République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulaire
Ministère de L'**E**nseignement **S**upérieur et de la A **R**echerche **S**cientifique

Université **M**ouloud **M**ammeri De **T**izi-**O**uzou

Faculté De **G**énie **E**lectrique Et D'informatique
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etude
De MASTER ACADEMIQUE

Spécialité : **commande des systèmes**

Présenté par
GHERDANE DALILA
YAHIAOUI DJAMILA

Mémoire dirigée par **M AHMED MAIDI**

Thème

Commande optimale d'un système intrinsèquement perturbé

Mémoire soutenu publiquement le 11 / 07/l2017.

Remerciements

Nous remercions Allah le tout puissant de nous avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce travail.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur M. MAIDI AHMAD pour son entière disposition, ces orientations, sa patience et sa gentillesse.

Nos remerciements s'adressent également à tous les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant de juger notre travail.

Nos sentiments de profonde gratitude vont à nos professeurs qui tout au long des années d'études nous ont transmis leur savoir sans réserve.

Nos remerciements les plus chaleureux vont à nos chers parents pour leurs encouragements, leur patience et leur grande soutient durant toutes ses année d'études.

Enfin on tient à remercier tous nos amis et collègues pour leur soutien moral tout au long de cette préparation.

Remerciements

Nous remercions Allah le tout puissant de nous avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce travail.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur M.MAIDI AHMAD pour son entière disposition, ces orientations, sa patience et sa gentillesse.

Nos remerciements s'adressent également à tous les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant de juger notre travail.

Nos sentiments de profonde gratitude vont a nos professeurs qui tout au long des années d'études nous ont transmis leur savoir sans réserve.

Nos remerciement les plus chaleureux vont a nos chers parents pour leur encouragements, leur patience et leur grande soutient durant toutes ses année d'études.

Enfin on tient à remercier tous nos amis et collègues pour leur soutient moral tout au long de cette préparation.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail a tout ma famille, qui m'a été la source d'encouragement et d'assurance durant mon séjour à l'université

- *Mes chers parents.*
- *Mes frères et mes sœurs.*
- *Tous mes proches.*

Djamila

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail a tout ma famille, qui m'a été la source d'encouragement et d'assurance durant mon séjour à l'université

- *Mes chers parents.*
- *Mes frères et ma sœur.*
- *Tous les miens.*
- *A Driffa, Dalila et tous mes amis(es).*

Dalila

Liste des figures

Chapitre I :

Chapitre II :

Chapitre III :

Chapitre III :

Table des indices

t : Temps.

t_0 : Instant initial.

t_f : Instant final.

T : Horizon de commande.

$x(t) \in R^n$: Vecteur d'état.

$x^d(t)$: Trajectoire désiré.

x_0 : Etat initial.

x_f : Etat final.

n : Nombre d'état.

m : Nombre de commande.

H : Fonction d'Hamilton.

J : Fonction objectif (ou critère).

q : Contrainte intégrale.

p : Contrainte instantanée.

J^* : Cout optimale.

$\lambda(t)$: Variable d'état adjointe.

$u^*(t)$: Commande optimal.

$\lambda^*(t)$: Trajectoire extrémale.

Min : Minimum.

Max : Maximum.

$y(t)$: Vecteur de sortie.

F : Force.

f_c : Force de frottement

m : Masse.

I : Matrice identité.

Q : Matrice de pondération.

R : Matrice de pondération.

∇ : Gradient.

E_c : Énergie cinétique.

E_p : Énergie potentielle.

E_D : Énergie dissipative.

k_1, k_2 :Coefficients d'amortissements.

I.1 Introduction :

La théorie de la commande optimale permet de déterminer la commande d'un système qui minimise (ou maximise) un critère de performance, éventuellement en présence des contraintes. Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final.

Dans ce chapitre nous abordons la formulation mathématique d'un problème de commande optimale et nous présentons les différentes méthodes de résolution.

I.2 Commande optimale :

La commande optimale consiste à déterminer une commande $u^*(t)$ qui permet de conduire l'état d'un système $x(t)$ d'un état initial $x(t_o)$ vers un état final $x\left(t_f\right)$, tout en optimisant un certain critère de performance imposé par le cahier de charge et en respectant un ensemble de contraintes [2].

I.3 Formulation mathématique d'un problème de commande optimale :

Pour formuler un problème de commande optimale, on doit spécifier les éléments suivants :

- Le modèle mathématique.
- Les conditions terminales (initial et final).
- Les contraintes physiques et de ressource.
- Le critère de performance.

I.3.1 Modèle mathématique :

En commande optimale, on utilise le modèle d'état.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases} \qquad \text{(I.1)}$$

Où $t \in \mathcal{R}$

$x(t) \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état

$u(t) \in \mathcal{R}^m$ est le vecteur d'état

$f = [f_1, \ f_2, \dots, f_n]^T$ est une fonction vectorielle.

Lorsque le système est linéaire, le modèle d'état est :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \qquad (I.2)$$

A : Matrice d'état de dimension $n \times n$.

B : Matrice d'entrée ou de commande de dimension $n \times m$.

C : Matrice de sortie de dimension $l \times n$.

D : Matrice de transmission directe de dimension $l \times m$.

