Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Mouloud MAMMERI Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Thèse de Doctorat LMD

Filière :
Mathématiques
Spécialité :
Recherche Opérationnelle

Présentée par :
Aghiles AZIZEN

Optimisation de problèmes min-max en programmation linéaire

Soutenu le 08 Juillet 2023, devant le jury composé de :

OUKACHA Brahim	Professeur	U.M.M.T.O	Président
AIDENE Mohamed	Professeur	U.M.M.T.O	Directeur
LOUADJ Kahina	MCA	U. de Bouira	Co-Directeur
MERAKEB Abdelkader	Professeur	U.M.M.T.O	Examinateur
AIDER Méziane	Professeur	U.S.T.H.B	Examinateur
BUSVELLE Eric	Professeur	U. de Toulon (France)	Examinateur
MARTHON Philippe	Professeur	I.N.P de Toulouse (France)	Invité

Année universitaire 2022/2023

Cette thèse est dédiée à mes très chers parents, à mon défunt père Ahcène ancien Frigoriste à la Haute Garonne, que le bon Dieu a emporté si jeune, sans même pas voire le fleurissement de ses enfants, à ma chère mère, enseignante de Français de longue date "On récolte ce que l'on sème" ; et enfin, à mes frères, mes soeurs et amis.

Remerciements

Je tiens à remercier grandement mon directeur de thèse le Professeur Mohamed AIDENE, qui avant tout, a formé, encadré, ... plus d'une génération de matheux. Il m'a encadré, conseillé et soutenu tout au long de cette thèse. J'exprime aussi ma gratitude à ma co-directrice Mme Kahina LOUADJ maître de conférence classe A à l'université de Bouira, laquelle a été toujours là, pour m'apprendre, corriger, soutenir, conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse ; je la remercie pour son aide précieuse et son entière disponibilité. Je vous suis redevable et reconnaissant pour les opportunités que vous m'avez offertes à plusieurs reprises dans mon travail de thèse ainsi que la confiance que vous en avez mise en mes capacités et compétences.

Aussi, j'adresse mes plus vifs remerciements aux membres du jury qui me font l'honneur d'accepter d'examiner ma thèse. De plus mes respects et remerciements vont au Professeur Philippe MARTHON de l'Institut national polytechnique de Toulouse, France de m'avoir accueilli au sein du laboratoire IRIT-ENSEEIHT, où j'ai beaucoup bénéficié de ses grandes connaissances, ses commentaires et remarques m'ont été précieuses. Je remercie également mon oncle le Professeur Rabah SADOUN et le Professeur Mohamed TADJINE de polytechnique d'Alger, pour leurs précieux conseils et aussi le Dr Mohamed CHEBBAH de l'UMMTO.

Je remercie le Professeur OUKACHA, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Mes remerciements et ma reconnaissance vont également à mon cher pays l'Algérie de m'avoir formé.

Je remercie toutes les personnes qui m'ont soutenu et encouragé notamment mes parents, mes frères et amis durant ces années de thèse.

Table des matières

Liste de publications et de communications

Publications

[1] A. Aghiles, L. Kahina et A. Mohamed, « An algorithm for solving a min-max problem by adaptive method », International Journal of Mathematics in Operational Research **1**, 1 (2022).

Communication nationale et internationale

[1] A. Azizen, K. Louadj et M. Aidene, « An Algorithm for Solving A MinMax Problem With Bounded Constraints », in 2022 8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), t. 1 (2022), p. 195-199.

[2] A. Aghiles, L. Kahina et A. Mohamed, *Solving Minmax Problem With Bounded Constraints, Using the Adaptive Method*, 1st National Conference on Pure and Applied Mathematics (NC-PAM'2021), Laghouat, Algeria, 2021.

[3] A. Aghiles, L. Kahina et A. Mohamed, *Solving A Minmax Problem With Bounded Constraints, Using the Adaptive Method*, 5éme journée des doctorants, Tizi-Ouzou, Algeria, 2022.

[4] A. Aghiles, L. Kahina et A. Mohamed, *Solving A Minmax Problem, Using Adaptive Method*, 1ére journée des doctorants, Tizi-Ouzou, Algeria, 2021.

Liste des abréviations

resp	respectivement.
tq	tel que.
c.a.d	c'est à dire.
(SR)	Solution réalisable.
(SRS)	Solution réalisable de support.
(sign)	signe.
(MA)	Méthode adaptée.
(PL)	Programmation linéaire.
(MS)	Méthode du support.
(PI)	Points intérieurs.
(SRD)	Solution réalisable dual.
(RO)	Recherche opérationnelle.

Introduction générale

La programmation linéaire (PL) est considérée comme l'une des branches les plus importantes de la recherche opérationnelle (RO), elle a été développée en tant que discipline dans les années 1940 pour résoudre des problèmes complexes de planification en temps de guerre ; elle consiste à optimiser une fonction linéaire soumise à des contraintes d'égalités et d'inégalités linéaires. Actuellement, elle est régulièrement citée par les entreprises, comme étant l'un des modèles mathématiques les plus utilisés en RO, car elle permet d'aborder un grand nombre de problèmes d'optimisation, dans divers domaines d'application, tels que la physique, l'ingénierie et l'économie, ... etc.

En 1947 G.B. Dantzig [1], a introduit un algorithme de résolution pour les problèmes de la PL qui est appelé algorithme du simplexe, bien que cet algorithme est efficace en pratique, cependant Minty et Klee [2], ont démontré pour la première fois que cet algorithme peut prendre un nombre exponentiel d'itérations et cela en donnant un exemple numérique ; cet inconvénient a incité de nombreux auteurs à chercher de trouver d'autres algorithmes de résolution. En 1979, L. Khachian [3], propose le premier algorithme polynomiale (qui est une méthode de points intérieurs) et il est basé sur la méthode l'ellipsoïde, sachant que cette dernière, a déjà été étudiée par Arkadi Nemirovski et David B. Yudin, et dont la version préliminaire a été introduite par Naum Z. Shor ; malheureusement, cette méthode a une faible efficacité. En 1984 N.K Karmakar [4], développe la méthode de points intérieurs (PI) qui est efficace et de complexité polynomiale, ceci a suscité un regain d'intérêt pour les méthodes de PI aussi bien en PL et en programmation non linéaire.

Ainsi, en plus, de la méthode du simplexe et la méthode de PI ([5], [6], [7], ... etc) on trouve d'autres méthodes de résolutions des problèmes de PL, dont on peut citer : la méthode de points intérieurs combinée à la méthode du simplexe [8] ; les méthodes d'activation des contraintes [9], [10], [11] ; la méthode de points extérieurs introduite par Paparrizos dans [12] ; la méthode du support (MS) et la méthode adaptée (MA) mise au point par R. Gabasov et F.M Kirrilova ([13], [14], [15], [16], [17], ...). La MA est une généralisation de la méthode primale du simplexe), cette méthode utilise le concept de la solution réalisable de support (SRS) où la solution réalisable (SR) et le support sont définis indépendamment l'un de l'autre, en plus la SR peut être un point quelconque dans le polyèdre (formés par les contraintes), contrairement à la méthode du simplexe où la SR est un point extrême (sommet) du polyèdre, de plus du critère d'optimalité, il y'a le critère de sub-optimalité (critère $\varepsilon-$optimalité) est donné pour arrêter le processus de résolution à un critère choisi au départ, ce qui nous donne des SR $\varepsilon-$optimales. Par la suite, la MA a été étendué et appliqueé pour la résolution de nombreux problèmes autres que la PL, comme pour : la programmation quadratique convexe [18], [19], [20] et non convexe [21] ; le contrôle optimal [22], [23], [24] ; . . . etc.

Parmi les problèmes de la PL, on trouve les problèmes de min-max qui consistent à trouver le maximum du minimum d'une ou plusieurs fonctions, et qui sont apparues depuis bien longtemps. Le principe du min-max est connu dans le passé, comme l'un des principes de l'estimation optimale des paramètres ([25]), et dans la première procédure d'estimation des paramètres a été proposée par Laplace en 1786 [26]. Plus tard, les problèmes de min-max ont fait l'objet d'un sujet de recherche dans plusieurs domaines d'applications des mathématiques ; ainsi, par leurs utilisations dans divers contextes, ceci a poussé plusieurs chercheurs à s'intéresser à l'étude de ce type de problèmes. On peut citer par exemple, que dans l'ajustement de données, une formulation min-max est utilisée pour trouver une fonction dans une classe donnée qui minimise la valeur de l'erreur absolue maximale, ce problème est appelé dans le passé approximation de Tchebychev et il a été traité dans [25]. Charalambous [27] a aussi utilisé la formulation min-max, dans la conception de filtres numériques récursifs. La méthode min-max sans contrainte a également été utilisée dans le domaine général de la localisation des installations, (comme dans les travaux de Elzinga, Hearn et Randolph [28], Dearing et Francis [29], Francis et White [30] et Kuhn et Kueune [31]). Aussi, Dutta et Vidyasagar [32] ont formulé un modèle de ligne de transmission à trois sections sous la forme d'un problème de min-max à contraintes linéaires. En outre, Schjaer-Jacobson et Madsen ([33], [34]) ont utilisé le problème de min-max dans le domaine général de la théorie des antennes.
Actuellement, la théorie des problèmes min-max est l'une des classes les plus développées de l'optimisation non linéaire, qui est un domaine de recherche très dynamique de nos jours ; car de nombreux problèmes de la vie quotidienne, peuvent être définis comme un problème de min-max, comme par exemple : l'ordonnancement de la production (répartition des règles de sélection), l'optimisation de la consommation d'énergie ([35]), les problèmes de localisation (voir [36] ; Averbakh et Berman [37] ont traité le problème de localisation des vendeurs ambulants, où p voyageurs

de commerce doivent visiter ensemble tous les points d'une ville, et l'objectif est de minimiser au maximum les durées de leurs tournées ; Averbakh et Berman [38] ; Berman et al. 2003 [39] ; Matsutomi et Ishii [40]), la stratégie et la planification des portefeuilles d'investissement (voir Teo et Yang [41] ; Xiaoxia Huang [42], où l'auteur a étudié le problème de sélection du portefeuille flou dans une situation où chaque rendement appartient à une certaine classe de variables floues ; Rustem et al [43] ; Pankov [44], [45]), et ils sont aussi utilisés dans : la programmation multi-objectifs et le contrôle optimal ([46], [47], [48], [49]), ... etc.

Pour les raisons ci-dessus, ces dernières années, le problème de min-max a attiré l'attention de plusieurs chercheurs, pour mettre en place des outils et des modèles de résolutions pour ce type de problèmes, ainsi de nombreux algorithmes, et méthodes numériques ont été développés ; pour les méthodes numériques d'optimisation non linéaire, on peut citer [50], qui contient une description générale des méthodes du gradient, et [51], [52], [53], [54], [52] qui décrit les méthodes de groupage (appelé en anglais : bundle method) ; ces contributions contiennent également une bibliographie exhaustive pour la recherche dans ce domaine.

Ainsi, toutes les méthodes générales d'optimisation non linéaires peuvent être appliquées aux problèmes min-max linéaires. Cependant, l'expérience pratique montre que si le problème à résoudre a une structure particulière, les méthodes exploitant cette structure sont supérieures aux méthodes générales. L'approche traditionnelle pour résoudre le problème de min-max linéaire est de le formuler à un problème équivalent de programmation linéaire et de le résoudre par une structure exploitant des modifications de la méthode primale du simplexe ou duale du simplexe. Cette idée remonte au moins au début des années 60 (voir, par exemple : [55], [56], [57], [58]), et des variantes de cette approche continuent d'être développées (voir : [59], [60], [61], [33], [62], [63], [64], [65] ; dans [33], les auteurs présentent un algorithme basé sur des approximations linéaires successives des fonctions définissant le problème, ainsi les sous-problèmes linéaires résultants sont résolus au sens min-max sous réserve des contraintes linéaires. Dans [66], l'auteur a reformulé le problème à un problème de minimisation de la "pire" combinaison convexe de ces fonctionnelles, ce qui va aboutir à un problème de point de selle. Dans [67], les auteurs ont proposé un algorithme qui combine les méthodes PL et les méthodes quasi-Newton. Dans [68], l'auteur transforme le problème de départ en un programme linéaire en introduisant n contraintes supplémentaires, ainsi ces dernières peuvent être considérées implicitement en les traitant comme des bornes supérieures paramétriques sur la base de cette approche, deux algorithmes seront utilisés : un algorithme paramétrique qui va résoudre un problème de PL avec des bornes supérieures paramétriques et un autre

algorithme primal-dual pour résoudre une séquence de problèmes de PL réalisables duaux connexes. Dans [60], l'auteur a montré que le choix de la méthode primale est meilleur que la méthode duale et cela revient au choix du point de départ. Dans [69], l'auteur a étendu l'algorithme primal-dual de descente développé par Zhu et Rockafellar([70]) pour la programmation linéaire quadratique afin de résoudre des problèmes min-max contraints liés.
Récemment, des travaux de recherches ont été consacrés au développement de nouvelles techniques de résolution, comme dans [71], l'auteur a donné un algorithme d'approximation déterministe en temps polynomial pour un problème de programmation en nombres entiers min-max. Afin d'améliorer ces techniques Wang ([72]), a proposé une technique hybride, qui est une combinaison des méthodes de région de confiance avec les méthodes de recherche de lignes et les méthodes de recherche de courbe, cela permet d'éviter de résoudre les sous-problèmes de région de confiance plusieurs fois.

En effet, l'inconvénient majeur de ces méthodes de résolution est qu'elles transforment le problème initial en un problème linéaire approprié, mais cette transformation entraîne une augmentation du nombre de variables de n à $n+p+1$, et le nombre de contraintes, de m à $m+p$, où p est le nombre de composantes de la fonctionnelle. Cependant, la programmation sur ordinateur, démontre que, plus ces augmentations crûrent, plus le temps d'exécution est élevé et vice-versa.

Pour cela, l'objectif principal de notre travail est de résoudre directement deux classes de problèmes min-max en programmation linéaire en dimension finie (le premier avec des contraintes générales de type égalité et le deuxième avec des contraintes générales bornées supérieurement et inférieurement), sans apporter aucune modification au problème de départ, ce qui nous permet de garder la spécificité du min-max. A cet effet, nous avons étendu le principe de la méthode adaptée qui est issue d'une approche de résolution des problèmes de PL donnée dans [13] et qui est basée sur le concept de la matrice de support du problème. Notre algorithme est similaire à [18], où les auteurs ont traité et donné un algorithme de résolution de problèmes de min-max en PL en utilisant la méthode primale et duale, ainsi pour améliorer cette dernière ils ont utilisé le pas long dual, tandis que notre approche consiste à utiliser le pas court dual.

Notre algorithme, consiste à trouver une solution réalisable de support $\{x, Q_{\mathtt{sup}}\}$, où x est la solution réalisable et $Q_{\mathtt{sup}}$ le support indépendant l'un de l'autre. L'algorithme est constitué de formule de variation de l'accroissement de la fonctionnelle, du critère d'optimalité et de sub-optimalité, ce dernier, nous permet d'arrêter le processus de résolution à un critère donné au départ, ce qui est, différent de la méthode du simplexe. Ensuite, si l'un des deux critères n'est pas satisfait, la recherche d'une autre SRS se fera en deux étapes essentielles qui sont : le changement de la solution réalisable et le changement du support, ce dernier changement se fera en introduisant le problème dual du problème de départ, à noter qu'au cours des itérations du changement de la SR, nous utiliserons l'information provenant du problème dual, ce qui augmente son efficacité. La performance de cet algorithme a été testé sur des exemples numériques et les résultats trouvés ont été comparés avec le logiciel Matlab, en utilisant ses propres fonctions. La suite de ce travail est organisé comme suit : dans le premier chapitre, nous allons résoudre un problème classique de PL avec des contraintes simples. Dans le chapitre 2, nous allons résoudre un problème de programmation linéaire avec des contraintes générales borné supérieurement et inférieurement. Dans le chapitre 3 on va résoudre un problème min-max sans les contraintes générales. Ensuite le chapitre 4 sera consacré à la résolution d'un problème min-max avec des contraintes générales de type égalité, et enfin, on termine avec une conclusion générale.

Chapitre 1

Résolution d'un problème classique de programmation linéaire

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on va résoudre par la méthode adaptée, un problème classique en programmation linéaire avec des contraintes simples.

1.2 Position du problème

Considérons le problème de programmation linéaire, suivant :
maximiser

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

sous les contraintes

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \\ d_{*1} \leq x_1 \leq d_1^*,\ d_{*2} \leq x_2 \leq d_2^*,\ \ldots,\ d_{*n} \leq x_n \leq d_n^*. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Où :

$J = \{1, \ldots, n\}$ est l'ensemble d'indices des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $I = \{1, \ldots, m\}$ est l'ensemble d'indices des paramètres $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Introduisons les vecteurs $x = x(J) = (x_j, j \in J) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, c = c(J), b = b(I), d_* = d_*(J), d^* = d^*(J)$ et la matrice $A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J)$.

Alors le problème (1.1) prend la forme matricielle suivnte :

$$(P1) \quad \begin{cases} F(x) = c'x \to \max_{x}, & (1.2a) \\ \quad Ax = b, & (1.2b) \\ \quad d_* \leq x \leq d^*. & (1.2c) \end{cases}$$

Où :

- (1.2a) est le critère de qualité (but, objectif de la fonctionnelle).
- (1.2b) sont les contraintes essentielles.
- (1.2c) sont les contraintes directes.

On désigne par

$$\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ d_* \leq x \leq d^*\},$$

le domaine des solutions réalisables.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que

$$\text{rang A=m.}$$

1.3 Définitions essentielles

Définition 1.1. Tout vecteur $x \in \mathbf{X}$ est appelé, solution réalisable du problème (1.2).

Une solution réalisable $x^o \in \mathbf{X}$ est dite optimale, si $F(x^o) = \max_{x \in \mathbf{X}} F(x)$.

Une solution réalisable $x^\varepsilon \in \mathbf{X}$ est dite $\varepsilon-$optimal, si $F(x^o) - F(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$, (pour tout réel $\varepsilon > 0$ donné).

Définition 1.2. De l'ensemble J, on choisit un sous-ensemble $J_{\mathtt{sup}} = \{j_1, \ldots, j_m\} \subset J$. $J_{\mathtt{sup}}$ est appelé support du problème (1.2), si la matrice $A_{\mathtt{sup}} = A(I, J_{\mathtt{sup}})$ est inversible.

$A_{\mathtt{sup}}$ est appelé matrice du support. Delà l'ensemble J peut être décomposer : $J = J_{\mathtt{sup}} \cup J_{\mathtt{H}}$ où $J_{\mathtt{H}} = J \setminus J_{\mathtt{sup}}$ est dit ensemble des indices hors support.

En raison du rôle important, que va jouer la matrice inverse du support, nous introduisons la notation :

$$A_{\mathtt{sup}}^{-1} = A(J_{\mathtt{sup}}, I).$$

Les contraintes générales $Ax = b$ (sous forme de composantes), peuvent être exprimées comme suit :

$$A(I, J_{\mathtt{sup}})x_{\mathtt{sup}} + A(I, J_{\mathtt{H}})x_{\mathtt{H}} = b$$

donc, pour satisfaire l'égalité ci-dessus, il suffit de mettre :

$$x_{\text{sup}} = A_{\text{sup}}^{-1}(b - A_{\text{H}}x_{\text{H}}),\ A_{\text{H}} = A(I, J_{\text{H}}). \tag{1.3}$$

Définition 1.3. La paire $\{x, J_{\text{sup}}\}$ formé de la solution réalisable x et du support J_{sup}, est appelé solution réalisable de support (SRS) du problème (1.2).

Définition 1.4. Une solution réalisable de support $\{x, J_{\text{sup}}\}$, est dite non-dégénéré si :

$$d_{*j} < x_j < d_j^*, \qquad j \in J_{\text{sup}}.$$

1.4 Critère d'optimalité

Supposons que la solution réalisable de support $\{x, J_{\text{sup}}\}$ est connue. on va étudier la variation de la fonction objective lorsque la solution réalisable sera modifiée.

1.4.1 Accroissement de la fonctionnelle F

Soit $\{x, J_{\text{sup}}\}$ une solution réalisable de support de départ, et $\overline{x} = x + \Delta x$ une autre solution réalisable. L'accroissement de la fonctionnelle sera :

$$\Delta F(x) = F(\overline{x}) - F(x) = c'\overline{x} - c'x = c'\Delta x \tag{1.4}$$

De l'admissibilité de x et $\overline{x}$, on a :

$$A\Delta x = A(\overline{x} - x) = A\overline{x} - Ax = b - b = 0. \tag{1.5}$$

En décomposant J en $J = J_{\text{sup}} \cup J_{\text{H}}$, on obtient :

$$A_{\text{sup}}\Delta x_{\text{sup}} + A_{\text{H}}\Delta x_{\text{H}} = 0,$$

Delà, on a :

$$\Delta x_{\text{sup}} = -A_{\text{sup}}^{-1}A_{\text{H}}\Delta x_{\text{H}}. \tag{1.6}$$

En substituant le vecteur Δx dans (1.4), on obtient :

$$\Delta F(x) = c'_{\text{sup}}\Delta x_{\text{sup}} + c'_{\text{H}}\Delta x_{\text{H}} = -\left(c'_{\text{sup}}A_{\text{sup}}^{-1}A_{\text{H}} - c'\right)\Delta x_{\text{H}} \tag{1.7}$$

Introduisons les vecteurs suivants :

$$E = (E_j,\ j \in J) = c'_{\text{sup}}A_{\text{sup}}^{-1}A - c'. \tag{1.8}$$

appelé le vecteur des estimations.

$$u(I) = (u_i,\ i \in I) = c'_{\text{sup}}A_{\text{sup}}^{-1}. \tag{1.9}$$

appelé le vecteur des potentiels.

Remarque.

$$E(J_{\text{sup}}) = E_{\text{sup}} = 0.$$

En utilisant (1.8) et (1.9), la formule (1.7) devient :

$$\Delta F(x) = -\sum_{j \in J_{\text{H}}} E_j \Delta x_j \tag{1.10}$$

Le maximum de (1.10) sous les contraintes suivantes :

$$d_{*j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^* - x_j, \; j \in J_{\text{H}}.$$

est égale à :

$$\beta = \beta\left(x, J_{\text{sup}}\right) = \sum_{j \in J_{\text{H}}^+} E_j(x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_{\text{H}}^-} E_j(x_j - d_j^*). \tag{1.11}$$

appelé la valeur de sub-optimalité, où :

$$J_{\text{H}}^+ = \{j \in J_{\text{H}} : \; E_j > 0\} \quad \text{et} \quad J_{\text{H}}^- = \{j \in J_{\text{H}} : \; E_j < 0\}.$$

Delà :
$F\left(\overline{x}\right) - F(x) \leq \beta\left(x, J_{\text{sup}}\right), \; \forall x \in \mathbf{X}$,
donc pour $\overline{x} = x^o$, on aura :

$$F\left(x^o\right) - F(x) \leq \beta\left(x, J_{\text{sup}}\right), \; \forall x \in \mathbf{X}. \tag{1.12}$$

De cette inégalité, on déduit les deux théorèmes suivants :

1.4.2 Critère d'optimalité

Théoreme 1.1. [13][Critère d'optimalité]

Soit $\{x, J_{\text{sup}}\}$ une solution réalisable de support de départ, les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_j = d_{*j} & \text{si} \quad E_j > 0, \\ x_j = d_j^* & \text{si} \quad E_j < 0, \\ d_{*j} \leq \Delta x_j \leq d_j^* & \text{si} \quad E_j = 0, \; j \in J_H. \end{cases} \tag{1.13}$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité de la solution réalisable du support $\{x, J_{\text{sup}}\}$.

Preuve. .

$\Rightarrow$) **Condition suffisante :** Soit $\{x, J_{\text{sup}}\}$ une SRS admissible.
si : $\beta\left(x, J_{\text{sup}}\right) \leq \varepsilon$, alors de (1.12) on a : $F(\overline{x}) - F(x) \leq \beta\left(x, J_{\text{sup}}\right), \; \forall \overline{x}$.
Ce qui donne $F(\overline{x}) - F(x) \leq \varepsilon, \; \forall \; \overline{x}$,
donc x est $\varepsilon-$optimal.

$\Leftarrow$) **Condition nécessaire :** soit $\{x, J_{\text{sup}}\}$ une SRS optimale non-dégénérée et supposons que les relations (1.13) ne soient pas vérifiées, c.a.d

a) $\exists\ j_0 \in J_{\text{H}}$ tel que : $E_{j_0} > 0,\ x_{j_0} > d_{*j_0}$, ou

b) $\exists\ j_0 \in J_{\text{H}}$ tel que : $E_{j_0} < 0,\ x_{j_0} < d^*_{j_0}$.

- **Cas a)** Supposons que $\exists\ j_0 \in J_{\text{H}}\ :\ E_{j_0} < 0,\ x_{j_0} < d^*_{j_0}$.
  Dans ce cas on va construire un nouveau point admissible $\overline{x}$ de la manière suivante :
  $\overline{x} = x + \theta\ell$ où θ est un réel positif non nul et ℓ est un vecteur de direction.
  Nous allons chercher θ et ℓ tq $\overline{x}$ sera une solution réalisable. Alors :
  – sur J_{H}, posons :
  $$\Delta x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \in J_{\text{H}} \setminus j_0, \\ \theta & \text{si} \quad j = j_0. \end{cases}$$
  – sur J_{sup} :
  de la relation (1.6), on a : $\Delta x_{\text{sup}} = -A^{-1}_{\text{sup}} A_{\text{H}} \Delta x_{\text{H}} = -\theta A^{-1}_{\text{sup}} a_{j_0}$,
  $\Rightarrow\ \overline{x}$ vérifie $A\overline{x} = b$.
  Et pour que $\overline{x}$ vérifie $d_* \leq \overline{x} \leq d^*$, il faut prendre un θ suffisamment petit d'autant plus que la SRS $\{x, J_{\text{sup}}\}$ est non dégénérée.
  En remplaçant $\overline{x}$ dans (1.10), on obtient :
  $\Delta F(x) = F(\overline{x}) - F(x) = -\theta E_{j_0} \ell_{j_0} > 0$, ce qui contredit l'optimalité de $\{x, J_{\text{sup}}\}$.
  Donc les relations (1.13) sont vérifiées.
- **Cas b)** Supposons que $\exists\ j_0 \in J_{\text{H}}\ :\ E_{j_0} > 0,\ x_{j_0} > d_{*j_0}$.
  Construisons un nouveau point $\overline{x}$ de la manière suivante :
  $\overline{x} = x + \theta\ell$ où θ est un réel positif non nul et ℓ est un vecteur de direction.
  Nous allons chercher θ et ℓ tq $\overline{x}$ sera une solution réalisable. Alors :
  sur J_{H}, posons :
  $$\Delta x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \in J_{\text{H}} \setminus j_0, \\ -\theta & \text{si} \quad j = j_0. \end{cases}$$
  sur J_{sup} :
  de le relation (1.6) on a : $\Delta x_{\text{sup}} = -A^{-1}_{\text{sup}} A_{\text{H}} \Delta x_{\text{H}} = \theta A^{-1}_{\text{sup}} a_{j_0}$,
  $\Rightarrow\ \overline{x}$ vérifie $A\overline{x} = b$.
  Et pour que $\overline{x}$ vérifie $d_* \leq \overline{x} \leq d^*$, il faut prendre un θ suffisamment petit d'autant plus que la SRS $\{x, J_{\text{sup}}\}$ est non dégénérée.
  En remplacant $\overline{x}$ dans (1.10), on obtient :
  $\Delta F(x) = F(\overline{x}) - F(x) = \theta E_{j_0} \ell_{j_0} > 0$, ce qui contredit l'optimalité de $\{x, J_{\text{sup}}\}$.

