x = \frac{z}{l} \quad (\text{II.20})$$

Nous remplaçons (II.20) dans l'équation (II.19) et nous aurons :

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{c}{l^2} \frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (\text{II.21})$$

Avec les conditions aux limites

$$T(0, \tau) = T_1$$

$$T(l, \tau) = T_2$$

Puis nous faisons un deuxième changement de variables :

$$t = \frac{c}{l^2} \tau \quad (\text{II.22})$$

Nous aurons :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{II.23})$$

Nous introduisons une nouvelle variable :

$$u = T - \bar{T} \quad (\text{II.24})$$

où :

$$\bar{T}(x) = T1 + x(T2 - T1) \quad (\text{II.25})$$

C'est le profil de l'état d'équilibre, et la solution de l'EDO avec les conditions aux limites.

Ce qui donne :

$$\bar{T}''(x) = 0 \quad (\text{II.26})$$

$$\bar{T}(0) = T1 \quad (\text{II.27})$$

$$\bar{T}(1) = T2 \quad (\text{II.28})$$

Enfin, nous obtenons l'équation de la chaleur normalisée donnée comme suit :

$$u_t = u_{xx} \quad (\text{II.29})$$

Avec les conditions aux limites :

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 0$$

II.6. Conclusion

L'équation de la chaleur linéaire constitue le modèle type de la classe des équations aux dérivées partielles paraboliques qui décrivent, en général, un phénomène de diffusion (conduction). Son analyse mathématique et la compréhension des propriétés qualitatives de ses solutions ont conduit à développer des outils dont l'extension permet de mieux aborder les modèles les plus complexes à appréhender. L'équation de la chaleur est la seconde équation ayant une grande importance dans les sciences de l'ingénieur. La normalisation avec les conditions aux limites homogène de cette équation nous facilitera la résolution avec la méthode de séparation des variables que nous aborderons dans le prochain chapitre.

CHAPITRE III :

ETUDE DE LA STABILITÉ ET
RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION
DE CHALEUR

III.1.Introduction

Un des aspects qualitatifs les plus importants des systèmes dynamiques est leur comportement asymptotique, c'est-à-dire le comportement des solutions lorsque le temps tend vers l'infini. Ce concept qui est directement lié à la stabilité a fait l'objet d'une recherche abondante. Son importance réside dans le fait que la notion de la stabilité est commune à plusieurs domaines, d'une part, et d'un point de vue général, l'analyse de la stabilité est une étape nécessaire pour la commande des systèmes (physiques, mécaniques, électroniques, etc.). La stabilité est le souci majeur de l'automaticien.

Pour cette raison, il est indispensable d'introduire dans la première partie de ce chapitre quelques notions relatives à la stabilité, puis étudier la stabilité de l'équation de la chaleur tout en présentant quelques inégalités mathématiques très importantes pour son analyse. La deuxième partie de ce chapitre consiste à résoudre l'équation de la chaleur avec la méthode de séparation des variables.

III.2 .Rappels et généralités

III.2.1. Stabilité des systèmes dynamiques : Stabilité de Lyapunov

Dans cette première partie, nous rappelons quelques concepts sur la stabilité des systèmes dynamiques, nous nous intéressons en particulier aux systèmes à temps continu.

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité de ce système permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre.

La stabilité au sens de « Lyapunov » est une théorie générale valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche.

III.2.2. Définition de la Stabilité de Lyapunov des systèmes linéaires [15]

Le système linéaire $\dot{X} = AX$ est asymptotiquement stable si et seulement si, pour toute matrice symétrique définie positive Q , il existe une matrice P définie positive et symétrique satisfaisant l'équation de « Lyapunov »:

$$A^t P + PA + Q = 0$$

Démonstration (condition suffisante)

- Considérons cette fonction : $V = X^T P X$.
- Dérivons : $\dot{V} = X^T P \dot{X} + \dot{X}^T P X$

$$= X^T P A X + X^T A^T P X$$

$$= X^T (PA + A^T P) X$$
- Soit Q une matrice définie positive, si P est une solution positive de l'équation de Lyapunov.
 - Alors : $V(x) > 0, \forall x \neq 0$,
 - et $\dot{V}(x) = -X^T Q X \Rightarrow \dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$,
 - donc le système est asymptotiquement stable.

III.3. Méthode directe de Lyapunov

Méthode directe de « Lyapunov » est basée sur la recherche d'une fonction scalaire de signe défini à valeurs réelles. Quand sa dérivée par rapport au temps est définie de signe opposé, la vitesse du point x ($x \in R^n$) est toujours dirigée vers l'intérieur, ce point finira par arriver à l'origine, dans le cas contraire, le point x s'en écartera davantage. Dans quelques classes de systèmes physiques, la fonction V peut être choisie comme étant l'énergie du système.

III.4. Analyse de la stabilité de l'équation de la chaleur [14]

Après avoir normalisé l'équation de la chaleur dans le chapitre précédent, nous allons étudier la stabilité du système.

L'équation de la chaleur normalisée est :

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad (\text{III.1})$$

où $u(x, t)$: est la température en un point donné de l'axe x à un instant donné t .

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 0$$

Considérons la fonction de « Lyapunov » :

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, t) dx \quad (\text{III.2})$$

La dérivée temporelle de V est :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} = \int_0^1 u(x, t) u_t(x, t) dx \quad (\text{III.3})$$

Nous remplaçons (III.1) dans (III.3), nous aurons donc:

$$\dot{V} = \int_0^1 u u_{xx} dx \quad (\text{III.4})$$

Nous appliquons une intégration par parties (III.4) devient :

$$\dot{V} = u u_x \Big|_0^1 - \int_0^1 u_x^2 dx \quad (\text{III.5})$$

Considérons les conditions aux limites, la relation (III.5) devient :

$$\dot{V} = - \int_0^1 u_x^2 dx \quad (\text{III.6})$$

Dans ce cas, nous pouvons rien dire sur la stabilité ou l'instabilité du système malgré la bornitude de V car, la dérivée de la fonction de « Lyapunov » dépend de u_x non de u , donc nous ne pouvons pas l'exprimer en fonction de V .

