

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

Mémoire de Fin d'Etude
de MASTER ACADEMIQUE
Filière : GENIE ELECTRIQUE
Specialité : ENTRAINEMENTS ELECTRIQUES

Présenté par
Mouloud HAOUILI
Hafid SADI OUADDA

Mémoire dirigé par M.Ahmed NAIT OUSLIMANE et co-dirigé par M^{elle}.Zina LARABI

Thème

Modélisation par éléments finis d'un système
d'actionnement magnétothermique

Mémoire soutenu publiquement le 30 Septembre 2015 devant le jury composé de :

M Farid HOCINI
MCB, UMMTizi Ouzou, Président

M Ahmed NAIT OUSLIMANE
MAA, UMMTizi Ouzou, Rapporteur

M^{elle} Zina LARABI
Doctorante, UMMTizi Ouzou, Co- Rapportrice

M^{me} Ghania YOUSFI
M.A.B UMMTizi Ouzou, Examinatrice

M^{me} Feroudja BOUALI
M.A.A, UMMTizi Ouzou, Examinatrice

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier M.NAIT OUSLIMANE, notre promoteur, maitre assistant classe A à l'université MOULOUD MAMMERI de tizi ouzou, de nous avoir proposé ce sujet, et nous tenons à lui exprimer notre profonde gratitude pour ses précieux conseils.

Nos remerciements vont également à notre Co-promotrice M^{lle}.LARABI pour avoir accepté de codiriger ce travail, et pour les conseils et toute l'aide qu'elle nous a apporté pendant toute la durée de notre travail.

Nous remercions vivement le président et les membres de jury pour nous avoir honorés et acceptés d'examiner ce travail.

Nous remerciment vont enfin à tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à l'élaboration de notre modeste travail

Dedicaces

Je dédie ce modeste travail :

A papa et maman, Amel, Yani et à toute la famille sans qui rien ne serait possible

A tous mes amis en particulier achrikiw Mohand

Je le dédie particulièrement a Dalila, toi qui m'a soutenue tout au long de l'élaboration de ce manuscrit, puisque-tu trouver en ces quelques mots l'expression de ma profonde affection

Mouloud

**Ce modeste travail est dédié très spécialement à mes chers parents qui m'ont soutenu durant toutes ces années d'étude et de formation.*

**Je le dédie à mes chers frères (Gaya, Mazigh, Massil et Yacine) et adorable sœur (Taous).*

**A tout mes amis(es) et en particulier :Sidi Ahmed Katia ,Hamani Kamal, Mohamed Kessi , Belhedjar Ferhat et Massinissa Berrichi.*

**Et pour terminer, je tiens à rendre un vibrant hommage et exprimer toute ma reconnaissance et gratitude en dédiant ce travail à une personne hors norme, qui à su grâce à son cœur et son âme si pures remettre les pendules à l'heure et le train de la vie sur ses rails.*

SADI OUADDA HAFID

Liste des figures :

- Fig1.1. Les principes de base du chauffage par induction
- Figure I.2 : chauffage par induction de métaux
- Fig I.3: chauffage avec des inducteurs différents
- Fig I.4 : profondeur de pénétration en fonction des densités de courant et de puissance
- Fig.1.5 : tableau des profondeurs de pénétration pour différents matériaux
- Fig I.6 : four a creuset
- Fig I.7 : four à canal
- Fig II.1 : champ magnétique créé par un courant
- Fig II.2 : interface entre deux milieux à propriétés électrique et magnétique différentes
- Fig II.3 : Type de comportement d'un matériau au delà des hypothèses de linéarité.
- Fig II.4 : Illustration des différents comportements de la matière
- Fig II.5 : différentes techniques utilisant l'électricité pour produire la chaleur
- Fig II.6 : Volume élémentaire de fourrier
- Fig II.7 : capacité calorifique du cuivre
- Fig II.8 : Schéma d'un corps comportant une source interne de chaleur et schéma équivalent du bilan thermique
- Fig IV.1 : géométrie 3D du système à réaliser
- Fig IV.2 : géométrie 2D en axisymétrique du système à réaliser
- Fig IV.3 : fenêtre du navigateur des modules prédéfinis
- Fig IV.4 : fenêtre pour paramétrer le solveur
- Fig IV.5 : géométrie du model à réaliser
- Fig IV.6 : fenêtre de paramétrage des matériaux
- Fig IV.7 : Conditions aux limites du système électromagnétique
- Fig IV.8 : Conditions aux limites du système thermique
- Fig IV.9 : fenêtre pour choisir le type de solveur
- Fig IV.10 : fenêtre de paramétrage du maillage et le modèle maillé
- Fig IV.11 : répartition de la température dans le domaine d'étude
- Fig IV.12 : évolution de la température pour différents entrefer (plan de fusion le plus rapide)
- Fig IV.14 : évolution de la température pour différentes épaisseurs du creuset
- Fig IV.15 : évolution de la température pour différentes épaisseurs du creuset
- Fig IV.16 : évolution de la température pour différentes position verticale des conducteurs
- Fig IV.17 : évolution de la température pour différentes position verticale des conducteurs
- Fig IV.18 : répartition de la température pour différentes position des conducteurs
- Fig IV.19 : répartition de la température dans la charge pour le modèle optimisé
- Fig IV.20 : évolution de la conductivité électrique en fonction de la température
- Fig IV.21 : La répartition du potentiel magnétique dans la charge a $T=T_f$
- Fig IV.22 : La répartition de la densité d'énergie totale dans la charge a $T=T_f$
- Fig IV.23 : L'évolution de la temperature dans les cas linéaire et non linéaire
- Fig IV.24 : évolution de la température pour différents courants injectés
- Fig IV.25 : répartition du potentiel magnétique pour différents courants injectés
- Fig IV.26 : répartition de la densité d'énergie totale pour différents courants injectés
- Fig IV.27 : évolution de la température pour différentes fréquences des courants injectés

- Fig IV.28 : répartition du potentiel magnétique pour différentes fréquences des courants injectés
- Fig IV.29 : répartition de la densité d'énergie totale pour différentes fréquences des courants injectés

Sommaire :

Introduction générale	1
------------------------------------	---

Chapitre I : le chauffage par induction

1 : introduction	3
1.1 : Principes de fonctionnement du chauffage par induction	3
1.2 : Les avantages du chauffage par induction	4
1.3 : Inconvénients du chauffage par induction	6
1.4 : Quelques applications de la technique de chauffage par induction	6
1.5 : L'équipement	7
1.5.1 : Aspects génériques.....	7
1.5.2 : Caractéristiques électriques du chauffage par induction.....	7
1.6 : Les fours à induction.....	11
1.6.1 : les fours à creuset.....	11
1.6.2 : les fours a canal.....	12
1.6.3 : Fours à arcs	12
1.6.4 : Four à résistance.....	12
1.7 : conclusion	13

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

2 : Introduction aux phénomènes électromagnétiques	14
2.1 : Présentation des phénomènes électromagnétiques.....	14
2.2 : Présentation de quelques théorèmes et lois importantes	16
2.3 : Les équations de Maxwell.....	18
2.4 : Formulation du problème électromagnétique	22
2.4.1 : Cas d'une alimentation en courant harmonique.....	24
2.4.2 : Cas d'un dispositif alimenté en courant transitoire.....	25
3 : Modélisation des phénomènes élastiques.....	25
3.1 : Introduction	25
3.2 : Comportement de la matière	26

3.2.1 : Comportement élastique.....	26
3.2.2 : Comportement plastique	26
3.2.3 : Tenseur d'élasticité	27
3.2.4 : Modèles d'élasticité en 2D et en 3D	29
4 : Transfert de chaleur.....	31
4.1 : Présentation de l'électrothermie	31
4.2 : Les modes de transferts de chaleur principaux	32
4.2.1 : La loi de fourrier	32
4.2.2 : Transfer de chaleur par conduction.....	32
4.2.3 : Transfer de chaleur par convection	33
4.2.4 : Transfert de chaleur par rayonnement.....	33
4.2.5 : la capacité calorifique (chaleur massique)	34
4.3 : Equation de conduction thermique.....	35
5 : Les différents modes de couplage	36
5.1 : Mode de couplage faible ou indirect.....	36
5.2 : Mode de couplage fort ou direct	36
6 : conclusion	36

Chapitre III : Formulation éléments finis des différents phénomènes couplés

3 : Différentes méthodes de résolutions des équations aux dérivées partielles.....	37
3.1 : Méthode des Différences Finis (MDF)	37
3.2 : Méthode des intégrales de frontières (MIF).....	39
3.3 : Méthode des volumes finis (MVF)	39
3.4 : Méthode des éléments finis (MEF)	40
3.4.1. La méthode variationnelle	41
3.4.2. Formulation résidus pondérés ou méthode projective.....	42
3.2.1. Les conditions aux limites.....	42
3.2.2. Condition de Dirichlet.....	42
3.2.3. Condition de Neumann.....	42

3.5 : Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis	43
4 : Formulations éléments finis des modèles d'équations électromagnétiques et thermiques ..	43
4.1 : L'équation aux dérivées partielles	43
4.2 : Passage de l'équation aux dérivées partielles à une intégrale	44
4.3: Discrétisation du domaine	44
4.3.1 : Eléments de références	44
4.3.1.1 : Eléments de référence a 1D	45
4.3.1.3 : elements de reference a 2D	45
4.3.1.3 : elements de reference a 3D	46
4.3.2 :Fonction d'interpolation	46
4.4 :Ecriture matricielle	46
4.5 :Résolution du système matriciel	46
4.6 :Utilisation du vecteur solution [A]	47
5 :Formulation éléments finis de l'équation magnétodynamique en terme de potentiel vecteur A en coordonnées cartésiennes 2D	47
6 : Formulation éléments finis de l'équation de conduction de chaleur en coordonnées cartésiennes 2D	49
7 : système algébrique pour la résolution de l'équation du couplage magnétothermique	50
7.1 : Méthode de résolution des systèmes matriciels	50
8 : Le modèle cylindrique axisymétrique en électromagnétisme	52
8.1 : Coordonnées cylindriques	52
8.2 : Cas des problèmes axisymétriques	52
9 : L'équation magnétodynamique d'un système cylindrique axisymétrique	53
9.1 : Régime harmonique	55
Conclusion	56

Chapitre IV : simulation du couplage magnétothermique

4.1 : introduction :	57
4.2 : Présentation de l’outil informatique utilisé	57
4.3 : Comsol Multiphysics	58
4.4 : Présentation du problème	58
4.5 : Construction du model sur COMSOL Multiphysics	58
4.5.1 :Choix de la dimension	58
4.5.2 : Choix des modules physique	60
4.5.3.Choix du type d’étude (paramétrage du solveur)	61
4.5.4.Construction de la géométrie	61
4.5.5. Paramétrage des modules physiques (choix des matériaux)	62
4.5.6 : Conditions aux limites	62
4.5.7 : choix du solveur	63
4.5.8 : Choix du maillage	64
4.6 : Résultat de la simulation	65
5. Exploitation des résultats	65
5.1. Test 1 : variation de l’entrefer	65
5.2 Test 2 : variation de l’épaisseur du creuset	67
5.3 :Test 3 : variation de la position verticale de l’inducteur	69
5.4 : Vérification de l’homogénéité de la fusion dans toute la charge	72
5.5 : Comparaison entre le cas linéaire et non linéaire	73
5.6 : Influence des paramètres électriques sur l’évolution de la fusion	73
5.6.1 : Influence des courants de surface injectés	73
5.6.2 : Influence de la fréquence des courants injectés	75
6 : Conclusion	77
Conclusion générale	78

Introduction générale

L'induction électromagnétique est une technique de chauffage pour les matériaux conducteurs d'électricité (métaux), fréquemment utilisée pour de nombreux procédés thermiques tels que la fusion ou la chauffe des métaux. [01].

La fusion des métaux par induction électromagnétique s'effectue généralement en chauffant le métal dans un creuset fabriqué à partir d'un matériau réfractaire non conducteur. La masse de métal placée dans le creuset est fondue jusqu'à atteindre sa forme liquide, cette technique est très utilisée pour les aciers et alliages non ferreux de haute qualité destinés à des opérations de moulage. Le métal liquéfié est déversé dans une cavité ayant la forme souhaitée. Le métal se solidifie avec un minimum de retrait. [2]

Notre travail dans ce mémoire consiste à développer un modèle magnétothermique en 2D d'un système de chauffage par induction utilisé pour fuser l'or. Ce modèle sera élaboré sous logiciel Comsol Multiphysics dans sa version 3.5. Ce logiciel utilise la méthode des éléments finis MEF pour résoudre les équations aux dérivées partielles.

Dans le premier chapitre, nous nous allons revoir grossièrement l'histoire de la technique de chauffage par induction, nous nous intéresserons à quelques généralités sur le chauffage par induction : principe de fonctionnement, domaine d'utilisation, avantages et inconvénients, l'équipement et les caractéristiques électriques du chauffage par induction et nous terminerons en présentant les fours à induction.

Dans le deuxième chapitre, on mettra l'accent sur l'étude des différents phénomènes intervenants dans notre étude. On s'intéressera d'abord aux phénomènes électromagnétiques: Théorèmes et lois fondamentaux, nous nous étalerons sur les équations de Maxwell, puis les propriétés et les comportements électromagnétiques des matériaux. Finalement les conditions de passage d'un milieu vers un autre et l'énergie électromagnétique ont été abordées.

Puis nous présenterons quelques notions les phénomènes élastiques : le comportement de la matière, le tenseur d'élasticité et son model 2D et 3D. Nous nous pencherons aussi sur l'étude des phénomènes thermiques : les modes de transfert de chaleur, nous donnerons ensuite l'équation de la conduction thermique.

Nous parlerons enfin des différents modes de couplage entre les phénomènes électromagnétiques et thermiques.

Dans le troisième chapitre, on présentera les modèles numériques et en particulier les structures axisymétriques, ainsi que les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles; on s'intéressera aux différentes méthodes de discrétisation ainsi que les modes de couplage magnétothermique existants.

Nous terminerons dans le quatrième chapitre par présenter le logiciel Comsol Multiphysics comme outil de simulation puis on traitera le problème de chauffage par induction; pour le couplage, on développera un modèle magnétothermique en bidimensionnelle. L'étude portera sur l'influence de certains paramètres sur la performance du système en particulier le

couplage inducteur-charge et l'épaisseur du creuset ainsi la position verticale d'inducteur. L'homogénéité de la fusion dans la charge est en suite traitée et en terminera ce travail par une étude de l'influence de la densité de courant d'alimentation et de sa fréquence sur la température transmise dans la charge. L'étude se fera sur un plan axisymétrique.

Nous terminerons notre mémoire par une conclusion générale qui résume l'ensemble de notre étude, les résultats obtenus puis on donnera quelques recommandations et perspectives dans ce domaine de recherche.

Chapitre I : le chauffage par induction.

1. introduction

Un chauffage par induction est une technique de chauffage reposant sur l'induction électromagnétique. Son avantage est de chauffer des matériaux sans contact avec la source d'énergie.

C'est une technique sans contact donc, rapide, efficace et reproductible de chauffage des métaux et autres conducteurs : c'est un processus utilisé pour souder, tremper ou fusionner des métaux et autres matériaux conducteurs. Pour les processus de fabrication modernes, le chauffage par induction offre une combinaison intéressante de vitesse, consistance, contrôle et efficacité énergétique.

Les principes de base du chauffage par induction ont été compris et appliqués dans les processus industriels depuis les années 1920. Au cours de la Deuxième Guerre Mondiale, la technologie s'est rapidement développée pour répondre à l'urgence de trouver en temps de guerre un processus rapide et fiable pour tremper les pièces métalliques des moteurs.

Plus récemment, l'intérêt pour les techniques de production allégée ou à flux tendu et l'amélioration du contrôle qualité ont fait redécouvrir la technologie de l'induction, parallèlement au développement de sources d'alimentation d'induction à l'état solide commandées avec précision [1]

1.1.Principes de fonctionnement du chauffage par induction

Il consiste à plonger le corps à chauffer dans un champ électromagnétique variable dans le temps, et à dissiper sous forme de chaleur l'énergie entrant dans le corps.

L'application d'un courant électrique alternatif sur l'enroulement primaire d'un transformateur crée un champ magnétique alternatif. Suivant la Loi de Lenz-Faraday, si le secondaire du transformateur se trouve à l'intérieur du champ magnétique, un courant électrique sera induit.

Dans une configuration de chauffage par induction de base, une source d'alimentation envoie un courant alternatif à travers un inducteur (souvent une bobine en cuivre) et la pièce à chauffer (à usiner) est placée à l'intérieur de l'inducteur. L'inducteur sert de transformateur primaire et la pièce à chauffer agit de court-circuit secondaire. Lorsqu'une pièce métallique est placée à l'intérieur de l'inducteur et rentre dans le champ magnétique, des courants de Foucault circulants sont induits à l'intérieur de la pièce.

Chapitre I : le chauffage par induction.

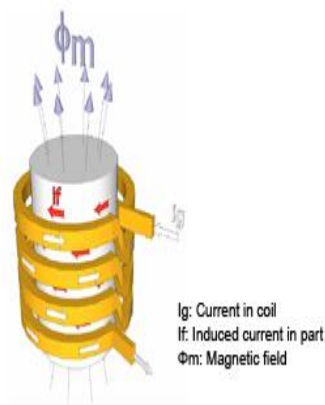


Fig1.1. Les principes de base du chauffage par induction

Comme indiqué sur la figure 1.1 ci-dessus, ces courants de Foucault fluent contre la résistivité électrique du métal, générant de la chaleur précise et localisée sans aucun contact direct entre la pièce et l'inducteur. Ce chauffage a lieu aussi bien avec des pièces magnétiques que non magnétiques et est dénommé souvent comme « effet Joule », de la première loi de Joule, une formule scientifique exprimant la relation entre la chaleur produite et le courant électrique passant à travers un conducteur.

1.2. Les avantages du chauffage par induction [1] [2]

Cette technique permet de :

- de régler la chaleur à diffuser de manière précise. La chaleur se transmet beaucoup plus rapidement le long de l'objet qu'une chaleur par convection traditionnelle ;
- de chauffer des parties inaccessibles, comme par exemple des morceaux de métal, encastrés dans du bois, du PVC, ou d'autres, y compris le vide.
- une économie d'espace que les installations pour chaleur par convection dans la mesure où la chaleur est présente elle-même dans la matière, la radiation thermique est alors très petite ;
- de meilleures conditions de travail sans saleté ni fumée par rapport aux installations traditionnelles de chauffage ;
- d'avoir une rentabilité beaucoup plus importante, conditionnée par une moindre perte de chaleur et d'émission.

Ces avantages cités ci-dessus engendrent :

Chapitre I : le chauffage par induction.

- Productivité accrue

La productivité peut être augmentée grâce à la rapidité du processus d'induction ; la chaleur se développe directement et instantanément à l'intérieur de la pièce. Le démarrage est virtuellement instantané ; aucun cycle de chauffe ni de refroidissement n'est nécessaire. Le processus de chauffage par induction peut être complété sur le sol de l'installation, à côté de la machine de formage à chaud ou à froid, au lieu d'avoir à envoyer les lots de pièces à une zone de chauffage éloignée ou de les confier à un sous-traitant.

- Efficacité énergétique

Ce système au rendement énergétique exceptionnel convertit jusqu'à 90% de l'énergie dépensée en chaleur utile, alors que les fours discontinus n'affichent qu'un rendement énergétique de 45%. Dans la mesure où l'induction ne demande aucun cycle de chauffe ni de refroidissement, les pertes de chaleur en situation de maintien sont réduites au strict minimum.

- Processus de commande et d'automatisation

Le chauffage par induction élimine les problèmes de discontinuité et de mauvaise qualité associés aux méthodes de chauffage à flamme, au chalumeau et autres. Une fois le système est bien calibré et monté, il n'a plus de conjecture ni de variation ; le modèle de chauffage est reproductible et continu.

- Qualité du produit

Avec l'induction, la pièce à chauffer n'entre jamais en contact direct avec une flamme ou toute autre source de chaleur ; la chaleur est induite à l'intérieur de la pièce par un courant électrique alternatif. Par conséquent, la déformation du produit est évitée et les taux de rejet sont réduits au strict minimum. Pour maximiser la qualité du produit, la pièce peut être isolée dans une chambre blindée placée sous vide ou placée dans un lieu caractérisé par un air ambiant inerte ou réduit afin d'éliminer les effets de l'oxydation.

- Énergie verte

Les systèmes de chauffage par induction ne brûlent pas les combustibles fossiles traditionnels ; l'induction est un processus propre, non polluant, respectueux de l'environnement. Un système de chauffage par induction améliore les conditions de travail du personnel en éliminant la fumée, les pertes de chaleur, les émissions nocives et la pollution sonore. Le chauffage par induction est efficace et sans risque, sans flamme pouvant mettre en danger l'opérateur ou compliquer le processus. Les matériaux non conducteurs ne sont pas affectés et peuvent être situés à proximité de la zone de chauffage sans aucun risque.

1.3 Inconvénients du chauffage par induction :

La technique du chauffage par induction peut engendrer :

- lors de mauvaises manipulations, d'autres objets peuvent être involontairement chauffés. Pour y remédier, on utilise le procédé d'émulsion ou le refroidissement par eau ;
- Des coûts d'acquisition élevés pour les fortes puissances ;
- Des champs électromagnétiques peuvent apparaître ce qui peut alors perturber l'environnement, lorsque les isolations sont mauvaises ou bien lorsqu'il y a une protection HF. [1]

1.4 Quelques applications de la technique de chauffage par induction :

Le procédé du chauffage par induction est de plus en plus utilisé et ceci de manière croissante dans les milieux industriels, on l'utilise notamment pour :

- le dégraissage, le décapage, le séchage,
- la galvanisation et l'étamage,
- la cuisson de vernis et peintures, la plastification.
- la polymérisation de vernis intérieur sur tubes aérosols,
- la cuisson de joints d'étanchéité,
- la polymérisation de vernis sur fils et méplats de cuivre,

On la retrouve aussi dans certaines applications demandant de très hautes températures de chauffage (jusqu'à 2500°C) comme :

- la fusion de cristal,
- la fusion de verres spéciaux ou techniques,
- la fusion d'oxydes réfractaires,
- l'élaboration de phosphates,
- la Vitrification de déchets



Figure I.2 : chauffage par induction de métaux

1.5 L'équipement

1.5.1 Aspects génériques [3]

L'ensemble constitué de la bobine inductrice et de la charge se comporte, vu depuis la source d'alimentation, comme un circuit globalement inductif. Afin de réduire la consommation d'énergie réactive de ce circuit, il convient d'y adjoindre des condensateurs pour relever le facteur de déplacement.

L'alimentation est assurée par un convertisseur de fréquence permettant de faire varier la fréquence d'alimentation du circuit.

Les installations de chauffage inductif doivent inclure un système de refroidissement pour le convertisseur de fréquence et pour l'inducteur, ainsi qu'un système de transport de l'énergie et un système de commande et de mesure adapté.

1.5.2 Caractéristiques électriques du chauffage par induction

Pour les applications industrielles, deux grandeurs caractérisent l'efficacité thermique et énergétique de l'induction:

- l'effet de peau, qui caractérise la répartition des courants induits dans la pièce.
- la puissance dissipée dans la pièce qui caractérise le phénomène électrique.

De nombreux paramètres interviennent:

- la fréquence du courant et le champ inducteur;
- la nature magnétique et thermique du matériau;
- le couplage entre l'inducteur et la pièce à chauffer (entrefer, longueurs respectives...);
- le type d'inducteur et les caractéristiques géométriques ainsi que nature des conducteurs [07].

- Alimentation énergétique et générateur :

L'alimentation électrique peut être de différente nature selon la fréquence d'alimentation de l'installation.

Pour les installations à 50Hz : La charge est directement connectée au transformateur. Le transformateur peut être réglé pour ajuster le courant à l'impédance de la charge.

Chapitre I : le chauffage par induction.

- Convertisseur de fréquence à thyristors :
 - Rendement: 90-97%
 - Plage de fréquence : 100Hz-10kHz
 - Plage de puissance : jusqu'à 10MW
- Convertisseur de fréquence à transistors :
 - Rendement: 75-90%
 - Plage de fréquence : jusqu'à 500kHz
 - Plage de puissance : jusqu'à 500kW
- Convertisseur de fréquence à lampe à vide :
 - Rendement: 55-70%
 - Plage de fréquence : jusqu'à 3000kHz
 - Plage de puissance : jusqu'à 1200kW

- Les inducteurs

Pour la plupart des applications, l'inducteur est un tube en cuivre creux se présentant comme un enroulement venant couvrir l'objet à chauffer. Toutefois, l'inducteur peut être placé de différentes façons selon l'application. L'inducteur est le plus souvent en cuivre, afin de limiter les pertes électriques, il est refroidi par eau, dans la plupart des cas [08].

Les géométries d'inducteurs peuvent être très variées, allant de la simple spire à des inducteurs multi-spires de forme complexe (voir figure I.6)



Fig I.3: chauffage avec des inducteurs différents

- Profondeur de pénétration

Une caractéristique générale des courants alternatifs est de ne pas utiliser toute la surface utile des conducteurs pour circuler. Il apparaît, en effet, qu'ils se concentrent sur la périphérie des

Chapitre I : le chauffage par induction.

conducteurs : c'est l'effet de peau. Ainsi, les courants de Foucault induits dans le matériau à chauffer sont plus importants en périphérie qu'au cœur de l'objet. Il en résulte que la chaleur est principalement générée à l'extérieur. L'effet de peau est caractérisé par la profondeur de pénétration δ , qui se définit comme l'épaisseur de la couche superficielle dans laquelle circule 87% de la puissance générée (voir figure I.4).