Donc les relations (1.13) sont vérifiées.

□

Définition 1.5. La paire $\{x^o, J^o_{\text{sup}}\}$ qui satisfait les relations (1.13) sera appelée solution réalisable de support optimal, c'est à dire x^o est optimale et J^o_{sup} support optimal.

1.4.3 Critère de suboptimalité

Dans les problèmes pratiques, il suffit souvent de déterminer des SR $\varepsilon-$optimaux, c'est ainsi qu'apparaissent les problèmes de détermination des SR $\varepsilon-$optimaux. Le critère de suboptimalité permet de trouver un point réalisable $\varepsilon-$optimal et d'arrêter le processus de résolution, sans effectuer d'autres calculs supplémentaires qui sont nécessaires pour l'obtention d'un résultat avec une précision bien meilleure.

Théoreme 1.2 (Critère de sub-optimalité)**.** Soit $\varepsilon > 0$ donné. Pour l'$\varepsilon-$optimalité de la solution réalisable x, il faut et il suffit qu'il existe un tel support J_{sup}, pour lequel :

$$\beta\left(x, J_{\text{sup}}\right) \leq \varepsilon.$$

Preuve. .

$\Rightarrow$) **Condition suffisante :** Soit $\varepsilon > 0$.
de (1.12), on a : $F(x^o) - F(x) \leq \beta(x, J_{\text{sup}}) \leq \varepsilon$,
alors pour : $\beta(x, J_{\text{sup}}) \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; F(x^o) - F(x) \leq \varepsilon$
d'où x est $\varepsilon - optimal$.

$\Leftarrow$) **Condition nécessaire :** On va décomposer la valeur de suboptimalité (1.11), comme suit :

$$\begin{aligned}
\beta\left(x, J_{\text{sup}}\right) &= \sum_{j\in J_{\text{H}}^{+}} E_j(x_j - d_{*j}) + \sum_{j\in J_{\text{H}}^{-}} E_j(x_j - d_j^{*})\\
&= \sum_{j\in J_{\text{H}}} E_j x_j - \sum_{j\in J_{\text{H}}^{+}} E_j d_{*j} - \sum_{j\in J_{\text{H}}^{-}} E_j d_j^{*}\\
&= (u'A - c')x_j - \sum_{j\in J_{\text{H}}^{+}} E_j d_{*j} - \sum_{j\in J_{\text{H}}^{-}} E_j d_j^{*}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Maintenant, on va construire le problème dual du problème (1.2) qui est le suivant :

$$\begin{cases}
\Phi(\lambda) = b'y - d_*'v + d'^{*}w \to min,\\
A'y - v + w = 0,\\
v, w \geq 0.
\end{cases} \tag{1.15}$$

Ainsi, le problème (1.1) sera appelé le primal du problème (1.15).

Le triplet $\lambda = (y, v, w)$ construit comme suit :

$$\begin{cases} \qquad\qquad y = u; \\ v_j = E_j, \quad w_j = 0, \qquad \text{si} \quad E_j \geq 0; \\ v_j = 0, \quad w_j = -E_j, \quad \text{si} \quad E_j < 0; \quad j \in J. \end{cases} \tag{1.16}$$

et qui vérifie toutes les contraintes du problème (1.15) est appelé solution réalisable duale (SRD) du problème (1.15).

En utilisant cette SRD dans (1.14), on aura :

$$\begin{aligned} \beta\left(x, J_{\text{sup}}\right) &= E'x - d_*'v + d'^*w \\ &= y'Ax - c'x - d_*'v + d'^*w \\ &= b'y - c'x - d_*'v + d'^*w + c'x - c'x^o \\ &= (c'x^o - c'x) + (b'y - d_*'v + d'w - \Phi(\lambda^o)) \\ &= (F(x^o) - F(x)) + (\Phi(\lambda) - \Phi(\lambda^o)) \end{aligned}$$

$$\beta\left(x, J_{\text{sup}}\right) = \beta_{\text{x}} + \beta_{\text{sup}}, \tag{1.17}$$

où :

- $\beta_{\text{x}} = \left(F\left(x^o\right) - F\left(x\right)\right)$ est appelé la mesure de non optimalité de la SR x.
- $\beta_{\text{sup}} = \left(\Phi\left(\lambda\right) - \Phi\left(\lambda^o\right)\right)$ est appelé la mesure de non optimalité du support J_{sup}.

Ainsi, pour un support J_{sup} optimal, on aura :

$\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda^o) \;\; \Rightarrow \;\; \beta\left(x, J_{\text{sup}}\right) = c'x^o - c'x \leq \varepsilon.$

et par conséquent x est $\varepsilon-$optimal.

□

1.5 Algorithme de résolution

1.5.1 Initialisation de la solution réalisable

Pour résoudre le problème (1.2) on choisit un vecteur $x^1 \in \mathbb{R}^n$, qui vérifie les contraintes (1.2c)($d_* \leq x^1 \leq d^*$). Ensuite, on vérifie si x^1 est admissible :

(i). Si $Ax^1 = b$, alors x^1 est une solution initiale réalisable du problème de départ.

(ii). Si $Ax^1 \neq b$, alors on calcule l'écart entre le premier et le second membre noté par $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) : \gamma = b - Ax^1$.

Delà on va reformuler le problème de départ à un autre problème avec des variables artificielles :

$$\begin{cases} F_a(x) = c'x - Me'x_\mu \to \max\limits_{x,x_\mu}, \\ Ax + x_\mu sign\gamma = b, \\ d_* \leq x \leq d^*, \\ x_\mu \geq 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

où :
$x_\mu = (x_{n+1} sign\gamma_1, \ldots, x_{n+m} sign\gamma_m)$ et M est un nombre réel positif suffisamment grand ($M \gg 0$).
De là, $\{x^1, x_\mu\}$ est une SR, le support $J_{\mathtt{sup}} = \{n+1, \ldots, n+m\}$ et $A_{\mathtt{sup}} = \begin{pmatrix} sign\gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & sign\gamma_m \end{pmatrix}$.
Après l'obtention d'une SRS optimale, si ($x_\mu = 0$) alors x est une SR optimale du problème (1.2), dans le cas où ($x_\mu \neq 0$) alors les contraintes du problème (1.2) sont contradictoires.

Dans les deux cas **(i)** et **(ii)** on a une SRS de départ pour commencer le processus de résolution. Supposons que pour cette SRS le critère d'optimalité n'est pas vérifié et que $\beta(x, J_{\mathtt{sup}}) > \varepsilon$, alors on passe à l'itération de l'algorithme, qui est constitué de deux procédures :

(a) Changement de la solution réalisable ($x \to \overline{x}$).

(b) Changement du support $\left(J_{\mathtt{sup}} \to \overline{J}_{\mathtt{sup}}\right)$.

1.5.2 Changement de la solution réalisable

Le changement de la solution réalisable x vers une autre $\overline{x} = x + \theta^o \ell$, aura pour effet d'augmenter le valeur de la fonctionnelle ($F(\overline{x}) \geq F(x)$), où $\ell(J) = (\ell_j, j \in J)$ est le vecteur de direction d'amélioration du point x et $\theta^o \geq 0$ est le pas maximal le long de cette direction.

1.5.2.1 Détermination de la direction ℓ

Sur $J_{\mathtt{H}}$, on choisit $\theta = 1$ et le vecteur $\ell(J)$, est construit comme suit :

$$\ell_j = \begin{cases} d_{*j} - x_j & \text{si} \quad E_j > 0, \\ d_j^* - x_j & \text{si} \quad E_j < 0, \\ 0 & \text{si} \quad E_j = 0, \quad j \in J_{\mathtt{H}}. \end{cases}$$

et de l'admissibilité de $\overline{x}$, on aura :

$$\ell(J_{\texttt{sup}}) = -A_{\texttt{sup}}^{-1} A(I, J_{\texttt{H}}) \ell(J_{\texttt{H}}).$$

1.5.2.2 Détermination du pas maximal admissible

On calcule θ^o tel que $\overline{x}$ satisfera aux contraintes (1.2c) sur $J_{\texttt{sup}}$. Pour cela on aura :

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{*j} - x_j}{\ell_j}, & \text{si} \quad \ell_j < 0; \\ \dfrac{d_j^* - x_j}{\ell_j}, & \text{si} \quad \ell_j > 0; \\ \infty, & \text{si} \quad \ell_j = 0, \ j \in J_{\texttt{sup}}. \end{cases}$$

Delà le pas maximal sera $\theta^o = min\left\{1, \theta_{j_0}\right\}$ où $\theta_{j_0} = \underset{j \in J_{\texttt{sup}}}{min}(\theta_j)$.

Ainsi, on aura $\overline{x} = x + \theta^o \ell$ une solution réalisable du problème (1.2).

1.5.2.3 Calcul de la valeur de sub-optimalité

En remplaçant la solution réalisable $\overline{x}$ trouvée ci-dessus, dans la valeur de sub-optimalité (1.11), on aura :

$$\begin{aligned} \beta\left(\overline{x}, J_{\texttt{sup}}\right) &= \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^+} E_j\left(\overline{x}_j - d_{*j}\right) + \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^-} E_j\left(\overline{x}_j - d_j^*\right) \\ &= \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^+} E_j(x + \theta^o \ell) - \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^+} E_j d_{*j} + \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^-} E_j(x + \theta^o \ell) - \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^-} E_j d_j^* \\ &= \sum_{j \in J} E_j x_j + \theta^o \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^+} E_j \ell_j - \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^+} E_j d_{*j} + \theta^o \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^-} E_j \ell_j - \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^-} E_j d_j^* \\ \beta\left(\overline{x}, J_{\texttt{sup}}\right) &= \left(1 - \theta^o\right) \beta\left(x, J_{\texttt{sup}}\right). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Delà, on déduit que :

- Si $\theta^o = 1$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable optimal.
- Si $\beta\left(\overline{x}, J_{\texttt{sup}}\right) \leq \varepsilon$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable ε-optimal.
- Si $\beta\left(\overline{x}, J_{\texttt{sup}}\right) > \varepsilon$, alors on passe au changement de support.

1.5.3 Changement de support

Nous allons donner deux méthodes différentes de changement de support, la première est le changement de support avec un pas court dual, et la deuxième est avec un pas long dual.

1.5.3.1 Changement de support a pas court

Le changement de support $\left(J_{\text{sup}} \rightarrow \overline{J}_{\text{sup}}\right)$ consiste à faire un changement du co-plan E vers $\overline{E}$, ce qui aura pour effet la diminution de la valeur de la fonction duale et on va avoir : $\beta\left(\overline{x}, \overline{J}_{\text{sup}}\right) \leq \beta\left(\overline{x}, J_{\text{sup}}\right)$.

Pour cela, on pose :
$\overline{E}(J) = E(J) + \sigma^o t(J)$, et $\overline{u}(I) = u(I) + \sigma^o t(I)$ où $t(J) = (t_j, j \in J)$, est la direction de la diminution de la fonction duale et σ^o $(\sigma \geq 0)$ est le pas dual maximal le long de cette direction.

En utilisant les vecteurs des estimations et des potentiels ((1.8) et (1.9)) calculés sur le support J_{sup}, on aura :

$$\overline{E} = \overline{E}$$
$$E(J) + \sigma^o t(J) = \overline{u}.A - c$$
$$(u(I)A - c) + \sigma^o t(J) = \left(u + \sigma^o t(I)\right)'.A - c$$

on obtiendra :

$$t'(J) \quad = \quad t'(I).A(I,J). \tag{1.20}$$

de (1.20), on aura :

$$t'(J_{\text{sup}}) = t'(I).A(I, J_{\text{sup}}). \tag{1.21}$$

d'où :

$$t'(I) = t'(J_{\text{sup}}).A_{\text{sup}}^{-1}.$$

Et de (1.20) et (1.21), on obtient aussi :

$$t'(J_{\text{H}}) = t'(J_{\text{sup}}).A_{\text{sup}}^{-1}A(I, J_{\text{H}}). \tag{1.22}$$

Ainsi, on sait que $\theta^o = \underset{j \in J_{\text{sup}}}{min}\left(1, \theta_{j_0}\right)$, on va chercher un indice j_* qui va entrer dans le nouveau support à la place de j_0 (j_0 va sortir du support).
Pour cela, on pose :

$$t_j = \begin{cases} -\text{sign}(\ell_{j_0}), & \text{si} \quad j = j_0; \\ \quad 0, & \text{si} \quad j \in J_{\text{sup}}. \end{cases}$$

Puis, on calcule les différents pas $\sigma_j, j \in J_{\text{H}}$;

$$\sigma_j = \begin{cases} -\dfrac{E_j}{t_j}, & \text{si} \quad E_j\ t_j < 0; \\ \quad 0, & \text{si} \quad E_j = 0,\ x_j \neq d_{*j},\ t_j > 0 \ \text{ ou} \\ & \qquad E_j = 0,\ x_j \neq d_j^*,\ t_j < 0,\ j \in J_{\text{H}}; \\ \quad \infty, & \qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

et on prend $\sigma^o = \sigma_{j_*} = \underset{j \in J_{\text{H}}}{min}\left(\sigma_j\right)$,

$\surd$ Le calcul de σ^o satisfait $\overline{E}_j E_j \geq 0, \ \forall \ j \in J$.

$\surd$ $\overline{E}_{j_*} = 0$.

Ainsi le nouveau support sera : $\overline{J}_{\texttt{sup}} = (J_{\texttt{sup}} \setminus j_0) \cup j_*$.

On peut facilement vérifier que la quantité $\beta\left(\overline{x}, \overline{J}_{\texttt{sup}}\right)$ est égale à :

$$\beta\left(\overline{x}, \overline{J}_{\texttt{sup}}\right) = \sum_{j \in \overline{J}_{\texttt{H}}^+} \overline{E}_j\left(\overline{x}_j - d_{*j}\right) + \sum_{j \in \overline{J}_{\texttt{H}}^-} \overline{E}_j\left(\overline{x}_j - d_j^*\right)$$

où :

$$\overline{J}_{\texttt{H}}^+ = \left\{j \in J_{\texttt{H}} : \overline{E}_j > 0\right\} \text{ et } \overline{J}_{\texttt{H}}^- = \left\{j \in J_{\texttt{H}} : \overline{E}_j < 0\right\}.$$

Sachant la relation et sur $J_{\texttt{sup}}$

$$\begin{aligned}
\beta\left(\overline{x}, \overline{J}_{\texttt{sup}}\right) = & \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^+} E_j\left(\overline{x}_j - d_{*j}\right) + \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^-} E_j\left(\overline{x}_j - d_j^*\right) + \sigma^o\Bigg[\sum_{j \in J_{\texttt{H}}^+} t_j\left(\overline{x}_j - d_{*j}\right) + \\
& \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^-} t_j\left(\overline{x}_j - d_j^*\right)\Bigg] \\
= & \beta\left(\overline{x}, J_{\texttt{sup}}\right) + \sigma^o\left[\sum_{j \in J_{\texttt{H}}^+} t_j\left(\overline{x}_j - d_{*j}\right) + \sum_{j \in J_{\texttt{H}}^-} t_j\left(\overline{x}_j - d_j^*\right)\right] \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

on sait que par construction des vecteurs (1.21) et (1.22), toutes les composantes de $t'(J_{\texttt{sup}})$ sont nulles sauf pour l'indice j_0. On pose :

$$\begin{aligned}
\alpha = \alpha_0 = & \sum_{j \in \overline{J}_{\texttt{H}}^+} t_j\left(\overline{x}_j - d_{*j}\right) + \sum_{j \in \overline{J}_{\texttt{H}}^-} t_j\left(\overline{x}_j - d_j^*\right) = -(1-\theta^o)\sum_{j \in J} t_j \ell_j \\
= & (1-\theta^o) t_{j_0} \ell_{j_0}.
\end{aligned}$$

donc

$$\alpha = \alpha_0 = (1-\theta^o) t_{j_0} \ell_{j_0} = \begin{cases} x_{j_0} + \ell_{j_0} - d_{*j_0}, & \text{si} \quad t_{j_0} = +1; \\ -(x_{j_0} + \ell_{j_0} - d_{j_0}^*), & \text{si} \quad t_{j_0} = -1. \end{cases}$$

Ainsi en utilisant la relation (1.19) et la valeur de α trouvée ci-dessus dans (1.23), on obtient :

$$\beta\left(\overline{x}, \overline{J}_{\texttt{sup}}\right) = (1-\theta^o)\beta\left(x, J_{\texttt{sup}}\right) - \sigma^o. \mid \alpha_0 \mid.$$

Remarque. L'expression de la vitesse initiale de décroissance de la fonctionnelle Φ (du programme dual du programme initial) est donnée par :

$$\alpha_0 = \lim_{\sigma \to 0} \frac{\Phi(\overline{\lambda}) - \Phi(\lambda)}{\sigma}$$

avec $\overline{\lambda} = \lambda + \sigma\delta\lambda$.

Cette expression montre que la vitesse de décroissance est α_0.

1.5.3.2 Changement de support à pas long

Soit $\lambda = (y, v, w)$ une SRD arbitraire. Dans la suite nous considérerons que les composantes v et w sont définies par le vecteur suivant : $E' = Au' - c$, car sinon la valeur de la fonction duale pourra être diminuée sans modifier u.

$$\begin{cases} v_j = E_j, \quad w_j = 0, & \text{si} \quad E_j \geq 0; \\ v_j = 0, \quad w_j = -E_j, & \text{si} \quad E_j < 0; \quad j \in J. \end{cases}$$

Soit $\lambda(\sigma) = (y(\sigma), v(\sigma), w(\sigma))$ où $u(\sigma) = u + \sigma\Delta u$, $v(\sigma) = v + \sigma\Delta v$ et $w(\sigma) = w + \sigma\Delta w$ avec $(\sigma \geq 0)$ une autre SRD avec $v(\sigma)$ et $w(\sigma)$ à déterminer par le vecteur $E(\sigma)' = Au(\sigma)' - c$; Ainsi, $\sigma\Delta E = E(\sigma) - E = \sigma A\Delta u$. Maintenant on va calculer la valeur de la fonction duale avec la SRD $\lambda(\sigma)$:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda(\sigma)) =& b'y(\sigma) - d'_*v(\sigma) + d'^*w(\sigma) \\ =& b'(u + \sigma\Delta u)d'_*(v + \sigma\Delta v) + d'^*(w + \sigma\Delta w) \\ =& \Phi(\lambda) + \sigma(\Delta y' Ax - d'_*\Delta v + d'^*\Delta w) \\ =& \Phi(\lambda) + \sigma(\Delta E' x - d'_*\Delta v + d'^*\Delta w) \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier l'expression suivante pour $\Phi(\lambda(\sigma))$

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda(\sigma)) =& \Phi(\lambda) + \sigma(\sum_{E_j \leq 0, E_j(\sigma) \leq 0, j \in J} \Delta E_j \left(x_j - d_j^*\right) + \sum_{E_j \geq 0, E_j(\sigma) \geq 0, j \in} \Delta E_j (x_j - d_{*j})) \\ &+ \sum_{E_j \geq 0, E_j(\sigma) < 0, j \in J} \left(E_j(\sigma)(x_j - d_j^*) - E_j(x_j - d_j^*)\right) \\ &+ \sum_{E_j \leq 0, E_j(\sigma) > 0, j \in J} \left(E_j(\sigma)(x_j - d_j^*) - E_j(x_j - d_j^*)\right) \end{aligned}$$

En analysant la formule ci-dessus, on peut remarquer que la fonction duale est linéaire par morceaux le long des directions Δy et ΔE ;

$$\Phi(\lambda(\sigma)) = \Phi(\lambda) + \sigma(\sum_{E_j \leq 0, E_j(\sigma) \leq 0, j \in J} \Delta E_j \left(x_j - d_j^*\right) + \sum_{E_j \geq 0, E_j(\sigma) \geq 0, j \in J} \Delta E_j (x_j - d_{*j})),$$

pour $0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, avec $\sigma_1 = max\{\sigma \ : \ E_j(\sigma)E_j \geq 0, \ j \in J\}$;

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda(\sigma)) =& \Phi(\lambda(\sigma_1 - 0)) + \\ & (\sigma - \sigma_1)(\sum_{E_j \leq 0, E_j(\sigma^1) = 0, j \in J} \Delta E_j \left(x_j - d_j^*\right) + \sum_{E_j \geq 0, E_j(\sigma^1) \leq 0, j \in J} \Delta E_j (x_j - d_{*j})), \end{aligned}$$

pour $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, avec $\sigma_2 = max\{\sigma \geq \sigma_2 \ : \ E_j(\sigma)E_j \geq 0, \ j \in J\}$;

et ainsi de suite.

Donc, le taux initial de la diminution de la fonction duale est égale à :

$$\frac{d\Phi(\lambda(\sigma))}{d\sigma} \mid_{\sigma=+0} = \sum_{E_j \leq 0, E_j(\sigma) \leq 0, j \in J} \Delta E_j \left(x_j - d_j^*\right) + \sum_{E_j \geq 0, E_j(\sigma) \geq 0, j \in J} \Delta E_j (x_j - d_{*j}))$$

et ce taux reçoit des termes non négatifs lorsque la composante $E_j + \sigma \Delta E_j$ change de signe

$$\frac{d\Phi(\lambda(\sigma))}{d\sigma}\Big|_{\sigma=\sigma_*+0} = \frac{d\Phi(\lambda(\sigma))}{d\sigma}\Big|_{\sigma=\sigma_*-0} = \sum_{E_j \leq 0, E_j(\sigma^1)=0, j\in J} \Delta E_j \left(x_j - d_j^*\right) + \sum_{E_j \geq 0, E_j(\sigma^1)=0, j\in J} \Delta E_j \left(x_j - d_{*j}\right)$$

L'idée du changement de support à pas long dual consiste à trouver le pas $\sigma_* \geq 0$ qui minimisera la valeur de la fonction $\Phi(\lambda(\sigma))$.

On va calculer les différents pas par la règle suivante :

$$\sigma_j = \begin{cases} -\dfrac{E_j}{t_j}, & \text{si} \quad E_j\ t_j < 0; \\ 0, & \text{si} \quad E_j = 0,\ x_j \neq d_{*j},\ t_j > 0 \ \text{ ou} \\ & \phantom{\text{si}} \quad E_j = 0,\ x_j \neq d_j^*,\ t_j < 0,\ j \in J_{\mathtt{H}}; \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis, on va ordonner ces pas par ordre croissant :

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_q.$$

On a :

$$\Phi(\lambda) = b'y - d'_*v + d'^*w.$$

On pose : $\overline{\lambda} = \lambda(\sigma) = \lambda + \sigma t$.
D'où :

$$y(\sigma) = y + \sigma t,\ v(\sigma) = v + \sigma t \ \text{ et } \ w(\sigma) = w + \sigma t.$$

Puis on va calculer la quantité $\Phi(\overline{\lambda})$:

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) =& b'y(\sigma) - d'_*v(\sigma) + d^{'*}w(\sigma) \\ =& b'(y + \sigma t(I)) - d'_*(v + \sigma t(J)) + d^{'*}(w + \sigma t(J)) \\ =& b'y - d'_*v + d^{'*}w + \sigma\left(b't(I) - d'_*t(J) + d'^*(J)\right) \\ =& \Phi(\lambda) + \sigma(t'(I)b - t'(J)d_* + t'(J)d^*) \\ =& \Phi(\lambda) + \sigma(t'_{\mathtt{sup}}A^{-1}_{\mathtt{sup}}b + t'_{\mathtt{sup}}(d^* - d_*)_{\mathtt{sup}} + t'_{\mathtt{H}}(d^* - d_*)_{\mathtt{H}}) \\ =& \Phi(\lambda) + \sigma.t'_{\mathtt{sup}}(A^{-1}_{\mathtt{sup}}b + (d^* - d_*)_{\mathtt{sup}} + A^{-1}_{\mathtt{sup}}A_{\mathtt{H}}(d^* - d_*)_{\mathtt{H}}).\end{aligned}$$

Pour chaque $\sigma_i,\ i = \ldots, q$, on va calculer les $\Phi(\lambda)$ qui correspond aux σ_i.
Puis on va ordonner ces $\Phi(\lambda(\sigma_i))$ par ordre croissant :

$$\Phi(\lambda(\sigma_1)), \Phi(\lambda(\sigma_2)), \ldots, \Phi(\lambda(\sigma_q)).$$

L'indice de σ_{q-1} qui correspond à $\Phi(\lambda(\sigma_{q-1}))$, est celui qui réalise le minimum de la fonction $\Phi(\lambda(\sigma))$, et c'est cet indice qui va entrer dans le support, et donc $\sigma_{j_*} = \sigma_{q-1}$ et il est égal à $j_* \in J_{\mathtt{H}}$. et le nouveau support est : $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = (J_{\mathtt{sup}} \setminus j_0) \cup j_*$.

Ces deux procédés de changement de support, que nous avons présentés ci-dessus sont fiables et justes, la différence entre eux est que dans le changement à pas court dual on prend le premier σ_{j_*} qui réalise $\overline{E}_{j_*} = 0$; tandis que dans le changement à pas long dual, on rajoute le calcul de tous les $\Phi(\lambda(\sigma_i))$ et on prend le minimum, ainsi, d'un point de vue calculatoir, le changement de support à pas court s'avère meilleur.

1.6 Convergence de la Méthode adaptée

Définition 1.6. On dit qu'une solution réalisable de support $\{x, J\}$ est très dégénérée si la valeur de la fonctionnelle n'augmente pas pour cette SRS.

Théoreme 1.3. [13] L'algorithme de la méthode adaptée est fini, si à chaque itération on n'obtient pas des solutions réalisables de support très dégénérés.

1.7 Résumé de l'algorithme de résolution

1. Soit $\{x, J_{\texttt{sup}}\}$ une solution réalisable de support de départ.
2. Calculer :
   - $\surd$ $u = c_{\texttt{sup}})A^{-1}_{\texttt{sup}}$.
   - $\surd$ $E = u.A - c$.
   - $\surd$ $\beta\,(x, J_{\texttt{sup}})$,
     - ➤ Si $\beta\,(x, J_{\texttt{sup}}) = 0$, alors $\{x, J_{\texttt{sup}}\}$ est une solution réalisable de support optimal, arrêt du processus.
     - ➤ Si $\beta\,(x, J_{\texttt{sup}}) < \varepsilon$, alors $\{x, J_{\texttt{sup}}\}$ est une solution réalisable de support $\varepsilon-$optimal, arrêt du processus.
     - ➤ Si $\beta\,(x, J_{\texttt{sup}}) > \varepsilon$, aller à 3.
3. **Changement de la solution réalisable**
   - $\surd$ Déterminer le vecteur $\ell(J)$.
   - $\surd$ Déterminer le vecteur $\overline{x}$.
   - $\surd$ Calculer $\beta\,(\overline{x}, J_{\texttt{sup}})$,
     - ➤ Si $\beta\,(\overline{x}, J_{\texttt{sup}}) = 0$, alors $\overline{x}$, est une solution réalisable optimal, arrêt du processus.
     - ➤ Si $\beta\,(\overline{x}, J_{\texttt{sup}}) < \varepsilon$, alors $\overline{x}$, est une solution réalisable $\varepsilon-$optimal, arrêt du processus.
     - ➤ Si $\beta\,(\overline{x}, J_{\texttt{sup}}) > \varepsilon$, aller à 4.
4. **Changement de support**
   - $\surd$ Calculer le vecteur $t(J)$.
   - $\surd$ Calculer $\sigma_{j_*} = \underset{j \in J_{\text{H}}}{min}(\sigma_j)$.
   - $\surd$ le nouveau support sera : $\overline{J}_{\texttt{sup}} = (J_{\texttt{sup}} \setminus j_0) \cup j_*$.
   - $\surd$ Aller à 2. pour faire une nouvelle itération avec la nouvelle solution réalisable de support $\{\overline{x}, \overline{J}_{\texttt{sup}}\}$.