I.3.2 Conditions terminales : [3]

Le système est souvent soumis à des conditions initiales et finales dites terminales, données par :

a. Etat initial :

L'état initial représente l'état du système à l'instant initial t_0 noté par :

$$x(t_0) = x_0$$

b. Etat final :

L'état final représente l'état du système à l'instant final t_f noté par x_f.

On distingue deux cas pour l'état final :

- Etat final imposé (fixe) $x(t_f)$ connu, c'est-à-dire $x(t_f) = x_f$.

- Etat final libre (non imposé). Dans ce cas l'état final et imposé par une condition intrinsèque au problème.

L'intervalle du temps $[t_0 \;\; t_f\,]$ est appelée horizon de commande. Ce dernier peut être fini si t_f est connu ou infini si $t_f \longrightarrow +\infty$

I.3.3 Contraintes physiques :

Ces dernières doivent être respectées pour assurer le fonctionnement du système.

On distingue deux types de contraintes, contrainte instantanée et contrainte intégrale.

I.3.3.1 Contrainte instantanée :

Cette contrainte doit être respectée $\forall\, t \in [t_0, t_f\,]$.
Mathématiquement, elle prend la forme suivante :

$$g_i(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad ; \qquad i = 1, 2, \dots \dots \; , p$$

I.3.3.2 Contrainte intégrale :

Cette contrainte doit être respectée le long de l'horizon de commande $[t_0 \;\; t_f]$
Mathématiquement, elle prend la forme suivante :

$$\int_{t_0}^{t_f} g_j(x(t), u(t), t) dt \leq 0 \quad ; \qquad j = 1, 2, \dots \dots \; , p$$

I.3.4 Critère de performance :

Ce critère doit être choisi selon les objectifs désirés (poursuite, régulation, énergie minimale, temps minimal, consommation minimale, . . .), il prend la forme générale suivante :

$$\mathcal{J}(u(t)) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t)dt \qquad (I.3)$$

- $\varphi(x(t_f), t_f)$ Partie terminale.
- $\int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t)dt$ Partie intégrale.

La partie terminale exprime l'objectif à optimiser à l'instant final par contre la partie intégrale exprime les objectifs à optimiser sur l'horizon de commande.

Selon la forme du critère, on distingue trois types de problème de commande optimale :

- Problème de Mayer (partie terminale) :

$$\mathcal{J}(u(t)) = \varphi(x(t_f), t_f) \qquad (I.4)$$

- Problème de Lagrange (partie intégrale) :

$$\mathcal{J}(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t)dt \qquad (I.5)$$

- Problème de Bolza (partie terminale et partie intégrale) :

$$\mathcal{J}(u(t)) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t)dt \qquad (I.6)$$

Parmi les principaux critères d'optimisation, on distingue :

1.3.4.1 Poursuite :

Dans ce cas, on cherche à minimiser l'erreur entre l'état du système $x(t)$ est la trajectoire désirée $x^d(t)$, il s'agit donc de maintenir l'état du système très proche de l'état désirée dans l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$.

Mathématiquement, on doit minimiser :

$$\mathcal{J}\big(u(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} \Big(x^d(t) - x(t)\Big)^T Q\Big(x^d(t) - x(t)\Big)dt \qquad (I.7)$$

Avec $\quad Q = Q^T \quad , \quad Q \geq 0$

Q : Matrice de pondération.

1.3.4.2 Régulation :

La régulation est un cas particulier de la poursuite avec $x^d(t) = 0$ avec $t \in [t_0, t_f]$, l'objectif ici est de rejeter les perturbations.

Le critère est donné comme suit :

$$\mathcal{J}\big(u(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} [x(t)]^T Q[x(t)]dt \qquad (I.8)$$

Avec $\quad Q = Q^T \quad , \quad Q > 0$

1.3.4.3 Commande à énergie minimale :

Elle consiste à conduire le système de l'état initial x_0 à l'état final x_f en minimisant l'effort de la commande. Le critère à utiliser est donné comme suit :

$$\mathcal{J}\big(u(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t)Ru(t)dt \qquad (I.9)$$

Avec $R = R^T \quad , \quad R > 0$

R : Matrice de pondération.

Pour un système monovariable, le critère devient :

$$\mathcal{J}\big(u(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} [u(t)]^2 dt \qquad (I.10)$$

1.3.4.4 Commande en temps minimal :

Dans ce cas, on cherche à minimiser l'horizon de commande T, c'est-à-dire l'action doit se faire rapidement. Ce critère utilisé dans les problèmes de sécurité et de santé, mathématiquement, on cherche à minimiser :

$$\mathcal{J}\big(u(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} 1\, dt = t_f - t_0 \qquad (I.11)$$

Remarque :

On parle de la commande bang-bang quand la commande et toujours saturée, alternativement à sa valeur minimale ou à sa valeur maximale

$$U_{min} \le u(t) \le U_{max} \qquad , \qquad \forall t \in \big[t_0, t_f\big]$$

1.3.4.5 Commande terminale :

On cherche à minimiser des objectifs à l'instant t_f . Le critère à minimiser dans ce cas est :

$$\mathcal{J}\big(u(t)\big) = \varphi\big(x(t_f), t_f\big) \qquad (I.12)$$

1.3.4.6 Commande à consommation minimale :

Elle concerne surtout les processus de production continue dont on veut diminuer les coûts de fonctionnement. Le critère s'écrit :

$$\mathcal{J}\big(u(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^{m} \beta_i \, |u_i(t)|\right] dt \qquad (I.13)$$

$$\beta_i \geq 0$$

Où β_i sont des facteurs de pondération positifs constants.

