

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOULOD MAMMERI DE TIZI OUZOU
FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



Mémoire de fin d'étude

**En vue de l'obtention du diplôme de Master 2
En Génie Mécanique
Option : Construction Mécanique**

Thème

Etude numérique et expérimentale du champ
de contraintes développé dans un contact
cylindre sur plan en présence
D'un effort tangentiel

Proposé et dirigé par :

M^r : A. BILEK

Réalisé par :

M^r : HACIANE Rabah

Promotion 2011

Remerciements

Je remercie tout d'abord le bon dieu de m'avoir donné la force, la volonté et le courage pour l'élaboration de ce travail.

Je remercie mon promoteur Mr A.BILEK pour avoir bien voulu m'encadrer et pour ses précieux conseils et orientations.

Je remercie mon ami Touat Tarik pour son aide

Je remercie mon camarade Zaidi Kamel pour son aide

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants, les responsables et personnel du département de Génie mécanique.

J'adresse mes plus vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Je dédie ce modeste travail

A mes très chers parents

A mes frères et sœur

A la mémoire de mon grand père

A la mémoire de ma grande mère

A toute ma famille

A tous mes amis

Sommaire

Introduction générale	1
-----------------------------	---

Chapitre I : Rappel sur l'élasticité linéaire

Introduction.....	3
I.1 Définition d'un milieu continue	4
I.2 Hypothèse des petites déformations.....	4
I.3 Etude des déformations	4
I.3.1 Relation déformation/déplacement	5
I.3.2 Etude de la matrice des déformations.....	7
I.3.2.1 Calcul des valeurs propres	8
I.3.2.2 Calcul des vecteurs propres	8
I.4 Etude des contraintes	8
I.4.1 Tenseur des contraintes.....	10
I.5 Loi de comportement.....	12
I.6 Equations de comptabilité	13
I.7 Cercle de Mohr	14
I.7.1 Etas de contraintes particuliers.....	15
I.7.1.1 Traction ou compression hydrostatique	15
I.7.1.2 Traction ou compression simple dans une direction.....	15
I.7.1.3 Cisaillement simple	15
I.7.1.4 Etat de contrainte triaxiale de révolution	16

Chapitre II : Rappel sur la photoélasticimétrie

Introduction.....	18
II.1 Différentes type de la lumière.....	20
II.1.1 Lumière naturelle	20
II.1.2 Lumière polarisée.....	21
II.1.3 Lumière monochromatique	21
II.1.4 Lumière polarisée rectilignement	22
II.2 Propagation d'une onde lumineuse dans un milieu isotrope et anisotrope.....	22
II.2.1 Milieu isotrope.....	23
II.2.2 Milieu anisotrope.....	23
II.3 Principe de la photoélasticimétrie.....	23
II.3.1 La biréfringence	24
II.3.1.1 La biréfringence naturelle.....	24
II.3.1.2 La biréfringence accidentelle.....	25
II.3.2 Banc expérimentale de photoélasticimétrie	26
II.3.2.1 Lames quart d'ondes.	26
II.3.2.2 Polariscopes circulaire	27
II.3.2.3 Le polariseur à lumière planev.....	28
II.3.3 Effet de la biréfringence sur la lumière.....	28
II.3.3.1 Définition de la constante de frange.....	29

II.3.3.2 Les lignes isoclines	29
II.3.3.3. Les lignes isostatiques	30
II.3.3.3.a Définition d'une isostatique.....	30
II.3.3.3.b Point isotrope.....	31
II.3.3.3.c Propriétés des isostatiques.....	31
II.3.3.4 Les lignes isochromatiques	31
II.4 Conclusion	32

Chapitre III : Mécanique des contacts

Introduction.....	33
III.1 Surface de contact.....	33
III.2 Contact de Hertz	34
III.3 Principe générale de résolution du problème d'Hertz.....	35
III.4 Application d'un effort normal	36
III.4.1 Contact entre une sphère élastique et un demi-espace élastique	36
III.4.2 Contact entre deux sphères	36
III.4.3 Contact cylindre sur cylindre	38
III.4.3.1 Distribution des contraintes	38
III.4.4 Contact cylindre sur plan	39
III.4.4. 1 Champ de contraintes dues aux pressions Hertzienne	40
III.4.5 Contact plan sur plan	41
III.5 Application d'un effort normal et tangentiel	43
III.5.1 Contact sphère-plan	43
III.5.2 Contact cylindre-plan	44
III.6 Conclusion.....	45

Chapitre IV : Présentation et utilisation de Castem2000

Introduction.....	46
Historique	46
IV.1 Présentation de Castem2000	47
IV.2 Domaine d'utilisation de Castem2000	47
IV.3 Les principes de développement de Castem2000.....	48
IV.3.1 La simplicité	48
IV.3.2 L'orthogonalité des processus.....	48
IV.3.3 La visibilité et la localité des processus.....	48
IV.3.4 La régularité des processus.....	48
IV.3.5 La documentation des processus.....	49
IV.4 Mise en œuvre	49
IV.4.1 Notion de processus élémentaire.....	49
IV.4.2 Le code GIBIANE	50
IV.4.3 Syntaxe du langage « GIBIANE»	50
IV.4.4 Système d'unités	51
IV.4.5. Organisation d'un calcul	51
IV.4.5.1 Choix de la géométrie du maillage.....	52
IV.4.5.2 Définition du modèle mathématique	52
IV.4.6 Procédure de résolution d'un problème avec Castem.....	52

IV.5 Génération du Maillage	53
IV.5.1 Les maillages disponibles	53
IV.5.2 Les méthodes du maillage	53
IV.6 Types d'objets et principaux opérateurs.....	54
IV.6.1 Objet de type Champ par point	54
IV.6.2 Objet de type Champ par élément	54
IV.6.3 Objet de type Evolution.....	55
IV.7 Présentation de quelques directives	55
IV.7.1 Directive INFO (RMATION)	55
IV.7.2 Directive OPTI (ON)	55
IV.7.3 Directive DENS (ITE)	55
IV.7.4 Directive TRAC (ER)	56
IV.7.5 Directive FIN.....	56
IV.8 Représentation de quelques opérateurs.....	56
IV.8.1 L'opérateur DROI(TE)	56
IV.8.2 L'opérateur VOLU(ME)	57
IV.8.3 L'opérateur EXTR(AIRE)	57
IV.8.4 L'opérateur DEFO(RME)	57
IV.8.5 L'opérateur PRES(SION)	57
IV.8.6 L'opérateur VECT(EUR)	58
IV.8.7 L'opérateur BSIG	58
IV.9 Architecture générale des programmes que nous avons établit	59
IV.10 Conclusion	60

Chapitre V : Étude expérimentale et analyse numérique

Introduction.....	61
V.1 Objectif	61
V.2 Analyse expérimentale : la photoélasticimétrie 2D	61
IV.2.1 Identification du modèle.....	62
IV.2.2 Banc d'essai expérimental	63
IV.2.2.1 Dispositif de chargement	63
IV.2.2.2 Procédure.....	64
IV.2.2.3 Calcul de l'effort normal appliqué	65
IV.2.3 Le réseau d'isochromes sur le modèle en champ obscure	66
1- En lumière circulaire polychromatique	66
2- En lumière circulaire monochromatique	66
IV.2.4 La différence des contraintes principales	67
1 ^{ère} cas : Contact avec un effort normal	67
2 ^{ème} cas : Contact avec un effort normal et tangentiel	69
IV.2.5 Visualisation des franges isoclines	70
IV.2.6 Tracé les isostatiques	72
V.3 Analyse par éléments finis (logiciel castem2000)	75
1 ^{ère} étape : Description de la géométrie de modèle étudié et du maillage nécessaire.	75
2 ^{ème} étape : Tracé de la déformation.....	76
3 ^{ème} étape : Visualisation des isochromes.....	79
4 ^{ème} étape : Visualisation des isoclines	80

5 ^{ème} étape : La variation de la différence des contraintes principales	82
➤ Cas d'un contact avec un effort normal seul	83
➤ Cas d'un contact avec un effort normal et tangentiel	85
V.4 Comparaison des résultats	86
V.4.1 Comparaison des images	86
V.4.1.1 Comparaison des isochromes	86
V.4.1.2 Comparaison des isoclines	88
V.4.2 Superposition des courbes	89
V.5 Discussion des résultats.....	91
V.6 Conclusion	91
Conclusion générale	92

Liste des figures

Chapitre I : Rappel sur l'élasticité linéaire

Figure I.1 : Configuration initiale et finale d'un domaine matériel D	5
Figure I.2 : Déplacement et déformation d'un solide.....	5
Figure I.3 : Déplacement et déformation d'un solide.....	6
Figure I.4 : Vecteur contrainte relatif au plan de coupe dont la normale extérieure est \vec{n}	9
Figure I.5 : Tétraèdre élémentaire au point O montrant les contraintes agissant sur ses facettes ...	11
Figure I.6 : Cercle de Mohr.....	14
Figure I.7 : Représentation de Mohr pour une traction ou compression Hydrostatique	15
Figure I.8 : Représentation de Mohr pour une traction simple	15
Figure I.9 : Représentation de Mohr pour un cisaillement simple.....	16
Figure I.10 : Représentation de Mohr pour un état de contrainte triaxial révolution.....	16
Figure I.11 : Représentation de Mohr pour un état de contrainte plan ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 > 0$)	17

Chapitre II : Rappel sur la photoélasticimétrie

Figure II.1 : Photoélasticimétrie par réflexion	19
Figure II.2 : Photoélasticimétrie par transmission.....	20
Figure II.3 : Vibration transversales d'un faisceau de lumière	20
Figure II.4 : Polarisation de la lumière	21
Figure II.5 : Filtres polarisants dont les axes sont parallèles ou perpendiculaires.....	21
Figure II.6 : Faisceau polarisé linéairement	22
Figure II.7 : Propagation d'une onde à travers une matière biréfringence.....	24
Figure II.8 : Phénomène de biréfringence naturelle	25
Figure II.9 : Disposition des lames quart d'onde dans le polariscope à transmission	27
Figure II.10 : Schéma simplifié d'un polariscope à lumière circulaire.....	28
Figure II.11 : Schéma simplifié d'un polariscope à lumière rectiligne.....	28
Figure II.12 : Lumière plane traversant un modèle photoélastique (X et Y sont les directions principales des contraintes)	29

Chapitre III : Mécanique des contacts

Figure III.1 : Surface de contact et contrainte au contact entre deux sphères	34
Figure III.2 : Contact de Hertz.....	35
Figure III.3 : Contact entre une sphère et un demi-espace élastique	36
Figure III.4 : a) Contact sphère-sphère b) conditions du Contact sphère-plan.....	37
Figure III.5 : Contact entre deux cylindres le long de leurs génératrices et distribution de la pression dans la zone de contact	38
Figure III.6 : Contact cylindre sur plan.....	39
Figure III.7 : Isovaleurs des contraintes principales σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{max}	42
Figure-III.8 : Contact cylindre plan en présence d'un effort tangentiel	44
Figure III.9 : Champs de contraintes sous des conditions de glissement pur ($\mu = 0.25$)	44

Chapitre V : Étude expérimentale et analyse numérique

Figure V.1 : Contact cylindre sur plan.....	62
Figure V.2 : Dispositif de chargement.....	63
Figure V.3 : Dispositif de l'essai sur un banc <i>photoélasticimétrique</i>	64
Figure V.4 : Contact cylindre sur plan.....	65

Figure V.5 : Réseau d'isochromes sur le modèle avec un effort normal seul	66
Figure V.6 : Réseau d'isochromes sur le modèle en présence d'un effort tangentiel	66
Figure V.7 : Réseau d'isochromes sur le modèle avec un effort normal seul	66
Figure V.8 : Réseau d'isochromes sur le modèle en présence d'un effort tangentiel	66
Figure V.9 : Réseau d'isochromes et l'ordre des franges qui apparaissent Pour le contact avec l'effort normal seul.....	67
Figure V.10 : Courbe de variations de la différence des contraintes principales relevées expérimentalement	68
Figure V.11 : Réseau d'isochromes pour le contact avec l'effort normal et l'effort tangentiel.....	69
Figure V.12 : Courbe de variations de la différence des contraintes principales relevées expérimentalement(effort normal et tangentiel)	70
Figure V.13 : Relevé des isoclines par rotation des polaroids avec un angle de 10° en lumière circulaire polychromatique (effort normal seul)	71
Figure V.14 : Relevé des isoclines par rotation des polaroids avec un angle de 10° en lumière circulaire monochromatique (effort normal seul)	71
Figure V.15 : Localisation des isoclines correspondant aux directions principales	72
Figure V.16 : Trace des isoclines et les points par lesquels passeront les isostatiques.....	73
Figure V.17 : Les isoclines et les isostatiques	74
Figure V.18 : Représentation de la surface maillée	75
Figure V.19 : Relation de déplacement des nœuds en contact	76
Figure V.20 : Représentation de la déformée (contact avec l'effort normal seul).....	79
Figure V.21 : Représentation de la déformée (contact en présence d'un effort tangentiel).....	79
Figure V.22 : Tracé des isochromes (sans et en présence d'un effort tangentiel)	79
Figure V.23 : Tracé des isochromes traitées avec Surfer	80
Figure V.24 : Les isoclines simulées sous Castem et traitées avec Surfer	81
Figure V.25 : Les isoclines simulées sous Castem et traitées avec Surfer en présence d'un effort tangentiel.....	82
Figure V.26 : Courbe de variation de la différence des contraintes principales obtenues numériquement.....	84
Figure V.27 : Courbe de variation de la différence des contraintes principales obtenues numériquement en présence d'un effort tangentiel.....	86
Figure V.28 : Isochromes simulées avec Castem et traitées avec surfer.....	87
Figure V.29 : Isochromes relevées expérimentalement	87
Figure V.30 : Isochromes simulées avec Castem et traitées avec surfer en présence d'un effort tangentiel	87
Figure V.31 : Isochromes relevées expérimentalement en présence d'un effort tangentiel	87
Figure V.32 : Comparaison des isoclines simulées sous Castem et traitée avec Surfer avec celles obtenues expérimentalement.....	88
Figure V.33 : Isocline à 0° traitée avec Surfer.....	89
Figure V.34 : Isocline à 0° obtenue expérimentalement.....	89
Figure V.35 : Superposition des courbes numériques et expérimentales pour un contact avec l'effort normal seul	89
Figure V.36 : Superposition des courbes numérique et expérimentale contact avec un effort normal et un effort tangentiel.....	90

Liste des tableaux

Tableau IV.1 : Système d'unités pour un acier.....	51
Tableau V.1 : Valeurs de la différence des contraintes principales relevées sur le segment [AB] ..	68
Tableau V.2 : Valeurs de la différence des contraintes principales relevée sur le segment [AB] ..	69
Tableau V.3 : Extraction des efforts correspondant au déplacement vertical imposé.....	77
Tableau V.4 : Extraction des efforts correspondant au déplacement horizontal imposé	78
Tableau V.5 : Valeurs de la différence des contraintes principales données par Castem (sans effort tangentiel)	83
Tableau V.6 : Valeurs de la différence des contraintes principales obtenues numériquement à l'aide de Castem en présence d'un effort tangentiel.....	85

Notations et symboles

INDICE	UNITE	SIGNIFICATION
$\bar{\varepsilon}$ ou $[\varepsilon]$	--	Tenseur des déformations
ε_{ij}	%	Composantes du tenseur des déformations
ε_e	%	Déformation élastique
U [M]	--	Champ des déplacements
\vec{U}	--	Vecteur déplacement
u,v,w	mm	Déplacement suivant les axes x,y,z respectivement
$\bar{\sigma}$ ou Σ	--	Tenseur des contraintes
σ_{ij}	MPA	Composantes di tenseur des contraintes
\vec{T}	--	Vecteur contrainte
τ_{max}	MPA	Contrainte de cisaillement maximale
E	MPA	Module d'élasticité longitudinal (module de Young)
G	MPA	Module d'élasticité transversal (module de Colomb)
γ_{ij}	%	Distorsion angulaire (ou glissement)
ν	--	Coefficient de poisson
\vec{B}	--	Vecteur induction magnétique
λ	μm	Longueur d'onde
[T]		Matrice de transformation (gradient de U)
C_1 et C_2	Brewster	Constante photoélastiques absolue du matériau
C	$[10^{-12}\text{m}^2/\text{N}]$	Constante relative du matériau
n^r	--	Indice de réfraction d'un milieu biréfringent
δ	μm	Retard relatif entre deux vibrations d'une onde
φ	rd	Retard angulaire entre deux vibrations d'une onde
N	ordre	Ordre de frange
f	N/mm. ordre	Constante de frange
σ_1 et σ_2	MPA	Contraintes principales

Introduction générale

Les contacts entre deux corps, qu'ils soient statiques ou dynamiques, constituent la base de toutes les liaisons des mécanismes. Lorsque deux surfaces sont mises en contact, des sollicitations mécaniques sont imposées aux massifs et peuvent donner lieu à des dégradations et détériorations de la surface du contact qui peut prendre différentes formes : déformation plastique, usure, fatigue de contact, etc. Ceci provoque la rupture des pièces mécaniques.

La mécanique de contact est la première tentative sérieuse pour faire converger les formalismes du frottement et de l'usure en 1670 avec les travaux de Newton qui pressait des sphères de verre sur des plans métalliques. Ensuite plusieurs travaux ont été consacrés à l'analyse des problèmes de contact. Hertz, est le premier à avoir formulé une analyse satisfaisante du problème de contact entre deux solides.

Plusieurs méthodes numériques et expérimentales ont été développées pour déterminer les contraintes au voisinage de la zone de contact. La méthode des éléments finis, où se mêlent étroitement les mathématiques, la mécanique et l'analyse numérique a permis de traiter ce type de problème de manière satisfaisante. Il est clair toutefois que l'expérimental est plus que nécessaire pour concorder les théories et les méthodes numériques. L'une des méthodes expérimentales utilisée est la photoélasticimétrie, méthode non destructive permettant de visualiser les contraintes à l'intérieur d'un solide. C'est une méthode optique se basant sur la biréfringence acquise par les matériaux soumis à des contraintes.

Le but de ce travail est de déterminer les champs de contraintes développés dans le contact cylindre sur plan en présence d'un effort tangentiel. Ce travail est basé sur deux méthodes : numérique (Castem2000) et expérimentale (la photoélasticimétrie). Une comparaison des résultats expérimentaux et numériques nous permettra de tirer des conclusions sur les contacts.

Notre travail est subdivisé comme suit :

Dans le premier chapitre on présente des rappels sur l'élasticité linéaire. Il s'agit de l'introduction de la notion du comportement, et des relations liant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la photoélasticimétrie et à la description du phénomène de biréfringence.

Le troisième chapitre comportera la théorie de Hertz du contact mécanique ou nous présenterons les différents types d'interactions en détaillant leurs relations analytiques.

Dans le quatrième chapitre on traitera les différentes applications et utilisations du logiciel CASTEM2000 en interprétant les principales règles syntaxiques du langage GIBIANE ainsi que quelques directives et opérateurs.

Dans le cinquième chapitre sont présentés les différents essais expérimentaux sur le polariscope. Les résultats numériques des simulations faites sur le logiciel CASTEM sont comparés aux graphes et images des franges obtenues expérimentalement.

Introduction

Les physiciens ont depuis des siècles tenté de mettre en équations le comportement de la matière. Plus ou moins générales, précises ou robustes, ces modélisations s'appuient sur la représentation du phénomène de déformation à l'aide de champ vectoriels et de tenseurs. Ceux-ci décrivent en particulier la déformation de l'objet ainsi que les contraintes internes qu'il subit. Des lois de comportement viennent ensuite lier les contraintes et la déformation qui en résulte.

L'élasticité linéaire se situe dans le cadre de la description des solides déformables d'une part, et d'autre part impose la linéarité à loi de comportement élastique reliant le tenseur des contraintes à celui des déformations.

La théorie suppose que les matériaux étudiés possèdent les propriétés suivantes :

- Ils sont parfaitement élastique (si les forces extérieures qui provoquent leur déformation ne dépassent pas une certaine limite, celle-ci disparaît en même temps que la force qui lui a donné naissance).

- Ils sont homogènes c'est-à-dire que leurs propriétés mécaniques sont les mêmes en tout point du solide considéré.

- Ils sont isotropes, c'est-à-dire que leurs propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions. Les matériaux utilisés dans les constructions ne satisfont pas en général, dans leur ensemble, à cette dernière hypothèse ; ils sont en effet constitués souvent des cristaux (acier par exemple) de formes diverses et différemment orientés. Cependant, les théories générales de l'élasticité, quoique fondées sur l'homogénéité et l'isotropie, donnent des résultats tout à fait valables.

Lorsque l'on étudie un problème d'élasticité, on cherche à connaître les déformations que peut subir un matériau sous l'action de certaines forces et contraintes maximales qu'il peut supporter sans entraîner à la rupture.

Le mécanicien qui veut dimensionner ou vérifier le comportement d'une structure (en statique ou en dynamique) est essentiellement intéressé par trois champs :

- Le champ des déplacements U (M).
- Le champ des déformations $[\epsilon]$.
- Le champ des contraintes $[\sigma]$

I.1 Définition d'un milieu continu

La mécanique des milieux continus s'intéresse au comportement de la matière à une grande échelle devant les distances intermoléculaires si bien que la structure moléculaire pourra ne pas être prise en compte de façon explicite, d'où on définit ce dernier comme un milieu dont le comportement macroscopique peut être schématisé en supposant la matière répartie sur le domaine qu'il occupe, et non, comme dans la réalité, concentrée dans une partie de volume très petite [1].

I.2 Hypothèse des petites déformations

Dans la limite normale de l'utilisation d'un matériau, celui-ci subit des déformations relativement faibles par rapport aux dimensions du solide. En conséquence les conditions d'équilibre établies par la statique rationnelle pour les corps parfaits indéformables sont applicables sans autres aux solides réels [1].

I.3 Etude des déformations

En mécanique générale, on considère des corps rigides, c'est-à-dire que l'on suppose que les particules d'un solide demeurent à des distances constantes.

L'étude des déformations a pour objectif de comprendre et d'effectuer un calcul de dimensionnement et de contrôle en rigidité ou en résistance, ainsi que de maîtriser la démarche du calcul d'une structure du point de vue cinématique (calcul des déformés), et du point de vue mécanique (calcul des contraintes) avec :

- l'analyse d'un état de déformation et de contrainte
- l'utilisation et la compréhension des critères de résistance élastique
- le choix d'un coefficient de sécurité

La notion de déformation d'un système matériel naît de la comparaison entre une configuration dite « initiale » et une configuration qualifiée dite « finale ».

Dans une première approche apparaît l'idée qu'un système matériel ne se déforme pas entre deux instants t_1 et t_2 si les distances et les angles se conservent lorsqu'on compare les deux configurations du système aux instants respectifs t_1 et t_2 .

On prend pour t_1 l'instant qualifiée d'initial ($t_1 = t_0$). La configuration à l'instant t_1 sera donc celle sur laquelle sont définies les variables spatiales de Lagrange.

La configuration finale sera la configuration actuelle occupée par le système à l'instant t ($t=t_2$). Cet instant apparaît alors comme une variable permettant d'indexer la configuration finale. Une fois choisie la configuration initiale comme configuration de référence, c'est la description lagrangienne qui apparaît bien adaptée à l'étude des déformations [2].

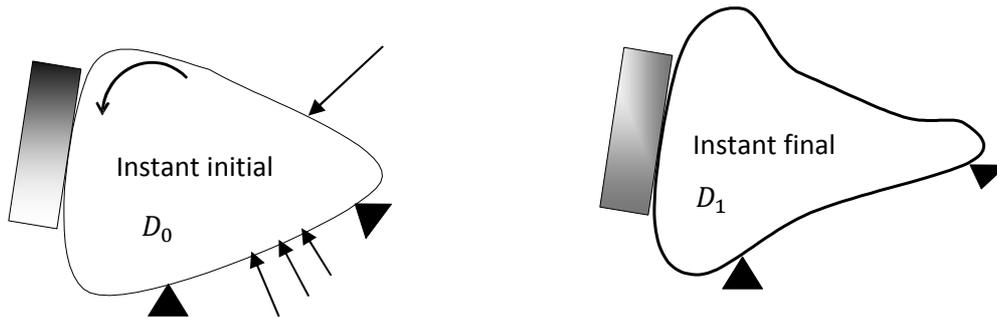


Figure I.1 : Configuration initiale et finale d'un domaine matériel D

I.3.1 Relation déformation/déplacement

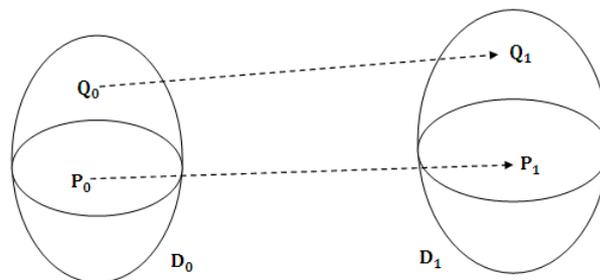


Figure I.2 : Déplacement et déformation d'un solide

Soit un solide D repéré dans un référentiel fixe OXYZ, pour définir son déformation, nous suivons le déplacement de deux points voisins P et Q de ce solide, tel que :

$$Q_0 (X_0+d_x, Y_0+d_y, Z_0+d_z) \text{ et } \overrightarrow{P_0Q_0} = (d_x, d_y, d_z)$$

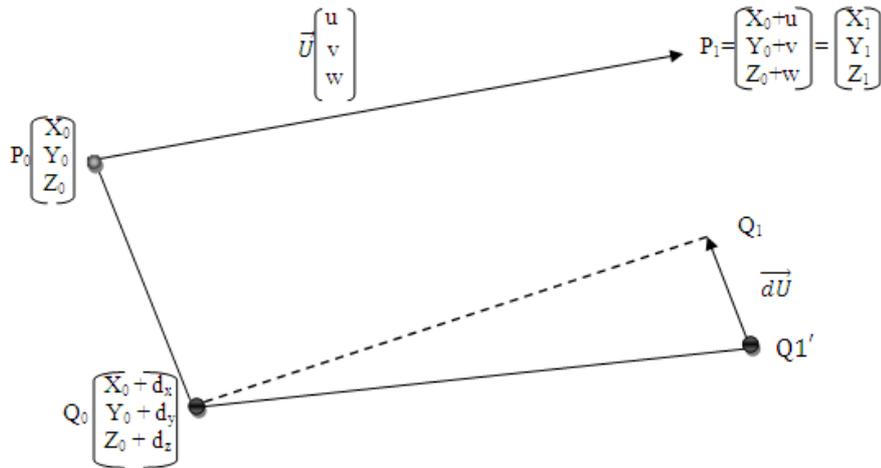


Figure I.3 : Déplacement et déformation d'un solide

Dans l'état final $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$ est venu en $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$

La différentielle de déplacement entre $\overline{P_0P_1}$ et $\overline{Q_0Q_1}$ provient de l'éloignement entre P_0 et Q_0 .

Sachant que :

$$\begin{cases} U = U(x, y, z) \\ du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \end{cases} \quad (\text{I-1})$$

Les composantes du vecteur déplacement $\overline{Q_0Q_1}$ s'écrivent alors :

$$\overline{U(Q)} = \overline{Q_0Q_1} = \begin{cases} u(x, y, z) + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v(x, y, z) + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w(x, y, z) + dw = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases} \quad (\text{I-2})$$

Le vecteur déplacement sous forme matricielle :

$$[\overline{Q_0Q_1}] = [\overline{P_0P_1}] + [T] \cdot [\overline{Q_0P_0}] \quad (\text{I-3})$$

$$\begin{pmatrix} u + du \\ v + dv \\ w + dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (\text{I-4})$$

$$\text{Tel que : } [T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$[T]$: est une matrice de transformation (gradient de U), elle est à coefficients réels. Elle se décompose en deux matrices : symétrique et antisymétrique

$$[T] = \frac{1}{2} [T + T^t] + \frac{1}{2} [T - T^t] \quad (\text{I-5})$$

Avec $\frac{1}{2} [T + T^t]$: Matrice symétrique

$\frac{1}{2} [T - T^t]$: Matrice antisymétrique

Incluant la formule (I.5) dans (I.3), on écrit le vecteur déplacement comme suit:

$$[\overrightarrow{Q_0 Q_1}] = [\overrightarrow{P_0 P_1}] + \frac{[T+T^t]}{2} \cdot [\overrightarrow{P_0 Q_0}] + \frac{[T-T^t]}{2} \cdot [\overrightarrow{P_0 Q_0}] \quad (\text{I-6})$$

Si $[\overrightarrow{Q_0 Q_1}] = \frac{[T+T^t]}{2} \cdot [\overrightarrow{P_0 Q_0}] = [\varepsilon] \cdot [\overrightarrow{P_0 Q_0}]$ on dit que le milieu est déformé.

$$[\varepsilon] = \frac{[T + T^t]}{2}$$

I.3.2 Etude de la matrice des déformations

On se place dans le repère (P_0, x, y, z) entraîné dans la translation et la rotation par rapport à ce repère, $\overrightarrow{P_0 P_1}$ et \overrightarrow{w} sont nuls

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Variation de longueur

Distorsion angulaire

La ligne diagonale représente la variation de longueur, le diagonale inférieure et supérieure représentent la distorsion angulaire.

