

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE et POPULAIRE.  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.  
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI de TIZI-OUZOU  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

Mémoire de Master  
en  
Mathématiques  
Option  
Analyse Mathématique et Applications

### Thème

---

**Existence globale et comportement asymptotique pour un  
modèle SIS non linéaire dégénéré.**

---

Présenté par

**Mme LAMI Souraya**

Proposé et dirigé par

**Mme TALEB Lynda**

Devant le jury

M. MORSLI Mohamed	Professeur	UMMTO	Pr esident
Mme TALEB Lynda	MCB	UMMTO	Rapporteur
Mme HANNACHI Leila.	Professeur	UMMTO	Examinatrice
M. MENGUELTI Ali	MAA	UMMTO	Examineur

Soutenu le 03 /10/2019

## *Remerciements*

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, qui m'a donné la force, le courage, la volonté et la patience pour réaliser ce travail.

Ma plus grande gratitude va à mon encadreur Mme TALEB Lynda, pour sa disponibilité , l'autonomie et la confiance qu'elle m'a accordée. J'aimerais aussi la remercier pour ses précieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

Mes sincères remerciements vont aux membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions et remarques.

Je tiens aussi, à remercier tous les professeurs qui ont contribué à ma formation, et ne m'ont pas épargné l'aide et les encouragements.

Je remercie ma mère ,la flamme de ma vie, la bougie qui m'a toujours guidé vers le bon chemin. qui a tout fait pour me voir réussir, pour sa douceur, ses sacrifices et ses encouragements. Un remerciement special pour une personne très chère à moi F.K, elle a toujours était là pour moi.

Enfin, je remercie tous mes ami(e)s que j'aime tant, Pour leur sincère amitié et confiance, et tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

## *Dédicaces*

Je dédie ce modeste travail en signe de respect, de reconnaissance et de remerciement tout d'abord à ma mère, à toute ma famille et à une personne très chère à moi F.K.

**Mots clés**

Système de réaction-diffusion, diffusion dégénérée, existence globale, comportement asymptotique, dynamique des populations.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Préliminaires</b>	<b>2</b>
0.1 Opérateurs différentiels . . . . .	2
0.2 Espaces fonctionnels . . . . .	2
0.2.1 Espaces de Lebesgue : . . . . .	2
0.2.2 Espaces de Sobolev : . . . . .	3
0.3 Quelques inégalités . . . . .	4
0.3.1 principe du maximum : . . . . .	4
0.4 Système dynamique . . . . .	5
<b>1 Existence globale d'une solution unique positive</b>	<b>6</b>
1.1 Position du problème . . . . .	6
1.2 Existence locale d'une solution unique positive . . . . .	8
1.2.1 Positivité . . . . .	12
1.3 Problèmes auxiliaires et estimations a priori . . . . .	16
1.3.1 Problèmes auxiliaires . . . . .	16
1.3.2 Estimation a priori . . . . .	16
1.4 Existence globale . . . . .	22
1.4.1 Existence . . . . .	22
<b>2 Comportement asymptotique</b>	<b>23</b>
<b>Conclusion</b>	<b>26</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>26</b>

# Introduction

L'objectif de ce mémoire est l'étude d'un système de réaction-diffusion de type  $SIS$  non linéaire dégénéré. Notons que les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles de type parabolique. Ces systèmes décrivent l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs espèces ou populations spatialement distribuées soumises à deux processus : un processus de réactions locales, dans lequel les différentes populations se transforment et un processus de diffusion qui engendre une répartition de ces populations dans l'espace. De tels systèmes peuvent décrire des phénomènes de natures différentes tels que les processus de fusion, certains modèles biologiques comme les processus cellulaires, la propagation des maladies en épidémiologie, le transport catalytique de contaminants dans l'environnement, la dynamique des populations, la dynamique des gaz et bien d'autres. Dans ce présent travail, nous intéressons particulièrement aux systèmes de réaction-diffusion de type  $S - I - S$ , dans ce modèle, la population étudiée est divisée en deux classes : la classe des susceptibles notée  $S$  qui représente les individus susceptibles d'être infectés et la classe des infectés notée  $I$  qui représente les individus infectés. Si un susceptible  $S$  est contaminé après contact avec un infecté  $I$ , il quitte la classe des susceptibles et rentre dans la classe des infectés avec un taux  $\gamma > 0$  proportionnel au produit des densités des classes  $S$  et  $I$ . Les individus qui sont guéris ou qui n'ont pas survécu à la maladie quittent la classe des infectés et rentrent dans la classe des susceptibles, ce nombre est représenté par un taux  $\delta > 0$  proportionnelle à la la densité de la classe  $I$ .

Dans ce travail, on développe l'article [9], où l'on s'intéresse à l'étude d'un système de réaction-diffusion non linéaire et dégénéré, modélisant la propagation spatiale d'une maladie épidémique au sein d'une population, il s'agit de montrer l'existence globale d'une unique solution positive et de donner son comportement asymptotique. On suppose que la maladie se propage dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ , de frontière assez régulière.

Ce mémoire est organisé selon l'ordre suivant, on commence par donner une introduction qui inclut un bref historique sur la problématique, viennent ensuite les préliminaires où l'on rappelle les différents outils et résultats classiques utilisés pour montrer les résultats établis dans [9]. Le premier chapitre consacre l'étude de l'existence globale d'une solution classique du problème, on commence par donner la position du problème et son interprétation, puis on développe un résultat d'existence local, d'unicité de la solution ainsi que sa positivité, on termine ce chapitre par la construction d'une suite de problèmes auxiliaires, puis nous établissons des estimations a priori nécessaires afin de montrer l'existence globale. Dans le deuxième chapitre et pour terminer ce travail, nous étudions le comportement asymptotique de la solution classique.

# Préliminaires

## 0.1 Opérateurs différentiels

Pour  $n$  un entier, on note  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

On appelle champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$  une application  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , qui à  $x = (x_1, \dots, x_n)$  associe  $v(x) = (v(x_1), \dots, v(x_n))$ .

Pour une fonction  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , son gradient est le champ de vecteurs défini par :

$$\text{grad } u(x) = \nabla u(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)$$

Pour un champ de vecteurs  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , on appelle divergence de  $v$  la fonction définie par :

$$\text{div } v(x) = \nabla \cdot (v(x)) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(x) + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n}(x).$$

On appelle Laplacien d'une fonction  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\Delta u(x) = \text{div}(\nabla u)(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\partial\Omega$  régulière. On appelle dérivée normale d'une fonction régulière  $u$  sur le bord  $\partial\Omega$  la fonction définie sur les points de  $\partial\Omega$  par :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \nabla u(x) \cdot \eta(x),$$

## 0.2 Espaces fonctionnels

### 0.2.1 Espaces de Lebesgue :

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , soit  $T > 0$  et  $p$  un réel vérifiant  $1 \leq p \leq +\infty$ .

**Définition 0.2.1.** [13] On désigne par  $\mathbb{L}^p(\Omega)$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\Omega$  à valeurs réelles, mesurables pour la mesure de Lebesgue telles que :

$$\begin{aligned} \text{Si } 1 \leq p < \infty, \|f\|_{p,\Omega} &= \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \\ \text{Si } p = \infty, \|f\|_{\infty,\Omega} &= \sup_x |f(x)| < \infty \end{aligned}$$

On définit les espaces  $\mathbb{L}^p([0, t[ \times \Omega)$ , si  $1 \leq p < \infty$ , comme suit :

$$\|f\|_{p, \Omega \times [0, t[} = \left( \int_0^t \int_{\Omega} |f|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (0.1)$$

## théorème de convergence dominée de lebesgue

**Théorème 0.2.1.** Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonction de  $\mathbb{L}^1$ . on suppose que :

1.  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pp sur  $\Omega$ .
2. Il existe une fonction  $g \in \mathbb{L}^1(\Omega)$  telle que pour chaque  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  pp sur  $\Omega$ .  
alors  $f \in \mathbb{L}^1(\Omega)$  et  $\|f_n - f\|_{\mathbb{L}^1(\Omega)} \rightarrow 0$ .

## 0.2.2 Espaces de Sobolev :

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $p$  un réel vérifiant  $1 \leq p \leq +\infty$ .