Pour un système monovariable, le critère devient :

$$\mathcal{J}\big(u(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt \qquad (I.14)$$

Remarque :

Ces critères de base peuvent être combinés pour former d'autres critères selon des objectifs désirés, par exemple :

- Temps minimal et commande à énergie minimale :

$$\mathcal{J}\big(u(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} 1\, dt + \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) R u(t) dt \qquad \text{(I.15)}$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \big(1 + u^T(t) R u(t)\big)\, dt$$

➢Poursuite et commande à énergie minimale :

$$\mathcal{J}\big(u(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} \Big(x^d(t) - x(t)\Big)^T Q \Big(x^d(t) - x(t)\Big) dt + \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) R u(t) dt \qquad \text{(I.16)}$$

I.4 Exemple d'application :

Soit le système mécanique de la Figure 1. Initialement $(t = 0)$, les longueurs des ressorts $k_1$et k_2 sont respectivement l et $l/2$. Les trois masses ont la même largeur a. On désire déterminer la force f à appliquer, pour déplacer les trois masses, tout en maintenant une distance minimale entre les deux masses m_1 et m_2. Le transfert doit se faire, aussi, en minimisant l'énergie mise en œuvre. Pour garantir un bon fonctionnement, la distance entre les deux masses m_2 et m_3 doit être supérieure à $l/2$.

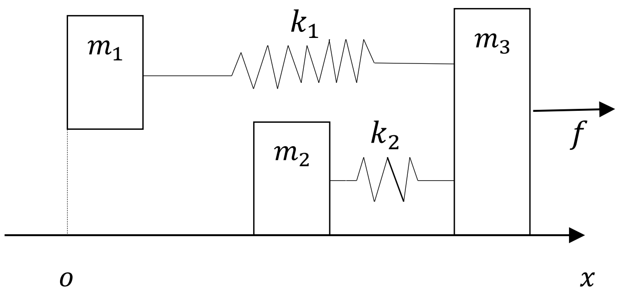

Figure I.1 : Système mécanique

Formulons mathématiquement ce problème de commande optimale.

La formulation de ce problème est comme suit :

- Modèle :

Pour la modélisation, on utilise le formalisme de Lagrange.

Désignons respectivement par x_1 , x_2 et x_3 les déplacements des masses, m_1 , m_2 et m_3

$$\Delta x_1 = x_3 - x_1$$

$$\Delta x_2 = x_3 - x_2$$

L'énergie cinétique du système est :

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2$$

L'énergie potentielle du système est :

$$E_p = \frac{1}{2}k_1\Delta x_1^2 + \frac{1}{2}k_2\Delta x_2^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}k_1(x_3 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_3 - x_2)^2$$

L'énergie dissipative du système est :

$$E_D = 0$$

- Formalisme de Lagrange :

La dynamique de chaque masse est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x_i} + \frac{\partial E_p}{\partial x_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_i} = \sum F \qquad (I.17)$$

Avec $x_i (i = 1, 2, 3)$

➢Masse m_1:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x_1} + \frac{\partial E_p}{\partial x_1} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_1} = \sum F_{m_1} \qquad (I.18)$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{x}_1) - 0 + k_1\big((x_3 - x_1)\big)^{2-1}(-1) + 0 = 0$$

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_1x_3 = 0$$

➢Masse m_2 :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x_2} + \frac{\partial E_p}{\partial x_2} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_2} = \sum F_{m_2} \qquad (I.19)$$

$$\frac{d}{dt}(m_2\dot{x}_2) - 0 + k_2(x_3 - x_2)^{2-1}(-1) + 0 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_3 = 0$$

➢Masse m_3 :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_3}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x_3} + \frac{\partial E_p}{\partial x_3} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_3} = \sum F_{m_3} \qquad (I.20)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(m_3\dot{x}_3) - 0 + k_1(x_3 - x_1) - k_2(x_3 - x_2) + 0 = f$$

$$m_3\ddot{x}_3 - k_1x_1 - k_2x_2 + (k_1 + k_2)x_3 = f$$

- Modèle d'état :

En introduisant les variables vitesses x_4, x_5 et x_6, on obtient

$$\dot{x}_1 = x_4$$

$$\dot{x}_2 = x_5$$

$$\dot{x}_3 = x_6$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{x}_1 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_1}{m_1}x_3$$

$$\dot{x}_5 = \ddot{x}_2 = -\frac{k_2}{m_2}x_2 + \frac{k_2}{m_2}x_3$$

$$\dot{x}_6 = \ddot{x}_3 = \frac{k_1}{m_3}x_1 + \frac{k_2}{m_3}x_2 - \frac{(k_1 + k_2)}{m_3}x_3 + \frac{f}{m_3}$$

- Condition terminales :

➢ Etat initial:

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \\ x_5(0) \\ x_6(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 \\ (a+l)/2 \\ (3a+l)/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

➢ Etat final :

L'état final est libre car il n'est pas spécifié.