Pour cela, nous utilisons les trois inégalités mathématiques suivantes:

Inégalité de « Young » :

$$ab \leq \frac{\gamma}{2} a^2 + \frac{1}{2\gamma} b^2 \quad (\text{III.7})$$

Inégalité de « Cauchy-Schwartz » :

$$\int_0^1 u w dx \leq \left(\int_0^1 u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 w^2 dx \right)^{1/2} \quad (\text{III.8})$$

Inégalité de « Poincaré » : pour tout u continûment différentiable dans l'intervalle $[0,1]$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^2 dx &\leq 2u^2(1) + 4 \int_0^1 u_x^2 dx \\ \int_0^1 u^2 dx &\leq 2u^2(0) + 4 \int_0^1 u_x^2 dx \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Nous revenons à l'équation (III.6). L'inégalité de « Poincaré » Permet d'écrire :

$$\int_0^1 u^2 dx \leq 2u^2(1) + 4 \int_0^1 u_x^2 dx \quad (\text{III.10})$$

D'après les conditions aux limites, (III.10) devient :

$$\int_0^1 u^2 dx \leq 4 \int_0^1 u_x^2 dx \quad (\text{III.11})$$

D'où

$$\dot{V} = - \int_0^1 u_x^2 dx \leq -\frac{1}{4} \int_0^1 u^2 dx \leq -\frac{1}{2} V \quad (\text{III.12})$$

Donc $V(t)$ prend la forme suivante :

$$V(t) \leq V(0) e^{-t/2} \quad (\text{III.13})$$

D'où

$$||u(t)|| \leq e^{-\frac{t}{4}} ||u_0|| \quad (\text{III.14})$$

Avec

$u_0 = u(x, 0)$ est la condition initiale et $\|\cdot\|$ désigne la norme L_2 d'une fonction définie comme suit :

$$\|u(t)\| = \left(\int_0^1 u(x, t)^2 dx \right)^{1/2} \quad (\text{III.15})$$

Ce système possède la propriété que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ quel que soit $V(0)$ (c-à-d que le point d'équilibre 0 est globalement asymptotiquement stable).

Ainsi, le système (III.1) est exponentiellement stable suivant la norme L_2 .

III.5. Méthode de séparation des variables

III.5.1. Définition du système à réaction-diffusion

Un système à réaction-diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs substances spatialement distribuées et soumises à deux processus : un processus de réactions chimiques locales, dans lequel les différentes substances se transforment, et un processus de diffusion qui provoque une répartition de ces substances dans l'espace.

Mathématiquement, les systèmes à réaction-diffusion sont représentés par des équations aux dérivées partielles paraboliques qui prennent dans le cas d'une composante la forme suivante :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = C \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + R(u(x, t)) \quad (16)$$

C'est l'équation de réaction-diffusion la plus simple, ne portant que sur la concentration u d'une seule substance dans une seule dimension de l'espace.

Avec

$R(x, t)$: Réaction.

III.5.2. Définition de la méthode de séparation des variables

La méthode la plus fréquemment utilisée pour obtenir des solutions aux équations aux dérivées partielles à coefficients constants est la méthode de séparation des variables qui est une méthode modale. Cette dernière permet d'obtenir la solution exacte d'un problème différentiel sous la forme d'une série.

III.5.3. Principe mathématique de la méthode [14]

Le principe de la méthode de séparation des variables est, comme l'indique son nom, de supposer que la fonction de la température u est le produit de fonctions ne dépendant chacune que d'une seule des variables.

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (\text{III.17})$$

Avec

$X(x)$: Fonction qui dépend de la variable spatiale.

$T(t)$: Fonction qui dépend de la variable du temps.

Considérons l'équation de réaction-diffusion suivante :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \beta u(x, t) \quad (\text{III.18})$$

Avec les conditions aux limites :

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 0$$

Et la condition initiale :

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

où β est le coefficient de réaction.

Nous remplaçons la solution (III.17) dans l'EDP (III.18), nous obtenons :

$$X(x)\dot{T}(t) = X''(x)T(t) + \beta X(x)T(t) \quad (\text{III.19})$$

Nous regroupant les termes de la même variable indépendante, il vient :

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X'' + \beta X(x)}{X(x)} \quad (\text{III.20})$$

Pour que cette égalité soit vraie pour tout (x, t) , sachant que la partie gauche de l'équation ne dépend que du temps t et la partie droite ne dépend que de x , il faut que les deux termes soient égaux à une constante notée σ , on obtient deux équations différentielles.

Pour que la solution " séparée " existe, il faut que les deux équations différentielles (III.21) et (III.22) soient satisfaites. Le problème est donc transformé en un problème différentiel ordinaire.

$$\dot{T} = \sigma T \quad (\text{III.21})$$

Avec la condition $T(0) = T_0$.

$$X'' + (\beta - \sigma)X = 0 \quad (\text{III.22})$$

Avec les conditions aux limites $X(0) = X(l) = 0$.

La solution de l'équation (III.21) est :

$$T(t) = T_0 e^{\sigma t} \quad (\text{III.23})$$

La solution de l'équation (III.22) se présente sous la forme suivante :

$$X(x) = A \sin(\sqrt{\beta - \sigma} x) + B \cos(\sqrt{\beta - \sigma} x) \quad (\text{III.24})$$

Avec $\beta - \sigma < 0$.

Où A et B sont des constantes qui doivent être déterminées à partir des conditions aux limites.

Nous avons:

$$X(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (\text{III.25})$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow A \sin(\sqrt{\beta - \sigma} l) = 0 \quad (\text{III.26})$$

Ce qui implique:

$$\begin{cases} A = 0 \\ \text{ou} \\ \sin(\sqrt{\beta - \sigma} l) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

Pour ne pas avoir de solutions triviales, prenons :

$$\sin(\sqrt{\beta - \sigma}) = 0 \quad (\text{III.28})$$

Ce qui implique

$$\sqrt{\beta - \sigma} = \pi n \text{ Pour } n = 0,1,2, \dots, \quad (\text{III.29})$$

D'où

$$\sigma = \beta - \pi^2 n^2, n = 0,1,2, \dots, \quad (\text{III.30})$$

Nous substituons (III.30) et (III.23) dans (III.17), nous obtenons :

$$u_n = T_0 A_n e^{(\beta - \pi^2 n^2)t} \sin \pi n x, n = 0,1,2, \dots \quad (\text{III.31})$$

L'équation étant linéaire, la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation (théorème de superposition). Nous écrivons donc la solution $u(t, x)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires. Par conséquent, la solution générale de (III.18) est donné par :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(\beta - \pi^2 n^2)t} \sin \pi n x \quad (\text{III.32})$$

Avec

$$c_n = A_n T_0 \quad (\text{III.33})$$

La solution sous la forme (III.32) est suffisante pour l'analyse de stabilité complète d'EDP. Si nous sommes intéressés par la réponse exacte à un état initial particulier, alors nous devrions déterminer les c_n constantes.