1.8 Exemple numérique

Nous allons résoudre par l'algorithme ci-dessus, le problème (1.2) (pour : $\varepsilon = 0$), en posant :

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix},\ d_* = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$d^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

On choisit un point de départ $(x^1)' = (0, 0, 1, 0)$, vérifiant $d_* \leq x^1 \leq d^*$. Cependant $Ax \neq b$, alors $\exists\ \gamma \in \mathbb{R}^3$ tq : $x' = (x^1, |\gamma|)' = (0, 0, -1, 0, 3, 4, 6)$ est une solution réalisable, et on a $J_{\text{sup}} = \{5, 6, 7\}$ un support.

Nous commençons le processus de résolution, avec $\{x, J_{\text{sup}}\}$ comme SRS de départ. Puis, comme $\beta(x, J_{\text{sup}}) = 59M + 17 > \varepsilon$, nous continuerons le processus de résolution (les tableaux ci-dessous résume les résultats d'une itération, les cellules encadrées représentent les pas θ^o et σ^o et après chaque itération, nous poserons $x = \overline{x},\ J_{\text{sup}} = \overline{J}_{\text{sup}}$).

— **Itération 1 :**

Tableau 1.1

N	x_j	E_j	ℓ_j	θ_j	$\overline{x}_j$	t_j	σ_j
1	0	-7M-1	2	\	$\frac{12}{37}$	2	$\frac{7M+1}{2}$
2	0	-2M+2	5	\	$\frac{30}{37}$	0	∞
3	1	-5M-3	7	\	$\frac{79}{37}$	4	$\frac{5M+3}{4}$
4	0	4	-1	\	$\frac{-6}{37}$	-5	$\boxed{\frac{4}{5}}$
5	3	0	-14	$\frac{3}{14}$	$\frac{27}{37}$	0	\
6	4	0	-8	$\frac{1}{2}$	$\frac{100}{37}$	0	\
7	6	0	-37	$\boxed{\frac{6}{37}}$	0	1	\

$\beta(\overline{x}, J_{\text{sup}}) = \frac{1829M+527}{37} > \varepsilon$, on aura : $\overline{J}_{\text{sup}} = \{5, 6, 4\}$.

— **Itération 2 :**

TABLEAU 1.2

N	x_j	E_j	ℓ_j	θ_j	$\overline{x}_j$	t_j	σ_j
1	$\frac{12}{37}$	-7M+$\frac{3}{5}$	$\frac{62}{37}$	$\backslash$	$\frac{39}{109}$	$\frac{33}{5}$	$\frac{35}{33}M - \frac{1}{11}$
2	$\frac{30}{37}$	-2M+2	$\frac{155}{37}$	$\backslash$	$\frac{195}{218}$	3	$\boxed{\frac{2M-2}{3}}$
3	$\frac{79}{37}$	-5M+$\frac{1}{5}$	$\frac{217}{37}$	$\backslash$	$\frac{491}{218}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{25M-1}{11}$
4	$\frac{-6}{37}$	0	$\frac{992}{185}$	$\frac{285}{248}$	$\frac{-6}{109}$	0	$\backslash$
5	$\frac{27}{37}$	0	$\frac{-6758}{185}$	$\boxed{\frac{135}{6758}}$	0	1	$\backslash$
6	$\frac{100}{37}$	0	$\frac{-2387}{185}$	$\frac{500}{2387}$	$\frac{533}{218}$	0	$\backslash$
7	0	$\frac{4}{5}$	0	$\backslash$	0	$\frac{4}{5}$	∞

$\beta(x, J_{\text{sup}}) = \frac{1829M}{37} + \frac{1953}{185}$, $\beta(\overline{x}, J_{\text{sup}}) = \frac{10561M}{218} + \frac{11277}{1090}$, on aura : $\overline{J}_{\text{sup}} = \{2, 6, 4\}$.

— **Itération 3 :**

TABLEAU 1.3

N	x_j	E_j	ℓ_j	θ_j	$\overline{x}_j$	t_j	σ_j
1	$\frac{39}{109}$	$\frac{-13M-19}{5}$	$\frac{179}{109}$	$\backslash$	$\frac{234}{449}$	$\frac{13}{5}$	$M + \frac{19}{13}$
2	$\frac{195}{218}$	0	$\frac{-25597}{3270}$	$\frac{9465}{25597}$	$\frac{52}{449}$	0	$\backslash$
3	$\frac{491}{218}$	$\frac{-53M-19}{15}$	$\frac{1253}{218}$	$\backslash$	$\frac{1268}{449}$	$\frac{53}{15}$	$\boxed{M + \frac{19}{53}}$
4	$\frac{-6}{109}$	0	$\frac{2864}{545}$	$\frac{825}{716}$	$\frac{210}{449}$	0	$\backslash$
5	0	$\frac{2M-2}{3}$	0	$\backslash$	0	$\frac{1}{3}$	∞
6	$\frac{533}{218}$	0	$\frac{-80371}{3270}$	$\boxed{\frac{7995}{80371}}$	0	1	$\backslash$
7	0	$\frac{8M+4}{15}$	0	$\backslash$	0	$\frac{7}{15}$	∞

$\beta(x, J_{\text{sup}}) = \frac{336699M}{1090} + \frac{44213}{3270}$, $\beta(\overline{x}, J_{\text{sup}}) = \frac{19588M}{449} + \frac{20916}{2245}$, on aura : $\overline{J}_{\text{sup}} = \{2, 3, 4\}$.

— **Itération 4 :**

TABLEAU 1.4

N	x_j	E_j	ℓ_j	θ_j	$\overline{x}_j$	t_j	σ_j
1	$\frac{234}{449}$	$\frac{-152}{53}$	$\frac{664}{449}$	\	$\frac{79}{44}$	$\frac{88}{53}$	$\boxed{\frac{19}{11}}$
2	$\frac{52}{449}$	0	$\frac{-58432}{23797}$	$\boxed{\frac{25175}{29216}}$	-2	1	\
3	$\frac{1268}{449}$	0	$\frac{-25896}{23797}$	$\frac{16801}{6474}$	$\frac{5}{22}$	0	\
4	$\frac{210}{449}$	0	$\frac{-6640}{23797}$	$\frac{34927}{6640}$	$\frac{18}{13}$	0	\
5	0	$M-\frac{29}{53}$	0	\	0	$\frac{14}{53}$	∞
6	0	$M+\frac{19}{53}$	0	\	0	$\frac{-11}{53}$	$\frac{53M+19}{11}$
7	0	$M+\frac{23}{53}$	0	\	0	$\frac{9}{53}$	∞

$\beta\,(x, J_{\texttt{sup}}) = \frac{100928}{23797}$, $\beta\,(\overline{x}, J_{\texttt{sup}}) = \frac{342}{583}$; on aura : $\overline{J}_{\texttt{sup}} = \{1, 3, 4\}$.

— **Itération 5 :**

TABLEAU 1.5

N	x_j	E_j	ℓ_j	θ_j	$\overline{x}_j$	t_j	σ_j
1	$\frac{79}{44}$	0	\	\	\	\	\
2	-2	$\frac{19}{11}$	\	\	\	\	\
3	$\frac{83}{44}$	0	\	\	\	\	\
4	$\frac{5}{22}$	0	\	\	\	\	\
5	0	$M-\frac{1}{11}$	\	\	\	\	\
6	0	M	\	\	\	\	\
7	0	$M+\frac{8}{11}$	\	\	\	\	\

Ainsi, avec cette dernière SRS, on trouvera : $\beta\,(x, J_{\texttt{sup}}) = 0$, et comme : $x'_\mu = (0, 0, 0) \Rightarrow \{x, J_{\texttt{sup}}\}$ est une SRS optimal, avec :
$x^o = (1.79, -2, 1.88, 0.22)'$, $J^o_{\texttt{sup}} = \{1, 3, 4\}$ et $F(x^o) = 10.54$.

1.9 Comparaison avec la fonction linprog de Matlab

1.10 Exemple 1

```
clear all; clc ;
%la fonction objective
F=[-1 2 -3 4];
%La matrice des contraintes essentielles A :
Aeq=[5 3 -1 4
    0 -1 2 1
    2 0 4 -5];
%Le vecteur b
beq=[2 6 10];
%
A=[];
%
b=[];
% Le vecteur d_{*}
lb=[-4 -2 0 -1];
% Le vecteur d^{*}
ub=[2 5 8 6];
% Le code
[X,Z]=linprog(F,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

```
Optimization terminated.