- Contraintes :

Pour garantir la distance entre les deux masses m_2 et m_3 lors du déplacement, on doit imposer la condition

$$x_3(t) - x_2(t) > \frac{l}{2}$$

- Critères :

Pour garantir la distance minimale entre les deux masses m_1 et m_2 on doit aussi imposer que leurs vitesses soient très proches. Pour cela on peut imposer la position et la vitesse de la masse m_2 comme des consignes pour la masse m_1 . Mathématiquement en écrit :

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^{t_f} (x_2 - x_1)^2 + (x_4 - x_5)^2 dt$$

Pour assurer une énergie minimale, on impose

$$\mathcal{J}_2 = \int_0^{t_f} f^2 \, dt$$

Donc le critère à optimiser est le suivant :

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$$

$$\mathcal{J} = \int_0^{t_f} [(x_2 - x_1)^2 + (x_4 - x_5)^2 + f^2] \, dt$$

Sujet à

$$\dot{x}_1 = x_4$$

$$\dot{x}_2 = x_5$$

$$\dot{x}_3 = x_6$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{x}_1 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_1}{m_1}x_3$$

$$\dot{x}_5 = \ddot{x}_2 = -\frac{k_2}{m_2}x_2 + \frac{k_2}{m_2}x_3$$

$$\dot{x}_6 = \ddot{x}_3 = \frac{k_1}{m_3}x_1 + \frac{k_2}{m_3}x_2 - \frac{(k_1 + k_2)}{m_3}x_3 + \frac{f}{m_3}$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \\ x_5(0) \\ x_6(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 \\ (a+l)/2 \\ (3a+l)/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad , \qquad x(t_f)$$

$$x_3(t) - x_2(t) > \frac{l}{2}$$

I.5 Méthodes de résolution d'un problème de commande optimale :

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre un problème de commande optimale, le choix de la méthode dépend du type de problème considérer. Généralement les problèmes de commande optimale sont résolus par les méthodes suivantes :

I.5.1 Méthode de calcul des variations (Equation d'Euler-Lagrange) :

Le calcul des variations est la branche des mathématiques appliquées qui s'intéresse à l'optimisation des fonctionnelles.

$$\min_{x(t)} \mathcal{J}\big(x(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt \qquad (I.21)$$

Sujet à :

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_f) = x_f \quad ou\ libre$$

Pour déterminer le minimum de $\mathcal{J}$, on doit résoudre l'équation d'Euler-Lagrange avec des conditions aux limites appropriées.

- **Etat final fixe :**

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_f) = x_f$$

- **Etat final libre :**

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$x(t_0) = x_0\ .$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{\boldsymbol{t=t_f}} = 0$$

I.5.2 Programmation dynamique (principe d'optimalité de Bellman) :

Soit t_1 , tel que $0 < t_1 < t_f$.

Le principe de Bellman établit que la trajectoire optimale sur $\left[t_1 \;\; t_f\right]$, avec comme condition initiale $x_1 = x^*(t_1)$. Autrement dit, si $\mathcal{J}^*(x_0)$ est la valeur optimale du critère sur $\left[0 \;\; t_f\right]$ pour une condition initiale x_0 , alors :

$$\mathcal{J}^*(x_0) = \min_{u(t)} \left(\int_0^{t_f} (\psi x(t), u(t), t) dt + v\left(x_f\right) \right) \qquad (I.22)$$

$$= \min_{u(t), t \in [0, t_1]} \left(\int_0^{t_1} \psi(x(t), u(t), t) dt + \mathcal{J}^*(x_1) \right)$$

Avec $\mathcal{J}^*(x_1)$ la valeur optimale de critère sur l'intervalle $\left[t_1 \;\; t_f\right]$ pour une condition initiale x_1.

I.5.3 Principe du minimum de Pontriaguine PMP :

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{u(t)} \mathcal{J}\big(u(t)\big) = \varphi\big(x\big(t_f\big), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} \psi\,(x(t), u(t), t) dt \qquad \text{(I.23)}$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x\big(t_f\big) = x_f \;\; ou\ libre$$

Pour résoudre ce problème, Pontriaguine à proposer d'introduire l'équation de modèle dans le critère en utilisant des variables adjointes $\lambda(t)$

$$\min_{u(t)} \mathcal{J}\big(u(t)\big) = \varphi\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} \psi\,(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)\big(f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)\big)dt$$

(I.24)

Sujet à :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = (\psi x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) f(x(t), u(t), t)$$

Le critère devient :

$$\min_{u(t)} \mathcal{J}\big(u(t)\big) = \big(\varphi x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda^T(t)\dot{x}(t)dt \qquad \text{(I.25)}$$

Les étapes à suivre pour résoudre le problème de commande optimal sont :

- Déterminer la fonction d'Hamilton
- Déterminer l'expression de la loi de commande optimale en résolvant : $\nabla_u H = 0$
- Ecrire et résoudre les équations d'Hamilton Pontriaguine

$$\dot{x}\,(t) = \nabla_\lambda H \qquad \text{(I.26)}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\nabla_x H \qquad \text{(I.27)}$$

- Application les conditions terminales pour déterminer la solution particulière des équations de Hamilton Pontriaguine. Les conditions terminales sont données comme suit :

- **Etat finale imposé :**

$$x(t_0) = x_0 \qquad \text{(I.28)}$$

$$x(t_f) = x_f \qquad \text{(I.29)}$$

- **Etat finale libre :**

$$x(t_0) = x_0$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial\varphi(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \qquad (I.30)$$

- Etudier la nature de la solution : pour étudier la nature de la solution, on doit étudier la matrice suivante :

$$\nabla_u^2 H \qquad \text{(I.31)}$$

Si elle définit positive, on un minimum. Dans le cas contraire, la solution est un maximum.