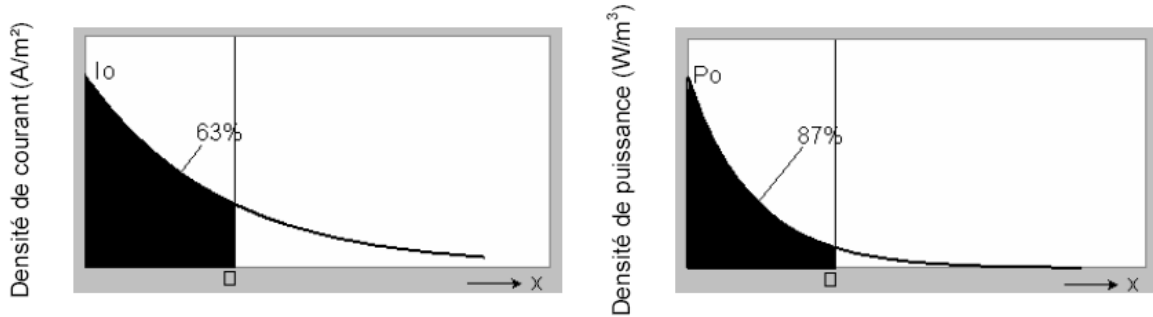


Fig I.4 : profondeur de pénétration en fonction des densités de courant et de puissance

La profondeur de pénétration peut être déduite des équations de Maxwell. Pour une charge cylindrique d'un diamètre très supérieur à d , la formule est :

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi \mu f}} \quad (1.1)$$

Avec :

ρ : Résistivité électrique

μ : Perméabilité électrique

f : Fréquence d'alimentation

Il apparaît que la profondeur de pénétration dépend à la fois des caractéristiques du matériau à chauffer (ρ , μ), et de la fréquence du courant alternatif le parcourant. La fréquence est donc un levier de contrôle de la profondeur de pénétration.

Le tableau suivant regroupe des ordres de grandeur de d en fonction de plusieurs matériaux pour différentes fréquences.

Chapitre I : le chauffage par induction.

δ en [mm]	Acier 20°C	Acier 20°C	Cuivre 20°C	Cuivre 900°C	Graphite 20°C
ρ [$\mu\Omega.m$] →	0,16	0,16	0,017	0,086	10
μ_r [-] →	40	100	1	1	1
Fréquence ↓					
50 Hz	4,50	2,85	9,31	20,87	225,08
100 Hz	3,18	2,01	6,58	14,76	159,15
1 kHz	1,01	0,64	2,08	4,67	50,33
10 kHz	0,32	0,20	0,66	1,48	15,92
100 kHz	0,10	0,06	0,21	0,47	5,03
1 MHz	0,03	0,02	0,07	0,15	1,59

Fig.1.5 : tableau des profondeurs de pénétration pour différents matériaux et différentes fréquences

D'après la formule (1.1) ci-dessus, il apparaît que la profondeur de pénétration est inversement proportionnelle à la racine carré de la perméabilité magnétique μ_r .

Pour des matériaux non magnétiques tels que le cuivre ou l'aluminium, le coefficient de perméabilité magnétique $\mu_r = 1$, alors que les matériaux ferromagnétiques (tels que le fer et de nombreux types d'acier) ont, au contraire, un coefficient de perméabilité beaucoup plus élevé. Ces matériaux offrent donc des profondeurs de pénétration beaucoup moins importantes.

La perméabilité magnétique des matériaux ferromagnétiques dépend fortement de la nature du matériau et des conditions imposées (température, intensité du champ magnétique, saturation). Au-delà de la température de Curie, la perméabilité chute brutalement à $\mu_r = 1$, ce qui engendre une hausse rapide de la profondeur de pénétration.

1.6 Les fours à induction :

En ce qui concerne la fusion, on distingue généralement deux types de fours de fusion par induction : les fours à creuset et les fours à canal.

1.6.1 les fours à creuset :

Dans le cas d'un four à creuset la surface intérieure du creuset est constituée d'un revêtement réfractaire, qui contient le matériau à porter à la fusion et est entouré par la bobine inductrice (figure I.6).

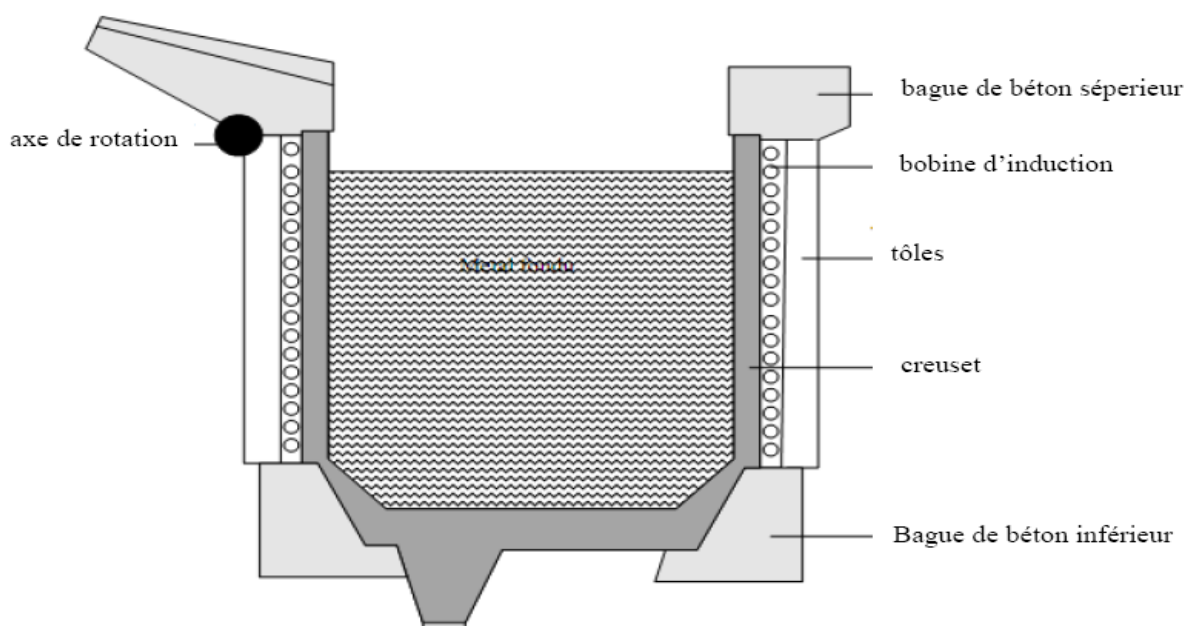


Fig I.6 : four a creuset

Les fours à creuset sont utilisés dans des applications à 50Hz mais aussi à moyennes fréquences. Les gammes de puissance, jusqu'à 10MW pour des applications standards, et jusqu'à 1200kW/ton pour des applications spécifiques, sont très élevées, et permettent de réduire considérablement les temps de fusion.

Les fours à creuset basse fréquence (50Hz) sont dédiés aux applications de taille importante (en termes de puissance et de capacité). Les applications à fréquences moyennes sont de taille plus modeste, mais offrent de plus grandes flexibilités de production et sont plus compactes.

1.6.2 Fours à canal :

Dans le cas d'un four à canal, le réservoir est en communication avec un canal dont les deux extrémités débouchent dans le réservoir. La bobine d'induction est entourée par le canal de communication. Du point de vue électrique, ceci est équivalent à un transformateur avec circuit magnétique fermé, dont le canal constituerait le secondaire (figure I.7).

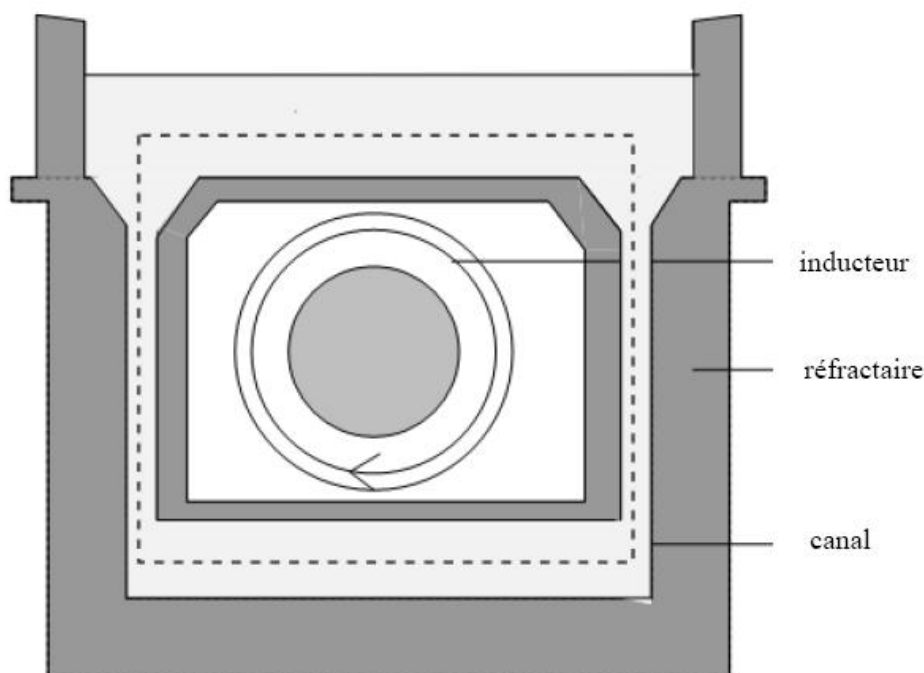


Fig I.7 : four à canal

Le métal s'échauffe dans le canal par effet Joule, sous l'action des courants induits. La circulation du métal dans le canal s'effectue par effet de thermosiphon et par effet électromagnétique.

Cette migration du métal entre le canal et le creuset crée un léger brassage (beaucoup plus faible que dans le cas des fours à creuset). Pour mettre en fonctionnement le four à canal, on doit d'abord remplir le four avec du métal puis mettre les inducteurs sous tension [03][05][06].

1.6.3 Fours à arcs :

A l'origine, le four à arcs était utilisé essentiellement pour la production des aciers spéciaux, il permet, non seulement d'atteindre des températures élevées (supérieures à 1650°C, mais encore de réaliser un affinage sur mesure [04]

1.6.4. Four à résistance

Un courant électrique important passe dans une résistance il y'a libération de chaleur par effet joule. Le chauffage de la charge se fait par convection, rayonnement et conduction.

Chapitre I : le chauffage par induction.

Il existe différents types de fours a résistance [04]

- Thermoplongeur
- A bassin

1.7. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques généralités sur le chauffage par induction : principe de fonctionnement, avantages et inconvénients, quelques applications dans l'industrie, les équipements nécessaires, nous avons terminé ce chapitre en présentant les fours à induction à canal et à creuset

2. Introduction aux phénomènes électromagnétiques

L'alimentation de l'inducteur par un courant alternatif permet d'induire des courants électriques dans l'ensemble des éléments conducteurs d'électricité. L'amplitude et la direction de ces courants dépendent de la position et de la géométrie de l'élément considéré. Dans les éléments métalliques, ils ont néanmoins une propriété commune : ils se développent uniquement à la surface en raison de l'effet de peau marqué.

La complexité des phénomènes entrant en jeu dans le chauffage par induction a imposé de recourir aux méthodes numériques pour permettre le dimensionnement des installations. La maîtrise des techniques de résolution des équations aux dérivées partielles couplées (électromagnétisme, thermique, mécanique des fluides, etc.) a fait de nombreux et spectaculaires progrès. Un arsenal de méthodes numériques a été développé pour adapter la meilleure au type de problème à résoudre. Ainsi, par exemple, le chauffage d'un matériau amagnétique en haute fréquence ne se traite pas comme celui d'un lopin d'acier en sidérurgie.

Le développement des méthodes numériques (différences finies, volumes finis, éléments finis, intégrales de frontière, etc.) est heureusement accompagné par les avancées du matériel informatique. Des programmes qui nécessitaient autrefois des calculateurs complexes et onéreux tournent à présent sur les PC d'un coût modeste. Cela a contribué à faciliter la mise au point de logiciels [09]

2.1. Présentation des phénomènes électromagnétiques :

Il existe en électromagnétisme différentes grandeurs le caractérisant, en voici les plus usuelles :

- Le champ magnétique :

Quand une particule de charge électrique se déplace, elle subit en plus de la force électrique \vec{F}_e une force magnétique \vec{F}_m , qui est dirigée perpendiculairement à la vitesse \vec{V} de la particule et à une autre propriété vectorielle de l'espace, qu'on appelle champ d'induction magnétique \vec{B}

$$\vec{V} \vec{B} = \frac{\vec{F}_m}{q} \quad (2.1)$$

- Le champ électrique :

Une particule immobile de charge électrique q subit une force \vec{F}_e produite par l'ensemble des autres charges électriques, cette force est proportionnelle à la charge q et par conséquent le quotient $\frac{\vec{F}_e}{q}$ ne dépend pas de la particule considérée, mais dénote une propriété locale de

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

l'espace que l'on appelle champ électrique, de même que la force dont il découle, il s'agit d'une grandeur vectorielle définie par une amplitude et une direction qui varie généralement avec le temps et la position

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} \quad (2.2)$$

- Permittivité électrique :

C'est la caractéristique décrivant la capacité du milieu à affaiblir les forces électrostatiques

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (2.3)$$

Avec :

ε_0 : Permittivité électrique du vide $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$ [F/m]

ε_r : Permittivité électrique relative du milieu.

ε : Permittivité électrique absolue du milieu [F/m]

- La perméabilité magnétique :

La perméabilité est la constante dimensionnelle spécifique du milieu ambiant, intervenant dans le calcul de la force d'interaction entre deux courants, elle a pour symbole μ et pour dimension H/m.

Dans le vide elle a pour valeur : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m.

Il s'agit d'une constante fondamentale, au même titre que la permittivité électrique a vide ε_0

On a donc la relation :

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (2.4)$$

- Densité de courant électrique :

La densité de courant est une grandeur vectorielle, dont le sens et la direction sont définis par le trajet des charges dans le conducteur

Inversement le courant est l'intégrale de surface de la densité de courant :

$$I = \int_s J dA \quad (2.5)$$

Dans certains milieux, les charges électriques peuvent se déplacer librement. L'application d'une force électrique fait alors bouger les charges et crée un courant électrique dont on définit la densité par la relation

$$J = \sum_i \rho_i V_i \quad (2.6)$$

La sommation porte sur tous les types de particules chargées qui se déplacent dans le milieu considéré

Avec :

ρ_i : Densité moyenne de charges

V_i : Vitesse moyenne de charges

J : Densité de courant électrique [A/m²]

2.2. Présentation de quelques théorèmes et lois importantes :

Différents chercheurs en commençant par *Hans Christian Ørsted*, qui en fut le premier à montrer qu'un courant électrique parcourant un fil influence l'aiguille d'une boussole située à proximité sans pouvoir expliquer les causes, a *James Clerk Maxwell* qui en 1873, unifie le champ magnétique et le champ électrique, au sein de la théorie de l'électromagnétisme, jusqu'au équipes internationales actuelle qui travaillent à l'amélioration des matériaux (notamment les aimants permanents tel le néodyme-fer-bore, les plus puissants aimants permanents connus à ce jour (35 MGOe soit environ 1,25 tesla).[02]

A travers l'histoire de l'évolution des recherches dans ce domaine, différents théorèmes furent démontré. Ci-dessous, les plus importants :

- Théorème de gauss :

Le flux du champ électrique a travers une surface fermée orientée de manière quelconque est égal à $\frac{1}{\epsilon}$ fois la charge électrique Q contenue dans le volume délimité par cette surface et sur la surface elle-même :

$$\oint_s \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon} \quad (2.7)$$

Cette équation est la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss (aussi appelée forme locale de la loi de Gauss) : $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

L'intérêt du théorème de gauss est qu'il exprime de manière concise la relation entre la charge et le champ électrique qu'elle crée.

Il existe une équation similaire pour le magnétisme qui est donnée sous la forme suivante :

$$\iint_s \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (2.8)$$

Elle stipule que le flux magnétique a travers une surface fermée orientée est nul, cela s'explique par l'inexistence de charge magnétique.

- Théorème d'Ampère :

La circulation du champ magnétique sur le contour d'une surface fermé qui délimite une surface (S) est égale au flux du courant qui le traverse :

$$\int_c \vec{H} d\vec{l} = I \quad (2.9)$$

I est la somme algébrique des courants qui traversent la surface sur laquelle s'appuie le contour (c)

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

- Loi de Biot et Savart

Le théorème d'ampère ne permet de déterminer le champ magnétique que dans des situations très symétrique de telle sorte que l'on puisse évaluer facilement la circulation du champ magnétique. Ceci limite sa facilité d'application mais pas sa validité. [10]

Cette loi considère un circuit de forme quelconque dans lequel circule un courant I. chaque élément du circuit $d\vec{l}$ participe à créer un champ magnétique en tout point de l'espace suivant la relation suivante :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{u}}{r^2} \quad (2.10)$$

Où : \vec{u} représente le vecteur unitaire entre l'élément du circuit et le point considéré.

- La loi d'induction de Faraday :

La loi d'induction de Faraday précise que le champ électrique, la force électromotrice (f.e.m) dans un circuit sont égaux à la variation du flux magnétique qui le traverse :

$$e = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\lambda} = - \frac{d\phi}{dt} \quad (2.11)$$

Où :

$$\phi_B = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.12)$$

Cette relation introduit une relation entre le champ magnétique et le champ électrique, si le champ magnétique est constant, il n'y a pas création de champ électrique.

Et elle est valable quelque soit la cause de la variation du flux que ce soit un circuit fixe dans un champ variable, un circuit mobile dans un champ permanent, un champ dû à des courants ou à des aimants, ou qu'il y ait superposition de tous ces aspects [10].

- Loi de Lenz

Le signe (-) de la loi de Faraday a une signification bien précise donnée explicitement par la loi de Lenz. Cette loi a été formulée par Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865) en 1833 à Saint-Petersbourg et éclaire mieux le phénomène d'induction que Faraday avait observé en 1831. C'est une loi qualitative. Elle indique que le sens du courant induit lors d'un phénomène d'induction électromagnétique dans un circuit électrique est tel qu'il s'oppose à la variation du flux initial. Donc la force électromotrice induite s'oppose à l'action qui leur a donné naissance.

$$e = - \frac{d\phi}{dt} \quad (2.13)$$

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

- Les courants de Foucault :

Si nous avons un courant alternatif $I(t)$ parcourant un solénoïde de longueur l comportant N spires, ce courant donne naissance à une induction magnétique en son centre :

$$B_0 = \mu_0 \frac{N}{l} I(t) \quad (2.14)$$

Si l'on parle de cylindre métallique de perméabilité magnétique μ_r et de résistance R suivant l'axe solénoïde on a :

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{N}{l} I(t) \quad (2.15)$$

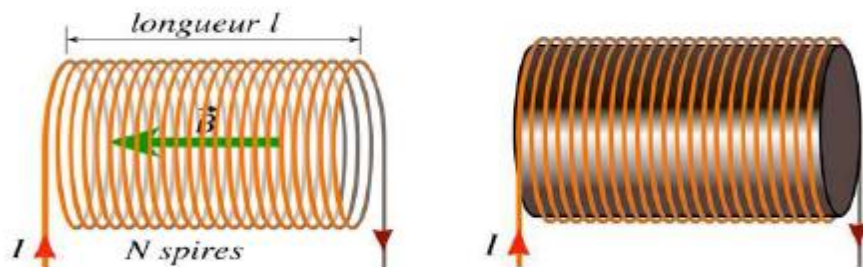


Fig II.1 : champ magnétique créé par un courant

2.3. Les équations de Maxwell :

Les quatre équations de Maxwell sont à la base de tout phénomène électrique et magnétique. Elles sont aussi fondamentales en électromagnétisme que les lois de Newton en mécanique. Les équations de Maxwell, complétées par la loi de la force de Lorentz permettent de faire une description complète de toutes les interactions électromagnétiques. Les équations de Maxwell spécifient que toute variation spatiale ou temporelle d'un champ électromagnétique en un point de l'espace entraîne ou est due à l'existence d'un autre champ au même point. Ces équations sont donc locales et sont valables dans n'importe quel système d'axes. [12][10]

Les équations de Maxwell sont comme suit :

- équation de Maxwell-Gauss :

Ce que dit cette loi, c'est juste que le champ électrique, est divergent depuis la source — donc les charges électriques — et est proportionnel à la distribution (ρ) de ces charges qui ont donné source à ce champ électrique : plus il y a de charges, plus le champ est important.

$$\text{Div } \vec{D} = \rho \quad (2.16)$$

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

- équation de Maxwell-Faraday :

Elle décrit comment la variation d'un champ magnétique peut créer (induire) un champ électrique. Ce courant induit est utilisé dans de nombreux générateurs électriques:

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.17)$$

- loi de conservation du flux (loi de Maxwell-Thomson):

Cette loi traduit le fait simple qu'il n'existe pas de monopôle magnétique. S'il est possible d'avoir des particules négatives ou positives électriquement, ce n'est pas possible avec des aimants. Un monopôle « sud » ou « nord » d'un aimant n'existe pas. Si l'on brise un aimant, on obtient deux aimants avec chacun son pôle nord et son pôle sud. Mathématiquement, la loi peut aussi être lue comme « les lignes de champ magnétique sortant d'un des pôles d'un aimant rentrent dans l'autre pôle ». Cette formulation explique mieux le fait que la somme de toutes les lignes de champs est égale à zéro : ce qui sort d'un côté rentre de l'autre et final on ne perd ni ne crée rien.

$$Div \vec{B} = 0 \quad (2.18)$$

- équation de Maxwell-ampere :

énonce que les champs magnétiques peuvent être générés de deux manières : par les courants électriques (c'est le théorème d'Ampère) et par la variation d'un champ électrique (c'est l'apport de Maxwell sur cette loi). Cet apport de Maxwell au théorème d'Ampère est particulièrement importante : elle signifie que la variation d'un champ magnétique crée un champ électrique et que la variation d'un champ électrique crée un champ magnétique. Par conséquent, ces équations permettent la circulation d'ondes électromagnétiques auto-entretenues, ou « rayonnement électromagnétique ».

Cette loi est énoncée comme suit :

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.19)$$

\vec{E} [V/m] et \vec{H} [A/m] : Champ électrique et magnétique.

\vec{D} [A.s/m] et \vec{B} [T] : Induction électrique et magnétique.

\vec{J} [A/m²] et ρ [c/m³] : Densités de courant de conduction et de charge électrique.

En résumé, les équations de Maxwell sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} Div \vec{D} = \rho \quad (2.16) \\ \overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.17) \\ Div \vec{B} = 0 \quad (2.18) \\ \overrightarrow{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.19) \end{array} \right.$$

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

Ces équations de Maxwell sont complétées par :

- La force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}) \quad (2.20)$$

- Loi d'ohm :

$$\vec{J} = \vec{J}_{ind} + \vec{J}_s \quad (2.21)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \sigma(\vec{u} \wedge \vec{B}) + \vec{J}_s \quad (2.22)$$

Avec :

\vec{J}_c : La densité du courant électrique de conduction [A/m²],

\vec{J}_s : Densité du courant source (excitation) [A/m²],

\vec{J}_{ind} : Densité de courant induit par variation du champ électrique [A/m²],

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: La densité du courant de déplacement négligeable à basse fréquence [A/m²],

\vec{J}_t : La densité du courant total [A/m²],

$\sigma \vec{E}$: Densité de courant induit dû au champ électrique E [A/m²],

$\sigma(\vec{u} \wedge \vec{B})$: Densité de courant induit dû au mouvement (A/m²),

\vec{E} : Vecteur champ électrique [V/m],

\vec{H} : Vecteur champ magnétique [A/m],

\vec{B} : Vecteur induction magnétique [T],

\vec{D} : Vecteur induction électrique (vecteur déplacement électrique) [C/m],

ρ : Densité volumique de charge électriques [C/m],

ε : Permittivité diélectrique [F/m],

ε_0 : Permittivité diélectrique à vide [F/m],

ν : Réductivité magnétique [m/H],

σ : Conductivité électrique [S/m],

u : Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptible de ce déplacer [m/s].

Ces équations ne suffisent pas à résoudre les problèmes électromagnétiques, elles sont complétées par des relations dites du milieu :

- Pour un milieu magnétique on a $\mu = \mu_0 \mu_r$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.23)$$

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

μ [H / m] : Perméabilité magnétique.

$\mu_0 = 4. \pi. 10^{-7}$ H /m : Perméabilité magnétique du vide.

μ_r : Perméabilité magnétique relative du milieu.

- Pour un milieu diélectrique on a $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.24)$$

Avec :

ϵ [F /m] : Permittivité électrique.

ϵ_r : Permittivité électrique relative du milieu considéré.

$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{10^{-9}}{36\pi}$ [F/m] : Permittivité électrique à vide.

$C = 3.108$ [m/s] : Vitesse de la lumière.

• Equation de continuité :

L'équation de continuité, appelée aussi équation de la conservation de la charge électrique est donnée par :

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.25)$$

ρ : Densité de la charge électrique.

• Relations de passage :

Les propriétés électriques et magnétiques de deux milieux voisins séparés par une surface, sont différentes nous définissons les conditions de passage en intégrant les équations de Maxwell entre deux points très proches de part et d'autre de cette surface ; on conclue aux résultats suivants [10]

La conservation de la composante tangentielle du champ électrique \vec{E}

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \wedge \vec{n} = 0 \quad (2.26)$$

La conservation de la composante normale de l'induction magnétique \vec{B}

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.27)$$

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

La discontinuité de la composante normale de l'induction électrique \vec{D} due aux charges surfaciques q_s si elles existent :

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \rho_s \quad (2.28)$$

La discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique si les courants surfacique existent.

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \wedge \vec{n} = \vec{K} \quad (2.29)$$

\vec{n} : étant la normale à l'interface séparant les deux milieux.

\vec{K} : Densité de courant portée par la surface de séparation.

ρ_s : Densité de charge électrique portée par la surface.