Le tenseur des déformations symétrique est aussi entièrement déterminé par la connaissance de six composantes sur les neuf en tout point, que l'on représente vectoriellement : ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , ε_{xy} , ε_{xz} , ε_{yz} .

I.3.2.1 Calcul des valeurs propres

La matrice des déformations est symétrique, $[\varepsilon]$ diagonalisable.

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\det (\varepsilon - \lambda I_0) = 0 \quad (I-7)$$

$$\det \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \lambda & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \lambda & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Polynôme de degré 3}$$

Les solutions λ_1 , λ_2 , λ_3 sont les solutions des déformations principales ε_I , ε_{II} , ε_{III} .

I.3.2.2 Calcul des vecteurs propres

On cherche $\vec{h}_1 \neq \vec{0}$ tel que :

$$([\varepsilon] - \lambda_i [I]). [h_i] = 0 \quad (I-8)$$

Tel que : (i=1, 2, 3)

Les 3 axes X_I , X_{II} , X_{III} construit sur les 3 vecteurs propres $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$ sont les axes principaux de déformation.

I.4 Etude des contraintes

Généralement les efforts extérieurs sont dus à des actions à distance telles que les forces électromagnétiques et les forces d'inertie. Ceux-ci sont souvent connus et leur modélisation ne pose pas de problème. On les supposera représentables par une densité massique de force $\vec{F}(M, t)$.

Pour pouvoir progresser, il faut définir les efforts intérieurs.

Soit (ox, oy, oz) un système d'axes de référence formant un repéré orthonormé direct et un solide en équilibre [1].

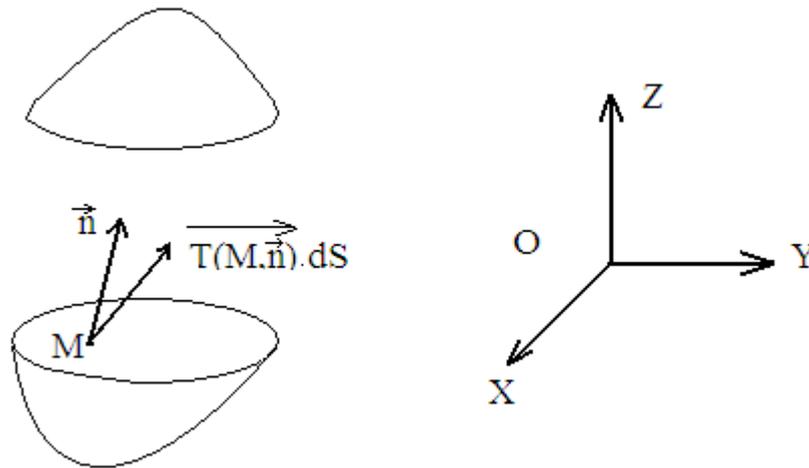


Figure I.4 : Vecteur contrainte relatif au plan de coupe dont la normale extérieure est \vec{n}

La contrainte est une force par unité de surface, résultant dans le solide suite à l'application des forces extérieure. Une contrainte est homogène à une pression, son unité est le pascal ($1 \text{ pascal} = 1\text{N/m}^2$).

Les efforts exercés sur une partie D d'un milieu continu par le complémentaire de D dans le système peuvent être représentés par une répartition surfacique de forces.

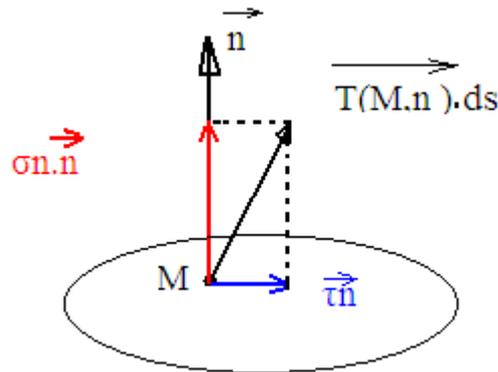
Cette densité surfacique ne dépend du domaine considéré que par la normale extérieure au domaine pour le point d'étude. On a donc une représentation par un vecteur du type $\vec{T}(P, \vec{n})$, appelé vecteur contrainte en "P" dans la direction \vec{n} .

On peut considérer que chaque élément de matière est en effet soumis à des forces de liaison provenant soit d'une frontière si celle-ci est contiguë, soit du reste du système.

Avec l'hypothèse de densité surfacique de force, nous pouvons dire que sur chaque surface élémentaire dS autour du point P et de normale \vec{n} , les éléments du système Σ situés dans la région de "P" et n'appartenant pas à la partie D exercent sur les éléments du système Σ appartenant à la partie D une force élémentaire $d\vec{F}$ déterminée par :

$$d\vec{F} = \vec{T}(P, \vec{n}) \cdot dS$$

Généralement, on appelle facette ; le plan tangent en "M" au domaine étudié. La normale \vec{n} définit l'orientation de cette facette [1].



On peut alors définir la contrainte normale σ_n comme étant la projection sur la direction de la normale \vec{n} du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$.

De même on a le vecteur contrainte tangentielle τ_n (encore appelé contrainte de cisaillement) qui représente le vecteur contrainte projeté dans le plan de la facette.

On à:

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n} \\ \tau_n = \vec{n} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) \wedge \vec{n} = \vec{T}(M, \vec{n}) - \sigma_n \vec{n} \end{cases} \quad (\text{I-9})$$

Une contrainte normale positive traduit localement un état de traction de la matière. Si au contraire elle est négative, nous avons localement un état de compression.

Remarque

- Les composantes du vecteur contrainte sont homogènes à une pression, c'est à dire qu'ils ont la dimension d'une force par unité de surface.
- Le vecteur contraint ainsi défini est déterminé dans la configuration actuelle. Nous avons ainsi une représentation eulérienne de ce vecteur.

I.4.1 Tenseur des contraintes

Le vecteur contraint ne suffit pas à lui seul pour caractériser l'état de contrainte en un point matériel. Sa dépendance vis à vis de la direction normale à la facette montre clairement qu'il est nécessaire d'envisager une autre représentation pour l'état de contrainte.

L'axe OX a été privilégié en prenant un plan π qui lui était orthogonal. Supposant que nous privilégions maintenant l'axe OY puis l'axe OZ. On définit deux autres vecteurs contraintes au point M, ce qui conduit à 3×3 composantes forment la matrice des contraintes au point M, les axes orthogonaux aux plan de coupe étant ici X, Y et Z [3].

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

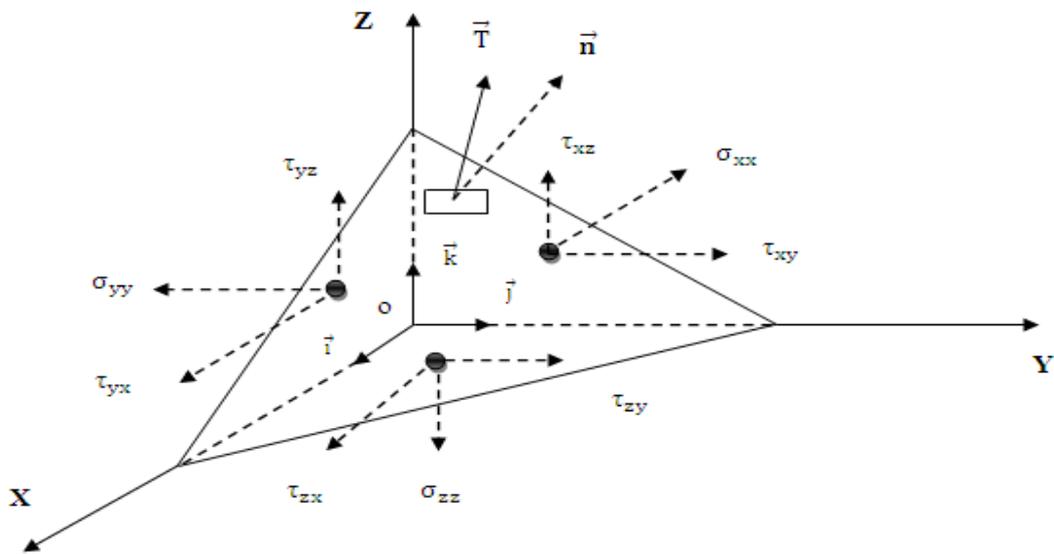


Figure I.5 : Tétraèdre élémentaire au point O montrant les contraintes agissant sur ses facettes.

Les σ_{ij} sont les composantes du tenseur des contraintes Σ . La connaissance de cette matrice permet de déterminer le vecteur contrainte \vec{T} au point M.

Soit le vecteur contrainte \vec{T} , associé à la direction \vec{n} , avec :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{T} \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$$

α , β et γ sont dits « cosinus directeurs du vecteur \vec{n} ». Soit \vec{T}_x , \vec{T}_y et \vec{T}_z les composantes vectorielles du vecteur \vec{T} , avec :

$$\vec{T}_x \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \quad \vec{T}_y \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad \vec{T}_z \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

L'équilibre du tétraèdre s'écrit :

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{I-10})$$

I.5 Loi de comportement

A partir des hypothèses fondamentales si dessus, on écrit la loi de comportement d'un milieu élastique linéaire :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{I-11})$$

Ou encore avec :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{I-12})$$

Où : σ_{ij} est le tenseur des contraintes qu'est un tenseur symétrique s'écrivant sous forme matricielle

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

ε_{ij} est le tenseur des déformations, défini par $\bar{\varepsilon}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I-13})$$

Dans l'hypothèse des petites déformations.

λ et μ sont les coefficients de Lamé.

E et ν sont les modules de Young et de Poisson.

Un tenseur de contrainte possède trois invariants définis comme suit :

$$I_1 = \text{tr}|\Sigma| = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [\text{tr}(\Sigma)^2 - \text{tr}[(\Sigma)^2]]$$

$$I_3 = \det(\Sigma) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Sont les valeurs propres du tenseur Σ , elles sont aussi appelées contraintes normales principales associées aux directions principales [4].

I.6 Equations de comptabilité

Les composantes de la déformation en un point quelconque sont complètement déterminées par les trois (3) fonctions u , v et w qui représente les composantes de déplacement. Ce ne sont pas donc des fonctions arbitrairement choisies de x , y et z , mais des fonctions qui dépendent des relations suivantes [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right. \quad (I-14)$$

Imaginons une structure divisée, avant déformation, en petits cubes. Si chaque petit élément subit une déformation due à un changement quelconque, les cubes deviennent des parallélépipèdes et donc leurs arrangements pour former un corps déformé continu peut devenir un problème.

Pour assurer cette continuité les composantes de déformation doivent satisfaire certaines relations qu'on appelle équations de comptabilités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} \end{array} \right. \quad (I-15)$$

I.7 Cercle de Mohr

Autrefois, les calculs appliquant un nombre de variables étaient fastidieux et sujet à erreur, donc il fallait de grands efforts pour tracer des abaques et utiliser des méthodes graphiques pour résoudre des équations couramment utiliser (les relations de transformation de contraintes et de déformations). Mohr s'est spécialisé dans l'analyse des contraintes, il a démontré que les relations de transformation pouvaient être représentées par un cercle dont l'abscisse donne les contraintes (où les déformations) normales et l'ordonnée les contraintes (où les déformations) de cisaillement. Il montra que les points sur le périmètre du cercle correspondait aux composantes des contraintes (où déformations) normales et de cisaillement transformées on un point. L'inconvénient de la construction de Mohr est que l'angle formé par la droite passant par un point du cercle et son centre et par l'axe de référence est égale à deux fois l'angle de transformation réel.

Pendant des années, les cercles de Mohr ont été les moyens de calcul utilisé pour la transformation des contraintes et des déformations; les cercles étaient construits avec soin sur du papier graphique de bonne qualité, l'angle double mesuré, et les composantes des contraintes et des déformations étaient lues directement sur le graphique sans avoir recours à d'autres calculs.

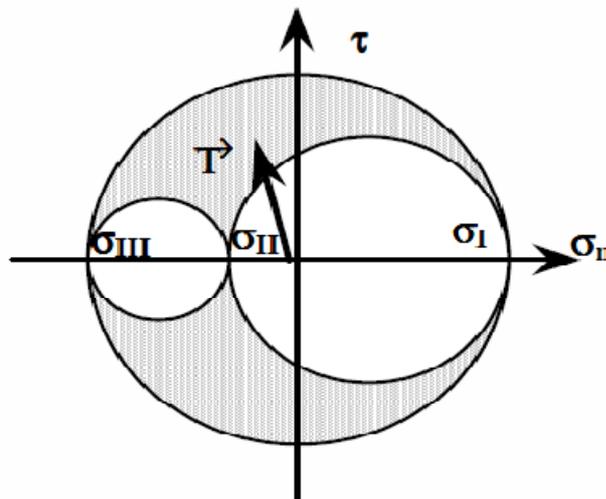


Figure I.6 : Cercle de Mohr

I.7.1 Etats de contraintes particuliers

I.7.1.1 Traction ou compression hydrostatique

Définition

On dit que $\bar{\sigma}$ est un tenseur de traction ou compression si :

$\bar{\sigma}$ est sphérique.

On a alors $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m$. Les trois

Cercles de Mohr se réduisent au point $(\sigma_m, 0)$ [4].

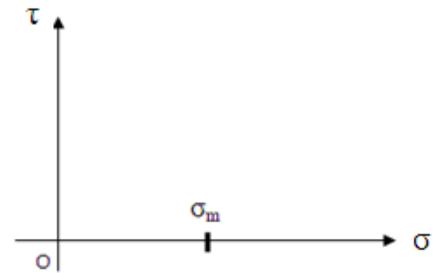


Figure I.7 : Représentation de Mohr pour une traction ou compression hydrostatique

I.7.1.2 Traction ou compression simple dans une direction

On dit que $\bar{\sigma}$ est un tenseur de traction ou de compression simple dans la direction du vecteur \vec{u} si \vec{u} définit une direction principale de $\bar{\sigma}$ et si la contrainte principale correspondante est la seule qui soit non nulle. On dit aussi que $\bar{\sigma}$ est un tenseur uni axial.

La matrice de $\bar{\sigma}$ dans une base principale $(\vec{u}, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,

S'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_1 > 0 \text{ traction simple.} \\ \sigma_1 < 0 \text{ compression simple.} \end{array}$$

Les cercles de Mohr C_2 et C_3 sont confondus.

Le cercle C_1 se réduit au point 0.

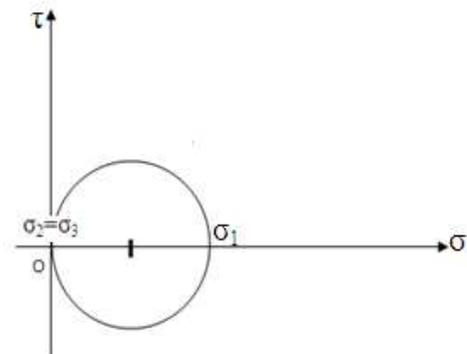


Figure I.8 : Représentation de Mohr pour une traction simple

I.7.1.3 Cisaillement simple

Définition

On dit que $\bar{\sigma}$ définit un cisaillement simple dans deux directions orthogonales \vec{u} et \vec{u}' si la matrice de $\bar{\sigma}$ s'écrit dans une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{u}'')$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{\bar{\sigma}}$ définisse un cisaillement simple est que l'une des contraintes principales soit nulle et les deux autres opposées.

Si par exemple $\sigma_1 = -\sigma_3$ et $\sigma_2 = 0$

La matrice de $\bar{\bar{\sigma}}$ dans la base principale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 = \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 = -\sigma_{12} \end{pmatrix}$$

On aura alors la représentation de Mohr sur la figure.

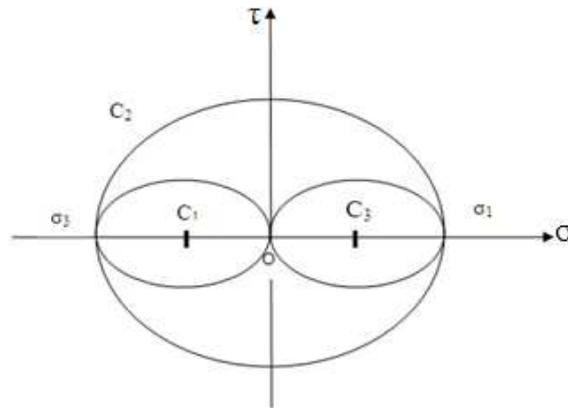


Figure I.9 : Représentation de Mohr pour un cisaillement simple

I.7.1.4 Etat de contrainte triaxiale de révolution

Définition

On dit que $\bar{\bar{\sigma}}$ définit un état de contrainte triaxiale de révolution si deux contraintes principales sont égales et non nulles [4].

Supposons par exemple que $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$

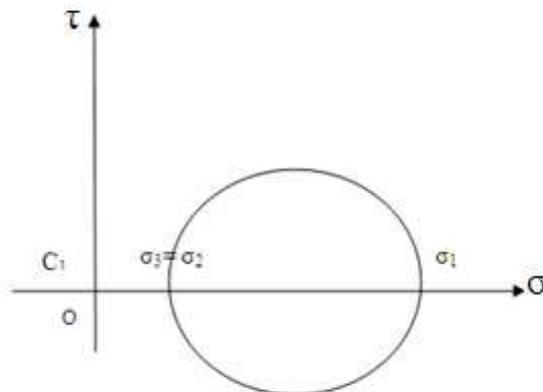


Figure I.10 : Représentation de Mohr pour un état de contrainte triaxiale de révolution

Toute direction orthogonale à \vec{e}_1 est direction principale associée à $\sigma_2 = \sigma_3$. Les cercles C_2 et C_3 sont confondus, le cercle C_1 se réduit à un point.

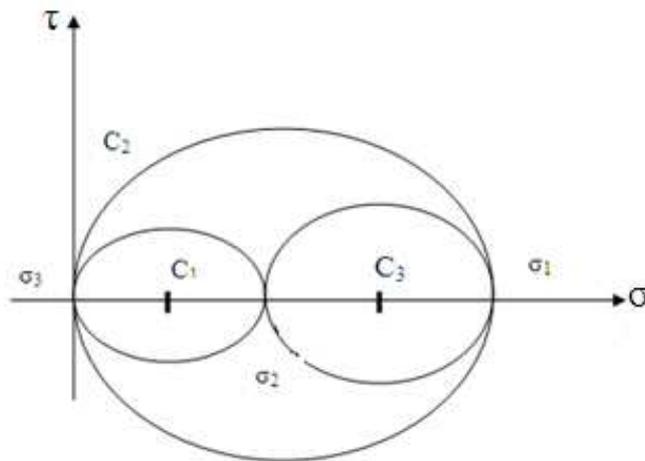


Figure I.11: Représentation de Mohr pour un état de contrainte plan
($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$)

Introduction

La photoélasticimétrie est une méthode largement utilisée dans l'analyse expérimentale des contraintes en deux et trois dimensions, a été découverte en 1815. C'est une méthode non descriptive permettant de visualiser les contraintes à l'intérieur d'un solide. L'application de cette méthode est assez vaste et a été utilisée pour l'étude de différents ouvrages : barrages, ponts, voiles etc.....

C'est une méthode optique fondée sur le phénomène de biréfringence accidentelle ou effet photoélastique : tout matériau solide transparent acquiert une biréfringence lorsqu'il est soumis à des sollicitations mécaniques extérieures. L'ensemble des lois physiques décrivant ce phénomène constitue la photoélasticité. Elle permet d'obtenir un champ complet des contraintes appliquées au modèle étudié en exploitant les réseaux des franges isochromes et isoclines. Les isochromes et isoclines obtenus permettent de déterminer respectivement les trajectoires des directions principales appelées isostatiques et les valeurs des contraintes de cisaillement maximales.

Deux grandes familles de techniques existent en photoélasticimétrie :

1 - Les revêtements photoélastique ou la photoélasticimétrie par réflexion

On recouvre une structure réelle avec une mince couche de produit photoélastique. On rend la surface de la structure réfléchissante à l'aide d'un revêtement chargée de poudre métallique. La lumière traverse le revêtement, elle est ensuite réfléchié puis traverse une seconde fois le revêtement dans le sens inverse.

Dans la pratique, le polariseur et l'analyseur sont placés côte à côte, l'ensemble se trouvant à quelques dizaines de centimètres de la surface à étudier (figure 1).

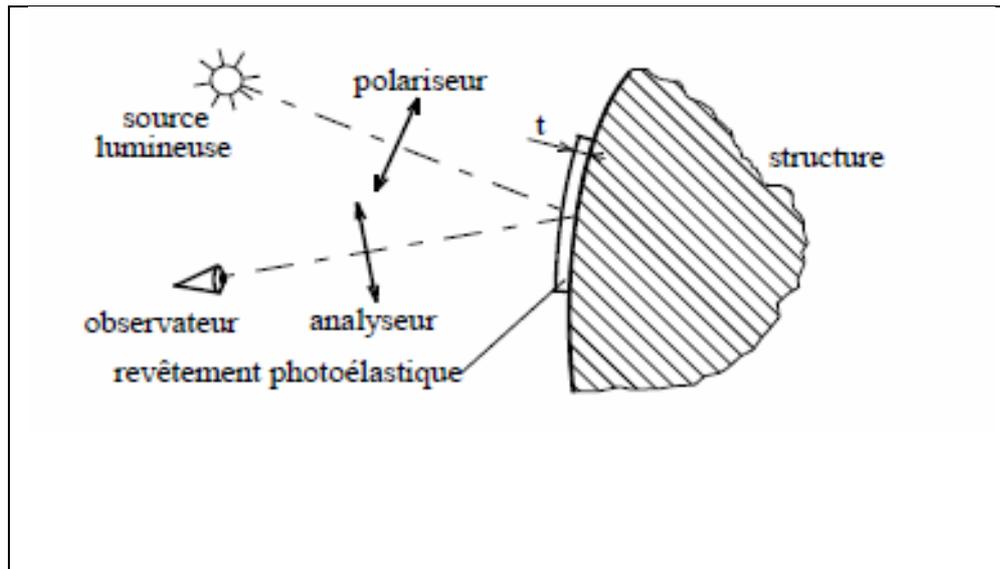


Figure II.1: Photoélasticimétrie par réflexion

Le revêtement a un module d'élasticité beaucoup plus faible que celui de la structure sur la quelle il est appliqué : il va donc suivre les déformations de la structure même au-delà de la limite élastique de celle-ci. La loi qui lie les déformations et la biréfringence accidentelle est la loi de Neumann:

$$\delta = K \cdot 2 t (\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (\text{II-1})$$

Tel que:

δ est le retard optique.

$(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ est la différence des déformations principales.

K est une constante sans dimension caractéristique du matériau de revêtement et " t " est l'épaisseur du revêtement (traversé deux fois d'où le facteur 2).

2- Les modèles photoélastiques permettent une détermination prévisionnelle des contraintes. Ces modèles sont réalisés à une échelle différente de la structure réelle. Ils sont soumis à des sollicitations équivalentes, il s'agit donc d'un calcul par similitude. Cette solution est avantageuse car elle est non destructive et les modèles sont facilement modifiables [7].

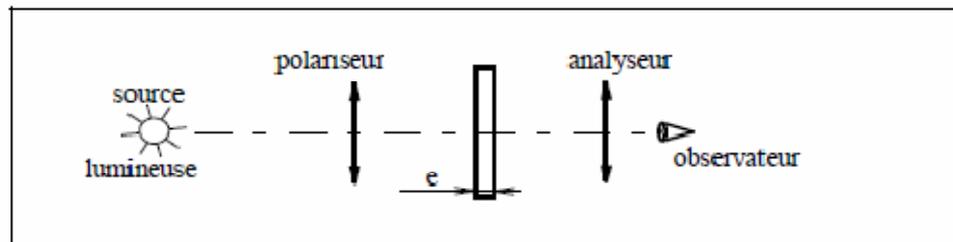


Figure II.2 : Photoélasticimétrie par transmission

II.1 Différentes type de la lumière

II.1.1 Lumière naturelle

Son vecteur induction magnétique \vec{B} a une direction, un module et une pulsation aléatoire. Les radiations visibles ont une longueur d'onde qui se situe entre $0,4\mu\text{m}$ et $0,8\mu\text{m}$.

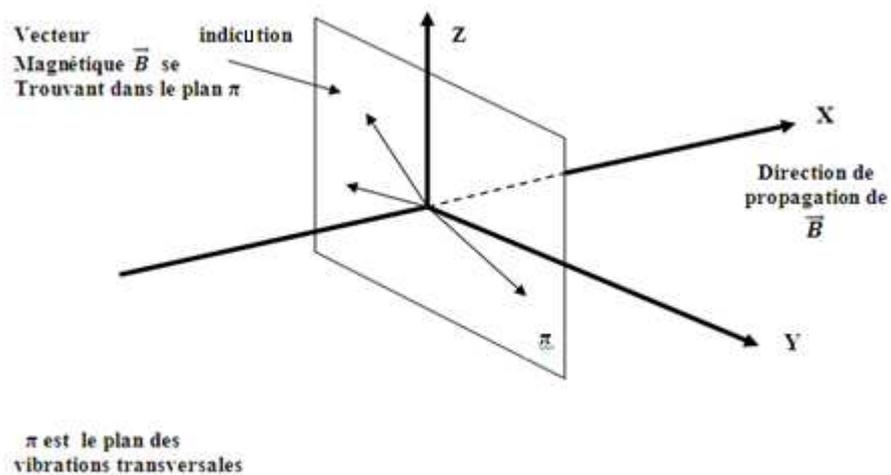


Figure II.3 : Vibration transversale d'un faisceau de lumière

II.1.2 Lumière polarisée

La lumière se propage par ondes sinusoïdales. Un filtre polarisant tel que le polaroïd possède la propriété de polariser la lumière, c'est à dire de ne laisser passer la lumière que dans un plan parallèle à une direction fixe dite axe de polarisation (axe OP sur la figure II.4).

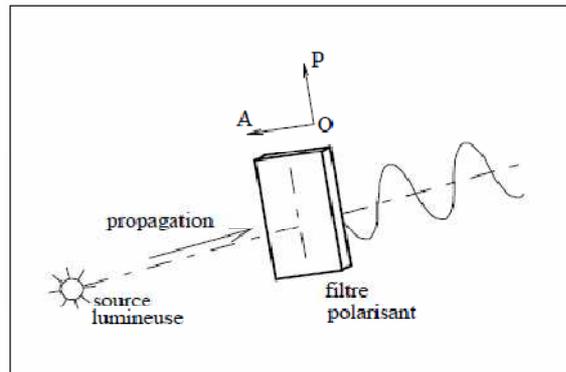
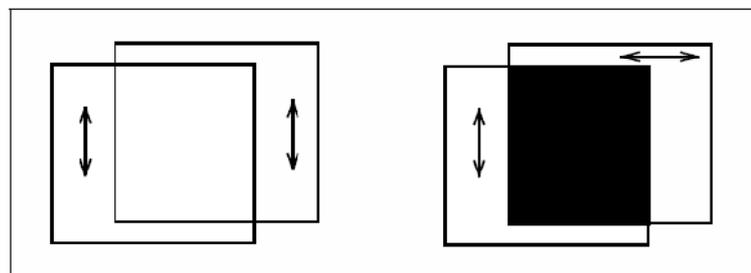


Figure II.4 : Polarisation de la lumière

Deux polaroïds successifs dont les axes de polarisation sont parallèles laissent passer la lumière (figure II.5a). Lorsque les axes de ces polaroïds sont perpendiculaires il y a extinction complète (figure II.5b) [7].



(a) Axes de polarisation parallèles

(b) Axes de polarisation perpendiculaires

Figure II.5 : Filtres polarisants dont les axes sont parallèles ou perpendiculaires

II.1.3 Lumière monochromatique

Tous les vecteurs \vec{B} ont même pulsation : c'est une lumière d'une couleur donnée.