I.6 Conclusion :

L'objectif de ce chapitre est de mettre en évidence les éléments nécessaires et la démarche à suivre pour la formulation d'un problème de commande optimale et de présenté les différentes méthodes utilisées pour la résolution de ce dernier. Parmi ces méthodes, le principe du minimum de Pontriaguine reste la méthode la plus utilisée. Cette dernière sera exposée dans le chapitre suivant.

La théorie moderne de la commande optimale a commencé dans les années 50, avec la formulation du principe du maximum de Pontriaguine, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations. De nos jours, les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien, ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches. [1]

L'objectif de problème de commande optimale consiste à transférer l'état du système d'un état initial vers un état final en minimisant- un critère de performance. Une voiture sur laquelle on agit avec les pédales d'accélérateur et de frein, et qu'on guide avec le volant est un exemple de système dynamique commander pour lequel on peut imposer de faire un itinéraire en un temps bien déterminé. L'objectif peut être aussi d'atteindre une ville en temps ou en énergie minimale. Un autre exemple concerne la maximisation de rendement d'un processus industriel par exemple. Pour réaliser on doit agir de manière optimale sur les grandeurs manipulées (commandées).

Plusieurs méthodes ont été proposées pour la résolution d'un problème de commande optimale. Parmi ces méthodes, on retrouve le principe de minimum qui permet de concevoir des lois de commande même pour les systèmes intrinsèquement perturbé.

L'objectif de ce travail est étudier la commande optimale d'un système intrinsèquement perturbé.

II.1 Introduction :

Le principe du minimum de Pontriaguine est fortement utilisé dans la théorie de l'optimisation mathématique et de la commande optimale des systèmes dynamiques. Il consiste à trouver la commande optimale permettant d'amener le système d'un état à un autre état. Ce principe est une généralisation des équations Hamilton de calcul des variations formulé par le mathématicien soviétique Lev Semenovich Pontriaguine et ses étudiants. Ce principe permet d'examiner la minimisation d'un Hamiltonien sur un espace des commandes admissibles.

II.2 Condition d'optimalité : [4]

En 1962, Pontriaguine a développé son principe du minimum célébré qui a permis d'inclure des limites sur les variables de commande. Le problème que Pontriaguine et ses collègues considéraient était la détermination de la fonction de commande admissible qui minimise ou maximise l'indice de performance :

$$\mathcal{J} = \int_{t0}^{tf} \psi(x,u,t)dt \qquad (II.1)$$

Sous la contrainte égalité :

$$\dot{x} = f(x,u,t) \qquad (II.2)$$

Et la contrainte du variable du contrôle :

$$u(t) \in U$$

Où

U est un sous-ensemble de R^m

$t \in [t_0, t_f]$

On suppose que l'état initial est connu :

$$x(t_0) = x_0$$

Et que le temps initial est connu :

$$t = t_0$$

Si nous considérons le cas d'un maximum relatif, alors :

$$\Delta\mathcal{J} = \mathcal{J}(u + \delta u) - \mathcal{J}(u) \leq 0 \qquad (II.3)$$

L'incrément peut être exprimé en termes de la première variation de la fonctionnelle comme suit :

$$\Delta\mathcal{J} = \delta\mathcal{J}(u, \delta u) + g(u, \delta u)\|\delta u\| \qquad (II.4)$$

Comme la norme $\|\delta u\|$ tend vers zéro, la fonction g qui a des termes d'ordre supérieur dans δu tend vers zéro. Par conséquent, une condition nécessaire pour un maximum relatif est comme suit :

$$\delta\mathcal{J}(u, \delta u) \leq 0 \qquad (II.5)$$

Si la commande optimale se trouve sur la limite de l'ensemble admissible, alors la variation δu n'est pas libre. Ceci est illustré dans la figure II.1 Nous avons développé la première variation de la fonctionnelle augmentée pour un problème de commande optimale. Cette équation peut être écrite comme suit :

$$\delta\mathcal{J}_A(u, \delta u) = -\lambda^T(t_f)\,\delta x_f + H(t_f)\,\delta t_f + \int_{t_0}^{t_f} \left(\dot{\lambda} + \frac{\partial H}{\partial x}\right)^T \delta x\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \dot{x}\right)^T \delta\lambda\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T \delta u\, dt \qquad (II.6)$$