Nous représentons la surface de séparation de ces deux milieux par la figure suivante :

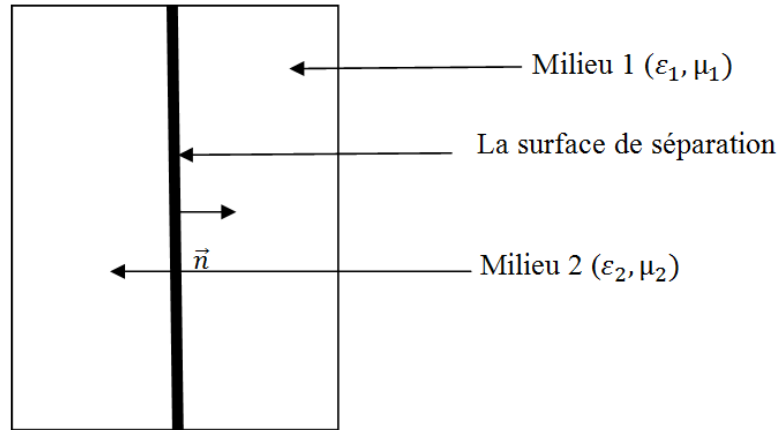


Fig II.2 : interface entre deux milieux à propriétés électrique et magnétique différentes

2.4. Formulation du problème électromagnétique :

On a les équations de maxwell suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div } \vec{D} = \rho \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{Div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Avec $\vec{J} = \vec{J}_{ind} + \vec{J}_s$

\vec{J}_{ind} : Densité de courant induit

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

\vec{J}_{exc} : Densité de courant d'excitation

Ces équations sont complétées par les suivantes :

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \text{ (loi d'ohm)}$$

Dans un milieu conducteur $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ car $\varepsilon_0 \ll \sigma$

La densité volumique de charge $\rho = 0$

On obtiendra les équations suivantes :

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (2.30)$$

$$\overrightarrow{div} \vec{B} = 0 \quad (2.31)$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.32)$$

$$\overrightarrow{div} \vec{D} = 0 \quad (2.33)$$

De 2.31 on a

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A} \quad (2.34)$$

Avec A : vecteur potentiel magnétique

En remplaçant (2.34) dans (2.32) on obtient :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{rot} \vec{A} \quad (2.35)$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\overrightarrow{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (2.36)$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} + \overrightarrow{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.37)$$

Le potentiel étant associatif on aura :

$$\overrightarrow{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.38)$$

L'expression (2.38) implique l'existence d'un potentiel scalaire V tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad} V$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad} V \quad (2.39)$$

En considérant la loi d'ohm ($J = \sigma E$) :

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

$$\vec{J} = \sigma \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad} V \right) \quad (2.40)$$

Ce qui permet de définir les deux densités de courants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_{ind} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{J}_s = -\sigma \overrightarrow{grad} V \end{array} \right. \quad (2.41)$$

$$\vec{J}_s = -\sigma \overrightarrow{grad} V \quad (2.42)$$

On remplace 2.40 dans 2.30 on obtient :

$$\overrightarrow{rot} \vec{H} = \sigma \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad} V \right) \quad (2.43)$$

La combinaison entre $B = \mu H$ et $B = \overrightarrow{rot} \vec{A}$ nous donne :

$$H = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot} (\vec{A}) \quad (2.44)$$

En remplaçant (2.44) dans (2.43) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot} (\overrightarrow{rot} (\vec{A})) &= \sigma \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad} V \right) \\ \overrightarrow{rot} \frac{1}{\mu} (\overrightarrow{rot} (\vec{A})) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\sigma \overrightarrow{grad} V \end{aligned} \quad (2.45)$$

On remplace l'expression $-\sigma \overrightarrow{grad} V = \vec{J}_s$ dans (2.45)

L'équation magnétodynamique en termes de potentiel vecteur magnétique A est:

$$\overrightarrow{rot} \frac{1}{\mu} (\overrightarrow{rot} (\vec{A})) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s \quad (2.46)$$

L'utilisation de ce modèle est très répandue dans l'étude des machines électriques des dispositifs du chauffage par induction, des transformateurs,...etc[14]

2.4.1 Cas d'une alimentation en courant harmonique :

On suppose que la perméabilité μ ne dépende pas de l'induction magnétique, si les courants d'excitation sont de nature alternative, on peut utiliser une représentation de Fresnel pour modéliser leur variation temporelle.

L'utilisation des nombres complexes permet alors de remplacer le terme $\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ par $\sigma j \omega A$ et $\omega = 2 \pi f$

Avec :

j : unité imaginaire ($j^2 = -1$)

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

ω : pulsation des sources [rd/s].

D’où l’équation (2.46) devient:

$$\overrightarrow{rot} \frac{1}{\mu} \left(\overrightarrow{rot} (\vec{A}) \right) + \sigma j \omega A = \vec{J}_s \quad (2.47)$$

2.4.2 Cas d’un dispositif alimenté en courant transitoire :

Dans le cas d’une alimentation en courant transitoire, le traitement du système d’équations caractéristiques, nécessite une discrétisation en pas à pas dans le temps (échantillonnage temporel).

Si un algorithme du type Euler explicite est adopté, nous aurons: à chaque pas de temps

Δt_i :

$$J_i = \frac{J_i - J_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \quad (2.48)$$

Nous aurons donc :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A_i - A_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = \frac{A_i - A_{i-1}}{\Delta t} \quad (2.49)$$

Les calculs seront donc effectués à chaque pas du temps Δt_i

3. Modélisation des phénomènes élastiques :

3.1. Introduction :

Une connaissance familière des notions de mécanique élémentaire est indispensable à la compréhension des phénomènes électriques.

Nous agissons mécaniquement sur les corps qui nous entourent en les poussant ou en les tirants. De même les animaux, les machines exercent des actions mécaniques ces dernière peuvent êtres:

Des actions mécaniques de contact (liaison de contact entre solides, pression,...),

Des actions mécaniques à distance (champ de pesanteur, force électromagnétique, ...)
[15][16].

L’étude du comportement mécanique des matériaux a pour but de connaître leurs réponses à une sollicitation donnée. Les variables mises en jeu dans ce domaine sont :

- le tenseur des contraintes σ
- le tenseur des déformations ϵ

Le module d’élasticité (souvent appelé « module élastique ») est une grandeur intrinsèque d’un matériau, définie par le rapport de la contrainte à la déformation élastique provoquée par cette contrainte. La déformation est exprimée comme une grandeur sans dimension. L’unité pratique souvent utilisée du module est le MPa.

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

Si l'élasticité linéaire représente actuellement le cadre de la majorité des calculs de mécanique des milieux continus réalisés dans l'industrie, d'autres types de comportement sont de plus en plus utilisés car ils s'approchent plus de la réalité, et permettent donc un dimensionnement plus strict des structures ou de certains procédés.

3.2. Comportement de la matière :

3.2.1. Comportement élastique :

Il correspond à de petits déplacements réversibles des atomes autour de leur position d'équilibre dans le réseau cristallin. Sous l'action d'une force, les atomes s'écartent. Une réaction due aux forces de liaison tendant à les rapprocher provoque la réaction.

Pour les matériaux métalliques et les polymères non étirés et non renforcés, les caractéristiques d'élasticité sont indépendantes de la direction (matériaux isotropes) et le comportement élastique est linéaire.

Ce n'est pas le cas pour les composites ou certains polymères pour lesquels le module de Young varie avec l'amplitude de la déformation du fait de l'orientation des chaînes macromoléculaires: ce comportement correspond à des lois d'élasticité non linéaire.

3.2.2. Comportement plastique :

Lorsque la limite d'élasticité est dépassée, les atomes du réseau cristallin ont changé de place sous l'action d'un effort de cisaillement.

La prise en compte des défauts du cristal, notamment des dislocations, est indispensable pour comprendre le comportement plastique.

Lorsqu'une déformation plastique est provoquée, on constate que la résistance à la déformation augmente car :

- les dislocations interagissent entre elles
- de nouvelles dislocations prennent naissance, venant augmenter les interactions

Cette augmentation de la résistance à la déformation plastique est l'écrouissage.

Si on relâche l'effort qui a provoqué la plasticité, on constate un retour élastique: le domaine élastique s'étend jusqu'à la contrainte qui était appliquée précédemment, ce qui se traduit par une augmentation de la limite élastique.

Ce phénomène est limité par l'apparition de microcavités qui provoquent une diminution de la section résistante et conduisent à la rupture ductile.

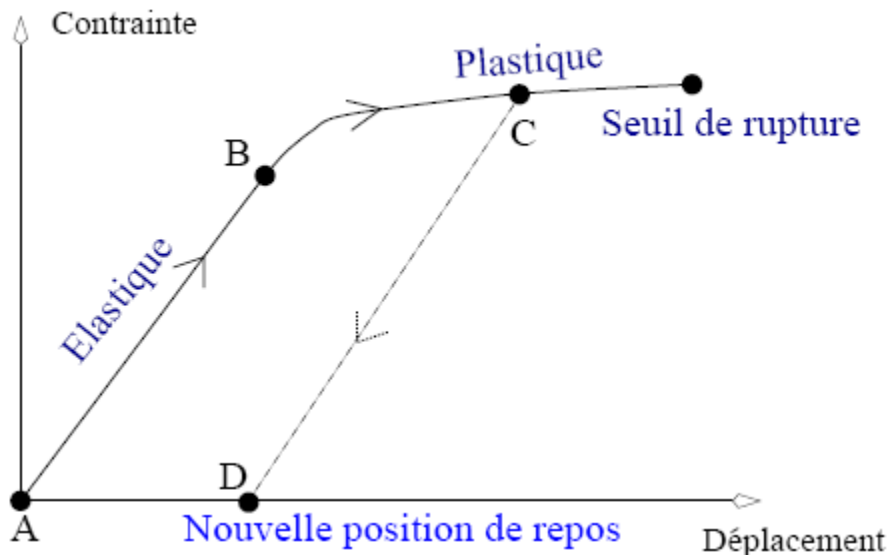


Fig II.3 : Type de comportement d'un matériau au delà des hypothèses de linéarité.

Elasticité

Plasticité

Rhéologie

Rupture



Fig II.4 : Illustration des différents comportements de la matière

3.2.3. Tenseur d'élasticité

La loi de Hooke a été généralisée par Cauchy (1789-1857), qui a proposé d'exprimer chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations. La loi de Hooke est donc aujourd'hui souvent écrite sous la forme :

$$\sigma_{ij}(u) = C_{ijkl} \epsilon_{kl}(u) \quad (2.50)$$

On est en élasticité linéaire si le tenseur des contraintes est linéaire par rapport à celui des déformations. Cela implique que le fait que les tenseurs de contraintes $\sigma_{ij}(u)$ et de déformation $\epsilon_{kl}(u)$ soient symétriques, entraîne des propriétés de symétrie sur le tenseur d'élasticité C_{ijkl}

Le tenseur des rigidités fait intervenir l'ensemble des caractéristiques élastiques du matériau. De même, les déformations sont reliées linéairement aux contraintes par la relation inverse :

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

$$\sigma_{ij}(u) S_{ijkl} = \epsilon_{kl}(u) \quad (2.51)$$

Où S est le tenseur des complaisances ou tenseur des complaisances élastiques du matériau. Les tenseurs C et S ont a priori 81 composantes (chaque indice varie de 1 à 3). Toutefois, les tenseurs des contraintes de Cauchy et des déformations sont symétriques. Ils n'ont donc chacun que 6 composantes indépendantes, et leur liaison linéaire peut alors être réalisée à l'aide de 36 termes seulement. La forme suivante est souvent utilisée, dans un repère orthonormé, pour relier les composantes des contraintes et des déformations :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Avec la condition $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$. Les composantes de la matrice présente dans la relation précédente sont souvent notées C_{IJ} , avec I et J variant de 1 à 6.

En élasticité linéaire, en introduisant d'autres paramètres en plus de la symétrie des liaisons entre les tenseur de déformations et de Cauchy on réduit le nombre de coefficients distincts à seulement 21

En pratique, les matériaux procèdent des symétries supplémentaires qui permettent de restreindre encore le nombre de composantes indépendantes du tenseur des rigidités. Le cas le plus répandu est l'isotropie (même propriétés physiques dans toutes les directions) qui réduit le nombre de coefficient à 2, cette hypothèse est largement utilisée en mécanique des milieux continus, pour les matériaux courant.

Symétrie cubique :

Dans le cas de la symétrie, les trois composantes indépendantes de C sont souvent notées $C_{11} = C_{1111}$, $C_{12} = C_{1122}$ et $C_{44} = C_{2323}$

Des notations identiques pour S conduisent aux relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

- L'isotropie :

Dans ce cas, le nombre de coefficients est réduit à 2 par la relation $C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$. Ils existent plusieurs façon d'exprimer ces coefficients, on peut par exemple choisir ceux de Lamé :

$$\lambda = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12}) \quad (2.55)$$

$$\mu = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \quad (2.56)$$

Ou le module de young :

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad (2.57)$$

Et le coefficient de poisson :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.58)$$

La loi de comportement élastique linéaire dans le cas isotrope s'écrit de la façon suivante :

$$\sigma = \mu \epsilon + \lambda \text{tr}(\epsilon)I = \frac{E}{(1+\nu)} \left(\epsilon + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \text{tr}(\epsilon)I \right) \quad (2.59)$$

Dans le sens inverse :

$$\epsilon = \frac{1}{2\mu} \sigma - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{tr}(\sigma)I = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma)I \quad (2.60)$$

Avec I : tenseur identité.

3.2.4. Modèles d'élasticité en 2D et en 3D

- Contraintes planes :

Hypothèse : Le champ des contraintes dans le milieu peut être représenté par un tenseur de la

$$\text{forme } [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Soit sous forme vectorielle : $\sigma\{\sigma\}^T = \langle \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{12} \rangle$

Ce type d'hypothèse s'applique à des pièces chargées transversalement dont les faces ne sont pas chargées. L'état de contrainte normal aux surfaces étant nul, et l'épaisseur étant supposée petite. On peut considérer que l'état de contrainte à l'intérieur du domaine est voisin de l'état de contrainte sur les surfaces, donc plan par rapport à la normale à la surface.

De nombreuses structures peuvent être modélisées par un état de contraintes planes. C'est le cas des plaques et coques minces

La loi de comportement de ce modèle est obtenue à partir de l'inverse de la loi de HOOKE

relation (2.60): $\epsilon = \frac{1}{2\mu} \sigma - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{tr}(\sigma)I = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma)I$

Inversons cette relation, et nous obtenons la forme simplifiée de la loi de comportement des

modèles "contraintes planes"
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

La déformation ϵ_{33} qui n'est pas prise en compte dans la loi de comportement, peut être calculée à posteriori par : $\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$

- Déformations planes :

Hypothèse : Le champ des déformations dans le milieu peut être représenté par un tenseur de

$$\text{la forme : } \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Soit sous forme vectorielle: $\{\epsilon\}^T = \langle \epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad 2\epsilon_{12} \rangle$

Ce type d'hypothèse s'applique pour les pièces massives dont les déformations longitudinales seront suffisamment faibles pour être négligées (Exemple les pièces massives)

La loi de comportement de ce modèle est obtenue à partir de la loi de HOOKE

$$\sigma = 2\mu \epsilon + \lambda \text{tr}(\epsilon)I \quad (2.65)$$

Avec :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.66)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.67)$$

D'où la forme simplifiée de la loi de comportement des modèles "déformations planes"

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

La contrainte σ_{33} qui n'est pas prise en compte dans la loi de comportement, peut être calculée à posteriori par : $\sigma_{33} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$

En résumé, pour ces deux modèles la matrice d'élasticité est de la forme:

$$[C] = \frac{E(1-\alpha\nu)}{(1+\nu)(1-\nu-\alpha\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\alpha\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\alpha\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu-\alpha\nu)}{2(1-\alpha\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$\alpha = 0$: En contraintes plane

$\alpha = 0$: En déformations plane

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

- Généralisation pour le cas 3D :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\alpha\nu)}{(1+\alpha\nu)(1-\nu-\alpha\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

La matrice d'élasticité en 3D est donc :

$$[C] = \frac{E(1-\alpha\nu)}{(1+\alpha\nu)(1-\nu-\alpha\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

4. Transfert de chaleur :

4.1. Présentation de l'électrothermie :

L'électrothermie consiste à utiliser l'énergie électrique pour produire la chaleur, il existe plusieurs techniques utilisant l'électricité pour produire la chaleur, On distingue :

1- Des techniques basées sur l'effet Joule (par conduction, par induction, par arc électrique...): le chauffage par conduction de la pièce peut se produire par conduction directe ou indirecte; dans un chauffage par induction, une pièce conductrice est soumise à un champ électromagnétique variable avec le temps. Cette pièce est le siège de courants induits qui chauffent celle-ci par effet Joule.

Le chauffage par arc électrique trouve son origine dans le passage du courant entre deux électrodes plongées dans un milieu ionisé. Lorsque ce milieu ionisé est un gaz autre que l'air celui-ci est nommé plasma. On distingue les fours à arc direct et les fours à arc indirect.

2- Des techniques basées sur le rayonnement : une source (Laser) émet un rayonnement électromagnétique. Le faisceau émis présente deux propriétés importantes : une très faible ouverture et un rayonnement presque monochromatique; ces deux propriétés lui confèrent une densité de puissance très importante.

3- Des Techniques liées aux frottements : sous l'effet d'un champ électrique, les molécules d'un matériau sont polarisées et se déforment. Les changements de direction du champ électrique mettent en mouvement les molécules, qui en se frottant les unes contre les autres, s'échauffent [17]

La figure II.5 présente les différentes techniques utilisant l'électricité pour produire la chaleur

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

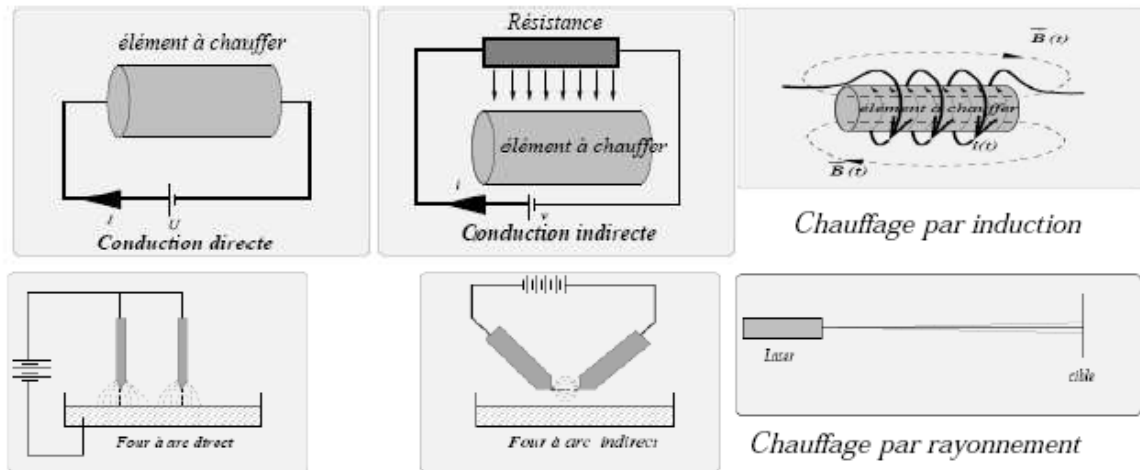


Fig II.5 : différentes techniques utilisant l'électricité pour produire la chaleur

4.2. Les modes de transferts de chaleur principaux : [18]

4.2.1. La loi de fourrier :

On considère les faces d'un système qui sont soumises à différentes conditions :

La première face est une interface avec un autre solide extérieur au système. Le système considéré et ce solide extérieur peuvent échanger de la chaleur au travers de cette face, on parle dans ce cas de conduction.

La deuxième face est baignée par un fluide en mouvement. On désigne les échanges de chaleur se produisant entre le fluide et la structure par le terme de convection.

La troisième face est en vis-à-vis avec un solide à température élevée, mais sans contact entre les deux. Le mode de transfert de chaleur à distance entre les deux solides est appelé rayonnement.

4.2.2. Transfert de chaleur par conduction :

Le transfert de chaleur par conduction se produit au sein d'un système matériel lorsque celui-ci présente un gradient de température. C'est la manifestation au niveau macroscopique des transports locaux d'énergie par les porteurs élémentaires (molécules, électrons, etc.). L'expression de la densité de flux de chaleur est la suivante :

$$\varphi = -k \text{ grad } T \quad (\text{II.72})$$

k : conductivité thermique du milieu [W/m.K].

φ : densité de flux thermique [W/m²].

T : température du milieu [K°].

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

Cette loi, dite loi de Fourier, est la manifestation au niveau local du Second principe de la thermodynamique : la chaleur est transférée dans le sens contraire des gradients de température. Elle ne fait pas intervenir le temps : elle suppose une réponse instantanée à une perturbation thermique en tout point du milieu

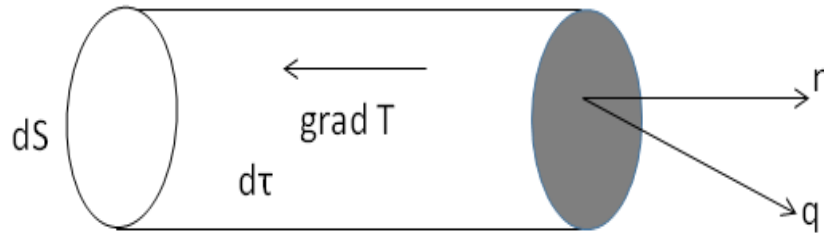


Fig II.6 : Volume élémentaire de Fourier

Le signe (-) caractérise le fait que l'écoulement de chaleur s'effectue dans le sens des températures décroissantes, donc dans le sens opposé au gradient, c'est-à-dire du plus chaud vers le plus froid.

4.2.3. Transfert de chaleur par convection :

Lorsqu'un fluide (gaz ou liquide) est en contact avec un solide, et que les deux corps ont des températures différentes, un échange de chaleur entre les deux se produit. Ce mode de transfert de chaleur est nommé convection.

On appelle loi de Newton, la relation qui modélise ce mode de transfert :

$$\varphi = h_c A (T_s - T_f) \quad (\text{II.73})$$

φ : Flux de chaleur par convection [W].

A : L'aire de surface de transmission de chaleur [m^2].

T_s : La température de la surface d'échange. [$^{\circ}\text{K}$]

T_f : Température du fluide sur la frontière. [$^{\circ}\text{K}$]

h_c : Coefficient d'échange de chaleur par convection [$\text{W}/\text{m}^2.\text{K}$].

h_c dépend des propriétés physiques du fluide (densité, viscosité, etc.), mais également de façon importante des propriétés de l'écoulement, de l'état de surface de la paroi solide, etc.

4.2.4. Transfert de chaleur par rayonnement :

Le transfert de chaleur par rayonnement désigne les interactions énergétiques entre un système matériel et le champ électromagnétique environnant. Deux processus élémentaires conduisent à ces échanges d'énergie : l'émission spontanée est la conversion de l'énergie matérielle en énergie radiative. L'absorption est la conversion inverse d'énergie radiative en énergie matérielle.

Chapitre II : modélisation des phénomènes couplés

Il existe d'autres interactions rayonnement-matière (réflexion, diffusion avec conservation de fréquence, etc.), qui ne correspondent pas à des échanges d'énergie.

Par la suite, on désignera par rayonnement indifféremment le champ électromagnétique, ou le mode de transfert de chaleur entre matière et champ électromagnétique.

Les échanges de chaleur surfaciques par rayonnement sont donnés par loi de Boltzmann suivante [18]:

$$\varphi = \sigma_B \cdot \varepsilon (T^4 - T_\infty^4) \quad (\text{II.73})$$

Avec :

σ_B : Constante de Boltzmann [$\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$].

ε : Coefficient d'émission.

T : température de la surface rayonnante [$^\circ\text{K}$].

T_∞ : Température du milieu ambiant [$^\circ\text{K}$].

4.2.5. la capacité calorifique (chaleur massique) C_p :

La chaleur massique C_p est déterminée par la quantité d'énergie à apporter par échange thermique pour élever d'un kelvin la température de l'unité de masse d'une substance. L'index p indique que la pression reste constante pendant cet échauffement. La capacité calorifique est le produit entre la chaleur massique C_p et la masse volumique ρ . La masse volumique dépend aussi de la température [07]

La figure II.7 si dessous représente la chaleur massique du cuivre en fonction de la température

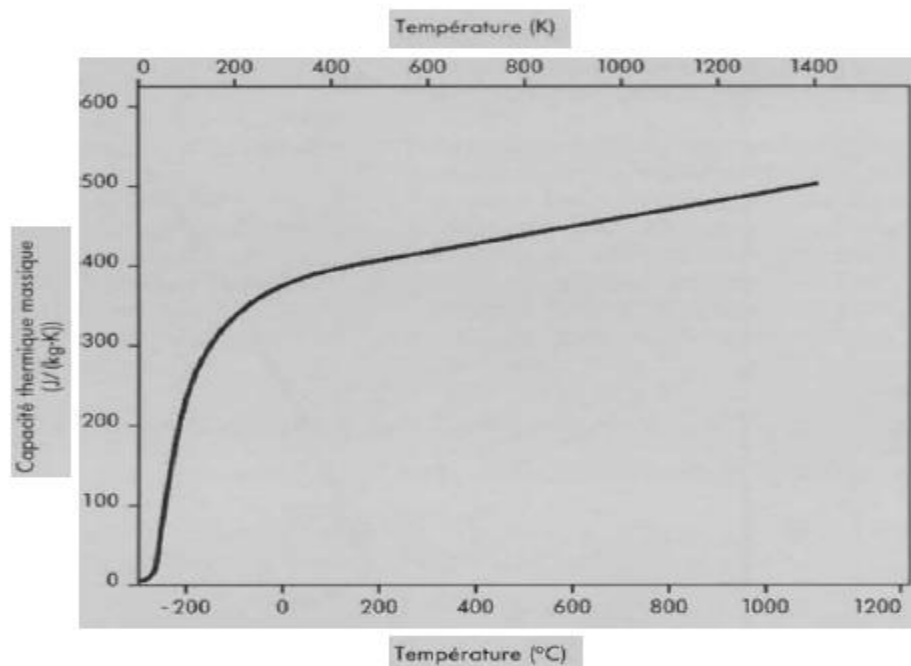


Fig II.7 : capacité calorifique du cuivre

4.3. Equation de conduction thermique :

Considérant un matériau de masse volumique ρ , de volume τ limité par un surface S et de chaleur massique C_p , comportant une source interne de chaleur qui libère une puissance Q par unité de volume

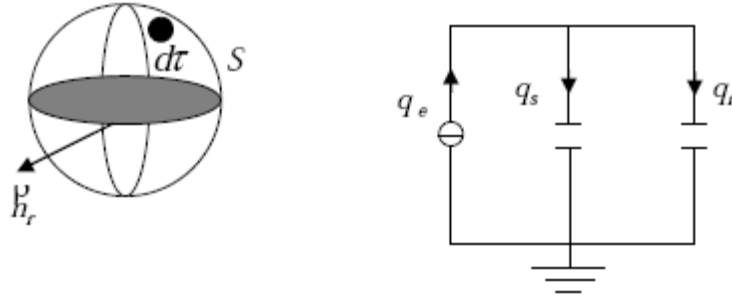


Fig II.8 : Schéma d'un corps comportant une source interne de chaleur et schéma équivalent du bilan thermique

Le flux q_e émis par la source de chaleur est égal au flux q_s stocké par le matériau, augmenté de flux sortant q_r , exprimé en orientant la normale n_r vers l'extérieur. Le flux généré par la source est donné par l'intégrale:

$$q_e = \iiint_v Q d\tau \quad (\text{II.74})$$

Le flux dq_s , emmagasiné par un volume élémentaire $d\tau$, de masse dm égal à $\rho d\tau$ de capacité C_p $dm = \rho C_p d\tau$ s'écrit :

$$dq_s = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\tau \quad (\text{II.75})$$

Le flux total stocké donc s'exprime par :

$$q_s = \iiint_v \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\tau \quad (\text{II.76})$$

Et les pertes sont exprimé par :

$$q_r = \iint_s q n_r ds \quad (\text{II.77})$$

La formule de green nous permet de formuler le problème thermique $q_r = q_e - q_s$ de la façon suivante [08]:

$$\begin{aligned} \iint_s q n_r ds &= \iiint_v Q d\tau - \iiint_v \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\tau \quad \longrightarrow \quad \text{La formule de Green} \\ \iint_s q n_r ds &= \iiint_v \text{div } q d\tau = \iiint_v Q d\tau - \iiint_v \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\tau \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\text{div } q = Q - \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.78})$$

D'après la formule II.78, on déduit [07] :

$$\text{div } (-k(T) \cdot \text{grad} T) = Q - \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Ainsi, nous obtiendrons la formule de conduction thermique :

$$\text{div } (-k(T) \cdot \text{grad} T) + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - Q = 0 \quad (\text{II.79})$$

5. Les différents modes de couplage

5.1. Mode de couplage faible ou indirect

Les problèmes électromagnétique et thermique sont résolus séparément et le couplage se fait par le transfert de données de l'un des deux problèmes vers l'autre. Ce calcul nécessite l'intervention de l'utilisateur ou d'un programme superviseur pour le transfert de données par tabulation dans des fichiers. Ceci peut engendrer des erreurs numériques si on ne prend pas la précaution d'utiliser le même maillage pour les deux problèmes et d'éviter l'interpolation des données [1].