**Définition 0.2.2.** [6] L'espace de Sobolev  $\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$  est défini par :

$$u \in \mathbb{L}^p(\Omega), \exists f_1, \dots, f_N \in \mathbb{L}^p(\Omega) \text{ tels que :}$$

$$\int_{\Omega} u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} f_i \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall i = 1, \dots, N$$

En d'autres termes,

$$\mathbb{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{L}^p(\Omega), \forall i = 1, \dots, N, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^p(\Omega) \right\}$$

L'espace  $\mathbb{W}^{1,p}$  est muni de la norme :

$$\|u\|_{\mathbb{W}^{1,p}} = \|u\|_{\mathbb{L}^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\mathbb{L}^p}$$

Ou parfois de la norme équivalente :

$$\|u\|_{\mathbb{W}^{1,p}} = \left( \|u\|_{\mathbb{L}^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\mathbb{L}^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour  $p = 2$ , on pose :  $\mathbb{H}^1(\Omega) = \mathbb{W}^{1,2}(\Omega)$  muni de la norme :

$$\|u\|_{2, \Omega}^{(1)} = \left( \|u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

### 0.3 Quelques inégalités

On rappelle quelques inégalités qui serviront dans la suite :

**A. Inégalité de Young :**

Soit  $\varepsilon > 0$  :

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}$$

**B. Inégalité de Cauchy généralisée :**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon > 0 : ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

**C. Inégalité de Cauchy-Schwarz :**

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}))^2, \int_a^b |fg| dx \leq \left( \int_a^b f^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left( \int_a^b g^2 dx \right)^{1/2}$$

**D. Inégalité de Gronwall (forme intégrale) :**

Soit  $\xi$  une fonction positive, intégrable sur  $[0, T]$  et satisfaisant pour presque tout  $t$  l'intégrale :

$$\xi(t) \leq c_1 \int_0^t \xi(s) ds + c_2$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes positives, alors :

$$\xi(t) \leq c_2(1 + c_1 t e^{c_1 t})$$

**E. Formule de Green :**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si  $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  et  $v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ , on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot v ds$$

où  $\eta$  est la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega$ .

#### 0.3.1 principe du maximum :

Considérons le problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 && \text{sur } \mathbb{Q} \\ u &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{sur } \Omega \end{aligned} \tag{0.2}$$

**Théorème 0.3.1.**

Soit  $u_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$  et soit  $u$  solution de ?? . alors on a :

$$\min\{0, \inf_{\Omega} u_0\} \leq u(x, t) \leq \max\{0, \sup_{\Omega} u_0\} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{Q}$$

## 0.4 Système dynamique

**Définition 0.4.1.** [17] Soit  $(\mathbb{Z}, d)$  un espace métrique complet. Un système dynamique sur  $\mathbb{Z}$  est une famille  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  d'applications sur  $\mathbb{Z}$  telle que :

- i)  $T(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$
- ii)  $T(0) = I_d$ ,
- iii)  $T(t+s) = T(t).T(s)$
- iiii)  $\forall z \in \mathbb{Z}, T(t)z \in C([0, +\infty), \mathbb{Z})$ .

**Définition 0.4.2. (trajectoires, ensemble  $\omega$ -limite)**[17] Pour tout  $z \in \mathbb{Z}$ ,

- i) La courbe continue  $t \rightarrow T(t)z$  est appelée trajectoire issue de  $z$ .
- ii) l'ensemble  $\omega(z) = \{y \in \mathbb{Z} / \exists t_n \rightarrow +\infty; T(t_n)z \rightarrow y \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty\}$  est appelé ensemble  $\omega$ -limite de  $z$ .

**Définition 0.4.3.** : Un système dynamique dans  $\Omega$  est une application de classe  $C^1$

$$\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$$

avec  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et si  $\Phi_t(x) = \varphi(t, x)$ , alors  $\Phi_t$  satisfait

- (i)  $\Phi_0(x) = x \quad \forall x \in \Omega$
- (ii)  $\Phi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi_{t+s}(x) \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \Omega$

**Définition 0.4.4. (Région invariante)**

Un sous-ensemble fermé  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  est appelé *une région invariante* pour un système différentiel donné si, toute solution  $u(x, t)$  ayant ses valeurs initiales dans  $\Sigma$ , reste dans  $\Sigma$  pour tout  $(x, t) \in \Omega \times [0, T_{max}]$

**Proposition 0.4.1.** [17] Pour tout  $z \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $t \geq 0$ , on a :

- i)  $T(t)(\omega(z)) \in \omega(z)$  ( $\omega(z)$  est alors dit positivement invariant par  $T(t)$ ).  
Si de plus,  $\bigcup_{t \geq 0} T(t)$  est relativement compacte dans  $\mathbb{Z}$ , alors
- ii)  $T(t)(\omega(z)) = \omega(z) \neq \emptyset$ .  $\omega(z)$  est dit alors invariant par  $T(t)$
- iii)  $\omega(z)$  est un compact connexe de  $\mathbb{Z}$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)z, \omega(z)) = 0$ .

**Définition 0.4.5. :(Orbite)**

Si  $x$  est un point de  $\mathbb{E}$ ,

L'orbite complète issue de  $x$  est l'ensemble

$$\Gamma(x) = \{\varphi(t, x), t \in \mathbb{R}\}.$$

La semi-orbite positive issue de  $x$  est l'ensemble

$$\Gamma^+(x) = \{\varphi(t, x), t \geq 0\}.$$

La semi-orbite négative issue de  $x$  est l'ensemble

$$\Gamma^-(x) = \{\varphi(t, x), t \leq 0\}.$$

# Existence globale d'une solution unique positive

Le but de ce chapitre est d'établir l'existence globale d'une solution unique positive d'un système de réaction-diffusion dégénéré de type S.I.S. Pour cela, on commence par donner la position du problème, son interprétation, puis on développe un résultat d'existence locale, d'unicité et la positivité de la solution.

## 1.1 Position du problème

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert, borné et connexe dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , avec une frontière régulière  $\partial\Omega$  et  $T > 0$ .

On considère dans  $\Omega \times [0, T]$  le système parabolique dégénéré suivant :

$$S_t(x, t) - \Delta\phi_S(S) = -I(\gamma S - \delta) \quad (1.1)$$

$$I_t(x, t) - \Delta\phi_I(I) = I(\gamma S - \delta) \quad (1.2)$$

Dans  $\Omega \times (0, \infty)$ , avec les conditions initiales

$$S(x, 0) = S_0(x), I(x, 0) = I_0(x), \quad x \in \Omega \quad (1.3)$$

et aux conditions sur le bord, de type Neumann :

$$\frac{\partial\phi_S(x, t)}{\partial n} = \frac{\partial\phi_I(x, t)}{\partial n} = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (1.4)$$

Avec  $I_0, S_0 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ ,  $S_0, I_0 \geq 0$ , pour  $K \in \{S, I\}$ ,  $\phi_K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ,  $\phi_K(0) = \phi'_K = 0$ , et  $\phi_k(s) > 0$ ,  $\phi'_K(s) > 0$  pour  $s > 0$ .

On suppose que :

$$S_0(\cdot), I_0(\cdot) \in \mathbb{H}^1(\Omega) \quad (1.5)$$

### Interprétations du problème :

Le système (1.1)-(1.4) modélise la propagation spatiale d'une maladie épidémique au sein d'une population. Le domaine  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , il représente une surface géographique ou un lieu qui forme la région touchée par la maladie (une ville, des cellules, etc). La population étudiée ne sort pas de cette région, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de migration à travers le bord  $\partial\Omega$  (qui est traduit par les conditions sur le bord (1.4)).

La population étudiée est divisée en deux classes : la classe des susceptibles notée  $S$ , et la classe des infectés notée  $I$ ,  $\gamma SI$  est la force de l'infection, il représente le nombre d'individus susceptibles  $S$  infectés par contact avec des personnes infectieuses  $I$  par unité de temps, enfin  $\delta I$  est le nombre de sujets infectés qui deviennent susceptibles après leur guérison.

## 1.2 Existence locale d'une solution unique positive

Le but de cette section est d'établir l'existence locale de solution pour les problèmes non-dégénérés réguliers. Notons qu'en général ni la question de positivité ni d'unicité des solutions des problèmes non-linéaires dégénérés n'ont été complètement élucidées, on essaiera donc de donner un résultat d'existence locale, d'unicité et de positivité dans le cas des problèmes non-dégénérés. Pour cela, on donnera une définition d'une solution classique du système et on énoncera un théorème pour assurer son existence ainsi que sa preuve [2].

### Définition 1.2.1.

Le couple  $(S(\cdot, \cdot), I(\cdot, \cdot))$  est une solution classique du système (1.1)-(1.4) sur  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  s'il satisfait :

(i) Pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $(S(\cdot, t), I(\cdot, t)) \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ ; pour tout  $x \in \Omega$ ,  $(S(x, \cdot), I(x, \cdot)) \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^2)$  et l'équation différentielle partielle est satisfaite pour  $x \in \Omega$  et  $t \in [0, T]$ .

$$(ii) \lim_{t \rightarrow 0^+} [\|S(\cdot, t) - S_0(\cdot)\|_{2, \Omega}^{(1)} + \|I(\cdot, t) - I_0(\cdot)\|_{2, \Omega}^{(1)}] = 0$$

### Théorème 1.2.1.

Si (1.5) est vérifié, les conditions initiales sont positives et  $T > 0$ , alors il existe une unique solution classique du système (1.1)-(1.4) sur  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ .

### Démonstration.

Pour cette démonstration, on commence d'abord par montrer l'existence locale de la solution ensuite son unicité.