En posons $t = 0$ dans (III.32) et multiplier les deux côtés de l'égalité qui résulte par $\sin(\pi m x)$ à fin de neutraliser le $\sin(\pi n x)$.

$$u_0(x) \sin(\pi m x) = \sin(\pi m x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi n x) \quad (\text{III.34})$$

Comme la fonction $(\sin y)$ est périodique, de période 2π , nous pouvons la représenter sous forme d'une série trigonométrique.

$$\int_0^1 u_0(x) \sin(\pi m x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^1 \sin(\pi m x) \sin(\pi n x) dx$$

$$= \frac{1}{2} c_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \cos(\pi(n-m)x) - \cos(\pi(n+m)x) dx \quad (\text{III.35})$$

Puis, en utilisant l'identité suivante :

$$\int_0^1 \sin(\pi m x) \sin(\pi n x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

Nous obtenons :

$$c_m = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(\pi m x) dx. \quad (\text{III.37})$$

Nous introduisons (III.37) dans (III.32), nous retrouvons :

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\beta - \pi^2 n^2)t} \sin \pi n x \int_0^1 \sin(\pi x n) u_0(x) dx. \quad (\text{III.38})$$

Même si nous avons obtenu cette solution formelle, il peut être prouvé que c'est effectivement une bonne solution définie dans un sens quelle est unique.

La structure de cette solution se compose des éléments suivants:

- valeurs propres: $(\beta - \pi^2 n^2)$,
- fonctions propres: $\sin(\pi n x)$,
- l'effet des conditions initiales: $\int_0^1 \sin(\pi n x) u_0(x) dx$.

La plus grande valeur propre $\beta - \pi^2 (n = 1)$, indique le taux de croissance ou de décroissance de la solution.

Nous pouvons voir que le système est stable pour $(\beta < \pi^2)$ et instable autrement (divergence). La réponse transitoire due à des conditions initiales, provoque un profil de l'état proportionnel à la première fonction propre $\sin(\pi x)$. Parfois, il est possible d'utiliser la méthode de séparation des variables pour déterminer les propriétés de stabilité du système.

III.6. Conclusion

D'après l'étude de la stabilité de l'équation de chaleur, nous constatons qu'elle est asymptotiquement stable mais devient instable en introduisant un terme de réaction $\beta u(x, t)$ pour certaines valeurs de β (coefficient de réaction). La stabilisation dans ce cas doit être assurée par une loi de commande. Le chapitre suivant est consacré à la stabilisation de l'équation de chaleur par l'approche « backstepping ».

CHAPITRE IV :

COMMANDE BACKSTEPPING

IV.1. Introduction

La conception d'un contrôleur pour un système non linéaire dont le vecteur d'état X est de dimension élevée, peut souvent s'avérer une tâche difficile, voire impossible. La technique « backstepping » offre une méthode systématique pour répondre à ce type de problème. Elle combine la notion de fonction de contrôle de « Lyapunov » (fcl) avec une procédure récursive de conception. Cela permet de surmonter l'obstacle de la dimension et d'exploiter la souplesse de conception dans le cas scalaire pour résoudre les problèmes de commande pour des systèmes d'ordre plus élevé. Cette technique suppose que l'on est en mesure de trouver au moins pour un système scalaire, une loi de commande u et une fonction de contrôle de Lyapunov $V(z)$ qui stabilise son origine.

« Backstepping » a été développé par « Kanellakopoulos » et *al.* (1991) [16] et inspiré par les travaux de « Feurer & Morse » (1978) [17] d'une part et « Tsinias » (1989) [18] et « Kokotovit & Sussmann » (1989) [19] d'autre part. L'arrivée de cette méthode a donné un nouveau souffle à la commande des systèmes non linéaires.

La technique « backstepping » se base sur la deuxième méthode de « Lyapunov » et combine le choix de la fonction avec celui des lois de commande. Ceci lui permet, en plus de la tâche pour laquelle le contrôleur est conçu (poursuite et/ou régulation), de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé.

Dans la conception par la technique « backstepping », aucune contrainte n'est imposée à la caractéristique non linéaire du système.

Notre travail est basé essentiellement sur cette technique que nous utiliserons pour la stabilisation de l'équation de la chaleur.

IV.2.Principe mathématique de la technique backstepping

Pour bien illustrer le principe de la méthode « backstepping », nous considérons le système de troisième ordre suivant : [20]

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 \quad (\text{IV.1})$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + x_2^2 \quad (\text{IV.2})$$

$$\dot{x}_3 = u \quad (\text{IV.3})$$

où x_1 , x_2 et x_3 sont des variables d'état, u est une entrée de commande et x_i^2 sont les termes non linéaires pour $i = 1, 2$.

L'objectif est de concevoir une commande sous forme d'un retour d'état pour stabiliser asymptotiquement l'origine. Pour la conception de cette loi de commande, nous passons par trois étapes.

Étape 1 : Commençons par la première équation (IV.1), nous définissons $z_1 = x_1$ et dérivons la dynamique de la nouvelle coordonnée

$$\dot{z}_1 = x_2 + x_1^2 \quad (\text{IV.4})$$

Nous considérons x_2 comme variable de commande et définissons une loi de commande virtuelle pour (IV.4), nous la notons α_1 , et laissons z_2 comme une variable d'erreur représentant la différence entre les commandes réelles et virtuelles de (IV.4), c-à-d :

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 \quad (\text{IV.5})$$

Ainsi en fonction des nouvelles variables d'état, nous pouvons réécrire (IV.4)

$$\dot{z}_1 = \alpha_1 + x_1^2 + z_2 \quad (\text{IV.6})$$

Dans cette étape, notre objectif est de concevoir une loi de commande virtuelle α_1 qui permet d'avoir $z_1 \rightarrow 0$. Considérons la fonction de « Lyapunov » suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (\text{IV.7})$$

En, dérivant V_1 , nous obtenons :

$$\dot{V}_1 = z_1(\alpha_1 + x_1^2) + z_1 z_2 \quad (\text{IV.8})$$

Nous pouvons maintenant choisir une commande virtuelle appropriée α_1 qui rend le système du premier ordre stable qui est donnée comme suit :

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - x_1^2 \quad (\text{IV.9})$$

$$\dot{\alpha}_1 = -(c_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2) \quad (\text{IV.10})$$

où c_1 est une constante positive.