5.2. Mode de couplage fort ou direct

Consiste à résoudre simultanément les deux équations, ce qui permet de réaliser des simulations précises et simples à mettre en œuvre. Ce mode de couplage peut être avantageusement utilisé dans le cas de problèmes fortement couplés.

En effet les propriétés qui dépendent de la température sont réactualisées à chaque itération. Cependant, le nombre d'itérations est plus important que dans le cas d'utilisation de couplage indirecte [1].

6. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présentés sommairement les différents phénomènes qui interviennent dans notre étude. Nous nous sommes intéressés d'abord aux phénomènes électromagnétiques : les différentes lois et théorèmes, les équations de Maxwell et nous avons donné la formulation du problème électromagnétique

Puis on a vu les comportements de la matière, le tenseur d'élasticité en 2D et 3D.

Ensuite nous avons mis l'accent sur les phénomènes thermiques : après une brève introduction à l'électrothermie, on a vu les différents modes de transfert de chaleur pour on a donné la formulation intégrale de l'équation de conduction en vue d'une résolution avec la méthode des éléments finis au chapitre suivant.

Nous avons terminé ce chapitre en présentant les différents modes de couplage magnétothermique

3. Différentes méthodes de résolutions des équations aux dérivées partielles

Les principales méthodes de résolution des EDPs dans les milieux linéaires sont : la méthode des différences finies(MDF), la méthode des éléments finis(MEF), la méthode des volumes finis(MVF), la méthode des intégrales de frontières(MIF), la méthode des circuits couplés(MCC).

L'utilisation des méthodes numériques de discrétisation consiste à ramener la résolution du système d'équations différentielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites, à celle d'un système d'équation algébriques.

3.1. Méthode des Différences Finis (MDF)

C'est une méthode basée sur le théorème de Taylor où l'on remplace l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences. Donc consiste à discrétiser le problème posé et à le résoudre au calculateur numérique. La discrétisation d'une fonction $U(x,y)$ défini en tout points (x,y) du domaine Ω , avec des conditions aux limites données sur le contour Γ le délimitant.

Le domaine d'étude est découpé au moyen d'une grille carrée dans le cas bidimensionnel et une grille cubique dans le cas tridimensionnel, l'équation à résoudre est écrite pour chaque point ou nœud de maillage, pour cela on aura un système d'équations possédant un nombre d'équations égal au nombre de nœuds.

La méthode des différences finies est très simple à mettre en œuvre, mais elle peut ne pas être précise puisqu'elle prend le développement en série de Taylor de l'inconnue jusqu'au troisième terme seulement.

C'est une méthode qui est difficilement applicable aux domaines à géométrie compliquée, elle est plutôt réservée aux domaines à géométrie simple et aux frontières régulières tels que les carrés et les rectangles.

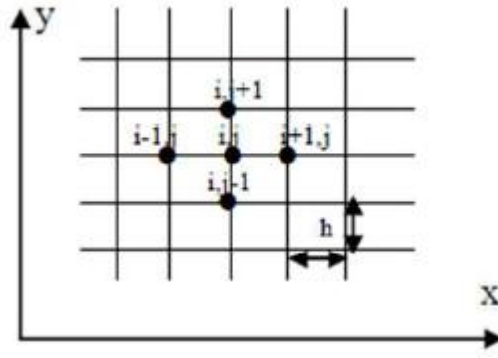


Fig III.1 : Maillage types différences finis

En appliquant le développement limite en série de Taylor on aura l'approximation des dérivées aux point (i,j) :

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2h} \text{ et } \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2h}$$

Le laplacien discrétisé sera alors :

$$(\Delta A)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j}$$

D'où :

$$(\Delta A)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j} + A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{h^2}$$

Cette formule est appelé formule a cinq (05) point et elle s'écrit avec le système matriciel suivant :

$$[M][A]=[S]$$

[M] : matrice inversible

[A] : matrice des inconnus

[S] : matrice source

La méthode des différences finies s'adapte difficilement aux géométries complexes. En plus, elle n'abouti qu'aux valeurs nodales du vecteur potentiel, ce qui exige une interpolation pour déterminer les valeurs de A en d'autres points du domaine de résolution si c'est nécessaire. Pour ce qui est de la saturation, on peut en tenir compte dans ce cas, en ajustant la perméabilité de chaque nœud à chaque itération par exemple [21]

3.2. Méthode des intégrales de frontières (MIF)

Lorsqu'on utilise la MDF ou la MEF, on calcule les variables inconnues dans tout le domaine. La MIF permet de ramener le maillage à la frontière du domaine. Ainsi, le calcul des valeurs de l'inconnue sur les frontières du domaine suffit pour obtenir la solution en tout point du domaine.

Pour ramener le problème sur les frontières, la MIF utilise le théorème d'Ostrogradski-Green. Cette méthode peut être intéressante pour l'étude de structure tridimensionnelle ou lorsque l'air ou les milieux passifs occupent une grande partie du domaine d'étude.

Cependant, cette méthode a l'inconvénient de conduire à un système algébrique à matrice pleine (pas de termes nuls). Ceci augmente le temps utilisateur, donc le coût de calcul

Cette méthode trouve son application lorsque les fréquences de travail sont très importantes car la profondeur de pénétration devient très faible vis-à-vis des autres dimensions géométriques du dispositif étudié et une discrétisation en éléments finis ferait aboutir à des difficultés insurmontables à cause du grand nombre d'éléments nécessaires à cette discrétisation [22].

3.3. Méthode des volumes finis (MVF)

La MVF se déduit de la MDF. Le domaine d'étude (Ω) est subdivisé en un nombre d'éléments finis. Chaque élément contient quatre nœuds, pour le cas bidimensionnel axisymétrique, un volume fini entoure chaque nœud.

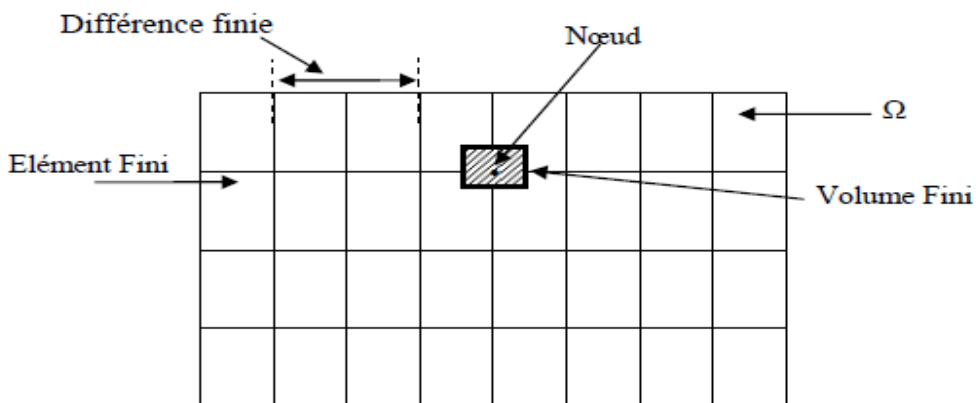


Fig III.2 : maillage du domaine d'étude

L'équation différentielle est projetée sur une fonction de projection bien déterminée et ensuite intégrée dans chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale dans le volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, parabolique, puissance, exponentielle, ... etc.) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude.

L'équation discrétisée de cette façon exprime le principe de conservation pour l'inconnu dans l'élément de volume et la solution obtenue est constituée uniquement par les valeurs nodales.

Cette méthode est utilisée, en particulier en mécanique des fluides (l'équation d'écoulement), où elle est apparue depuis une vingtaine d'années, sa procédure donne une solution plus précise que celle fournie par la MDF.

L'équation discrète obtenue exprime le principe de conservation de la fonction sur le volume de contrôle.

3.4. Méthode des éléments finis (MEF)

La méthode des éléments finis est plus générale car elle est mieux adaptée aux géométries complexes et aux matériaux non linéaires.

La méthode des éléments finis consiste à subdiviser le domaine d'étude en domaines élémentaires appelés éléments finis, et à exprimer l'inconnue sur chaque élément par les fonctions d'interpolation simples en fonction des valeurs de l'inconnue en chacun des sommets de cet élément. L'inconnue devra vérifier globalement les conditions de continuité à l'interface et au passage d'un milieu à un autre.

Pour des structures bidimensionnelles, les éléments de maillage sont souvent des triangles, tandis que dans les problèmes tridimensionnels, les éléments sont de forme tétraédrique ou prismatique.

L'avantage de s'adapter aux géométries complexes et la prise en considération des non linéarités ont fait que la méthode des éléments finis soit très utilisée en électromagnétisme bien qu'elle soit quelque peu difficile à mettre en œuvre puisqu'elle requiert une grande capacité de mémoire et un temps de calcul important. [24][25]

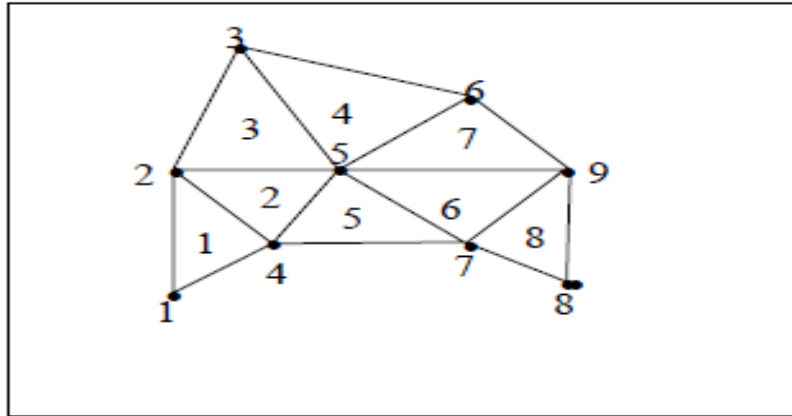


Fig III.3 : un domaine d'étude discrétisé en éléments finis

Dans cette méthode on cherche à exprimer une formulation intégrale basée sur l'une des deux approches suivantes :

3.4.1. La méthode variationnelle :

Elle consiste à minimiser une fonctionnelle qui représente généralement, l'énergie du système étudié. Cette méthode n'est donc applicable que si l'on connaît une fonctionnelle équivalente au problème différentiel que l'on veut résoudre (fonction d'énergie du système à étudier), car cette méthode est basée sur l'action Hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle d'énergie de type intégrale et qui est définie comme suit :

$$f(u) = \int_{\Omega} L(u) d\Omega \quad (3.1)$$

Sachant que :

$$L(u) = W_c - W_p \quad (3.2)$$

Avec :

Ω : Domaine d'étude.

$L()$: Operateur différentiel.

W_c : Energie cinétique du système.

W_p : Energie potentielle du système.

3.4.2. Formulation résidus pondérés ou méthode projective :

Elle consiste à minimiser le résidu induit par l'approximation de la fonction inconnue.

La formulation résidus pondérés appelée aussi la méthode projective est la plus utilisée car elle ne nécessite pas la connaissance préalable d'une expression énergétique du système.

Le principe de cette méthode est basé sur le théorème d'Hilbert qui stipule que seul le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace. Cette méthode consiste à rechercher des fonctions projectives Ψ_i de façon à minimiser l'intégrale du résidu dont l'équation est la suivante

$$\int R(A) \Psi_i d\Omega = 0 \quad (3.3)$$

Sachant que :

$$R(A) = L(A) - F \quad (3.4)$$

Avec :

A : L'inconnu du problème.

L() : Opérateur différentiel.

Ψ_i : Fonction de projection ou de pondération.

F : Fonction définie sur le domaine Ω .

R : Représente le résidu de l'approximation.

3.4.3. Les conditions aux limites

Pour la résolution des équations aux dérivées partielles électromagnétiques, il est inévitable d'associer les conditions aux limites du domaine d'étude à ces équations.

En électromagnétisme on a deux types de conditions :

- **Condition de Dirichlet**

Elle impose les valeurs du potentiel vecteur magnétique A aux bords du domaine d'étude, ces valeurs sont prises nulles par la considération de l'infini.

- **Condition de Neumann**

Elle est utilisée dans le cas où le système à étudier présente des plans de symétrie.

Le problème impose les valeurs de A aux bords du domaine et celle de $\frac{\partial A}{\partial n}$ aux niveaux des plans de symétrie (plan de coupe) ou 'n' représente la normale au plan de coupe.

3.5. Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis

Les codes éléments finis font maintenant partie des outils couramment utilisés lors de la conception et à l'analyse des produits industriels. Les outils d'aide à la modélisation devenant de plus en plus perfectionnés, l'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée et peut sembler de moins en moins une affaire de spécialistes.

- **Les avantages**

- Adaptation aux géométries complexes.
- Prise en compte des non linéarités.
- Temps de calcul relativement avantageux.

- **Les inconvénients**

- La non-prise en considération des domaines infinis.
- Impuissante en présence de singularités dans le domaine d'étude dont certains points présentent des dérivées infinies.

Et pour résoudre ce problème, on utilise les méthodes mixtes.

4. Formulations éléments finis des modèles d'équations électromagnétiques et thermiques :

La formulation éléments finis des modèles d'équations électromagnétiques et thermiques se fait suivant les étapes ci-dessous:

4.1. L'équation aux dérivées partielles

En utilisant les équations de Maxwell, les relations du milieu et la loi d'ohm on arrive à décrire le comportement d'un phénomène électromagnétique par une équation aux dérivées partielles dans l'espace et/ou dans le temps, et d'après le principe de la conservation de

l'énergie interne d'un système on arrive à établir l'équation aux dérivées partielles qui régit la répartition de la température, on associe à ces équations les conditions aux limites conformément à la nature du problème, elles sont de type Dirichlet, Neumann ou mixtes (Dirichlet-Neumann) [22].

- Il existe trois types d'équations aux dérivées partielles sont :
 - Equations elliptiques : elles traduisent le comportement stationnaire des phénomènes physiques.
 - Equations paraboliques : elles traduisent le comportement en régime transitoire.
 - Equations hyperboliques : elles traduisent le phénomène de propagation d'ondes.

4.2. Passage de l'équation aux dérivées partielles à une intégrale

La formulation intégrale de l'équation aux dérivées partielles utilise une de ces méthodes :

- Méthode des résidus pondérés.
- Méthode de formulation variationnelle

4.3. Discrétisation du domaine

La méthode des éléments finis est basée sur une discrétisation du domaine en un nombre fini de petits sous domaines appelés éléments, dont on aura au préalable choisis la géométrie selon les dimensions du domaine d'étude, en s'appuyant sur les éléments de références, auxquelles on associe un système de coordonnées normées. Les points caractéristiques de ces éléments sont appelés nœuds.

4.3.1. Eléments de références

Le maillage consiste à discrétiser le domaine de l'objet analysé, qui peut être à une, deux ou trois dimensions, en un ensemble d'éléments finis de forme simple. Ces éléments peuvent être des segments, des triangles, des quadrilatères, des parallélépipèdes, des prismes... etc, selon le domaine à discrétiser [22].

4.3.1.1. Eléments de référence a 1D :

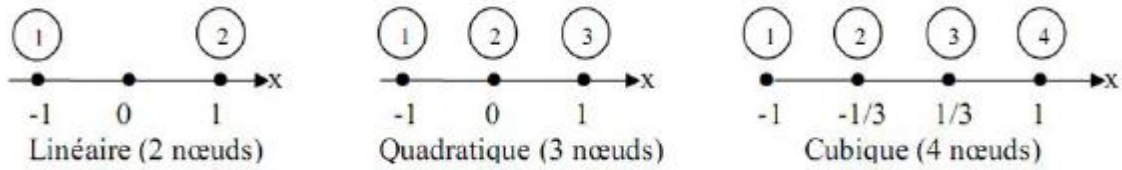


Fig III.4 : différents éléments 1D

4.3.1.2. Eléments de référence a 2D :

- **Eléments triangulaires :**

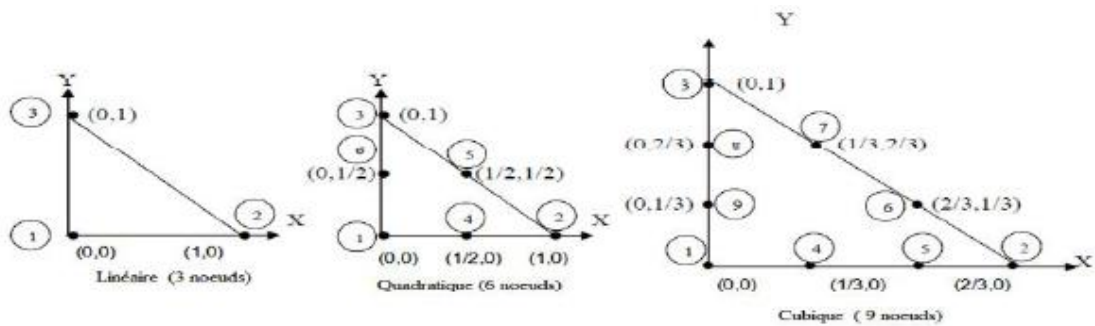


Fig III.5 : différents éléments 2D triangulaires

- **Eléments carrés :**

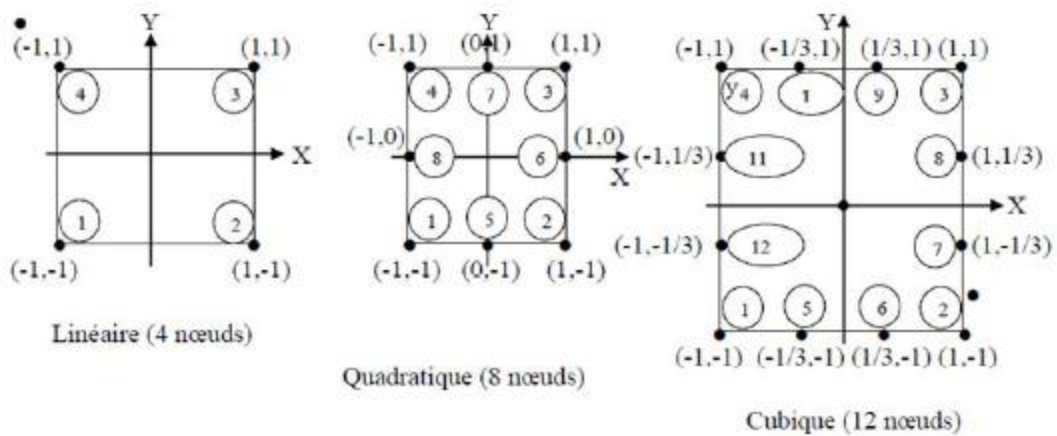


Fig III.6 : différents éléments 2D carrés

4.3.1.3. Éléments de référence a 3D :

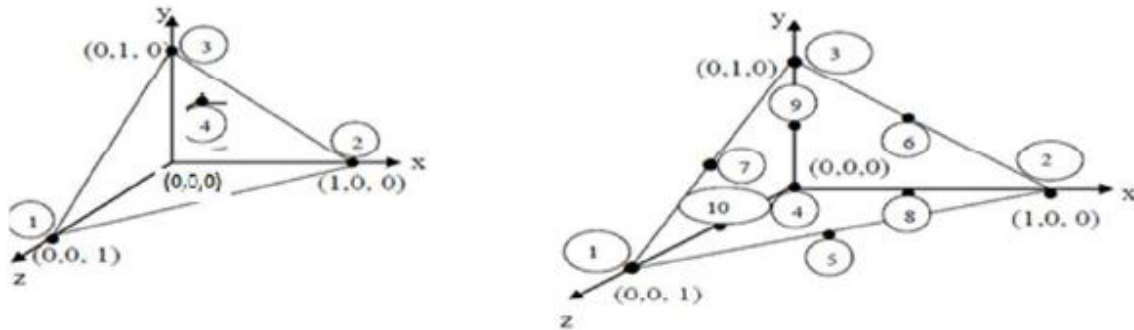


Fig III.7 : différents éléments 3D

4.3.2. Fonction d'interpolation :

Les fonctions d'interpolations sont données par le triangle de pascal ci-dessous :

$$\begin{array}{l}
 1 \text{ ————— } \textit{ordre 0} \\
 U \ V \text{ ————— } \textit{ordre 1} \\
 U^2 \ UV \ V^2 \text{ ————— } \textit{ordre 2} \\
 U^3 \ U^2V \ UV^2 \ V^3 \text{ ————— } \textit{ordre 3}
 \end{array}$$

Fig III.8 : triangle de pascal

4.4. Ecriture matricielle

La formulation intégrale suivie de la discrétisation du domaine, nous permet de faire la somme des valeurs obtenues ; la formulation intégrale de l'E.D.P sur chaque élément du domaine, et la discrétisation du domaine suivit d'une approximation de l'inconnu sur chaque élément de celui-ci nous donnent un ensemble de valeurs ; on peut dire alors qu'on est passé d'un intégrale a une somme numérique qui ne peut être qu'une écriture matricielle.

4.5. Résolution du système matriciel

Nous avons un système matriciel de la forme suivante :

$$[M] [A] = [K]$$

La résolution d'un tel système se fait par des méthodes directes ou itératives, selon la nature de la relation entre la matrice [M] et le vecteur inconnu [A].

4.6. Utilisation du vecteur solution [A]

La solution du système matriciel, nous fournis des valeurs aux nœuds par le vecteur solution [A], la fonction d'interpolation nous permet d'avoir la solution de chaque élément du domaine, il est donc possible de calculer les grandeurs physiques de système étudié.

5. Formulation éléments finis de l'équation magnétodynamique en terme de potentiel vecteur A en coordonnées cartésiennes 2D :

- **Cas linéaire**

On considère que les propriétés électromagnétiques, la perméabilité magnétique μ et la conductivité électrique σ sont indépendantes du champ magnétique, de l'induction magnétique et de la température [14] [15].

- **Régime transitoire**

L'équation magnétodynamique en terme de A au régime transitoire est :

$$\vec{\nabla}_\Lambda(\vec{\nabla}_\Lambda \vec{A}) + \sigma\mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mu \vec{J}_s \quad (3.5)$$

En coordonnées cartésienne :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial A}{\partial y} \right] + \sigma\mu \frac{\partial A}{\partial t} = \mu J_s \quad (3.6)$$

La formulation intégrale de l'équation par la méthode des résidus pondérés, donnée par :

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) + \sigma\mu \frac{\partial A}{\partial t} \right) \psi_i dx dy = \iint_{\Omega} \mu J_s \psi_i dx dy \quad (3.7)$$

En appliquant le théorème de Green, qui nous permet d'écrire :

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) \right) \psi_i dx dy = - \iint_{\Omega} \vec{\nabla} A \vec{\nabla} \psi_i dx dy + \int_{\Gamma} \frac{\partial A}{\partial n} \psi_i d\Gamma \quad (3.8)$$

Pour simplifier la résolution du problème, on suppose que les conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann homogène ($\frac{\partial A}{\partial n}=0$), et on aura :

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) \right) \right) \Psi_i \, dx dy = - \iint_{\Omega} \vec{\nabla} A \vec{\nabla} \Psi_i \, dx dy \quad (3.9)$$

En remplaçant dans (3.9) l'équation devient alors :

$$- \iint_{\Omega} \vec{\nabla} A \vec{\nabla} \Psi_i \, dx dy + \sigma \mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Psi_i \, dx dy = \iint_{\Omega} \mu \vec{J}_s \Psi_i \, dx dy \quad (3.10)$$

Avec :

μ : perméabilité magnétique du milieu [H/m].

\vec{A} : Potentiel vecteur magnétique [T.m].

\vec{J}_s : Vecteur de densité de courant de source [A/m²].