#### Existence locale :

On pose :

$$H(S, I) = S + I$$

En sommant les équations (1.1) et (1.2), on obtient :

$$\partial_t S + \partial_t I = \Delta \phi_S(S) + \Delta \phi_I(I)$$

Il vient que :

$$\partial_t(S + I) = \Delta(\phi_S(S) + \phi_I(I))$$

En intégrant le premier membre sur  $\Omega \times [0, t]$  pour  $t \in [0, T_{max}]$ , il vient que :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t(S + I) dx dt &= \int_{\Omega} (S + I)(x, t) dx - \int_{\Omega} (S + I)(x, 0) dx \\ &= \int_{\Omega} H(S(x, t) + I(x, t)) dx - \int_{\Omega} H(S_0(x) + I_0(x)) dx \\ &= \|H(S(\cdot, t), I(\cdot, t))\|_{1, \Omega} - \|H(S_0(\cdot), I_0(\cdot))\|_{1, \Omega} \end{aligned}$$

On intègre le second membre sur  $\Omega \times [0, t]$

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\Delta \phi_S(S) + \Delta \phi_I(I)) dxdt = \int_0^t \int_{\Omega} \Delta \phi_S(S) dxdt + \int_0^t \int_{\Omega} \Delta \phi_I(I) dxdt$$

En utilisant la formule de Green et les conditions sur le bord, on obtient :

$$\int_0^t \int_{\Omega} \Delta \phi_S(S) dxdt = 0 \tag{1.6}$$

De la même manière, on trouve que :

$$\int_0^t \int_{\Omega} \Delta \phi_I(I) dxdt = 0$$

On obtient :

$$\int_0^t \int_{\Omega} \Delta \phi_S(S) + \Delta \phi_I(I) dxdt = 0$$

Ou

$$\int_0^t \int_{\Omega} \Delta \phi_S(S) + \Delta \phi_I(I) dxdt \leq 0$$

Alors,

$$\|H(S(, t), I(, t))\|_{1,\Omega} - \|H(S_0(, ), I_0(, ))\|_{1,\Omega} \leq 0$$

C'est à dire,

$$\|H(S(, t), I(, t))\|_{1,\Omega} \leq \|H(S_0(, ), I_0(, ))\|_{1,\Omega}$$

Alors il existe une constante  $C_1 > 0$ , telle que :

$$\|H(S(, t), I(, t))\|_{1,\Omega} \leq C_1$$

C'est à dire que :

$$\int_{\Omega} H(S, I) dxdt \leq C_1$$

En intégrant sur  $[\tau, t]$  avec  $0 \leq \tau < t < T_{max}$ , on trouve que :

$$\int_{\tau}^t \int_{\Omega} H(S, I) dxdt \leq C_1(t - \tau)$$

Ce qui veut dire que la solution classique du système existe localement.

Unicité Pour montrer l'unicité de la solution, on a suivi le même raisonnement que le résultat établi par M.Kirane et S.Kouachi [1].

On suppose que le système (1.1)-(1.4) admet deux solutions  $(S_1, I_1)$  et  $(S_2, I_2)$ . On pose :

$$\begin{aligned} S &= S_1 - S_2 \\ I &= I_1 - I_2 \end{aligned}$$

Alors :  $(S, I)$  est aussi solution du système (1.1)-(1.4) sur  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ , donc elle satisfait :

$$\begin{aligned}\partial_t S &= \Delta \phi_S(S) - \gamma SI + \delta I \\ \partial_t I &= \Delta \phi_I(I) + \gamma SI - \delta I\end{aligned}$$

Avec les conditions :

$$S(x, 0) = 0, I(x, 0) = 0$$

On multiplie les équations du système précédent respectivement par  $S, I$  puis on intègre sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} S \partial_t S dx &= \int_{\Omega} S \Delta \phi_S(S) dx - \int_{\Omega} \gamma S^2 I dx + \int_{\Omega} \delta I S dx \\ \int_{\Omega} I \partial_t I dx &= \int_{\Omega} I \Delta \phi_I(I) dx + \int_{\Omega} \gamma S I^2 dx - \int_{\Omega} \delta I^2 dx\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S\|_{2,\Omega}^2 &= - \int_{\Omega} \nabla S \nabla \phi_S(S) dx - \int_{\Omega} \gamma S^2 I dx + \int_{\Omega} \delta I S dx \\ &= - \int_{\Omega} \phi_S'(S) |\nabla S|^2 dx - \int_{\Omega} \gamma S^2 I dx + \int_{\Omega} \delta I S dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|I\|_{2,\Omega}^2 &= - \int_{\Omega} \nabla I \nabla \phi_I(I) dx + \int_{\Omega} \gamma I^2 S dx - \int_{\Omega} \delta I^2 dx \\ &= - \int_{\Omega} \phi_I'(I) |\nabla I|^2 dx + \int_{\Omega} \gamma S I^2 dx - \int_{\Omega} \delta I^2 dx\end{aligned}$$

En sommant on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|S\|_{2,\Omega}^2 + \|I\|_{2,\Omega}^2] &+ \int_{\Omega} \phi_S'(S) |\nabla S|^2 dx + \int_{\Omega} \phi_I'(I) |\nabla I|^2 dx \\ &= - \int_{\Omega} \gamma S^2 I dx + \int_{\Omega} \delta I S dx + \int_{\Omega} \gamma S I^2 dx - \int_{\Omega} \delta I^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \delta I S dx + \int_{\Omega} \gamma S I^2 dx\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy généralisée, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|S\|_{2,\Omega}^2 + \|I\|_{2,\Omega}^2] &\leq \int_{\Omega} \delta (\varepsilon I^2 + \frac{S^2}{4\varepsilon}) dx + \int_{\Omega} (\varepsilon \gamma^2 + \frac{S^2}{4\varepsilon}) I^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \delta \varepsilon I^2 dx + \int_{\Omega} \frac{\delta}{4\varepsilon} S^2 dx + \int_{\Omega} \varepsilon \gamma^2 I^2 dx + \int_{\Omega} \frac{S^2}{4\varepsilon} I^2 dx \\ &\leq \delta \varepsilon \|I\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\delta}{4\varepsilon} \|S\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (\sup_{\Omega} S)^2 \|I\|_{2,\Omega}^2 \\ &\leq (\varepsilon \gamma^2 + \frac{(\sup_{\Omega} S)^2}{4\varepsilon} + \delta \varepsilon) \|I\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\delta}{4\varepsilon} \|S\|_{2,\Omega}^2 \\ &\leq L_{\varepsilon} (\|I\|_{2,\Omega}^2 + \|S\|_{2,\Omega}^2)\end{aligned}$$

On choisit  $\varepsilon$  de sorte que  $L_\varepsilon \rightarrow 0$ . Alors,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|S\|_{2,\Omega}^2 + \|I\|_{2,\Omega}^2] \leq 0$$

Ce qui veut dire que  $(\|S\|_{2,\Omega}^2 + \|I\|_{2,\Omega}^2)$  est décroissante.

C'est à dire :

$$\|S(x, t)\|_{2,\Omega}^2 + \|I(x, t)\|_{2,\Omega}^2 \leq \|S(x, t)\|_{2,\Omega}^2 + \|I(x, t)\|_{2,\Omega}^2$$

On déduit que :

$$\|S(x, t)\|_{2,\Omega}^2 = \|I(x, t)\|_{2,\Omega}^2 = 0$$

i.e :

$$S(x, t) = 0, I(x, t) = 0$$

Donc,

$$\begin{aligned} S_1(x, t) &= S_2(x, t) \\ I_1(x, t) &= I_2(x, t) \end{aligned}$$

D'où l'unicité de la solution.

## 1.2.1 Positivité

Dans cette partie, on donnera un résultat de positivité. Dans un premier temps, on rappelle le résultat suivant :

**Lemme 1.2.1.** [6]

Si  $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega)$  alors  $\phi^+ = \max(\phi, 0) \in \mathbb{H}^1(\Omega)$  pour tout  $x \in \Omega$  et de plus :  $(\phi^+)_x = \phi_x$  si  $\phi(x) \geq 0$ , et  $(\phi^+)_x = 0$  si  $\phi(x) < 0$ .

**Théorème 1.2.2.**

Si 1.5 est vérifiée, les conditions initiales sont positives,  $T > 0$ , et  $(S(x,t), I(x,t))$  est l'unique solution classique du système (1.1)-(1.4) sur  $\overline{\Omega} \times [0, T]$ , alors  $S(x,t), I(x,t) \geq 0$  pour  $x \in \overline{\Omega}, t \geq 0$ .