X =

    1.7955
   -2.0000
    1.8864
    0.2273


Z =

  10.5455
```

Chapitre 2

Résolution d'un problème de programmation linéaire avec des contraintes bornées

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va résoudre par la méthode adaptée un problème de programmation linéaire, avec les contraintes essentielles et directes bornées supérieurement et intérieurement.

2.2 Position du problème

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} F(x) = c'x \to \max_{x}, & (2.1a) \\ b_* \leq Ax \leq b^*, & (2.1b) \\ d_* \leq x \leq d^*. & (2.1c) \end{cases}$$

Où :

— $I = \{1, \ldots, m\}$ et $J = \{1, \ldots, n\}$ sont des ensembles d'indices.

— $x = x(J) = (x_j, j \in J)$, $c = c(J)$, $d_* = d_*(J)$ et $d^* = d^*(J)$ sont des n-vecteurs.

— $b_* = b(I) = (b_{*i}, i \in I)$ et $b^* = b(I) = (b_i^*, i \in I)$ sont des m-vecteurs.

— $A \in \mathcal{M}(m, n)$.

On désigne par :

$$\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ b_* \leq Ax \leq b^*, \ d_* \leq x \leq d^*\},$$

le domaine des solutions réalisables.

2.3 Définitions

Définition 2.1. Tout vecteur $x \in \mathbf{X}$ est appelé, solution réalisable du problème (2.1).

Une solution réalisable x^o est dite optimale, si $F(x^o) = \max\limits_{x \in \mathbf{X}} F(x)$.

Une solution réalisable x^ε est dite $\varepsilon-$optimale, si $F(x^o) - F(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Soit a_i, la i^{eme} ligne de la matrice A, $a_i = A(i, J)$. Ainsi, on dénote les ensembles suivant ([13]) : $I_* = I_*(x) = \{i \in I : a'_i x = b_{*i}\}$, $I^* = I^*(x) = \{i \in I : a'_i x = b^*_i\}$.

Des ensembles I et J, on choisit (resp) les sous-ensembles d'indices $I_{\mathtt{sup}} = \{i_1, \ldots, i_m\} \subset I$ et $J_{\mathtt{sup}} = \{j_1, \ldots, j_m\} \subset J$, tel que : $\mid I_{\mathtt{sup}} \mid = \mid J_{\mathtt{sup}} \mid = r \leq m$.

Définition 2.2. L'ensemble $Q_{\mathtt{p}} = \{I_{\mathtt{sup}}, J_{\mathtt{sup}}\}$ est appelé support du problème (2.1), si la matrice $A_{\mathtt{sup}} = A\left(I_{\mathtt{sup}}, J_{\mathtt{sup}}\right)$ est inversible.

$A_{\mathtt{sup}}$ est appelé matrice du support. De là les ensembles I et J peuvent être décomposer :

$J = J_{\mathtt{sup}} \cup J_{\mathtt{H}}$ et $I = I_{\mathtt{sup}} \cup I_{\mathtt{H}}$; où $J_{\mathtt{H}} = J \setminus J_{\mathtt{sup}}$ et $I_{\mathtt{H}} = I \setminus I_{\mathtt{sup}}$ sont dit ensemble des indices hors support.

On introduit la notation suivante :

$$A^{-1}_{\mathtt{sup}} = A(J_{\mathtt{sup}}, I_{\mathtt{sup}}).$$

Définition 2.3. [14] Soient les vecteurs d'écart supérieur et inférieur, suivant :

$$\Psi^* = \Psi^*(x) = b^* - Ax \tag{2.2}$$

$$\Psi_* = \Psi_*(x) = b_* - Ax \tag{2.3}$$

Définition 2.4. La paire $\{x, Q_{\mathtt{p}}\}$ formée de la solution réalisable x et du support $Q_{\mathtt{p}}$, est appelée solution réalisable de support (SRS) du problème (2.1).

Définition 2.5. Une solution réalisable de support $\{x, Q_{\mathtt{p}}\}$ est dite non-dégénérée si :

$$\begin{aligned} b_*(I_{\mathtt{H}}) \; < A(I_{\mathtt{H}}, J)x(J) < \; b^*(I_{\mathtt{H}}), \qquad & I_{\mathtt{H}} = I \setminus I_{\mathtt{sup}}; \\ d_{*j} \; < x_j < \; d^*_j, \qquad & j \in J_{\mathtt{sup}}. \end{aligned}$$

2.4 Critère d'optimalité

Supposons que la solution réalisable de support $\{x, Q_{\mathtt{p}}\}$ est connue. On va étudier la variation de la fonction objectif lorsque la solution réalisable sera modifiée.

2.4.1 Accroissement de la fonctionnelle F

Soit $\{x, Q_{\mathrm{p}}\}$ une solution réalisable de support de départ et $\overline{x} = x + \Delta x$ une autre solution réalisable. L'accroissement de la fonctionnelle sera :

$$\begin{aligned}\Delta F(x) =& F(\overline{x}) - F(x)\\ =& c'\overline{x} - c'x\\ \Delta F(x) =& c'\Delta x,\end{aligned} \tag{2.4}$$

De l'admissibilité de x et $\overline{x}$, on a :

$$b_* \leq A(x + \Delta x) \leq b^*,$$

et en utilisant les formules (2.2) et (2.3), on aura :

$$\Psi_* \leq A\Delta x \leq \Psi^*. \tag{2.5}$$

On pose : $\mathcal{L}(I_{\mathsf{sup}}) = \{\mathcal{L}_i \ , i \in I_{\mathsf{sup}}\}$, tel que :

$$\mathcal{L}(I_{\mathsf{sup}}) = A(I_{\mathsf{sup}}, J)\Delta x(J),$$

et en décomposant J en $J = J_{\mathsf{sup}} \cup J_{\mathtt{H}}$ et I en $I = I_{\mathsf{sup}} \cup I_{\mathtt{H}}$, on obtient :

$$\mathcal{L}(I_{\mathsf{sup}}) = A(I_{\mathsf{sup}}, J_{\mathsf{sup}})\Delta x(J_{\mathsf{sup}}) + A(I_{\mathsf{sup}}, J_{\mathtt{H}})\Delta x(J_{\mathtt{H}}). \tag{2.6}$$

De là, on a :

$$\Delta x_{\mathsf{sup}} = A_{\mathsf{sup}}^{-1}\mathcal{L}(I_{\mathsf{sup}}) - A_{\mathsf{sup}}^{-1}A(I_{\mathsf{sup}}, J_{\mathtt{H}})\Delta x_{\mathtt{H}}. \tag{2.7}$$

En substituant le vecteur Δx dans (2.4), on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta F(x) =& c'_{\mathsf{sup}}\Delta x_{\mathsf{sup}} + c'_{\mathtt{H}}\Delta x_{\mathtt{H}}\\ \Delta F(x) =& -\left(c'_{\mathsf{sup}}A_{\mathsf{sup}}^{-1}A_{\mathtt{H}} - c'\right)\Delta x_{\mathtt{H}} + c'_{\mathsf{sup}}A_{\mathsf{sup}}^{-1}\mathcal{L}(I_{\mathsf{sup}})\end{aligned} \tag{2.8}$$

Introduisons les vecteurs suivants :

$$u(I) = (u_i, \ i \in I) = c'_{\mathsf{sup}}A_{\mathsf{sup}}^{-1}. \tag{2.9}$$

appelé le vecteur des potentiels.

$$E = (E_j, \ j \in J) = u'A(I_{\mathsf{sup}}, J) - c'. \tag{2.10}$$

appelé le vecteur des estimations.

Remarque.

$$E(J_{\mathsf{sup}}) = E_{\mathsf{sup}} = 0.$$

En utilisant (2.10) et (2.9), la formule (2.8) devient :

$$\Delta F(x) = -\sum_{j\in J_{\mathtt{H}}} E_j \Delta x_j + \sum_{i\in I_{sup}} u_i \mathcal{L}_i. \tag{2.11}$$

Le maximum de (2.4), sous les contraintes suivantes :

$$d_{*j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^* - x_j,\ j \in J_{\mathtt{H}};$$
$$\Psi_{*i} \leq \mathcal{L}_i \leq \Psi_i^*,\ i \in I_{\mathtt{sup}}.$$

est égal à :

$$\beta\left(x, Q_{\mathtt{p}}\right) = \sum_{j\in J_{\mathtt{H}}^+} E_j(x_j - d_{*j}) + \sum_{j\in J_{\mathtt{H}}^-} E_j(x_j - d_j^*) + \sum_{i\in I_{sup}^-} u_i\Psi_{*i} + \sum_{i\in I_{sup}^+} u_i\Psi_i^*. \tag{2.12}$$

appelé valeur de sub-optimalité, où :

$J_{\mathtt{H}}^+ = \{j \in J_{\mathtt{H}} :\ E_j > 0\}$, $J_{\mathtt{H}}^- = \{j \in J_{\mathtt{H}} :\ E_j < 0\}$, $I_{\mathtt{sup}}^- = \{i \in I_{\mathtt{sup}} \setminus\ u_i < 0\}$ et $I_{\mathtt{sup}}^+ = \{i \in I_{\mathtt{sup}} \setminus\ u_i > 0\}$.

De là :

$F\left(\overline{x}\right) - F(x) \leq \beta\left(x, Q_{\mathtt{p}}\right),\ \forall x \in \mathbf{X},$
donc pour $\overline{x} = x^o$, on aura :

$$F\left(x^o\right) - F(x) \leq \beta\left(x, Q_{\mathtt{p}}\right),\ \forall x \in \mathbf{X}. \tag{2.13}$$

De cette inégalité, on déduit les deux théorèmes suivants :

Théoreme 2.1. [13][Critère d'optimalité]

Soit $\{x, Q_{\mathtt{p}}\}$ une solution réalisable de support de départ, les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_j = d_{*j} & \text{si} \quad E_j > 0, \\ x_j = d_j^* & \text{si} \quad E_j < 0, \\ d_{*j} \leq x_j \leq d_j^* & \text{si} \quad E_j = 0,\ j \in J_{\mathtt{H}}; \\ \Psi_{*i} = 0 & \text{si} \quad u_i < 0\ , \\ \Psi_i^* = 0 & \text{si} \quad u_i > 0\ , \quad i \in I_{\mathtt{sup}}. \end{cases} \tag{2.14}$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité de la solution réalisable de support $\{x, Q_{\mathtt{p}}\}$.

Preuve. La démonstration de ce théorème est similaire à celle du **Théorème 1.1.** □

Définition 2.6. La paire $\left\{x^o, Q_{\mathtt{p}}^o\right\}$ qui satisfait les relations (2.14), sera appelée solution réalisable de support optimal, c'est à dire x^o est optimale et $Q_{\mathtt{p}}^o$ support optimal.

2.4.2 Critère de sub-optimalité

Théoreme 2.2 (Critère de sub-optimalité)**.** Soit $\varepsilon \geq 0$ donné. Pour l'$\varepsilon-$optimalité de la solution réalisable x, il faut et il suffit qu'il existe un tel support Q_{p}, pour lequel :

$$\beta\left(x, Q_{\mathrm{p}}\right) \leq \varepsilon.$$

Preuve. .

$\Rightarrow$) **Condition suffisante :** Soit $\varepsilon > 0$.

de (2.13), on a : $F(x^o) - F(x) \leq \beta(x, Q_{\mathrm{p}}) \leq \varepsilon$,

alors pour : $\beta(x, Q_{\mathrm{p}}) \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; F(x^o) - F(x) \leq \varepsilon$

d'où x est $\varepsilon - optimal$.

$\Leftarrow$) **Condition nécessaire :** On va décomposer la valeur de suboptimalité (2.12), comme suit :

$$\begin{aligned}
\beta\left(x, Q_{\mathrm{p}}\right) = \sum_{j \in J_H^+} E_j\left(x_j - d_{*j}\right) + \sum_{j \in J_H^-} E_j\left(x_j - d_j^*\right) + \sum_{i \in I_{sup}^-} u_i \Psi_{*i} + \\
\sum_{i \in I_{sup}^+} u_i \Psi_i^* \\
= \sum_{j \in J_H} E_j x_j - \sum_{j \in J_H^+} E_j d_{*j} - \sum_{j \in J_H^-} E_j d_j^* + \sum_{i \in I_{sup}^-} u_i \Psi_{*i} + \\
\sum_{i \in I_{sup}^+} u_i \Psi_i^*,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Maintenant, on va construire le problème dual du problème (2.2) qui est le suivant :

$$\begin{cases}
\Phi(X) = \lambda'\alpha + b's - b_*'t - d_*'v + d'^*w \rightarrow min, \\
y'(I).A(I, J) - v'(J) + w'(J) = 0, \\
s - t = y, \\
s, t, v, w \in \mathbb{R}_+^n, \; y \in \mathbb{R}^m.
\end{cases} \tag{2.16}$$

Ainsi, le problème (2.1) sera appelé le primal du problème (2.16).

L'ensemble $X = (y, s, t, v, w)$, construit comme suit :

$$\begin{cases}
y'(I_{\mathrm{sup}}) = c'_{\mathrm{sup}} A_{\mathrm{sup}}^{-1}, \; y(I_{\mathrm{H}}) = 0; \\
v_j = E_j, \; w_j = 0, \;\text{ si }\; E_j \geq 0; \\
v_j = 0, \; w_j = -E_j, \;\text{ si }\; E_j < 0; \; j \in J; \\
s_i = y_i, \; t_i = 0, \;\text{ si }\; y_i \geq 0\;; \\
s_i = 0, \; t_i = -y_i, \;\text{ si }\; y_i < 0, \; i \in I.
\end{cases} \tag{2.17}$$

et qui vérifie toutes les contraintes du problème (2.16), est appelé solution réalisable duale (SRD) du problème (2.16).

En utilisant cette SRD, nous allons faire une décomposition de la valeur de sub-optimalité. De (2.15), on a :

$$\begin{aligned}
\beta\left(x, Q_{\mathtt{p}}\right) = & \sum_{j \in J_H^+} E_j\left(x_j - d_{*j}\right) + \sum_{j \in J_H^-} E_j\left(x_j - d_j^*\right) + \sum_{i \in I_{sup}^-} u_i \Psi_{*i} + \\
& \sum_{i \in I_{sup}^+} u_i \Psi_i^* \\
& = \sum_{j \in J_H} E_j x_j - \sum_{j \in J_H^+} E_j d_{*j} - \sum_{j \in J_H^-} E_j d_j^* + \sum_{i \in I_{sup}^-} u_i \Psi_{*i} + \\
& \sum_{i \in I_{sup}^+} u_i \Psi_i^*,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

En utilisant les relations (2.17), on aura :

$$\sum_{j \in J_H^+} E_j d_{*j} = d_*' v$$

$$\sum_{j \in J_H^-} E_j d_j^* = d'^* w$$

d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
u(I_{\mathtt{sup}})A(I_{\mathtt{sup}}, J)x(J) &= \underset{u_i<0}{u_i}\left(b_{*i} - \Psi_{*i}\right) + \underset{u_i>0}{u_i}\left(b_i^* - \Psi_i^*\right) \\
&= \underset{u_i>0}{u_i}\, b_i^* - \underset{u_i>0}{u_i}\, \Psi_i^* + \underset{u_i<0}{u_i}\, b_{*i} - \underset{u_i<0}{u_i}\, \Psi_{*i} \\
u(I_{\mathtt{sup}})A(I_{\mathtt{sup}}, J)x(J) &= b_i'^* s - \sum_{i \in I_{\mathtt{sup}}^+} u_i \Psi_i^* - b_{*i}' t - \sum_{i ß I_{\mathtt{sup}}^-} u_i \Psi_{*i}.
\end{aligned}$$

En remplaçant toutes ces valeurs trouvées ci-dessus dans (2.18), on obtient :

$$\begin{aligned}
\beta\left(x, Q_{\mathtt{p}}\right) = & \sum_{j \in J_H} E_j x_j - d_*' v + d^{\mathrm{T}*} w - \sum_{j \in J_H} E_j x_j + b_i'^* s - b_{*i}' t - \sum_{i \in I_{sup}^+} u_i \Psi_i^* - \\
& \sum_{i \in I_{sup}^-} u_i \Psi_{*i} - F(x) + \sum_{i \in I_{sup}^+} u_i \Psi_i^* + \sum_{i \in I_{sup}^-} u_i \Psi_{*i} + F(x^o) - \\
& \Phi(X^o) \\
= & F(x^o) - F(x) + \left(b'^* s - b_*' t - d_*' v + d'^* w - \Phi(X^o)\right) \\
\beta\left(x, Q_{\mathtt{p}}\right) = & F\left(x^o\right) - F\left(x\right) + \Phi\left(X\right) - \Phi\left(X^o\right).
\end{aligned}$$

d'où :

$$\beta\left(x, Q_{\mathtt{p}}\right) = \beta_x + \beta_{\mathtt{p}} \tag{2.19}$$

où :

- $\beta_x = F(x^o) - F(x)$, est appelé la mesure de non-optimalité de la solution réalisable x.
- $\beta_{\mathtt{p}} = \Phi(X) - \Phi(X^o)$, est appelé la mesure de non-optimalité du support $Q_{\mathtt{p}}$.

Ainsi, pour un support $Q_{\mathtt{p}}$ optimal, on aura :

$\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda^o) \;\Rightarrow\; \beta(x, Q_{\mathtt{p}}) = c'x^o - c'x \leq \varepsilon.$

et par conséquent x est $\varepsilon-$optimal.

$\square$

2.5 Algorithme de résolution

2.5.1 Initialisation de la solution réalisable

Pour résoudre le problème (2.1) on choisit un vecteur $x^1 \in \mathbb{R}^n$, qui vérifie les contraintes (2.1c)($d_* \leq x^1 \leq d^*$). Ensuite, on vérifie si x^1 est admissible :

(i). Si $b_* \leq Ax^1 \leq b^*$, alors x^1 est une solution initiale réalisable du problème de départ.

(ii). Sinon, on utilisera la méthode des deux phases ([13]), ainsi, on construit le problème de la première phase qui est :

$$\begin{cases} -e'(s_* + s^*) \to \max\limits_{x, s_*, s^*}, \\ b_* \leq Ax + s_* + s^* \leq b^*, \\ c_{k_0}^{\mathrm{T}} x^1 - \gamma_* \leq c_{k_0}^{\mathrm{T}} x \leq c_k^{\mathrm{T}} x^1 + \gamma^*, \\ d_* \leq x \leq d^*, \\ 0 \leq s_* \leq \max\{0, \Psi_*^1\}, \\ 0 \leq s^* \leq \max\{0, -\Psi^{*1}\}. \end{cases} \tag{2.20}$$

où : $\Psi_*^1 = b_* - Ax^1$, $\Psi^{*1} = b^* - Ax^1$, et $\gamma_*, \gamma^* \geq 0$ sont les paramètres de la première phase, caractérisant l'information sur la valeur optimale de la fonctionnelle du problème (2.1).

On résout le problème (2.20) en prenant $\{(x^1, s_*^1, s^{*1}), Q_{\mathtt{p}}\}$ comme SRS de départ où : $\begin{cases} s_{*i}^1 = \Psi_{*i}^1,\ s_i^{*1} = 0 & \text{si} \quad \Psi_{*i}^1 \geq 0; \\ s_{*i}^1 = 0,\ s_i^{*1} = -\Psi_i^{*1} & \text{si} \quad \Psi_i^{*1} \leq 0. \end{cases}$

Ainsi si (x^*, s_*^*, s^{**}) est une SR optimale du problème (2.20), avec $s_*^* = 0$ et

$s^{**} = 0$, on prend x^* comme SR de départ et on construit le support $Q_{\mathtt{p}}$ correspondant de la même façon que dans le premier cas.

Si $s_*^* \neq 0$ et $s^{**} \neq 0$, alors les contraintes du problème (2.1) sont contradictoires.

Dans les deux cas **(i.)** et **(ii.)**, on a une SRS de départ, pour démarrer le processus de résolution. Supposons que, pour cette SRS $\{x, Q_{\mathtt{p}}\}$ le critère d'optimalité n'est pas vérifié et que $\beta(x, Q_{\mathtt{p}}) > \varepsilon$, on va chercher une autre SRS $\{\overline{x}, \overline{Q}_{\mathtt{p}}\}$, en procédant par les deux étapes suivantes :

(a). Changement de la solution réalisable $(x \to \overline{x})$.

(b). Changement de support $(Q_{\mathtt{p}} \to \overline{Q}_{\mathtt{p}})$.

2.5.2 Changement de la solution réalisable

Le changement de la solution réalisable x vers une autre $\overline{x} = x + \theta^o \ell$, aura pour effet d'augmenter la valeur de la fonctionnelle $(F(\overline{x}) \geq F(x))$, où : $\ell(J) = (\ell_j, j \in J)$ est le vecteur de direction d'amélioration du point x et $\theta^o \geq 0$ est le pas maximal le long de cette direction.

2.5.2.1 Détermination de la direction ℓ

Sur $J_{\mathtt{H}}$, on choisit $\theta = 1$ et le vecteur $\ell(J)$, est construit comme suit :

$$\ell_j = \begin{cases} d_{*j} - x_j, & \text{si} \quad E_j > 0 \ ; \\ d_j^* - x_j, & \text{si} \quad E_j < 0 \ ; \\ 0, & \text{si} \quad E_j = 0, \quad j \in J_{\mathtt{H}}. \end{cases}$$

et de l'admissibilité de $\overline{x}$, on aura :

$$\ell(J_{\mathtt{sup}}) = A_{\mathtt{sup}}^{-1} \Psi(I_{\mathtt{sup}}) - A_{\mathtt{sup}}^{-1} A(I_{\mathtt{sup}}, J_{\mathtt{H}}) \ell(J_{\mathtt{H}}).$$

où :

$$\Psi(I_{\mathtt{sup}}) = \{\Psi_i, i \in I_{\mathtt{sup}}\} \text{ avec : } \Psi_i = \begin{cases} \Psi_{*i}, & \text{si} \quad u_i < 0; \\ \Psi_i^*, & \text{si} \quad u_i > 0; \\ 0, & \text{si} \quad u_i = 0, \ i \in I_{\mathtt{sup}}. \end{cases}$$

2.5.2.2 Détermination du pas maximal admissible

On calcule θ^o tel que $\overline{x}$ satisfera aux contraintes (2.1c) sur $J_{\mathtt{sup}}$ et (2.1b) sur $I_{\mathtt{H}}$. Pour cela on aura :

- Sur $J_{\texttt{sup}}$:

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{*j} - x_j}{\ell_j}, & \text{si} \quad \ell_j < 0; \\ \dfrac{d_j^* - x_j}{\ell_j}, & \text{si} \quad \ell_j > 0; \\ \infty, & \text{si} \quad \ell_j = 0, \; j \in J_{\texttt{sup}}. \end{cases}$$

- Sur $I_{\texttt{H}}$:

$$\theta_i = \begin{cases} \dfrac{b_{*i} - a_i' x}{a_i' \ell}, & \text{si} \quad a_i' \ell < 0; \\ \dfrac{b_i^* - a_i' x}{a_i' \ell}, & \text{si} \quad a_i' \ell > 0; \\ \infty, & \text{si} \quad a_i' \ell = 0, \; i \in I_{\texttt{H}}. \end{cases}$$

Delà le pas maximal sera $\theta^o = min\left\{1, \theta_{i_0}, \theta_{j_0}\right\}$ où $\theta_{i_0} = \underset{i \in I_{\texttt{H}}}{min}(\theta_i)$ et $\theta_{j_0} = \underset{j \in J_{\texttt{sup}}}{min}(\theta_j)$.

Ainsi, on aura $\overline{x} = x + \theta^o \ell$ une solution réalisable du problème (2.1).

2.5.2.3 Calcul de la valeur de sub-optimalité

En utilisant la solution réalisable $\overline{x}$ trouvée ci-dessus dans (2.12), on obtiendra :

$$\beta\left(\overline{x}, Q_{\texttt{p}}\right) = \sum_{j \in J_H^+} E_j\left(\overline{x}_j - d_{*j}\right) + \sum_{j \in J_H^-} E_j\left(\overline{x}_j - d_j^*\right) + \sum_{i \in I_{sup}^-} u_i \overline{\Psi}_{*i} + \sum_{i \in I_{sup}^+} u_i \overline{\Psi}_i^*, \tag{2.21}$$

On va décomposer cette dernière équation (2.21) comme suit :

- Pour $j \in J_{\texttt{H}}^+$ et $j \in J_{\texttt{H}}^-$, on aura :

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in J_H^+} E_j(\overline{x}_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(\overline{x}_j - d_j^*) = \\ = & \sum_{j \in J} E_j x_j + \theta^o \sum_{j \in J} E_j \ell_j - \sum_{j \in J_H^+} E_j d_{*j} - \sum_{j \in J_H^-} E_j d_j^* \\ = & \sum_{j \in J_H^+} E_j\left(x_j - d_{*j}\right) + \sum_{j \in J_H^-} E_j\left(x_j - d_j^*\right) + \theta^o\Bigg[-\sum_{j \in J_H^+} E_j(d_{*j} - x_j) - \\ & \sum_{j \in J_H^-} E_j(d_j^* - x_j)\Bigg] \\ = & (1 - \theta^o)\Bigg[\sum_{j \in J_H^+} E_j(x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(x_j - d_j^*)\Bigg]. \end{aligned}$$

- Pour $i \in I^+_{sup}$, de (2.2), on a :

$$\overline{\Psi}^*_i = b^* - A\overline{x} \quad \Rightarrow \quad \overline{\Psi}^*_i = \Psi^*_i - \theta^o A\ell,$$

ainsi :

$$\sum_{i \in I^+_{sup}} u_i \overline{\Psi}^*_i = \sum_{i \in I^+_{sup}} u_i \Psi^*_i - \theta^o \sum_{i \in I^+_{sup}} u_i A\ell,$$

et comme on a :

$$A\ell = A_{\mathtt{sup}}\ell(J_{\mathtt{sup}}) + A(I_{\mathtt{sup}}, J_{\mathtt{H}})\ell(J_{\mathtt{H}})$$
$$A\ell = A_{\mathtt{sup}}\left[A^{-1}_{\mathtt{sup}}\Psi^*_i - A^{-1}_{\mathtt{sup}}A\ell(J_{\mathtt{H}})\right] + A(I_{\mathtt{sup}}, J_{\mathtt{H}})\ell(J_{\mathtt{H}})$$
$$A\ell = \Psi^*_i.$$

de là, on aura :

$$\sum_{i \in I^+_{sup}} u_i \overline{\Psi}^*_i = (1 - \theta^o) \sum_{i \in I^+_{sup}} u_i \Psi^*_i.$$

- Pour le cas $i \in I^-_{\mathtt{sup}}$, il est similaire à $i \in I^+_{sup}$, et on aura :

$$\sum_{i \in I^-_{sup}} u_i \overline{\Psi}_{*i} = (1 - \theta^o) \sum_{i \in I^-_{sup}} u_i \Psi_{*i}.$$

En remplaçant toutes ces valeurs trouvées ci-dessus dans (2.21), on obtient :

$$\begin{aligned}\beta\left(\overline{x}, Q_{\mathtt{p}}\right) =& (1 - \theta^o)\left[\sum_{j \in J^+_H} E_j(x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J^-_H} E_j(x_j - d^*_j)\right] + (1 - \theta^o) \sum_{i \in I^+_{sup}} u_i \Psi^*_i + \\ & (1 - \theta^o) \sum_{i \in I^-_{sup}} u_i \Psi_{*i} \\ \beta\left(\overline{x}, Q_{\mathtt{p}}\right) =& (1 - \theta^o)\, \beta\left(x, Q_{\mathtt{p}}\right). \end{aligned} \tag{2.22}$$

de là :

- ➤ Si $\theta^o = 1$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable optimale.
- ➤ Si $\beta\left(\overline{x}, Q_{\mathtt{p}}\right) \leq \varepsilon$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable ε-optimale.
- ➤ Si $\beta\left(\overline{x}, Q_{\mathtt{p}}\right) > \varepsilon$, on passe au changement de support.

  On aura :

$$\beta\left(\overline{x}, Q_{\mathtt{p}}\right) \leq \beta\left(x, Q_{\mathtt{p}}\right).$$

2.5.3 Changement de support.

Le changement de support $\left(Q_{\mathtt{p}} \to \overline{Q}_{\mathtt{p}}\right)$ consiste à faire un changement du coplan E vers $\overline{E}$, ce qui aura pour effet la diminution de la valeur de la fonction duale et on va avoir : $\beta\left(\overline{x}, \overline{Q}_{\mathtt{p}}\right) \leq \beta\left(\overline{x}, Q_{\mathtt{p}}\right)$.

Pour cela, on pose :
$\overline{E}(J) = E(J) + \sigma^o t(J)$, et $\overline{u}(I) = u(I) + \sigma^o t(I)$ où $t(I) = (t_i, i \in I)$, $t(J) = (t_j, j \in J)$ sont les directions de la diminution de la fonction duale et σ^o $(\sigma \geq 0)$ est le pas dual maximal le long de cette direction.

En utilisant les vecteurs des estimations et des potentiels ((2.10) et (2.9)) calculé sur le support $Q_{\mathtt{p}}$, on aura :

$$\overline{E} = \overline{E}$$
$$E(J) + \sigma^o t(J) = \overline{u}.A - c$$
$$(u(I)A - c) + \sigma^o t(J) = \left(u + \sigma^o t(I)\right)'.A - c$$

on obtiendra :

$$t'(J) \quad = \quad t'(I)A(I, J). \tag{2.23}$$

de (2.23), on a :

$$t'(J_{\mathtt{sup}}) = t'(I_{\mathtt{sup}})A_{\mathtt{sup}} + t'(I_{\mathtt{H}})A(I_{\mathtt{H}}, J_{\mathtt{sup}}) \tag{2.24}$$

d'où :

$$t'(I_{\mathtt{sup}}) = t'(J_{\mathtt{sup}})A^{-1}_{\mathtt{sup}} - t'(I_{\mathtt{H}})A(I_{\mathtt{H}}, J_{\mathtt{sup}})A^{-1}_{\mathtt{sup}} \tag{2.25}$$

Et de (2.23) et en utilisant les relations (1.23), (2.25) on obtient aussi :

$$t'(J_{\mathtt{H}}) = t'(J_{\mathtt{sup}})A^{-1}_{\mathtt{sup}}A(I_{\mathtt{sup}}, J_{\mathtt{H}}) + t'(I_{\mathtt{H}})\Big[A(I_{\mathtt{H}}, J_{\mathtt{H}}) - A(I_H, J_{\mathtt{sup}})A^{-1}_{\mathtt{sup}}A(I_{\mathtt{sup}}, J_{\mathtt{H}})\Big]. \tag{2.26}$$

Ainsi, on sait que $\theta^o = min\left\{1, \theta_{i_0}, \theta_{j_0}\right\}$ (où : $\theta_{i_0} = \underset{i \in I_{\mathtt{H}}}{min}(\theta_i)$ et $\theta_{j_0} = \underset{j \in J_{\mathtt{sup}}}{min}(\theta_j)$), on va chercher un indice (i_* ou j_*) qui va entrer dans le nouveau support à la place de i_0 ou j_0 (i_0 ou j_0 va sortir du support).
Pour cela, on pose :

$$t_j = \begin{cases} -\text{sign}(\ell_{j_0}), & \text{si} \quad j = j_0; \\ 0, & \text{si} \quad j \in J_{\mathtt{f}}. \end{cases} \quad \text{et} \quad t_i = \begin{cases} -\text{sign}(a'_{i_0}\ell), & \text{si} \quad i = i_0; \\ 0, & \text{si} \quad i \in I_{\mathtt{sup}}. \end{cases}$$

Puis, on calcule les différents pas σ_{i_*}, $i \in I_{\mathtt{sup}}$ et σ_j, $j \in J_{\mathtt{H}}$;

- $\sigma_{i_*} = \min\limits_{i \in I_{\mathtt{H}}}(\sigma_i)$, où

$$\sigma_i = \begin{cases} -\dfrac{u_i}{t_i} & \text{si} \quad u_i t_i < 0. \\ 0 & \text{si} \quad u_i = 0,\ t_i > 0,\ i \in I^* \quad \text{ou} \\ & \quad\;\; u_i = 0,\ t_i < 0,\ i \in I_*,\ i \in I_{\mathtt{sup}}; \\ \infty & \quad\;\; \text{sinon.} \end{cases}$$

- $\sigma_{j_*} = \min\limits_{j \in J_{\mathtt{H}}}(\sigma_j)$, où

$$\sigma_j = \begin{cases} -\dfrac{E_j}{t_j}, & \text{si} \quad E_j t_j < 0; \\ 0, & \text{si} \quad E_j = 0,\ x_j \neq d_{*j},\ t_j > 0 \ \text{ ou} \\ & \quad\;\; E_j = 0,\ x_j \neq d_j^*,\ t_j < 0,\ j \in J_{\mathtt{H}}; \\ \infty, & \quad\;\; \text{sinon.} \end{cases}$$

et on prend $\sigma^o = \min\left\{\sigma_{i_*}, \sigma_{j_*}\right\}$.

Ainsi le nouveau support sera :

1. **Cas où :** $\theta^o = \theta_{i_0}$,

   On pose :

$$t'(I_{\mathtt{H}} \setminus i_0) = 0, \text{ avec : } \begin{cases} t_{i_0} = +1 & \text{si } a'_{i_0}\overline{x} = b^*_{i_0}, \\ & \text{ou} \\ t_{i_0} = -1 & \text{si } a'_{i_0}\overline{x} = b_{*i_0}, \end{cases} ;\ t'(J_{\mathtt{sup}}) = 0.$$

   a). si : $\sigma^o = \sigma_{i_*}$, **alors :**

   $\overline{I}_{\mathtt{sup}} = (I_{\mathtt{sup}} \setminus i_*) \cup i_0$ et $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}}$.

   b). si : $\sigma^o = \sigma_{j_*}$, **alors :**

   $\overline{I}_{\mathtt{sup}} = I_{\mathtt{sup}} \cup i_0$, $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}} \cup j_*$.

2. **Cas où :** $\theta^o = \theta_{j_0}$,

   on pose :

$$t'(I_{\mathtt{H}}) = 0, \text{ et } t'\left(J_{\mathtt{sup}} \setminus j_0\right) = 0, \text{ avec : } \begin{cases} t_{j_0} = +1 & \text{si } \overline{x}_{j_0} = d_{*j_0}, \\ & \text{ou} \\ t_{j_0} = -1 & \text{si } \overline{x}_{j_0} = d^*_{j_0}. \end{cases}$$

   a). si : $\sigma^o = \sigma_{j_*}$, **alors :**

   $\overline{I}_{\mathtt{sup}} = I_{\mathtt{sup}}$, $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = (J_{\mathtt{sup}} \setminus j_0) \cup j_*$.

   b). si : $\sigma^o = \sigma_{i_*}$, **alors :**

   $\overline{I}_{\mathtt{sup}} = I_{\mathtt{sup}} \setminus i_*$, $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}} \setminus j_0$.

On aura :

$$\beta\left(\overline{x}, \overline{Q}_{\mathtt{p}}\right) \leq \beta\left(\overline{x}, Q_{\mathtt{p}}\right).$$

Théoreme 2.3. [13] L'algorithme de la méthode adaptée est fini, si à chaque itération on obtient pas des solutions réalisables de support très dégénérés.

2.6 Résumé de l'algorithme de résolution

1. Soit $\{x, Q_{\mathtt{p}}\}$ une solution réalisable de support de départ.
2. Calculer $\beta\,(x, Q_{\mathtt{p}})$
   - ➤ Si $\beta\,(x, Q_{\mathtt{p}}) = 0$, alors $\{x, Q_{\mathtt{p}}\}$ est une SRS optimale.
   - ➤ Si $\beta\,(x, Q_{\mathtt{p}}) < \varepsilon$, alors $\{x, Q_{\mathtt{p}}\}$ est une SRS ε-optimale.
   - ➤ Si $\beta\,(x, Q_{\mathtt{p}}) > \varepsilon$, alors continuer le processus.
3. Calculer ;
   - le vecteur $\ell(J)$.
   - $\theta^o = min\{1; \theta_{i_0}; \theta_{j_0}\}$.
   - calculer $\overline{x}$,
     - ➤ Si $\beta\,(\overline{x}, Q_{\mathtt{p}}) = 0$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable optimale.
     - ➤ Si $\beta\,(\overline{x}, Q_{\mathtt{p}}) < \varepsilon$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable ε-optimale.
     - ➤ Si $\beta\,(\overline{x}, Q_{\mathtt{p}}) > \varepsilon$, alors continuer le processus.
4. Si :
   - ➤ $\theta^o = \theta_{i_0}$,

     $t(i_0) = -\text{sing}(a'_{i_0}\ell);\ t(I_{\mathtt{H}} \setminus i_0) = 0;\ t(J_{\mathtt{sup}}) = 0.$

     $t'(I_{\mathtt{sup}}) = -t'(I_{\mathtt{H}})A(I_{\mathtt{H}}, J_{\mathtt{sup}})A^{-1}_{\mathtt{sup}}.$

     $t'(J_{\mathtt{H}}) = t'(I_{\mathtt{H}})\left[A(I_{\mathtt{H}}, J_{\mathtt{H}}) - A(I_{\mathtt{H}}, J_{\mathtt{sup}})A^{-1}_{\mathtt{sup}}A(I_{\mathtt{sup}}, J_{\mathtt{H}})\right].$

     aller à 6.
   - ➤ $\theta^o = \theta_{j_0}$,

     $t(j_0) = -\text{signe}(\ell_{j_0})\ ;\ t(J_{\mathtt{sup}} \setminus j_0) = 0\ ;\ t'(I_{\mathtt{H}}) = 0.$

     $t'(I_{\mathtt{sup}}) = t'(J_{\mathtt{sup}})A^{-1}_{\mathtt{sup}}.$

     $t'(J_{\mathtt{H}}) = t'(J_{\mathtt{sup}}).A^{-1}_{\mathtt{sup}}A(I_{\mathtt{sup}}, J_{\mathtt{H}}).$

     aller à 5.
5. Calculer σ^o,
   - $\sigma^o = \sigma_{j_*} : \overline{I}_{\mathtt{sup}} = I_{\mathtt{sup}},\ \ \overline{J}_{\mathtt{sup}} = (J_{\mathtt{sup}} \setminus j_0) \cup j_*.$
   - $\sigma^o = \sigma_{i_*} : \overline{I}_{\mathtt{sup}} = I_{\mathtt{sup}} \setminus i_*,\ \ \overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}} \setminus j_0.$

   Aller à 2.
6. Calculer σ^o,
   - $\sigma^o = \sigma_{i_*} : \overline{I}_{\mathtt{sup}} = (I_{\mathtt{sup}} \setminus i_*) \cup i_0,\ \ \overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}}.$
   - $\sigma^o = \sigma_{j_*} : \overline{I}_{\mathtt{sup}} = I_{\mathtt{sup}} \cup i_0,\ \ \overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}} \cup j_*.$

   Aller à 2.

2.7 Application numérique

Nous allons résoudre par l'algorithme ci-dessus, le problème (2.2) (pour : $\varepsilon = 0$), en posant :

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \; b_* = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; b^* = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$d_* = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \; d^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Soit le vecteur $x' = (2, 2, 2, 2)$ qui satisfait les contraintes (2.1b) et (2.1c). Pour cet exemple on prend : $I_{\text{sup}} = \{1, 4\}$, $J_{\text{sup}} = \{1, 2\}$.

Soit $\{x, Q_{\text{p}}\}$ une solution réalisable de support de départ.

Comme $\beta\,(x, Q_{\text{p}}) = 70 > \varepsilon$, on va continuer le processus de résolution (les tableaux ci-dessous résume les résultats d'une itération, les cellules encadrées représentent les pas θ^o et σ^o et après chaque itération, nous poserons $x = \overline{x}$, $Q_{\text{p}} = \overline{Q}_{\text{p}}$).

1). Itération 1 :

TABLEAU 2.1

N	x_j	Ψ_*	Ψ^*	u_i	E_j	ℓ_j	θ_i	θ_j
1	2	-7	8	0.5	0	0	\	\
2	2	-11	4	\	0	-30	$\boxed{0.20}$	\
3	2	-13	2	\	1.25	-8	0.25	∞
4	2	-9	6	2	4	-8	\	0.26
N	$\overline{x}_j$	t_i	t_j	σ_i	σ_j	λ_k	$\delta\lambda_k$	σ_k
1	2	-0.5	0	$\boxed{1}$	\			
2	-4.11	-1	0	\	\			
3	0.37	0	3.5	\	∞			
4	0.37	-1	2	2	∞			

$\beta\,(\overline{x}, Q_{\text{p}}) = 55.74$, $\;\overline{I}_{\text{sup}} = \{2, 4\}$ et $\overline{J}_{\text{sup}} = \{1, 2\}$.

2). Itération 2 :

Tableau 2.2

N	x_j	Ψ_*	Ψ^*	u_i	E_j	ℓ_j	θ_i	θ_j
1	2	-8.62	6.63	\	0	-7	1.45	\
2	-4.11	0	15	-1	0	-11.88	\	\
3	0.37	2.40	12.59	\	-1	5.62	$\boxed{0.04}$	1
4	0.37	-10.22	4.77	1	2	-6.37	\	1
N	$\overline{x}_j$	t_i	t_j	σ_i	σ_j			
1	1.66	0	0	\	\			
2	-4.67	-3	0	∞	\			
3	0.63	-1	-10	\	∞			
4	0.06	-5	-13	0.2	$\boxed{0.07}$			

$\beta(x, Q_{\mathrm{p}}) = 23.14$, $\beta(\overline{x},\ Q_{\mathrm{p}}) = 22.04$, $\overline{I}_{\mathsf{sup}} = \{2, 4, 3\}$ et $\overline{J}_{\mathsf{sup}} = \{1, 2, 4\}$.

3). Itération 3 :

Tableau 2.3

N	x_j	Ψ_*	Ψ^*	u_i	E_j	ℓ_j	θ_i	θ_j
1	1.66	-8.83	6.16	\	0	4.41	$\boxed{0.32}$	0.98
2	-4.67	0	15	-1.46	0	-3.93	\	0.33
3	0.63	0	15	-0.15	-2.53	5.36	\	\
4	0.06	-10.45	4.54	0.23	0	-2.37	\	2.49
N	$\overline{x}_j$	t_i	t_j	σ_i	σ_j			
1	3.10	1	0	\	\			
2	-5.96	1.07	0	1.35	\			
3	2.38	-0.30	3.92	∞	$\boxed{0.64}$			
4	-0.70	0.46	0	∞	\			

$\beta(x, Q_{\mathrm{p}}) = 14.66$, $\beta(\overline{x}, Q_{\mathrm{p}}) = 9.88$, $\overline{I}_{\mathsf{sup}} = \{2, 4, 3, 1\}$ et $\overline{J}_{\mathsf{sup}} = \{1, 2, 4, 3\}$.

4). Itération 4 :

TABLEAU 2.4

N	x_j	Ψ_*	Ψ^*	u_i	E_j	ℓ_j	θ_i	θ_j
1	3.10	-15	0	0.64	0	0.72	\	4.01
2	-5.96	0	15	-0.76	0	-0.90	\	$\boxed{0.04}$
3	2.38	0	15	-0.35	0	0.36	\	18.57
4	-0.70	-11.93	3.06	0.52	0	0.90	\	4
N	$\overline{x}_j$	t_i	t_j	σ_i	σ_j			
1	3.73	-0.13	0	4.71	\			
2	-6	0.31	1	2.43	\			
3	2.4	0.19	0	1.8	\			
4	-0.06	-0.29	0	$\boxed{1.8}$	\			

$\beta(x, Q_{\mathtt{p}}) = 1.62$, $\beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{p}}) = 0.94$, $\overline{I}_{\mathtt{sup}} = \{2, 3, 1\}$ et $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = \{1, 4, 3\}$.

5). Itération 5 :

TABLEAU 2.5

N	x_j	Ψ_*	Ψ^*	u_i	E_j	ℓ_j	θ_i	θ_j
1	3.73	-15	0	0.4	0			
2	-6	0	15	-0.2	1.8			
3	2.4	1	15	0	0			
4	-0.06	-12.06	2.93	0.77	0			

$\beta(x, Q_{\mathtt{p}}) = 0 \quad \Rightarrow \{x, Q_{\mathtt{p}}\}$ est une SRS optimal, avec :

$x^o = (3.73, -6, 2.4, -0.06)'$,

$F(x^o) = 15.8$.

On a résolut l'exemple numérique en quatre itérations seulement et on a comparé ces résultats sous Matlab en utilisant la fonction linprog, et on a trouvé les mêmes résultats.

2.8 Comparaison avec la fonction linprog de Matlab

2.9 Exemple 2

```
clear all; clc ;
%la fonction objective
F=[-1 2 0 1];
%La matrice des contraintes essentielles A :
Aeq=[];
%Le vecteur b
beq=[];
%
A=[2 0 1 -2
  -1 1 2 1
   3 2 -1 0
   0 -1 1 2
  -2 0 -1 2
   1 -1 -2 -1
  -3 -2 1 0
   0 1 -1 -2];
%
b=[10;10;10;10;5;5;5;5];
% Le vecteur d_{*}
lb =[-6;-6 ;-6;-6];
% Le vecteur d^{*}
ub =[6;6;6;6];
% Le code
[X,Z]=linprog(F,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

```
Optimization terminated.

X =

    3.7349
   -6.0000
    2.4000
   -0.0651
```

```
Z =

  15.8000
```

Chapitre 3

Résolution d'un problème min-max sans contraintes essentielles

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va résoudre par la méthode adaptée, un problème de min-max en programmation linéaire qu'avec des contraintes directes.

3.2 Position du problème

Considérons le problème min-max en programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} F(x) = \min\limits_{k \in K} (c_k' x + \alpha_k) \rightarrow \max\limits_{x}, & (3.1a) \\ \qquad d_* \leq x \leq d^*. & (3.1b) \end{cases}$$

Où :

- $J = \{1, \ldots, n\}$ et $K = \{1, \ldots, p\}$ sont des ensembles d'indices.
- $c_k = c_k(J)$, $k \in K$ sont des p-vecteurs et $\alpha_k, k \in K$ sont des scalaires .
- $x = x(J) = (x_j, j \in J)$, $d_* = d_*(J)$, $d^* = d^*(J)$, sont des n-vecteurs.

Soit $C = C(K, J)$ une $(p \times n)-$matrice formée par les vecteurs c_k.

On désigne par

$$\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d_* \leq x \leq d^*\},$$

le domaine des solutions réalisables.