- **Régime harmonique**

L'équation magnétodynamique en régime harmonique s'écrit sous la forme :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + j\omega \sigma \mu \vec{A} = \mu \vec{J}_s \quad (3.11)$$

La formulation intégrale de l'équation par la méthode des résidus pondérés, donnée par :

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + j\omega \sigma \mu \vec{A} \right) \right) \Psi_i \, dx dy = \iint_{\Omega} \mu \vec{J}_s \Psi_i \, dx dy \quad (3.12)$$

En appliquant le théorème de Green, qui nous permet d'écrire :

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) \right) \right) \Psi_i \, dx dy = - \iint_{\Omega} \vec{\nabla} A \vec{\nabla} \Psi_i \, dx dy + \int_{\Gamma} \frac{\partial A}{\partial n} \Psi_i \, d\Gamma \quad (3.13)$$

Après transformation et considération des conditions aux limites devient :

$$- \iint_{\Omega} \vec{\nabla} A_z \vec{\nabla} \Psi_i \, dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \mu \vec{A}_z \Psi_i \, dx dy = \iint_{\Omega} \mu \vec{J}_z \Psi_i \, dx dy \quad (3.14)$$

Sachant que : $A = \sum_{j=1}^N \Psi_j A_j$

En remplaçant dans (3.14) on obtient :

$$\sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \overline{\nabla \Psi_i} \cdot \overline{\nabla \Psi_j} dx dy \right] \cdot A_j + j\omega \sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \sigma \Psi_i \cdot \Psi_j dx dy \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \Psi_i \cdot J_z dx dy \quad (3.15)$$

Pour tous les nœuds du domaine on obtient l'écriture :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad \text{avec :} \quad (3.16)$$

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \overline{\nabla \Psi_i} \cdot \overline{\nabla \Psi_j} dx dy \quad (3.17)$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \Psi_i \cdot \Psi_j dx dy \quad (3.18)$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \Psi_i \cdot J_z dx dy \quad (3.19)$$

- **Cas non linéaire**

Dans le cas de notre étude nous considérons que la non linéarité de notre modèle est due à la Réductivité magnétique ν qui dépend de l'induction magnétique \vec{B} , et la conductivité σ qui dépend de la température alors l'équation magnétodynamique (III.5) est non linéaire et l'équation à résoudre sera :

$$\vec{\nabla} \wedge (\nu \vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = \vec{J}_s \quad (3.20)$$

Pour résoudre numériquement cette équation non linéaire, il est nécessaire d'utiliser une discrétisation temporelle par la méthode d'Euler implicite.

6. Formulation éléments finis de l'équation de conduction de chaleur en coordonnées cartésiennes 2D

- **Cas linéaire**

On considère que les propriétés thermiques ; la capacité calorifique ($\rho \cdot C_p$), la conductivité thermique λ et la densité de puissance dissipée par effet joule ; indépendantes de la température et des coordonnées de plan d'étude

- **Régime transitoire**

L'équation thermique au régime transitoire est

$$\vec{\nabla} \cdot (-\lambda \vec{\nabla} T) + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = Q \quad (3.21)$$

En coordonnées cartésiennes l'équation de conduction est :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -Q \quad (3.22)$$

Avec $T = T(x, y, t)$

En appliquant la méthode projective de Galerkin sur l'équation du modèle thermique on obtient:

$$\iint_{\Omega} \Psi_i \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \iint_{\Omega} \Psi_i \operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} T) d\Omega = \iint_{\Omega} \Psi_i \cdot Q d\Omega \quad (3.23)$$

On obtient un système d'équations différentielles qui dépend du temps.

7. système algébrique pour la résolution de l'équation du couplage magnétothermique

On associe aux équations des conditions aux limites de type Dirichlet ($A=A_0$, $T=T_0$) et Neumann homogène ($\frac{\partial T}{\partial n}$). Les systèmes algébriques relatifs à ces deux phénomènes conduisent à deux systèmes algébriques couplés à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} [M+j\omega L] [A] = [K] \quad (3.24) \\ [M] [T]^{t+1} + [C] \left[\frac{T}{\Delta t}\right]^{t+1} = [k] + [C] \left[\frac{T}{\Delta t}\right]^t \quad (3.25) \\ DPJ = \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 \quad (3.26) \end{array} \right.$$

7.1. Méthode de résolution des systèmes matriciels

La recherche de la solution des équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis, nous a conduits après formulation intégrale, vers une écriture matricielle qui est sous la forme suivante :

$$[M] [A] = [K] \quad (3.27)$$

Si le problème est linéaire ; [M] ne dépend pas de l'inconnu [A], les méthodes de résolution sont de deux type :

- Les méthodes directes : elle consiste en une solution donnée par un nombre fini d'étapes, c'est une méthode très précise mais très coûteuse en temps de calcul (méthodes de Gauss, Cholesky et Jordan).
- Les méthodes itératives : c'est une succession d'amélioration de l'approximation de la solution atteinte après un certain nombre d'itérations. Le nombre d'itérations est imprévu, il est dépendant de la structure de la matrice [M].

La résolution de tel système se fait par ordinateur, en implémentant un programme de résolution, qui déroule l'une de ces méthodes.

- Discrétisation temporelles : dans le régime transitoire on remarque que les systèmes matricielles obtenues possèdent un vecteur dont sa composante varie par rapport au temps, la discrétisation de ce terme est de type différence finis implicite. Par exemple dans le cas du système matriciel obtenu suite à la formulation éléments finis de l'équation de transfert de chaleur dans le plan cartésien 2D [6].

Le système peut être décrit comme suite :

$$[M] [T] + [C] \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right] = [K] \quad (3.28)$$

Dans ce cas l'opérateur différentiel est transformé en un opérateur aux différences finis comme suit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T^{t+1} - T^t}{\Delta t} \quad (3.29)$$

Ou ΔT représente la différence entre les valeurs T^{t+1} à l'instant $t + 1$ et T^t à l'instant t par rapport à un pas de temps Δt , et la valeur de la température T^t sera utilisée pour calculer la valeur de la température T^{t+1} ; la résolution à chaque pas de temps nécessite un calcul itératif.

8. Le modèle cylindrique axisymétrique en électromagnétisme :

8.1. Coordonnées cylindriques :

On notera les vecteurs de la base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$

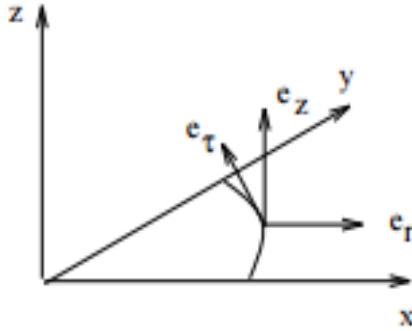


Fig III.9 : Coordonnées cylindriques

Rappelons tout d'abord l'expression des opérateurs gradient et divergence dans ce système de coordonnées :

$$\text{grad } g = \frac{\partial g}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k} \quad (3.30)$$

$$\text{div } a = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (3.31)$$

Il est alors possible d'établir l'équation de la température :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = Q \quad (3.32)$$

8.2. Cas des problèmes axisymétriques :

Les équations, qui sont utilisées dans le cas de problèmes axisymétriques, supposent les phénomènes indépendants de la direction θ . Il est donc possible d'opérer une simplification de l'équation à résoudre, et par la même de se ramener à un problème bidimensionnel. Si on prend pour axe de symétrie la direction z , les vecteurs unitaires de l'espace bidimensionnel sont \vec{e}_r et \vec{k}

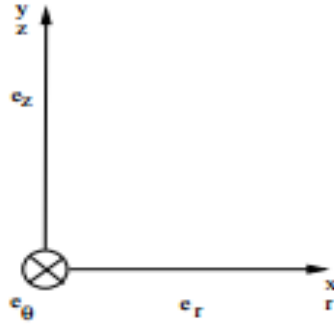


Fig III.10 : Coordonnées pour cas axisymétrique

Dans ce repère, l'équation s'écrit :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = Q \quad (3.33)$$

$$T = T(r, z, t)$$

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{r} \Psi_i \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dr dz + \iint_{\Omega} \frac{1}{r} \Psi_i \operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} T) dr dz = \iint_{\Omega} \frac{1}{r} \Psi_i \cdot Q_{\phi} dr dz \quad (3.34)$$

Avec $T = r T_{\phi}$

9. L'équation magnétodynamique d'un système cylindrique axisymétrique :

Une grande partie des problèmes magnétiques peut être traité en bidimensionnel,

Il existe deux types de système bidimensionnels :

Ceux infiniment longs alimentés suivant une direction (oz), et ceux à symétrie de révolution alimentés selon la direction (o φ).

Dans le premier cas, le champ électrique \vec{E} n'a qu'une composante suivant la direction infiniment longue (oz). Le champ magnétique \vec{B} présente deux composantes suivant (or) et (o φ) dans le plan perpendiculaire à Js (densité de courant source), impliquent ainsi une composante pour le potentiel vecteur magnétique \vec{A} suivant la direction (oz).

Dans le deuxième cas, le courant Js, est dirigé suivant l'angle φ du système de coordonnées cylindriques (r, φ, z), le champ magnétique \vec{B} possède alors deux composantes, l'une suivant la direction (or) et l'autre suivant la direction (oz), imposant ainsi pour le potentiel vecteur une seule composante Aφ (désignée par la suite A).[14]

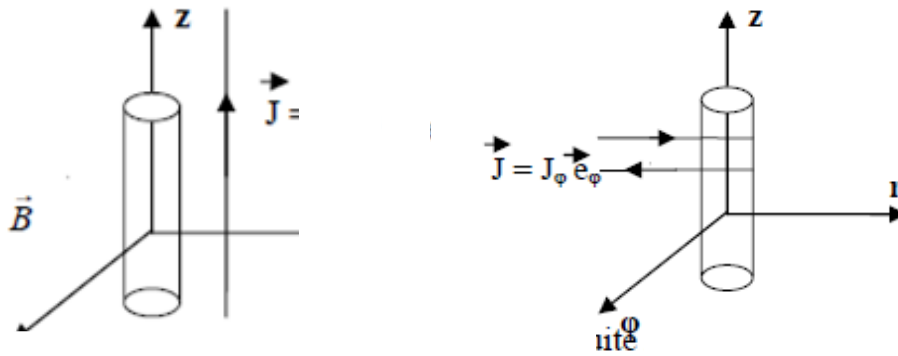


Fig III.11 : modèle cylindrique axisymétrique en électromagnétisme

Pour le calcul numérique, différents choix de variables d'état aboutissant à des formulations différentes sont possibles.

Les formulations en potentiels en particulier, sont toute fois mieux adaptées aux volumes finis. En se basant sur les équations de J.C.Maxwell, l'équation qui décrit l'évolution spatio-temporelle des phénomènes électromagnétiques, trouvée précédemment est la suivante:

$$\overrightarrow{rot} \frac{1}{\mu} (\overrightarrow{rot} (\vec{A})) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s \quad (3.35)$$

Lorsque le courant est orienté suivant la direction (0 phi), alors le vecteur $\vec{A} = \vec{A}_\phi$

Les différentes grandeurs vectorielles ont les composantes suivantes :

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_r \\ J_\phi & \vec{e}_\phi \\ 0 & \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_r \\ E_\phi & \vec{e}_\phi \\ 0 & \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_r \\ A_\phi & \vec{e}_\phi \\ 0 & \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \vec{B}_r & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\phi \\ \vec{B}_z & \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} \vec{H}_r & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\phi \\ \vec{H}_z & \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

Comme le vecteur \vec{A} est confondu avec sa composante orthogonale, sa divergence est naturellement nulle $\vec{A} = A_\phi \vec{e}_\phi$ et $\overrightarrow{div} \vec{A} = 0$ (3.36)

En coordonnées cylindriques axisymétriques, nous avons :

$$\overrightarrow{rot} \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r A_\phi & 0 \end{vmatrix} \quad (3.37)$$

$$\overrightarrow{rot\vec{A}} = \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial r A_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} \right] \vec{e}_z \quad (3.38)$$

Et :

$$\overrightarrow{rot}(v \overrightarrow{rot\vec{A}}) = - \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial r A_\varphi}{\partial z} \right) \right\} \quad (3.39)$$

9.1. Régime harmonique :

La formulation intégrale est donnée par :

$$\iint_{\Omega} \Psi_i \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right) \right) dr dz + j\omega \iint_{\Omega} \Psi_i \cdot \sigma \cdot A z \frac{1}{r} dr dz = \iint_{\Omega} \Psi_i \cdot J_\varphi \cdot dr dz \quad (3.40)$$

En appliquant le théorème de Green, qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) dr dz - \int_{\Gamma} \frac{v}{r} \Psi_i \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma + \\ & j\omega \iint_{\Omega} \Psi_i \cdot \sigma \cdot A \frac{1}{r} dr dz = \iint_{\Omega} \Psi_i \cdot J_\varphi \cdot dr dz \end{aligned} \quad (3.41)$$

En utilisant les conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann homogène on aura (le terme sur la frontière s'annule $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$)

$$\sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \overrightarrow{\nabla} \Psi_i \cdot \overrightarrow{\nabla} \Psi_j dr dz \right] \cdot A_j + j\omega \sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \Psi_i \cdot \sigma \cdot A \frac{1}{r} dr dz \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \Psi_i \cdot J_\varphi \cdot dr dz \quad (3.40)$$

Pour tous les nœuds du domaine on obtient l'écriture :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad (3.41)$$

$$\text{avec : } M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \overrightarrow{\nabla} \Psi_i \cdot \overrightarrow{\nabla} \Psi_j dr dz$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot A \Psi_i \cdot \Psi_j \frac{1}{r} dr dz$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \Psi_i \cdot J_\varphi \cdot dr dz$$

10. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes méthodes de résolutions des équations aux dérivées partielles ainsi les différentes formulations électromagnétiques qui résolvent les équations de la magnétodynamiques et thermique.

4.1.Introduction :

Le chauffage par induction est une méthode couramment employée pour fuser les métaux. Avec les progrès observés dans le domaine de la modélisation numérique, il est possible aujourd'hui d'avoir dans certains cas un traitement réaliste des phénomènes physiques. Ainsi plusieurs phénomènes sont traités par simulation numérique.

Les outils de prototypage virtuel permettent d'accélérer l'étape d'évaluation de la fiabilité et d'identification des zones critiques. Les tests expérimentaux permettent de compléter et de vérifier les résultats de simulation, et la précision reste toujours essentielle. Il est souvent nécessaire de mettre des hypothèses dans le but d'une part de simplifier le modèle tout en gardant une évaluation suffisamment proche et représentative de la réalité [19]

Ce chapitre sera consacré à la simulation d'un système de chauffage par induction utilisé pour fuser l'or où il existe un couplage électromagnétique-magnétique. On utilise le logiciel "Comsol Multiphysics" comme outil de simulation qui répond assez bien à ce besoin.

La première partie de la simulation sera consacrée à l'influence des paramètres physiques du modèle tels que le couplage inducteur-charge et l'effet de l'épaisseur du creuset puis la position verticale de l'inducteur. En suite on vérifie l'homogénéité de la fusion, puis on voit l'influence de la densité de courant d'alimentation et sa fréquence sur la chaleur produite au sein de la charge.

4.2.Présentation de l'outil informatique utilisé :

Le développement des méthodes numériques (différences finies, volumes finis, éléments finis, intégrales de frontière, etc.) est heureusement accompagné par les avancées du matériel informatique.

Des programmes qui nécessitaient autrefois des calculateurs complexes et onéreux tournent à présent sur les PC d'un coût modeste. Cela a contribué à faciliter la mise au point de logiciels [20]. Nous avons présenté dans la section précédente les différentes formulations des équations de Maxwell et élaborons dans ce chapitre la présentation du logiciel utilisé dans ce travail.

Parmi les Logiciels utilisant éléments finis on peut citer :

- 1- ABAQUS
- 2- ANSYS
- 3- CAST3M
- 4- ASTER
- 5- COMSOL MULTIPHYSICS
- 6- CosmosWorks
- 7- Dytran
- 8- EuroPlexus
- 9- Flux2D/ 3D.

Nous avons choisi de travailler sous Comsol Multiphysics pour son interface claire et sa rapidité d'exécution.

4.3. Comsol Multiphysics :

Anciennement appelé FEMLab (Finite Element Method Laboratory), COMSOL Multiphysics est un logiciel de simulation qui permet de résoudre des systèmes aux dérivées partielles en utilisant la méthode des éléments finis en 1D, 2D et 3D. Ses modules intégrés interviennent pour résoudre des problèmes de l'électromagnétisme, l'élasticité, dynamique des fluides et la dynamique des gaz, transfert de chaleur, etc... Femlab permet également de résoudre le problème comme une formulation mathématique (sous la forme d'équations) et physiques (le choix des modèles physiques, tels que les processus de diffusion). Dans le mode dit physique, on peut aussi utiliser les équations prédéfinies pour la majorité des phénomènes qui ont lieu dans les sciences et la technologie, tels que le transfert de chaleur et d'électricité, la théorie de l'élasticité, la propagation des ondes de diffusion, l'écoulement du fluide...

Nous utiliserons la version 3.5 de Comsol Multiphysics pour notre travail. Elle se distingue, entre autres, par le support généralisé pour les fichiers de géométrie au format Parasolid, une nouvelle interface bidirectionnelle et des moteurs de calcul plus rapides par rapport aux versions précédentes. L'exécution des modèles d'écoulement de grande taille dans Multiphysics 3.5 est par exemple trois fois plus rapide que dans la version 3.4 et les simulations temporelles sont jusqu'à quatre fois plus rapides avec le nouveau solveur temporel. On trouve également désormais un mailleur plus avancé qui assure la création de maillages 2D et 3D de qualité....

4.4.-Présentation du problème

On propose un système de chauffage par induction pour fuser l'or (bon conducteur), qui s'effectue en chauffant ce dernier dans un creuset fabriqué à partir de l'alumine (matériau réfractaire non conducteur). La masse de l'or placée dans le creuset est fondue jusqu'à atteindre sa forme liquide (Température de fusion $T_f = 1337 \text{ °K}$), l'inducteur utilisé est formé d'une seule spire de section rectangulaire.

L'application proposée consiste à utiliser un creuset contenant une quantité d'or de diamètre intérieur $0.1m$ et de hauteur $0.1m$ et un inducteur de hauteur $0.05m$ et d'épaisseur $0.01m$; ces dimensions restent constantes durant le déroulement du travail.

4.5.Construction du model sur COMSOL Multiphysics

4.5.1. Choix de la dimension:

Nous avons réalisé une géométrie en 3D et nous faisons notre étude dans un système de coordonnées 2D en axisymétrique.

Le model 3D que nous avons croisé se présente comme dans la figure suivante :

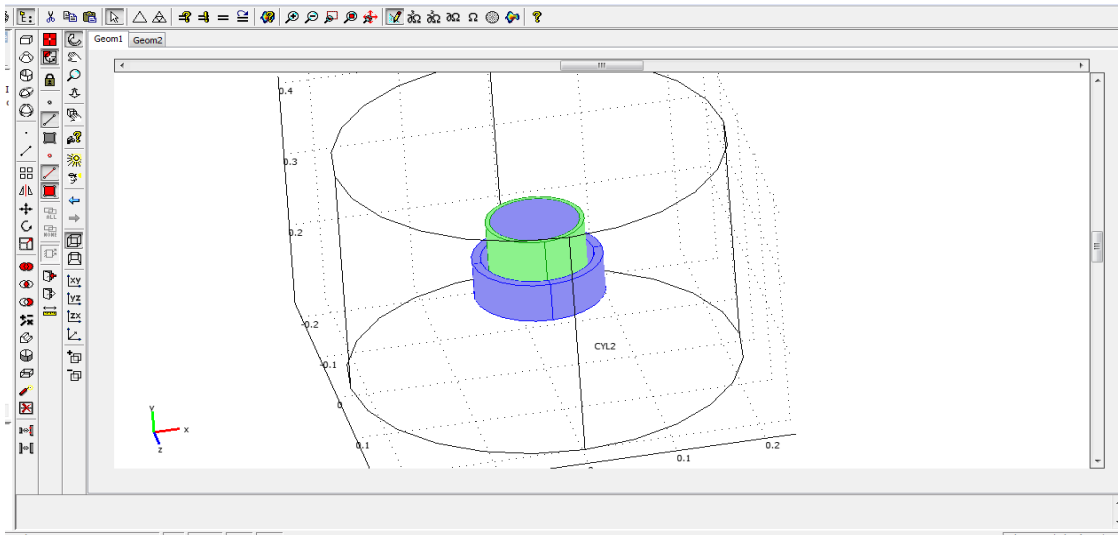


Fig IV.1 : géométrie 3D du système à réaliser

Le model 2D en axisymétrique se présente comme dans la figure suivante :

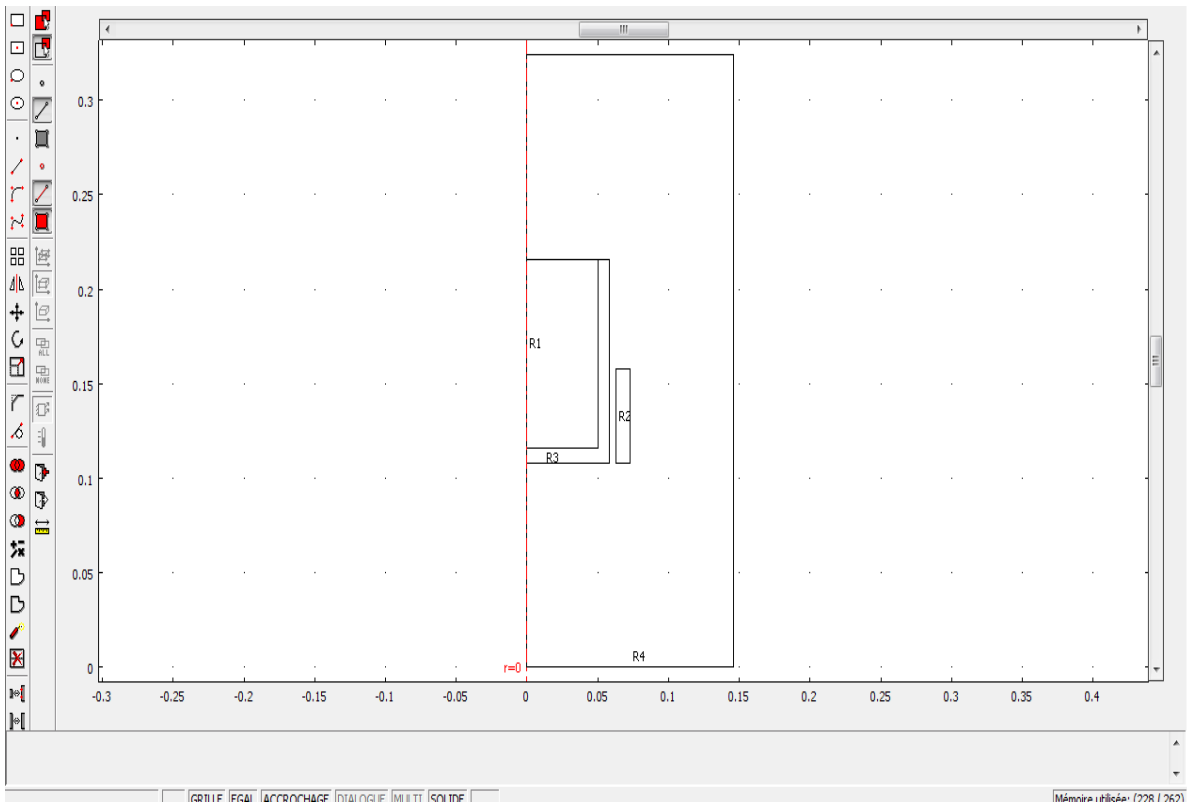


Fig IV.2 : géométrie 2D en axisymétrique du système a réaliser

4.5.2. Choix des modules physiques :

L'intérêt du logiciel Comsol Multiphysics réside dans la multitude des modules prédéfinis qui traitent la plus part des phénomènes. Dans notre étude, nous nous intéresserons au couplage entre les phénomènes électromagnétiques et les lois qui régissent le transfert de chaleur, pour cela nous ferons appel aux deux modules suivants :

- **AC/DC Module** : L'AC/DC Module permet de simuler des champs électriques, magnétiques et électromagnétiques dans des applications statiques et à basses fréquences. Les applications type concernées sont les condensateurs, les inducteurs, les isolateurs, les bobines, les moteurs, les actionneurs et les capteurs. Le module comporte des outils spécialisés pour extraire automatiquement des simulations les valeurs de paramètres tels que la résistance, la capacitance, l'inductance, l'impédance, la force et le couple.[19]
- **Heat transfert module (module transfert de chaleur)** : Ce module propose de nouveaux modes d'application comme le rayonnement de surface à surface, l'écoulement non-isotherme. De plus, la chaleur existe rarement en tant que physique isolée et se manifeste plutôt à travers de multiples interactions multiphysiques que FEMLAB arrive à coupler et à traiter de façon simultanée, plaçant ainsi les transferts de chaleur dans un contexte concret. Le dernier point-clé de ce module réside dans l'intégration d'une bibliothèque de modèles, constituée de 20 modèles avancés, prêt-à-l'emploi. Ces derniers permettent non seulement d'étudier différents types de transport de chaleur dans un environnement multiphysique, mais aussi d'accéder à un ensemble d'exemples que l'utilisateur peut ensuite adapter aux spécificités de ses applications.