**Démonstration.**

On multiplie l'équation (1.1) par  $S^-$  puis on intègre sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} S^- \partial_t S dx = \int_{\Omega} S^- \Delta \phi_S(S) dx - \int_{\Omega} \gamma S^- S I dx + \int_{\Omega} \delta S^- I dx \quad (1.7)$$

par conséquent :

$$\int_{\Omega} S^- \partial_t S dx = - \int_{\Omega} S^- \partial_t S^- dx = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (|S^-(x,t)|^2) dx = - \frac{1}{2} \|S^-(x,t)\|_{2,\Omega}^2$$

Où :

$$S^- = (-S)^+ = \max(0, -S) = \frac{|S| - S}{2}$$

En utilisant la formule de Green et les conditions sur le bord, on aura :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} S^- \Delta \phi_S(S) dx &= - \int_{\Omega} \nabla S^- \nabla \phi_S(S) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi_S(S)}{\partial \eta} S^- ds \\ &= - \int_{\Omega} \nabla S^- \nabla \phi_S(S) dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla S^- (\phi'_S(S) \nabla S) dx \\ &= \int_{\Omega} \phi'_S(S) |\nabla S^-|^2 dx \end{aligned}$$

Où :

$$\nabla S = -\nabla S^-$$

On remplace dans l'inégalité (1.7), on obtient,

$$- \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|S^-\|_{2,\Omega}^2) - \int_{\Omega} \phi'_S |\nabla S^-|^2 dx = \int_{\Omega} \gamma I (S^-)^2 dx + \int_{\Omega} \delta S^- I dx$$

Où encore :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|S^-\|_{2,\Omega}^2) + \int_{\Omega} \phi'_S |\nabla S^-|^2 dx = - \int_{\Omega} \gamma I (S^-)^2 dx - \int_{\Omega} \delta S^- I dx$$

Et en utilisant la condition initiale :

$$\phi'_S(S) > 0$$

On obtient :

$$\int_{\Omega} \phi'_S(S) |\nabla S^-|^2 dx > 0$$

alors,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|S^-\|_{2,\Omega}^2) \leq - \int_{\Omega} \gamma I (S^-)^2 dx - \int_{\Omega} \delta S^- I dx$$

Il vient que :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|S^-\|_{2,\Omega}^2) \leq - \int_{\Omega} \gamma I (S^-)^2 dx$$

Soit  $t \in [0, T]$  pour  $T < T_{\max}$  d'après l'existence locale, il vient que :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|s^-\|_{2,\Omega}^2) \leq M(t) \|S^-\|_{2,\Omega}^2$$

Où :

$$M(t) = \|\gamma I(t)\|_{\infty, \Omega}$$

En intégrant de nouveau sur  $[0, t]$  avec  $t < T$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t (\|S^-(x, s)\|_{2,\Omega}^2) ds &= \frac{1}{2} \|S^-(x, t)\|_{2,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \|S^-(x, 0)\|_{2,\Omega}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|S^-(x, t)\|_{2,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \|S_0^-(x)\|_{2,\Omega}^2 \leq c \int_0^t \|S^-(x, s)\|_{2,\Omega}^2 ds \end{aligned}$$

Il vient que :

$$\|S^-(x, t)\|_{2,\Omega}^2 \leq \|S_0^-(x)\|_{2,\Omega}^2 + 2c \int_0^t \|S^-(x, s)\|_{2,\Omega}^2 ds$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$\|S^-(x, t)\|_{2,\Omega}^2 \leq \|S_0^-(x)\|_{2,\Omega}^2 (1 + 2ct \exp(2ct))$$

Comme  $S_0(x) \geq 0$  donc :  $S_0^-(x) = 0$  pour tout  $x \in \Omega$

Par suite,

$$S^-(x, t) = 0, \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T]$$

Et comme  $T < T_{\max}$ , il vient donc :  $S^-(x, t) = 0, \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T_{\max}[$

D'où :

$$S(x, t) \geq 0, \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T_{\max}[$$

Pour la seconde composante, on procède de la même manière que précédemment. On multiplie les deux membres de l'équation (1.2) par  $I^-$  puis on intègre sur  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} I^- \partial_t I dx - \int_{\Omega} I^- \Delta(\phi_I(I)) dx = \int_{\Omega} \gamma S I I^- dx - \int_{\Omega} \delta I I^- dx \quad (1.8)$$

Il vient que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} I^- \partial_t I dx &= - \int_{\Omega} I^- \partial_t I^- dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (|I^-(x,t)|^2) dx \\ &= -\frac{1}{2} \|I^-\|_{2,\Omega}^2 \end{aligned}$$

Où :

$$I^- = (-I)^+ = \max(0, -I) = \frac{|I| - I}{2}$$

En utilisant la formule de Green et les conditions sur le bord, on aura :

$$\int_{\Omega} I^- \Delta(\phi_I(I)) dx = - \int_{\Omega} \nabla I^- \nabla \phi_I(I) dx = \int_{\Omega} \phi'_I(I) |\nabla I^-|^2 dx$$

Où :

$$\nabla I = -\nabla I^-$$

On remplace dans l'inégalité (1.8) :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \|I^-\|_{2,\Omega}^2 - \int_{\Omega} \phi'_I(I) |\nabla I^-|^2 dx &= \int_{\Omega} \gamma S I I^- dx - \int_{\Omega} \delta I I^- dx \\ &= - \int_{\Omega} \gamma S (I^-)^2 dx + \int_{\Omega} \delta (I^-)^2 dx \\ &= - \int_{\Omega} (\gamma S - \delta) (I^-)^2 dx \end{aligned}$$

Où :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|I^-\|_{2,\Omega}^2) + \int_{\Omega} \phi'_I(I) |\nabla I^-|^2 dx = \int_{\Omega} (\gamma S - \delta) (I^-)^2 dx$$

Par suite en utilisant la condition initiale :

$$\phi'_I(I) > 0$$

On obtient :

$$\int_{\Omega} \phi'_I(I) |\nabla I^-|^2 dx > 0$$

Alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|I^-(x,t)\|_{2,\Omega}^2) \leq \int_{\Omega} (\gamma S - \delta) I^{-2} dx$$

Soit  $t \in [0, T]$  pour  $T \leq T_{\max}$ , d'après l'existence locale, il vient que :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|I^-\|_{2,\Omega}^2) \leq M_1(t) \|I^-\|_{2,\Omega}^2$$

Où :

$$M_1(t) = \|\gamma S(t) - \delta\|_{\infty, \Omega}$$

Il vient donc, pour  $t \in [0, T]$ ,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|I^-\|_{2, \Omega}^2 \leq C_1 \|I^-\|_{2, \Omega}^2$$

Où :

$$C_1 = \sup_{t \in [0, T]} |M_1(t)|$$

En intégrant de nouveau sur  $[0, t]$  avec  $t \leq T$ , on obtient :

$$\|I^-(x, t)\|_{2, \Omega}^2 \leq \|I_0^-(x)\|_{2, \Omega}^2 + 2C_1 \int_0^t \|I^-(x, s)\|_{2, \Omega}^2 dx$$

D'après la formule de Gronwall, on obtient :

$$\|I^-(x, t)\|_{2, \Omega}^2 \leq \|I_0^-(x)\|_{2, \Omega}^2 (1 + 2C_1 t \exp(2C_1 t))$$

Comme  $I_0(x) \geq 0$  donc :  $I_0^-(x) = 0$  pour tout  $x \in \Omega$

$$I^-(x, t) = 0, \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T]$$

Et comme  $T < T_{max}$ , il vient donc :  $I^-(x, t) = 0, \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T_{max}[$   
D'où :

$$I(x, t) \geq 0, \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T_{max}[$$

## 1.3 Problèmes auxiliaires et estimations a priori

### 1.3.1 Problèmes auxiliaires

Dans cette section nous considérons dans  $\Omega \times (0, \infty)$  le système auxiliaire quasilinéaire non dégénéré :

$$\begin{cases} S_t - \Delta d_1(S) = -(I - \varepsilon)(\gamma(S - \varepsilon) - \delta), & (x, t) \in \Omega \times (0, T) = Q_T \\ I_t - \Delta d_2(I) = (I - \varepsilon)(\gamma(S - \varepsilon) - \delta), & \end{cases} \quad (1.9)$$

Avec des conditions initiales et limites

$$\begin{cases} S(x, 0) = S_{0,\varepsilon}(x), I(x, 0) = I_{0,\varepsilon}(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial d_1(S)}{\partial \eta}(x, t) = \frac{\partial d_2(I)}{\partial \eta}(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (1.10)$$

$d_1, d_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow (\frac{\varepsilon}{2}, \infty)$  sont des fonctions régulières et croissantes avec :

$$d_1(S) = \phi_S(S), \varepsilon \leq S; \text{ et } d_2(I) = \phi_I(I), \varepsilon \leq I. \quad (1.11)$$

### 1.3.2 Estimation a priori

Il est bien connu que le problème général (1.1) – (1.4) n'a pas de solution classique, une notion appropriée de solution généralisée est nécessaire nous adoptons la notion de solution faible introduite par Oleinik [10].

#### Définition 1.3.1.

un couple de fonctions non négatives et continues  $(S, I)$  est solution de système (1.1) – (1.4) en  $Q_T$ ;  $T \geq 0$ , pour chaque  $\varphi, \psi \in C^1(\overline{Q_T})$  tel que  $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0$  sur  $\partial\Omega \times (0, T)$ .