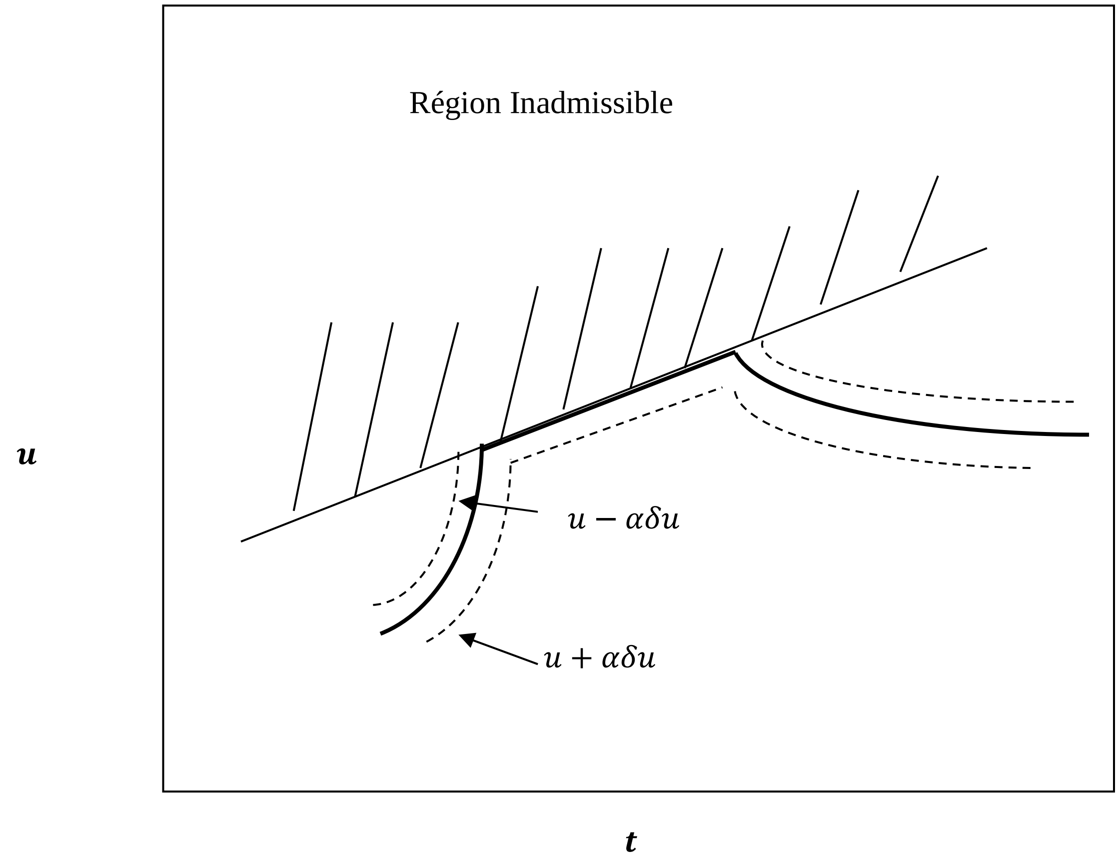

Figure II.1 : Contraintes de commande

Puisque les variations δx et $\delta\lambda$ sont libres, les équations d'Euler-Lagrange, les contraintes du type égalité et les conditions de transversalité sont des conditions nécessaires pour un extremum de la fonctionnelle. Si ces conditions sont satisfaites, la première variation se réduit à :

$$\delta\mathcal{J}_A(u, \delta u) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T \delta u \, dt \qquad (II.7)$$

Lorsque la commande atteint la limite du l'ensemble de la commande admissible, la variation δu n'est pas libre. L'intégrale de l'équation (II.7) est au premier ordre

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^{T} \delta u = H(u + \delta u) - H(u) \qquad (II.8)$$

La première variante est donc :

$$\delta \mathcal{J}_A = \int_{t_f}^{t_0} [H(u + \delta u) - H(u)]\, dt \leq 0 \qquad (II.9)$$

La condition nécessaire pour un maximum est :

$$H(x, \lambda, u) \geq H(x, \lambda, u + \delta u) \qquad (II.10)$$

Le principe du minimum de Pontriaguine stipule que la commande optimale qui maximise la fonctionnelle, $\mathcal{J}$ doit maximiser le Hamiltonian H. De même, la commande qui minimise la fonctionnelle doit minimiser l'Hamiltonian. La condition nécessaire pour un minimum est :

$$H(x, \lambda, u) \leq H(x, \lambda, u + \delta u) \qquad (II.11)$$

Les conditions nécessaires pour un extremum du fonctionnel $\mathcal{J}$ peuvent être résumées comme suit :

Equations des variables adjointes :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad (II.12)$$

Equations des variables d'état

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f \qquad (II.13)$$

Les équations (II.12) et (II.13) sont appelées équations d'Hamilton -Pontriaguine.

Condition initiale

$$x(t_0) = x_0 \qquad (II.14)$$

Condition de transversalité

$$-\lambda^T(t_f)\delta x_f + H(t_f)\delta t_f = 0 \qquad (II.15)$$

Expression de la commande optimale :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \qquad (II.18)$$

La résolution de cette équation permet de déterminer l'expression de la commande optimale en fonction de l'état et des variables adjointes.

$$u^*(t) = \Phi(x(t), \lambda(t), t) \qquad (II.19)$$

Puis par la résolution des équations d'Hamilton-Pontriaguine, on détermine les trajectoires optimales des états $x^*(t)$ et les variables adjointes $\lambda^*(t)$. En substituant ces dernières dans l'expression de la commande optimale (II.19), on obtient la commande optimale comme suit :

$$u^*(t) = \Phi(x^*(t), \lambda^*(t), t) \qquad (II.20)$$

II.3 Exemple illustratif :