La longueur d'onde d'un rayonnement monochromatique est caractéristique de sa couleur. Les couleurs forment dans l'ordre décroissant de leurs longueurs d'onde un spectre passant respectivement par rouge, jaune, vert, bleu, indigo et violet [6].

II.1.4 Lumière polarisée rectilignement

Le vecteur induction magnétique \vec{B} reste parallèle à une direction fixe. La lumière peut être naturelle ou monochromatique.

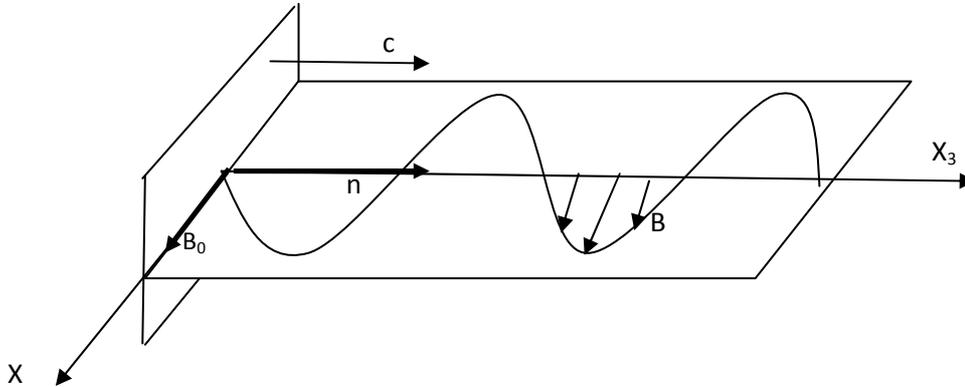


Figure II.6 : Faisceau polarisé linéairement

Pour une onde monochromatique polarisée rectilignement se propageant dans la direction \vec{n} , le vecteur \vec{B} s'écrit:

$$\vec{B} = B_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x_3}{v} \right) + \varphi \right) \vec{X1} \quad (\text{II-2})$$

ω : pulsation

v : vitesse du plan d'onde dans la direction \vec{n} .

II.2 Propagation d'une onde lumineuse dans un milieu isotrope et anisotrope

La vitesse de la lumière dans un milieu dépend des propriétés physiques de ce milieu. Dans un corps transparent isotrope ces propriétés optiques sont identiques dans toutes les directions. Dans le cas d'un cristal il n'en va pas de même. Sa structure lui donne des propriétés élastiques différentes selon les directions. La vitesse de propagation de la lumière dans un cristal dépendra des propriétés élastiques de ce dernier.

II.2.1 Milieu isotrope

Dans un milieu isotrope quelque soit la direction du vecteur induction magnétique \vec{B} , la vitesse de propagation \mathbf{v} est la même (\mathbf{v} : vitesse mesurée suivant la normale \vec{n} au plan d'onde).

La surface d'onde relative à la source ponctuelle est une sphère.

II.2.2 Milieu anisotrope

Pour un anisotrope la vitesse \mathbf{v} dépend de l'orientation du plan d'onde et de la direction de la vibration dans ce plan. Ce qu'il faut relever et ce qui nous intéresse pour la photoélasticimétrie c'est qu'il existe une différence entre les vitesses avec lesquelles les rayons polarisés dans les plans perpendiculaires traversent un milieu transparent tel qu'un cristal.

II.3 Principe de la photoélasticimétrie

Cette méthode est basée sur la biréfringence des matériaux acquise sous l'effet des contraintes. Cette biréfringence peut être étudiée en analysant la façon dont la polarisation de la lumière est transformée après le passage à travers le matériau. Par exemple une onde lumineuse polarisée rectilignement pourra ressortir polarisée elliptiquement. Cela s'explique par le fait que les deux composantes de l'onde subissent un retard l'une par rapport à l'autre. Ce retard est directement relié aux contraintes présentées dans le matériau. On peut donc mesurer les contraintes grâce à cette modification de la polarisation.

Expérimentalement on peut simplement utiliser la méthode suivante: une lumière monochromatique est polarisée à l'aide d'un polariseur envoyée sur l'échantillon à analyser puis passe à travers un second polariseur (analyseur). Une lentille convergente permet ensuite de faire l'image de l'échantillon sur un écran. Un rayon de lumière polarisée rectilignement va subir une certaine biréfringence différente selon le trajet qu'il emprunte dans le matériau. Sa polarisation va alors être transformée différemment selon le trajet. Le second polariseur va donc éteindre ou pas ces rayons. On verra ainsi l'apparition des zones claires ou sombres [7].

II.3.1 La biréfringence

La biréfringence est la propriété physique d'un matériau dans lequel la lumière se propage d'une façon anisotrope. Elle est définie comme le fait de transmettre deux rayons distincts polarisés dans deux plans perpendiculaires qui se propagent dans le cristal à des vitesses différentes. Le rayon lumineux qui arrive sur le modèle transparent se trouve décomposé en deux rayons distincts autonomes. Chacun de ces rayons se déplace avec une vitesse propre à sa direction de propagation (figure II.7).

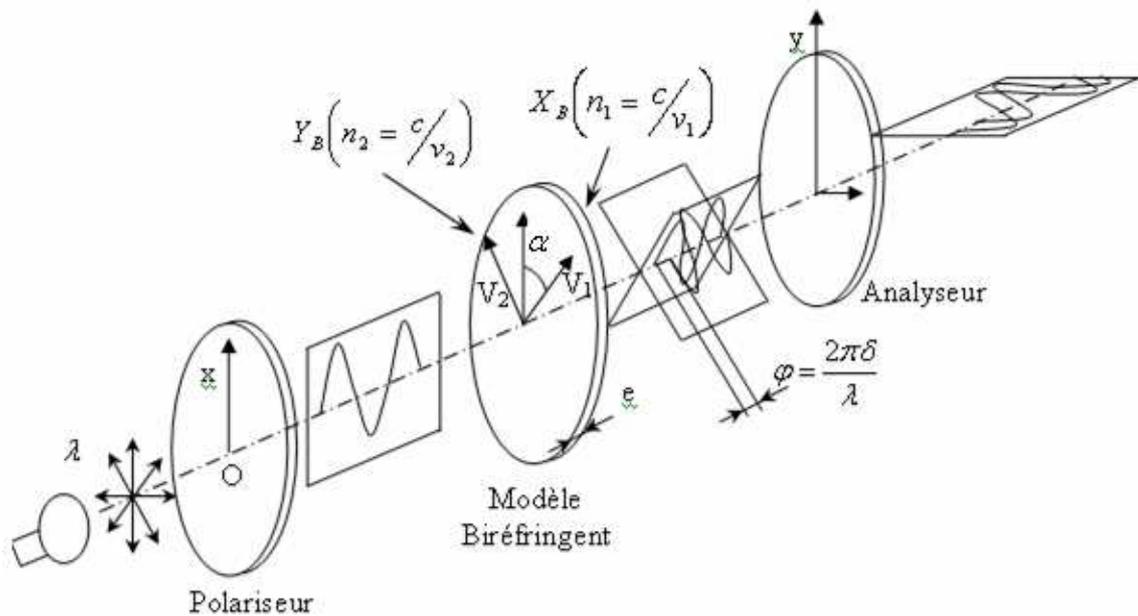


Figure II.7 : Propagation d'une onde à travers une matière biréfringence

Il existe deux types de la biréfringence :

II.3.1.1 La biréfringence naturelle

Un milieu est dit isotrope optiquement lorsqu'il possède les mêmes propriétés optiques quelque soit la direction d'observation.

Lorsqu'un faisceau lumineux le traverse, il se propage avec la même vitesse dans toutes les directions. Dans un milieu cristallin ou anisotrope la vitesse de propagation varie suivant les directions propres du milieu. Ce phénomène est appelé biréfringence naturelle. La vitesse de propagation dans une direction donnée est inversement proportionnelle à l'indice de réfraction correspondant à cette direction.

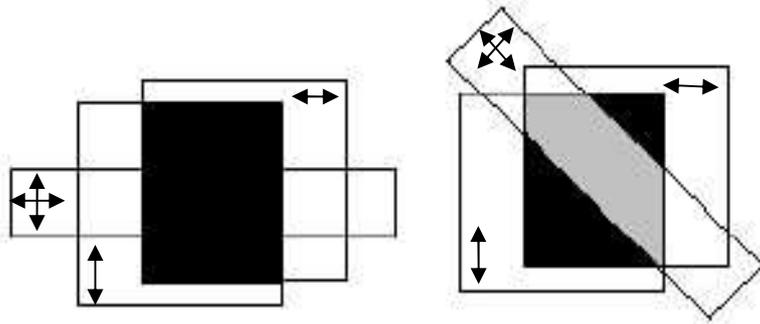


Figure II.8 : Phénomène de biréfringence naturelle

II.3.1.2 La biréfringence accidentelle

Rappelons d'abord que l'indice de réfraction n d'un milieu transparent est le rapport de la vitesse C_0 de la lumière dans le vide et la vitesse de la lumière dans le milieu. Un milieu transparent isotrope au repos a la propriété de devenir plus ou moins biréfringent lorsqu'il est soumis à des contraintes. Le milieu est caractérisé par un indice de réfraction n_0 valable dans toutes les directions au repos et un ellipsoïde des indices lorsqu'il est soumis à des contraintes. Ce phénomène a été découvert par Brewster en 1816. L'ellipsoïde des indices est telle que ses directions principales coïncident avec les directions principales des contraintes dans le modèle. Les lois liant les indices principaux aux contraintes principales ont été déterminées par Maxwell au siècle dernier.

$$\text{Loi de MAXWELL : } \delta = C \cdot e (\sigma_{\text{Max}} - \sigma_{\text{min}}) \quad (\text{II-3})$$

$$\text{Loi de MAXWELL : } \delta = k \cdot e (\varepsilon_{\text{Max}} - \varepsilon_{\text{Min}}) \quad (\text{II-4})$$

Tel que :

C : constante caractéristique de matériau photoélastique considéré. Elle est exprimée en Brewster (1 Brewster = $10^{-12} \text{m}^2/\text{N}$).

K : constante sans dimension caractéristique de matériau de revêtement

$$\text{Autre forme de la loi de MAXWELL: } \sigma_{\text{Max}} - \sigma_{\text{min}} = \frac{N \cdot f}{e} \quad (\text{II-5})$$

Avec: e : épaisseur de la pièce en [mm].

N : ordre de frange.

f : constante de frange.

II.3.2 Banc expérimentale de photoélasticimétrie

Un banc de photoélasticimétrie est composé d'un appareil dénommé polariscope qui assure la production (polariseur) et la détection (analyseur) de la lumière polarisée et d'un montage d'application de la charge. Lorsque l'analyseur et le polariseur sont placés dans des positions respectives telles que le plan de polarisation du polariseur soit perpendiculaire au plan de polarisation de l'analyseur, ce dernier ne transmettra aucun rayon lumineux. On dit alors que le polariseur et l'analyseur sont croisés. Quand les plans de polarisation coïncident, l'ensemble transmet les rayons lumineux et l'on dit que l'analyseur et le polariseur sont parallèles.

Il existe plusieurs sortes de polariscope, citons principalement :

- Polariscope à transmission
- Polariscope par réflexion
- Polariscope à faisceaux laser

II.3.2.1 Lames quart d'ondes

Une lame quart d'onde est une lame de mica ou une mince feuille d'alcool polyvinylique orientée comprise entre deux feuilles d'acétate de cellulose. C'est une lame biréfringente uniforme présentant en tout point une différence de chemin optique égale à un nombre entier de fois la longueur d'onde plus un quart.

$$\delta = \left(K + \frac{1}{4}\right)\lambda \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = 2K\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{II-6})$$

On peut ajouter au polariscope deux lames quart d'onde intercalées entre les polaroïds qui ont pour fonction de transformer une vibration rectiligne en une vibration circulaire et l'inverse, ce changement dans le mode de vibration est assuré par une différence de marche introduite. Cette différence de marche est égale au quart d'onde de la lumière polarisée.

Les lames quart d'onde sont croisées entre elles et toujours intercalées avec leurs axes optiques à 45° de ceux du polariseur et de l'analyseur. L'effet de la seconde lame est de restituer une lumière polarisée plane [6].

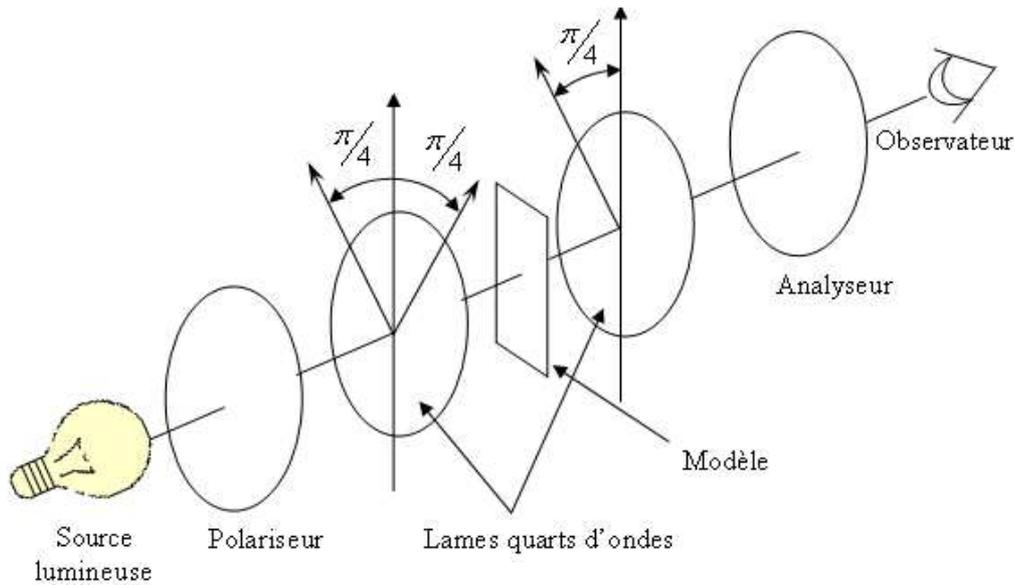


Figure II.9 : Disposition des lames quart d'onde dans le polariscope à transmission

Remarque

Suivant que l'on a un polariscope plan ou circulaire le trajet de la lumière dans le polariscope ne sera pas le même. De plus, suivant la position des différents éléments on peut obtenir en sortie un champ clair ou un champ obscur.

Polariscope plan

- Polariseur et l'analyseur croisés = champ obscur.
- Polariseur et l'analyseur parallèles = champ clair.

II.3.2.2 Polariscope circulaire

Un polaroid circulaire est l'association d'un polaroid et des lames quart d'onde dont les axes sont situés à $\frac{\pi}{4}$ de l'axe du polaroid.

- Polariseur et l'analyseur croisés et lames quart d'onde croisées → champ obscur.
- Polariseur et l'analyseur parallèles et lames quart d'onde croisées → champ clair.

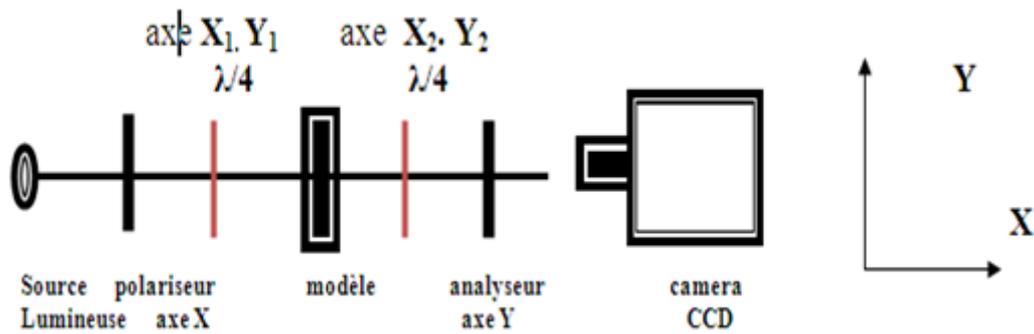


Figure II.10 : Schéma simplifié d'un polariscope à lumière circulaire

II.3.2.3 Le polariseur à lumière plane

C'est un ensemble formé d'une source lumineuse de longueur d'onde λ , de deux polaroids (polariseur et l'analyseur), d'un système de chargement, d'un appareil de prise d'images et enfin du modèle que l'on veut analyser

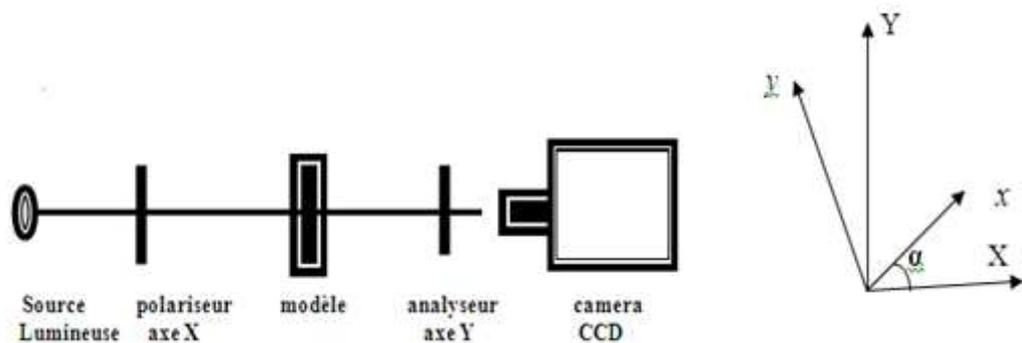


Figure II.11 : Schéma simplifié d'un polariscope à lumière rectiligne

II-3-3- Effet de la biréfringence sur la lumière

Une lumière polarisée plane a comme amplitude en un point ($A \cos \omega t$) portée par OP. Cette lumière traverse un modèle photoélastique (la direction de polarisation OP fait un angle β avec l'une des directions des contraintes principales du modèle) puis l'analyseur dont l'axe de polarisation est OP', équipollent à OA.

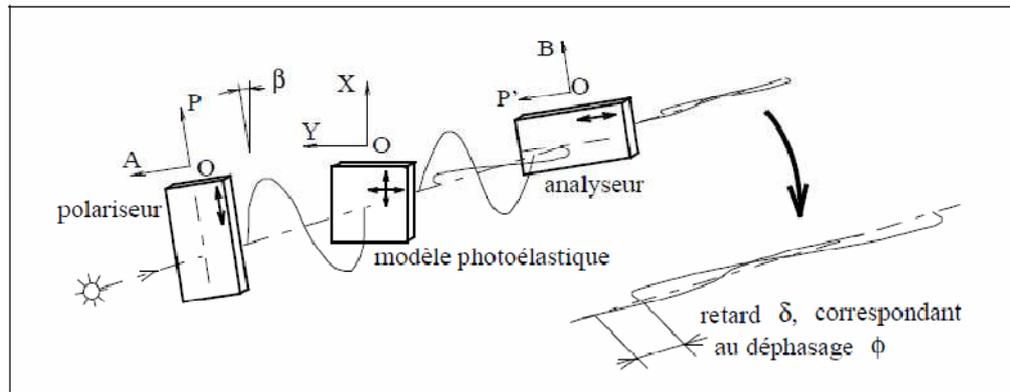


Figure II.12 : Lumière plane traversant un modèle photoélastique
(X et Y sont les directions principales des contraintes)

II-3-3-1- Définition de la constante de frange

$$\text{D'après la loi de MAXWELL on a : } \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N.f}{e} \rightarrow f = \frac{e.(\sigma_1 - \sigma_2)}{N}$$

On remarque que pour connaître $(\sigma_1 - \sigma_2)$ on doit d'abord connaître la constante de frange (f). donc on peut dire que la constante de frange est le rapport entre la différence des contraintes principales sur l'unité d'ordre de frange en un point du modèle ayant comme épaisseur l'unité.

En champ obscur, les bandes noires correspondent aux ordres de frange entière.

En champ clair, les bandes noires correspondent aux $\frac{1}{2}$ ordres de frange c'est-à-dire:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\right)$$

L'intensité lumineuse « I » transmise a pour expression (à un facteur constant près):

$$I = a^2 \sin^2 2\beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (\text{II-7})$$

II-3-3-2- Les lignes isoclines

$\sin 2\beta = 0$: les lieux d'extinction correspondants sont les isoclines.

La condition $\sin 2\beta = 0$ en un point du modèle signifie qu'en ce point les directions des contraintes principales sont parallèles aux deux directions perpendiculaires de polarisation du polariseur et de l'analyseur. Cette propriété est indépendante de la longueur d'onde, de l'épaisseur et du caractère biréfringent du modèle.

Le lieu de ces points de même direction de contraintes principales apparaît sous forme de ligne noire appelée isocline.

En faisant varier les orientations du polariseur et de l'analyseur (ceux-ci restant croisés) on obtient le réseau d'isoclines. Cette carte des isoclines n'a pas un grand intérêt mais elle sert en réalité d'étape intermédiaire pour obtenir (par une construction graphique) les lignes isostatiques: lieux d'égale valeur de contrainte principale. La carte des isostatiques s'avère utile pour les problèmes d'optimisation de forme d'une pièce ou pour le placement de jauges de contrainte [7].

Remarque

Les isoclines ne se coupent jamais sauf dans les points isotropes où les contraintes principales sont les mêmes dans toutes les directions.

Pour éliminer les isoclines, il suffit de placer entre le polariseur et le modèle d'une part, entre le modèle et l'analyseur d'autre part une lame «quart d'onde» dont les axes sont à angle β ($\beta = \frac{\pi}{4}$) de ceux du polariseur.

II-3-3-3- Les lignes isostatiques

Les isoclines nous donnent l'ensemble des points parallèles ou perpendiculaires à une direction repérée sur les polaroïds, ceci ne nous donne pas une bonne image de l'orientation des contraintes principales. Pour mieux voir les trajectoires des contraintes principales on trace les lignes isostatiques.

II-3-3-3-a- Définition d'une isostatique

Une isostatique est une courbe telle qu'en chacun de ces points une direction principale lui est tangente et l'autre normale. Leur réseau orthogonal constitue l'ensemble des courbes enveloppes des directions principales.

Les isoclines permettent de déterminer les directions principales en chaque point. A partir de ce résultat il est possible de tracer les isostatiques.

(Il existe un appareil, c'est l'optimiscope qui permet d'obtenir directement les isostatiques).

II-3-3-3-b- Point isotrope

On appelle point isotrope un point où $\sigma_1 = \sigma_2$. Les directions principales sont indéterminées et le retard introduit en ce point est nul. Que ce soit dans le montage en lumière circulaire ou entre polariseur et analyseur croisés, un tel point restera noir en lumière blanche ou monochromatique quelle que soit l'orientation du couple polariseur-analyseur.

II-3-3-3-c- Propriétés des isostatiques

- Lorsqu'une isostatique présente une forte courbure, la contrainte principale qui lui est perpendiculaire varie rapidement dans le voisinage de cette région. La variation est d'autant plus rapide que le rayon de courbure est plus faible. Les axes de symétrie sont des isostatiques.

- Une isostatique droite est aussi une isocline
- Les axes de symétrie sont des isostatiques
- La variation des contraintes dépend de la courbure des Isostatiques

II-3-3-4- Les lignes isochromatiques

$\sin \frac{\varphi}{2} = 0$: les lieux d'extinction correspondants sont les isochromes.

Cette condition se traduit par :

$$\varphi = 2 \pi n \text{ avec } n = 1, 2, 3, \dots$$

L'observation des lignes isochromatiques est obtenue à l'aide des lames quart d'ondes qui sont monté croisés avec un angle de 45° par rapport au polariseur.

Les isochromes dépendent de la charge appliquée et de la longueur d'onde utilisée. Le long des isochromes, la différence de chemin optique est égale à un nombre entier de fois la longueur d'onde. Observées en lumière polychromatique les isochromes sont des lignes d'égales couleurs.

La relation fondamentale de la photoélasticimétrie utilisée pour exploiter le réseau des franges isochromes est :

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{N (\lambda/C)}{e}$$

La valeur de l'ordre de frange N est relevée expérimentalement sur le réseau des franges. Le rapport λ/C (constante de frange) qui dépend de la longueur d'onde utilisée et de la matière du modèle. Elle doit donc toujours être déterminée avant de procéder aux essais [7].

II-4- Conclusion

Ce chapitre est consacré aux rappels de certaines propriétés de la lumière et à la photoélasticimétrie qui permet de déterminer les champs des contraintes à l'intérieur des matériaux.

Introduction

La méthode principale pour transmettre une charge entre deux corps déformables est un contact direct entre eux. Même lorsqu'une charge sur la frontière des corps est appliquée en utilisant des fluides, des forces magnétiques ou gravitationnelles, la force nécessaire pour maintenir l'équilibre apparaîtra aussi à l'interface du contact. Le point critique de ce contact direct est la concentration de contraintes qui en résulte et qui conduit très souvent à l'endommager des matériaux. Il n'est donc pas étonnant que dans le cadre de la discipline de la mécanique des solides, de mécanique des contacts ait occupé une place centrale au cours des dernières années et continue à la tenir aujourd'hui.

Tout a commencé avec le célèbre papier de Heinrich Hertz (1882) qui a apporté la solution du contact élastique entre deux massifs ellipsoïdaux avec des surfaces lisses et sans frottement. Ceci constitue encore aujourd'hui la base de la conception industrielle des applications qui impliquent des contacts secs, non-conformes et élastiques tels qu'ils peuvent exister.

Depuis 1882 le sujet a été considérablement développé. On peut distinguer deux directions d'étude majeures :

- Du point de vue mathématique: des travaux ont été faits sur l'extension de l'analyse de Hertz à d'autres géométries sur les lois de comportement et sur le développement des théorèmes d'existence et d'unicité de la solution.
- Du point de vue ingénierie: des travaux ont été faits sur des cas spécifiques dans le but de comprendre et de maîtriser les phénomènes qui se produisent dans les systèmes réels.

III.1 Surface de contact

Dans le cas du contact de Hertz, le premier résultat important est que la surface de contact augmente avec l'enfoncement. Cela est dû essentiellement à la géométrie: le contact est initialement ponctuel et il s'élargit au fur et à mesure de l'enfoncement. En fait à un facteur numérique près on peut déduire la dimension du contact d'une simple construction géométrique. Ainsi, lorsque la sphère s'enfonce son intersection avec le plan initial est un disque dont le rayon a vérifie : $a^2 \approx R \cdot \delta$

Où δ est l'enfoncement et R le rayon de la sphère.

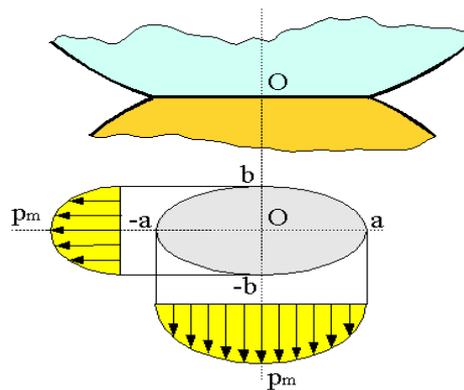


Figure III.1 : Surface de contact et contrainte au contact entre deux sphères

III.2 Contact de Hertz

Le contact de Hertz se réfère aux contraintes localisées qui se développent lorsque deux surfaces courbes viennent en contact et se déforment légèrement sous l'action des forces appliquées. Le degré de déformation dépend de l'élasticité du matériau en contact, autrement dit de son module élastique. La théorie du contact de Hertz fournit la contrainte dans la zone de contact en fonction de la force normale appliquée, des rayons de courbure des deux corps et de leur module élastique.

Dans les engrenages et les roulements en mouvement ces forces de contact sont cycliques. À la longue elles entraînent une fatigue du matériau et l'apparition de fissures sous la surface.

Contact de Hertz constitue le fondement des équations pour le calcul du chargement admissible pour les roulements, les engrenages et autres pièces dont deux surfaces sont en contact.

L'hypothèse des relations de Hertz est la suivante: «Si deux corps à surfaces courbes sont pressés l'un contre l'autre, il y a contact sur une surface de pression elliptique».

- Les solutions exactes ont été établies par Hertz sous les conditions suivantes[2] :
- les surfaces sont continues et non conformes : $a \ll R$
- les déformations sont petites :
- chaque solide peut être considéré comme un milieu semi-infini, c'est -à-dire : $a \ll R_{1,2}$
- pas de frottement.