1.  $\nabla \phi_S(S), \nabla \phi_I(I)$  existent au sens des distributions et  $\nabla \phi_S(S), \nabla \phi_I(I) \in \mathbb{L}^2(Q_T)$ .
2.  $S$  vérifie l'identité intégrale :  

$$\int_{\Omega} S(x, T) \varphi(x, T) dx - \int_{Q_T} [S \varphi_t - \nabla \phi_S(S) \nabla \varphi - I(\gamma S - \delta)] dx dt = \int_{\Omega} S(x, 0) \varphi(x, 0) dx.$$
3.  $I$  vérifie l'identité intégrale :  

$$\int_{\Omega} I(x, T) \psi(x, T) dx - \int_{Q_T} [I \psi_t - \nabla \phi_I(I) \nabla \psi + I(\gamma S - \delta)] dx dt = \int_{\Omega} I(x, 0) \psi(x, 0) dx.$$

Si  $U_{0,\varepsilon}$  représente l'une des fonctions régulières  $S_{0,\varepsilon}$  ou  $I_{0,\varepsilon}$  sur  $\overline{\Omega}$ , alors nous avons besoin :

$$\begin{cases} U_{0,\varepsilon}(x) \geq \varepsilon, x \in \Omega & 0 < \varepsilon \leq 1, \\ \int_{\Omega} (U_{0,\varepsilon}(x) - \varepsilon) dx = \int_{\Omega} U_0(x) dx, & \\ U_{0,\varepsilon} \rightarrow U_0, & \text{dans } C(\Omega) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

On se réfère à [17] pour la construction d'un tel ensemble de données initiales, des résultats standard, l'existence local et l'unicité d'une solution classique  $(S_\varepsilon, I_\varepsilon)$  pour (1.9)-(1.10) dans un intervalle maximale  $[0, T_{\max,\varepsilon})$  sont garantis. Il est facile de vérifier que  $[\varepsilon, \infty)^2$  est une région invariante, donc

$$0 < \varepsilon \leq S_\varepsilon(x, t), 0 < \varepsilon \leq I_\varepsilon(x, t), x \in \Omega, 0 < t \leq T_{\max,\varepsilon}. \quad (1.13)$$

On peut appliquer les résultats en [7] pour montrer l'existence globale. ie :  $T_{\max,\varepsilon} = \infty$  , d'une solution classique pour (1.9)-(1.10) ,en utilisant (1.11) et (1.13) nous obtenons une existence global pour :

$$\begin{cases} S_t - \Delta\phi_s(S) = -(I - \varepsilon)(\gamma(S - \varepsilon) - \delta), & (x, t) \in \Omega \times (0, T) = Q_T \\ I_t - \Delta\phi_I(I) = (I - \varepsilon)(\gamma(S - \varepsilon) - \delta), \end{cases} \quad (1.14)$$

Dans  $\Omega \times (0, \infty)$  , ensemble avec (1.10).

Nous obtenons l'estimation a priori , d'abord en sommant les deux equations, en (1.9) et en intégrant sur  $Q_T$ , on obtient :

$$\int_0^T \int_{\Omega} S_t dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} I_t dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta d_1(S) dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta d_2(I) dxdt = 0 \quad (1.15)$$

En utilisant la formule de Green et les conditions sur le bord,on obtient :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Delta d_1 dxdt = \int_0^T \int_{\Omega} \Delta d_2 dxdt = 0$$

En remplace dans (1.15), on obtient :

$$\int_{\Omega} S_{\varepsilon}(x, T) dx + \int_{\Omega} I_{\varepsilon}(x, T) dx = \int_{\Omega} S_{0,\varepsilon}(x) dx + \int_{\Omega} I_{0,\varepsilon}(x) dx, T \geq 0. \quad (1.16)$$

Donc, on déduit la conservation de la masse totale. Dans ce qui suit ,  $T$  est un nombre positif ,  $M_1, M_2, \dots, M_n$  sont des constantes indépendante de  $T, \varepsilon; 0 < \varepsilon \leq 1$  , et  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sont des fonctions croissantes de  $T$  , indépendentes de  $\varepsilon$ .

**Lemme 1.3.1.**

*Il existe une constante  $M_1$  et une fonction croissante indépendante de  $\varepsilon \in (0, 1]$  tel que :*

$$0 < \varepsilon \leq S_{\varepsilon}(x, t) \leq M_1, x \in \Omega, t \geq 0. \quad (1.17)$$

$$0 < \varepsilon \leq I_{\varepsilon}(x, t) \leq F_1(T), x \in \Omega, 0 \leq t \leq T. \quad (1.18)$$

*Si  $0 \leq S_0(x) \leq \frac{\delta}{\gamma}$ , alors  $F_1$  est une constante.*

**Démonstration.**

Comme  $\|S_{0,\infty}\|_{\infty,\Omega} + \frac{\delta}{\gamma}$  est une super solution d'équation pour  $S_{\varepsilon}$  dans (1.9)-(1.10) l'estimation (1.17) suit. multiplions l'équation pour  $I_{\varepsilon}$  par  $P(I_{\varepsilon} - \varepsilon)^{p-1}$  ,  $p \geq 1$ , on obtient :

$$I_{t,\varepsilon} P(I_{\varepsilon} - \varepsilon)^{p-1} + p(I_{\varepsilon} - \varepsilon)^{p-2} \Delta\phi_I(I_{\varepsilon}) = P(I_{\varepsilon} - \varepsilon)^{p-1} (\gamma(S_{\varepsilon} - \varepsilon) - \delta)$$

Il vient que :

$$\frac{\partial}{\partial t} ((I_{\varepsilon} - \varepsilon)^p) - P(I_{\varepsilon} - \varepsilon)^{p-1} \Delta\phi_I(I_{\varepsilon}) = P(I_{\varepsilon} - \varepsilon)^{p-1} (\gamma(S_{\varepsilon} - \varepsilon) - \delta)$$

on sait que :

$$\gamma(S_{\varepsilon} - \varepsilon) - \delta \leq \gamma(S_{\varepsilon} - \varepsilon)$$

on déduit que :

$$\frac{\partial}{\partial t}((I_\varepsilon - \varepsilon)^P) - P(I_\varepsilon - \varepsilon)^{P-1} \Delta \phi_I(I_\varepsilon) \leq \gamma P(I_\varepsilon - \varepsilon)^P (S_\varepsilon - \varepsilon) \quad (1.19)$$

En intégrant sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (I_\varepsilon - \varepsilon)^P dx - \int_{\Omega} P(I_\varepsilon - \varepsilon)^{P-1} \Delta \phi_I(I_\varepsilon) dx \leq P\gamma \int_{\Omega} (I_\varepsilon - \varepsilon)(S_\varepsilon - \varepsilon) dx$$

En utilisant la formule de Green et les conditions sur le bord, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(I_\varepsilon - \varepsilon)^P} dx + \int_{\Omega} \nabla(P(I_\varepsilon - \varepsilon)^{P-1}) \nabla \phi_I(I_\varepsilon) dx \leq P\gamma \int_{\Omega} (I_\varepsilon - \varepsilon)^P (S_\varepsilon - \varepsilon) dx$$

En utilisant les conditions initiales, on aura :

$$\int_{\Omega} (P(I_\varepsilon - \varepsilon)^{P-1}) \nabla \phi_I(I_\varepsilon) dx \geq 0$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (I_\varepsilon - \varepsilon)^P(x, t) dx \leq p\gamma \int_{\Omega} (I_\varepsilon - \varepsilon)^P (S_\varepsilon - \varepsilon)(x, t) dx, t \geq 0. \quad (1.20)$$

L'estimation (1.17) et l'inégalité de Gronwall conduisent à l'estimation (1.18). maintenant si  $0 \leq S_0(x) \leq \frac{\delta}{\gamma}$ , nous pouvons construire  $S_{0,\varepsilon}$ , tel que :  $0 \leq S_{0,\varepsilon}(x) \leq \frac{\delta}{\gamma} + \varepsilon$ , puis par le principe de maximum appliqué à l'équation de  $S_\varepsilon$ , on obtient :

$$0 \leq S_\varepsilon(x, t) - \varepsilon \leq \frac{\delta}{\gamma}, x \in \Omega, t \geq 0. \quad (1.21)$$

une deuxième application du principe de maximum à l'équation pour  $I_\varepsilon$  donne

$$\varepsilon \leq I_\varepsilon(x, t) \leq \|I_0\|_{\infty, \Omega} + 1, x \in \Omega, 0 \leq t \leq T..$$

### Lemme 1.3.2.

Il existe une constante  $M_2$  indépendante de  $\varepsilon \in (0, 1]$  tel que :

$$\int_0^\infty \int_{\Omega} (I_\varepsilon - \varepsilon)(\delta - \gamma(S_\varepsilon - \varepsilon))^2 dx dt \leq M_2 \quad (1.22)$$

### Démonstration.

posons  $U_\varepsilon = (\gamma(S_\varepsilon - \varepsilon) - \delta)$ , alors l'équation pour  $S_\varepsilon$  peut être écrite comme :

$$\begin{cases} U_t - \operatorname{div}(\phi'_S(S_\varepsilon) \nabla U) + \gamma(I - \varepsilon)U = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial U}{\partial \eta}(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ U(x, 0) = \gamma(S_{0,\varepsilon} - \varepsilon) - \delta, & x \in \Omega \end{cases} \quad (1.23)$$

On multiplie (1.23) par  $U_\varepsilon$ , on trouve :

$$U_{t,\varepsilon} U_\varepsilon - \operatorname{div}(\phi'_S(S_\varepsilon) \nabla U_\varepsilon) U_\varepsilon + \gamma(I_\varepsilon - \varepsilon) U_\varepsilon^2 = 0 \quad (1.24)$$

puis, on intègre sur  $\mathbb{Q}_T$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} U_{\varepsilon}^2(x, T) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} U_{\varepsilon}(x, T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \gamma(I_{\varepsilon} - \varepsilon) U_{\varepsilon}^2 dx \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}(\phi'_S(S_{\varepsilon}) \nabla U_{\varepsilon}) dx dt = 0 \end{aligned}$$

Il vient que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} U_{\varepsilon}^2(x, t) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \phi'_S(S_{\varepsilon}) |\nabla U_{\varepsilon}|^2(x, t) dx dt + \gamma \int_0^T \int_{\Omega} (I_{\varepsilon} - \varepsilon) U_{\varepsilon}^2 dx dt \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\gamma(S_{0, \varepsilon} - \varepsilon) - \delta)^2(x) dx. \end{aligned}$$

Alors on utilisant l'estimation (1.22) on obtient (1.12).