3.3 Définitions

Définition 3.1. Tout vecteur $x \in \mathbf{X}$ est appelé, solution réalisable du problème (3.1).

Une solution réalisable $x^o \in \mathbf{X}$ est dite optimale, si $F(x^o) = \max_{x \in \mathbf{X}} F(x)$.

Une solution réalisable $x^\varepsilon \in \mathbf{X}$ est dite $\varepsilon-$optimal, si $F(x^o) - F(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$, (pour tout réel $\varepsilon > 0$ donné).

Définition 3.2. Avec la matrice C, formons la matrice des estimations suivantes :

$$E(K,J) = \begin{pmatrix} E_{kj}, j \in J \\ k \in K \end{pmatrix} = -C(K,J). \tag{3.2}$$

Des ensembles K et J formons les sous-ensembles :$K_\mathtt{f} \subseteq K$, $J_\mathtt{f} \subset J$ tel que : $|K_\mathtt{f}| = |J_\mathtt{f}| + 1$, et définissons le vecteur : $e(K) = (e_k = 1, k \in K)$, pour ainsi construire la matrice : $E_\mathtt{f} = \Big(E(K_\mathtt{f}, J_\mathtt{f}); e(K_\mathtt{f})\Big)$.

Définition 3.3. L'ensemble $Q_\mathtt{f} = \{K_\mathtt{f}, J_\mathtt{f}\}$ est dit support de la fonctionnelle, si la matrice $E_\mathtt{f}$ est inversible.

En utilisant la dernière ligne de la matrice $E_\mathtt{f}^{-1}$ (voir [48]), on construit le vecteur $\lambda(K) = (\lambda(K_\mathtt{f}), \lambda(K_\mathtt{H}))$, $K_\mathtt{H} = K \setminus K_\mathtt{f}$:

$$\lambda'(K_\mathtt{f}) = (0(J_\mathtt{f}), 1)' . E_\mathtt{f}^{-1};\ \lambda(K_\mathtt{H}) = 0. \tag{3.3}$$

Remarque. La matrice $E_\mathtt{f}^{-1}$ peut s'écrire sous la forme suivante : $E_\mathtt{f}^{-1} = \begin{pmatrix} D(J_\mathtt{f}, K_\mathtt{f}) \\ \lambda'(K_\mathtt{f}) \end{pmatrix}$, c'est à dire $\lambda'(K_\mathtt{f})$ est la dernière ligne de $E_\mathtt{f}^{-1}$.

Définition 3.4. Le support $Q_\mathtt{f}$ est dit régulier si $\lambda_k \geq 0, \quad k \in K_\mathtt{f}$ (voir [17]).

Remarque. Le support $Q_\mathtt{f}$ avec $J_\mathtt{f} = \varnothing$, est régulier par définition. Dans la suite, on ne considérera que des supports réguliers.

Définition 3.5. La paire $\{x, Q_\mathtt{f}\}$ formée de la solution réalisable x et du support $Q_\mathtt{f}$ est appelé solution réalisable de support du problème (3.1).

Définition 3.6. Une solution réalisable de support $\{x, Q_\mathtt{f}\}$ est dite non-dégénérée si :

$$\begin{aligned} d_{*j} &< x_j < d_j^*, && j \in J_\mathtt{f}; \\ F(x) &< c_k' x + \alpha_k, && k \in K_\mathtt{H}. \end{aligned}$$

3.4 Critère d'optimalité

Nous supposerons que la solution initiale réalisable de support $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$ est connue. Nous allons étudier la variation de la fonction objectif F, lorsqu'on modifie la solution réalisable.

3.4.1 L'accroissement de la fonctionnelle F

Soit $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$ une solution réalisable de support de départ, et $\overline{x} = x + \Delta x$ une autre solution réalisable. On va calculer l'accroissement de la fonction objective.

On dénote par $\omega_k(x) = (\omega_k,\ k \in K)$, le vecteur des écarts de la fonctionnelle, i.e.,

$$\omega_k(x) = c_k' x + \alpha_k - F(x), \qquad k \in K. \tag{3.4}$$

Par définition de la fonctionnelle F, on a $F(x) \leq c_k' x + \alpha_k,\ k \in K$, car $\forall x,\quad F(x)$ est le minimum de $c_k' x + \alpha_k$.

Delà, on a :

$$\omega_k \geq 0, \quad \forall\ k \in K. \tag{3.5}$$

De la formule (3.4), on a :

$$\overline{\omega}_k = c_k' \overline{x} + \alpha_k - F(\overline{x})$$
$$\overline{\omega}_k = c_k' x + c_k' \Delta x + \alpha_k - F(\overline{x})$$

par la suite on a :

$$\overline{\omega}_k = c_k' x + \alpha_k - F(x) + F(x) - F(\overline{x}) + c_k' \Delta x$$
$$\overline{\omega}_k = \omega_k - (F(\overline{x}) - F(x)) + c_k' \Delta x$$
$$\overline{\omega}_k = \omega_k - \Delta F(x) + c_k' \Delta x$$

Ce qui nous donne :

$$\Delta F(x) = -(\overline{\omega}_k - \omega_k) + c_k' \Delta x$$
$$\Delta F(x) = -\Delta \omega_k + c_k' \Delta x, \quad k \in K.$$

où : $\quad \Delta \omega_k = \overline{\omega}_k - \omega_k,\ k \in K.$
On a par définition :

$$\overline{\omega}_k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\omega}_k = \omega_k + \Delta \omega_k \geq 0, \quad k \in K. \tag{3.6}$$

Ceci nous donne :

$$\Delta \omega_k(x) \geq -\omega_k(x), \quad \forall k \in K. \tag{3.7}$$

On a trouvé précédemment :

$$\Delta F(x) = c'_k \Delta x - \Delta\omega_k, \quad k \in K. \tag{3.8}$$

En multipliant l'équation (3.8) par λ_k et en sommant par rapport à $K_{\mathtt{f}}$, on obtient :

$$\Delta F(x) = \sum_{j \in J_{\mathrm{H}}} E_j \Delta x_j - \sum_{k \in K} \lambda_k . \Delta\omega_k(x), \tag{3.9}$$

où : $E_j = \sum\limits_{k \in K} \lambda_k E_{kj}$, $\quad j \in J_{\mathtt{H}} = J \setminus J_{\mathtt{f}}$.

Le maximum de (3.9), sous les contraintes suivantes :

$$d_{*j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^* - x_j, \ j \in J_{\mathtt{H}};$$
$$\Delta\omega_k \geq -\omega_k, \ k \in K_{\mathtt{f}}.$$

est égal à :

$$\beta\left(x, Q_{\mathtt{f}}\right) = \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^{+}} E_j(x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^{-}} E_j(x_j - d_j^*) + \sum_{k \in K_{\mathtt{f}}} \lambda_k \omega_k(x), \tag{3.10}$$

appelée valeur de sub-optimalité,

$$\text{où} \qquad J_{\mathtt{H}}^{+} = \{j \in J_{\mathtt{H}} : \ E_j > 0\} \quad \text{et} \quad J_{\mathtt{H}}^{-} = \{j \in J_{\mathtt{H}} : \ E_j < 0\}.$$

Delà :

$F\left(\overline{x}\right) - F(x) \leq \beta\left(x, Q_{\mathtt{f}}\right), \ \forall x \in \mathbf{X}$,

donc pour $\overline{x} = x^o$, on aura :

$$F\left(x^o\right) - F(x) \leq \beta\left(x, Q_{\mathtt{f}}\right), \ \forall x \in \mathbf{X}. \tag{3.11}$$

De cette inégalité, on déduit les deux théorèmes suivants :

Théoreme 3.1 (Critère d'optimalité)**.** Soit $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$ une solution réalisable de support de départ, les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_j = d_{*j} & \text{si} \quad E_j > 0, \\ x_j = d_j^* & \text{si} \quad E_j < 0, \\ d_{*j} \leq x_j \leq d_j^* & \text{si} \quad E_j = 0, \ j \in J_{\mathtt{H}}. \\ \omega_k = 0 & \text{si} \quad \lambda_k > 0, \\ \omega_k > 0 & \text{si} \quad \lambda_k = 0, \ k \in K_{\mathtt{f}}. \end{cases} \tag{3.12}$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité de la solution réalisable de support $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$.

Preuve. .

$\Rightarrow$) **Condition suffisante** : Soit $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$ une SRS admissible.

si : $\beta(x, Q_{\mathtt{f}}) \leq \varepsilon$, alors de (3.11) on a : $F(\overline{x}) - F(x) \leq \beta(x, Q_{\mathtt{f}})$, $\forall \overline{x}$.

Ce qui donne $F(\overline{x}) - F(x) \leq \varepsilon$, $\forall\, \overline{x}$,

donc x est $\varepsilon-$optimal.

$\Leftarrow$) **Condition nécessaire** :

Soit $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$ une solution réalisable de support non-dégénéré et supposons que les relations (3.12) ne sont pas vérifiées, on a alors les deux cas suivants :

(i) $\exists\, j_0 \in J_{\mathtt{H}} \setminus E_{j_0} > 0,\ x_{j_0} > d_{*j_0}$ ou $E_{j_0} < 0,\ x_{j_0} < d^*_{j_0}$.

(ii) $\exists\, k_0 \in K_{\mathtt{f}} \setminus \lambda_{k_0} > 0,\ \omega_{k_0} > 0$.

On va traiter ces deux cas indépendamment l'un de l'autre et nous allons construire une nouvelle solution réalisable $\overline{x} = x + \theta\ell$ avec $(\theta > 0)$:

- Considérons le cas (i), on pose :

  $\Delta\omega_k = 0, k \in K_{\mathtt{H}}$; $\ell_j = 0$ si $j \in J_{\mathtt{H}} \backslash j_0$; $\ell_j = D(J_{\mathtt{f}}, K_{\mathtt{f}})E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{H}})$ si $j \in J_{\mathtt{f}}$; $\ell_j =$sign(α_0) si $j = j_0$ où : $\alpha_0 = \begin{cases} d_{*j_0} - x_{j_0} \text{ si } E_{j_0} > 0 \text{ et } x_{j_0} > d_{*j_0}, \\ d^*_{j_0} - x_{j_0} \text{ si } E_{j_0} > 0 \text{ et } x_{j_0} < d^*_{j_0}. \end{cases}$

  Si :

  $$E_{j_0} > 0 \ \text{ et } \ x_{j_0} > d_{*j_0}, \ \Rightarrow \ \exists\, \theta_1 > 0 \,/\, x_{j_0} - \theta_1 \geq d_{*j_0}.$$
  $$E_{j_0} < 0 \ \text{ et } \ x_{j_0} < d^*_{j_0}, \ \Rightarrow \ \exists\, \theta_1 > 0 \,/\, x_{j_0} + \theta_1 \leq d^*_{j_0}.$$

  des deux cas ci-dessus, on obtient : $d_{*j_0} \leq \overline{x}_{j_0} = x_{j_0} + \theta_1 \text{sign}(\alpha_0) \leq d^*_{j_0}$.

  $$\text{donc :} \qquad d_{*j} \leq \overline{x}_j = x_j + \theta_1\ell \leq d^*_j,\ \forall j \in J_{\mathtt{H}}.$$

  et comme $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$ est une (SR-S) non-dégénéré, on a :

  $$\exists\, \theta_2 > 0 \text{ tel que : } d_{*j} \leq x_j + \theta_2\ell_j \leq d^*_j,\ \forall j \in J_{\mathtt{f}}.$$

  D'où pour un θ, suffisamment petit $\overline{x} = x + \theta\ell$ est une solution réalisable du problème (3.1) et on obtient :

  $\Delta F(x) = -\theta E_{j_0}$ sign$(\alpha_0) > 0$, ce qui contredit l'optimalité de la solution réalisable de support $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$.

- Pour le cas (ii) on pose :

  $$\Delta\omega_k = \begin{cases} -\theta_1\omega_{k_0} & \text{si } k = k_0 \\ 0 & \forall k \in K_{\mathtt{f}} \setminus k_0 \end{cases} \quad \text{et } \ell_j = \begin{cases} 0 & \forall j \in J_{\mathtt{H}} \\ D(J_{\mathtt{f}}, K_{\mathtt{f}})E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{H}}) & \forall j \in J_{\mathtt{f}} \end{cases}$$

  Comme $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$ est une SRS non-dégénéré, donc :

$$\exists\ \theta_2 > 0,\ \text{ tel que }\ d_{*j} \leq x_j + \theta_2 \ell_j \leq d^*_j,\ \forall j \in J_{\mathtt{f}}.$$

D'où pour un θ, suffisamment petit $\overline{x} = x + \theta\ell$ est une solution réalisable du problème (3.1) et on obtient :
$\Delta F(x) = \theta\lambda_{k_0}\omega_{k_0} > 0$, ce qui contredit l'optimalité de la solution réalisable de support $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$.

□

3.4.2 Critère de suboptimalité

Théoreme 3.2 (Critère de sub-optimalité)**.** Soit $\varepsilon > 0$ donné. Pour l'$\varepsilon-$optimalité de la solution réalisable x, il faut et il suffit qu'il existe un tel support $Q_{\mathtt{f}}$, pour lequel :

$$\beta\left(x, Q_{\mathtt{f}}\right) \leq \varepsilon.$$

Preuve. $\Rightarrow$) **Condition suffisante :** Soit $\varepsilon > 0$.
de (3.11), on a : $F(x^o) - F(x) \leq \beta(x, Q_{\mathtt{f}}) \leq \varepsilon$,
alors pour : $\beta(x, Q_{\mathtt{f}}) \leq \varepsilon\ \Rightarrow\ F(x^o) - F(x) \leq \varepsilon$
d'où x est $\varepsilon - optimal$.

$\Leftarrow$) **Condition nécessaire :** On va décomposer la valeur de suboptimalité (3.10), comme suit :

$$\beta\left(x, Q_{\mathtt{f}}\right) = \sum_{j \in J^+_{\mathtt{H}}} E_j(x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J^-_{\mathtt{H}}} E_j(x_j - d^*_j) + \sum_{k \in K_{\mathtt{f}}} \lambda_k \omega_k(x).$$

$$\beta\left(x, Q_{\mathtt{f}}\right) = \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}} E_j x_j - \sum_{j \in J^+_{\mathtt{H}}} E_j d_{*j} - \sum_{j \in J^-_{\mathtt{H}}} E_j d^*_j\ + \sum_{k \in K_{\mathtt{f}}} \lambda_k \omega_k,$$

Maintenant, on va construire le problème dual du problème (3.2) qui est le suivant :

$$\begin{cases} \Phi(X) = \lambda'\alpha - d'_* v + d'^* w \rightarrow min, \\ -\lambda'(K).C(K,J) - v'(J) + w'(J) = 0, \\ \lambda'(K).e(K) = 1, \\ \lambda \in \mathbb{R}^p_+;\ v, w \in \mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{3.13}$$

Ainsi, le problème (3.1) sera appelé le primal du problème (3.13).
Le triplet $X = (\lambda, v, w)$ construit comme suit :

$$\begin{cases} \lambda'(K_{\mathtt{f}}) = \left(0(J_{\mathtt{f}}), 1\right)'.E^{-1}_{\mathtt{f}}, \quad \lambda(K_{\mathtt{H}}) = 0; \\ v_j = E_j,\ w_j = 0,\ \text{ si }\ E_j \geq 0; \\ v_j = 0,\ w_j = -E_j,\ \text{ si }\ E_j < 0;\ j \in J. \end{cases} \tag{3.14}$$

vérifiant toutes les contraintes du problème (3.13), est appelé solution réalisable duale du problème (3.13).

En utilisant cette SRD et les relations (3.14), dans (3.10) on aura :

$$\beta\left(x, Q_{\mathtt{f}}\right)=\sum_{j \in J_{\mathtt{H}}} E_j x_j-\sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^{+}} E_j d_{* j}-\sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^{-}} E_j d_j^*+\sum_{k \in K_{\mathtt{f}}} \lambda_k \omega_k, \tag{3.15}$$

En utilisant les relations (3.2), (3.3) et (3.14), on aura

$$\begin{aligned}
\lambda'(K_{\mathtt{f}}).\omega(K_{\mathtt{f}}) =&\lambda'(K_{\mathtt{f}}).\left[C(K_{\mathtt{f}}, J)x(J)+\alpha(K_{\mathtt{f}})-e'(K_{\mathtt{f}}).f(x)\right] \\
&=-\lambda'(K_{\mathtt{f}}).E(K_{\mathtt{f}}, J)x(J)+\lambda'(K_{\mathtt{f}}).\alpha(K_{\mathtt{f}})-\lambda'(K_{\mathtt{f}}).e(K_{\mathtt{f}})f(x) \\
\lambda'(K_{\mathtt{f}}).\omega(K_{\mathtt{f}}) =&\sum_{j \in J_{\mathtt{H}}} E_j x_j+\lambda'(K_{\mathtt{f}}).\alpha(K_{\mathtt{f}})-F(x).
\end{aligned}$$

En Substituant toutes ces valeurs trouvés dans (3.9), on obtiendra

$$\begin{aligned}
\beta\left(x, Q_{\mathtt{f}}\right) &=\sum_{j \in J_{\mathtt{H}}} E_j x_j-d_*' v+d'^* w-\sum_{j \in J_{\mathtt{H}}} E_j x_j+\lambda' \alpha-F(x) \\
&\quad+F(x^o)-\Phi(X^o) \\
&=F(x^o)-F(x)+\left(\lambda' \alpha-d_*' v+d' w-\Phi(X^o)\right) \\
&=F(x^o)-F(x)+\left(\Phi(X)-\Phi(X^o)\right) \\
\beta\left(x, Q_{\mathtt{f}}\right) &=\beta_{\mathtt{x}}+\beta_{\mathtt{f}} .
\end{aligned} \tag{3.16}$$

où

- $\beta_{\mathtt{x}}=\left(F\left(x^o\right)-F\left(x\right)\right)$ appelé la mesure de non-optimalité de la solution réalisable x.
- $\beta_{\mathtt{f}}=\left(\Phi\left(X\right)-\Phi\left(X^o\right)\right)$ appelé la mesure de non-optimalité du support $Q_{\mathtt{f}}$.

Ainsi, pour un support $Q_{\mathtt{f}}$ optimal, on aura :

$\Phi(\lambda)=\Phi(\lambda^o) \;\Rightarrow\; \beta\left(x, Q_{\mathtt{f}}\right)=c'x^o-c'x \leq \varepsilon.$

et par conséquent x est $\varepsilon-$optimal.

□

3.5 Algorithme de résolution

Pour résoudre le problème (3.1), on choisit un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, qui satisfait les contraintes (3.1b), et on prend le support $Q_{\mathtt{f}}=\{J_{\mathtt{f}}, K_{\mathtt{f}}\}$ où : $J_{\mathtt{f}}=\varnothing$, $K_{\mathtt{f}}=\{k_0\}$ (avec : $(c'_{k_0}+\alpha_{k_0})=\underset{k \in K}{min}(c'_k+\alpha_k)$).

Supposons que, pour cette SRS $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$, le critère d'optimalité n'est pas vérifié et $\beta(x, Q_{\mathtt{f}}) > \varepsilon$, nous allons chercher une autre SRS $\left\{\overline{x}, \overline{Q}_{\mathtt{f}}\right\}$, en procédant par les deux étapes suivantes :

(a) Changement de la solution réalisable $(x \to \overline{x})$.

(b) Changement de support $\left(Q_{\mathtt{f}} \to \overline{Q}_{\mathtt{f}}\right)$.

3.5.1 Changement de la solution réalisable

Le changement de la solution réalisable x par un autre $\overline{x} = x + \theta^o \ell$, aura pour effet d'augmenter la valeur de la fonctionnelle $(F(\overline{x}) \geq F(x))$, où : $\ell(J) = (\ell_j, j \in J)$ est le vecteur de direction d'amélioration du point x et $\theta^o \geq 0$ est le pas maximal le long de cette direction.

3.5.1.1 Détermination de la direction ℓ

Sur $J_{\mathtt{H}}$, on choisit $\theta = 1$ et le vecteur $\ell(J)$, est construit comme suit :

$$\ell_j = \begin{cases} d_{*j} - x_j & \text{si} \quad E_j > 0, \\ d_j^* - x_j & \text{si} \quad E_j < 0, \\ 0 & \text{si} \quad E_j = 0, \quad j \in J_{\mathtt{H}}. \end{cases}$$

Pour un θ suffisamment petit $(0 < \theta \leq 1)$, la relation (3.7) peut s'écrire comme suit :

$$\Delta\omega(K_{\mathtt{f}}) = -\theta\omega(K_{\mathtt{f}}), \tag{3.17}$$

et de l'admissibilité de $\overline{x}$, on aura :

$$-E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{H}})\theta\ell(J_{\mathtt{H}}) - E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{f}})\theta\ell(J_{\mathtt{f}}) - e'(K_{\mathtt{f}}).\Delta F(x) = -\theta\omega(K_{\mathtt{f}})$$

$$-\left(E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{f}}), e(K_{\mathtt{f}})\right)\begin{pmatrix} \theta\ell(J_{\mathtt{f}}) \\ \Delta F(x) \end{pmatrix} = \theta E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{H}})\ell(J_{\mathtt{H}}) - \theta\omega(K_{\mathtt{f}})$$

$$\begin{pmatrix} \theta\ell(J_{\mathtt{f}}) \\ \Delta F(x) \end{pmatrix} = -\theta E_{\mathtt{f}}^{-1}(J_{\mathtt{f}}, K_{\mathtt{f}})\, E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{H}})\, \ell(J_{\mathtt{H}}) - \theta E_{\mathtt{f}}^{-1}(J_{\mathtt{f}}, K_{\mathtt{f}})\, \omega(K_{\mathtt{f}}),$$

et on obtiendra :

$$\ell(J_{\mathtt{f}}) = -E_{\mathtt{f}}^{-1}(J_{\mathtt{f}}, K_{\mathtt{f}})E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{H}})\ell(J_{\mathtt{H}}) + E_{\mathtt{f}}^{-1}(J_{\mathtt{f}}, K_{\mathtt{f}})\omega(K_{\mathtt{f}}).$$

3.5.1.2 Détermination du pas maximal admissible

On calcule θ^o tel que $\overline{x}$ satisfera aux contraintes (3.1b), pour cela :

- Sur $J_{\mathtt{f}}$:

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{*j} - x_j}{\ell_j}, & \text{si} \quad \ell_j < 0; \\ \dfrac{d_j^* - x_j}{\ell_j}, & \text{si} \quad \ell_j > 0; \\ \infty, & \text{si} \quad \ell_j = 0, \ j \in J_{\mathtt{f}}. \end{cases}$$

- Sur $K_{\mathtt{H}}$:

$$\theta_k = \begin{cases} \dfrac{\omega_k}{\beta(x, Q_{\mathtt{f}}) - c_k' \ell}, & \text{si} \quad \beta(x, Q_{\mathtt{f}}) > c_k' \ell; \\ \infty, & \text{sinon}. \end{cases}$$

Delà le pas maximal sera $\theta^o = min\left\{1, \theta_{j_0}, \theta_{k_0}\right\}$ où $\theta_{j_0} = \underset{j \in J_{\mathtt{f}}}{min}(\theta_j)$ et $\theta_{k_0} = \underset{k \in K_{\mathtt{H}}}{min}(\theta_k)$.

Ainsi, on aura $\overline{x} = x + \theta^o \ell$ une solution réalisable du problème (3.1).

3.5.1.3 Calcul de la valeur de sub-optimalité

En utilisant la solution réalisable $\overline{x}$ trouvée ci-dessus dans (3.10), on obtiendra :

$$\begin{aligned} \beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{f}}) &= \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^+} E_j(\overline{x}_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^-} E_j\left(\overline{x}_j - d_j^*\right) + \sum_{k \in K_{\mathtt{f}}} \lambda_k \overline{\omega}_k \\ &= \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^+} E_j(x + \theta^o \ell) - \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^+} E_j d_{*j} + \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^-} E_j(x + \theta^o \ell) - \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^-} E_j d_j^* \\ &\quad + \sum_{k \in K_{\mathtt{f}}} \lambda_k \left((1 - \theta^o)\omega_k\right) \\ &= \sum_{j \in J} E_j x_j + \theta^o \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^+} E_j \ell_j - \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^+} E_j d_{*j} + \theta^o \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^-} E_j \ell_j - \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^-} E_j d_j^* \\ &\quad + (1 - \theta^o) \sum_{k \in K_{\mathtt{f}}} \lambda_k \omega_k \\ \beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{f}}) &= (1 - \theta^o)\, \beta(x, Q_{\mathtt{f}}). \end{aligned}$$

de là :

- Si $\theta^o = 1$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable optimale.
- Si $\beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{f}}) \leq \varepsilon$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable ε-optimale.
- Si $\beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{f}}) > \varepsilon$, on passe au changement de support.

3.5.2 Changement de support.

Le changement de support $\left(Q_{\mathtt{f}} \to \overline{Q}_{\mathtt{f}}\right)$ consiste à faire un changement du coplan E vers $\overline{E}$, ce qui aura pour effet la diminution de la valeur de la fonction duale et on va avoir : $\beta\left(\overline{x}, \overline{Q}_{\mathtt{f}}\right) \leq \beta\left(\overline{x}, Q_{\mathtt{f}}\right)$.

Pour cela, on pose :

$\overline{E}(J) = E(J) + \sigma^o t(J)$, $\overline{\lambda} = \lambda + \sigma^o \delta\lambda$, où $t(J) = (t_j, j \in J)$, $\delta\lambda(K) = (\delta\lambda_k, k \in K)$ sont les directions de la diminution de la fonction duale et σ^o $(\sigma \geq 0)$ est le pas maximal le long de cette direction.

En utilisant le vecteur des estimations (3.2) calculé sur le support $Q_{\mathtt{f}}$, on aura :

$$\overline{E} = \overline{E}$$
$$E(J) + \sigma^o t(J) = -\overline{\lambda}'.C$$
$$E(J) + \sigma^o t(J) = -\left(\lambda + \sigma^o \delta\lambda\right)'.C$$

on obtiendra :

$$t'(J) \quad = \quad \delta\lambda'(K).E(K, J). \tag{3.18}$$

et comme on a :

$\overline{\lambda}'(K).e(K) = \lambda'(K).e(K) = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta\lambda'(K).e(K) = 0,$

d'où

$$\delta\lambda'(K_{\mathtt{f}}).e(K_{\mathtt{f}}) + \delta\lambda'(K_{\mathtt{H}}).e(K_{\mathtt{H}}) = 0. \tag{3.19}$$

en utilisant la relation (3.18) dans (3.19), on obtiendra

$$t'(J_{\mathtt{f}}) = \delta\lambda'(K_{\mathtt{f}}).E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{f}}) + \delta\lambda'(K_{\mathtt{H}}).E(K_{\mathtt{H}}, J_{\mathtt{f}}). \tag{3.20}$$

Des relations (3.19) et (3.20), on aura :

$$(t'(J_{\mathtt{f}}), 0) = \delta\lambda'(K_{\mathtt{f}}).\left(E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{f}}), e(K_{\mathtt{f}})\right) + \delta\lambda'(K_{\mathtt{H}}).\left(E(K_{\mathtt{H}}, J_{\mathtt{f}}), e(K_{\mathtt{H}})\right).$$

d'où

$$\delta\lambda'(K_{\mathtt{f}}) = \left(t(J_{\mathtt{f}}), 0\right)'.E_{\mathtt{f}}^{-1} - \delta\lambda'(K_{\mathtt{H}}).\left(E(K_{\mathtt{H}}, J_{\mathtt{H}}), e(K_{\mathtt{H}})\right) E_{\mathtt{f}}^{-1}. \tag{3.21}$$

Et de (3.19) on obtient aussi

$$t'(J_{\mathtt{H}}) = \delta\lambda'(K_{\mathtt{f}}).E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{f}}) + \delta\lambda'(K_{\mathtt{H}}).E(K_{\mathtt{H}}, J_{\mathtt{H}}). \tag{3.22}$$

Ainsi, on sait que $\theta^o = min\left\{1, \theta_{j_0}, \theta_{k_0}\right\}$ (où : $\theta_{j_0} = \underset{j \in J_{\mathtt{f}}}{min}(\theta_j)$ et $\theta_{k_0} = \underset{k \in K_{\mathtt{H}}}{min}(\theta_k)$), on va chercher un indice (j_* ou k_*) qui va entrer dans le nouveau support à la place de j_0 ou k_0 (j_0 ou k_0 va sortir du support).