Soit le problème de commande optimale

$$\max_{(u(t))} \mathcal{J}\big(u(t)\big) = \frac{1}{2}\int_0^{0.5} \big(x^2(t) + u^2(t)\big)\, dt \qquad \text{(II. 20)}$$

Sujet a :

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

$$x(0) = 1$$

Pour résoudre ce problème en utilisant le principe du minimum, on suit les étapes suivantes :

Hamiltonian:

$$H\big(x(t), u(t), \lambda(t)\big) = L\big(x(t) + u(t)\big) + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(t)\, \dot{x}(t)$$

$$= -\frac{1}{2}\big(x^2(t) + u^2(t)\big) + \lambda(t)\dot{x}(t)$$

$$= -\frac{1}{2}\big(x^2(t) + u^2(t)\big) + \lambda(t)u(t) \qquad (II.21)$$

Commande optimale :

$$\nabla_{u(t)} H\big(x(t), u(t), \lambda(t)\big) = -u(t) + \lambda(t) = 0$$

$$\Longrightarrow u^*(t) = \lambda(t)$$

$$H^*\big(x(t), u^*(t), \lambda(t)\big) = -\frac{1}{2}\big(x^2(t) + \lambda^2(t)\big)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{2}\lambda^2(t) \qquad (II.22)$$

Equations d'Hamilton-Pontyaguine:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda(t)} = \lambda(t) \qquad (\text{II}.23)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H^*}{\partial x(t)} = x(t) \qquad (II.24)$$

En dérivant l'équation (II.24), il vient :

$$\ddot{\lambda}(t) = (\dot{x})(t\ ) \qquad (II.25)$$

Et d'après (II.23), on aura :

$$\ddot{\lambda}(t) = \lambda(t) \Longrightarrow \ddot{\lambda}(t) - \lambda(t) = 0 \qquad (II.26)$$

La solution de cette ´équation différentielle est :

$$\lambda(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t} \qquad (II.27)$$

Pour déterminer les constantes α et β, on utilise les conditions terminales. D'après (II.24), on a :

$$x(t) = \dot{\lambda}(t) \Longrightarrow x(t) = \ \alpha e^t - \beta e^{-t} \qquad (II.28)$$

En imposant les conditions terminales, il vient :

Pour $t = 0$, on a :

$$x(0) = \ \alpha - \beta = 1$$

Pour $t = 2$, on a un état final libre, alors

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha e^{\frac{1}{2}} + \beta e^{-\frac{1}{2}} = 0$$

La résolution du système d'équation :

$$\alpha - \beta = 1$$
$$\alpha e^{\frac{1}{2}} + \beta e^{-\frac{1}{2}} = 0$$

Donne :

$$\alpha = \frac{1}{1+e}$$
$$\beta = -\frac{e}{e+1}$$

Ce qui donne la commande optimale suivante :

$$u^*(t) = \lambda(t) = \left[\frac{1}{1+e}\right] e^t - \left[\frac{e}{e+1}\right] e^{-t}$$

II.4 Conclusion :

L'objectif de ce chapitre est le principe du minimum. Ce principe est le plus utilisé pour résoudre le problème de commande optimale. Les conditions d'optimalité sont données sous la forme d'un système d'équation différentielle ordinaire (du premier ordre) simples à résoudre numériquement.

Dans le prochain chapitre, on présente le principe du minimum dans le cas d'un système intrinsèquement perturbé.

III.1 Introduction :

De nombreuses applications telles que les disques durs, les robots à bras flexibles, les machines-outils de haute précision, les servomoteurs, sont des applications où la présence de friction est un facteur important de la détérioration des performances de ces appareils. Ainsi, il est intéressant d’étudier les correcteurs qui peuvent faire face au problème de friction et suivre avec précision la sortie souhaitée. En présence de frottement, on peut dire que le système est intrinsèquement perturbé. Dans ce chapitre, on s’intéresse à la commande optimale d’un système perturbé.

III.2 Présentation du problème :

III.2.1 Force du frottement (Friction) :

La friction est une non-linéarité qui est omniprésente. Dans les applications où une précision très élevée est souhaitée et où la dynamique du système se caractérise par des modes flexibles, la présence de friction pose un défi à la conception. Pour les systèmes où les coefficients de frottement et d’amortissement et les fréquences naturelles des modes flexibles sont incertains, il est nécessaire de concevoir des contrôleurs capables d’assurer les performances désirées.[5]

En effet, la présence des forces de friction peut agir de sorte à forcer le déplacement du système dans le sens inverse au sens désiré.

III.2.2 Exemple d’un système perturbé

Soit le système mécanique de la figure ci-après. On désire appliquer une force u pour déplacer le système d’une position initiale vers une position finale. En présence d’une force de friction dont le sens dépend de la variation de la vitesse de déplacement de la masse m, le système est dit intrinsèquement perturbé.

Dans ce qui suit, on formule un problème de commande optimale pour ce système. L’objectif est de déplacer la masse d’une position initiale vers une autre position finale en un temps minimale.