**Lemme 1.3.3.**

*Il existe une fonction  $F_2$  croissante indépendante de  $\varepsilon \in (0, 1]$  tel que :*

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \phi_S(S_{\varepsilon})|^2(x, t) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \phi_I(I_{\varepsilon})|^2(x, t) dx dt \leq F_2(T). \quad (1.25)$$

Si  $0 \leq S_0(x) \leq \frac{\delta}{\gamma}$ , pour tout  $x \in \Omega$ , alors  $F_2$  est une constante.

**Démonstration.**

l'estimation  $\nabla \phi_I(I_{\varepsilon})$  est obtenu en multipliant l'équation de  $I_{\varepsilon}$  par  $\phi_I(I_{\varepsilon})$ , puis on intègre sur  $\mathbb{Q}_T = \Omega \times (0, T)$  :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} I_{t, \varepsilon} \phi_I(I_{\varepsilon}) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \phi_I(I_{\varepsilon}) \phi_I(I_{\varepsilon}) dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} (I_{\varepsilon} - \varepsilon) (\gamma(S_{\varepsilon} - \varepsilon) - \delta) dx dt \end{aligned}$$

Il vient que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi_I(I_{\varepsilon}(x, T)) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \phi_I(I_{\varepsilon})|^2 dx dt \\ & = \int_{\Omega} \Phi_I(I_{0, \varepsilon}(x)) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \phi_I(I_{\varepsilon}) (I_{\varepsilon} - \varepsilon) (\gamma(S_{\varepsilon} - \varepsilon) - \delta)(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (1.26)$$

Où

$$\Phi_I(I) = \int_0^I \phi_I(s) ds$$

. Par l'inégalité de cauchy et (1.18), on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi_I(I_{\varepsilon}(x, T)) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \phi_I(I_{\varepsilon})|^2 dx dt \leq \int_{\Omega} \Phi_I(I_{0, \varepsilon}(x)) dx + \\ & T^{\frac{1}{2}} \operatorname{mes}^{\frac{1}{2}}(\Omega) F_1 \phi_I(F_1(T)) \left( \int_0^T \int_{\Omega} (I_{\varepsilon} - \varepsilon) (\delta - \gamma(S_{\varepsilon} - \varepsilon))^2(x, t) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.27)$$

En utilisant le lemme (1.3.2) on obtient l'estimation souhaitée.

Si  $0 \leq S_0(x) \leq \frac{\delta}{\gamma}$  pour tout  $x \in \Omega$ , En injectant (1.21) dans (1.26) on obtient :

$$\int_0^\infty \int_\Omega |\nabla \phi_I(I_\varepsilon)|^2 dx dt = \int_\Omega \Phi_I(I_{0,\varepsilon}(x)) dx. \quad (1.28)$$

Maintenant pour obtenir une estimation sur  $\nabla S_\varepsilon$  nous multiplions l'équation de  $S_\varepsilon$  par  $\phi_S(S_\varepsilon)$ , puis nous intégrons sur  $Q_T$ , nous aurons :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega S_{t,\varepsilon} \phi_S(S_\varepsilon) dx dt - \int_0^T \int_\Omega \Delta \phi_S(S_\varepsilon) \phi_S(S_\varepsilon) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_\Omega (I_\varepsilon - \varepsilon)(\gamma(S_\varepsilon - \varepsilon) - \delta) \phi_S(S_\varepsilon) dx dt \end{aligned}$$

Il vient que :

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \Phi_S(S_\varepsilon(x, T)) dx - \int_\Omega \Phi_S(S_\varepsilon(x, 0)) dx - \int_0^T \int_\Omega \Delta \phi_S(S_\varepsilon) \phi_S(S_\varepsilon) dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \phi_S(S_\varepsilon)(I_\varepsilon - \varepsilon)(\delta - \gamma(S_\varepsilon - \varepsilon))(x, t) dx dt \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et les conditions sur le bord, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \Phi_S(S_\varepsilon(x, T)) dx + \int_0^T \int_\Omega |\nabla \phi_S(S_\varepsilon)|^2 dx dt = \int_\Omega \Phi_S(S_{0,\varepsilon}(x)) dx \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \Delta \phi_S(S_\varepsilon) \phi_S(S_\varepsilon) dx dt \end{aligned}$$

et utilisons l'inégalité de cauchy et le lemme (1.3.1)

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \Phi_S(S_\varepsilon(x, T)) dx + \int_0^T \int_\Omega |\nabla \phi_S(S_\varepsilon)|^2 dx dt \\ &= \int_\Omega \Phi_S(S_{0,\varepsilon}(x)) dx + \int_0^T \int_\Omega \phi_S(S_\varepsilon)(I_\varepsilon - \varepsilon)(\delta - \gamma(S_\varepsilon - \varepsilon))(x, t) dx dt \\ &\leq \int_\Omega \Phi_S(S_{0,\varepsilon}(x)) dx + \phi_S(M_1) F_1 mes^{\frac{1}{2}}(\Omega) \left( \int_0^T \int_\Omega (I_\varepsilon - \varepsilon)(\delta - \gamma(S_\varepsilon - \varepsilon))^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

alors l'estimation de  $\nabla S_\varepsilon$  dans (1.25) découle de (1.29) et (1.22).

Si  $0 \leq S_0(x) \leq \frac{\delta}{\gamma}$ ,  $x \in \Omega$ , en intégrant l'équation en  $I_\varepsilon$  on obtient :

$$\int_0^\infty \int_\Omega (I_\varepsilon - \varepsilon)(\delta - \gamma(S_\varepsilon - \varepsilon)) dx dt \leq \int_\Omega I_{0,\varepsilon}(x) dx. \quad (1.29)$$

Par (1.29) et (1.29), nous avons :

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla \phi_S(S_\varepsilon)|^2 dx dt \leq \int_\Omega \Phi_S(S_{0,\varepsilon}(x)) dx + \phi_S\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) \int_\Omega I_{0,\varepsilon}(x) dx.$$

**Lemme 1.3.4.**

Il existe des fonctions  $F_3, F_4$  croissantes, indépendantes de  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ , tel que pour tout  $t > t_0 > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \phi_S(S_\varepsilon)|^2(x, t) dx + \int_{\Omega} |\nabla \phi_I(I_\varepsilon)|^2(x, t) dx &\leq F_3(t), \\ \int_{t_0}^t \int_{\Omega} |(\phi_S(S_\varepsilon))_t|^2 dx ds + \int_{t_0}^t \int_{\Omega} |(\phi_I(I_\varepsilon))_t|^2 dx ds &\leq F_4(t). \end{aligned}$$

Si  $0 \leq S_0(x) \leq \frac{\delta}{\gamma}$  pour chaque  $x \in \Omega$ , alors  $F_3$  et  $F_4$  sont des constantes.