Alors \dot{V}_1 devient :

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 = -2c_1 V_1 + z_1 z_2 \quad (\text{IV.11})$$

Il est clair que si $z_2 = 0$, alors $\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 = -2c_1 V_1$ et z_1 est garantie pour converger asymptotiquement vers zéro.

Étape 2 : Dérivons la dynamique d'erreur pour $z_2 = x_2 - \alpha_1$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 \\ &= x_3 + x_2^2 + (c_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2) \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Avec x_3 est considérée comme une entrée de commande réelle. Définissons une loi de commande virtuelle α_2 et z_3 une variable d'erreur représentant la différence entre les commandes réelle et virtuelle

$$z_3 = x_3 - \alpha_2 \quad (\text{IV.13})$$

Alors (IV.12) devient :

$$\dot{z}_2 = z_3 + \alpha_2 + x_2^2 + (c_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2) \quad (\text{IV.14})$$

L'objectif de commande est d'avoir $z_2 \rightarrow 0$. Choisissons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (\text{IV.15})$$

Nous dérivons V_2 par rapport au temps nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_2 (z_3 + \alpha_2 + x_2^2 + (c_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2)) \\ &= -c_1 z_1^2 + z_2 (\alpha_2 + z_1 + x_2^2 + (c_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2)) + z_2 z_3 \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Nous pouvons maintenant choisir une commande virtuelle appropriée α_2 pour annuler certains termes relatifs à z_1 , à x_1 et à x_2 , alors que le terme comportant z_3 ne peut être annulé.

$$\alpha_2 = -z_1 - c_2 z_2 - x_2^2 - (c_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2) \quad (\text{IV.17})$$

où c_2 est une constante positive. Ainsi la dérivée par rapport au temps de V_2 devient :

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 = -\sum_{i=1}^2 c_i z_i^2 + z_2 z_3 \quad (\text{IV.18})$$

Nous voyons clairement, que si $z_3 = 0$, nous avons $\dot{V}_2 = -\sum_{i=1}^2 c_i z_i^2$, ainsi z_1 et z_2 sont garanti de converger asymptotiquement vers zéro.

Étape 3 : dérivons la dynamique d'erreur pour

$$z_3 = x_3 - \alpha_2 \quad (\text{IV.19})$$

$$\dot{z}_3 = u - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + x_1^2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (x_3 + x_2^2) \quad (\text{IV.20})$$

Dans cette équation, l'entrée de commande réelle u apparaît et est à notre disposition. Notre objectif est de concevoir l'entrée de commande réelle u tels que z_1, z_2 et z_3 convergent à zéro. Choisissons une fonction de « Lyapunov » V_3 :

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2 \quad (\text{IV.21})$$

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\dot{V}_3 = -\sum_{i=1}^2 c_i z_i^2 + z_3 \left(u + z_2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + x_1^2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (x_3 + x_2^2) \right) \quad (\text{IV.22})$$

Le choix de la loi de commande est :

$$u = -z_2 - c_3 z_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + x_1^2) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (x_3 + x_2^2). \quad (\text{IV.23})$$

où c_3 est une constante positive. Alors la dérivée de la fonction de Lyapunov V_3 devient :

$$\dot{V}_3 = -\sum_{i=1}^3 c_i z_i^2 \quad (\text{IV.24})$$

La loi de commande (IV.23) peut être réalisée, ce qui permet de stabiliser l'origine du système. L'objectif de stabilisation est ainsi atteint.

IV.3. Discrétisation mathématique du système

Considérons l'équation de diffusion- réaction suivante:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + \beta u(x, t) \quad (\text{IV.25})$$

Avec les conditions aux limites :

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(l, t) = U(t).$$

Et la condition initiale :

$$u(\Delta x, 0) = u_0(\Delta x) .$$

Où β est le coefficient de réaction.

Nous décomposons le domaine d'espace $[0, l]$ en N intervalles égaux correspond à un pas de discrétisation ΔX comme le montre la figure **IV.1** suivante :

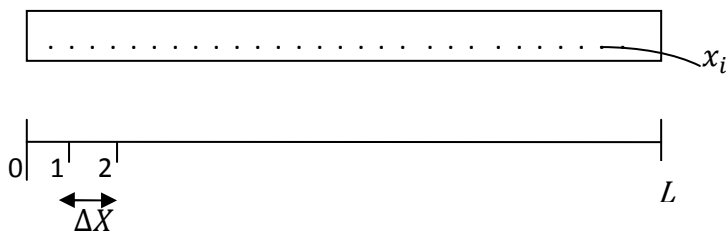


Figure **IV.1** Schéma de discrétisation mathématique.

$$\Delta X = \frac{l}{N} \quad (\text{IV.26})$$

Les schémas classiques de discrétisation de la dérivée première et second sont donnés comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_n \cong \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x} \quad (\text{IV.27})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_n \cong \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{IV.28})$$

D'où l'équation différentielle :

$$\dot{u}_N = \frac{1}{(\Delta x)^2} [u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}], \quad n = 1, 2, 3, \dots, N - 1 \quad (\text{IV.29})$$

Avec les conditions aux limites :

$$u(0, t) = 0 ,$$

$$u(l, t) = U(t) .$$

Et les conditions initiales :

$$u_n(0) = u_0(n\Delta x) .$$

Soit le modèle d'état du système sous forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_{N-1} \end{bmatrix} = (1/(\Delta x)^2) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}$$

Le système ci-dessus est écrit sous la forme

$$\dot{u}(x, t) = Au(x, t) + \beta u(x, t) \quad (30)$$

Avec A est une matrice tri-diagonale symétrique.