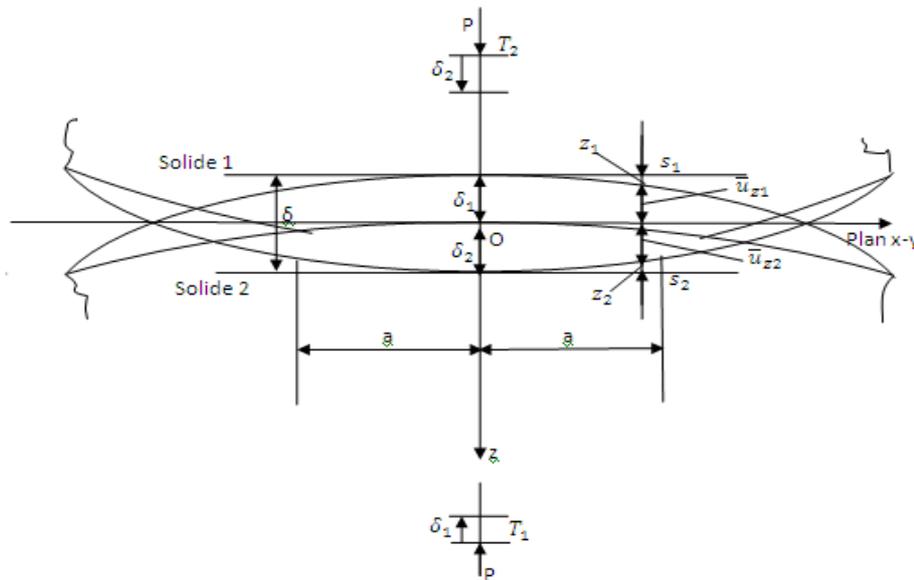


Figure III.2 : Contact de Hertz

$$\overline{u_{z_1}} + \overline{u_{z_2}} = \delta - Ax^2 - By^2 \tag{III-1}$$

$$\overline{u_{z_1}} + \overline{u_{z_2}} < \delta - Ax^2 - By^2 \tag{III-2}$$

Si la surface de contact est un cercle de rayon a alors :

$$A = B = 1/2(1/R_1 + 1/R_2)$$

III.3 Principe générale de résolution du problème de Hertz

La première résolution de ce problème est bien sûr due à hertz. Hertz a formulé les conditions (III-1) et (III-2) que doivent satisfaire les points de la surface en contact. Ses hypothèses étaient basées sur l'observation du contact entre lentilles convexes mises en compression.

L'hypothèse simplificatrice de choisir et de résoudre le problème d'élasticité sur un demi espace élastique permet de s'affranchir de la géométrie globale des corps en contact. Seule la géométrie locale (à travers les rayons de courbure) entre en jeu. Pour que cette hypothèse soit satisfaisante, deux conditions doivent être remplies: les dimensions de la surface de contact doivent être faibles devant :

- Les dimensions de chaque corps
- Les courbures relatives des surfaces en contact

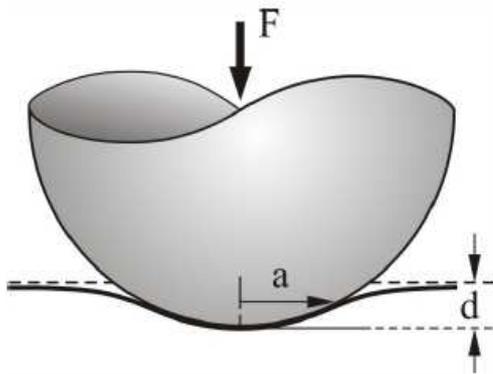
La première condition est évidemment nécessaire pour que le champ de contrainte calculé pour un demi-espace infini ne soit pas perturbé par les conditions aux limites sur les frontières du solide. La seconde condition est nécessaire pour que les surfaces en contact soient approximativement des plans et que les déformations dans la zone de contact restent faibles [2].

III.4 Application d'un effort normal

III.4.1 Contact entre une sphère élastique et un demi-espace élastique

Une sphère élastique de rayon R est enfoncée d'une profondeur d dans un demi-espace élastique, ceci crée une zone de contact de rayon $a = \sqrt{R \cdot d}$

La force nécessaire pour maintenir ce contact est égale à :



$$F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \cdot d^{3/2} \quad (\text{III-3})$$

Où

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (\text{III-4})$$

Figure III.3 : Contact entre une sphère et un demi-espace élastique

Avec :

E_1 et E_2 ainsi ν_1 et ν_2 sont respectivement, les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson des deux corps. E^* est le module élastique effectif.

III.4.2 Contact entre deux sphères

Si deux sphères de rayons R_1 et R_2 sont en contact, on peut obtenir un rayon équivalent R par le calcul suivant :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

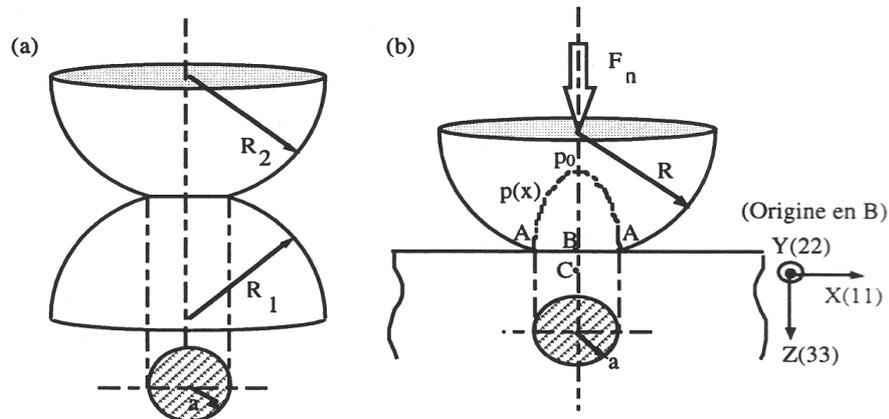


Figure III.4 : a) Contact sphère-sphère b) Conditions du Contact sphère-plan [8]

La distribution de la pression sur la zone de contact est donnée par :

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad \text{(III-5)}$$

Avec :

p_0 : est la pression maximale appliquée au centre de la surface.

$$p_0 = \frac{3F_N}{2\pi a^2} = \frac{3}{2} P_m \quad \text{(III-6)}$$

Où P_m est la pression moyenne.

a : est le rayon de contact :

$$a = \left[\frac{3F_N R}{4E^*} \right]^{1/3}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

L'enfoncement δ_0 des surfaces est égal à :

$$\delta_0 = \frac{a^2}{R} = \left[\frac{9F_N^2}{16RE^{*2}} \right]^{1/3} \quad \text{(III-7)}$$

La contrainte maximale de cisaillement se situe à : $z = 0.49 a$.

III.4.3 Contact cylindre sur cylindre

III.4.3.1 Distribution des contraintes

La connaissance de la distribution et de l'évolution des contraintes dans les contacts mécaniques est très importante du fait qu'au voisinage de la surface du contact, des endommagements importants sont observés en surface par usure ou en subsurface par fissure et par fatigue.

On considère deux cylindres élastiques d'axes parallèle, de rayons R_1 et R_2 , de module d'élasticité E_1 et E_2 , de coefficient de Poisson ν_1 et ν_2 et de longueur infinie, chargé par une force W/L par unité de longueur perpendiculaire à leur plan tangent.

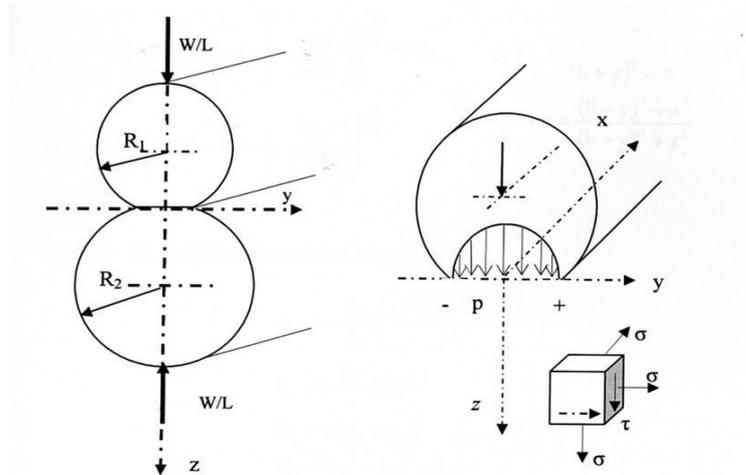


Figure III.5 : Contact entre deux cylindres le long de leurs génératrices et distribution de la pression dans la zone de contact

L'équation générale du problème s'écrit :

$$\left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \int_{-b}^{+b} \frac{p(\eta)}{(y - \eta)} = -By^2 + \delta \quad \text{(III.8)}$$

Avec la condition

$$L \int_{-b}^{+b} p(\eta) d\eta = W \quad \text{(III.9)}$$

En posant :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; \quad R_{eq} : \text{Rayon de courbure équivalent}$$

$$\frac{1}{E_{eq}} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}; \quad E_{eq} : \text{Module d'élasticité équivalent}$$

La valeur de « a » et la répartition de la pression sont:

$$a^2 = \frac{4PR_{eq}}{\pi E_{eq}} \tag{III.10}$$

$$P(x) = \frac{2P}{\pi a^2} (a^2 - x^2)^{1/2} \tag{III.11}$$

D'où la pression maximale :

$$P_0 = \frac{2P}{\pi a^2} = \frac{4}{\pi} P_m = \left(\frac{P E_{eq}}{\pi R_{eq}} \right)^{1/2} \tag{III.12}$$

La contrainte maximale à l'intérieur du solide a une valeur de 0.30p₀ à une profondeur de 0.78a.

III.4.4 Contact cylindre sur plan

Une approche similaire peut être appliquée au contact cylindre-plan. On considère un chargement linéique sur un massif semi-infini. Dans ce cas, le problème se résume à l'étude d'un contact bidimensionnel

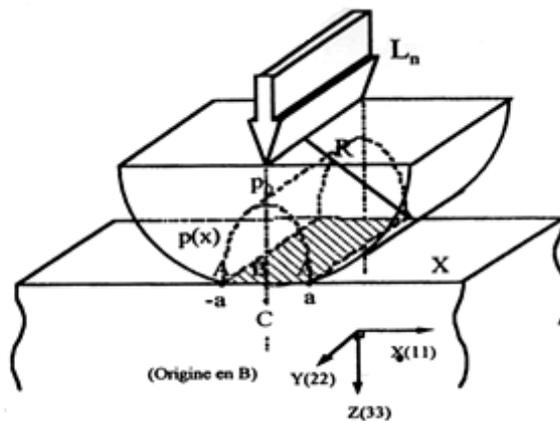


Figure III.6 : Contact cylindre sur plan

La répartition de pression sur l'aire de contact est alors donnée par:

$$p(y) = p_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.13})$$

Où P_0 désigne la pression au centre du contact et b la demi-largeur de contact. Les valeurs de P_0 et b sont données par les relations suivantes où E_{eq} est le module d'élasticité équivalent et R_{eq} le rayon de courbure équivalent.

$$p_0 = \frac{2W}{\pi bL} \quad (\text{III.14})$$

$$b = 2 \sqrt{\frac{WR_{eq}}{\pi E_{eq}L}} \quad (\text{III.15})$$

Remarque: Pour le cas du contact cylindre sur plan, il suffit de considérer le diamètre de l'un des cylindres infini.

III.4.4.1 Champ de contraintes dues aux pressions Hertziennes

Dans le cas du cylindre sur plan, le champ de contraintes à l'intérieur du volume du parallélépipède dû aux pressions Hertziennes s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_y = -\frac{P_0}{\pi} z \left(\frac{b^2 + 2y^2 + 2z^2}{b} Q - \frac{2\pi}{b} - 3yR \right) \\ \sigma_z = -\frac{P_0}{\pi} z (bQ - yR) \\ \sigma_x = \nu (\sigma_y + \sigma_z) \\ \tau_{yz} = -\frac{P_0}{\pi} z^2 R \\ \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III-16})$$

Où il est posé :

$$\begin{cases} R = \frac{\pi}{\omega \varepsilon} (1 - \varepsilon) \left[\varepsilon^2 + 2\varepsilon + \left(1 - \frac{4b^2}{\omega} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ Q = \frac{\pi}{\omega \varepsilon} (1 + \varepsilon) \left[\varepsilon^2 + 2\varepsilon + \left(1 - \frac{4b^2}{\omega} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (\text{III-17})$$

Avec :

$$\begin{cases} \omega = (b + y)^2 + z^2 \\ \varepsilon = \frac{(b - y)^2 + z^2}{(b + y)^2 + z^2} \end{cases} \quad (\text{III-18})$$

Sur l'axe oz, le champ des contraintes s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_y = -\frac{P_0}{\pi} z \left(\frac{b^2 + 2y^2 + 2z^2}{b} Q - \frac{2\pi}{b} \right) \\ \sigma_z = -\frac{P_0}{\pi} z b Q \\ \sigma_x = \nu (\sigma_y + \sigma_z) \\ \tau_{yz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \end{cases} \quad (\text{III-19})$$

Sur l'axe oz, les axes x, y et z sont des axes principaux. La différence des contraintes principales est maximale pour $z = h_c = 0,78b$ (point de hertz) et la valeur de la contrainte tangentielle est égale à $0,3 P_0$.

III.4.5 Contact plan sur plan

Dans Le contact plan-plan sous pression normale ou plus exactement le contact poinçon-plan, différentes formulations peuvent être considérées. Dans le cas d'une distribution uniforme de pression correspondant au cas d'un poinçon souple, on détermine les composantes du tenseur en différents points du massif à l'aide des relations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^N = \frac{-P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin \theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \sigma_{33}^N = \frac{-P}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin \theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \sigma_{12}^N = \frac{P}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \\ \theta_1 = \arctg\left(\frac{Z}{X-a}\right) \\ \theta_2 = \arctg\left(\frac{Z}{X+a}\right) \\ \theta_{1,2} = \arctg\left(\frac{Z}{X \mp a}\right) \end{array} \right. \quad \text{(III-20)}$$

On calcul respectivement les valeurs principales :

$$\sigma_{1,2}^N = \frac{-P}{\pi} (\alpha \mp \sin \alpha) \quad \text{et le cisaillement maximal} \quad \tau_{\max} = \frac{P}{\pi} \sin \alpha$$

Les isovaleurs des contraintes principales σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{\max} sont décrites par la famille de cercles passant par les deux points du contact O_1 et O_2 (figure III.7) [8].

La valeur maximale est obtenue pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ avec $\tau_{\max}^n = \frac{\pi}{2}$

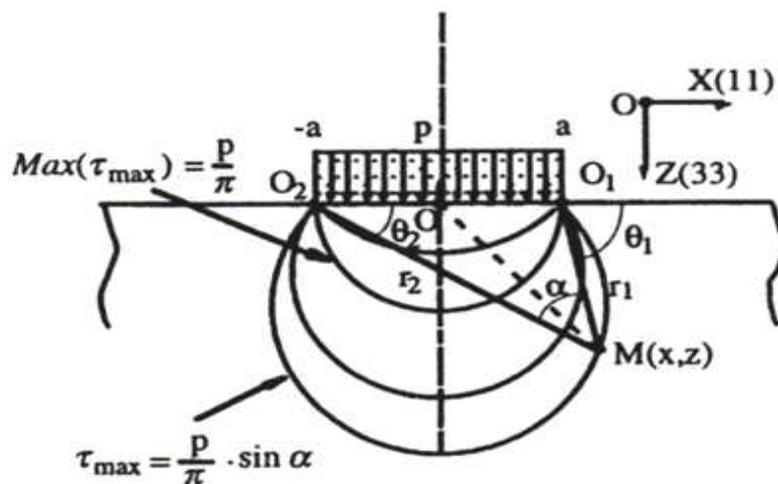


Figure III.7 : Isovaleurs des contraintes principales σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{\max}

III.5 Application d'un effort normal et tangentiel

Très souvent, un déplacement tangentiel dynamique est associé à la charge appliquée. Dans certains cas le massif peut rouler. Si aucun mouvement de rotation n'est possible, il frotte. Au déplacement imposé est associé un effort tangentiel que l'on mesure.

III.5.1 Contact sphère-plan

Dans le cas d'un contact sphère-plan sous effort tangentiel, la distribution de cisaillement est identique au signe près à celle de la pression, la seule composante non nulle étant celle orientée suivant la direction de glissement associée à l'axe des X. nous obtenons,

$$q_{(x,y)} = \mp \mu p_{(x,y)} = \mp \mu p_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{1/2}$$

Le signe moins est associé au sens positif de glissement puisque la force de frottement s'oppose toujours au sens du déplacement. Pour les expressions des tenseurs des contraintes en tout point du plan, on utilise la formulation simplifiée de [HAMILTON 1983]. Dans les plans X, Z (y=0), nous obtenons les relations suivantes (composantes du tenseur associé au chargement tangentiel F_T [8]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^T = \frac{\mu p_0}{a} \left\{ -X \left(1 + \frac{\nu}{4}\right) \emptyset - \frac{aM}{2X^2} (S\nu - 2A\nu + z^2) + \frac{aM}{X} \left(1 - 2\nu + \frac{z^2}{S} + \frac{7\nu}{4}\right) + \frac{zN}{2X^2} \left[\left(\frac{S}{6} + \frac{A}{3}\right) (1 - 2\nu) + \frac{1}{2} (z^2 + 3a^2)\right] + \frac{zN}{X} \left(\frac{a^2}{S} - \frac{\nu+7}{4}\right) + \frac{2za^2}{3X^2} (2\nu - 1) \right\} \\ \sigma_{22}^T = \frac{\mu p_0}{a} \left\{ -\frac{3X\emptyset\nu}{4} + \frac{aM}{2X^2} [\nu(S - 2A + X^2) + z^2] + \frac{3\nu aM}{4X} - \frac{zN}{2X^2} \left[\left(\frac{S}{6} + \frac{A}{3}\right) (1 - 2\nu) + \frac{1}{2} (z^2 + 3a^2)\right] - \frac{zN}{X} (1 + 3\nu) + \frac{2a^2 z}{3X^2} (1 - 2\nu) \right\} \\ \sigma_{33}^T = \frac{\mu p_0}{a} \left\{ \frac{zN}{2X} \left(1 - \frac{X^2 + z^2 + a^2}{S}\right) \right\} \\ \sigma_{13}^T = \frac{\mu p_0}{a} \left\{ \frac{3z\emptyset}{2X} + \frac{azM}{X^2} \left(2 - \frac{X^2}{S}\right) + \frac{N}{X^2} \left[z^2 + \frac{3}{4} (S - 2A + X^2)\right] - \frac{N}{4} \left(1 + \frac{3z^2}{X^2}\right) \right\} \end{array} \right. \quad (\text{III-21})$$

$$\sigma_{12}^T = \sigma_{23}^T = 0$$

Pour X=0 selon l'axe Z, toutes les composantes sont nulles sauf,

$$\sigma_{13}^T = \frac{\mu P_0}{a} \left[-a + \frac{3}{2} z \tan^{-1} \left(\frac{a}{z} \right) - \frac{az^2}{2(a^2 + z^2)} \right]$$

Aux composantes associées au chargement normal, on superpose celles induites par le chargement tangentiel pour obtenir l'état global de chargement $\Sigma = \Sigma^Q + \Sigma^P$.

III.5.2 Contact cylindre-plan

Dans ce cas, si le cylindre ou le plan présente des caractéristiques élastiques similaires, la largeur de contact est 2a, la distribution de pression et de cisaillement restant hertzienne.

$$q(x) = \mp \mu p_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2}$$

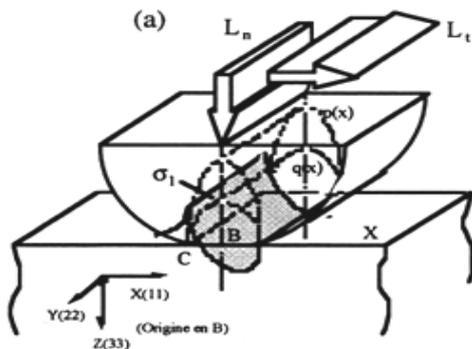


Figure-III.8 : Contact cylindre plan en présence d'un effort tangentiel

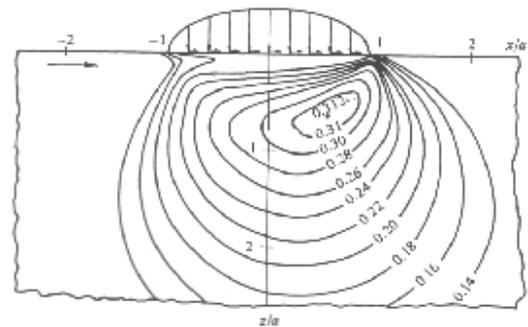


Figure III.9 : Champs de contraintes sous des conditions de glissement pur ($\mu = 0.25$)

L'état de chargement en surface le long de l'axe X dans l'aire de contact $x \in [-a, a]$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = -P_0 \left\{ \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2} + 2\mu \frac{x}{a} \right\} \\ \sigma_{22} = -2\nu P_0 \left\{ \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2} + \mu \frac{x}{a} \right\} \\ \sigma_{33} = -P_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] \\ \sigma_{13} = -\mu P_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}-2} \end{array} \right. \quad \text{(III-22)}$$

Le cisaillement maximal suivant l'axe X est donné par

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} [(\sigma - \sigma) + 4\sigma_{13}^2]^{1/2} = \mu P_0 \quad (\text{III-23})$$

III.6 Conclusion

L'application de la théorie de Hertz offre la possibilité de calculer facilement les dimensions de la surface du contact, la pression maximale au point du contact et le déplacement engendré par l'effort appliqué. Ainsi que l'état de contraintes développées au voisinage de la zone de contact.

Introduction

Castem2000 est un code de calcul pour l'analyse des structures par la méthode des éléments finis. Ce code a été développé par le département de mécanique et de technologie (DMT) du commissariat français à l'énergie atomique (CEA).

Le développement de castem2000 entre dans le cadre d'une activité de recherche dans le domaine de la mécanique dont le but est de définir un instrument de haut niveau, pouvant servir de support pour la conception, le dimensionnement et l'analyse des structures et de composants dans le domaine du nucléaire comme dans le secteur industriel classique.

Dans cette optique castem2000 intègre non seulement les processus de calculs proprement dits mais également les fonctions de construction du modèle (préprocesseur) et les fonctions de traitement des résultats (post-traitement). Castem2000 est un programme que l'utilisateur peut adapter à ses besoins pour résoudre ses propres problèmes.

Historique

Le développement des codes de calcul a évolué de pair avec le matériel informatique. Au départ, les programmes de calcul étaient écrits pour résoudre des problèmes donnés et fonctionnaient généralement en boîte noire.

Trois programmes constituant le noyau du système CASTEM ont été développés au CEA/DMT : il s'agissait d'un programme de maillage, un programme de calcul et un programme de visualisation des résultats. La multiplicité des problèmes a ensuite conduit à développer des programmes de calcul distincts capables de communiquer entre eux le cas échéant.

Le progrès du matériel informatique a alors permis le développement de nombreuses fonctions qui réduisaient le temps de préparation des jeux de données. Ainsi il fallait remettre à niveau tous les codes en répercutant dans chacun les améliorations et les corrections effectuées dans l'un d'entre eux. De plus, les jeux des données devenaient de plus en plus compliqués et le post-traitement devait être capable de relire des fichiers différents selon les codes de calcul utilisés.

Toutes ces considérations ont conduit à repenser à la base le problème du calcul numérique de manière à développer un code de calcul de nouvelle génération : CASTEM 2000.

Contrairement aux anciens codes de calcul écrits pour résoudre des problèmes donnés et aux quels l'utilisateur doit se plier, CASTEM 2000 peut s'adapter aux besoins de l'utilisateur pour résoudre ses problèmes. De plus CASTEM 2000 donne à l'utilisateur la connaissance du problème effectivement posé et des méthodes employées [9].

IV.1 Présentation de Castem2000

Castem2000 est un logiciel de calcul de structures par la méthode des éléments finis. Il a été développé au Département de Mécanique et Technologie (DMT) du Commissariat à l'Energie Atomique (CEA). La principale particularité de Castem 2000 est d'être extrêmement adaptable aux multiples applications propres à chaque utilisateur. Depuis l'été 1999 Castem2000 est gratuit pour l'enseignement et la recherche de plus le code source est ouvert aux développeurs. Il est devenu cast3M en 2001.

En pratique le programme est constitué d'une série d'opérateurs élémentaires et d'objets. Chaque opérateur est affecté à l'exécution d'une seule opération. La manipulation des objets et opérateurs permet de modifier ou de créer de nouvelles applications. Celles-ci sont construites dans un langage spécifique: le langage Gibiane.

IV.2 Domaine d'utilisation de Castem2000

Castem2000 dispose d'un certain nombre d'exemples reprenant la majorité des problèmes pouvant être traités. Ces exemples sont disponibles dans le répertoire dgibi. Castem étant à l'origine un code pour le calcul des structures, on y trouve de l'élasticité linéaire ou non-linéaire, des modèles de plaques de coques ou de poutres très variés. Mais sa souplesse lui a permis de s'adapter à d'autres problèmes: les problèmes thermiques et ceux de mécanique des fluides.

IV.3 Les principes de développement de Castem 2000

CASTEM 2000 est avant tout un outil pour faire des calculs. Il intègre tous les procédés utilisés dans le passé et doit être en mesure d'accueillir tous ceux dont on aura besoin dans l'avenir à traiter de nouveaux problèmes. Il permet à l'utilisateur de s'adapter selon ces problèmes dont il faut résoudre. Il fait connaître à l'utilisateur du problème découlant et les méthodes employées. Cela a été rendu possible par: La simplicité, L'orthogonalité des processus, visibilité et la localité des processus, La régularité des processus et la documentation des processus [9].

IV.3.1 La simplicité

Il s'agit d'un principe de bon sens mais dont l'application n'est pas si aisée. C'est le fondement de la démarche scientifique; il est facile de faire des choses compliquées à partir de choses simples. Par ailleurs simple ne signifie pas simpliste.

IV.3.2 L'orthogonalité des processus

Cette règle est basée sur deux idées :

- Les processus sont indépendants entre eux : on peut changer ou modifier un processus sans toucher aux autres.
- Tous les processus peuvent se combiner, c'est ce qui fait la puissance du code.

IV.3.3 La visibilité et la localité des processus

La visibilité vise à supprimer l'existence des données cachées en imposant que toutes les données soient indiquées au processus de manière visible là où elles sont utilisées. La localité permet principalement de détecter les erreurs des données à l'endroit où elles sont définies et non pas beaucoup plus loin dans le calcul. Cette double règle a un corollaire immédiat : l'information créée par le processus doit aussi être visible.

IV.3.4 La régularité des processus

Il s'agit d'une part de la régularité dans l'utilisation des processus et d'autre part de la régularité dans les possibilités d'un processus.

- Régularité dans l'utilisation des processus: il n'existe pas d'exception dans la syntaxe des données. Ceci permet d'avoir des syntaxes identiques pour des processus différents ayant besoin des mêmes données.

- Régularité dans les possibilités d'un processus: il n'existe pas d'exception dans les opérations possibles du processus.

IV.3.5 La documentation des processus

La documentation d'un processus fait partie du processus et elle doit être développée simultanément au processus. C'est elle qui permet à l'utilisateur de connaître la fonction du processus et son utilisation.

La règle est que c'est la documentation qui a raison et non pas la programmation du processus.

IV.4 Mise en œuvre

IV.4.1 Notion de processus élémentaire

Il existe deux types de processus élémentaires: les OPERATEURS et les DIRECTIVES. Les informations sont appelées OBJETS.

- Les OBJETS sont nommés par l'utilisateur. Ils sont typés, ce qui permet aux opérateurs de les exploiter et de vérifier la syntaxe des données.

- Les OPERATEURS ont un nom. Ils créent un ou plusieurs objets dont les noms sont choisis par l'utilisateur. La seule condition de fonctionnement d'un opérateur dépend de l'existence de l'information au moment de son utilisation. L'utilisation d'un opérateur s'écrira: [nom du (des) résultat(s) = nom de l'opérateur et nom de l'information);]

Le point-virgule indique la fin de l'instruction élémentaire.

- Les DIRECTIVES modifient un ou plusieurs objets existants ou produisent une sortie sur une unité logique (écran, imprimante, ...). Elles ne créent pas de nouveaux objets. Il n'y a aucune distinction entre les opérateurs ou directives de prétraitement de calcul et de post-traitement, ils peuvent donc être utilisés à tout selon les besoins du problème.

IV.4.2 Le code GIBIANE

Afin de convertir les noms des objets en entités informatiques utilisables par le programme, il faut disposer d'une interface (le langage Gibiane).