Pour cela, on pose :

$$t_j = \begin{cases} -\mathrm{sign}(\ell_{j_0}), & \text{si} \quad j = j_0; \\ 0, & \text{si} \quad j \in J_{\mathtt{f}}. \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta\lambda_k = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad k = k_0; \\ 0, & \text{si} \quad k \in K_{\mathtt{H}}. \end{cases}$$

Puis, on calcule pour différents pas $\sigma_j,\ j \in J_{\mathtt{H}}$ et $\sigma_k,\ k \in K_{\mathtt{f}}$, selon les règles de [13, 16]

- $\sigma_{j_*} = \min\limits_{j \in J_{\mathtt{H}}}(\sigma_j)$, où

$$\sigma_j = \begin{cases} -\dfrac{E_j}{t_j}, & \text{si} \quad E_j\, t_j < 0; \\ 0, & \text{si} \quad E_j = 0,\ x_j \neq d_{*j},\ t_j > 0 \ \text{ ou} \\ & \phantom{\text{si}} \quad E_j = 0,\ x_j \neq d_j^*,\ t_j < 0,\ j \in J_{_H}; \\ \infty, & \phantom{\text{si}} \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

- $\sigma_{k_*} = \min\limits_{k \in K_{\mathtt{f}}}(\sigma_k)$, où

$$\sigma_k = \begin{cases} -\dfrac{\lambda_k}{\delta\lambda_k}, & \text{si} \quad \delta\lambda_k \lambda_k < 0; \\ \infty, & \phantom{\text{si}} \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

et on prend $\sigma^o = \min\left\{\sigma_{j_*}, \sigma_{k_*}\right\}$.

Ainsi le nouveau support sera :

a). **Cas où :** $\theta^o = \theta_{j_0}$. on aura :

➤ **Si :** $\sigma^o = \sigma_{j_*}$, **alors :**

$\overline{J}_{\mathtt{f}} = (J_{\mathtt{f}} \setminus j_0) \cup j_*$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}}$.

➤ **Si :** $\sigma^o = \sigma_{k_*}$, **alors :**

$\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}} \setminus j_0$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}} \setminus k_*$.

b). **Cas où :** $\theta^o = \theta_{k_0}$, on aura :

➤ **Si :** $\sigma^o = \sigma_{j_*}$, **alors :**

$\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}} \cup j_*$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}} \cup k_*$.

➤ **Si :** $\sigma^o = \sigma_{k_*}$, **alors :**

$\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}}$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = (K_{\mathtt{f}} \setminus k_*) \cup k_0$.

Remarque. L'algorithme de la méthode adaptée est fini si pour chaque itération, on n'obtient pas une solution réalisable de support très dégénéré (voir [13]).

3.6 Résumé de l'algorithme de résolution

1. Considérons la solution réalisable de support départ $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$ du problème (3.1) et prenons $(\varepsilon \geq 0)$.
2. Calculer $\beta(x, Q_{\mathtt{f}})$,
   - ➤ si $\beta(x, Q_{\mathtt{f}}) = 0$ alors $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$ est une SRS optimale.
   - ➤ si $\beta(x, Q_{\mathtt{f}}) < \varepsilon$ alors $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$ est une SRS $\varepsilon-$optimale.
   - ➤ si $\beta(x, Q_{\mathtt{f}}) > \varepsilon$ alors continuer le processus,
3. Calculer ;
   - √ $\ell(J_{\mathtt{H}})$; $\ell(J_{\mathtt{f}})$.
   - √ θ^o =min$(1; \theta_{k_0}; \theta_{j_0})$.
   - √ $\overline{x} = x + \theta^o \ell$.

     De là :
     - ➤ si $\beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{f}}) = 0$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable optimale.
     - ➤ si $\beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{f}}) < \varepsilon$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable $\varepsilon-$optimale.
     - ➤ si $\beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{f}}) > \varepsilon$, alors continuer le processus,
4. Si $\theta^o = \theta_{k_0}$,

   $\delta\lambda_{k_0} = 1$; $\delta\lambda(K_{\mathtt{H}} \setminus k_0) = 0$; $t(J_{\mathtt{f}}) = 0$.

   $\delta\lambda'(K_{\mathtt{f}}) = -\delta\lambda'(K_{\mathtt{H}})\left(E(K_{\mathtt{H}}, J_{\mathtt{f}})); e(K_{\mathtt{H}})\right).E_{\mathtt{f}}^{-1}$.

   $t(J_{\mathtt{H}}) = \delta\lambda'(K)E(K, J_{\mathtt{H}})$.

   faire 7.
5. Si $\theta^o = \theta_{j_0}$

   $t_{j_0} = -\text{sign}(\ell_{j_0})$; $t(J_{\mathtt{f}} \setminus j_0) = 0$; $\delta\lambda(K_{\mathtt{H}}) = 0$.

   $\delta\lambda'(K_{\mathtt{f}}) = (t(J_{\mathtt{f}}))\, E_{\mathtt{f}}^{-1})$.

   $t(J_{\mathtt{H}}) = \delta\lambda(K_{\mathtt{f}})E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{H}}))$.

   faire 6.
6. calculer σ^o

   $\sigma^o = \sigma_{j_*}$: $\overline{J}_{\mathtt{f}} = (J_{\mathtt{f}} \setminus j_0) \cup j_*$; $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}}$.

   $\sigma^o = \sigma_{k_*}$: $\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}} \setminus j_0$; $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}} \setminus k_*$.

   aller à 2.
7. calculer σ^o

   $\sigma^o = \sigma_{j_*}$: $\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}} \cup j_*$; $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}} \cup k_0$.

   $\sigma^o = \sigma_{k_*}$: $\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}}$; $\overline{K}_{\mathtt{f}} = (K_{\mathtt{f}} \setminus k_*) \cup k_0$.

   aller à 2.

3.7 Exemple numérique

Pour illustrer l'algorithme proposé, on propose un exemple numérique lu problème (3.1) (pour : $\varepsilon = 0$), tel que :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \; \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; d_* = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } d^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Soit le vecteur $x' = (1, -1, 1, 0)$ qui satisfait les contraintes (3.1b), $J_{\mathtt{f}} = \varnothing$ et $K_{\mathtt{f}} = \{3\}$. Alors, $\{x, Q_{\mathtt{f}}\}$ une solution réalisable de support.

Comme $\beta(x, Q_{\mathtt{f}}) = 18 > \varepsilon$, on poursuit le processus de résolution (voir les tableaux ci-dessous, qui résume les résultats d'une itération, les cellules encadrées représentent les pas θ^o et σ^o et après chaque itération, et on pose $x = \overline{x}$, $Q_{\mathtt{f}} = \overline{Q}_{\mathtt{f}}$).

- **Itération 1 :**

TABLEAU 3.1

N	x_j	E_j	ℓ_j	θ_j	θ_k	$\overline{x}_j$	t_j	σ_j	λ_k	$\delta\lambda_k$	σ_k
1	1	-1	4	\	$\frac{1}{2}$	$\frac{73}{37}$	1	1	\	0	\
2	1	2	-1	\	$\frac{3}{11}$	$\frac{28}{37}$	-3	$\frac{2}{3}$	\	0	\
3	-1	-1	3	\	$\boxed{\frac{9}{37}}$	$\frac{-10}{37}$	4	$\boxed{\frac{1}{4}}$	\	0	\
4	0	-1	9	\	\	$\frac{81}{37}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	1

$\beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{f}}) = \frac{504}{37} > \varepsilon$, et : $\overline{J}_{\mathtt{f}} = \{3\}, \overline{K}_{\mathtt{f}} = \{4, 3\}$.

- **Itération 2 :**

TABLEAU 3.2

N	x_j	E_j	ℓ_j	θ_j	θ_k	$\overline{x}_j$	t_j	σ_j	λ_k	$\delta\lambda_k$	σ_k
1	$\frac{73}{37}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{112}{37}$	$\backslash$	$\boxed{\frac{19}{56}}$	3	1	$\boxed{\frac{3}{4}}$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
2	$\frac{28}{37}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{-28}{37}$	$\backslash$	∞	$\frac{1}{2}$	0	∞	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
3	$\frac{-10}{37}$	0	$\frac{-175}{37}$	$\frac{286}{175}$	$\backslash$	$\frac{-15}{8}$	$\backslash$	$\backslash$	$\frac{1}{4}$	0	∞
4	$\frac{81}{37}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{252}{37}$	$\backslash$	$\backslash$	$\frac{9}{2}$	0	∞	$\frac{3}{4}$	-1	$\frac{3}{4}$

$\beta(x, Q_{\mathtt{f}}) = \frac{245}{37}$, $\beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{f}}) = \frac{35}{8}$, on aura : $\overline{J}_{\mathtt{f}} = \{3, 1\}$, et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = \{4, 3, 1\}$.

- **Itération 3 :**

TABLEAU 3.3

N	x_j	E_j	ℓ_j	θ_j	θ_k	$\overline{x}_j$	t_j	σ_j	λ_k	$\delta\lambda_k$	σ_k
1	3	0	0	∞	$\backslash$	5	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{-1}{2}$	$\backslash$	∞	0	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
3	$\frac{-15}{8}$	0	$\frac{-21}{8}$	∞	$\backslash$	$\frac{-9}{2}$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$
4	$\frac{9}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\backslash$	$\backslash$	9	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$	$\backslash$

$\beta(x, Q_{\mathtt{f}}) = \frac{23}{8}$, $\beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{f}}) = 0$

Ainsi, le critère de sub-optimalité est satisfait, d'où :

$x^o = (5, 0, -4.5, 9)' \Rightarrow \; min \; F(x^o) = 5.5.$

On a résolut l'exemple numérique en trois itérations.

3.8 Comparaison avec la fonction fminimax de Matlab

3.9 Fonction sur Matlab

```
function f = myfun4(x) % la fonction objective

%   Detailed explanation goes here
f(1)= (0-2*x(2)+x(3)+x(4)+1)*(-1) ;      % la fonction 01

f(2)= (-2*x(1)+0-x(3)+2*x(4)+0)*(-1)    ; % la fonction 02

f(3)= (0+x(2)-3*x(3)-x(4)+1)*(-1)    ; % la fonction 03

f(4)= (x(1)-2*x(2)+x(3)+ x(4)-2)*(-1)    ; % la fonction
    04
end
```

3.10 Contraintes

```
clear all; clc ;
% La matrice des contraintes essentielles A :
aq= [];
% Le vecteur b:
bq =[];
% Le vecteur d^{*} :
ub =[5;10;2;9];
% Le vecteur d_{*} :
lb =[-6;0;-8;-4];
% La solution realisable initiale :
x0 = [0;1;0;0];
% Le code de la fonction sur Matlab :
[x,fval,maxfval] = fminimax(@myfun4,x0,[],[],aq,bq,lb,ub)
```

```
Local minimum possible. Constraints satisfied.
```

```
fminimax stopped because the size of the current search direction is less than
twice the default value of the step size tolerance and constraints are
satisfied to within the default value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>



x =

    5.0000
   -0.0000
   -4.5000
    9.0000



fval =

   -5.5000  -12.5000   -5.5000   -7.5000



maxfval =

   -5.5000
```

Chapitre 4

Résolution d'un problème min-max en programmation linéaire

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va généraliser le problème (3.1), et cela en ajoutant les contraintes généralisées. Il sera ainsi, appelé problème min-max en programmation linéaire avec des contraintes générales, puis on va le résoudre par la méthode adaptée.

4.2 Position du problème

Considérons le problème min-max suivant :

$$\begin{cases} F(x) = \underset{k \in K}{min} \, (c'_k x + \alpha_k) \to \underset{x}{max}, & (4.1a) \\ Ax = b, & (4.1b) \\ d_* \leq x \leq d^*. & (4.1c) \end{cases}$$

Où :

- $I = \{1, \ldots, m\}$, $J = \{1, \ldots, n\}$ et $K = \{1, \ldots, p\}$ sont des ensembles d'indices.
- $c_k = c_k(J)$, $k \in K$ sont des p-vecteurs et $\alpha_k, k \in K$ des scalaires .
- $x = x(J) = (x_j, j \in J)$, $d_* = d_*(J)$, $d^* = d^*(J)$, sont des n-vecteurs et $b = b(I) = (b_i, i \in I)$ est un m-vecteur.
- $A \in \mathcal{M}(m, n)$ avec rang $(A) \; = m \leq n$.

Soit $C = C(K, J)$ une $(p \times n)-$matrice formée par les vecteurs c_k.

On désigne par

$$\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \; d_* \leq x \leq d^*\},$$

le domaine des solutions réalisables.

4.3 Définitions Essentielles

Définition 4.1. Tout vecteur $x \in \mathbf{X}$ est appelé, solution réalisable du problème (4.1).

Une solution réalisable $x^o \in \mathbf{X}$ est dite optimale, si $F(x^o) = \max\limits_{x \in \mathbf{X}} F(x)$.

Une solution réalisable $x^\varepsilon \in \mathbf{X}$ est dite $\varepsilon-$optimal, si $F(x^o) - F(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$, (pour tout réel $\varepsilon > 0$ donné).

Définition 4.2. Le sous-ensemble $J_{\mathtt{sup}} \subset J$ tel que : $|J_{\mathtt{sup}}| = m$, est dit support des contraintes du problème (4.1) si la matrice $A_{\mathtt{sup}} = A(I, J_{\mathtt{sup}})$ est inversible.

En utilisant le support $J_{\mathtt{sup}}$ et la matrice C, formons la matrice des estimations suivante :

$$E(K,J) = \begin{pmatrix} E_{kj}, j \in J \\ k \in K \end{pmatrix} = C(K, J_{\mathtt{sup}}) A_{\mathtt{sup}}^{-1} A - C(K,J). \tag{4.2}$$

Choisissons les sous-ensembles :$K_{\mathtt{f}} \subseteq K$, $J_{\mathtt{f}} \subset J \setminus J_{\mathtt{sup}}$ tel que : $|K_{\mathtt{f}}| = |J_{\mathtt{f}}| + 1$, et le vecteur : $e(K) = (e_k = 1, k \in K)$, pour ainsi construire la matrice : $E_{\mathtt{f}} = \Big(E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{f}}); e(K_{\mathtt{f}})\Big)$.

Définition 4.3. L'ensemble $Q_{\mathtt{f}} = \{K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{f}}\}$ est dit support de la fonctionnelle, si la matrice $E_{\mathtt{f}}$ est inversible.

En utilisant la dernière ligne de la matrice $E_{\mathtt{f}}^{-1}$ (voir [48]), on construit le vecteur $\lambda(K) = (\lambda(K_{\mathtt{f}}), \lambda(K_{\mathtt{H}}))$, $K_{\mathtt{H}} = K \setminus K_{\mathtt{f}}$:

$$\lambda'(K_{\mathtt{f}}) = (0(J_{\mathtt{f}}), 1)' . E_{\mathtt{f}}^{-1}; \ \lambda(K_{\mathtt{H}}) = 0. \tag{4.3}$$

Définition 4.4. Le support $Q_{\mathtt{f}}$ est dit régulier si $\lambda_k \geq 0, \quad k \in K_{\mathtt{f}}$ (voir [17]).

Remarque. Le support $Q_{\mathtt{f}}$ avec $J_{\mathtt{f}} = \varnothing$, est régulier par définition. Dans la suite, on va considérer que des supports réguliers.

Définition 4.5. La paire $Q_{\mathtt{sup}} = \{J_{\mathtt{sup}}, Q_{\mathtt{f}}\}$ formé du support des contraintes et du support de la fonctionnelle, est dite support du problème.

Définition 4.6. La paire $\{x, Q_{\mathtt{sup}}\}$ formée du plan x et du support $Q_{\mathtt{sup}}$ est appelée solution réalisable de support du problème (4.1).

Définition 4.7. Une solution réalisable de support $\{x, Q_{\mathtt{sup}}\}$ est dite non-dégénérée si :

$$\begin{aligned} d_{*j} &< x_j < d_j^*, && j \in J_{\mathtt{sup}} \cup J_{\mathtt{f}}; \\ F(x) &< c_k' x + \alpha_k, && k \in K_{\mathtt{H}}. \end{aligned}$$

4.4 Critère d'optimalité

Supposons que la solution réalisable de support $\{x, Q_{\mathtt{sup}}\}$ est connue. Nous allons étudier la variation de la fonction objective lorsque la solution réalisable est changée.

4.4.1 L'accroissement de la fonctionnelle F

Soit $\{x, Q_{\mathtt{sup}}\}$ une solution réalisable de support de départ, et $\overline{x} = x + \Delta x$ une autre solution réalisable ; on va calculer l'accroissement de la fonction objective.

On dénote par $\omega_k(x) = (\omega_k,\ k \in K)$, le vecteur des écarts de la fonctionnelle i.e.,

$$\omega_k(x) = c_k' x + \alpha_k - F(x), \qquad k \in K. \tag{4.4}$$

Par définition de la fonctionnelle F, on a $F(x) \leq c_k' x + \alpha_k,\ k \in K$, car $\forall x \ \ F(x)$ est le minimum de $c_k' x + \alpha_k$.

Delà, on a :

$$\omega_k \geq 0, \quad k \in K. \tag{4.5}$$

de la formule (4.4), on a aussi :

$$\overline{\omega}_k = c_k' \overline{x} + \alpha_k - F(\overline{x})$$
$$\overline{\omega}_k = c_k' x + c_k' \Delta x + \alpha_k - F(\overline{x})$$

par la suite on a :

$$\overline{\omega}_k = c_k' x + \alpha_k - F(x) + F(x) - F(\overline{x}) + c_k' \Delta x$$
$$\overline{\omega}_k = \omega_k - (F(\overline{x}) - F(x)) + c_k' \Delta x$$
$$\overline{\omega}_k = \omega_k - \Delta F(x) + c_k' \Delta x$$

Ce qui nous donne :

$$\Delta F(x) = -(\overline{\omega}_k - \omega_k) + c_k' \Delta x$$
$$\Delta F(x) = -\Delta \omega_k + c_k' \Delta x, \quad k \in K.$$

où : $\quad \Delta \omega_k = \overline{\omega}_k - \omega_k,\ k \in K.$

Delà, on a :

$$\overline{\omega}_k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\omega}_k = \omega_k + \Delta \omega_k \geq 0, \quad k \in K. \tag{4.6}$$

Ceci nous donne :

$$\Delta \omega_k(x) \geq -\omega_k(x), \quad \forall k \in K. \tag{4.7}$$

On a :

$$\Delta F(x) = c_k' \Delta x - \Delta \omega_k, \quad k \in K. \tag{4.8}$$

En multipliant l'équation (4.8) par λ_k et en sommant par rapport à $K_{\mathtt{f}}$, on obtient :

$$\Delta F(x) = \sum_{j \in J_{\mathrm{H}}} E_j \Delta x_j - \sum_{k \in K} \lambda_k . \Delta \omega_k(x), \tag{4.9}$$

où : $E_j = \sum\limits_{k \in K} \lambda_k E_{kj}$, $j \in J_{\mathtt{H}} = J \setminus (J_{\mathtt{sup}} \cup J_{\mathtt{f}})$.

E_j sera appelé le vecteur des estimations.

Le maximum de (4.9), sous les contraintes suivantes :

$$d_{*j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^* - x_j, \ j \in J_{\mathtt{H}} ;$$
$$\Delta \omega_k \geq -\omega_k, \ k \in K_{\mathtt{f}} .$$

est égale à :

$$\beta\left(x, Q_{\mathtt{sup}}\right) = \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^{+}} E_j (x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^{-}} E_j (x_j - d_j^*) + \sum_{k \in K_{\mathtt{f}}} \lambda_k \omega_k . \tag{4.10}$$

appelée valeur de sub-optimalité, où :

$$J_{\mathtt{H}}^{+} = \{ j \in J_{\mathtt{H}} : \ E_j > 0 \} \quad \text{et} \quad J_{\mathtt{H}}^{-} = \{ j \in J_{\mathtt{H}} : \ E_j < 0 \} .$$

Delà :

$F\left(\overline{x}\right) - F(x) \leq \beta\left(x, Q_{\mathtt{sup}}\right), \ \forall x \in \mathbf{X}$,

donc pour $\overline{x} = x^o$, on aura :

$$F\left(x^o\right) - F(x) \leq \beta\left(x, Q_{\mathtt{sup}}\right), \ \forall x \in \mathbf{X}. \tag{4.11}$$

De cette inégalité, on déduit les deux théorèmes suivants :

Théoreme 4.1. (Critère d'optimalité).

Soit $\{x, Q_{\mathtt{sup}}\}$ une solution réalisable de support de départ, les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_j = d_{*j} & \text{si} \quad E_j > 0, \\ x_j = d_j^* & \text{si} \quad E_j < 0, \\ d_{*j} \leq x_j \leq d_j^* & \text{si} \quad E_j = 0, \ j \in J_{\mathtt{H}}. \\ \omega_k = 0 & \text{si} \quad \lambda_k > 0, \\ \omega_k > 0 & \text{si} \quad \lambda_k = 0, \ k \in K_{\mathtt{f}}. \end{cases} \tag{4.12}$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité de la solution réalisable de support $\{x, Q_{\mathtt{sup}}\}$.

Preuve. La preuve de ce théorème est basée sur le même principe que la preuve du théorème 1.1.

$\Rightarrow$) **Condition suffisante** : Soit $\{x, Q_{\texttt{sup}}\}$ une SRS admissible.

si : $\beta\,(x, Q_{\texttt{sup}}) \leq \varepsilon$, alors de (4.11) on a : $F(\overline{x}) - F(x) \leq \beta\,(x, Q_{\texttt{sup}})\,,\ \forall \overline{x}$.

Ce qui donne $F(\overline{x}) - F(x) \leq \varepsilon,\ \forall\, \overline{x}$,

donc x est $\varepsilon-$optimal.

$\Leftarrow$) **Condition nécessaire** :

Soit $\{x, Q_{\texttt{sup}}\}$ une SRS non-dégénéré et supposons que les relations (4.12) ne sont pas vérifiées, on a alors les deux cas suivants :

(a) $\exists\ j_0 \in J_{\texttt{H}} \setminus E_{j_0} > 0,\ x_{j_0} > d_{j_0}$ ou $E_{j_0} < 0,\ x_{j_0} < d_{j_0}$.

(b) $\exists\ k_0 \in K_{\texttt{f}} \setminus \lambda_{k_0} > 0,\ \omega_{k_0} > 0$.

On va traiter les cas 1. et 2. indépendamment l'un de l'autre et nous allons construire une nouvelle solution réalisable $\overline{x} = x + \theta\ell$ avec $(\theta > 0)$:

- Considérons le cas (a) soit :

  $\Delta\omega_K = 0, k \in K_{\texttt{H}}$; $\ell_j = 0$ si $j \in J_{\texttt{H}} \backslash j_0$; $\ell(J_{\texttt{sup}}) = -A_{\texttt{sup}}^{-1} A(I, J_{\texttt{H}})\ell(J_{\texttt{H}}) - A_{\texttt{sup}}^{-1} A(I, J_{\texttt{f}})\ell(J_{\texttt{f}})$; $\ell_j = D(J_{\texttt{f}}, K_{\texttt{f}})E(K_{\texttt{f}}, J_{\texttt{H}})\ell(J_{\texttt{H}})$ si $j \in J_{\texttt{f}}$; $\ell_j = \text{sign}(\alpha_0)$ si $j = j_0$ où : $\alpha_0 = \begin{cases} d_{*j_0} - x_{j_0} \text{ si } E_{j_0} > 0 \text{ et } x_{j_0} > d_{*j_0}, \\ d^*_{j_0} - x_{j_0} \text{ si } E_{j_0} > 0 \text{ et } x_{j_0} < d^*_{j_0}. \end{cases}$

  Si :

  $E_{j_0} > 0$ et $x_{j_0} > d_{*j_0}$, donc $\exists\ \theta_1 > 0\ /\ x_{j_0} - \theta_1 \geq d_{*j_0}$.

  $E_{j_0} < 0$ et $x_{j_0} < d^*_{j_0}$, donc $\exists\ \theta_1 > 0\ /\ x_{j_0} + \theta_1 \leq d^*_{j_0}$.

  des deux cas ci-dessus, on obtient : $d_{*j_0} \leq \overline{x}_{j_0} = x_{j_0} + \theta_1 \text{sign}(\alpha_0) \leq d^*_{j_0}$

  $$\Rightarrow \qquad d_{*j} \leq \overline{x}_j = x_j + \theta_1 \ell \leq d^*_j,\ \forall j \in J_{\texttt{H}}.$$

  et comme $\{x, Q_{\texttt{sup}}\}$ est une solution réalisable de support non-dégénéré, on a :

  $$\exists\ \theta_2 > 0 \text{ tel que : } d_{*j} \leq x_j + \theta_2 \ell_j \leq d^*_j,\ \forall j \in J_{\texttt{sup}} \cup J_{\texttt{f}}.$$

  Pour un $\theta = min\,\{\theta_1, \theta_2\}$, $\overline{x} = x + \theta\ell$ est une solution réalisable du problème (4.1) et on obtient : $\Delta F(x) = -\theta^o E_{j_0}\ \text{sign}(\alpha_0) > 0$,

  ce qui contredit l'optimalité de la solution réalisable de support $\{x, Q_{\texttt{sup}}\}$.

- Considérons le cas (b) soit :

  $\Delta\omega_k = -\theta_1 \omega_{k_0}$ si $k = k_0$, $\Delta\omega_k = 0\ \forall k \in K_{\texttt{f}} \setminus k_0$; $\ell_j = 0\ \forall j \in J_{\texttt{H}}$; $\ell_j = D(J_{\texttt{f}}, K_{\texttt{f}})E(K_{\texttt{f}}, J_{\texttt{H}})\ \forall j \in J_{\texttt{f}}$; $\ell(J_{\texttt{sup}}) = -A_{\texttt{sup}}^{-1} A(I, J_{\texttt{H}})\ell(J_{\texttt{H}}) - A_{\texttt{sup}}^{-1} A(I, J_{\texttt{f}})\ell(J_{\texttt{f}})$.

  $$\Delta\omega_k = \begin{cases} -\theta_1 \omega_{k_0} & \text{si } k = k_0 \\ 0 & \forall k \in K_{\texttt{f}} \setminus k_0 \end{cases} \quad \text{et } \ell_j = \begin{cases} 0 & \forall j \in J_{\texttt{H}} \\ D(J_{\texttt{f}}, K_{\texttt{f}})E(K_{\texttt{f}}, J_{\texttt{H}}) & \forall j \in J_{\texttt{f}} \end{cases}$$

Comme $\{x, Q_{\mathtt{sup}}\}$ est une (S-RS) non-dégénéré, donc :

$$\exists\ \theta_2 > 0,\ \text{ tq }\ d_{*j} \leq x_j + \theta_2 \ell_j \leq d_j^*,\ \forall j \in J_{\mathtt{f}}.$$

D'où pour un θ, suffisamment petit $\overline{x} = x + \theta\ell$ est une solution réalisable du problème (4.1) et on obtient : $\Delta F(x) = \theta\lambda_{k_0}\omega_{k_0} > 0$.
Ce qui contredit l'optimalité de la solution réalisable de support $\{x, Q_{\mathtt{sup}}\}$.