**Démonstration.**

Multiplions l'équation de  $S_\varepsilon$  par  $(\phi_S(S_\varepsilon))_t$  et on intègre sur  $\Omega \times (\tau, t)$ ,  $\frac{t}{2} \leq \tau \leq T$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t \int_{\Omega} \phi'_S(S_\varepsilon)(S_\varepsilon)_t^2(x, s) dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi_S(S_\varepsilon)|^2(x, t) dx \\ = \int_{\tau}^t \int_{\Omega} (\phi_S(S_\varepsilon))_t (I_\varepsilon - \varepsilon) (\delta - \gamma(S_\varepsilon - \varepsilon))(x, s) dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi_S(S_\varepsilon)|^2(x, \tau) dx, \end{aligned} \quad (1.30)$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t \int_{\Omega} (\phi_S(S_\varepsilon))_t (I_\varepsilon - \varepsilon) (\delta - \gamma(S_\varepsilon - \varepsilon))(x, s) dx ds \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\tau}^t \int_{\Omega} \phi'_S(S_\varepsilon)(S_\varepsilon)_t^2(x, s) dx ds \\ + \frac{1}{2} \left\| \phi'_S(S_\varepsilon) \right\|_{\infty, \Omega} \|I_\varepsilon - \varepsilon\|_{\infty, \Omega} \int_{\tau}^t \int_{\Omega} (I_\varepsilon - \varepsilon) (\delta - \gamma(S_\varepsilon - \varepsilon))^2 dx ds. \end{aligned} \quad (1.31)$$

En injectant cette estimation dans (1.30), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \phi_S(S_\varepsilon)|^2(x, t) dx \\ \leq \int_{\Omega} |\nabla \phi_S(S_\varepsilon)|^2(x, \tau) dx + \\ \left\| \phi'_S(S_\varepsilon) \right\|_{\infty, Q_T} \|I_\varepsilon\|_{\infty, Q_T} \int_{\tau}^t \int_{\Omega} (I_\varepsilon - \varepsilon) (\delta - \gamma(S_\varepsilon - \varepsilon))^2 dx ds. \end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité en  $\tau$  sur  $(\frac{t}{2}, t)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \phi_S(S_\varepsilon)|^2(x, t) dx \\ \leq \frac{2}{t} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_{\Omega} |\nabla \phi_S(S_\varepsilon)|^2(x, \tau) dx d\tau \\ + \left\| \phi'_S(S_\varepsilon) \right\|_{\infty, Q_T} \|I_\varepsilon\|_{\infty, Q_T} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_{\Omega} (I_\varepsilon - \varepsilon) (\delta - \gamma(S_\varepsilon - \varepsilon))^2(x, s) dx ds. \end{aligned}$$

L'estimation de  $\nabla \phi_S(S_\varepsilon)$  découle des lemmes (1.3.1), (1.3.2) et (1.3.3).

De la même manière, on peut obtenir l'estimation de  $\nabla \phi_I(I_\varepsilon)$ , l'estimation de  $(\phi_S(S_\varepsilon))_t$  est immédiatement déduite de (1.30), (1.31) et lemme (1.3.3) en gardant :

$$|(\phi_S(S_\varepsilon))_t|^2 = (\phi'_S(S_\varepsilon))^2 (S_\varepsilon)_t^2 \leq (\sup_{0 < s \leq \|S_\varepsilon\|_{\infty, Q_T}} \phi'_S(s)) \phi'_S(S_\varepsilon) (S_\varepsilon) (S_\varepsilon)_t^2$$

l'estimation de  $\phi_I(I_\varepsilon)$  suit immédiatement.

## 1.4 Existence globale

Dans cette section, nous fournissons une preuve du théorème suivant :

### Théorème 1.4.1.

pour chaque donnée initiale positive  $(S_0, I_0)$  dans  $\mathbb{C}(\bar{\Omega} \times \mathbb{C}(\bar{\Omega}))$  il existe une solution unique faible  $(S, I)$  de problème (1.1) – (1.4) sur  $Q_\infty$ . en outre,

1.  $S \in \mathbb{C}(Q_\infty) \cap \mathbb{L}^\infty(Q_\infty)$ ,
2.  $I \in \mathbb{C}(Q_\infty)$ ; et si  $S_0 \leq \frac{\delta}{\gamma}$ , alors  $I \in \mathbb{C}(Q_\infty) \cap \mathbb{L}^\infty(Q_\infty)$

### 1.4.1 Existence

A partir des estimations établies dans la section précédente, on a  $(S_\varepsilon - \varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$  et  $(\nabla \phi_S(S_\varepsilon))_{0 < \varepsilon \leq 1}$  sont respectivement bornés en  $\mathbb{L}^2(Q_T)$  et  $(\mathbb{L}^2(Q_T))^N$  pour un  $T > 0$  fixé. puis, il existe deux suites qui sont encore notées  $(S_\varepsilon - \varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$  et  $(\nabla \phi_S(S_\varepsilon))_{0 < \varepsilon \leq 1}$  telles que  $(S_\varepsilon - \varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$  converge faiblement vers une fonction  $S$  dans  $\mathbb{L}^2(Q_T)$  et  $(\nabla \phi_S(S_\varepsilon))_{0 < \varepsilon \leq 1}$  converge faiblement vers  $V$  dans  $(\mathbb{L}^2(Q_T))^N$ . d'autre part  $(S_\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$  borné dans  $\mathbb{L}^\infty(Q_T)$ ; en utilisant la formulation faible de l'équation de  $S_\varepsilon$  on peut utiliser les résultats de Di Benedetto [8] pour obtenir  $(S_\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$  relativement compact dans  $\mathbb{C}(\bar{\Omega} \times [0, T])$ . Il en résulte que  $(S_\varepsilon - \varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$  converge vers  $S$  dans  $\mathbb{C}(\bar{\Omega} \times [0, T])$  et  $(\phi_S(S_\varepsilon))_{0 < \varepsilon \leq 1}$  converge vers  $\phi_S(S)$  dans  $\mathbb{C}(\bar{\Omega} \times [0, T])$ . Comme première conséquence de ça;  $V = \nabla \phi_S(S)$ . de la même manière, on peut prouver qu'il existe une fonction  $I$  telle que  $(I_\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$  converge vers  $I$  dans  $\mathbb{C}(\bar{\Omega} \times [0, T])$  et  $(\nabla \phi_I(I))_{0 < \varepsilon \leq 1}$  converge faiblement vers  $\nabla \phi_I(I)$  dans  $(\mathbb{L}^2(Q_T))^N$ . Maintenant, multiplions l'équation de  $S_\varepsilon$  en (1.14) par  $\varphi$ , l'équation de  $I_\varepsilon$  par  $\psi$ , intégrons par parties sur  $\Omega \times [0, T]$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$ , pour conclure que  $(S, I)$  est la solution souhaitée.

Les résultats de régularité pour  $\nabla \phi_S(S)$ ,  $\nabla \phi_I(I)$ ,  $(\phi_S(S))_t$  et  $(\phi_I(I))_t$  proviennent des estimations à priori des lemmes (1.3.1), (1.3.2) et (1.3.4).

# Comportement asymptotique

On termine ce travail par le traitement du comportement asymptotique en grands temps de la solution du système (1.1)-(1.5). On commence par introduire la notion suivante

**Ensemble  $\omega$  - limite :**

Dans cette section, on suppose que  $0 \leq S_0 \leq \frac{\delta}{\gamma}$ , et on définit  $\psi_k = \phi_k^{-1}$  pour  $k \in \{S, I\}$ . par le lemme (1.3.3), l'ensemble  $\{\phi_S(S)(\cdot, t), \phi_I(I)(\cdot, t)\}_{t \geq t_0}$  est borné dans  $(\mathbb{H}^1(\Omega))^2$ , donc pré-compact dans  $(\mathbb{L}^1(\Omega))^2$ , et nous concluons que l'ensemble W-limite

$W(S_0, I_0) = \{(U, V) \in (\mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^\infty(\Omega))^2 : \exists t_k \rightarrow \infty (\phi_S(S), \phi_I(I))(\cdot, t_k) \rightarrow (U, V)(\cdot) \text{ sur } (\mathbb{L}^1(\Omega))^2\}$  est bien défini. maintenant nous donnons une caractérisation de  $W(S_0, I_0)$ .

**Proposition 2.0.1.**

Si  $(U, V) \in W(S_0, I_0)$ , alors  $(U, V)$  est une solution du problème homogène de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta U = -\psi_I(V)(\gamma\psi_S(U) - \delta), & \text{sur } \Omega \\ -\Delta V = \psi_I(V)(\gamma\psi_S(U) - \delta), & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\frac{dU}{d\eta} = \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (2.2)$$

**Démonstration.**

Si  $(U, V) \in W(S_0, I_0)$ , alors il existe  $t_k \rightarrow \infty$  tel que :

$(U, V)(\cdot) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\phi_S(S), \phi_I(I))(\cdot, t_k)$  dans  $(\mathbb{L}^2(\Omega))^2$ .

considérons deux séquences  $U_k, V_k$  dans  $\mathbb{L}^2(\Omega \times (-1, 1))$  comme :

$U_k(x, y) = S(x, t_k + y), V_k(x, y) = I(x, t_k + y), x \in \Omega, -1 < y < 1, k > 0$ . pour chaque  $y \in (-1, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\phi_S(U_k)(x, y) - \phi_S(S)(x, t_k)|^2 dx &= \int_{\Omega} |\phi_S(S)(x, t_k + y) - \phi_S(S)(x, t_k)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \left| \int_{t_k}^{t_k+y} (\phi_S(S))_t dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{t_k}^{t_k+y} |(\phi_S(S))_t|^2 dx dt \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{t_k}^{\infty} |(\phi_S(S))_t|^2 dx dt. \end{aligned}$$