Gibiane est le langage interprété qui permet de communiquer avec le programme. Le principe est d'écrire un programme en langage GIBIANE à l'aide d'un éditeur de texte (n'importe lequel), puis de lancer l'application Castem sur le fichier créé. Il est recommandé d'utiliser le suffixe (.dgibi).

La syntaxe est basée sur l'utilisation des directives, d'opérateurs et des procédures qui s'appliquent à des opérandes. Dans le premier cas la syntaxe est :

DIRECTIVE OPERANDES.

Par exemple dans «TRACE MAILLAGE;»

TRACE est la directive de traçage et MAILLAGE est l'opérande que l'on veut visualiser.

Dans un second cas la syntaxe est :

RESULTATS = OPERATEUR OPERANDES.

Par exemple dans : «LIGNE = DROITE P1 P2;»

LIGNE sera l'objet construit en reliant P1 à P2 par une droite. DROITE est l'opérateur qui s'applique sur les opérandes P1 et P2 et le résultat s'appelle LIGNE.

IV.4.3 Syntaxe du langage « GIBIANE »

- Le point-virgule termine une instruction.
- Gibiane ne fait pas a priori de distinction entre Majuscule ou en minuscule ainsi l'instruction "TrAce mailLAGE;" équivaut à "TRACE MAILLAGE;". Il est recommandé cependant de ne pas mélanger majuscules et minuscules pour des raisons de lisibilité [10].

- Une instruction doit être écrite sur moins de 9 lignes.
- Une ligne peut contenir plusieurs instructions (séparées par des points-virgules).
- Les lignes de commentaire sont précisées par un astérisque dans la première colonne.
- Les opérateurs et les directives sont dénis par leurs 4 premiers caractères mais on peut en donner plus s'il n'y a pas de confusions possibles (ex : TRAC, TRACE, TRACER). Il est conseillé d'utiliser un mot lisible: TRACER plutôt que TRAC et DROITE plutôt que DROI. Il est alors plus facile de lire le programme et de corriger les erreurs éventuelles.

- Une procédure se distingue au niveau utilisateur par la nécessité de l'orthographier correctement avec toutes ses lettres (< 8).

- L'instruction est interprétée de gauche à droite et les opérateurs sont exécutés dès qu'ils sont lus.
- Seuls les 72 premiers caractères d'une ligne sont pris en compte.

La longueur du nom attribue à un objet ne doit pas dépasser 8 caractères. Il est conseillé d'éviter d'attribuer à un objet le nom d'un opérateur existant, car ce dernier serait alors écrasé. Pour cela on peut conseiller de ne pas donner des noms de 4 caractères et de mettre un nombre en fin de nom (il n'y a qu'un opérateur ayant un nombre en fin de nom c'est CER3) ou de protéger les opérateurs et directives en utilisant les cotes (ex : `DROI`).

IV.4.4 Système d'unités

Castem 2000 ne dispose d'aucun système particulier d'unité de mesure. C'est à l'utilisateur de fournir les données dans un système cohérent vérifiant la loi fondamentale de la dynamique : $F = M \cdot \gamma$

Ainsi on peut donner deux exemples de systèmes cohérents pour l'acier:

Seule la mesure des angles doit être dans tous les cas exprimée en degrés pour la géométrie et en radians pour les résultats obtenus.

Longueur	Masse	Force	Temps	Masse volumique	Module d'Young	Contrainte Ou pression
M	Kg	N	Sec	$7.85 \cdot 10^3$	2.10^{11}	Pa
Mm	10 Kg	N	Sec	$7.85 \cdot 10^{-9}$	2.10^5	MPa

Tableau IV.1: Système d'unités pour un acier

IV.4.5 Organisation d'un calcul

Une analyse générale effectuée à l'aide de la méthode des éléments finis peut se décomposer en quatre grandes étapes :

- Le choix de la géométrie du maillage.
- La définition du modèle mathématique.
- La résolution du problème discrétisé
- L'analyse et le post-traitement des résultats.

Chacune des étapes peut également être décomposée en une série de processus élémentaires :

IV.4.5.1 Choix de la géométrie du maillage

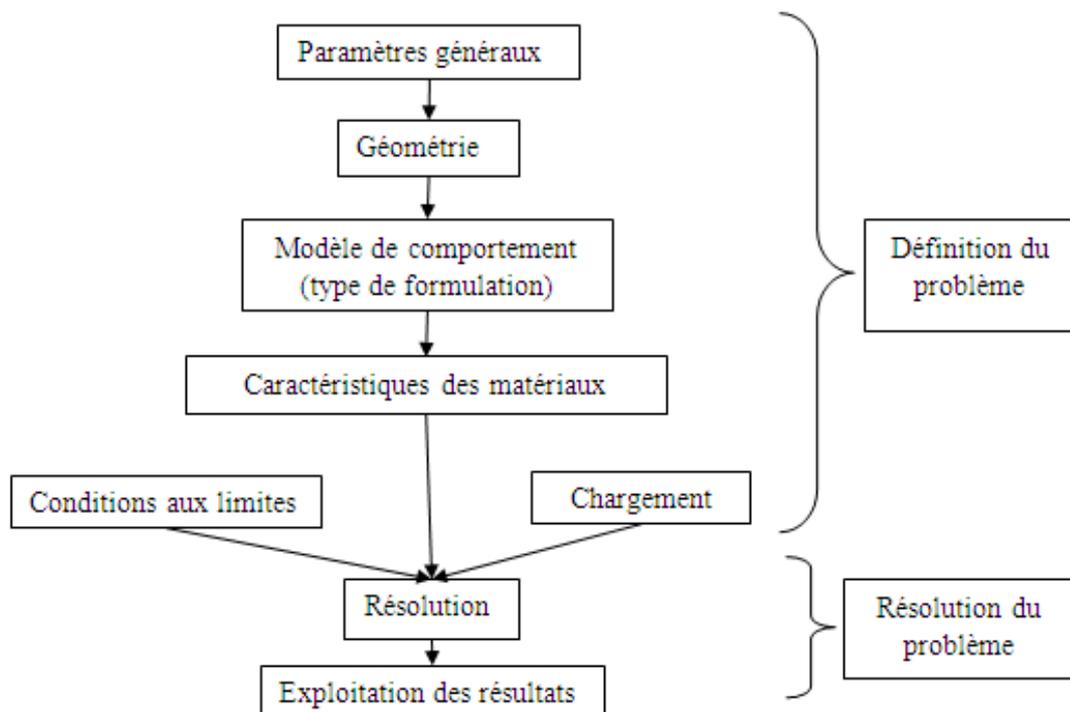
- Définition des points, lignes, surfaces et volumes.
- Discrétisation.

IV.4.5.2 Définition du modèle mathématique

- Définition des données caractérisant le modèle :
 - Type d'analyse: déformations ou contraintes planes, etc.
 - Formulation: mécanique, thermique, etc.
 - Comportement du matériau: élastique (isotrope, orthotrope), plastique (isotrope, parfait.....), etc..
 - Type d'élément: poutre, barres, coques, etc..
- Définition des propriétés matérielles (constante d'élasticité, masse volumique).
- Définition des propriétés géométriques (section des poutres, inerties, etc..).
- Les conditions aux limites.
- Définition des sollicitations.
- Conditions initiales.

IV.4.6 Procédure de résolution d'un problème avec Castem

Tout problème (mécanique, thermique, chimique,...) résolu avec CASTEM doit être construit de la manière suivante:



IV.5 Génération du Maillage

L'objet du maillage est de discrétiser géométriquement le domaine d'analyse de manière à pouvoir ultérieurement associer une formulation éléments finis au support géométrique.

Concrètement cette discrétisation s'effectue par la création d'objets de type maillage (points, lignes, surfaces et volumes) à l'aide des opérateurs géométriques. La technique à suivre est presque toujours la même :

1. construction des points.
2. construction des lignes à partir des points.
3. construction des surfaces à partir des lignes.
4. construction des volumes à partir des surfaces.

Cependant les objets de type maillage constituent le support géométrique des éléments finis qui seront définis ultérieurement. Le type des supports géométrique doit donc être en accord avec les éléments qui seront utilisés: Par exemple, si les éléments de type poutre ou barre ou encore coque axisymétrique les supports géométriques devront être des SEG2 (segments à 2nœuds) [10].

IV.5.1 Les maillages disponibles

Les logiciels d'éléments finis disposent de trois sortes de maillage :

- 1- Les mailles linéiques.
- 2- Les mailles surfaciques.
- 3- Les mailles volumiques.

IV.5.2 Les méthodes du maillage

La plus part des logiciels proposent différents algorithmes pour générer plus ou moins automatiquement des maillages. La phase de maillage est sans doute celle où on passe le plus de temps dans la définition d'un problème; obtenir un bon maillage résulte d'une certaine expérience et d'une certaine intuition sur le résultat de calcul. On peut cependant dégager quelques règles générales à suivre :

- Dans un maillage surfacique les mailles idéales sont triangles équilatéraux et les carrés.
- Dans un maillage volumique les mailles idéales sont tétraèdres réguliers et les cubes.

- Le maillage ne doit être inutilement fin; Car plus le maillage est fin plus le calcul est exacte. Quand on une idée sur le résultat final on peut décider de mailler grossièrement dans certaines régions et puis finement dans d'autres [9].

IV.6 Types d'objets et principaux opérateurs

Les objets disponibles dans CASTEM 2000 sont classés selon le type d'informations qu'ils renferment et selon la signification que prennent ces informations dans l'analyse. On note également que le type de chaque objet peut être obtenu en listant son contenu à l'aide de l'opérateur LIST.

Nous allons cependant revenir sur quelques objets souvent utilisés dans CASTEM.

IV.6.1 Objet de type Champ par point

Dans un objet de type champ par point (CHPOINT) on associe à chaque point une ou plusieurs composantes qui sont repérées par leur nom. Les noms des composantes sont :

- soit choisis par l'utilisateur
- soit déterminés par les opérateurs qui créent les objets.

Le champ peut être indéterminé ; diffus quand il représente une grandeur continue comme un champ de déplacement ou discret quand il représente une valeur discrète comme une force nodale.

Les points concernés par le CHPOINT sont référencés dans un objet maillage qui contient des éléments à 1 nœud.

IV.6.2 Objet de type Champ par élément

Ce sont des objets contenant des données définies dans les éléments.

Par exemple :

- des caractéristiques des matériaux.
- des caractéristiques géométriques (épaisseurs, section...).
- des contraintes.

Le champ est connu par ses valeurs définies soient :

- au centre de gravité de l'élément.
- aux nœuds de l'élément.
- aux points d'intégration de l'élément.

Remarquons que l'on peut construire un champ par point à partir d'un champ par élément. Pour cela on calcule la moyenne aux nœuds des éléments adjacents.

IV.6.3 Objet de type Evolution

A partir de plusieurs listes on peut définir l'évolution d'une ou plusieurs grandeurs en fonction d'un paramètre. L'opérateur utilisé est EVOL(UTION) avec l'option MANU et l'objet créé est de type évolution. Exemple: LISTEX = 'PROG' 0. PAS 1 9 ;

- CHPO : qui permet de définir l'évolution d'une composante d'un champ par point (déplacement, force...) le long d'une ligne de nœuds.

IV.7 Présentation de quelques directives

IV.7.1 Directive INFO (RMATION)

Dans le cas d'une utilisation conversationnelle, elle permet d'afficher la définition de tout opérateur ou directive. L'affichage se fait page par page.

INFO abcd ;

abcd : quatre premières lettres de la directive ou de l'opérateur sur lequel on désire de l'aide.

IV.7.2 Directive OPTI (ON)

Cette directive sert à préciser des options générales d'utilisation.

OPTI DIME2;

L'option DIME (NSION) est obligatoire avant toute définition de point, le chiffre suivant indique le nombre de composantes d'un point ou d'un vecteur (Dimension de l'espace de travail).

IV.7.3 Directive DENS (ITE)

Dans une opération de maillage la directive DENSITE sert à définir la taille locale de la maille s'appuyant sur les points à construire. Elle est paramètre puis affecté au voisinage d'un point nommé et peut donc prendre une valeur différente en chacun des points.

Au cours d'une opération de création de mailles entre deux points le programme s'arrangera pour que la taille des mailles en ces deux points soit la densité associée et pour qu'une progression géométrique des tailles entre deux points soit réalisée. Dans la saisie d'un programme la densité peut être répétée en prenant d'autres valeurs sans que celles des points

définis antérieurement soient modifiées. La valeur lue est exprimée dans la même unité que les coordonnées des points.

Si elle est absente au cours d'une opération de maillage automatique il y a impression du message d'erreur suivant :

```
**  
*LIG1 = DROITE P1 P5 ;  
***** ERREUR ***dans l'opération DROI  
Densité locale incorrect  
La lecture des données continue sur le terminal
```

IV.7.4 Directive TRAC (ER)

Elle permet de tracer et d'obtenir l'image d'un objet

TRAC QUAL objet

On retrouve certaine opération [(ELEM (ENT), NOEU (D), QUAL (IFIER), ZOMM(E)] dans le dessin lui-même. Elles peuvent être activées par la souris.

- ELEM (ENT): permet d'obtenir la numérotation des éléments.
- NOEU (D): permet d'obtenir la numérotation des nœuds.
- QUAL (IFIER): permet d'obtenir le nom des références.

IV.7.5 Directive FIN

Elle conclue la description de l'ensemble des opérateurs de maillage en plus largement de Castem2000.

IV.8 Représentation de quelques opérateurs

IV.8.1 L'opérateur DROI(TE)

- L'opérateur DROI(TE) permet de construire une ligne droite à partir de ses deux points extrêmes et de la règle permettant de calculer les coordonnées des points internes. Ces lignes créés sont orientées et automatiquement subdivisées en un certain nombre de segments que l'on pourra spécifier.

Les opérateurs CERC, CER3, PARA, CUBP, CUBT, COURBE, QUELCONQUE et

INTERSECTION permettent également de tracer des courbes telles que des arcs de cercle, de paraboles, des lignes brisées [10].

IV.8.2 L'opérateur VOLU(ME)

Permet de construire des volumes. Ceci peut se faire :

- Par translation d'une surface suivant un vecteur avec l'option TRAN.
- par translation parallèlement à une génératrice avec l'option GENE. Exemple :

VOL2 = SURF1 VOLU 10 GENE LIG1;

- Par rotation de surface entre deux vecteurs. Exemple :

VOL3 = SURF1 VOLU 10 ROTA SURF2 ;

- en construisant un maillage automatique à partir de la donnée de l'enveloppe du volume. Exemple : VOLE = SURFENV VOLU ;

IV.8.3 L'opérateur EXTR(AIRE)

Permet d'extraire une composante d'un ensemble de valeurs.

IV.8.4 L'opérateur DEFO(RME)

Construit la déformée d'une structure à partir de la géométrie initiale et d'un champ de déplacement. On peut également préciser un certain nombre d'options comme la couleur (ici BLANC et ROUGE) ou le facteur d'amplification pour rendre les phénomènes plus visibles. Utilisation d'un facteur multiplicatif de 0 sur DEF0 permet de visualiser la structure non déformée en même temps que la déformée finale DEF1.

IV.8.5 L'opérateur PRES(SION)

Permet de construire un chargement représentatif d'une pression. Il peut être suivi de l'option COQU quand il s'applique à des éléments coques ou MASS(IF) quand il s'applique à des éléments massiques. Il est également nécessaire de préciser le modèle sur lequel on applique la pression.

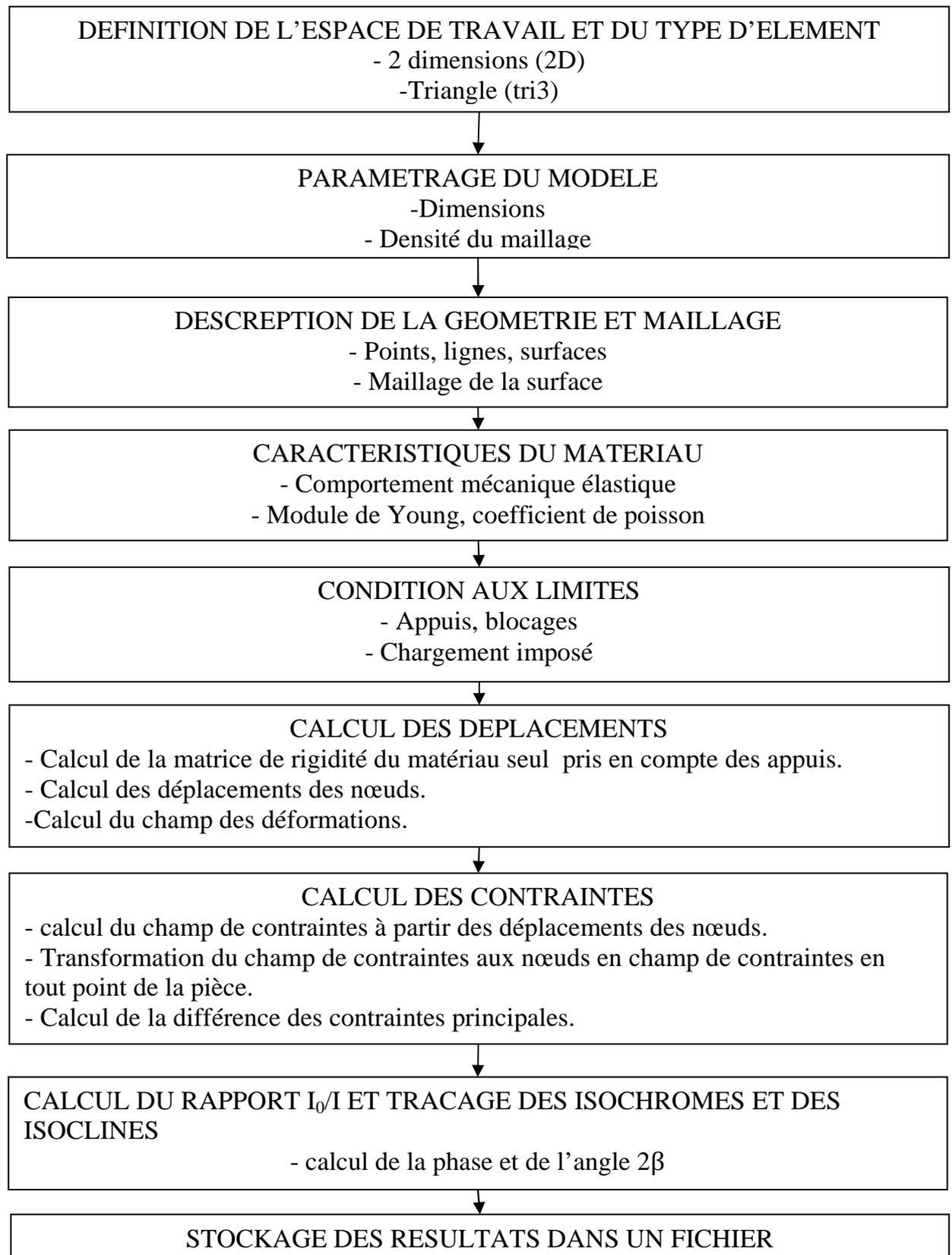
IV.8.6 L'opérateur VECT(EUR)

Nous permet de construire un objet contenant les forces sous forme de vecteur dont on précise la taille, les directions d'étude et la couleur.

IV.8.7 L'opérateur BSIG

Permet de calculer le champ des forces nodales résultant de l'intégration d'un champ de contraintes. On constitue ainsi un champ de forces thermiques.

IV.9 Architecture générale des programmes



IV.10 Conclusion

Castem présente un système complet intégrant les fonctions de calcul et les fonctions de construction du modèle ainsi que les traitements des résultats. Son développement entre dans le cadre d'activité de recherche dans le domaine de la mécanique. Il peut nous servir de support pour la conception, le dimensionnement et l'analyse de structures et de composants que nous allons appliquer dans la partie numérique.

Introduction

Plusieurs études ont montré que les ruptures dans les pièces mécaniques sont généralement localisées au voisinage des surfaces de contact. L'amorçage de la fissuration est essentiellement contrôlé par des mécanismes de cisaillement, particulièrement pour les matériaux métalliques. Il est donc très important d'évaluer le type et l'amplitude des sollicitations mécaniques imposées. L'étude théorique et numérique du contact reste cependant très complexe, particulièrement lorsque les deux corps en contact sont déformables.

V.1 Objectif

Diverses méthodes ont été utilisées pour analyser ce type de problème. On utilise dans notre travail la photoélasticimétrie et le calcul numérique (Castem2000) pour étudier les champs des contraintes développés dans un contact cylindre rigide en aluminium sur un plan déformable en époxy en présence d'un effort tangentiel.

V.2 Analyse expérimentale avec la photoélasticimétrie 2D

La photoélasticimétrie est une technique expérimentale de mesure des contraintes. Cette technique est basée sur le phénomène de biréfringence du matériau et de polarisation de la lumière. On a recours à la photoélasticimétrie afin d'élaborer des hypothèses plausibles sur les conditions aux limites pour vérifier ainsi les résultats obtenus par la méthode des éléments finis. C'est dans cette optique que nous avons choisi cette technique.

IV.2.1 Identification du modèle

Le matériau utilisé est de l'époxy possédant la propriété de biréfringence nécessaire pour mener l'étude sur un polariscope. Ses dimensions sont: épaisseur $e = 12\text{mm}$, hauteur $H = 56\text{mm}$ et de largeur $L = 56\text{mm}$, avec un module de Young $E = 15\text{MPa}$, un coefficient de poisson $\nu = 0.45$ et une constante de frange $f = 0,17$. Le cylindre utilisé est en aluminium de diamètre de 22mm , de module de Young $E = 70000\text{MPa}$ et de coefficient de poisson $\nu = 0.32$.

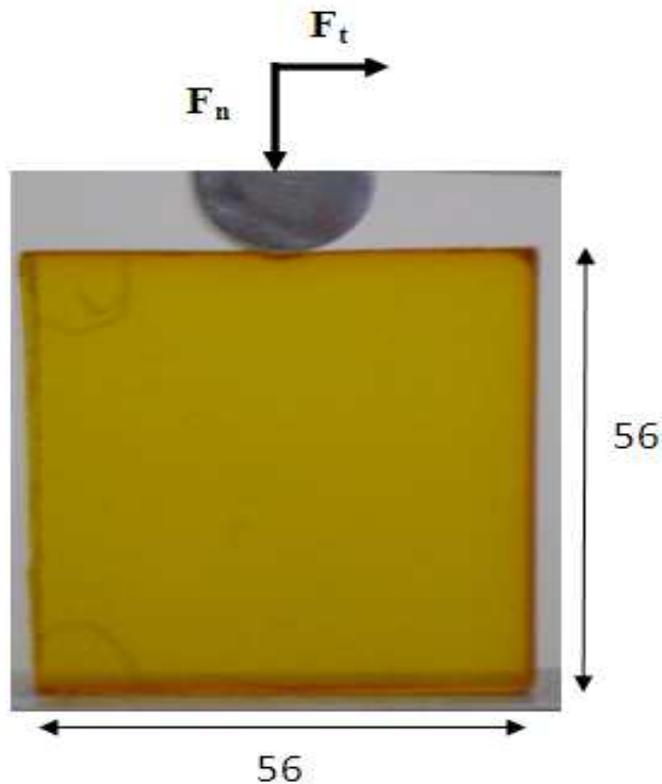


Figure V.1 : Contact cylindre sur plan

IV.2.2 Banc d'essai expérimental

IV.2.2.1 Dispositif de chargement

Le but est de déterminer les champs de contraintes développés dans le contact cylindre sur plan. On utilisera un dispositif de chargement qui permettra d'appliquer simultanément un effort normal et un effort tangentiel (figure V.2):

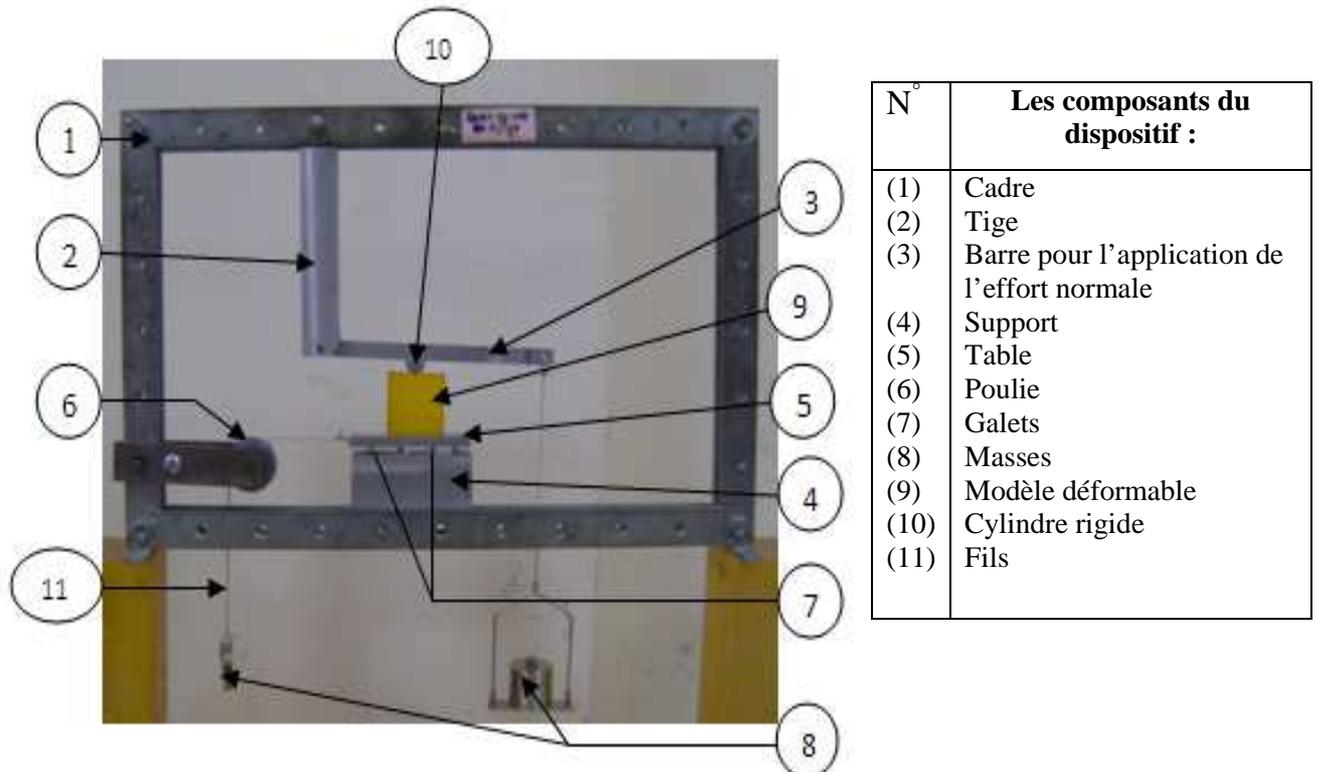


Figure V.2 : Dispositif de chargement

IV.2.2.2 Procédure

On positionne le dispositif de chargement dans le polariscope (entre le polariseur et l'analyseur). On applique d'abord un effort normal à l'aide de la barre (3) puis un effort tangentiel avec les éléments (5), (6) et (11). Sous une lumière monochromatique et polychromatique et à l'aide des lames quart d'onde, on observe sur le polariscope (figure V-3), le réseau des isochromes et des isoclines.