□

4.4.2 Critère de sub-optimalité

Théoreme 4.2 (Critère de sub-optimalité)**.** Soit $\varepsilon > 0$ donné. Pour l'$\varepsilon-$optimalité de la solution réalisable x, il faut et il suffit qu'il existe un tel support $Q_{\mathtt{sup}}$, pour lequel :

$$\beta\left(x, Q_{\mathtt{sup}}\right) \leq \varepsilon.$$

Preuve. .

⇒) **Condition suffisante :** Soit $\varepsilon > 0$.
de (4.11), on a : $F(x^o) - F(x) \leq \beta(x, Q_{\mathtt{sup}}) \leq \varepsilon$,
alors pour : $\beta(x, Q_{\mathtt{sup}}) \leq \varepsilon \ \Rightarrow\ F(x^o) - F(x) \leq \varepsilon$
d'où x est $\varepsilon - optimal$.

⇐) **Condition nécessaire :** On va décomposer la valeur de suboptimalité (3.10), comme suit :

$$\beta\left(x, Q_{\mathtt{sup}}\right) = \sum_{j\in J_{\mathtt{H}}} E_j x_j - \sum_{j\in J_{\mathtt{H}}^+} E_j d_{*j} - \sum_{j\in J_{\mathtt{H}}^-} E_j d_j^* + \sum_{k\in K_{\mathtt{f}}} \lambda_k\omega_k,$$

Maintenant, on va construire le problème dual du problème (1.2) qui est le suivant :

$$\begin{cases} \Phi(X) = \lambda'\alpha + b'y - d'_*v + d'^*w \rightarrow min, \\ -\lambda'(K).C(K,J) + y'(I).A(I,J) - v'(J) + w'(J) = 0, \\ \lambda'(K).e(K) = 1, \\ \lambda \in \mathbb{R}_+^p,\ v, w \in \mathbb{R}_+^n,\ y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{4.13}$$

Ainsi, le problème (4.1) sera appelé le primal du problème (4.13).

Le quadruplet $X = (\lambda, y, v, w)$, construit comme suit :

$$\begin{cases} \lambda'(K_{\mathtt{f}}) = (0(J_{\mathtt{f}}), 1)' \, .E_{\mathtt{f}}^{-1}, \quad \lambda(K_{\mathtt{H}}) = 0; \\ y'(I) = \lambda'(K_{\mathtt{f}}).C(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{sup}})A_{\mathtt{sup}}^{-1}; \\ v_j = E_j, \ w_j = 0, \ \text{ si } \ E_j \geq 0; \\ v_j = 0, \ w_j = -E_j, \ \text{ si } \ E_j < 0; \ j \in J. \end{cases} \tag{4.14}$$

vérifiant toutes les contraintes du problème (4.13), est appelé solution réalisable duale du problème (4.13).

En utilisant cette SRD, nous allons faire une décomposition de la valeur de sub-optimalité. De (4.10) on a :

$$\beta\left(x, Q_{\mathtt{sup}}\right) = \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}} E_j x_j - \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^{+}} E_j d_{*j} - \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^{-}} E_j d_j^{*} \ + \sum_{k \in K_{\mathtt{f}}} \lambda_k \omega_k, \tag{4.15}$$

En utilisant les relations (4.2), (4.4) et (4.14), on aura

$$\begin{aligned} \lambda'(K_{\mathtt{f}}).\omega(K_{\mathtt{f}}) =& \lambda'(K_{\mathtt{f}}). \left[C(K_{\mathtt{f}}, J)x(J) + \alpha(K_{\mathtt{f}}) - e'(K_{\mathtt{f}}).f(x)\right] \\ =& - \lambda'(K_{\mathtt{f}}).E(K_{\mathtt{f}}, J)x(J) + y(I)'.A(I, J)x(J) + \lambda'(K_{\mathtt{f}}).\alpha(K_{\mathtt{f}}) \\ & - \lambda'(K_{\mathtt{f}}).e(K_{\mathtt{f}})F(x). \end{aligned}$$

En substituant toutes ces valeurs trouvés dans (4.15), on obtient :

$$\begin{aligned} \beta\left(x, Q_{\mathtt{sup}}\right) &= \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}} E_j x_j - d_*' v + d'^{*} w - \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}} E_j x_j + b_i' y + \lambda' \alpha - F(x) \\ &\quad + F(x^o) - \Phi(X^o) \\ &= F(x^o) - F(x) + (\lambda' \alpha + b' y - d_*' v + d' w - \Phi(X^o)) \\ &= F(x^o) - F(x) + \Phi(X) - \Phi(X^o) \\ \beta\left(x, Q_{\mathtt{sup}}\right) &= \beta_{\mathtt{x}} + \beta_{\mathtt{sup}}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

où

- $\beta_{\mathtt{x}} = \left(F\left(x^o\right) - F\left(x\right)\right)$, est appelé la mesure de non-optimalité de la solution réalisable x.
- $\beta_{\mathtt{sup}} = \left(\Phi\left(X\right) - \Phi\left(X^o\right)\right)$, est appelé la mesure de non-optimalité du support $Q_{\mathtt{sup}}$.

Ainsi, pour un support $J_{\mathtt{sup}}$ optimal, on aura :

$\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda^o) \ \Rightarrow \ \beta\left(x, J_{\mathtt{sup}}\right) = c' x^o - c' x \leq \varepsilon.$

et par conséquent x est $\varepsilon-$optimal.

□

4.5 Algorithme de résolution

4.5.1 Initialisation de la solution réalisable

Pour résoudre le problème (4.1) on choisit un vecteur $x^1 \in \mathbb{R}^n$, qui vérifie les contraintes (4.1c)($d_* \leq x^1 \leq d^*$). Ensuite, on vérifie si x^1 est admissible :

(i). Si $Ax^1 = b$, alors x^1 est une solution initiale réalisable du problème de départ, et on prend $\{x^1, Q_{\mathtt{sup}}\}$ comme SRS de départ. où $Q_{\mathtt{f}}$ est : $J_{\mathtt{f}} = \varnothing$ et $K_{\mathtt{f}} = \{k_0\}$. k_0 : est l'indice réalisant le minimum de $(c'_k x + \alpha_k)$, pour la solution réalisable x.

(ii). Si $Ax^1 \neq b$, nous suggérons la technique de variable artificielle (initialement présenté dans [13], pour résoudre des problèmes simple de PL).
On calcule l'écart entre le premier et le second membre noté par $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$: $\gamma = b - Ax^1$.
Delà on va reformuler le problème de départ à un autre problème avec des variables artificielles :

$$\begin{cases} F_a(x) = \min\limits_{k \in K} (c'_k x + \alpha_k - Me' x_\mu) \to \max\limits_{x, x_\mu}, \\ \qquad Ax + x_\mu sign\gamma = b, \\ \qquad d_* \leq x \leq d^*, \\ \qquad x_\mu \geq 0. \end{cases} \tag{4.17}$$

où :
$x_\mu = (x_{n+1} sign\gamma_1, \ldots, x_{n+m} sign\gamma_m)$ et M est un nombre réel positif suffisamment grand ($M \gg 0$).
De là, $\{x^1, x_\mu\}$ est une SR, le support $J_{\mathtt{sup}} = \{n+1, \ldots, n+m\}$, $J_{\mathtt{f}} = \varnothing$, $K_{\mathtt{f}} = \{k_0\}$ et $A_{\mathtt{sup}} = \begin{pmatrix} sign\gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & sign\gamma_m \end{pmatrix}$.
Après l'obtention d'une SRS optimale, si $(x_\mu = 0)$ alors x est une SR optimale du problème (4.1), dans le cas où $(x_\mu \neq 0)$ alors les contraintes du problème (4.1) sont contradictoires.

Dans les deux cas **(i)** et **(ii)** on a une SRS de départ pour commencer le processus de résolution. Supposons que pour cette SRS le critère d'optimalité n'est pas vérifié et que $\beta(x, Q_{\mathtt{sup}}) > \varepsilon$, alors on passe à l'itération de l'algorithme, qui est constitué de deux procédures :

(a) Changement de la solution réalisable $(x \to \overline{x})$.

(b) Changement du support $\left(Q_{\mathtt{sup}} \to \overline{Q}_{\mathtt{sup}}\right)$.

4.5.2 Changement de la solution réalisable

Le changement de la solution réalisable x vers une autre $\overline{x} = x + \theta^o \ell$, aura pour effet d'augmenter la valeur de la fonctionnelle $(F(\overline{x}) \geq F(x))$, où : $\ell(J) = (\ell_j, j \in J)$ est le vecteur de direction d'amélioration du point x et $\theta^o \geq 0$ est le pas maximal le long de cette direction.

4.5.2.1 Détermination de la direction ℓ

Sur $J_{\mathtt{H}}$, on choisit $\theta = 1$ et le vecteur $\ell(J)$, est construit comme suit :

$$\ell_j = \begin{cases} d_{*j} - x_j & \text{si} \quad E_j > 0, \\ d_j^* - x_j & \text{si} \quad E_j < 0, \\ 0 & \text{si} \quad E_j = 0, \quad j \in J_{\mathtt{H}}. \end{cases}$$

Pour un θ suffisamment petit $(0 < \theta \leq 1)$, la relation (4.7) peut s'écrire comme suit :

$$\Delta\omega(K_{\mathtt{f}}) = -\theta\omega(K_{\mathtt{f}}), \tag{4.18}$$

d'où :

$$-E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{H}})\theta\ell(J_{\mathtt{H}}) - E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{f}})\theta\ell(J_{\mathtt{f}}) - e'(K_{\mathtt{f}}).\Delta f(x) = -\theta\omega(K_{\mathtt{f}})$$

$$-\left(E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{f}}), e(K_{\mathtt{f}})\right) \begin{pmatrix} \theta\ell(J_{\mathtt{f}}) \\ \Delta F(x) \end{pmatrix} = \theta E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{H}})\ell(J_{\mathtt{H}}) - \theta\omega(K_{\mathtt{f}})$$

$$\begin{pmatrix} \theta\ell(J_{\mathtt{f}}) \\ \Delta F(x) \end{pmatrix} = -\theta E_{\mathtt{f}}^{-1}\left(J_{\mathtt{f}}, K_{\mathtt{f}}\right) E\left(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{H}}\right) \ell(J_{\mathtt{H}}) - \theta E_{\mathtt{f}}^{-1}\left(J_{\mathtt{f}}, K_{\mathtt{f}}\right) \omega(K_{\mathtt{f}}),$$

et on obtiendra :

$$\ell(J_{\mathtt{f}}) = -E_{\mathtt{f}}^{-1}(J_{\mathtt{f}}, K_{\mathtt{f}})E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{H}})\ell(J_{\mathtt{H}}) + E_{\mathtt{f}}^{-1}(J_{\mathtt{f}}, K_{\mathtt{f}})\omega(K_{\mathtt{f}}).$$

et de l'admissibilité de $\overline{x}$, on aura :

$$\ell(J_{\mathtt{sup}}) = -A_{\mathtt{sup}}^{-1}A(I, J_{\mathtt{H}})\ell(J_{\mathtt{H}}) - A_{\mathtt{sup}}^{-1}A(I, J_{\mathtt{f}})\ell(J_{\mathtt{f}}).$$

4.5.2.2 Détermination du pas maximal admissible

On calcule θ^o tel que $\overline{x}$ satisfera aux contraintes (4.1c), pour cela :

- Sur $J_{\mathtt{sup}} \cup J_{\mathtt{f}}$:

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{*j} - x_j}{\ell_j}, & \text{si} \quad \ell_j < 0; \\ \dfrac{d_j^* - x_j}{\ell_j}, & \text{si} \quad \ell_j > 0; \\ \infty, & \text{si} \quad \ell_j = 0, \ j \in J_{\mathtt{sup}} \cup J_{\mathtt{f}}. \end{cases}$$

- Sur $K_{\mathtt{H}}$:

$$\theta_k = \begin{cases} \dfrac{\omega_k}{\beta\left(x, Q_{\mathtt{sup}}\right) - c_k'\ell}, & \text{si} \quad \beta\left(x, Q_{\mathtt{sup}}\right) > c_k'\ell; \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Delà le pas maximal sera $\theta^o = min\left\{1, \theta_{j_0}, \theta_{k_0}\right\}$ où $\theta_{j_0} = \underset{j \in J_{\mathtt{sup}} \cup J_{\mathtt{f}}}{min}(\theta_j)$ et $\theta_{k_0} = \underset{k \in K_{\mathtt{H}}}{min}(\theta_k)$.

Ainsi, on aura $\overline{x} = x + \theta^o \ell$ une solution réalisable du problème (4.1).

4.5.2.3 Calcul de la valeur de sub-optimalité

En utilisant la solution réalisable $\overline{x}$ trouvée ci-dessus dans (4.10), on obtient :

$$\begin{aligned} \beta\left(\overline{x}, Q_{\mathtt{sup}}\right) &= \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^+} E_j\left(\overline{x}_j - d_{*j}\right) + \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^-} E_j\left(\overline{x}_j - d_j^*\right) + \sum_{k \in K_{\mathtt{f}}} \lambda_k \overline{\omega}_k \\ &= \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^+} E_j(x + \theta^o \ell) - \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^+} E_j d_{*j} + \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^-} E_j(x + \theta^o \ell) - \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^-} E_j d_j^* \\ &\quad + \sum_{k \in K_{\mathtt{f}}} \lambda_k\left((1 - \theta^o)\omega_k\right) \\ &= \sum_{j \in J} E_j x_j + \theta^o \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^+} E_j \ell_j - \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^+} E_j d_{*j} + \theta^o \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^-} E_j \ell_j - \sum_{j \in J_{\mathtt{H}}^-} E_j d_j^* \\ &\quad + (1 - \theta^o) \sum_{k \in K_{\mathtt{f}}} \lambda_k \omega_k \\ \beta\left(\overline{x}, Q_{\mathtt{sup}}\right) &= (1 - \theta^o)\, \beta\left(x, Q_{\mathtt{sup}}\right). \end{aligned}$$

de là :

- Si $\theta^o = 1$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable optimale.
- Si $\beta\left(\overline{x}, Q_{\mathtt{sup}}\right) \leq \varepsilon$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable ε-optimale.
- Si $\beta\left(\overline{x}, Q_{\mathtt{sup}}\right) > \varepsilon$, on passe au changement de support.

4.5.3 Changement de support.

Le changement de support $\left(Q_{\mathtt{sup}} \rightarrow \overline{Q}_{\mathtt{sup}}\right)$ consiste à faire un changement du coplan E vers $\overline{E}$, ce qui aura pour effet la diminution de la valeur de la fonction duale et on va avoir : $\beta\left(\overline{x}, \overline{Q}_{\mathtt{sup}}\right) \leq \beta\left(\overline{x}, Q_{\mathtt{sup}}\right)$.

Pour cela, on pose :

$\overline{E}(J) = E(J) + \sigma^o t(J)$, $\overline{\lambda} = \lambda + \sigma^o \delta\lambda$, où $t(J) = (t_j, j \in J)$, $\delta\lambda(K) = (\delta\lambda_k, k \in K)$

sont les directions de la diminution de la fonction duale et σ^o ($\sigma \geq 0$) est le pas maximal le long de cette direction.

En utilisant le vecteurs des estimations calculés sur le support $Q_{\texttt{sup}}$, on aura :

$$\overline{E} = \overline{E}$$
$$E(J) + \sigma^o t(J) = (u + \sigma^o \delta u)'.A - (\lambda + \sigma^o \delta \lambda)'.C$$
$$E(J) + \sigma^o t(J) = u'.A + \sigma^o \delta u'.A - \lambda' C - \sigma^o \delta \lambda'.C$$

on obtiendra :

$$t'(J) \;=\; \delta u'(I).A(I,J) - \delta\lambda'(K).C(K,J). \tag{4.19}$$

de (4.19) on aura :

$$t'(J_{\texttt{sup}}) = \delta u'(I).A(I,J_{\texttt{sup}}) - \delta\lambda'(K).C(K,J_{\texttt{sup}}). \tag{4.20}$$

d'où :

$$\delta u'(I) = t'(J_{\texttt{sup}}).A^{-1}_{\texttt{sup}} + \delta\lambda'(K).C(K,J_{\texttt{sup}})A^{-1}_{\texttt{sup}}.$$

En Substituant $\delta u'(I)$ par sa valeur (ci-dessus), dans la relation (4.19), on aura :

$$t'(J) = t'(J_{\texttt{sup}}).A^{-1}_{\texttt{sup}}A(I,J) + \delta\lambda'(K).E(K,J). \tag{4.21}$$

Pour le vecteur $\overline{\lambda}(K)$ on a :

$\overline{\lambda}'.e(K) = \lambda'.e(K) + \sigma^o \delta\lambda'.e(K)$ et comme :

$\overline{\lambda}'(K).e(K) = \lambda'(K).e(K) = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta\lambda'(K).e(K) = 0,$

alors :

$$\delta\lambda'(K_{\texttt{f}}).e(K_{\texttt{f}}) + \delta\lambda'(K_{\texttt{H}}).e(K_{\texttt{H}}) = 0. \tag{4.22}$$

de la relation (4.21), on aura :

$$t'(J_{\texttt{f}}) = t'(J_{\texttt{sup}}).A^{-1}_{\texttt{sup}}A(I,J_{\texttt{f}}) + \delta\lambda'(K_{\texttt{f}}).E(K_{\texttt{f}},J_{\texttt{f}}) + \delta\lambda'(K_{\texttt{H}}).E(K_{\texttt{H}},J_{\texttt{f}}). \tag{4.23}$$

Des relations (4.22) et (4.23), on obtient :

$$\begin{aligned}(t'(J_{\texttt{f}}),0) = \left(t'(J_{\texttt{sup}}).A^{-1}_{\texttt{sup}}A(I,J_{\texttt{f}}),0\right) &+ \delta\lambda'(K_{\texttt{f}}).\left(E(K_{\texttt{f}},J_{\texttt{f}}),e(K_{\texttt{f}})\right)\\ &+ \delta\lambda'(K_{\texttt{H}}).\left(E(K_{\texttt{H}},J_{\texttt{f}}),e(K_{\texttt{H}})\right).\end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned}\delta\lambda'(K_{\texttt{f}}) = (t(J_{\texttt{f}}),0)'.E^{-1}_{\texttt{f}} - \left(t'(J_{\texttt{sup}}).A^{-1}_{\texttt{sup}}A(I,J_{\texttt{f}}),0\right)E^{-1}_{\texttt{f}}\\ - \delta\lambda'(K_{\texttt{H}}).\left(E(K_{\texttt{H}},J_{\texttt{H}}),e(K_{\texttt{H}})\right)E^{-1}_{\texttt{f}}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Et de (4.21) on obtient aussi :

$$t'(J_{\mathtt{H}}) = t'(J_{\mathtt{sup}}).A_{\mathtt{sup}}^{-1}A(I, J_{\mathtt{H}}) + \delta\lambda'(K_{\mathtt{f}}).E(K_{\mathtt{f}}, J_{\mathtt{H}}) + \delta\lambda'(K_{\mathtt{H}}).E(K_{\mathtt{H}}, J_{\mathtt{H}}). \tag{4.25}$$

Ainsi, on sait que $\theta^o = min\left\{1, \theta_{j_0}, \theta_{k_0}\right\}$ (où : $\theta_{j_0} = \underset{j\in J_{\mathtt{sup}}\cup J_{\mathtt{f}}}{min}(\theta_j)$ et $\theta_{k_0} = \underset{k\in K_{\mathtt{H}}}{min}(\theta_k)$), on va chercher un indice (j_* ou k_*) qui va entrer dans le nouveau support à la place de j_0 ou k_0 (j_0 ou k_0 va sortir du support).

Pour cela, on pose :

$$t_j = \begin{cases} -\text{sign}(\ell_{j_0}), & \text{si} \quad j = j_0; \\ 0, & \text{si} \quad j \in J_{\mathtt{sup}} \cup J_{\mathtt{f}}. \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta\lambda_k = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad k = k_0; \\ 0, & \text{si} \quad k \in K_{\mathtt{H}}. \end{cases}$$

Puis, on calcule les différents pas $\sigma_j, j \in J_{\mathtt{H}}$; $\sigma_k, k \in K_{\mathtt{f}}$, selon les règles de [13, 16]

- $\sigma_{j_*} = \min\limits_{j\in J_{\mathtt{H}}}(\sigma_j)$, où

$$\sigma_j = \begin{cases} -\dfrac{E_j}{t_j}, & \text{si} \quad E_j\ t_j < 0; \\ 0, & \text{si} \quad E_j = 0,\ x_j \neq d_{*j},\ t_j > 0 \ \text{ ou} \\ & \qquad E_j = 0,\ x_j \neq d_j^*,\ t_j < 0,\ j \in J_H; \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $\sigma_{k_*} = \min\limits_{k\in K_{\mathtt{f}}}(\sigma_k)$, où

$$\sigma_k = \begin{cases} -\dfrac{\lambda_k}{\delta\lambda_k}, & \text{si} \quad \delta\lambda_k\lambda_k < 0; \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

et on prend $\sigma^o = \min\left\{\sigma_{j_*}, \sigma_{k_*}\right\}$.

Ainsi le nouveau support sera :

— **Cas où :** $\theta^o = \theta_{j_0}$. Ici, on distingue deux cas :

1. **Si :** $j_0 \in J_{\mathtt{f}}$, on pose :

   $t'(J_{\mathtt{f}} \setminus j_0) = 0$, avec : $t_{j_0} = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad \overline{x}_{j_0} = d_{*j_0}, \\ -1 & \text{si} \quad \overline{x}_{j_0} = d_{j_0}^*. \end{cases}$, $t'(J_{\mathtt{sup}}) = 0$ et $\delta\lambda'(K_{\mathtt{H}}) = 0$.

   le nouveau support est :

   — **Si :** $\sigma^o = \sigma_{j_*}$, **alors :**

   $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}}$, $\overline{J}_{\mathtt{f}} = (J_{\mathtt{f}} \setminus j_0) \cup j_*$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}}$.

— **Si :** $\sigma^o = \sigma_{k_*}$, **alors :**

$\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}}, \overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}} \setminus j_0$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}} \setminus k_*$.

2. **Si :** $j_0 \in J_{\mathtt{sup}}$, on pose :

$$t'(J_{\mathtt{f}}) = 0, \; t'(J_{\mathtt{sup}} \setminus j_0) = 0 \text{ avec : } t_{j_0} = \begin{cases} +1 & \text{si } \overline{x}_{j_0} = d_{*j_0}, \\ -1 & \text{si } \overline{x}_{j_0} = d^*_{j_0}. \end{cases} \quad \text{et}$$

$\delta\lambda'(K_{\mathtt{H}}) = 0$.

Le changement de support se fera selon les deux cas suivant :

(a) **si :** $\exists\, j_1 \in J_{\mathtt{f}}$ tq : $t'(J_{\mathtt{sup}}).A^{-1}_{\mathtt{sup}}A(I, j_1) \neq 0$, on change la place des deux indices j_0 et j_1 :

$J_{\mathtt{sup}_1} = (J_{\mathtt{sup}} \setminus j_0) \cup j_1$, $J_{\mathtt{f}_1} = (J_{\mathtt{f}} \setminus j_1) \cup j_0$ and $K_{\mathtt{f}_1} = K_{\mathtt{f}}$.

Alors :

— **Si :** $\sigma^o = \sigma_{j_*}$, **alors :**

$\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}_1}, \overline{J}_{\mathtt{f}} = (J_{\mathtt{f}_1} \setminus j_0) \cup j_*$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}_1}$.

— **Si :** $\sigma^o = \sigma_{k_*}$, **alors :**

$\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}_1}$, $\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}_1} \setminus j_0$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}} \setminus k_*$.

(b) **si :** $\nexists\, j_1 \in J_{\mathtt{f}}$ tel que : $t'(J_{\mathtt{sup}}).A^{-1}_{\mathtt{sup}}A(I, j_1) \neq 0$, on calcul $\sigma^o = \sigma_{j_*}$, alors le nouveau support est :

$\overline{J}_{\mathtt{sup}} = (J_{\mathtt{sup}} \setminus j_0) \cup j_*$, $\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}}$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}}$.

— **Cas où :** $\theta^o = \theta_{k_0}$, on pose :

$t'(J_{\mathtt{sup}}) = 0$, $t'(J_{\mathtt{f}}) = 0$ et $\delta\lambda'(K_{\mathtt{H}} \setminus k_0) = 0$, avec : $\delta\lambda_{k_0} = +1$.

— **Si :** $\sigma^o = \sigma_{j_*}$, **alors :**

$\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}}$, $\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}} \cup j_*$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}} \cup k_*$.

— **Si :** $\sigma^o = \sigma_{k_*}$, **alors :**

$\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}}$, $\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}}$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = (K_{\mathtt{f}} \setminus k_*) \cup k_0$.

Remarque. L'algorithme de la méthode adaptée est fini si pour chaque itération, on n'obtient pas une solution réalisable de support très dégénéré (voir [13]).

4.6 Résumé de l'algorithme de résolution

1. Soit $\{x, Q_{\texttt{sup}}\}$ une solution réalisable de support du problème (4.1) et $(\varepsilon \geq 0)$.
2. Calculer $\beta\,(x, Q_{\texttt{sup}})$,
   - ➤ Si $\beta\,(x, Q_{\texttt{sup}}) = 0$, alors $\{x, Q_{\texttt{sup}}\}$ est une SRS optimale.
   - ➤ Si $\beta\,(x, Q_{\texttt{sup}}) < \varepsilon$, alors $\{x, Q_{\texttt{sup}}\}$ est une SRS ε-optimale.
   - ➤ Si $\beta\,(x, Q_{\texttt{sup}}) > \varepsilon$, alors continuer le processus.
3. Calculer ;
   - le vecteur $\ell(J)$.
   - $\theta^o = min\{1; \theta_{k_0}; \theta_{j_0}\}$.
   - calculer $\overline{x}$,
     - ➤ Si $\beta\,(\overline{x}, Q_{\texttt{sup}}) = 0$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable optimale.
     - ➤ Si $\beta\,(\overline{x}, Q_{\texttt{sup}}) < \varepsilon$, alors $\overline{x}$ est une solution réalisable ε-optimale.
     - ➤ Si $\beta\,(\overline{x}, Q_{\texttt{sup}}) > \varepsilon$, alors continuer le processus.
4. Si :
   - ➤ $\theta^o = \theta_{k_0}$

     $\delta\lambda_{k_0} = 1$; $\delta\lambda(K_{\texttt{H}} \setminus k_0) = 0$; $t(J_{\texttt{sup}} \cup J_{\texttt{f}}) = 0$.

     $\delta\lambda(K_{\texttt{f}}) = -\delta\lambda(K_{\texttt{H}})\,(E(K_{\texttt{H}}, J_{\texttt{f}}); e(K_{\texttt{H}}))\,E_{\texttt{f}}^{-1}$.

     $t(J_{\texttt{H}}) = \delta\lambda(K)E(K, J_{\texttt{H}})$.

     aller à 7.
   - ➤ $\theta^o = \theta_{j_0},\ j_0 \in J_{\texttt{sup}}$

     $t(j_0) = -\text{signe}(\ell_{j_0})$; $t(J_{\texttt{sup}} \setminus j_0) = 0$; $t(J_{\texttt{f}}) = 0$; $\delta\lambda(K_{\texttt{H}}) = 0$.

     $\delta\lambda'(K_{\texttt{f}}) = -\left(t'(J_{\texttt{sup}}).A_{\texttt{sup}}^{-1}A(I, J_{\texttt{f}}), 0\right)\,E_{\texttt{f}}^{-1}$.