IV.3.1.Simulation du système non commandé

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + \beta u(x, t) \quad (IV.31)$$

Avec les conditions aux limites :

$$u(0, t) = 0 \cong u_0 ,$$

$$u(l, t) = 0 \cong u_{N+1} .$$

Et les conditions initiales :

$$u_n(0) = u_0(n\Delta x) .$$

u_{xx} : L'opérateur de dérivée partielle du 2^{ème} ordre.

u_t : L'opérateur de dérivée partielle du 1^{ème} ordre.

La simulation donne les résultats représentés par les figures **IV.2** et **IV.3**, pour $N = 100$, $\beta = 20$ et $l = 1$. Avec N est le nombre de points de discrétisation.

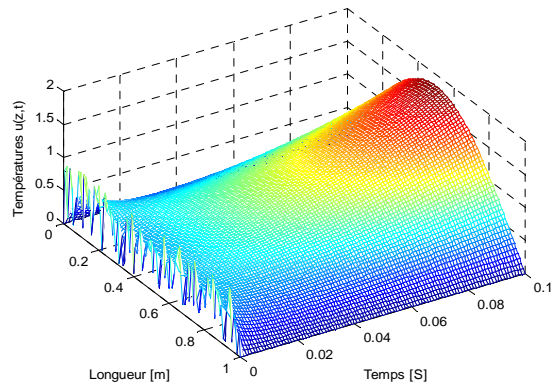


Figure IV.2 Evolution spatio-temporelle de la température dans la tige métallique.

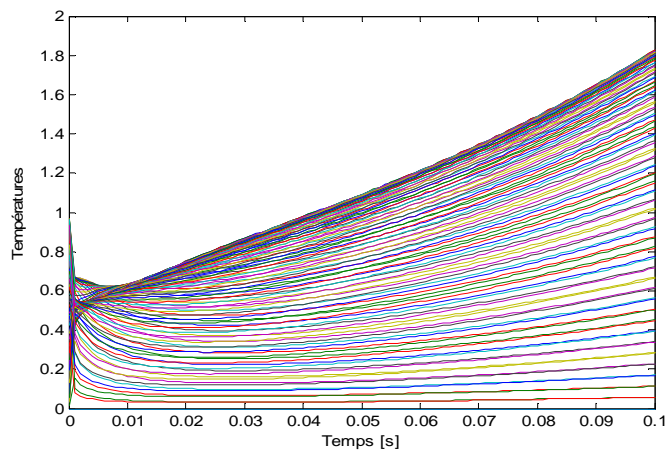


Figure IV.2 Evolution spatio-temporelle de la température dans la tige métallique.

IV.3.1.1. Interprétation des résultats

D'après les résultats de simulation du système non commandé, nous remarquons des figures IV.2 et IV.3 que le système est instable, le système s'éloignent du point d'équilibre (divergent) pour régime permanent ($t \rightarrow \infty$).

Donc nous constatons que le terme $\beta u(x, t)$ est la source d'instabilité car l'équation de la chaleur est stable comme nous venons de le démontrer précédemment (chapitre III), pour des valeurs de β suffisamment grandes.

IV.4. Choix de la commande

L'intérêt d'une telle commande est d'assurer la stabilité du système. En éliminant le terme $\beta u(x, t)$ qui est la source d'instabilité.

La commande backstepping est l'une des commandes les plus performantes pour assurer la stabilité avec un bon choix de la transformation d'état.

IV.5. Commande backstepping de l'évolution de la température dans la tige

L'idée principale de la méthode « backstepping » est d'utiliser la transformation de coordonnées appelée aussi « transformation d'état » suivante : [14]

$$\omega(x, t) = u(x, t) - \int_0^x k(x, y)u(y, t)dy \quad (\text{IV.32})$$

Nous définissons la loi de commande comme suit :

$$u(1, t) = \int_0^x k(1, y)u(y, t)dy \quad (\text{IV.33})$$

Notre objectif est de transformer le système (IV.31) au système cible suivant :

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t) \quad (\text{IV.34})$$

Avec les conditions aux limites :

$$w(0, t) = 0,$$

$$w(1, t) = 0.$$

Remarques IV.1 [15]

- *La transformation intégrale Volterra en (IV.32) a les caractéristiques suivantes. Les limites de l'intégrale sont de 0 à x, pas de 0 à 1 ce qui la rend « Spatialement causale ».*

- La stabilité du système cible se traduit par une stabilité du système en boucle fermée constitué du système ainsi que les conditions aux limites.

III.5.1. Détermination du gain de la commande (Noyau) [14]

Notre objectif maintenant, c'est de trouver la fonction $k(x, y)$ (que nous appelons le «gain (noyau)» qui impose au système (IV.31) avec la commande (IV.33) de se comporter comme le système cible (référence) (IV.34).

En introduisant les notations suivantes:

- $k_x(x, x) = \frac{\partial}{\partial x} k(x, y)|_{y=x}$;
- $k_y(x, x) = \frac{\partial}{\partial y} k(x, y)|_{y=x}$;
- $\frac{\partial}{\partial x} k(x, y) = k_x(x, x) + k_y(x, x)$.

En utilisant la règle de Leibnitz suivante :

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(x, y) dy = f(x, x) + \int_0^x f_x(x, y) dy.$$

La différenciation de la transformation (IV.32) par rapport à x donne :

$$w_x(x) = u_x(x) - k(x, x)u(x) - \int_0^x k_x(x, y)u(y) dy,$$

$$w_{xx}(x) = u_{xx} - \frac{d}{dx} (k(x, x)u(x)) - k_x(x, x)u(x) - \int_0^x k_{xx}(x, y)u(y) dy$$

$$= u_{xx}(x) - u(x) \frac{d}{dx} k(x, x) - k(x, x)u_x(x) - k_x(x, x)u(x)$$

$$- \int_0^x k_{xx}(x, y)u(y) dy. \tag{IV.36}$$

Ensuite, nous différencions la transformation (IV.32) par rapport au temps, nous obtenons :

$$w_t = u_t - \int_0^x k(x, y)u_t(y) dy$$

$$= u_{xx} + \beta u(x) - \int_0^x k(x, y)(u_{yy}(y) + \beta u(y)) dy$$

En intégrant par partie, il vient :

$$\begin{aligned}
 w_t &= u_{xx}(x) + \beta u(x) - k(x, x)u_x(x) + k(x, 0)u_x(0) + \int_0^x k_y(x, y)u_y dy \\
 &\quad - \int_0^x \beta k(x, y)u(y) dy \\
 &= u_{xx}(x) + \beta u(x) - k(x, x)u_x(x) + k(x, 0)u_x(0) + k_y(x, x)u(x) - k_y(x, x)u(x) - \\
 &\quad k_y(x, 0)u(0) - \int_0^x k_{yy}(x, y)u(y) dy - \int_0^x \beta k(x, y)u(y) dy. \text{ (integration par partie)} \quad (\text{IV.37})
 \end{aligned}$$