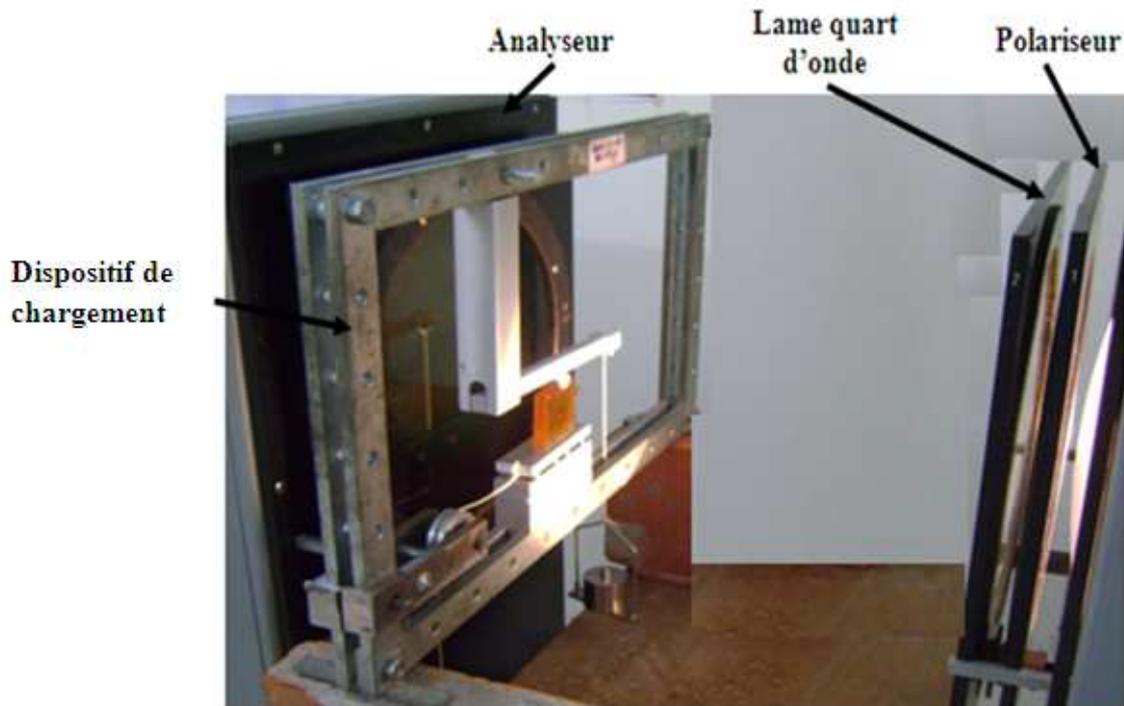


Figure V.3 : Dispositif de l'essai sur un banc photoélasticimétrique

IV.2.2.3 Calcul de l'effort normal appliqué

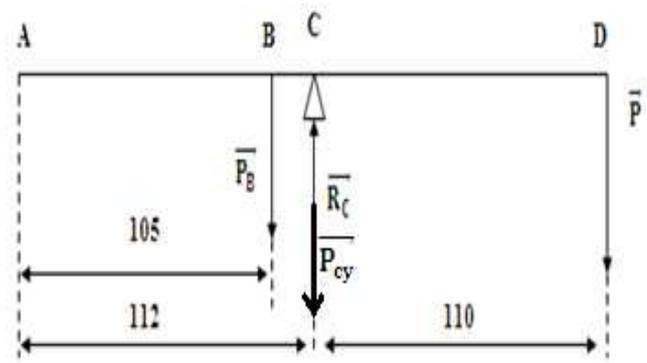
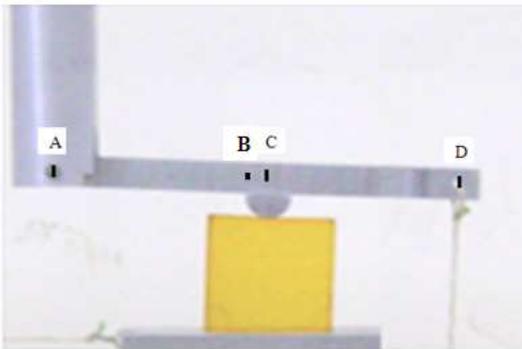


Figure V.4 : Contact cylindre sur plan

Calcul de la réaction au point C (R_C).

$$\sum MF_{\text{ext}/A} = 0$$

$$P \cdot 222 + P_B \cdot 105 - R_C \cdot 112 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = \frac{P \cdot 222 + P_B \cdot 105}{112}$$

$$R_C = 12,11 \text{ N}$$

L'effort normal total appliqué sur le modèle est :

$$F_N = R_C + P_{Cy} = 12,11 + 0,012 = 12,12$$

$$F_N = 12,12 \text{ N}$$

$F_N = 12,12 \text{ N}$

Avec :

P : le poids des masses (5,5 N).

P_B : la masse de la barre horizontale (1,28 N).

P_{Cy} : la masse de cylindre (0,012 N).

IV.2.3 Le réseau des isochromes sur le modèle en champ obscur

1- En lumière circulaire polychromatique

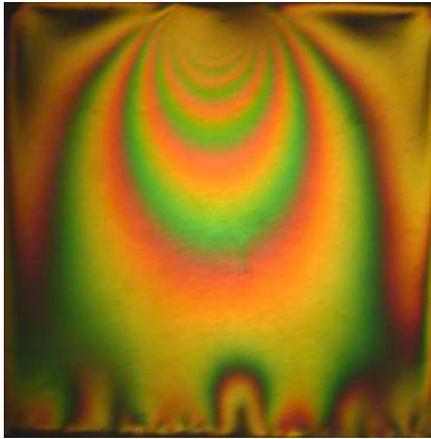


Figure V.5 : Réseau des isochromes sur le modèle avec un effort normal seul

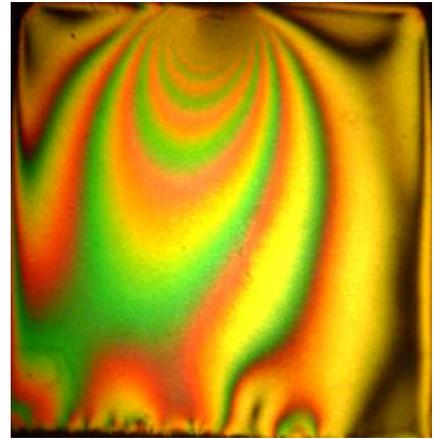


Figure V.6 : Réseau des isochromes sur le modèle en présence d'un effort tangentiel

2- En lumière circulaire monochromatique

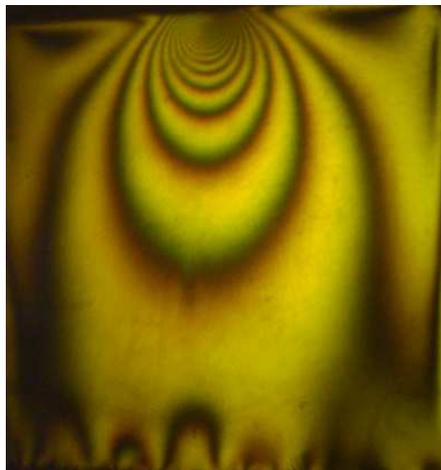


Figure V.7 : Réseau des isochromes sur le modèle avec un effort normal seul

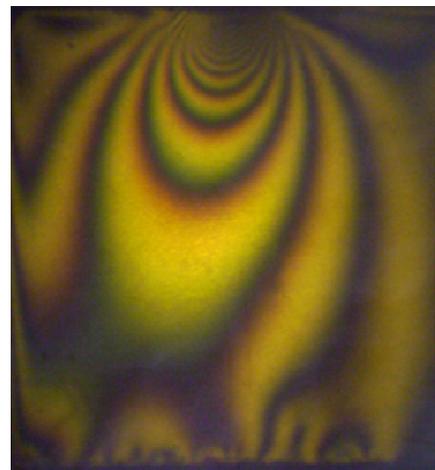


Figure V.8 : Réseau des isochromes sur le modèle en présence d'un effort tangentiel

IV.2.4 La différence des contraintes principales

Pour la détermination de la variation de la différence des contraintes principales, on doit d'abord visualiser le réseau des isochromes sur le polariscope en lumière monochromatique, puis repérer chaque frange avec son ordre correspondant. En appliquant les lois de Maxwell on détermine ces contraintes.

La différence des contraintes suivant le segment [AB] est donné par la relation de Maxwell :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N.f}{e}$$

A l'intersection du segment [AB] avec les franges isochromes on mesure les distances correspondantes par rapport au point de contact A. Sachant qu'on a utilisé un champ sombre, la première frange, en partant du bord libre supérieur correspond à une valeur d'ordre de frange $N=1$. Les autres franges peuvent en suite être repérées sur toute la surface du modèle. Dans notre travail on a deux cas.

1^{ère} cas: Contact avec un effort normal seul

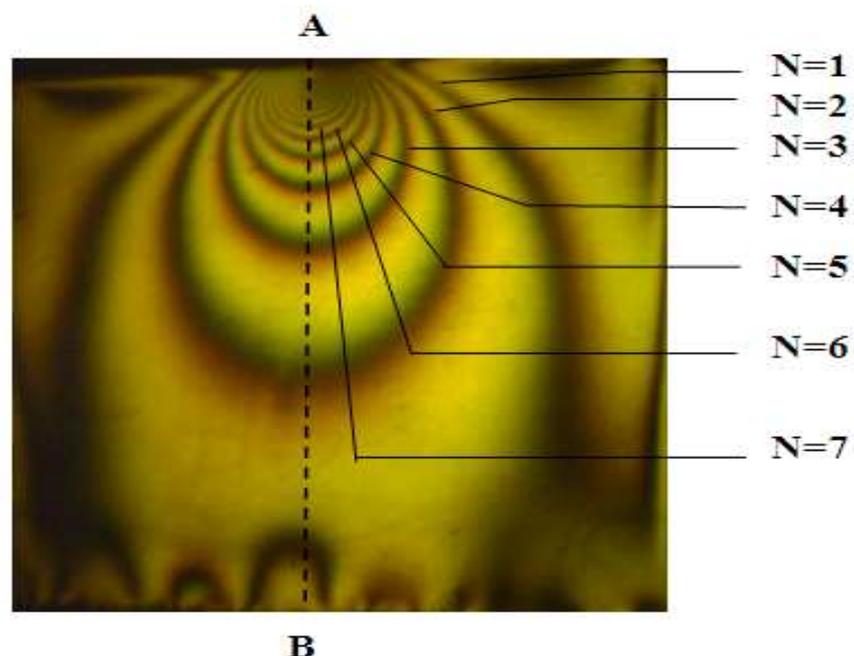


Figure V.9 : Réseau des isochromes et de l'ordre des franges qui apparaissent Pour le contact avec l'effort normal seul

Les valeurs sont portées sur le tableau V.1, on trace le graphe de l'évolution de la différence des contraintes principales le long d'une droite [AB].

Ordre de frange	La distance sur l'image (mm)	Distance réel (mm)	Différence des contraintes (MPa)
2	62	30,45	0,021
3	36	17,68	0,035
4	26	12,77	0,049
5	19,5	9,58	0,064
6	16	7,85	0,078
7	13	6,38	0,092
8	11	5,4	0,106
9	9,5	4,66	0,12
10	8	3,92	0,134
11	7	3,43	0,148
12	6,5	3,19	0,162
13	5,5	2,71	0,176

Tableau V.1 : Valeurs de la différence des contraintes principales relevées sur le segment [AB]

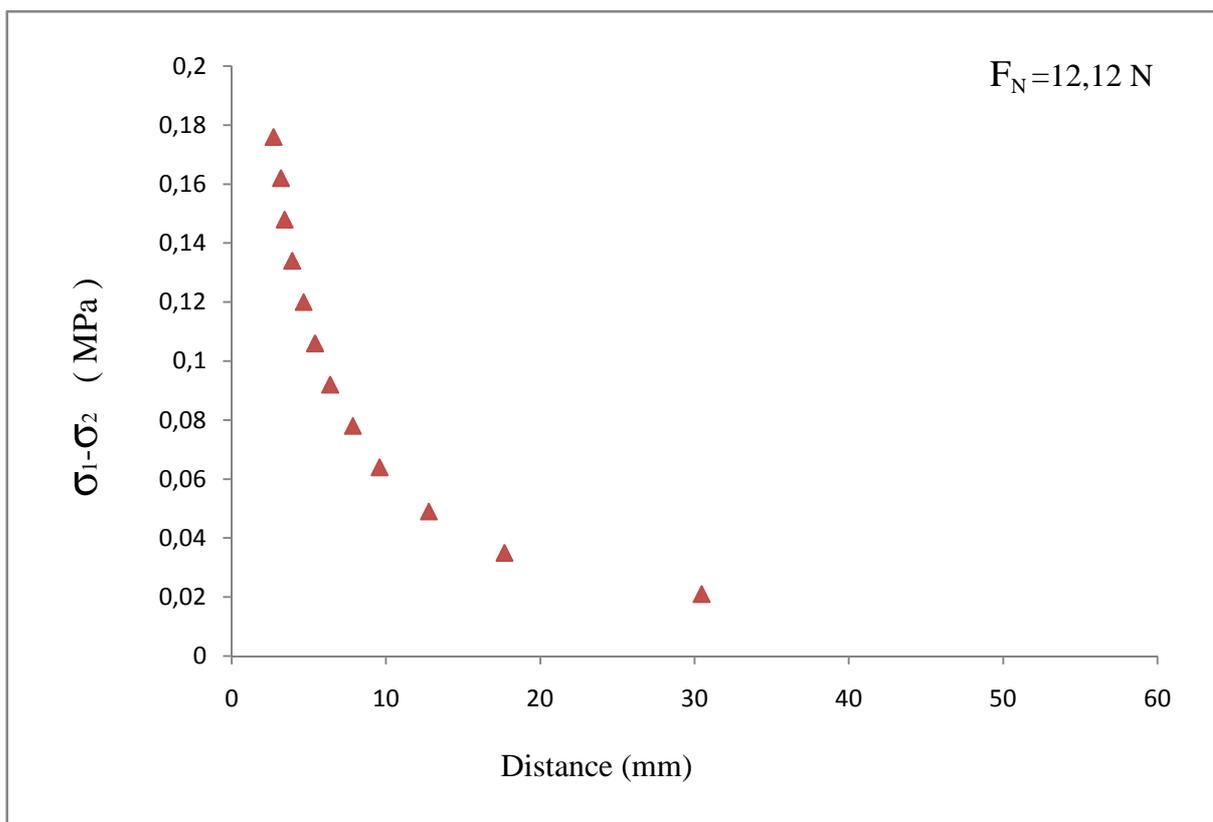


Figure V.10 : Variation de la différence des contraintes principales relevées expérimentalement

2^{ème} cas: Contact avec un effort normal et un effort tangentiel

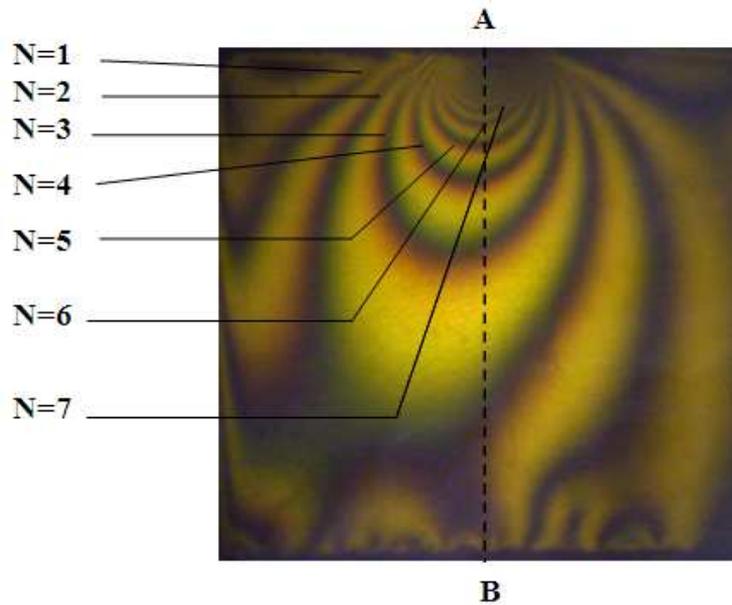


Figure V.11: Réseau des isochromes pour le contact avec l'effort normal et l'effort tangentiel

Les valeurs sont portées sur le tableau ci-dessous :

Ordre de frange	La distance sur figure (mm)	Distance réel (mm)	Différence des contraintes (MPa)
2	91,71	45,05	0,021
3	53,98	26,52	0,035
4	33	16,21	0,049
5	24	11,79	0,064
6	19	9,33	0,078
7	16,1	7,86	0,092
8	13	6,38	0,106
9	11	5,4	0,12
10	9,5	4,66	0,134
11	6,9	3,38	0,148
12	6,3	3,08	0,162
13	6	2,94	0,176

Tableau V.2: Valeurs de la différence des contraintes principales relevées sur le segment [AB]

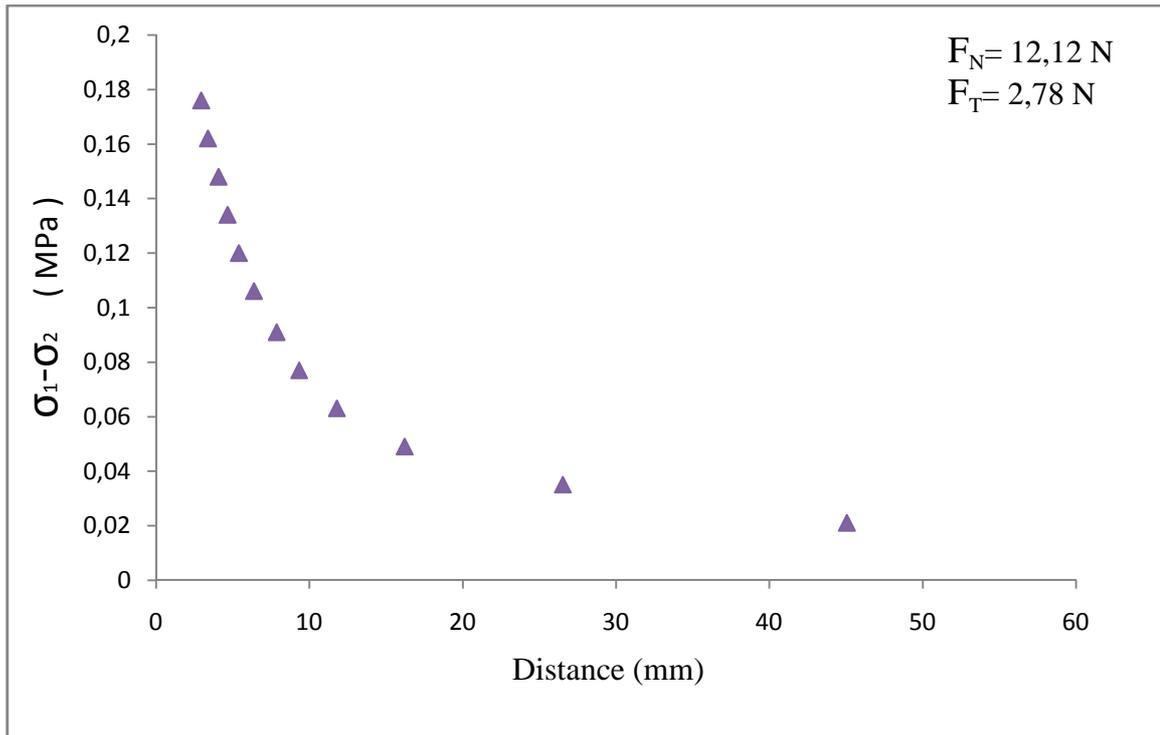


Figure V.12 : Courbe de variation de la différence des contraintes principales relevées expérimentalement en présence d'un effort tangentiel

IV.2.5 Visualisation des franges isoclines

Pour visualiser les franges isoclines il faut tourner les deux polaroïds (le polariseur et l'analyseur) simultanément avec un angle de 10° et on visualise les franges isoclines qui apparaissent une à une suivant l'angle de rotation. On remarque qu'en faisant tourner les deux polaroïds, les franges isoclines apparaissent en noire sur les images. Elles changent de position suivant l'angle de rotation, comme le montre les deux figures (V.13 et V.14).

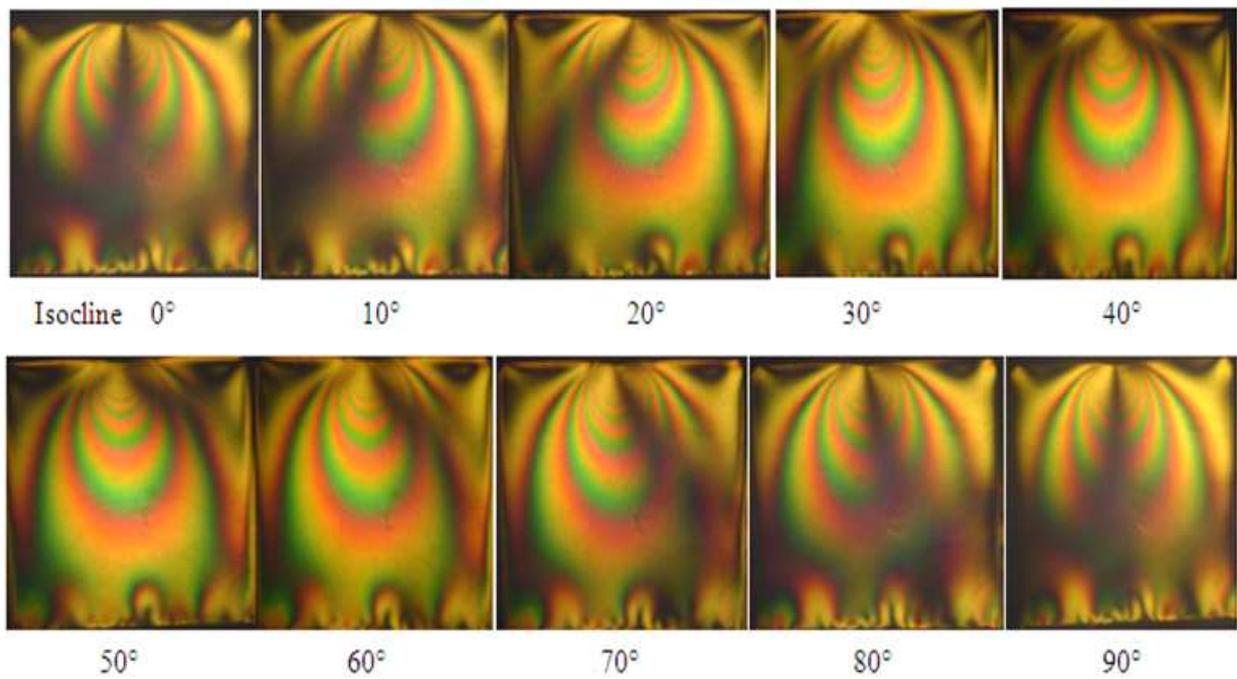


Figure V.13 : Relevé des isoclines par rotation des polaroids avec un angle de 10° en lumière circulaire polychromatique (effort normal seul)

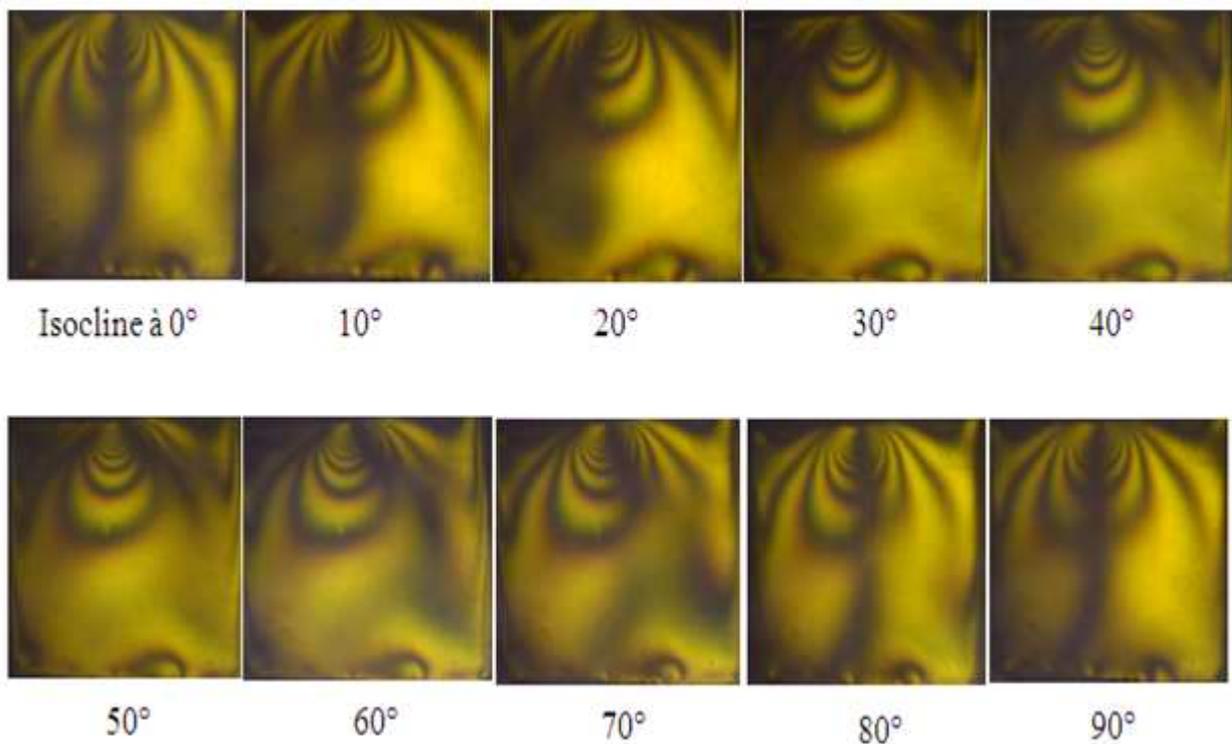


Figure V.14 : Relevé des isoclines par rotation des polaroids avec un angle de 10° en lumière circulaire monochromatique (effort normal seul)

IV.2.6 Tracé les isostatiques

L'exploitation des isoclines permet de déterminer les directions principales des contraintes. On peut ainsi tracer les trajectoires des contraintes principales appelées aussi isostatiques à partir de la connaissance de ces isoclines (figure V-15).

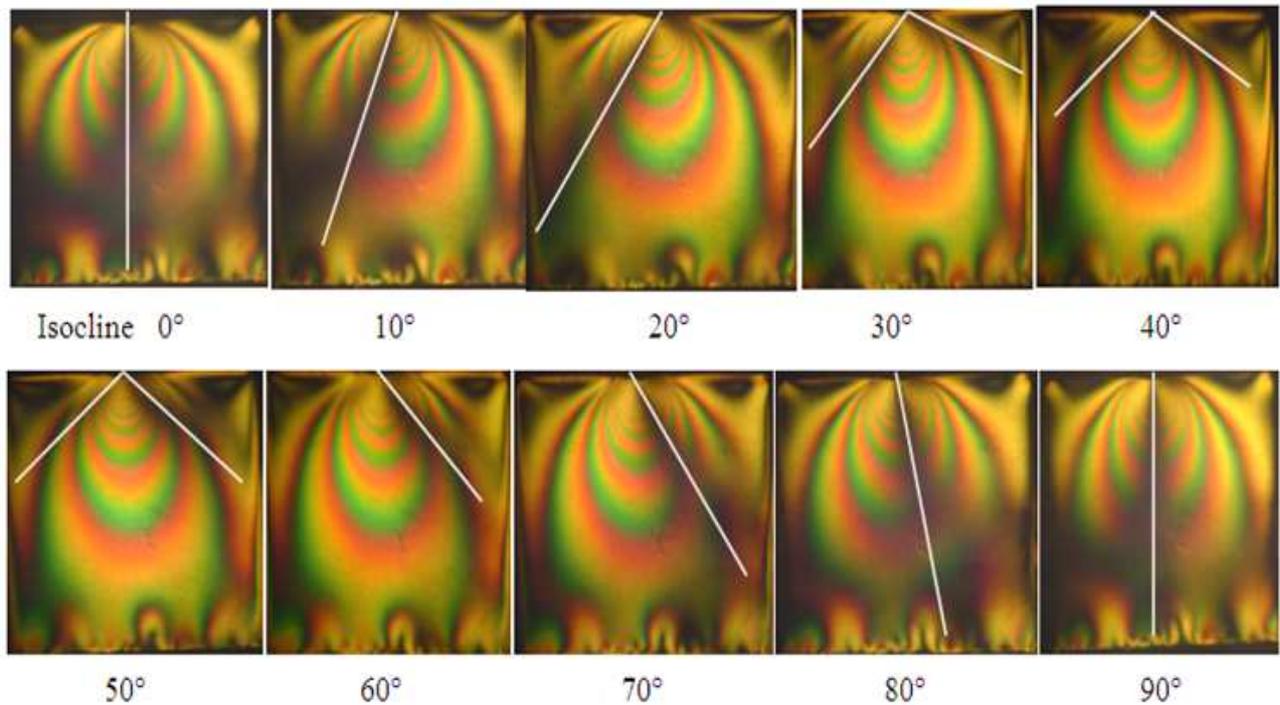


Figure V.15 : Images des isoclines pour différents positions des polaroids

En rassemblant d'abord toutes ces isoclines sur la même figure, les trajectoires des isostatiques débutent par des points arbitrairement espacés A, B, C, D, E sur l'isocline de 0° . A partir de ces points on trace des lignes orientées de 10° par rapport à la normale. Les lignes coupent l'isocline suivant (à 10°) en A', B', C', D', E'. Du milieu de ces lignes on trace des nouvelles lignes inclinées de 10° par rapport à la normale. On répète cette opération jusqu'à ce que le champ entier soit couvert (figure V.16).