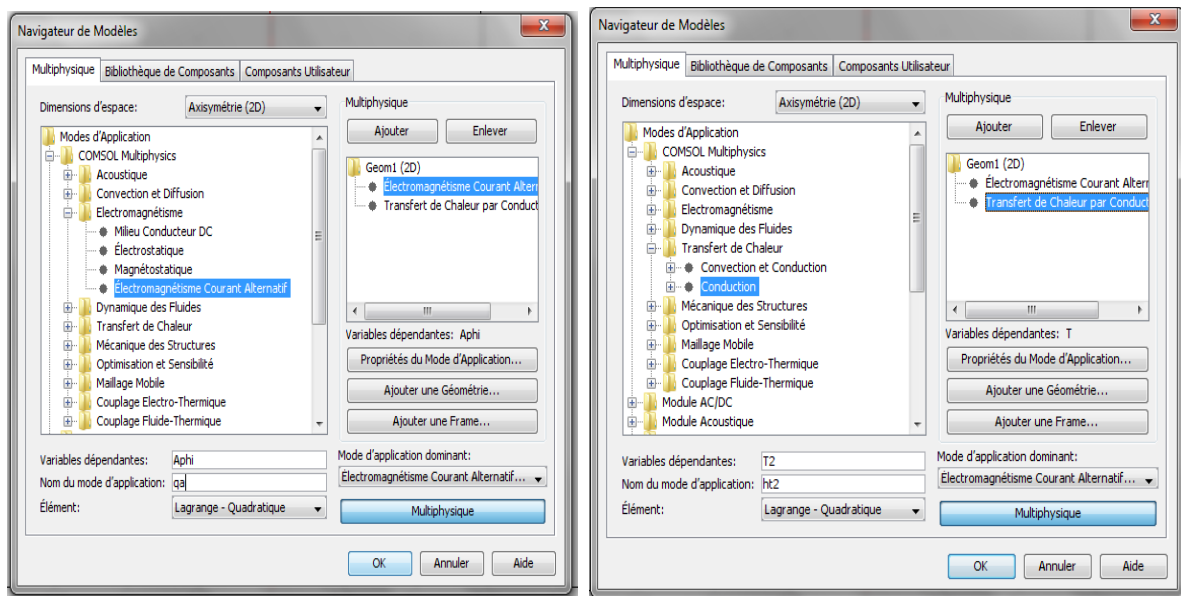


Fig IV.3 : fenêtre du navigateur des modules prédéfinis

4.5.3. Choix du type d'étude (paramétrage du solveur):

La résolution se fera par une analyse harmonique pour l'équation électromagnétique et une analyse temporelle (transitoire) pour l'équation de transfert de chaleur, le solveur quant à lui, il sera paramétré sur le mode temporelle comme on le voit sur la figure suivante :

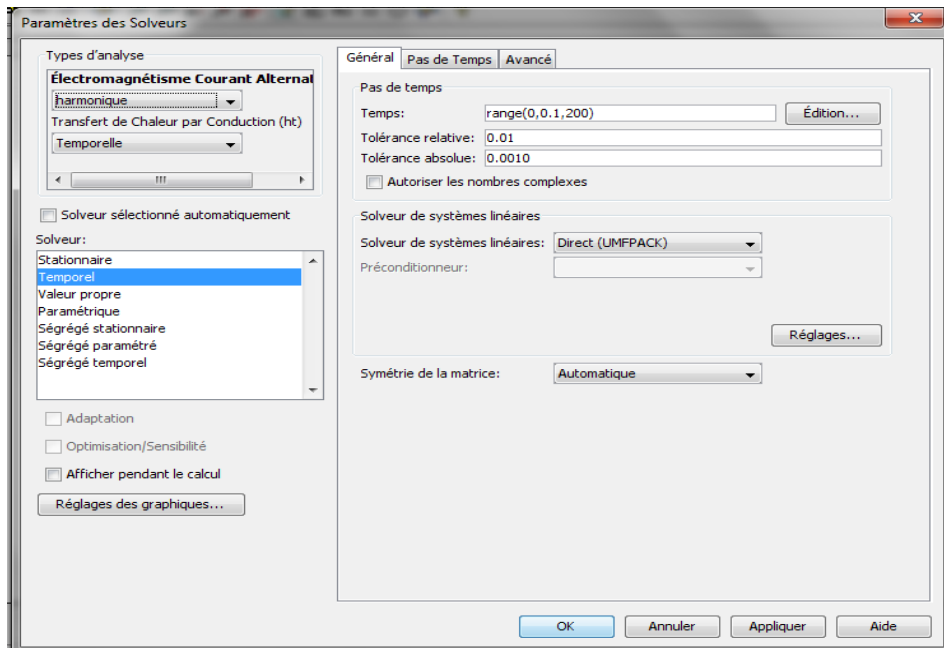


Fig IV.4 : fenêtre pour paramétrer le solveur

4.5.4. Construction de la géométrie :

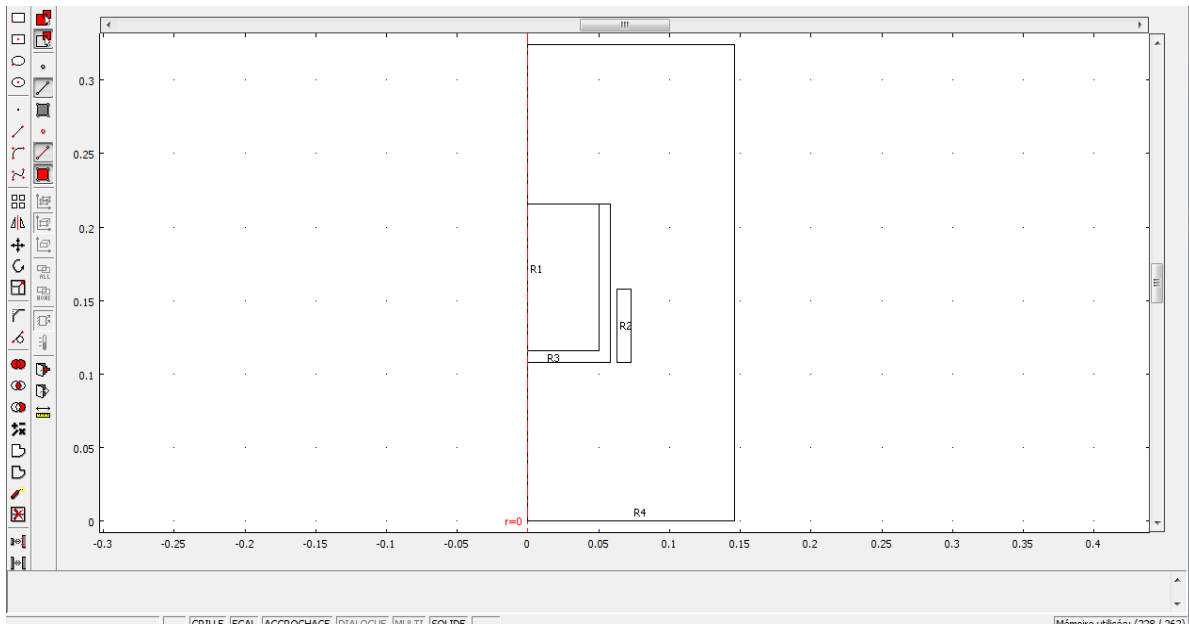


Fig IV.5 : géométrie du model à réaliser

Ou :

- La région R1 correspond à la charge (l'or)
- La région R2 correspond au conducteur en cuivre
- La région R3 correspond au creuset en alumine
- La région R4 correspond au vide

4.5.5. Paramétrage des modules physiques (choix des matériaux) :

Pour la bonne résolution de notre problème sous Comsol, nous allons ajouter les différents paramètres (électrique magnétique, thermique, etc) et cela dans chaque région afin de définir les propriétés physique de chacune d'elle.

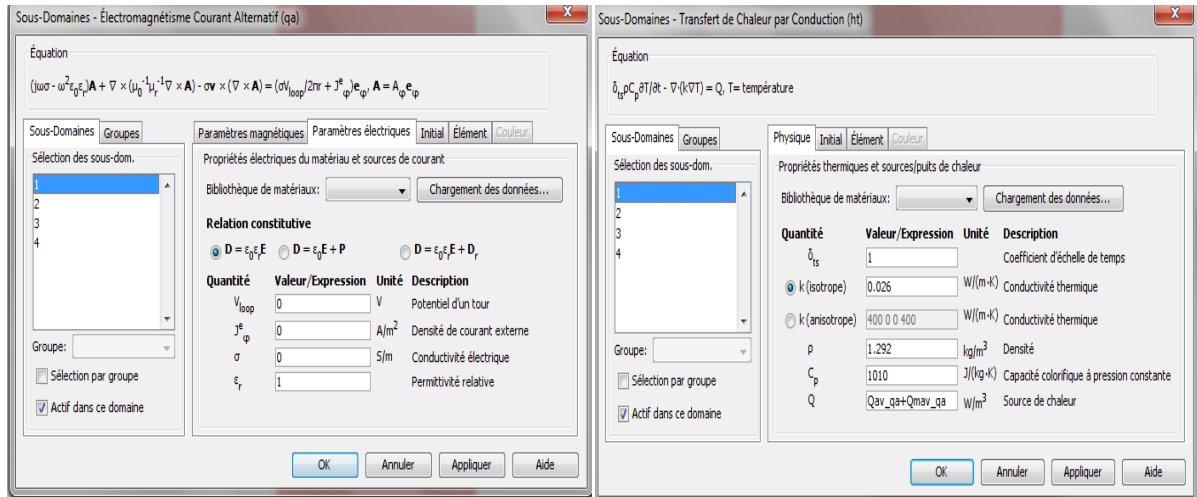


Fig IV.6 : fenêtre de paramétrage des matériaux

4.5.6. Conditions aux limites :

Pour représenter l'état électromagnétique en un point, en tenant compte des hypothèses simplificatrices le modèle se réduit alors à :

$$\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{rot}(\mu \text{rot} \vec{A}) = \vec{J}_s \quad (4.1)$$

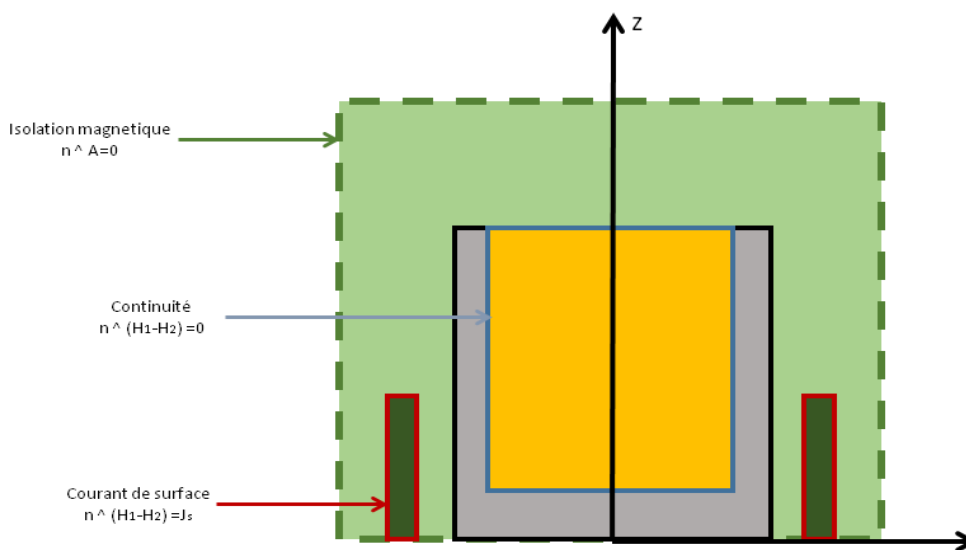


Fig IV.7 : Conditions aux limites du modèle électromagnétiques

En thermique, le modèle mathématique est régi par la loi de Fourier donnée précédemment. Le champ de la température T doit vérifier le modèle classique de diffusion de la chaleur suivant l'équation :

$$\text{div}(K\text{grad } T) + Q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.2)$$

La figure IV.8 représente les conditions de passage et aux limites du modèle thermique. En tenant compte des trois modes de transfert de chaleur (conduction convection et rayonnement)

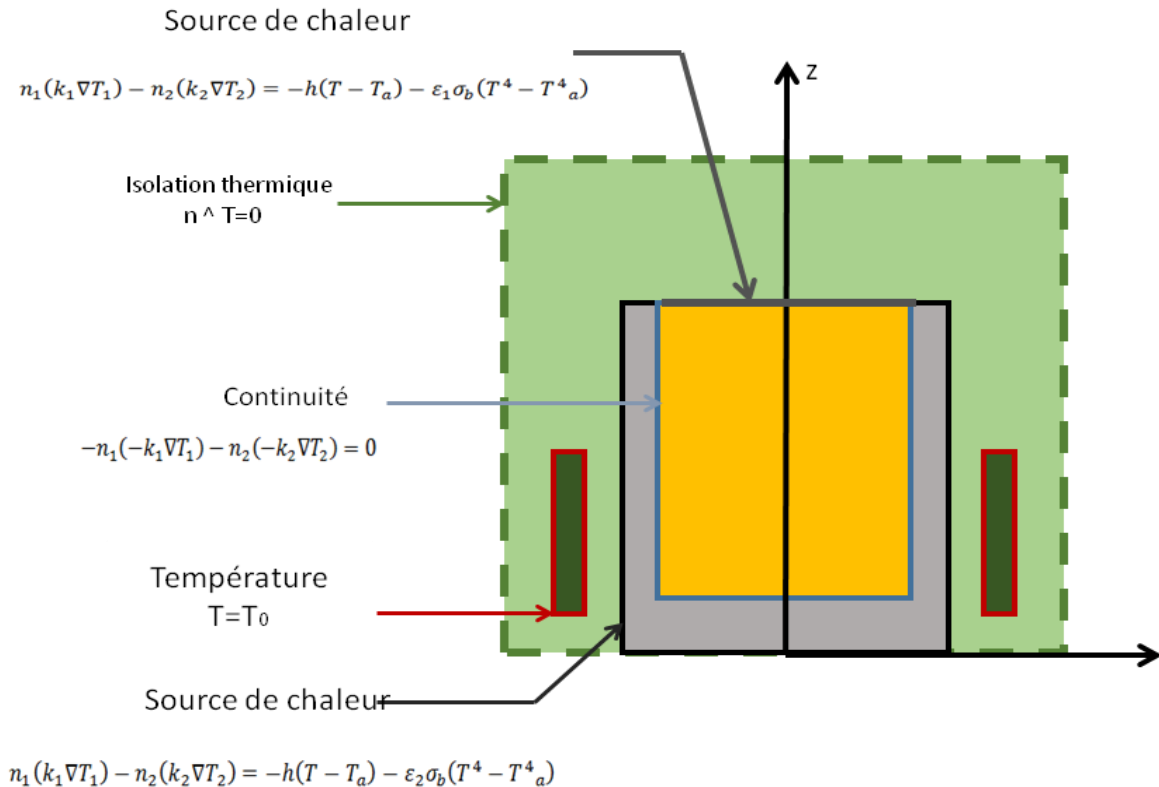


Fig IV.8 : Conditions aux limites du modèle thermique

4.5.7. Choix du solveur:

Le logiciel Comsol propose un ensemble de solveurs pouvant simuler les aspects électromagnétiques et thermiques et leur couplage; dans notre travail la résolution numérique des systèmes matriciels résultants des calculs électromagnétiques et thermiques est effectuée par un solveur direct : **UMFPACK** (Unsymmetric MultiFrontal method).

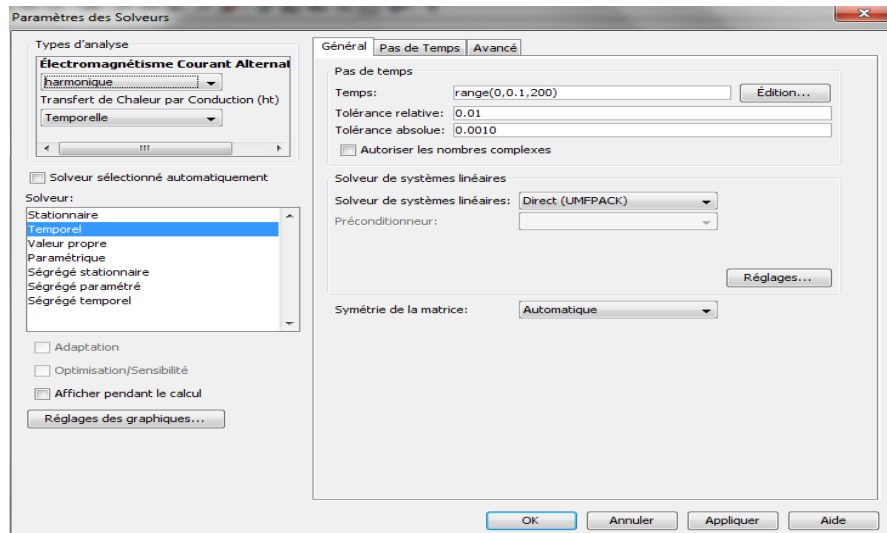


Fig IV.9 : fenêtre pour choisir le type de solveur

4.5.8. Choix du maillage :

Une des spécificités de la modélisation à éléments finis est que plus le nombre d'éléments croît plus les résultats obtenus s'approchent d'une solution réel. Cependant le temps de calcul nécessaire augmente considérablement avec le nombre d'éléments; en ce qui concerne notre travail ces éléments sont choisis comme des tétraédriques. Le Comsol Multiphysics propose neuf types de maillage de l'extrêmement fin à l'extrêmement grossier; dans ce travail il suffit d'utiliser le maillage normal (voir la figure IV-07-) car il possède le nombre d'éléments minimum mais permettant une précision suffisante. Ce maillage est le moins raffiné, mais encore suffisant pour obtenir un résultat acceptable.

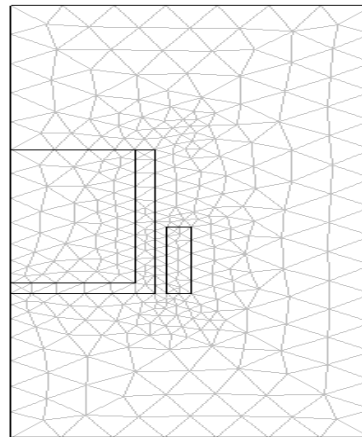
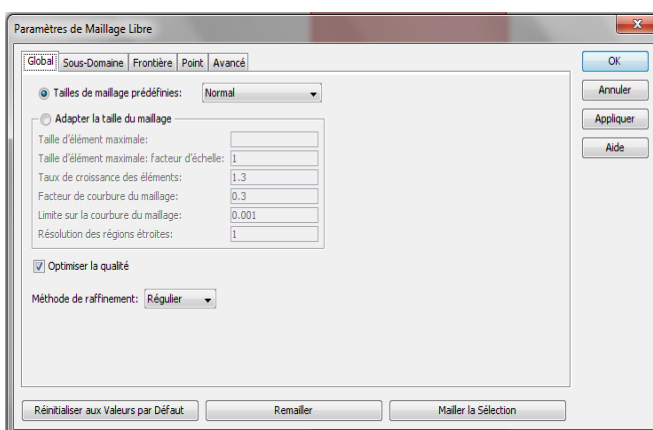


Fig IV.10 : fenêtre de paramétrage du maillage et le modèle maillé

4.6. Résultat de la simulation :

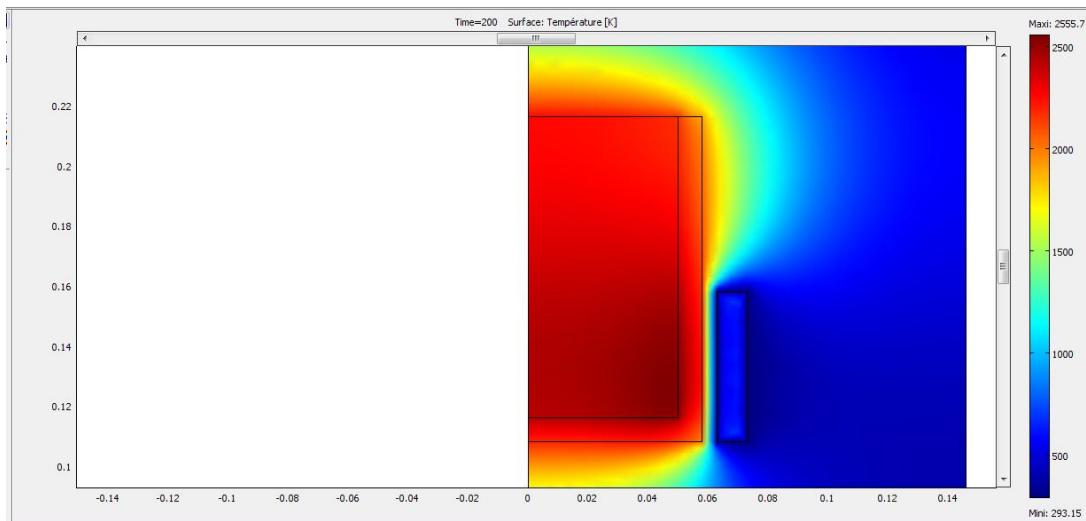


Fig IV.11 : répartition de la température dans le domaine d'étude

5. Exploitation des résultats :

Dans le but d'avoir un modèle optimal pour notre application, nous ferons une série de tests : nous essayerons de varier différentes grandeurs et voir l'effet de ces changements sur l'évolution de la fusion dans l'or :

5.1. Test 1 : variation de l'entrefer :

nous allons lancer l'application pour différents entrefers, nous obtenons les courbes d'évolution de la température suivantes :

- **Au plan de fusion le plus rapide (le point (0, 0.13))**

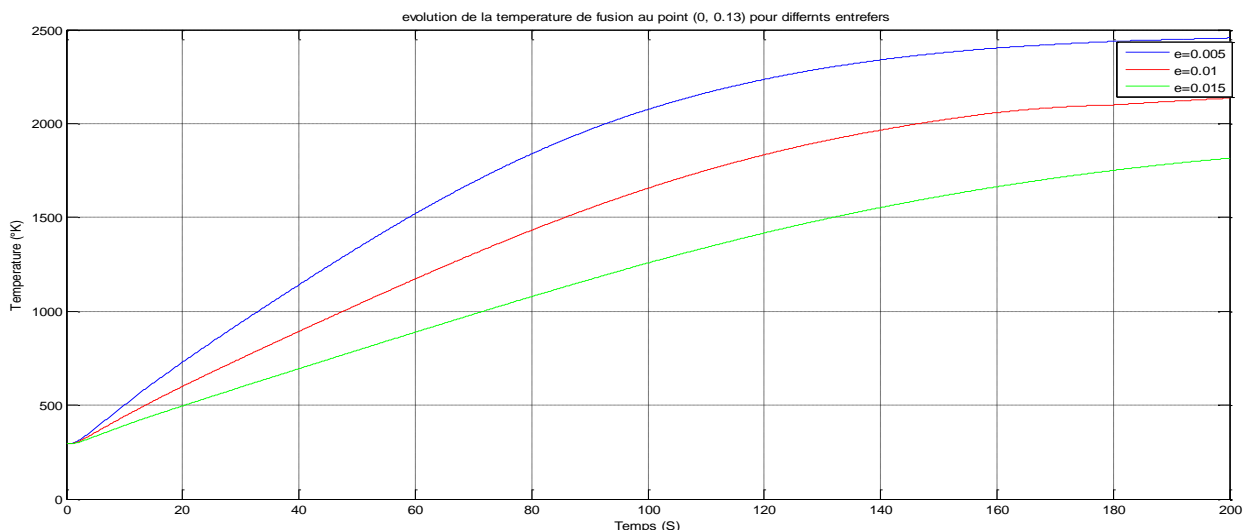


Fig IV.12 : évolution de la température pour différents entrefer (plan de fusion le plus rapide)

Chapitre IV : simulation du couplage magnétothermique

La température de fusion au point (0,0.13) est atteinte respectivement à :

$t=50.1s$ pour $e=0.005m$

$t=72.5s$ pour $e=0.01m$

$t=109.8s$ pour $e=0.015m$

- **Au plan de fusion de plus lent (le point (0, 0.216))**

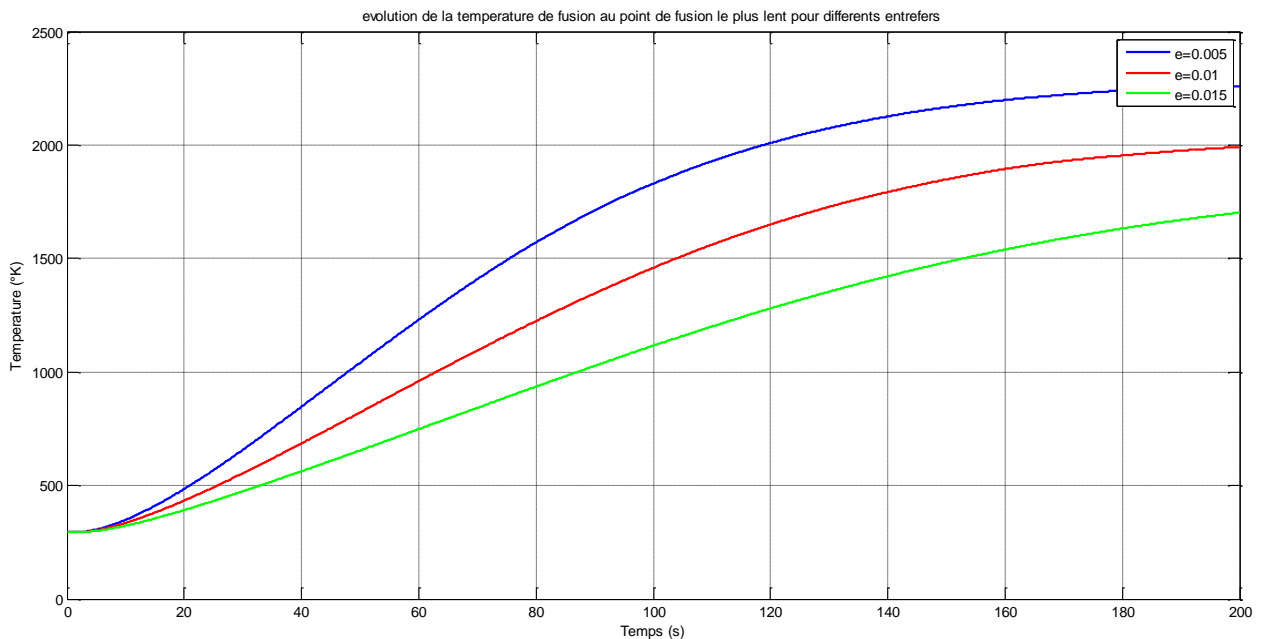


Fig 4.13 : évolution de la température pour différents entrefer (plan de fusion le plus lent)

La température de fusion au point (0, 0.216) est atteinte respectivement à :

$t=66s$ pour $e=0.005m$

$t=89.3s$ pour $e=0.01m$

$t=127.7s$ pour $e=0.015m$

- **Conclusion**

D'après les résultats de notre teste, nous constatons que le temps de fusion dans les plan de fusion le plus rapide et dans le plan de fusion le plus lent augmentent sensiblement avec l'augmentation de l'entrefer, ce qui indique que la distance entre le conducteur et la pièce à chauffer est un élément non négligeable pour diminuer les temps de chauffage de cette dernière.