La soustraction (IV.37)- (IV.36), donne :

$$\begin{aligned}
 w_t - w_{xx} &= \left[\beta + 2 \frac{d}{dx} k(x, x) \right] u(x) + k(x, 0)u_x(0) + \int_0^x (k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) - \\
 &\quad \beta k(x, y)u(y) dy. \quad (\text{IV.38})
 \end{aligned}$$

Pour avoir le coté gauche de l'équation (IV.38) égale à zéro, nous devons imposer ceci :

$$k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) - \beta k(x, y) = 0 \quad (\text{IV.39})$$

$$k(x, 0) = 0 \quad (\text{IV.40})$$

$$\beta + 2 \frac{d}{dx} k(x, x) = 0 \quad (\text{IV.41})$$

Nous simplifions l'équation (IV.41) en l'intégrant par rapport à x et comme, d'après (IV.40), $k(0,0)=0$, par conséquent les conditions deviennent :

$$\begin{aligned}
 k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) &= \beta k(x, y), \\
 k(x, 0) &= 0,
 \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

Avec x joue le rôle $k(x, x) = -\frac{\beta}{2}x$.

Ces trois conditions forment une EDP. Pour trouver une solution de l'équation aux dérivées partielles de l'équation (IV.42), nous allons d'abord la convertir en une équation intégrale.

IV.5.2. Conversion du gain de la commande (noyau) à une équation intégrale [14]

Nous introduisons les changements de variables suivants :

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y \quad (\text{IV.43})$$

Nous avons:

- $k(x, y) = G(\xi, \eta);$
- $k_x = G_\xi + G_\eta;$
- $k_{xx} = G_{\xi\xi} + 2G_{\xi\eta} + G_{\eta\eta};$
- $k_y = G_\xi - G_\eta;$
- $k_{yy} = G_{\xi\xi} - 2G_{\xi\eta} + G_{\eta\eta};$

Ainsi, le noyau d'EDP devient :

$$G_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \frac{\beta}{4} G(\xi, \eta), \quad (\text{IV.44})$$

$$G(\xi, \xi) = 0, \quad (\text{IV.45})$$

$$G(\xi, 0) = -\frac{\beta}{4} \xi. \quad (\text{IV.46})$$

En intégrant (IV.44) par rapport à η , pour η allant de 0 à η , nous obtenons :

$$G_\xi(\xi, \eta) = G_\xi(\xi, 0) + \int_0^\eta \frac{\beta}{4} G(\xi, s) ds = -\frac{\beta}{4} + \int_0^\eta \frac{\beta}{4} G(\xi, s) ds \quad (\text{IV.47})$$

Ensuite, en intégrant (IV.47) par rapport à ξ , pour ξ allant de η à ξ , nous obtenons l'équation intégrale suivante :

$$G(\xi, \eta) = -\frac{\beta}{4}(\xi - \eta) + \frac{\beta}{4} \int_\eta^\xi \int_0^\eta G(\theta, s) ds d\theta \quad (\text{IV.48})$$

Nous avons obtenu l'équation intégrale, ce qui équivaut à l'EDP (IV.42) dont toute solution est une solution de (IV.48). Le but de convertir l'EDP sous forme d'une équation intégrale est de simplifier sa résolution avec la méthode des approximations successives.

IV.5.3.Méthode des approximations successives [14]

IV.5.3.1. Introduction

En analyse numérique, la méthode des approximations successives est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations intégrale. Cette méthode consiste à utiliser $G(\xi, \eta)$ directement dans la récurrence.

IV.5.3.2.Principe de la méthode

Pour résoudre l'équation intégrale (IV.48), nous utilisons la méthode des approximations successives qui est donnée par le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} G^0(\xi, \eta) = 0, \text{ estimation initiale} \\ G^{n+1}(\xi, \eta) = -\frac{\beta}{4}(\xi - \eta) + \frac{\beta}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} G^n(\theta, s) dsd\theta, \text{ formule récursive} \end{cases} \quad (\text{IV.49})$$

Nous voyons que ce n'est rien d'autre que la méthode des itérations successives.

Si la suite générée $G^n(\xi, \eta)$ converge, alors la solution du problème $G(\xi, \eta)$ est donné par

$$G(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} G^n(\xi, \eta) \quad (\text{IV.50})$$

Notons la différence entre deux termes successifs s'écrit :

$$\Delta G^n(\xi, \eta) = G^{n+1}(\xi, \eta) - G^n(\xi, \eta) \quad (\text{IV.51})$$

Alors que

$$\Delta G^{n+1}(\xi, \eta) = \frac{\beta}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} \Delta G^n(\theta, s) dsd\tau \quad (\text{IV.52})$$

et (IV.50) peut s'écrire sous la forme :

$$G(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta G^n(\xi, \eta) \quad (\text{IV.53})$$

D'après la relation (IV.51), nous avons :

$$\Delta G^0 = G^1(\xi, \eta) = -\frac{\beta}{4}(\xi - \eta), \quad (\text{IV.54})$$

$$\Delta G^1 = G^2(\xi, \eta) - G^1(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{4}\right)^2 (\xi\eta)(\xi - \eta), \quad (\text{IV.55})$$

⋮

$$\Delta G^n(\xi, \eta) = \frac{-(\xi-\eta)\xi^n\eta^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{\beta}{4}\right)^{n+1}. \quad (\text{IV.56})$$

Cette formule peut être vérifiée par déduction. La solution à cette équation intégrale est donnée par :

$$G(\xi, \eta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-\eta)\xi^n\eta^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{\beta}{4}\right)^{n+1} \quad (\text{IV.57})$$

La fonction de Bessel modifiée de premier ordre du premier type est représentée comme suit :

$$I_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \quad (\text{IV.58})$$

Nous comparons cette équation avec (IV.57) et nous obtenons :

$$G(\xi, \eta) = -\frac{\beta}{2}(\xi - \eta) \frac{I_1(\sqrt{\beta\xi\eta})}{(\sqrt{\beta\xi\eta})} \quad (\text{IV.59})$$

En revenant à l'origine x et y , nous avons :

$$k(x, y) = -\beta y \frac{I_1(\sqrt{\beta(x^2-y^2)})}{\sqrt{\beta(x^2-y^2)}} \quad (\text{IV.60})$$

- Le tableau ci-après résume la conception de la loi de commande « backstepping » pour l'équation de chaleur avec un terme de réaction.