D'où :

$$\|\phi_S(U_k) - \phi_S(S)(\cdot, t_k)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega \times (-1,1))} \leq [\int_{\Omega} \int_{t_k}^{\infty} |(\phi_S(S))_t|^2 dx dt]^{\frac{1}{2}}$$

par le lemme (1.3.4) , on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{t_k}^{\infty} |(\phi_S(S))_t|^2 dx dt = 0.$$

alors pour une sous-séquence encore notée  $U_k, V_k : \phi_S(U_k) \rightarrow U, \phi_I(V_k) \rightarrow V$  dans  $\mathbb{L}^2(\Omega \times (-1,1))$  et presque partout sur  $\Omega \times (-1,1)$  , comme  $k \rightarrow \infty$  , puis par le théorème de convergence dominé de lebesgue, nous avons :

$$U_k \rightarrow \psi_S(U) , V_k \rightarrow \psi_I(V), V_k(\gamma U_k - \delta) \rightarrow \psi_I(V)(\gamma \phi_S(U) - \delta) \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega \times (-1,1)).$$

En suite, soit  $\varepsilon \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$  tel que  $\frac{d\varepsilon}{d\eta} = 0$  sur  $d\Omega$  et  $\rho \in \mathbb{C}_0^1(-1,1)$  ,

$\rho \geq 0$  ,  $\int_{-1}^1 \rho(y) dy = 1$  , on note  $\varphi(x, t) = \rho(t - t_k)\varepsilon(x)$  et utiliser  $\varphi$  comme fonction test dans la définition de  $S$  avec  $T = t_k + 1$  et  $t_k \geq 1$  . on obtient :

$$\int_0^T \int_{\Omega} [S\rho_t(t - t_k)\varepsilon(x) + \phi_S(S)\rho(t - t_k)\Delta\varepsilon - I(\gamma S - \delta)\rho(t - t_k)\varepsilon] dx dt = 0$$

ie :

$$\int_{t_k-1}^{t_k+1} \int_{\Omega} [S\rho_t(t - t_k)\varepsilon + \phi_S(S)\rho(t - t_k)\Delta\varepsilon - I(\gamma S + \delta)\rho(t - t_k)\varepsilon] dx dt = 0$$

On pose :  $y = t - t_k$  , on obtient :

$$\int_{t_k-1}^{t_k+1} \int_{\Omega} [S\rho_t(t - t_k)\varepsilon + \phi_S(S)\rho(t - t_k)\Delta\varepsilon - I(\gamma S - \delta)\rho(t - t_k)\varepsilon] dx dt = 0$$

passant à la limite lorsque  $k \rightarrow \infty$  et puis  $\int_{-1}^1 \rho'(y) dy = 0$  , on obtient :

$$\left( \int_{-1}^1 \rho(y) dy \right) \left( \int_{\Omega} U(x)\Delta\varepsilon(x) - \psi_I(V)(\gamma\psi_S(U) - \delta)\varepsilon dx \right) = 0$$

Nous concluons que pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega})$  ,  $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta} = 0$  sur  $d\Omega$  , on a :

$$\int_{\Omega} U(x)\Delta\varepsilon - \psi_I(V)(\gamma\psi_S(U) - \delta)\varepsilon dx = 0$$

Ainsi  $U$  est une solution faible de :

$$\begin{cases} -\Delta U = -\psi_I(V)(\gamma\psi_S(U) - \delta), & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial\eta} U = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous pouvons à présent énoncer le résultat de cette section concernant le comportement asymptotique de la solution du problème (1.1)-(1.5)

**Théorème 2.0.1.**

supposant  $0 \leq S_0 \leq \frac{\varepsilon}{\gamma}$  et  $M = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (S_0 + I_0)(x) dx$ , alors :

1. Si  $M \leq \frac{\delta}{\gamma}$ , alors :  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t, \cdot) = M$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t, \cdot) = 0$  dans  $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ .
2. Si  $M > \frac{\delta}{\gamma}$ , alors :  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t, \cdot) = \frac{\delta}{\gamma}$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t, \cdot) = M - \frac{\delta}{\gamma}$  dans  $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ .

**Démonstration.**

Les semi-orbites  $\{(S(\cdot, t), I(\cdot, t)); t \geq 0\}$  sont relativement compactes en  $(\mathbb{C}(\overline{\Omega}))^2$ , car elles sont bornées en  $(\mathbb{L}^{\infty}(Q_{\infty}))^2$  par le lemme (1.3.1), et utilisent les résultats de Di Binidetto [8].

Si  $(U, V) \in W(S_0, I_0)$ , alors  $(U, V)$  est solution de (2.1)-(2.2).

la fonction  $(U + V)$  est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta(U + V) = 0, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(U + V) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors  $(U + V)$  est constante.

Maintenant, multiplions l'équation pour  $V$  par  $V$  et intégrons sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} |\nabla V|^2 dx + \int_{\Omega} V \psi_I(V) (\delta - \gamma \psi_S(U)) dx = 0 \quad (2.3)$$

puisque  $\delta - \gamma \psi_S(U) \geq 0$ , nous concluons que  $V$  est une constante puis aussi  $U$  est une constante.

En injectant ces conclusions dans (2.3), on a :

$$V \psi_I(V) (\delta - \gamma \psi_S(U)) = 0 \rightarrow V = 0 \text{ ou } U = \phi_S\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

maintenant en utilisant l'estimation (1.16), nous obtenons :

$$\psi_S(U) + \psi_I(V) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} S_0(x) + I_0(x) dx$$

En gardant  $S \leq \frac{\delta}{\gamma}$ , ie :  $U \leq \phi_S\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$ , alors soit :  $V = 0 \rightarrow U = \phi_S\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} S_0(x) + I_0(x) dx\right) \leq \phi_S\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$  et cela est possible seulement si :

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} S_0(x) + I_0(x) dx \leq \frac{\delta}{\gamma},$$

Ou :

$$U = \phi_S\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) \rightarrow \psi_I(V) = \int_{\Omega} S_0(x) + I_0(x) dx - \frac{\delta}{\gamma} \geq 0$$

et cela possible seulement si :

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} S_0(x) - I_0(x) dx \geq \frac{\delta}{\gamma}$$

.

## Conclusion :

Dans ce travail, on a montré l'existence globale d'une solution positive d'un système d'équations de réaction-diffusion non linéaires et dégénéré modélisant la propagation d'une maladie épidémique et on a établi des estimations a priori qui ont permis de montrer l'existence globale d'une unique solution positive. On a terminé ce travail par une description du comportement asymptotique de la solution .

# Bibliographie

- [1] Ania ADIL. Etude d'un système de réaction-diffusion modélisant la propagation d'une maladie infectieuse. Mathématiques, UMMTO, 2018.
- [2] A.Haroux. *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*. Masson, Paris, 1991.
- [3] A.Okubo. *Diffusion and ecological problems :mathematical models,An extented version of the Japanese edition,Ecology and diffusion*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.
- [4] E.Di Benedeto. continuity of weak solutions to a general porous medium equation. *Indiana Univ.Math.J*, 32(1) :83–118, 1985.
- [5] M.Kirane et S.Kouachi. a strongly nonlinear reaction-diffusion model for a deterministic diffusive epidemic. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, February 1995.
- [6] H.Brezis. *Analyse fonctionnelle,Théorie et Applications*. Masson, Paris, 1983.
- [7] L.Maddalena. Existence,uniqueness and qualitative properties of the solution of a degenerate nonlinear parabolic system. *J.Math.Anal.Appl*, 127(2) :443–458, 1987.
- [8] L.Taleb. Etude d'un système de réaction-diffusion fortement couplé quasi-lineaire dégénéré. Mathématiques, USTHB, 2002.
- [9] C.Yui-Lin O.A.Oleinik, A.S.Kalashnikov. The cauchy problem and boundary problems for equations of the type of non-stationary filtration. *Izv.Akad.Nauk SSSR.Ser.Mat*, 22 :667–704, 1958.
- [10] M.Langlais T.Ali Ziane. Global existence and asymptotic behaviour for a degenerate diffusive seir model. *Electron.J.Qual.Theory Differ.Equ*, 2 :1–15, 2005.
- [11] M.Langlais T.Ali Ziane. Degenerate diffusive seir model with logistic population control. *Acta Math.Univ.Comenian.,(N.S.)*, 75(2) :185–198, 2006.
- [12] M.S.Moulay T.Ali Ziane. Global existence and asymptotic beaviour for a system of degenerate evolution equations. *Maghreb Math.Rev*, 9 :9–22, 2000.
- [13] M.S.Moulay T.Ali Ziane, L.Hadjadj. Nonlinear reaction diffusion systems of degenerate parabolic type. *Port.Math*, 66(2) :373–400, 2009.
- [14] S.J.Waggoner W.E.Fitzgibbon, J.J.Morgan.
- [15] J.Morgan W.Fitzgibbon, M.Langlais. Eventually uniform bounds for a class of quasi-positive reaction diffusion systems. *Japan J.Indust.Appl.Math*, 16(2) :225–241, 1999.
- [16] M.Langlais W.Fitzgibbon. Diffusive seir models with logistic population control. *Comm.Appl.Nonlinear Anal*, 4(3) :1–16, 1997.
- [17] T.Ali Ziane. Global existence and asymptotique behavior for a nonlinear degenerate sis model. *opscula Math*, 33 :615–630, 2013.