5.2. Test 2 : variation de l'épaisseur du creuset :

On fixe l'entrefer à sa valeur optimale $e=0.005\text{m}$, et on lance notre application pour 3 différentes épaisseurs du creuset, à la suite de quoi nous obtenons les courbes d'évolution de la température de fusion en un point :

- **Au plan de fusion de plus rapide (le point (0, 0.13)) :**

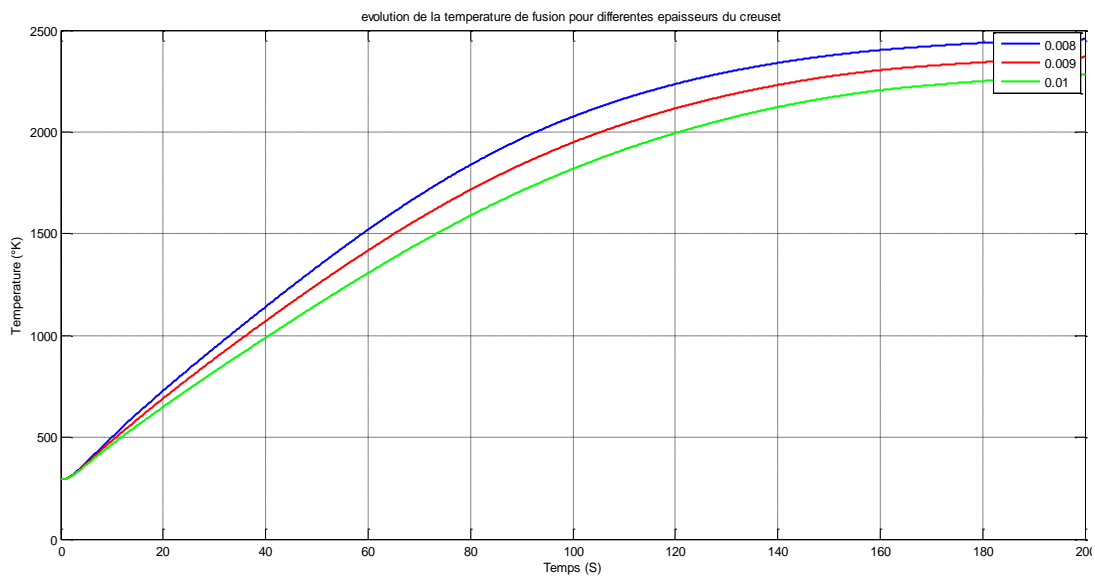


Fig IV.14 : évolution de la température pour différentes épaisseurs du creuset

La température de fusion est atteinte respectivement à :

$t=50.1\text{ s}$ pour $ep1=0.008\text{m}$

$t= 55.2\text{ s}$ pour $ep2=0.009\text{m}$

$t= 62\text{ s}$ pour $ep3=0.01\text{ m}$

- **Au plan de fusion de plus lent (le point (0, 0.216))**

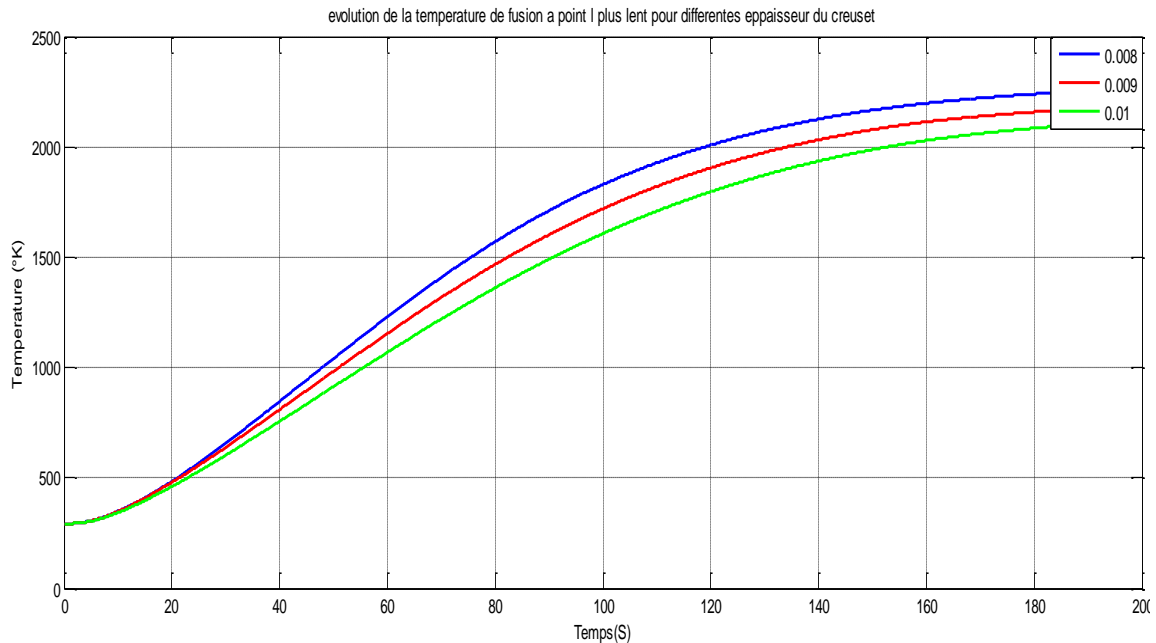


Fig IV.15 : évolution de la température pour différentes épaisseurs du creuset

La température de fusion est atteinte respectivement à :

$t = 66$ s pour $ep1 = 0.008$ m

$t = 71.3$ s pour $ep2 = 0.009$ m

$t = 78.3$ s pour $ep3 = 0.01$ m

- **Conclusion :**

Les résultats des tests pour différentes épaisseurs du creuset en alumine révèlent que les temps de fusion augmentent quand on augmente l'épaisseur du creuset, ce qui prouve l'influence qu'a l'épaisseur du creuset sur la vitesse du chauffage. Donc, dans le but d'optimiser notre modèle, il serait idéal d'aller vers un creuset avec une épaisseur minimale.

5.3. Test 3 : variation de la position verticale de l'inducteur

On fixe cette fois l'entrefer $e=0.005\text{m}$ et l'épaisseur du creuset $e_p=0.008\text{m}$, ces valeurs correspondent aux valeurs optimales relevées lors des 2 précédents tests. On va faire varier la hauteur des conducteurs par rapport au creuset : les résultats sont donnés dans les figures suivantes :

- **Au plan de fusion de plus rapide (le point (0, 0.13)) :**

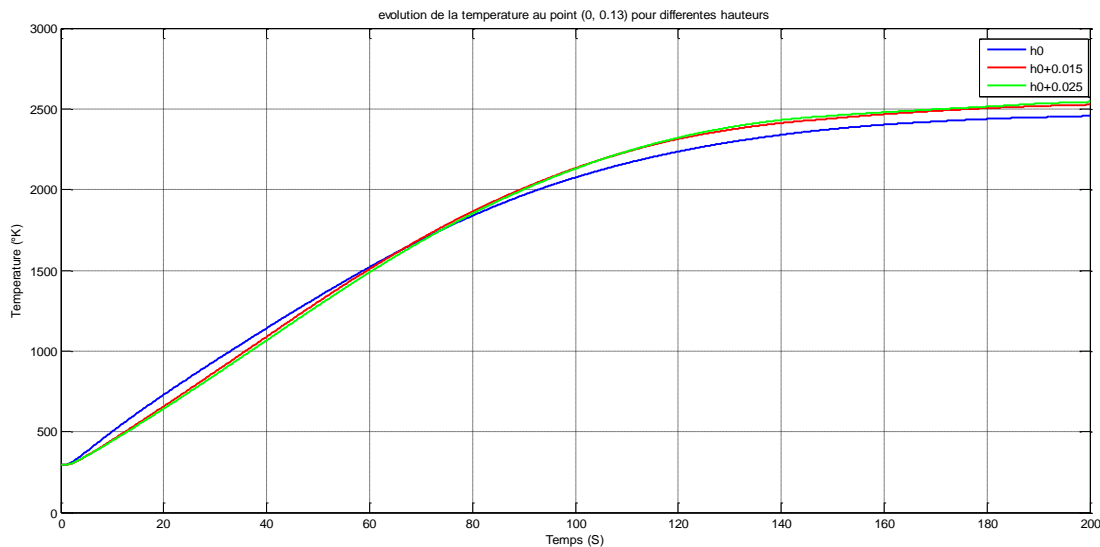


Fig IV.16 : évolution de la température pour différentes position verticale des conducteurs

La température de fusion est atteinte respectivement à :

$t=50.1$ s pour $h=h_0$

$t= 51.65$ s pour $h=h_0+ 0.015\text{m}$

$t= 52.75$ s pour $h=h_0+0.025\text{m}$

Au point (0, 0.13) la fusion se fait légèrement lentement à mesure qu'on change la position du conducteur

- **Au plan de fusion le plus lent (le point (0, 0216)) :**

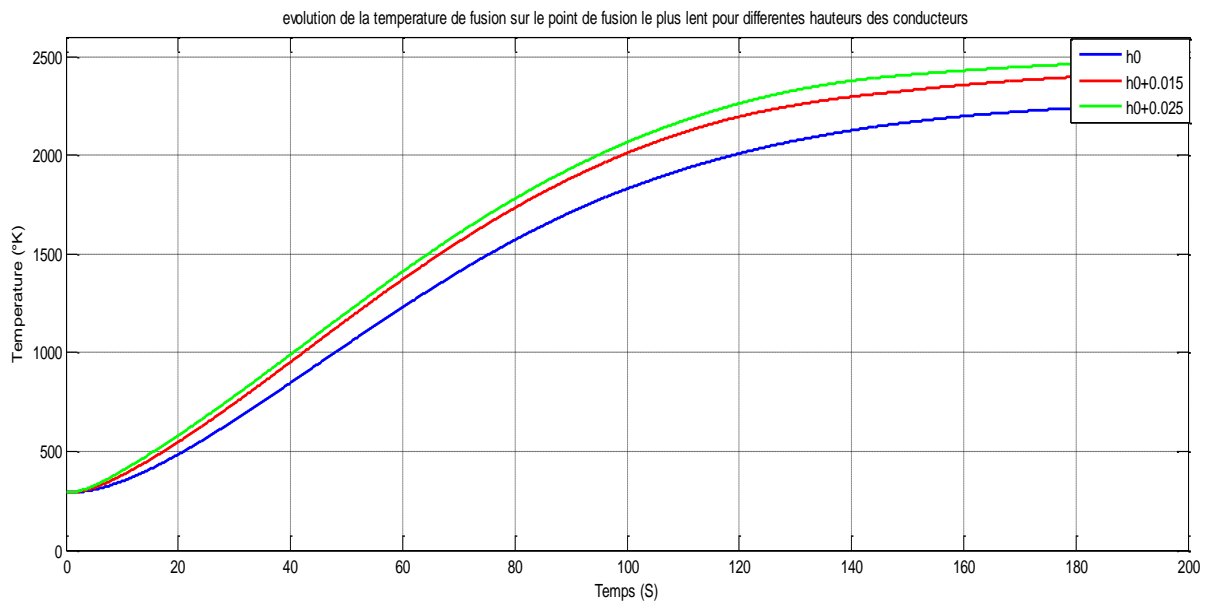


Fig IV.17 : évolution de la température pour différentes position verticale des conducteurs

La température de fusion est atteinte respectivement à :

$t=59.95$ s pour $h=h_0$

$t= 58.35$ s pour $h=h_0+ 0.015$ m

$t= 56.45$ s pour $h=h_0+0.025$ m

La fusion devient plus rapide au point (0, 0.216) quand on change la position des conducteur. Cela veut dire que la fusion se fait plus rapidement sur un point quand le conducteur est prêt de ce dernier

La figure suivante représente l'illustration de ce que nous avons fait dans ce dernier teste

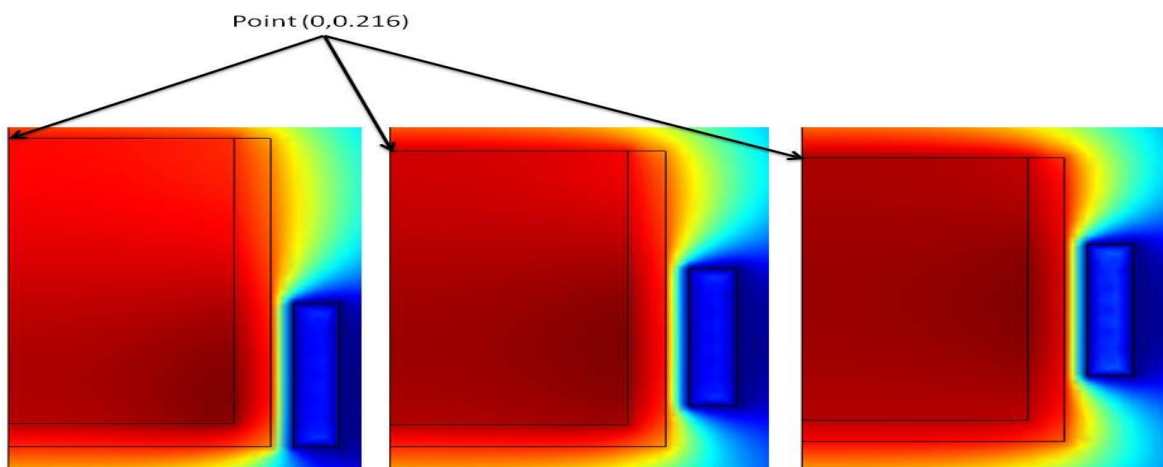


Fig IV.18 : répartition de la température pour différentes position des conducteurs

- Conclusion :

Nous constatons que la fusion est plus lente à mesure qu'on s'éloigne des conducteurs (source d'induction)

Des différents tests effectués, il en résulte le modèle optimisé avec les dimensions suivantes :

Entrefer : $e=0.005\text{m}$

L'épaisseur du creuset : $e_p=0.008\text{m}$

La hauteur des conducteurs : $h=h_0=0.108\text{m}$

- Répartition de la température dans toute la charge (l'or) :

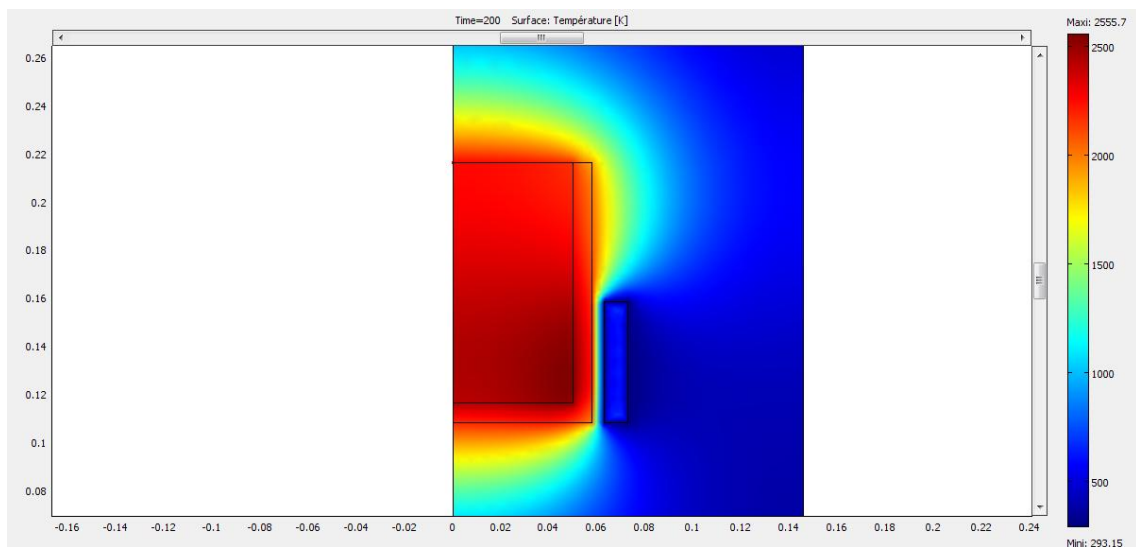


Fig IV.19 : répartition de la température dans la charge pour le modèle optimisé

- L'évolution de la conductivité électrique en fonction de la température :

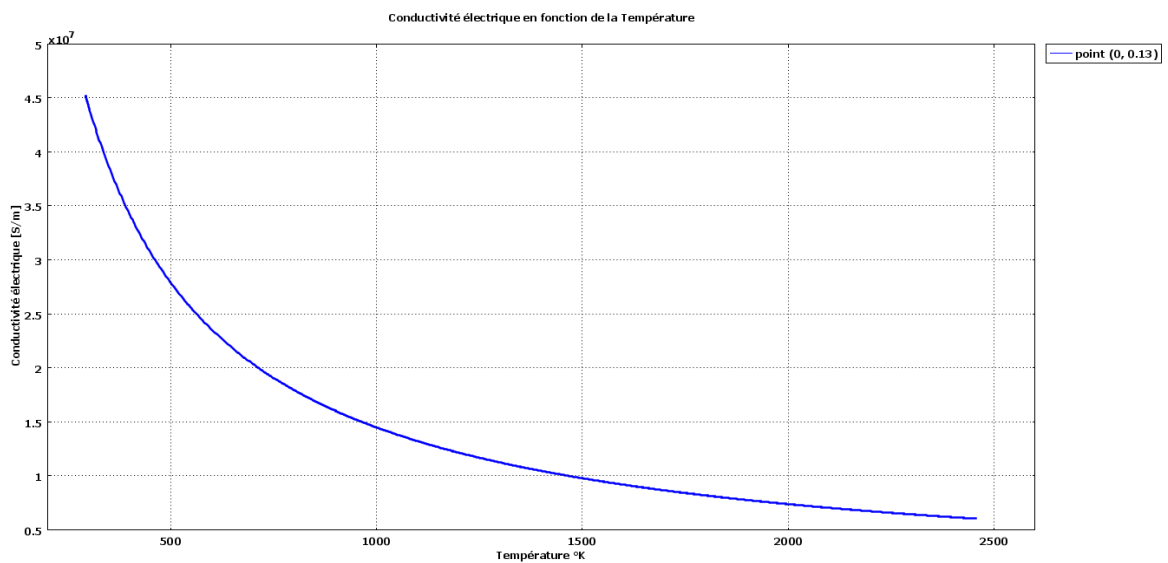


Fig IV.20 : évolution de la conductivité électrique en fonction de la température

- La répartition du potentiel magnétique dans la charge a $T=T_f$:

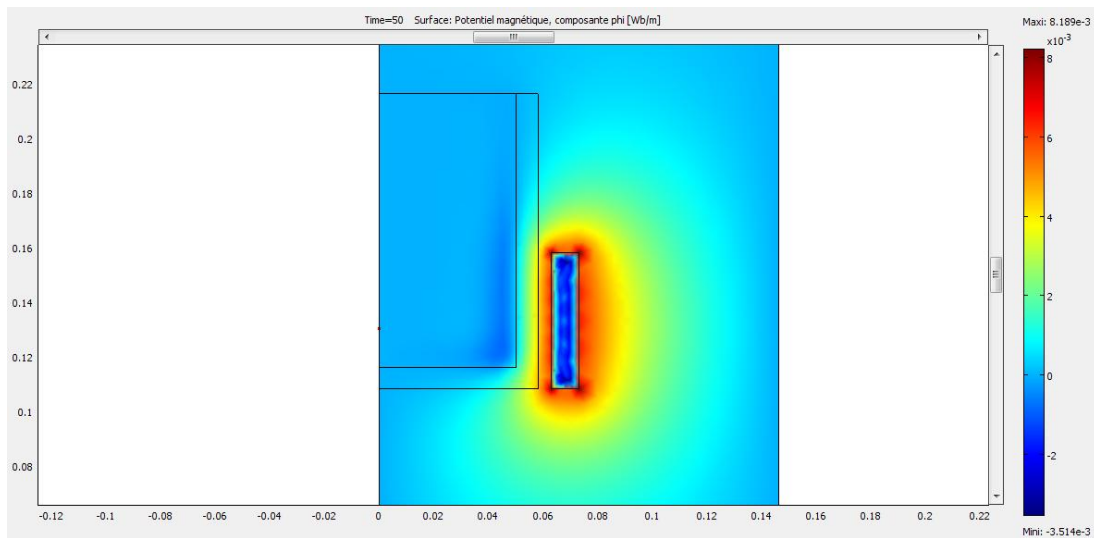


Fig IV.21 : La répartition du potentiel magnétique dans la charge a $T=T_f$

-répartition de la densité d'énergie totale :

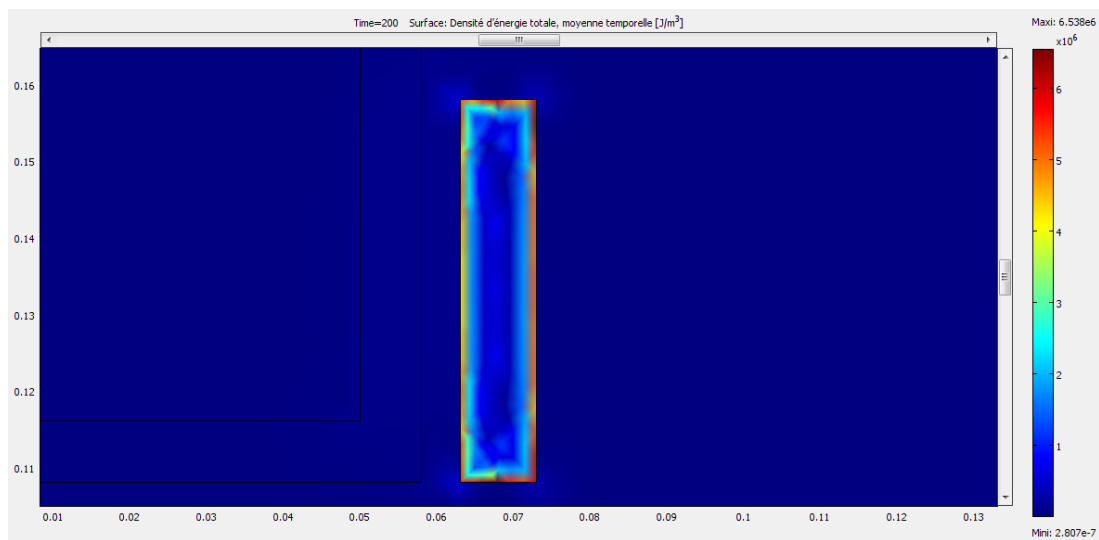


Fig IV.22 : La répartition de la densité d'énergie totale dans la charge a $T=T_f$

5.4. Vérification de l'homogénéité de la fusion dans toute la charge :

Pour ce faire, on prendra 3 points différents :

- Le premier point (0, 0.13) qui se trouve dans le plan de fusion le plus rapide :

La fusion est atteinte au bout de 50 s.

- Le deuxième point (0, 0.162) qui se trouve entre le plan de fusion le plus rapide et le plan de fusion le plus lent :

La fusion est atteinte au bout de 56.85 s.

- Le troisième point (0, 0216) qui se trouve sur le plan de fusion le plus lent :

La fusion est atteinte au bout de 65.95 s

La température à 65.95 s au point qui se trouve dans le plan de fusion le plus rapide est de 1623 °K, et la température au point le plus proche du conducteur (le plus chaud) est de 1811°K. La température d'ébullition qui est de 2913°K n'est pas atteinte

Nous pouvons donc affirmer que la fusion est homogène dans toute la charge.

5.5.Comparaison entre le cas linéaire et non linéaire :

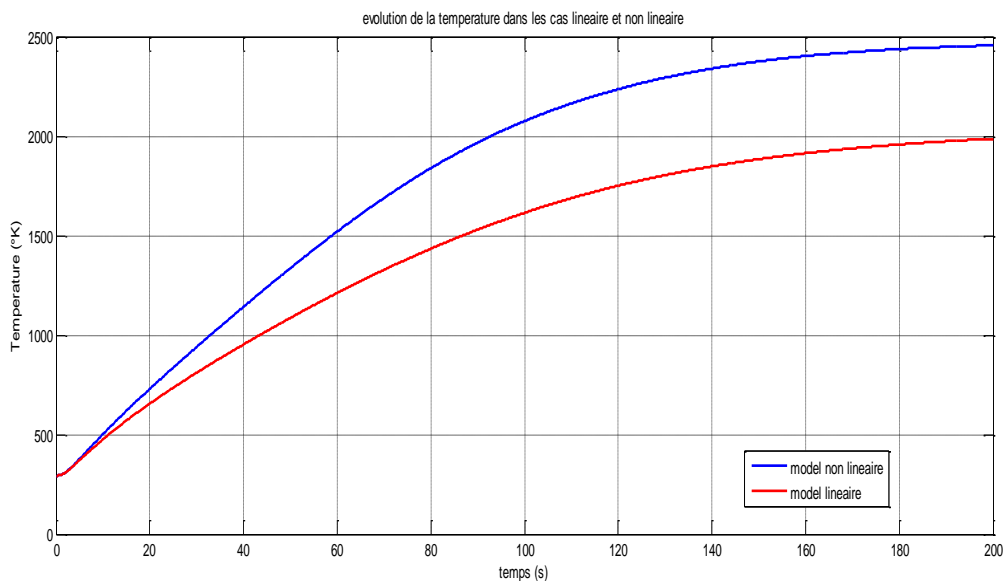


Fig IV.23 : L'évolution de la temperature dans les cas linéaire et non linéaire

D'après les résultats obtenus, nous déduisons que la température de fusion est atteinte plus rapidement dans le cas linéaire, cela est dû au fait que notre modèle dans le cas non linéaire s'approche de la réalité car il prend en compte la variation de la conductivité électrique du matériau en fonction de la température.