Tableau IV.1. Résumé de la conception de la commande pour l'équation de réaction-diffusion. [14]

Système :

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + \beta u(x, t),$$

(IV.61)

$$u(0, t) = 0.$$

Commande

$$u(1) = \int_0^1 -\beta y \frac{I_1(\sqrt{\beta(1-y^2)})}{\sqrt{\beta(1-y^2)}} u(y) dy.$$

(IV.62)

Transformation d'état

$$w(x) = u(x) + \int_0^{x\beta} y \frac{I_1(\sqrt{\beta(x^2-y^2)})}{\sqrt{\beta(x^2-y^2)}} u(y) dy.$$

(IV.63)

Système cible (référence)

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t),$$

(IV.64)

VI.6. Simulation numérique du système commandé

Dans cette section, nous allons présenter les résultats de l'application de la commande « backstepping » pour l'équation de la chaleur caractérisant le transfert de chaleur dans la tige.

Les résultats de simulation sont donnés par les figures suivantes :

Pour $N=100$ et $\beta=20$.

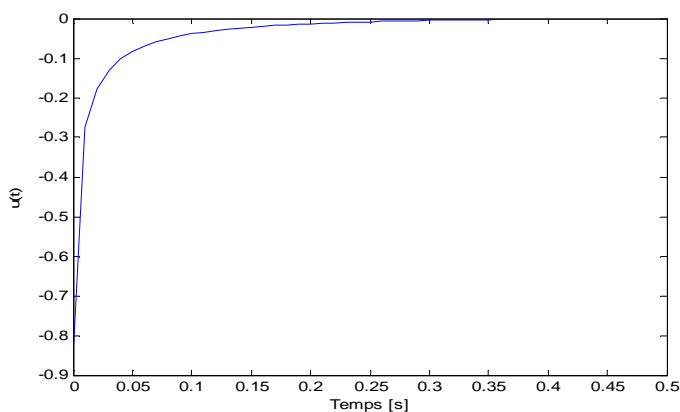


Figure IV.4 Représente la commande $u(t)$ en fonction du temps.

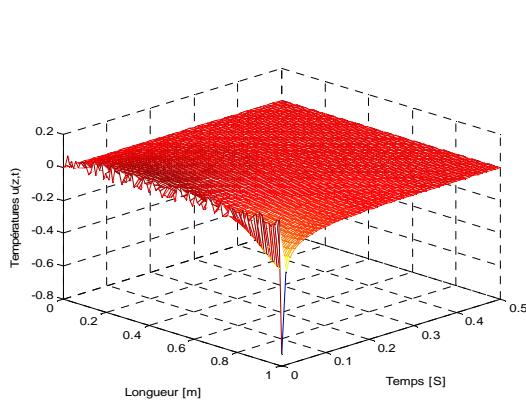


Figure IV.5 Evolution spatio-temporelle de la température dans la tige

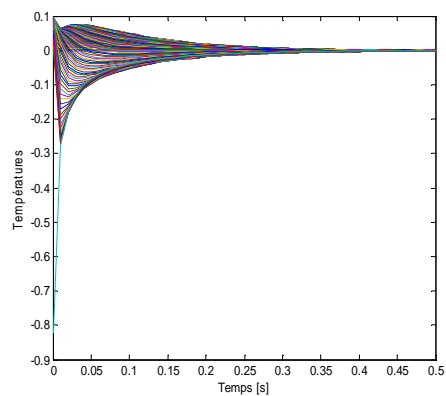


Figure IV.6 Evolution de la température en fonction du temps dans la tige

Pour $N=200$ et $\beta=30$.

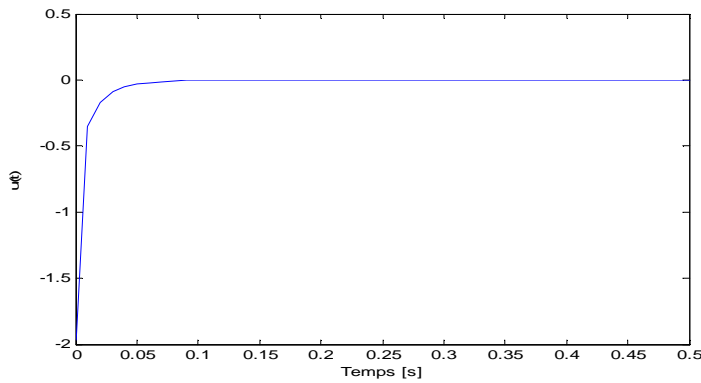


Figure IV.7 Evolution de la commande en fonction du temps.

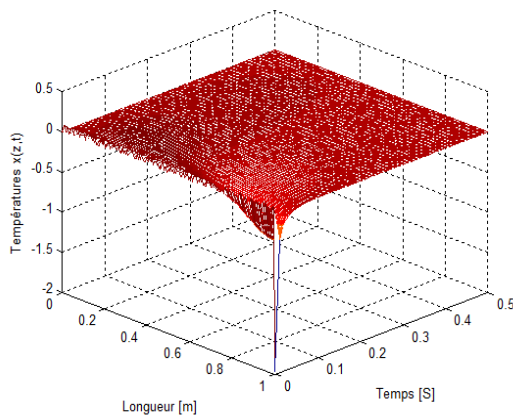


Figure IV.8 Evolution spatio-temporelle de la température dans la tige

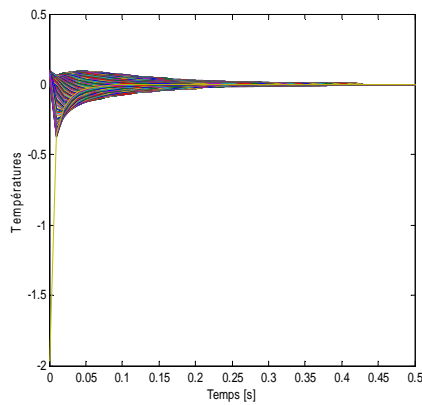


Figure IV.10 Evolution de la température dans la tige en fonction du temps

IV.6.1. Interprétation des résultats

D'après les résultats de simulation obtenus, nous constatons que la commande « backstepping » garantit la stabilité du système au point d'équilibre ($u_e = 0$) puisque le système converge asymptotiquement vers le point d'équilibre au régime permanent.