     $t'(J_{\texttt{H}}) = t'(J_{\texttt{sup}}).A_{\texttt{sup}}^{-1}A(I, J_{\texttt{H}}) + \delta\lambda'(K_{\texttt{f}}).E(K_{\texttt{f}}, J_{\texttt{H}})$.

     aller à 5.
   - ➤ $\theta^o = \theta_{j_0},\ j_0 \in J_{\texttt{f}}$

     $t(j_0) = -\text{sing}(\ell_{j_0})$; $t(J_{\texttt{f}} \setminus j_0) = 0$; $t(J_{\texttt{sup}}) = 0$; $\delta\lambda(K_{\texttt{H}}) = 0$.

     $\delta\lambda'(K_{\texttt{f}}) = (t(J_{\texttt{f}}), 0)'\,.E_{\texttt{f}}^{-1}$.

     $t'(J_{\texttt{H}}) = \delta\lambda'(K_{\texttt{f}}).E(K_{\texttt{f}}, J_{\texttt{H}})$.

     aller à 6.
5. — **Si** $\exists\ j_1 \in J_{\texttt{f}}\ \setminus t'(J_{\texttt{sup}}).A_{\texttt{sup}}^{-1}A(I, j_1) \neq 0$, alors :

   $J_{\texttt{sup}_1} = (J_{\texttt{sup}} \setminus j_0) \cup j_1$, $J_{\texttt{f}_1} = (J_{\texttt{f}} \setminus j_1) \cup j_0$ et $K_{\texttt{f}_1} = K_{\texttt{f}}$. Faire comme dans le cas $\theta^o = \theta_{j_0},\ j_0 \in J_{\texttt{f}}$

si : $\sigma^o = \sigma_{j_*}$, alors : $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}_1}, \overline{J}_{\mathtt{f}} = (J_{\mathtt{f}_1} \setminus j_0) \cup j_*$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}_1}$.

si : $\sigma^o = \sigma_{k_*}$, alors : $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}_1}$, $\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}_1} \setminus j_0$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}} \setminus k_*$.

— **sinon :** $t'(J_{\mathtt{sup}}).A_{\mathtt{sup}}^{-1}A(I, j_1) = 0$, pour tout $j_1 \in J_{\mathtt{f}}$ alors : $\sigma^o = \sigma_{j_*}$, et : $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = (J_{\mathtt{sup}} \setminus j_0) \cup j_*$, $\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}}$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}}$.

Aller à 2.

6. Calculer σ^o
   - $\sigma^o = \sigma_{j_*}$: $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}}$, $\overline{J}_{\mathtt{f}} = (J_{\mathtt{f}} \setminus j_0) \cup j_*$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}}$.
   - $\sigma^o = \sigma_{k_*}$: $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}}$, $\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}} \setminus j_0$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}} \setminus k_*$.

   Aller à 2.
7. Calculer σ^o
   - $\sigma^o = \sigma_{j_*}$: $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}}$, $\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}} \cup j_*$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = K_{\mathtt{f}} \cup k_0$.
   - $\sigma^o = \sigma_{k_*}$: $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = J_{\mathtt{sup}}$, $\overline{J}_{\mathtt{f}} = J_{\mathtt{f}}$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = (K_{\mathtt{f}} \setminus k_*) \cup k_0$.

   Aller à 2.

4.7 Application numérique

Pour illustrer l'algorithme proposé, on va faire une application numérique du problème (4.1) (pour : $\varepsilon = 0$), tel que :

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \; \alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; d_* = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } d^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Soit le vecteur $(x^1)' = (1, -1, 1, 1)$ qui satisfait les contraintes (4.1c). Cependant $Ax \neq b$, alors $\exists\, \gamma \in \mathbb{R}^3$ tel que : $x' = (x^1, |\gamma|)' = (1, -1, 1, 1, 1, 6, 4)$ est une solution réalisable, donc $J_{\mathtt{sup}} = \{5, 6, 7\}$, $J_{\mathtt{f}} = \varnothing$ et $K_{\mathtt{f}} = \{3\}$.
Nous commençons le processus de résolution, avec $\{x, Q_{\mathtt{sup}}\}$ comme SRS de départ. Comme $\beta\,(x, Q_{\mathtt{sup}}) = 23M > \varepsilon$, on va continuer le processus de résolution (les tableaux ci-dessous résume les résultats d'une itération, les cellules encadrées représentent les pas θ^o et σ^o et après chaque itération, nous poserons $x = \overline{x}$, $Q_{\mathtt{sup}} = \overline{Q}_{\mathtt{sup}}$).

— **Itération 1 :**

Tableau 4.1

N	x_j	E_j	ℓ_j	θ_j	θ_k	$\overline{x}_j$	t_j	σ_j	λ_k	$\delta\lambda_k$	σ_k
1	1	M	-2	\	∞	$\frac{5}{7}$	-2	$\boxed{\frac{M}{2}}$	0	0	\
2	-1	-5M-1	3	\	$\frac{4}{6}$	$\frac{-4}{7}$	0	∞	0	0	\
3	1	-2M+1	3	\	\	$\frac{10}{7}$	1	2M-1	1	0	∞
4	1	0	0	\	\	1	2	∞	\	\	\
5	1	0	-7	$\boxed{\frac{1}{7}}$	\	0	1	\	\	\	\
6	6	0	-7	$\frac{6}{7}$	\	5	0	\	\	\	\
7	4	0	-9	$\frac{4}{9}$	\	$\frac{19}{7}$	0	\	\	\	\

$\beta\,(\overline{x}, Q_{\mathtt{sup}}) = \frac{138}{7} M > \varepsilon$, on aura : $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = \{1, 6, 7\}\,, \overline{J}_{\mathtt{f}} = \varnothing$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = \{3\}\,.$

— **Itération 2 :**

TABLEAU 4.2

N	x_j	E_j	ℓ_j	θ_j	θ_k	$\overline{x}_j$	t_j	σ_j	λ_k	$\delta\lambda_k$	σ_k
1	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{9}{7}$	$\frac{16}{9}$	∞	$\frac{7}{6}$	0	\	0	0	\
2	$\frac{-4}{7}$	-5M-1	$\frac{18}{7}$	\	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{5}{2}M+\frac{1}{2}$	0	0	\
3	$\frac{10}{7}$	$\frac{-3}{2}M+1$	$\frac{18}{7}$	\	\	$\frac{7}{3}$	1	$\frac{3}{2}M-1$	1	0	∞
4	1	M	0	\	\	1	-1	$\boxed{M}$	\	\	\
5	0	$\frac{1}{2}M$	0	\	\	0	0	∞	\	\	\
6	5	0	-9	$\frac{5}{9}$	\	$\frac{11}{6}$	0	\	\	\	\
7	$\frac{19}{7}$	0	$\frac{-54}{7}$	$\boxed{\frac{19}{54}}$	\	0	1	\	\	\	\

$\beta(x, Q_{\mathtt{sup}}) = \frac{117}{7}M$, $\beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{sup}}) = \frac{65}{6}M$, on aura : $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = \{1, 6, 4\}$, $\overline{J}_{\mathtt{f}} = \varnothing$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = \{3\}$.

— **Itération 3 :**

TABLEAU 4.3

N	x_j	E_j	ℓ_j	θ_j	θ_k	$\overline{x}_j$	t_j	σ_j	λ_k	$\delta\lambda_k$	σ_k
1	$\frac{7}{6}$	0	$\frac{35}{6}$	$\frac{11}{35}$	$\frac{31}{5}$	3	0	\	0	0	\
2	$\frac{1}{3}$	-3M-1	$\frac{5}{3}$	\	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{7}$	3	M+$\frac{1}{3}$	0	0	\
3	$\frac{7}{3}$	$\frac{-1}{2}M+1$	$\frac{5}{3}$	\	\	$\frac{20}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\boxed{M-2}$	1	0	∞
4	1	0	5	$\frac{5}{4}$	\	$\frac{18}{7}$	0	\	\	\	\
5	0	$\frac{1}{2}M$	0	\	\	0	$\frac{1}{2}$	∞	\	\	\
6	$\frac{11}{6}$	0	$\frac{-35}{6}$	$\boxed{\frac{11}{35}}$	\	0	1	\	\	\	\
7	0	M	0	\	\	0	0	∞	\	\	\

$\beta(x, Q_{\mathtt{sup}}) = \frac{35}{6}M$, $\beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{sup}}) = 4M$, on aura : $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = \{1, 3, 4\}$, $\overline{J}_{\mathtt{f}} = \varnothing$ et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = \{3\}$.

— **Itération 4 :**

TABLEAU 4.4

N	x_j	E_j	ℓ_j	θ_j	θ_k	$\overline{x}_j$	t_j	σ_j	λ_k	$\delta\lambda_k$	σ_k
1	3	0	-8	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{12}{13}$	0	\	0	0	\
2	$\frac{6}{7}$	-7	$\frac{8}{7}$	\	$\boxed{\frac{27}{104}}$	$\frac{15}{13}$	13	$\boxed{\frac{7}{13}}$	0	1	\
3	$\frac{20}{7}$	0	$\frac{-48}{7}$	$\frac{5}{12}$	\	$\frac{14}{13}$	0	\	1	-1	1
4	$\frac{18}{7}$	0	$\frac{-32}{7}$	$\frac{11}{32}$	\	$\frac{18}{13}$	0	\	\	\	\
5	0	$M-1$	0	\	\	0	2	∞	\	\	\
6	0	M-2	0	\	\	0	4	∞	\	\	\
7	0	M	0	\	\	0	-1	M	\	\	\

$\beta(x, Q_{\mathtt{sup}}) = 8$, $\beta(\overline{x}, Q_{\mathtt{sup}}) = \frac{77}{13}$; on aura : $\overline{J}_{\mathtt{sup}} = \{1, 3, 4\}, \overline{J}_{\mathtt{f}} = \{2\}$, et $\overline{K}_{\mathtt{f}} = \{3, 2\}$.

— **Itération 5 :**

Ainsi, avec cette dernière SRS, on trouvera : $\beta(x, Q_{\mathtt{sup}}) = 0$, et comme : $x'_\mu = (0, 0, 0) \Rightarrow \{x, Q_{\mathtt{sup}}\}$ est une (SR-S) optimal, avec :

$x^o = (0.9230, 1.1538, 1.0769, 1.3846)'$,

$F(x^o) = (5.6153, -0.9230, -0.9230)' \Rightarrow min\ F(x^o) = 0.9230.$

On a résolut l'exemple numérique en quatre itérations et on a comparé ces résultats sous Matlab en utilisant la fonction minimax, et on a trouvé les mêmes résultats.

4.8 Comparaison avec la fonction fminimax de Matlab

4.9 La fonction F sur Matlab

```
function f = myfun5(x) % la fonction objective

%   Les fonctions :
f(1)= ( -x(1) + 3*x(2) + x(3)  + 2)*(-1) ;   % la fonction 01
f(2)= (       - 2*x(2)        + x(4) )*(-1); % la fonction 02
f(3)= (         x(2) -  x(3) - 1)*(-1)    ; % la fonction 03
end
```

4.10 Contraintes

```
clear all; clc ;

% La matrice des contraintes essentielles A :
aq= [-2 0 1 2
     -1 -3 0 1
      0  2 1 -1];
% Le vecteur b:
bq =[2;-3;2];
% Le vecteur d_{*} :
lb =[ -1;-2 ;0;1];
% Le vecteur d^{*} :
ub =[ 3;2 ;4;5];
% La solution realisable initiale :
x0 = [0; 0; 0;0];
% Le code de la fonction sur Matlab :
[x,fval,maxfval] = fminimax(@myfun5,x0,[],[],aq,bq,lb,ub)
```

```
Local minimum possible. Constraints satisfied.

fminimax stopped because the size of the current search direction is less than
twice the default value of the step size tolerance and constraints are
satisfied to within the default value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>


x =

    0.9231
    1.1538
    1.0769
    1.3846


fval =

   -5.6154    0.9231    0.9231


maxfval =

    0.9231
```

Conclusion générale

Dans cette thèse, tout en gardant la spécificité du min-max et en s'inspirant de la méthode adaptée, on a pu développer un algorithme pour résoudre des problèmes de min-max en programmation linéaire. L'algorithme est basé sur : l'incrémentation de la fonctionnelle, que nous avons établie grâce à une autre solution réalisable arbitraire. De là, on a déduit la valeur de sub-optimalité qui s'avérera par la suite importante et plus pratique dans la résolution des problèmes ; ainsi que, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'optimalité de la solution réalisable de support ont été définies et regroupées dans un critère appelé le critère d'optimalité, en plus de la démonstration de ce critère, on a donné le critère de sub-optimalité qui nous permet d'optimiser la fonction objective pour déterminer la solution réalisable optimale ou ε-optimale, ce qui est le plus fréquent à trouver dans la vie pratique, aussi, ce dernier critère, nous permet d'arrêter le processus de résolution à un critère donné choisi au départ.

Au premier chapitre, on a résolu par la méthode adaptée un problème classique de programmation linéaire avec des contraintes simples. Au deuxième chapitre, on a résolu par la méthode adaptée aussi, un problème de min-max avec des contraintes directes seulement. Au troisième chapitre, on a généralisé le problème du chapitre 2 en ajoutant les contraintes générales de type égalités et on l'a résolu directement sans apporter des modifications grâce à l'algorithme que nous avons proposé. Et enfin au quatrième chapitre, on a résolu un problème de min-max en programmation linéaire, avec des matrices de contraintes générales de rang quelconque, et de types inégalités ; par la suite on a donné des exemples numériques, pour illustrer l'algorithme proposé et les résultats trouvés ont été comparés et vérifiés à ceux trouvés avec le logiciel Matlab, ainsi, dans le dernier exemple on a choisi un support du problème sans que le support des contraintes n'est vide ; cependant, le choix du support de départ s'avert important, parce que avec un support de départ optimal, on peut trouver la solution réalisable optimale en seulement une itération. Enfin, comme l'ont montrés les exemples numériques, la méthode adaptée reste une des méthodes de résolution en programmation linéaire la plus utilisée, du fait de sa vitesse de convergence.

Comme perspective, il est souhaitable dans les futurs travaux de recherches d'étendre l'algorithme proposé à la résolution de problème min-max à un grand nombre de paramètres, modifier l'algorithme afin d'utiliser la technique du pivotage pour le calcul de la matrice des estimations ou de le développer et de l'appliquer pour l'optimisation de systèmes dynamiques linéaires en contrôle optimal, et aussi, à grand nombre de paramètres et à commandes vectorielles.

Bibliographie

[1] G. Dantzig, *Programming in a Linear Structure* (Comptroller, United States Air Force, Washington DC, 1948).

[2] V. Klee et G. J. Minty, « How good is the simplex algorithm », Inequalities **3**, 159-175 (1972).

[3] L. Khachian, « A polynomial time algorithm for linear programming », Doklady Akademii Nauk SSSR **244**, 1093-1096 (1979).

[4] N. Karmarkar, « A new polynomial-time algorithm for linear programming », in Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing (1984), p. 302-311.

[5] C. Roos, T. Terlaky et J.-P. Vial, *Theory and algorithms for linear optimization : an interior point approach* (Wiley Chichester, 1997).

[6] M. S. Morshed et M. Noor-E-Alam, « Generalized affine scaling algorithms for linear programming problems », Computers & Operations Research **114**, 104807 (2020).

[7] S. Belahcene, P. Marthon et M. Aidene, « The pivot adaptive method for solving linear programming problems », American Journal of Operations Research **8**, 92-111 (2018).

[8] T. Glavelis, N Ploskas et N Samaras, « Improving a primal–dual simplex-type algorithm using interior point methods », Optimization **67**, 2259-2274 (2018).

[9] R. Fletcher, *Practical methods of optimization* (John Wiley & Sons, 2013).

[10] J. Gondzio, « Another simplex-type method for large scale linear programming », Control and Cybernetics **25**, 739-760 (1996).

[11] Á. Santos-Palomo, « The sagitta method for solving linear programs », European Journal of Operational Research **157**, 527-539 (2004).

[12] K. Paparrizos, N. Samaras et G. Stephanides, « An efficient simplex type algorithm for sparse and dense linear programs », European Journal of Operational Research **148**, 323-334 (2003).

[13] R. Gabasov et F. Kirillova, *Linear Programming Methods.* (BGU Publishing House, Belarus, P1 1977 (en Russe), P2 1978 (en Russe), P3 1980, (en Russe)).

[14] R Gabasov et F. Kirillova, « New Linear Programming Methods and Their Application to Optimal Control », IFAC Proceedings Volumes **12**, 17-30 (1979).

[15] R. Gabasov, F. M. Kirillova et V. M. Raketskii, « On methods for solving the general problem of convex quadratic programming », in Doklady Akademii Nauk, t. 258, 6 (Russian Academy of Sciences, 1981), p. 1289-1293.

[16] R Gabasov, F. Kirillova, K. O.I. et R. V.M, *Constructive Methods of Optimization. Part 4* (University, Minsk, 1987 (en Russe)).

[17] R. Gabasov et F. Kirillova, « Adaptive method of solving linear programming problems », Preprint series of university of Karlsruhe, institut for statistic and mathematics (1994).

[18] E. A. Kostina et O. I. Kostyukova, « An algorithm for solving quadratic programming problems with linear equality and inequality constraints », Computational mathematics and mathematical physics **41**, 960-973 (2001).

[19] B. Brahmi et M. O. Bibi, « Dual support method for solving convex quadratic programs », Optimization **59**, 851-872 (2010).

[20] D. Samia, B. Brahmi et M. O. Bibi, « A primal–dual method for SVM training », Neurocomputing **211**, 10.1016/j.neucom.2016.01.103 (2016).

[21] A. Andjouh et M. O. Bibi, « Adaptive Global Algorithm for Solving Box-Constrained Non-convex Quadratic Minimization Problems », Journal of Optimization Theory and Applications **192**, 1-19 (2022).

[22] K. Louadj et M. Aidene, « Adaptive method for solving optimal control problem with state and control variables », Mathematical Problems in Engineering **2012** (2012).

[23] k. Louadj et M. Aidene, « Direct method for resolution of optimal control problem with free initial condition », International Journal of Differential Equations **2012** (2012).

[24] O Oukacha et M Aidene, « Direct method of solving optimal control problems », Acta Universitatis Apulensis Journal, 123-134 (2014).

[25] V. F. Demaynov et V. N. Malozemov, *Introduction to minimax* (Courier Corporation, 1990).

[26] R. W. Farebrother, « The historical development of the linear minimax absolute residual estimation procedure 1786–1960 », Computational statistics & data analysis **24**, 455-466 (1997).

[27] C. Charalambous et A. Conn, « An efficient method to solve the minimax problem directly », Siam Journal on Numerical Analysis, 162-187 (1978).

[28] J. Elzinga, D. Hearn et W. Randolph, « Minimax multifacility location with Euclidean distances », Transportation Science **10**, 321-336 (1976).

[29] P. Dearing et R. L. Francis, « A network flow solution to a multifacility minimax location problem involving rectilinear distances », Transportation Science **8**, 126-141 (1974).

[30] R. L. Francis, J. A. White et L. F. McGinnis, *Facility layout and location : An analytical approach* (Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, US, 1974).

[31] H. W. Kulin et R. E. Kuenne, « An efficient algorithm for the numerical solution of the generalized Weber problem in spatial economics », Journal of Regional Science **4**, 21-33 (1962).

[32] S. Dutta et M. Vidyasagar, « New algorithms for constrained minimax optimization », Mathematical programming **13**, 140-155 (1977).

[33] K. Madsen et H. Schjær-Jacobsen, « Linearly constrained minimax optimization », Mathematical Programming **14**, 208-223 (1978).

[34] M. J. Powell, « The convergence of variable metric methods for nonlinearly constrained optimization calculations », in *Nonlinear programming 3* (Elsevier, 1978), p. 27-63.

[35] A. Baums, « Minimax method in optimizing energy consumption in real-time embedded systems », Automatic Control and Computer Sciences **43**, 57-62 (2009).

[36] T. Drezner, « Location of retail facilities under conditions of uncertainty », Annals of Operations Research **167**, 107-120 (2009).

[37] I. Averbakh et O. Berman, « (p- 1)(p+ 1)-approximate algorithms for p-traveling salesmen problems on a tree with minmax objective », Discrete Applied Mathematics **75**, 201-216 (1997).

[38] C. Michelot et F. Plastria, « An extended multifacility minimax location problem revisited », Annals of Operations Research **111**, 167-179 (2002).

[39] O. Berman, J. Wang, Z. Drezner et G. O. Wesolowsky, « A probabilistic minimax location problem on the plane », Annals of Operations Research **122**, 59-70 (2003).

[40] T. Matsutomi et H. Ishii, « Minimax location problem with A-distance », Journal of the Operations Research Society of Japan **41**, 181-195 (1998).

[41] K. L. Teo et X. Yang, « Portfolio selection problem with minimax type risk function », Annals of Operations Research **101**, 333-349 (2001).

[42] X. Huang, « Minimax mean-variance models for fuzzy portfolio selection », Soft Computing **15**, 251-260 (2011).

[43] B. Rustem, R. G. Becker et W. Marty, « Robust min–max portfolio strategies for rival forecast and risk scenarios », Journal of Economic Dynamics and Control **24**, 1591-1621 (2000).

[44] A. Pankov, E. Platonov et K. Semenikhin, « Minimax quadratic optimization and its application to investment planning », Automation and Remote Control **62**, 1978-1995 (2001).

[45] A. R. Pankov, E. Platonov et K. V. Semenikhin, « Minimax optimization of investment portfolio by quantile criterion », Automation and Remote control **64**, 1122-1137 (2003).

[46] M Aidene, « Algorithm for solving a min-max problem in optimal control. », Papers from the Belarusian Academy of Sciences. **30**, 1 (1986).

[47] C. Nguyen, « Support method for solving a linear minimax problem of optimal control », Optimization, 493-501 (1989).

[48] M Aidene et B Oukacha, « Algorithm for the Min-Max problem of an optimal control », Sciences & Technologie. A, sciences exactes, 5-10 (2004).

[49] M. Aidene, I. Vorob'ev et B. Oukacha, « Algorithm for solving a linear optimal control problem with minimax performance index », Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki **45**, 1756-1765 (2005).

[50] N. Z. Shor et N. Z. Shor, « The subgradient method », Minimization methods for non-differentiable functions, 22-47 (1985).

[51] K. KC, « Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization », Lecture Notes in Mathematics **1133** (1985).

[52] C. LEMARÉCHAL et J. ZOWE, « A condensed introduction to bundle methods in nonsmooth optimization », in *Algorithms for Continuous Optimization* (Springer, 1994), p. 357-382.

[53] C. HIRIART-URRUTY J.-B.and Lemarkhal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms* (part 1, Springer-Verlag, Berlin, 1993).

[54] C. HIRIART-URRUTY J.-B.and Lemarkhal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms* (part 2, Springer-Verlag, Berlin, 1993).

[55] L BITTNER, « Das Austauschverfahren der linearen Tschebyscheff-Approximation bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung », ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik **41**, 238-256 (1961).

[56] I. BARRODALE et A. YOUNG, « Algorithms for bestL 1 andL linear approximations on a discrete set », Numerische Mathematik **8**, 295-306 (1966).

[57] E. STIEFEL, « Note on Jordan elimination, linear programming and Tchebycheff approximation », Numerische Mathematik **2**, 1-17 (1960).

[58] H. M. WAGNER, « Linear programming techniques for regression analysis », Journal of the American Statistical Association **54**, 206-212 (1959).

[59] I. BARRODALE et C PHILLIPS, « Algorithm 495 : solution of an overdetermined system of linear equations in the chebychev norm [F4] », ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS) **1**, 264-270 (1975).

[60] R. H. BARTELS, A. R. CONN et Y. LI, « Primal Methods are Better than Dual Methods for Solving Overdetermined Linear Systems in the l_ Sense ? », SIAM journal on numerical analysis **26**, 693-726 (1989).

[61] B. JOE et R. BARTELS, « An Exact Penalty Method for Constrained, Discrete, Linear l_ Data Fitting », SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing **4**, 69-84 (1983).

[62] M. R. OSBORNE, *Finite algorithms in optimization and data analysis* (John Wiley & Sons, Inc., 1985).

[63] F. ROBERTS et I BARRODALE, « An algorithm for discrete Chebyshev linear approximation with linear constraints », International Journal for Numerical Methods in Engineering **15**, 797-807 (1980).

[64] G. A. WATSON, *Approximation theory and numerical methods*, rapp. tech. (1980).

[65] G. Watson, « Choice of norms for data fitting and function approximation », Acta Numerica **7**, 337-377 (1998).

[66] G. Cohen, « An algorithm for convex constrained minimax optimization based on duality », Appl. Math. Optim., 347-372 (1981).

[67] J. Hald et K. Madsen, « Combined LP and quasi-Newton methods for minimax optimization », Mathematical Programming **20**, 49-62 (1981).

[68] R. K. Ahuja, « Minimax linear programming problem », Operations Research Letters **4**, 131-134 (1985).

[69] C. Zhu, « Solving large-scale minimax problems with the primal—dual steepest descent algorithm », Mathematical programming **67**, 53-76 (1994).

[70] R. T. Rockafellar, « Large-scale extended linear-quadratic programming and multistage optimization », Advances in Numerical Partial Differential Equations and Optimization, 247-261 (1990).

[71] C.-J. Lu, « A Deterministic Approximation Algorithm for a Minmax Integer Programming Problem. », in SODA (Citeseer, 1999), p. 663-668.

[72] F. Wang, « A hybrid algorithm for linearly constrained minimax problems », Annals of Operations Research **206**, 501-525 (2013).

Résumé : Parmi les problèmes de la programmation linéaire (PL) on trouve les problèmes de min-max qui occupent une place importante, car ils permettent de résoudre un grand nombre de problèmes d'optimisation, dans divers domaines scientifiques. Dans cette thèse, on propose un algorithme de résolution pour résoudre ces types de problèmes. Celui ci consiste à trouver le maximum du minimum d'une fonction en un temps d'exécution minimum, il est construit à partir du principe de la méthode adaptée, qui est basé sur le concept de la matrice de support du problème. Les conditions nécessaires et suffisantes de l'optimalité d'une solution réalisable de support ont été établies et le critère de sub-optimalité a été donné.

Cet algorithme résout directement le problème tel qu'il a été posé au départ, ce qui nous permet de garder la spécificité du min-max et d'éviter l'inconvénient de l'augmentation du nombre des variables et des contraintes, ceci s'avèrera important pour la vitesse de convergence de la méthode. Ses performances ont été testés sur des exemples numériques.

Mots clés : programmation linéaire, problème min-max, méthode adaptée, critère de sub-optimalité, changement de support, optimisation, solution réalisable, critère d'optimalité.

Abstract : Min-max problems occupies an important place linear programming (LP), as it addresses a large number of optimisation problems, in various fields of science. In this thesis, an algorithm using adaptive method is proposed for solving the min-max problem in linear programming. It consists on finding the maximum of the minimum of a function (where the essential constraints are in equality and the direct constraints are bounded) in a minimum execution time. A solving algorithm is built using the principle of the adaptive method and it is based on the concept of the support matrix of the problem. Necessary and sufficient conditions for the optimality of a support feasible solution are established and suboptimality criterion is derived. This algorithm allows to solve directly the considered problem, without modifying it and avoids the drawbacks of the increase in the number of the variables and the constraints, thus, improve the convergence speed of the method. Its performance is tested on a numerical example.

Keywords : linear programming, min-max problem, adaptive method, suboptimality estimate, change of support, optimization, feasible solution, optimality criterion.