La figure (V-17) représente les isoclines et les isostatiques tracées manuellement.

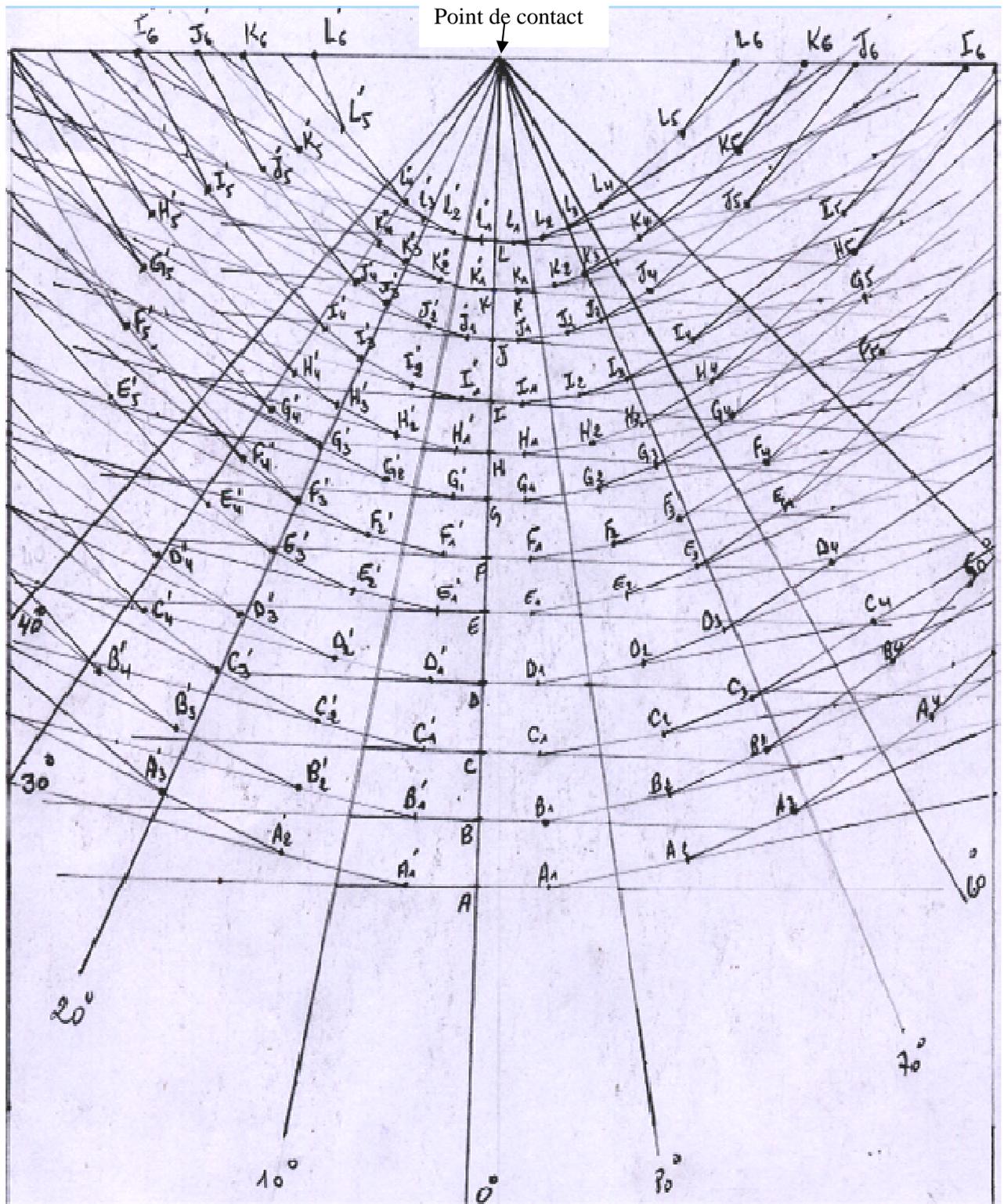


Figure V.16 : Trace des isoclines et des points par lesquels passeront les isostatiques

V.3 Analyse par éléments finis (logiciel Castem2000)

L'objectif de l'analyse par éléments finis est de simuler les réseaux des isochromes et des isoclines qui permettent de déterminer les champs de contraintes développés à l'intérieur du modèle. Dans cette étude on a considéré le matériau élastique et isotrope. Les différentes étapes suivies dans le programme écrit sous Castem2000 sont représentées ci-dessous :

1^{ère} étape: Description de la géométrie du modèle étudié et du maillage nécessaire

D'abord on a déclaré les principaux paramètres du programme (ex : dimension de l'espace, type de l'élément géométrique utilisé.) à l'aide de la directive OPTI(ON).

Nous avons défini la géométrie du modèle à l'aide de l'opérateur DROI(TE) qui permet de construire une ligne droite à partir de deux points.

Dans notre modèle le maillage est affiné au voisinage de contact pour obtenir une meilleure simulation.

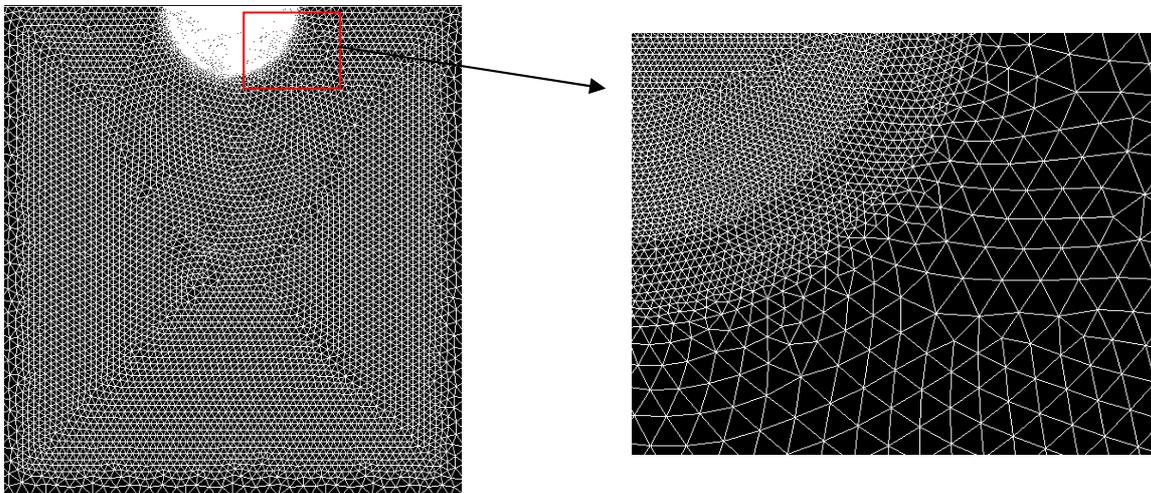


Figure V.18 : Représentation de la surface maillée

2^{ème} étape: Tracé de la déformation

Dans le contact cylindre sur plan il est plus facile d'imposer un déplacement connaissant la géométrie du contact que d'imposer une charge où la surface d'application varie avec la valeur de cette charge. Dans notre programme on a choisi l'opérateur (DEPI) c'est le déplacement imposé qui permet de déplacer chaque nœud d'une valeur correspondant à sa position. Dans ce cas, la valeur de l'effort correspondant au déplacement imposé est relevée sur la base inférieure du plan à l'aide d'une boucle.

Chaque nœud se déplace de la valeur e_i qui est en fonction de l'angle α (figure V.19). Le nœud O (première nœud qui entre en contact) se déplace avec la valeur δ , le nœud O_1 se déplace de $(\delta - e_1)$, le nœud O_2 se déplace de $(\delta - e_2)$, le nœud O_i est le dernier nœud entrant en contact et son déplacement est nul. Au nœud O_{i+1} on quitte la zone de contact. Le déplacement tangentiel est le même pour tous les nœuds.

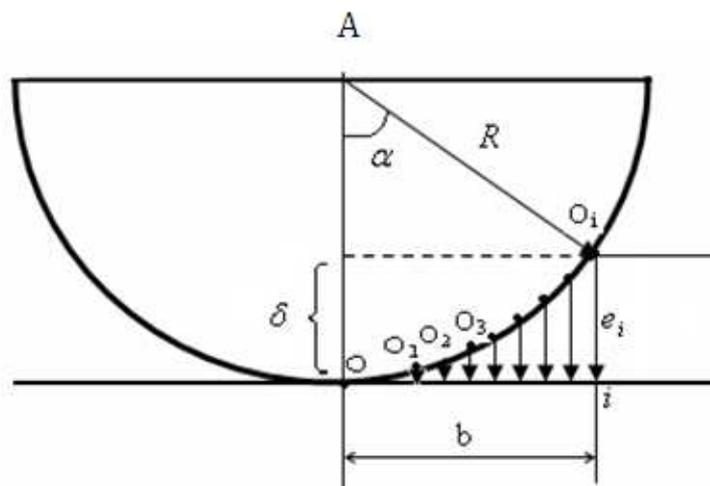


Figure V.19 : Relation de déplacement des nœuds en contact

Le logiciel donne le nombre de nœuds sur la base inférieure du plan et la sommation des efforts appliqués sur les nœuds. L'effort total au dernier nœud est :

$$F = \sum_{i=1}^{i=31} \text{effort appliqué au nœud } N_i$$

Au premier nœud ($i=1$) ; il récupère la valeur de l'effort, au second nœud ($i=2$), il récupère la valeur de l'effort et lui additionne la valeur de l'effort a celle du nœud précédent. Il répète cette opération jusqu'au dernier nœud où il affiche la valeur de l'effort total appliqué.

Dans le cas de l'effort normal, au nœud31 qui représente le point extrême inférieur illustré sur le tableau (V.3) l'effort est de $0.10448123E+01$ [N]. Et l'effort total est :

$$F_N = 0.10448123 \cdot 10 \cdot 12 = 12,50 \text{ N}$$

Cette valeur correspond approximativement à la charge imposée par unité de longueur pour l'étude expérimentale. Elle a pour valeur $F=12, 12 \text{ N}$.

```

C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
ENTIER      24      FLOTTANT    0.10243841E+01
ENTIER      25      FLOTTANT    0.10341265E+01
ENTIER      26      FLOTTANT    0.10409920E+01
ENTIER      27      FLOTTANT    0.10450869E+01
ENTIER      28      FLOTTANT    0.10464566E+01
ENTIER      29      FLOTTANT    0.10454880E+01
ENTIER      30      FLOTTANT    0.10438112E+01
ENTIER      31      FLOTTANT    0.10448123E+01
$ *
$ * list pec;
TABLE de pointeur 252361
  Indice      Type      Valeur
ENTIER      1      ENTIER      1
ENTIER      2      ENTIER      2
ENTIER      3      ENTIER      3
ENTIER      4      ENTIER      4
ENTIER      5      ENTIER      5
ENTIER      6      ENTIER      6
ENTIER      7      ENTIER      7
ENTIER      8      ENTIER      8
ENTIER      9      ENTIER      9
ENTIER     10      ENTIER     10
ENTIER     11      ENTIER     11
ENTIER     12      ENTIER     12
ENTIER     13      ENTIER     13
ENTIER     14      ENTIER     14
ENTIER     15      ENTIER     15
ENTIER     16      ENTIER     16
ENTIER     17      ENTIER     17
ENTIER     18      ENTIER     18
ENTIER     19      ENTIER     19
ENTIER     20      ENTIER     20
ENTIER     21      ENTIER     21
ENTIER     22      ENTIER     22
ENTIER     23      ENTIER     23
Objet
Type      Valeur
POINT    4487
POINT    4489
POINT    4492
POINT    4494
POINT    4497
POINT    4499
POINT    4501
POINT    4504
POINT    4506
POINT    4508
POINT    4511
POINT    4513
POINT    4515
POINT    4518
POINT    4520
POINT    4522
POINT    4525
POINT    4527
POINT    4529
POINT    4532
POINT    4534
POINT    4536
POINT    4539
0.10448123E+01
  
```

Tableau V.3 : Extraction des efforts correspondant au déplacement vertical imposé

De la même manière pour l'effort tangentiel (tableau V.4):

$F_T = 0.21865542 \cdot 12 = 2,62 \text{ N}$, la valeur expérimentale est de 2.78 N.

```

ca Sélectionner C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
ENTIER      17      FLOTTANT  0.27612242E+00
ENTIER      18      FLOTTANT  0.27627137E+00
ENTIER      19      FLOTTANT  0.27440301E+00
ENTIER      20      FLOTTANT  0.27190366E+00
ENTIER      21      FLOTTANT  0.26822311E+00
ENTIER      22      FLOTTANT  0.26366577E+00
ENTIER      23      FLOTTANT  0.25824147E+00
ENTIER      24      FLOTTANT  0.25256208E+00
ENTIER      25      FLOTTANT  0.24603079E+00
ENTIER      26      FLOTTANT  0.23973472E+00
ENTIER      27      FLOTTANT  0.23340660E+00
ENTIER      28      FLOTTANT  0.22745697E+00
ENTIER      29      FLOTTANT  0.22216567E+00
ENTIER      30      FLOTTANT  0.21932787E+00
ENTIER      31      FLOTTANT  0.21865542E+00
$ *
$ * list pec;
TABLE de pointeur 227530
Indice      Objet
Type      Valeur      Type      Valeur
ENTIER      1      POINT     4487
ENTIER      2      POINT     4489
ENTIER      3      POINT     4492
ENTIER      4      POINT     4494
ENTIER      5      POINT     4497
ENTIER      6      POINT     4499
ENTIER      7      POINT     4501
ENTIER      8      POINT     4504
ENTIER      9      POINT     4506
ENTIER     10      POINT     4508
ENTIER     11      POINT     4511
ENTIER     12      POINT     4513
ENTIER     13      POINT     4515
ENTIER     14      POINT     4518
ENTIER     15      POINT     4520
ENTIER     16      POINT     4522
ENTIER     17      POINT     4525
ENTIER     18      POINT     4527
ENTIER     19      POINT     4529
ENTIER     20      POINT     4532
ENTIER     21      POINT     4534
  
```

Tableau V.4 : Extraction des efforts correspondant au déplacement horizontal imposé

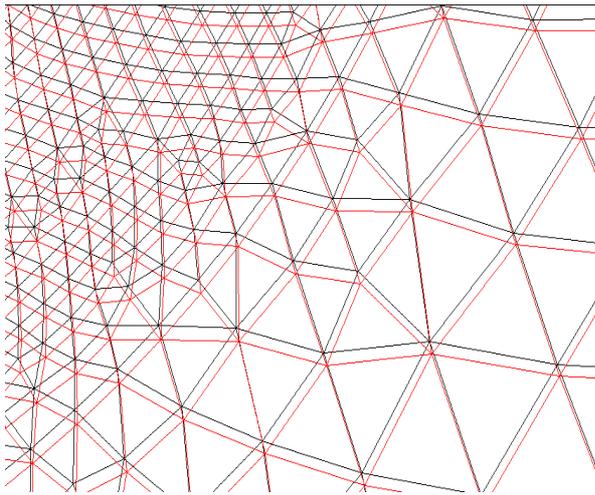


Figure V.20 : Représentation de la déformée
(contact avec l'effort normal seul)

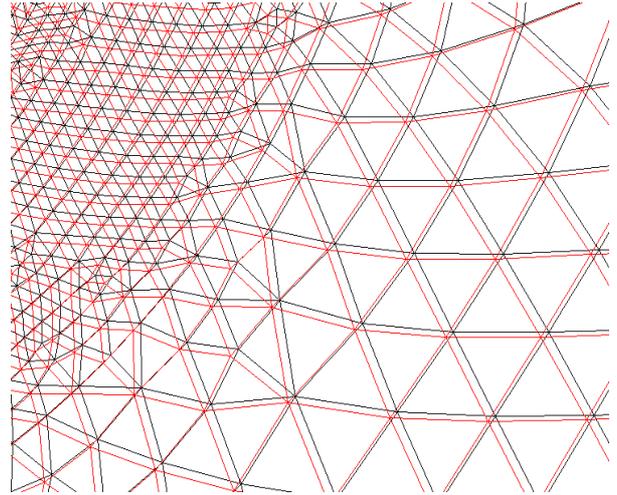
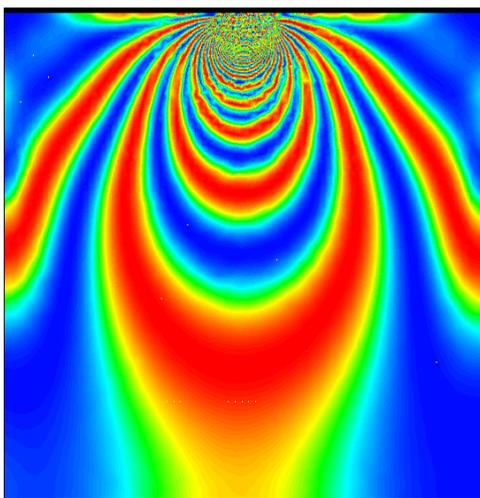


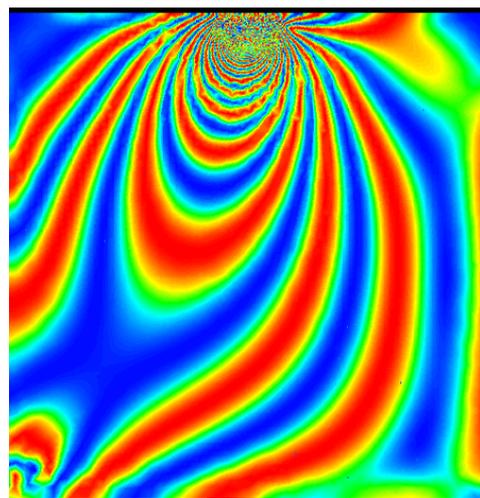
Figure V.21 : Représentation de la déformée
(contact en présence d'un effort tangentiel)

3^{ème} étape: Visualisation des isochromes

Le réseau des isochromes est obtenu pour $\text{Sin}^2 \frac{\varphi}{2} = 0$. Le programme écrit sous Castem trace les isochromes avec une échelle de couleurs. En pratique et en champ sombre le noir représente les franges isochromes qui correspond ici au bleu et les franges blanches correspondent au rouge (figure V.22).



(a)



(b)

Figure V.22 : Tracé des isochromes
(a) avec un effort normal seul (b) en présence d'un effort tangentiel

Il serait plus intéressant d'utiliser le noir et blanc, afin de faciliter la comparaison avec les résultats expérimentaux. Ceci est rendu possible à l'aide du logiciel SURFER qui traite les informations contenues dans un fichier résultat obtenu à l'aide du programme écrit sous Castem.

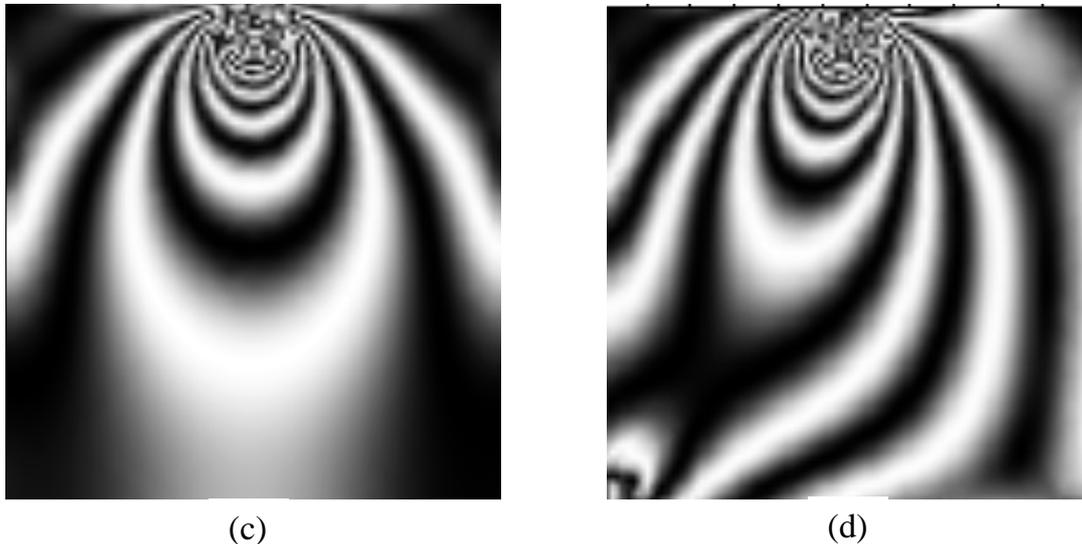


Figure V.23 : Tracé des isochromes traitées avec Surfer
(c) avec un effort normal seul (d) en présence d'un effort tangentiel

4^{ème} étape: Visualisation des isoclines

Le programme nous donne la valeur de $\sin^2 2\alpha$ en chaque point du modèle ce qui permet de tracer les isoclines qui correspondent à $\sin^2 2\alpha = 0$. On obtient par rotation successive de 10° des axes des polaroids les images des isoclines représentées par le bleu, ceci est dû au fait que les directions principales des contraintes dans ces zones sont parallèles aux axes considérés dans le programme, ces franges ont été traitées avec le logiciel SURFER.

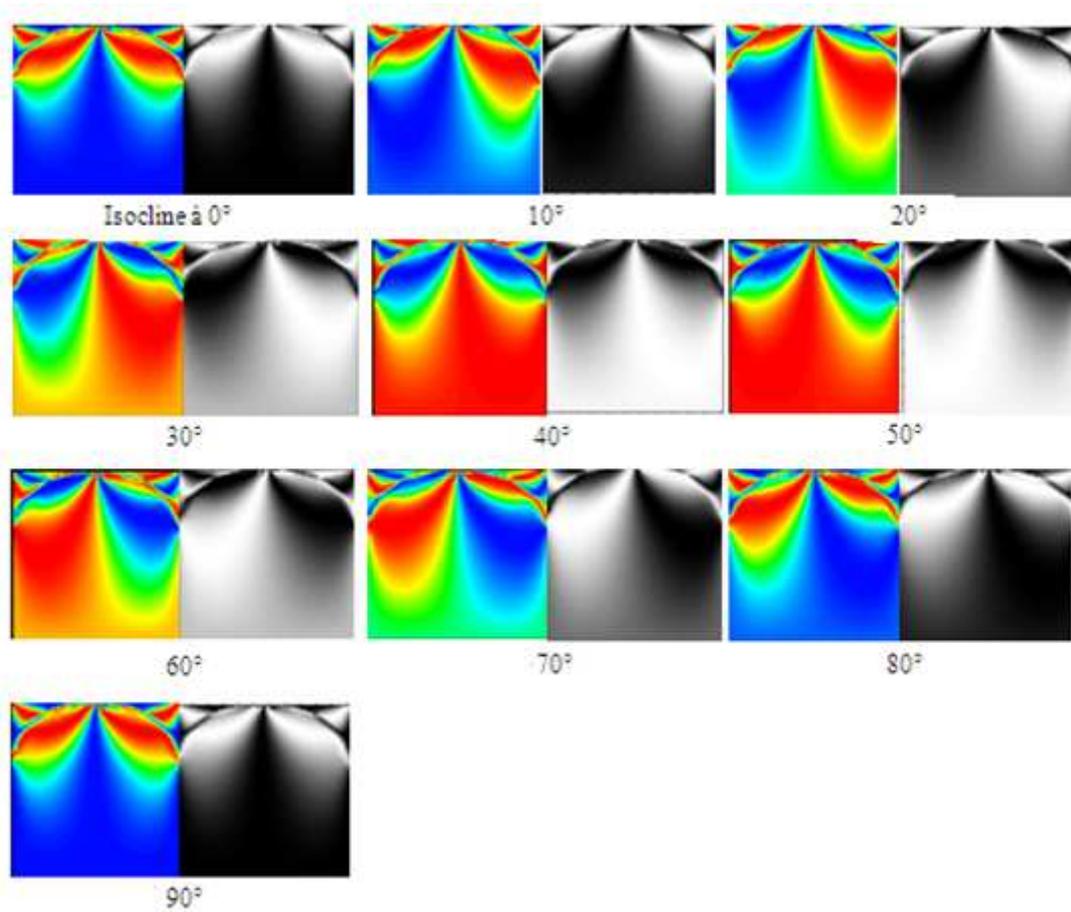


Figure V.24 : Les isoclines simulées sous Castem et traitées avec Surfer pour le contact avec l'effort normal seul

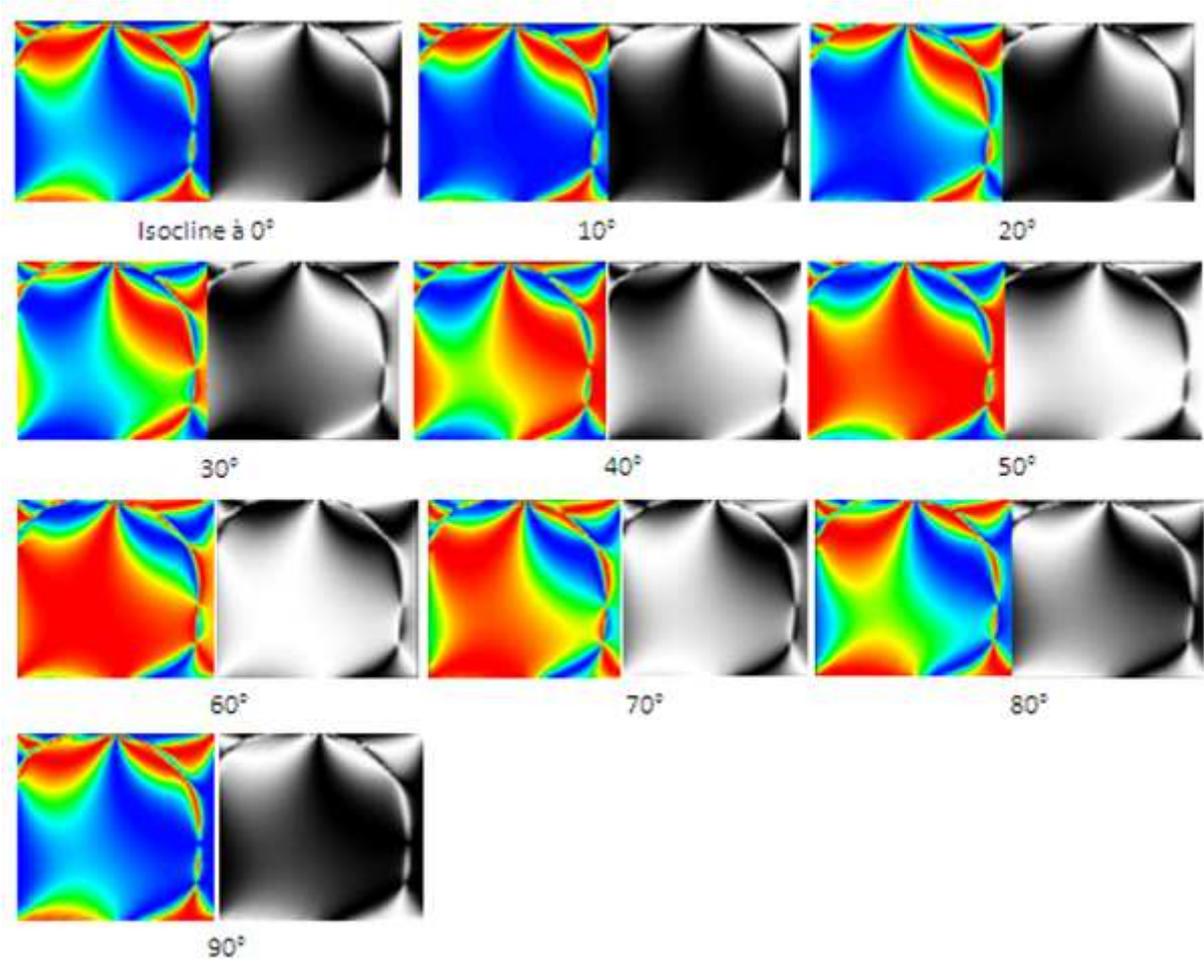


Figure V.25 : Les isoclines simulées sous Castem et traitées avec Surfer pour un contact avec un effort normal et un effort tangentiel

5^{ème} étape: La variation de la différence des contraintes principales

Le logiciel Castem permet de récupérer après calcul la variation des contraintes principales le long d'une droite verticale (tableau V.5).