Les schémas de simulation montre la performance de la commande en stabilité pour différentes valeurs de N et β .

IV.7. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons appliqué la commande « backstepping » pour la stabilisation de l'équation de la chaleur. Le terme de réaction constitue la source de déstabilisation pour le système. La commande « backstepping » introduit un gain déterminé en utilisant d'abord une transformation d'état puis des conditions équivalentes on été déterminées pour la stabilisation. Ces conditions sont données sous forme d'une équation intégrale dont la résolution permet de déterminer le noyau de la commande.

Les résultats de simulation présentées démontrent que la commande « backstepping » permet de stabiliser le système malgré la présence d'un terme de réaction important.

CONCLUSION

GÉNÉRALE

Dans ce travail, nous avons appliqué la commande « backstepping » pour commander la distribution de la température (diffusion de chaleur) dans une tige métallique. Le modèle mathématique est donné par l'équation de chaleur avec un terme source qui représente la source de l'instabilité. L'objectif de la commande est de stabiliser le système.

Après avoir présenté les systèmes à paramètres distribués, nous avons abordé la modélisation du transfert de chaleur par conduction dans une tige métallique et la normalisation du modèle final. Ensuite, nous avons analysé la stabilité de l'équation de chaleur puis nous avons déterminé sa solution avec la méthode de séparation des variables. La fin du mémoire est consacrée à la commande « backstepping » de l'évolution de la température dans une tige métallique dont l'objectif est d'assurer la stabilité.

La commande backstepping constitue une technique de commande bien adaptée pour les systèmes à paramètres distribués. Cette approche permet de déterminer une loi de commande distribuée qui assure de bonnes performances en utilisant une démarche très simple. Les performances de cette stratégie dans la stabilisation des systèmes dynamiques ont été illustrées par une application à une équation de chaleur caractérisée par un terme de réaction qui représente la source d'instabilité. Les résultats obtenus ont montré que la commande « backstepping » a assuré la stabilisation de l'équation de chaleur.

Le travail présenté dans ce mémoire peut être étendu pour les systèmes à paramètres distribués fortement non linéaires.

BIBLIOGRHIE

Bibliographie

- [1] : **Ahmed. Maldi**, « Commande Des Systèmes Décrits par des Equations aux Dérivées Partielles Hyperboliques », Thèse de doctorat en automatique, UMMTO-FGEI ,2008.
- [2] : **A. el Jai** et **Marcel. Amoureux**, « Automatique des Systèmes Distribués », Edition Hermés, Paris1990.
- [3]:**R.F. Curtain** et **H. Zwart**, « An Informatique to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory.Springer-Verlag», New York, 1995;
- [4] : **Bensoussan, G. Da Prato, M.C. Delfour** et **S. K. Mitter** : « Representation and control of Infinite Dimentional Systems». Birkauser, Boston, 2006.
- [5] :**P. Barbary** et **W. Pelczewski** : « Commande Optimale des Systèmes Continus Déterministes». Masson, paris, 1985.
- [6] : **Georges KOEPFLER**, « Equations aux dérivées partielles »- M.I.M. 2003-2004.
- [7] : **Abdechafik DERKAOU**I, « Dimensionnement Pour Des Critères Dynamiques et Energétiques Des systèmes Mécatroniques Comportant Des Sous-systèmes à Paramètres Répartis – approche par méthode inverse–», Thèse de doctorat, institut national des sciences appliquées de Lyon, 2008.
- [8] : **KOANDA Mamadou, NAOUAR Naïm**, Stage L3 Magistère Mention Mécanique : « Conductivité Thermique Dans Les Matériaux Composites ». Université joseph Fourier, France, 2008.
- [9] : **Esteban Saatdjian, Sapientia**, « Les bases de la mécanique des fluides et des transferts de chaleur et de masse pour l'ingénieur ». Editions 2009, (ISBN 978-2-911761-85-0).
- [10] :**Jean-Luc Battaglia**, « transfert thermique dans les procédés de mise en forme des matériaux ». Édition Lavoisier, Paris, 2007.
- [11] : **BENHISSEN NACER EDDINE**, «Modélisation Des Couplages Electrothermiques Dans Les Composants Electroniques », Université Du QUÉBEC, 1998.

- [12] : **Grégoire. Allaire**, « Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation et à la simulation numérique », Edition de l'Ecole polytechnique-October2012, 91128 Palaiseau Cedex.
- [13] : **P.Y. agréé**. « Équation de la chaleur ». <http://www.Imm.Jussieu.fr/lagree.version> 13 mars 2010.
- [14]: **Miroslav Krstic**, « Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs», Society for industrial and applied mathematic, 2008.
- [15] : **D. Alazard** et **Hannah Michalska**, Note de cours : « Théorie de Lyapunov sur la stabilité », SupAéro, McGill University., https://cours.etsmtl.ca/.../aCours/Theorie_de_Lyapunov_sur_la_stabilite.
- [16] : **KanellaKopoulos, I., Kokotovic, P.V** et **Morse, A.S** (1991), « Systematic Design of Adaptive Controllers for Feedback Linearizable Systems », IEEE Transactions on Automatic Control, 36(11) ,1241.1253.
- [17] : **Feurer, A. & Morse, A. S.** (1978), «Adaptive control of single-input, single-output linear systems», IEEE Transactions On Automatic Control, 23(4), 557-569.
- [18]: **Tsinias, J.** (1989), «Sufficient lyapunov-like conditions for stabilization», Math. Contr.Signal. Syst. vol.2, pp. 343-357.
- [19] : **Kokotovic, P. V. & Sussmann, H. J.** (1989), «A positive real condition for global stabilization of nonlinear Systems», Systems & Control Lettres, 13, 125-133.
- [20]: **Jing Zhou, Changyun Wen**, «Adaptative Backstepping Control of Uncertain Systems», Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008