5.6.Influence des paramètres électriques sur l'évolution de la fusion :

5.6.1. Influence des courants de surface injectés :

On va pour ce teste, injecter différents courants sur la surface des conducteurs, la courbe des températures obtenue est la suivante :

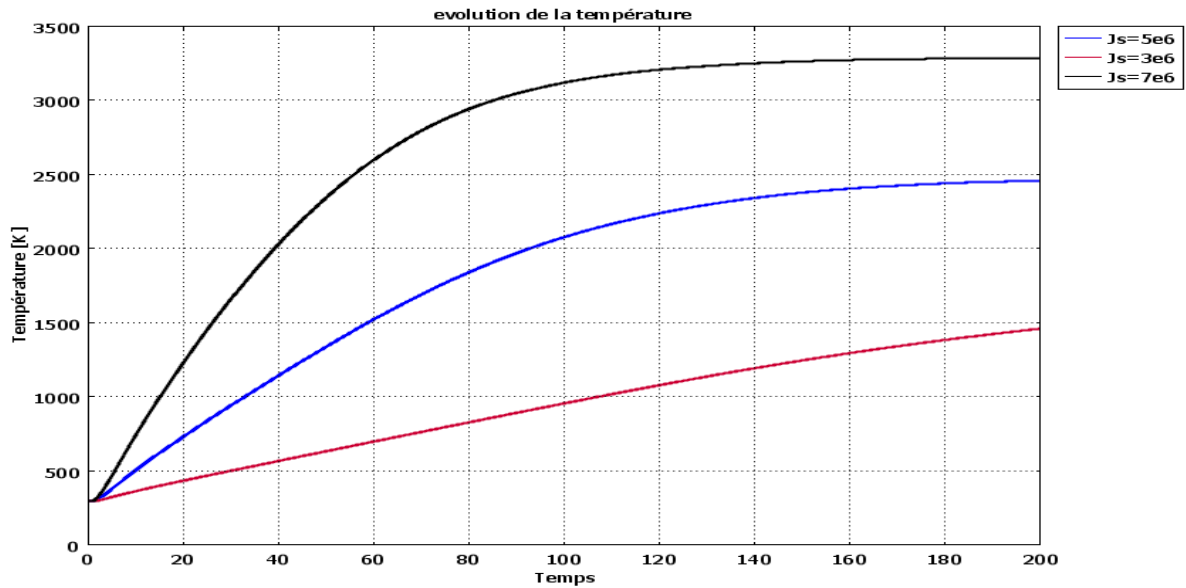


Fig IV.24 : évolution de la température pour différents courants injectés

- La répartition du potentiel magnétique :

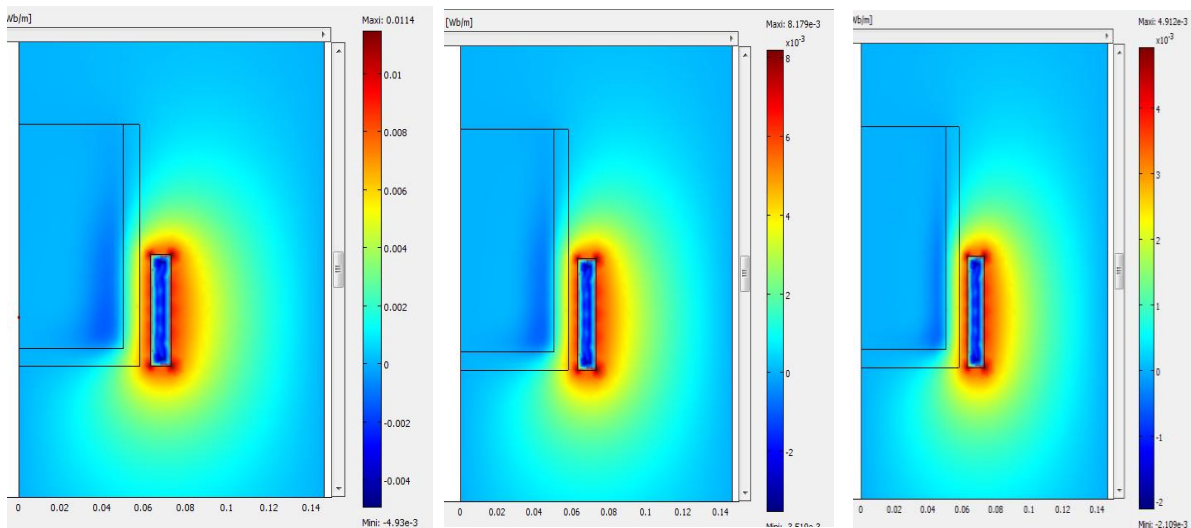


Fig IV.25 : répartition du potentiel magnétique pour différents courants injectés

De gauche à droite, les figures correspondent aux répartitions pour respectivement $J_s = 7e6 \text{ A/m}^2$, $J_s = 5e6 \text{ A/m}^2$ et $J_s = 3e6 \text{ A/m}^2$

La répartition du potentiel magnétique se fait de la même manière dans les 3 essais nous donne les valeurs maximale de $4.912e-3 \text{ Wb/m}$ pour $J_s = 3e6 \text{ A/m}^2$, $8.179e-3 \text{ Wb/m}$ pour $J_s = 5e6 \text{ A/m}^2$ et enfin 0.0114 Wb/m pour $J_s = 7e6 \text{ A/m}^2$.

La répartition du potentiel se fait sur les surfaces du conducteur, et il est fortement lié à la densité des courants injectés sur ces mêmes conducteurs.

- La répartition de la densité d'énergie totale:

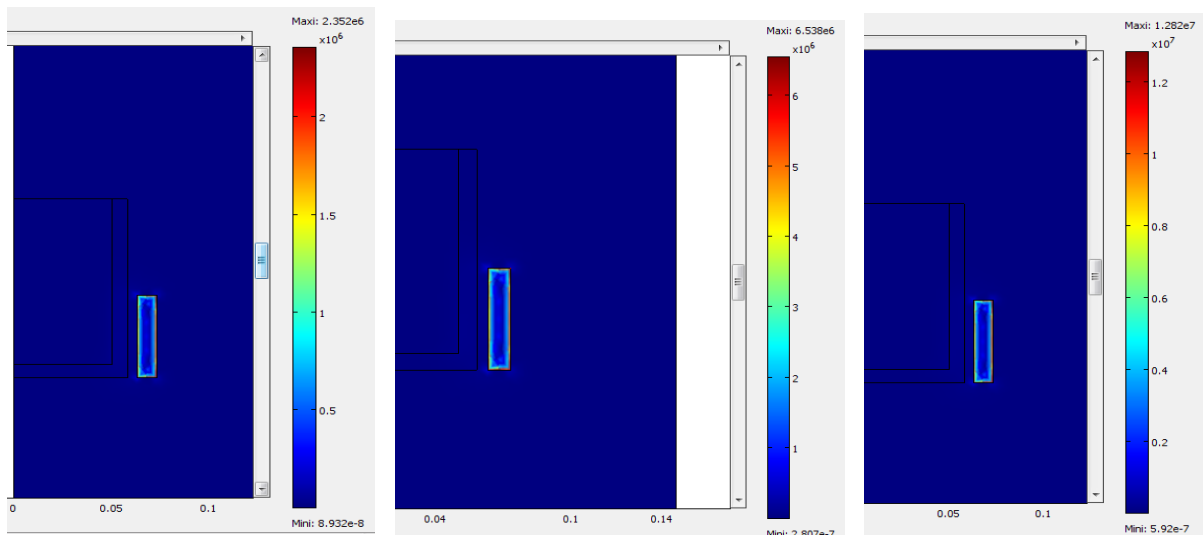


Fig IV.26 : répartition de la densité d'énergie totale pour différents courants injectés

De gauche à droite, les figures correspondent aux répartitions pour respectivement $J_s=7e6 A/m^2$, $J_s=5e6 A/m^2$ et $J_s=3e6 A/m^2$

La répartition de la densité d'énergie totale se fait de la même manière dans les 3 essais, les valeurs maximales sont de $2.352e6 J/m^3$ pour $J_s=3e6 A/m^2$, $6.538e6 J/m^3$ pour $J_s=5e6 A/m^2$ et enfin $1.282e7 J/m^3$ pour $J_s=7e6 A/m^2$.

La répartition de la densité d'énergie totale se fait uniquement sur les surfaces du conducteur, sa variation est fortement liée à la densité des courants injectés sur ces mêmes conducteurs.

- Conclusion

L'augmentation de la densité de courant d'alimentation introduit une augmentation dans les densités des sources de chaleur. Ces dernières sont localisées dans l'épaisseur de peau, la température augmente rapidement dans cette zone. Finalement on peut dire que la densité de courant dicte la nature de traitement ; pour fuser l'or (chauffage à cœur) on utilise des densités de courant de l'ordre de $10^6 A/m$.

5.6.2. Influence de la fréquence des courants injectés :

Pour voir l'influence de la fréquence des courants surfaciques sur la température, on va faire différents tests où on changera la valeur de la fréquence, le résultat pour $f=1e2 Hz$, $f=5e2 Hz$, $f=1e3 Hz$, est le suivant :

- évolution de la température :

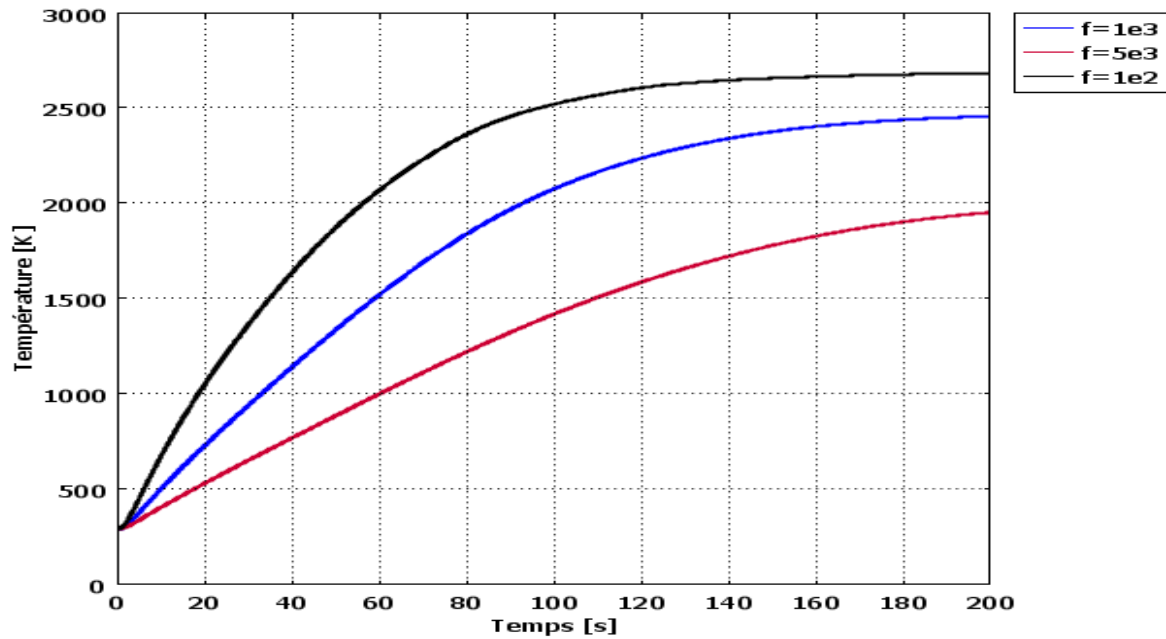


Fig IV.27 : évolution de la température pour différentes fréquences des courants injectés

- Répartition du potentiel magnétique pour différentes fréquences :

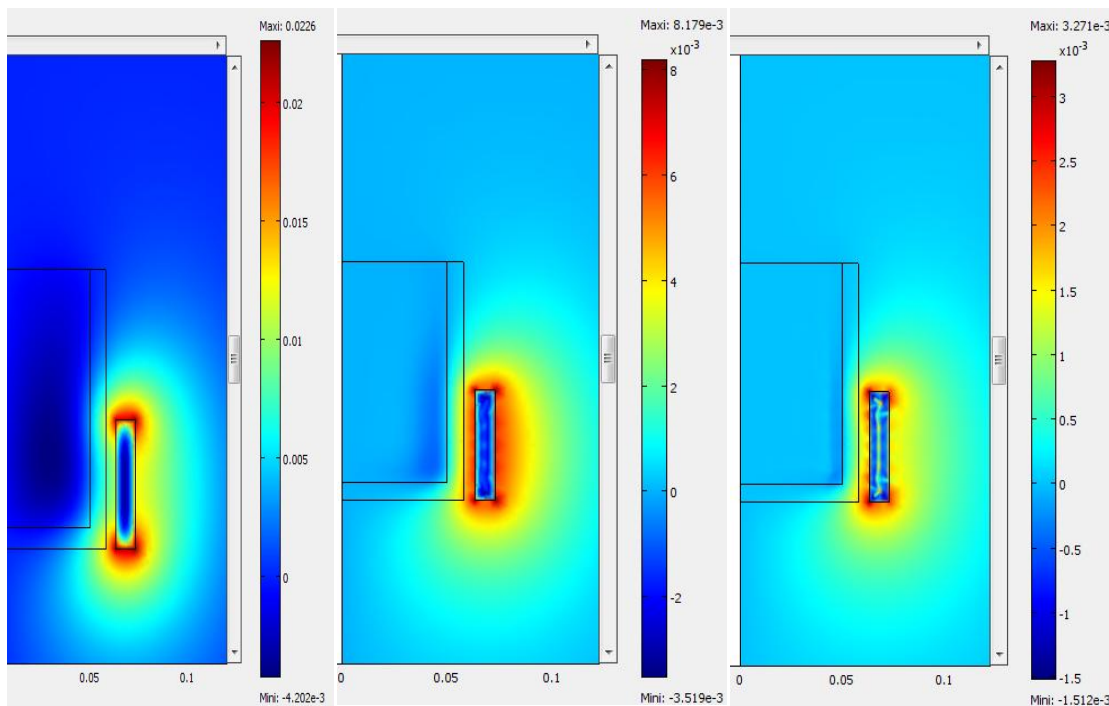


Fig IV.28 : répartition du potentiel magnétique pour différentes fréquences des courants injectés

De gauche a droite, les figures correspondent aux répartitions pour respectivement $f=1e2$ Hz, $f=5e2$ Hz, $f=1e3$ Hz

- Répartition de la densité d'énergie totale pour différentes fréquences :

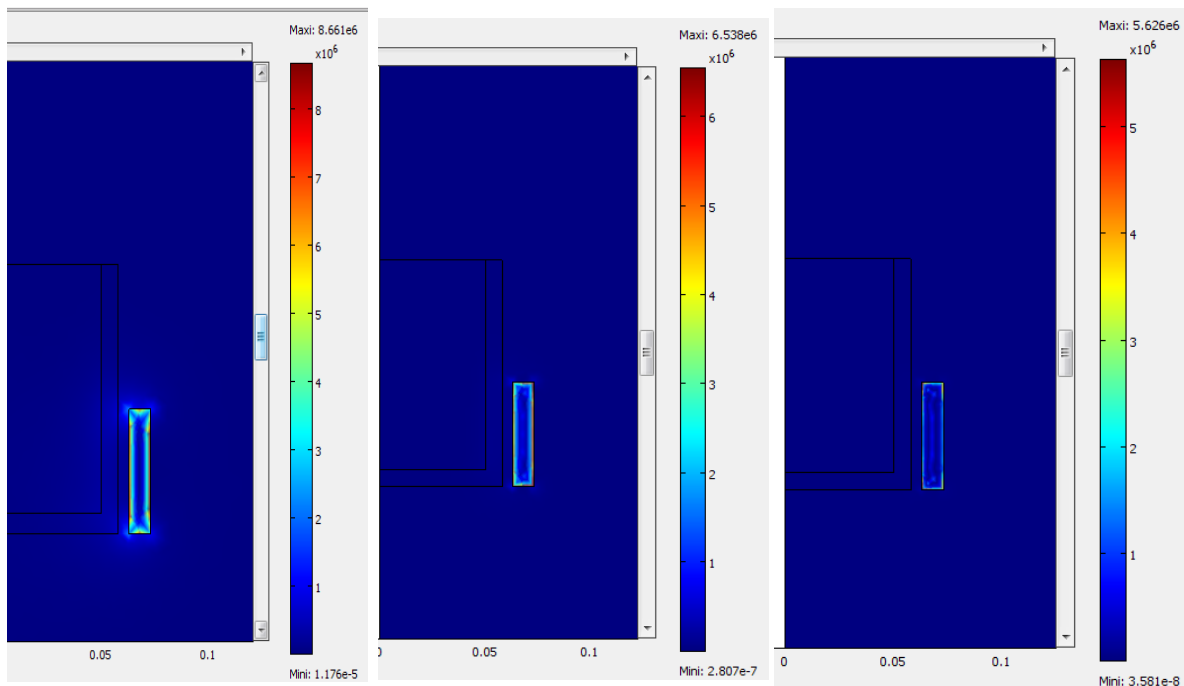


Fig IV.29 : répartition de la densité d'énergie totale pour différentes fréquences des courants injectés

De gauche à droite, les figures correspondent aux répartitions pour respectivement $f=1e2$ Hz, $f=5e2$ Hz, $f=1e3$ Hz

Nous avons remarqué un changement significatif des temps de fusion, la variation de celles-ci sont inversement proportionnelle à la variation de la fréquence des courants injectés en surface. Nous déduisons donc que la fréquence a une influence significative elle permet de contribuer à plus d'amélioration de notre modèle.

6. Conclusion :

Après une brève introduction, nous avons vu brièvement les méthodes numériques et ses développements avec l'outil informatique, ensuite on a cité quelques logiciels utilisant la méthode des éléments finis en particulier Comsol Multiphysics.

Pour on a posé le problème à étudier qui consiste à un système de chauffage par induction pour fusionner de l'or.

On a élaboré un modèle en 2D sous Comsol Multiphysics. D'après la simulation on remarque que cette technique permet de réduire le temps de fusion d'or par rapport aux méthodes de chauffage plus standard.

On a besoin d'adopter la distance entre les conducteurs et le creuset (l'entrefer) et des épaisseurs du creuset faibles pour obtenir une température transmise dans la charge maximale, puis on a choisi une position verticale d'inducteur d'une façon permettant de répartir les courants induits vers les deux pôles de la charge par des valeurs comparables.

On a pu vérifier que la fusion était homogène ce qui veut dire que notre modèle est viable. Cette homogénéité est surtout commandée par la densité de courant d'alimentation ainsi la

Chapitre IV : simulation du couplage magnétothermique

fréquence. En ce qui concerne la fusion de l'or, on a pu la réaliser par des densités de courant de l'ordre 10^6 A/m et des fréquences de l'ordre 10^3 Hz.

Conclusion générale

L'induction électromagnétique a pour particularité de générer la chaleur directement à l'intérieur du matériau à chauffer. Cette particularité présente de nombreux atouts par rapport aux méthodes de chauffe plus standard, notamment la réduction des temps de chauffe et des rendements élevés, ou encore la possibilité de chauffer de façon très sélective. [19]

Les principaux avantages qu'offre cette méthode sont la vitesse et la précision dans le chauffage.

La résolution des problèmes couplés comme les problèmes magnétothermique n'est pas commode, pour ce faire, on a mis au point plusieurs méthodes parmi les quelles on trouve la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis... dans notre cas on a choisis la méthode des éléments finis pour la résolution de notre problème.

Nous avons au cours de ce travail élaboré un modèle 2D en axisymétrique sous Comsol Multiphysics.

La visualisation de l'évolution de la température dans la charge où l'optimisation du temps de fusion à été notre principal objectif, ceci fait, nous avons obtenu un model optimisé qui nous permet d'atteindre la température de fusion en moins de 50 secondes au plan de fusion le plus rapide.

D'après la simulation on peut noter que cette technique permet de réduire considérablement le temps de fusion d'or par rapport aux méthodes de chauffage plus standards (réduction du temps de fusion jusqu'à moins d'une minute). Le choix de la zone de chauffage, la position, la forme d'inducteur et la fréquence ainsi que les dimensions du creuset sont des paramètres qui permettent d'adapter la source de chaleur à l'application désirée.

Le modèle optimisé résultant des différents essais indique qu'il faut réduire l'entrefer et l'épaisseur du creuset pour obtenir une température transmise vers la charge maximale, puis de choisir une position verticale d'inducteur d'une façon permettant de répartir les courants induits vers les deux pôles de la charge par des valeurs comparables.

Les différents testes ont été réalisés avec le souci de ne pas avoir une fusion hétérogène de l'or qui reste un des plus grands dilemmes qu'on doit relever dans les systèmes de chauffage par induction. Nous avons aussi fait attention a ce que l'or n'atteigne pas sa température d'ébullition.

On a ensuite vu l'influence de la densité de courant d'alimentation ainsi que sa fréquence. Les résultats obtenus montrent que les fréquences optimales des courants d'alimentation sont de l'ordre de 10^3 Hz et leur densité sont de l'ordre de 10^6 A/m²

Nous avons choisis certaines hypothèses simplificatrices pour faciliter notre étude : On considère que la conductivité électrique de l'or répond uniquement à une variation linéaire de la température et toutes les autres propriétés électromagnétiques et thermiques sont constantes

prenant leurs valeurs à la température ambiante. On néglige le phénomène hydrodynamique qui apparaît dans le domaine liquide du matériau élaboré.

La prise en compte de la variation de ces paramètres dans les travaux futurs rendra les résultats de simulation très proches des résultats expérimentaux.

Les problèmes résultant de la réfraction de l'alumine pourra pousser les chercheurs dans ce domaine à choisir un matériau supportant mieux des températures atteignant la température d'ébullition de l'or.

Les effets de la variation des autres paramètres tels que la disposition de l'inducteur, l'épaisseur du creuset, la fréquence et la densité des courant ainsi que leurs fréquences ont été également étudiés et optimisés.

A l'issue de ce travail, nous recommandons que les travaux futures soient orientés vers :

- L'utilisation de bobines solénoïdes dont le nombre de spires peut jouer un rôle favorable dans le chauffage par induction ou des bobines de précision usinées en cuivre massif et brasées, la complexité de ces bobines détermine l'efficacité et le rendement du chauffage de la pièce.
- L'utilisation de creusets froids : Le principe de ce dernier est d'induire directement des courants électriques au sein de la charge pour élever sa température sans chauffer le creuset, alors que le pot de fusion assure la chauffe de l'or par conduction thermique depuis les parois du pot jusqu'au cœur de la masse de l'or.
- réaliser un couplage plus général introduisant les phénomènes électromagnétiques, thermiques, élastiques et mécaniques. Ce couplage s'approchera plus de la réalité.
- Faire la simulation de notre modèle en 3D, cela amènera encore plus de précision aux résultats de notre étude.

Bibliographie :

[01] : le Groupe GH Electrotermia 2011, info@ghinduction.com , Tous droits réservés

[02] : Nouredine ben sedira, mémoire magister en électrotechnique, option Machines Electriques Et Commande Des Système ; contribution à l'étude du couplage électromagnétique-thermique dans une charge à symetrie axiale (étude + simulation), , universite de batna.

[03] [19] : JEANT CALLBAUT, « Guide Power Quality Section 7: Efficacité Energétique », www.leonardo-energy.org/France, Edition Août 2007.

[24] nadjafov, « Fours a inductions », science des matériaux

[05] :«Coursd'électrothermie»,http://gte.univ-littoral.fr/workspaces/documents-mperrrot/coursdelectrothermie/downloadFile/file/Cours_d_electrothermie?nocache=1302247792.

[06] : AZZAOUI SEDDIK, « Modélisation des phénomènes électromagnétiques et thermiques couplés dans les dispositifs de chauffage induction par couplage : Méthode des volumes finis (CVM)- Algorithme alterné » thèse de magister université de Batna 2002.

[07] M. SVEN WANSER, « Simulation des phénomènes de chauffage par induction : Application à la trempe superficielle » thèse de doctorat de l'Ecole Doctorale de Lyon, 1995.

[09] Gérard DEVELEY, Chauffage par induction électromagnétique : principes - Modélisation numérique des phénomènes couplés

Référence D5935 | Date de publication :10 févr. 2000

[10] Sidi Ahmed katia, mémoire e Master entrainements electriques « methode des circuit couplés basée sur le calcul des mutuelles appliquées aux dispositifs electriques », université mouloud Mammeri de tizi-ouzou,2014.

[12] SERWAY, PHYSIQUE 2, Electricité et Magnétique, 3ème édition, Canada, 1992.

[14] Yamina belkhiri, mémoire de magister en electrotechnique, Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques et Mécaniques Couplés par la Méthode des Volumes Finis (CVM). Université de batna

[15] : M. BELLIER, A.GALICHON, F.LUCAS, électricité industrielle, Delagrave, 1980.

[16] : ANGOT, « Complément de Mathématiques à l'Usage des Ingénieurs », Masson, 1972.

[17] : CHATRI KHAMSSA, « Etude des phénomènes magnétothermiques dans les dispositifs de chauffage par induction par la méthode des éléments finis », thèse de magister de l'université de Batna, 2003.

[18]http://fr.wikiversity.org/wiki/Introduction_aux_transferts_thermiques/Modes_de_transfert_de_chaleur

[19] : Fadhila BOUTOUDJ, Modélisation par éléments finis de phénomènes thermomécaniques d'une structure type PBGA, mémoire de master en entrainements électriques, , UMMTO,2012.

[20] : <http://cfao30.ulb.ac.be/beams/teaching/meca-h-501/Notes/tp01-introduction-Comsol.pdf>.

[21] M. LAKHDAR, « Contribution à la CAO optimisée des machines électriques, application au moteur linéaire à induction». Thèse doctorat 2005, université de BATNA.

[22] : F.BOUALI, «Utilisation d'une méthode semi-analytique pour l'étude du contrôle non destructif en régime pulsé». Mémoire magister 2010, UMMTO.

[24] H. BECHA, Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques Couplés par la des Volumes Finis et de la Paramétrisation dans les Systèmes Amagnétiques de chauffage par Induction, thèse de Magister, Univ Biskra, 2001

[25] A.LOTFI, Modélisation Tridimensionnelle par la Méthode des Volumes finis des Phénomènes Electromagnétiques et Thermiques Couplés dans les Dispositifs de Chauffage Par Induction, Thèse de Magister, Univ. Biskra, 2003.

[26] : O.KANA, Mémoire magister « Conception d'un inducteur destiné à l'entrainement électrique d'un ascenseur », UMMTO, 2012.