➤ **Cas d'un contact avec un effort normal seul**

Distance (mm)	Différence de contraintes (MPa)	Distance (mm)	Différence de contraintes (MPa)	Distance (mm)	Différence de contraintes (MPa)
0	0,12228	20,533	0,04012	41,067	0,02415
0,93333	0,4898	21,467	0,03897	42	0,02381
1,8667	0,3537	22,4	0,03777	42,933	0,02348
2,8	0,24047	23,333	0,03665	43,867	0,02319
3,7333	0,18076	24,267	0,03547	44,8	0,02291
4,6667	0,14474	25,2	0,03451	45,733	0,02266
5,6	0,12166	26,133	0,03369	46,667	0,02244
6,5333	0,10517	27,067	0,03278	47,6	0,02223
7,4667	0,09262	28	0,03194	48,533	0,02204
8,4	0,08364	28,933	0,03109	49,467	0,02188
9,3333	0,07577	29,867	0,03032	50,4	0,02174
10,267	0,07002	30,8	0,0297	51,333	0,02163
11,2	0,06504	31,733	0,02915	52,267	0,02154
12,133	0,06107	32,667	0,02855	53,2	0,02147
13,067	0,05742	33,6	0,02792	54,133	0,02142
14	0,05413	34,533	0,02734	55,067	0,02139
14,933	0,05147	35,467	0,0268	56	0,02136
15,867	0,04898	36,4	0,02629		
16,8	0,04674	37,333	0,02581		
17,733	0,04492	38,267	0,02535		
18,667	0,04307	39,2	0,02492		
19,6	0,04154	40,133	0,02452		

Tableau V.5 : Valeurs de la différence des contraintes principales données par Castem pour le contact avec l'effort normal seul

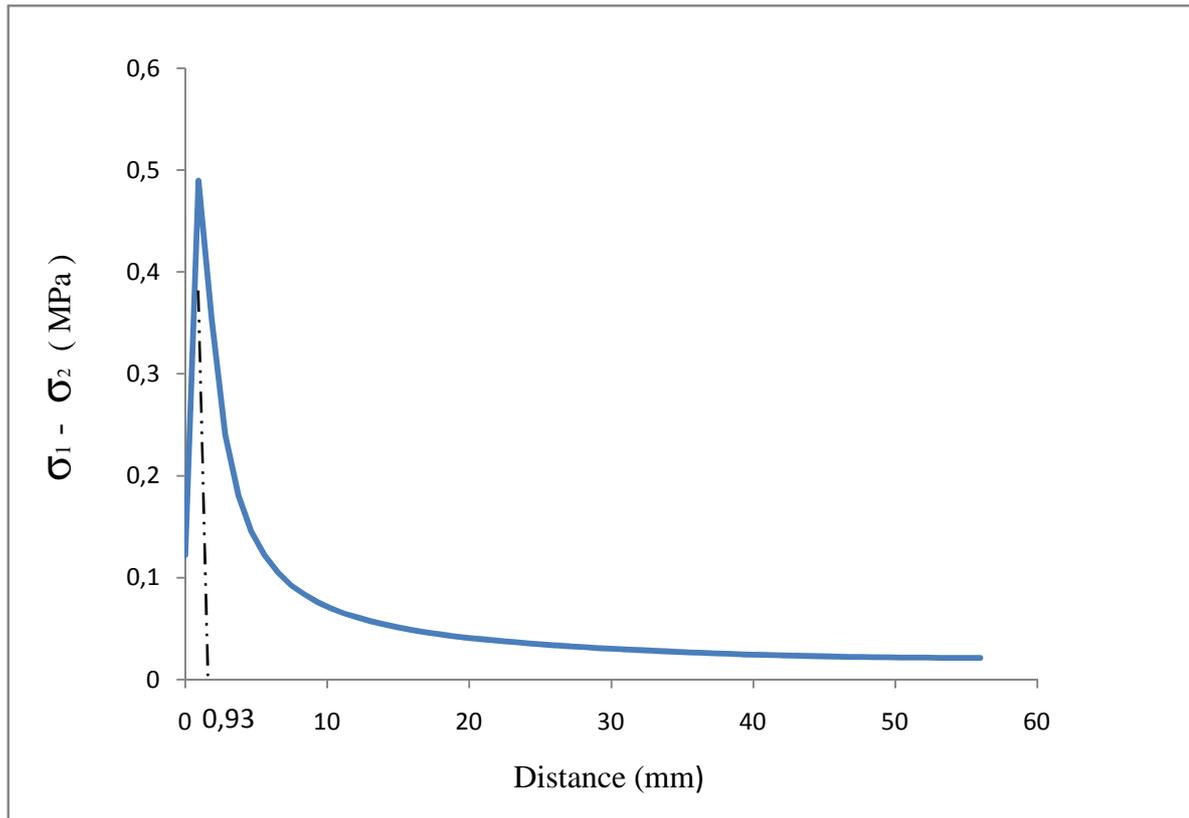


Figure V.26 : Courbe de variation de la différence des contraintes principales obtenues numériquement pour le contact avec l'effort normal seul

➤ **Cas d'un contact avec un effort normal et un effort tangentiel**

Distance (mm)	Différence de contraintes (MPa)	Distance (mm)	Différence de contraintes (MPa)	Distance (mm)	Différence de contraintes (MPa)
0	0,18982	20,533	0,0437073	40,133	0,024992
0,93333	0,51297	21,467	0,0425889	41,067	0,0240873
1,8667	0,36445	22,4	0,0414145	42	0,0231495
2,8	0,24722	23,333	0,0402884	42,933	0,022178
3,7333	0,18637	24,267	0,0390986	43,867	0,0211716
4,6667	0,14954	25,2	0,0381479	44,8	0,0201388
5,6	0,12616	26,133	0,0373331	45,733	0,0190653
6,5333	0,10927	27,067	0,0364403	46,667	0,0179405
7,4667	0,0963732	28	0,0355733	47,6	0,0167687
8,4	0,0873304	28,933	0,0346483	48,533	0,0155419
9,3333	0,0792806	29,867	0,0337818	49,467	0,0142517
10,267	0,0734943	30,8	0,0330671	50,4	0,0129328
11,2	0,0684812	31,733	0,032374	51,333	0,0115991
12,133	0,0644722	32,667	0,0316177	52,267	0,0102197
13,067	0,0607694	33,6	0,0308011	53,2	0,00871679
14	0,05751	34,533	0,0299968	54,133	0,007332
14,933	0,0548513	35,467	0,0292062	55,067	0,00621184
15,867	0,0523295	36,4	0,028412	56	0,00526306
16,8	0,0501454	37,333	0,0275896		
17,733	0,0483558	38,267	0,0267414		
18,667	0,0465808	39,2	0,0258725		
19,6	0,0451189				

Tableau V.6 : Valeurs de la différence des contraintes principales obtenues numériquement à l'aide de Castem pour un contact avec un effort normal et un effort

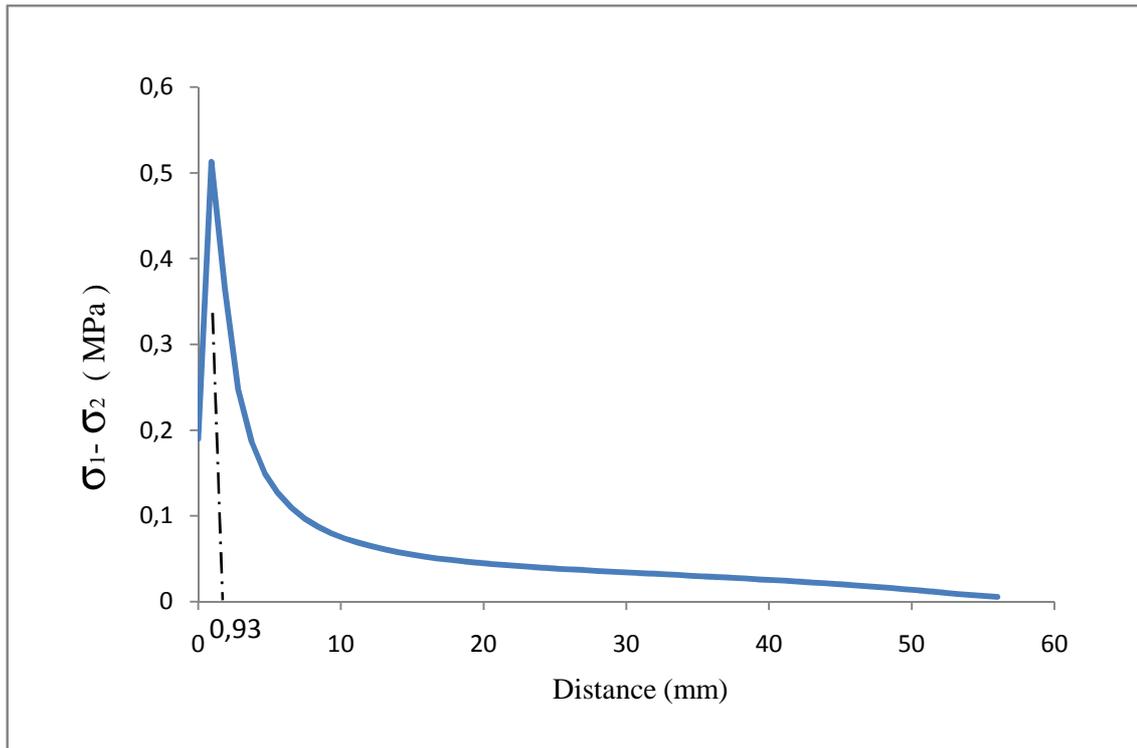


Figure V.27 : Courbe de variation de la différence des contraintes principales obtenues numériquement pour le contact en présence d'un effort tangentiel

V.4 Comparaison des résultats

Le but de cette comparaison est de valider le numérique par l'expérimentale. On a utilisé deux types de comparaison.

V.4.1 Comparaison des images

V.4.1.1 Comparaison des isochromes

Pour avoir une bonne comparaison il faut comparer les isochromes obtenues numériquement et traitées avec surfer avec les isochromes obtenues expérimentalement.



Figure V.28 : Isochromes simulées avec Castem et traitées avec surfer (avec un effort normal seul)

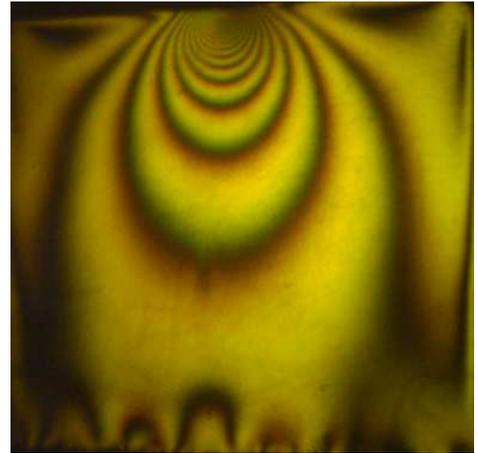


Figure.29 : Isochromes relevées expérimentalement (avec un effort normal seul)



Figure V.30 : Isochromes simulées avec Castem et traitées avec surfer (en présence d'un effort tangentiel)

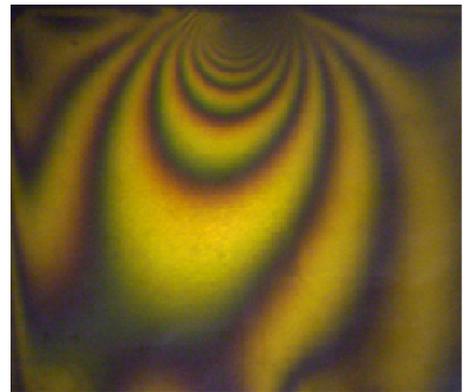


Figure V.31 : Isochromes relevées expérimentalement (en présence d'un effort tangentiel)

D'après les figures (V.28, V-29, V.30 et V-31) on voit que les images obtenues expérimentalement avec la photoélasticimétrie sont comparables avec les images obtenues sous Castem et traitées avec Surfer.

V.4.1.2 Comparaison des isoclines

On compare les isoclines obtenues numériquement (traitées avec Surfer) et celles obtenues expérimentalement pour les différents angles de rotation pour un contact avec un effort normal seul.

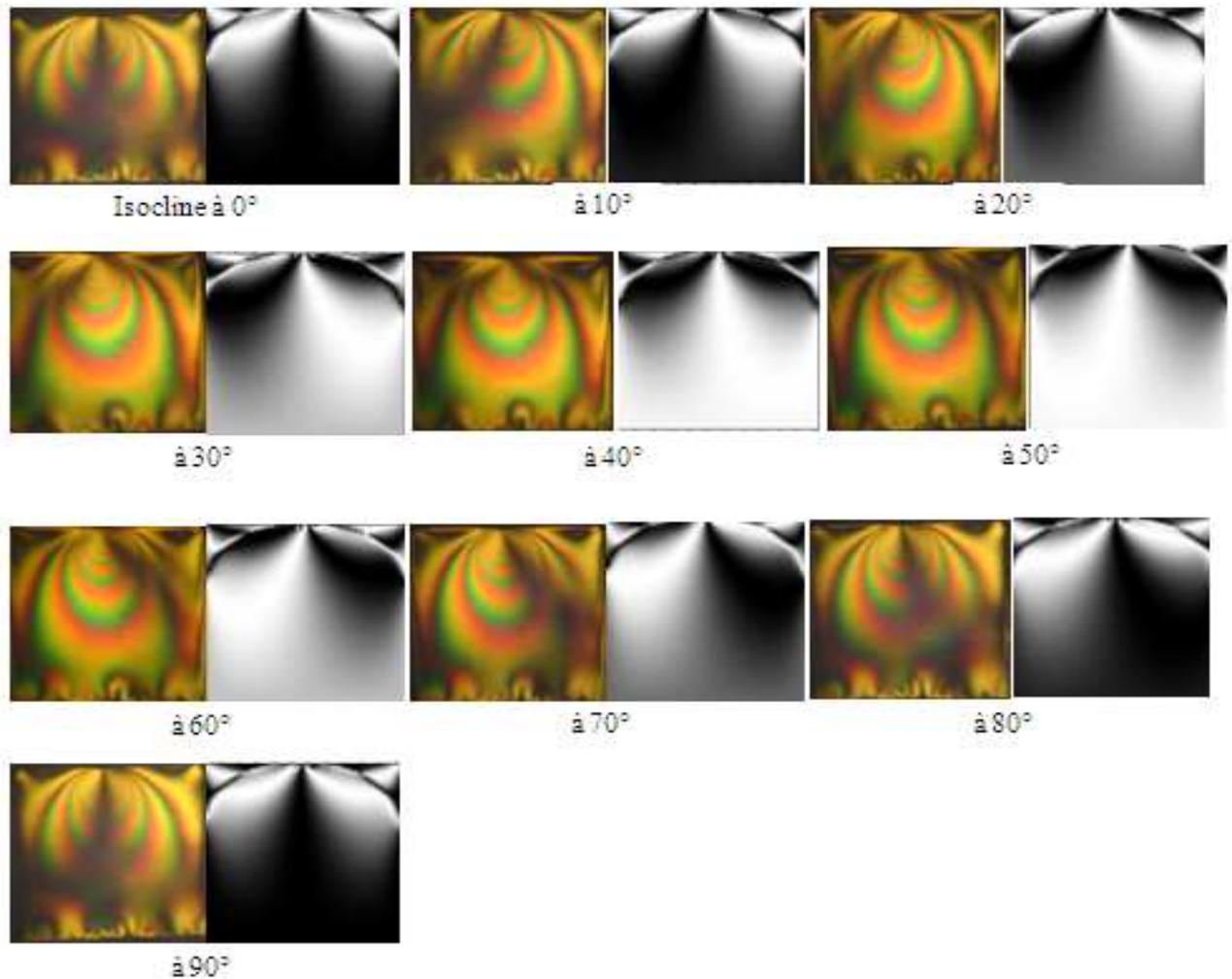


Figure V.32 : Comparaison des isoclines simulées sous Castem et traitée avec Surfer avec celles obtenues expérimentalement

Pour le contact avec un effort normal et un effort tangentiel on compare l'isocline à 0° .

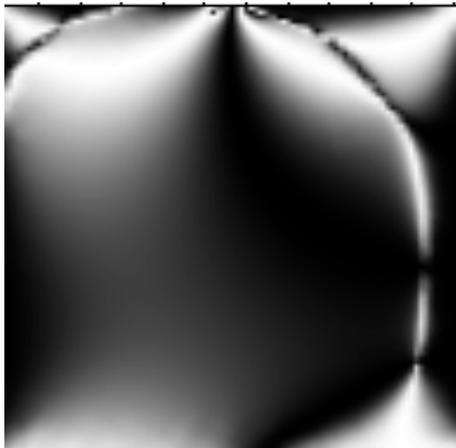


Figure V.33 : Isocline à 0° traitée avec surfer
(en présence d'un effort tangentiel)

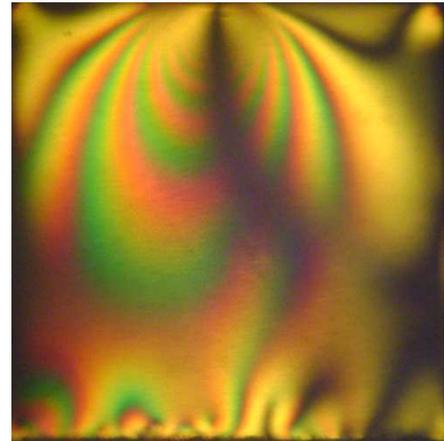


Figure V.34 : Isocline à 0° obtenue expérimentalement
(en présence d'un effort tangentiel)

V.4.2 Superposition des courbes

La première comparaison peut se faire par la superposition des deux courbes obtenues expérimentalement et numériquement pour un contact avec un effort normal. La figure ci-dessous montre que les courbes se rapprochent et qu'il y'a une bonne concordance des résultats.

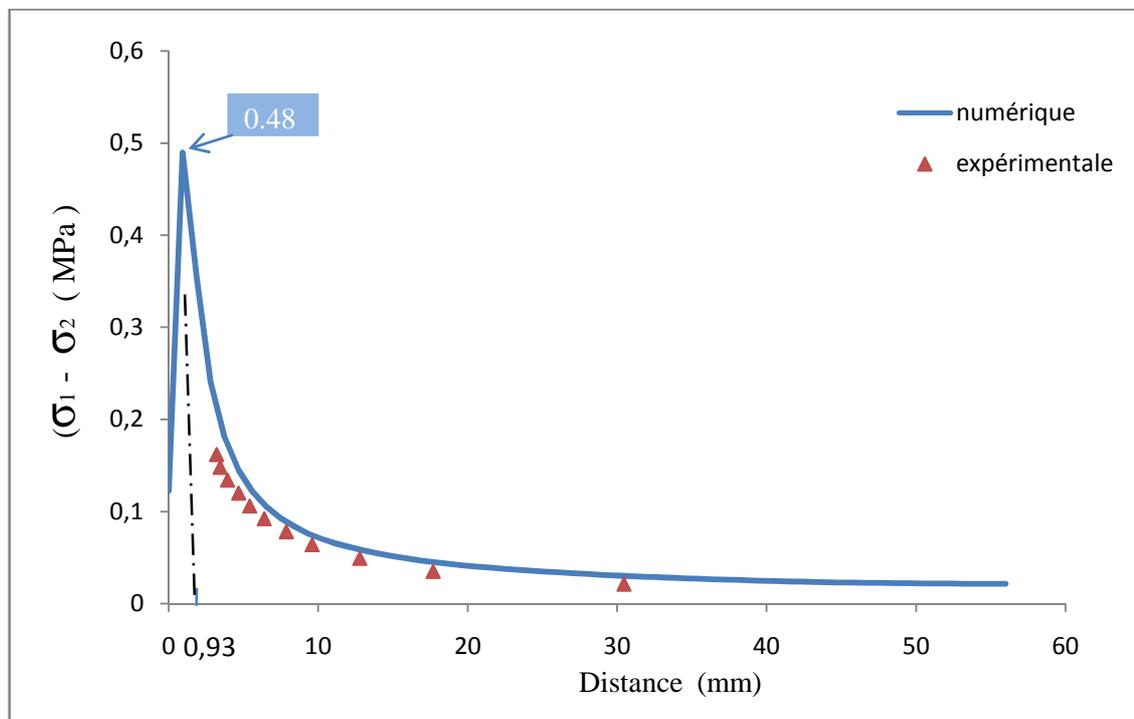


Figure V.35 : Superposition des courbes numériques et expérimentales pour un contact avec l'effort normal seul

La deuxième c'est de superpositionner les deux courbes obtenues expérimentalement et numériquement en présence d'un effort tangentiel. La figure V.36 montre qu'il y'a une bonne concordance des résultats.

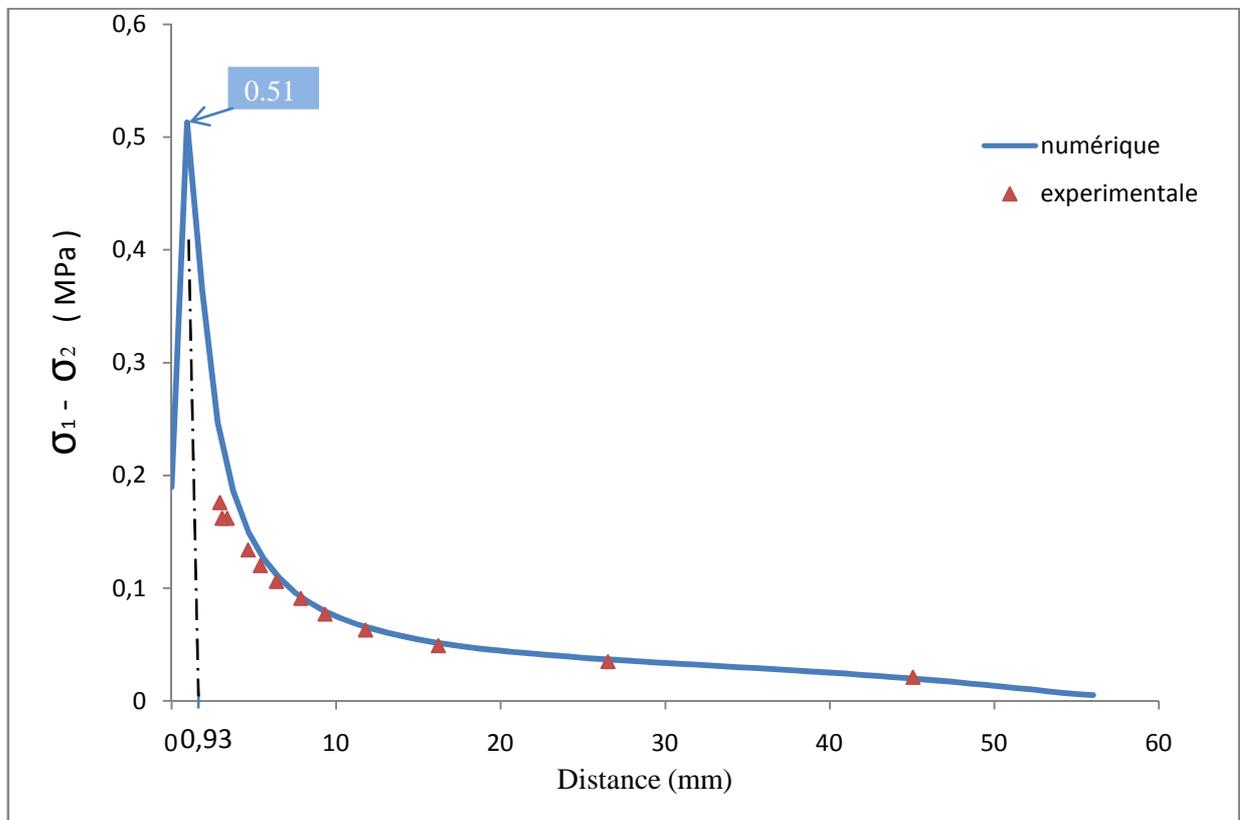


Figure V.36 : Superposition des courbes numériques et expérimentales pour un contact avec un effort normal et un effort tangentiel

V.5 Discussion des résultats

D'après la comparaison des images des isochromes relevées expérimentalement avec celles simulées sous Castem et traitées avec surfer on voit qu'il y a une bonne correspondance entre l'expérimental et le numérique et c'est le même cas pour les isoclines (figure V-32, V.33 et V.34).

D'après la superposition des courbes de variation de la différence des contraintes principales obtenues expérimentalement et numériquement (figure V.35 et V36), nous remarquons qu'il y a une bonne concordance des résultats et que les courbes se rapprochent. Il existe quelques différences dans certaines zones comme celle au voisinage du point de contact où il est difficile de déterminer l'ordre de frange avec une grande précision et ça nous empêche de déterminer la valeur maximale de la différence des contraintes expérimentalement, par contre numériquement la valeur maximale se trouve à une distance de 0,93mm du point de contact, qu'on appelle point de hertz. Les contraintes diminuent rapidement en s'éloignant de la zone de contact vers le bord inférieur (point B).

L'écart entre les valeurs expérimentales et les valeurs simulées est relativement faible. Il peut être dû aux erreurs expérimentales et aux hypothèses de calcul.

V. 6 Conclusion

Dans ce chapitre on a étudié le problème du contact cylindre sur plan en présence d'un effort tangentiel. Un modèle a été analysé à l'aide de la photoélasticimétrie et comparé à un modèle simulé à l'aide des éléments finis (Castem2000). On a considéré le cylindre rigide et le plan déformable en époxy.

D'après la comparaison des résultats expérimentaux et numériques on a constaté qu'il existe une bonne concordance entre les deux méthodes ce qui nous a permis de valider le calcul numérique.

Conclusion générale

Le but de ce travail a été l'étude numérique et expérimentale des champs de contraintes développés dans le contact cylindre sur plan en présence d'un effort tangentiel. Un dispositif de chargement fabriqué au Hall de technologie nous a permis d'appliquer l'effort normal et l'effort tangentiel. On a considéré le cylindre rigide en aluminium et le plan déformable en époxy de module de Young faible devant le module de Young de l'aluminium.

Cette étude a permis de déterminer le champ de contraintes dans le contact cylindre sur plan par deux méthodes différentes. La première méthode c'est la photoélasticimétrie qui a permis de visualiser les champs de contraintes à travers les isochromes et les isoclines, particulièrement au voisinage de la zone de contact. Pour la deuxième, on a utilisé les éléments finis à l'aide du logiciel Castem2000 qui permet de calculer les franges isochromes et isoclines ainsi que la valeur maximale de la différence des contraintes principales. Pour les différents résultats obtenus deux types de comparaison ont été faites :

- ✓ La comparaison des isochromes et des isoclines obtenues expérimentalement à celles obtenues numériquement.
- ✓ La superposition des courbes expérimentales et numériques de la différence des contraintes principales le long d'un segment vertical.

On a constaté une bonne concordance des résultats, sauf dans certaines zones, notamment au voisinage du point de contact où il est difficile de déterminer l'ordre de frange avec une grande précision. Cette bonne concordance des résultats nous a permis de valider le calcul numérique et les conditions aux limites.

Références bibliographiques

- [1] : « cours de MMC: année scolaire 2010-2011 ». Michel Maya. Arts et métiers Paris Tech. Centre d'enseignement et de recherche de Ctuny.
- [2] : « Analyse Numérique et expérimentale du champ de contraintes dans un contact d'engrènement » Mémoire d'ingénieur Promotion 2008 (UMMTO. GM).
- [3] : « Détermination des champs de contraintes à l'aide des méthodes Numérique et Analytique » Mémoire d'ingénieur Promotion 2005 (UMMTO. GM).
- [4] : « Détermination Numérique et Expérimentale de contraintes dans le problème de contact mécanique » Mémoire de Magister (UMMTO. GM 2008).
- [5] : Aide Mémoire MMC « 2^{ème} et 3^{ème} cycles-IUT- écoles d'ingénieurs ». JEAN COIRIER Dunod- paris 2001.
- [6] : Denis Dartus « Elasticité linéaire » Edition CEPADUES. Janvier 2001.
- [7] : « photoélasticimétrie ». ENSGI 1ère année Marie-Anne Le Dain Année 1999/2000
- [8] : Gerald Zambelli et Leo Vincent, « Matériaux et contact – une approche tribologique ». (Presse polytechnique et universitaire ROMANDE 1998 »
- [9] : «Présentation et utilisation de CASTEM 2000». E. Le Fichoux ENSTA – LME 15/01/98
- [10] : «Modélisation et simulation numérique Prise en Main de Cast3M» Master IMM 1. Université de Caen UFR Sciences 2010-2011