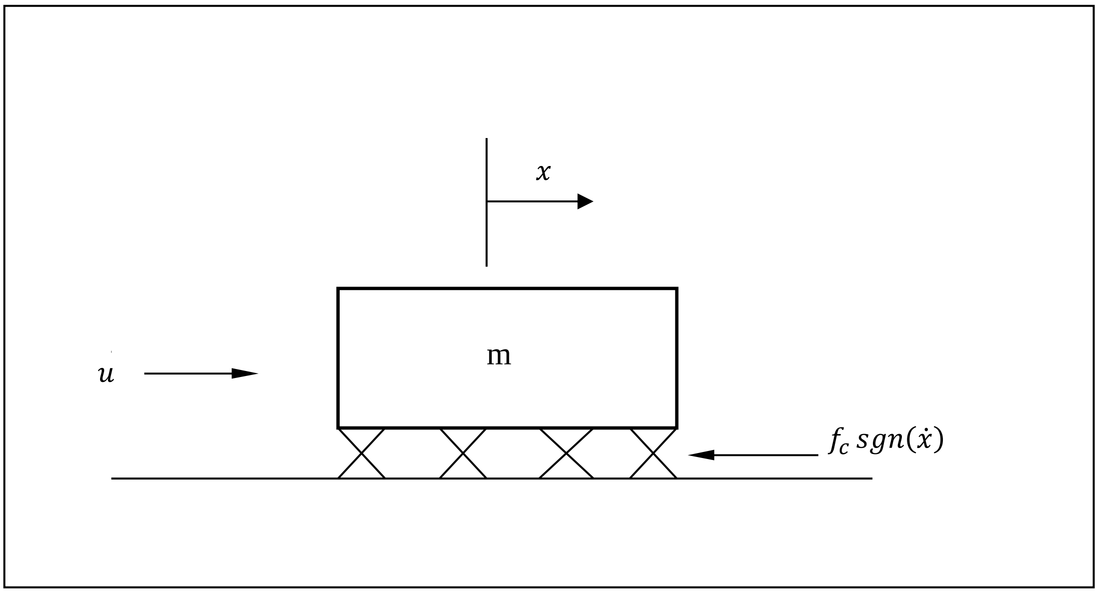

Figure III.1 : Système de corps rigide soumis à une force de frottement

III.3. Modèle mathématique :

Pour modéliser le système, on utilise la loi de Newton. On désigne par x la position de la masse.

$$\sum_i F_i = m\ddot{x}(t) \qquad \text{(III.1)}$$

On a deux forces qui agissent sur la masse : la force u appliqué et la force de frottement. Cette dernière est égale au signe de la vitesse de la masse multiplié par un facteur de frottement f_c. Cette dernière force est de sens opposé au déplacement. Ainsi, la loi de Newton donne

$$u(t) - f_c sgn(\dot{x}) = m\,\ddot{x}(t) \qquad \text{(III.2)}$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m}u(t) - \frac{1}{m}f_c sgn(\dot{x}) \qquad \text{(III.3)}$$

On pose

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x}_1 = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = \frac{1}{m}\big(u(t) - f_c sgn(\dot{x})\big) \end{cases} \qquad \text{(III.4)}$$

D'où le modèle d'état suivant

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \big(u(t) - f_c sgn(\dot{x})\big) \qquad \text{(III.5)}$$

L'objectif est de déplacer la masse en temps minimale, donc le critère à optimiser est :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^{T_f} 1\, dt$$

Donc le problème de commande optimale à résoudre est :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^{T_f} 1\, dt$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + B\Big(u(t) - f_c sgn\big(\dot{x}(t)\big)\Big)\ , \\ &x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ &x(T_f) = \begin{bmatrix} x_1(T_f) \\ x_2(T_f) \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad \text{(III.6)}$$

Et pratiquement, on doit imposer la contrainte suivante

$$-U \leq u(t) \leq U,$$

Où les matrices A et B sont définies comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

Appliquons le principe du minimum pour déterminer la solution du problème de commande optimale.

Hamiltonian:

$$H(x, \lambda, u, t) = 1 + \lambda^T \left(Ax(t) + B \left(u(t) - f_c sgn(\dot{x}(t)) \right) \right) \qquad \text{(III.7)}$$

La commande optimale est obtenue en calculant

$$\nabla_{\mathrm{u(t)}} \mathrm{H} = 0 \qquad \text{(III.8)}$$

$$B^T \lambda = 0 \qquad \text{(III.9)}$$

On déduit que la commande optimale est sur la frontière, c'est-à-dire

$$u(t) = -U \, \mathrm{sign}(B^T \lambda) \qquad \text{(III.10)}$$

Les conditions d'optimalité sont données comme :

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda(t)} \qquad (III.11)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)} \qquad (III.12)$$

Le profil de la commande optimale résultant est du type bang-bang où la commutation est déterminée par la fonction $B^T\lambda$.

III.4 Paramétrage de la commande

L’équation du mouvement (III.1) est non linéaire à cause de la fonction signe dans le modèle de frottement. Pour éliminer la non-linéarité attribuée à la fonction signe, une technique simple est présentée dans cette section. Elle consiste à introduire une nouvelle commande qui comprend l'entrée externe et la force de frottement. Cette nouvelle commande agit maintenant sur un système linéaire. Ceci permet d'utiliser de tous les outils disponibles pour la conception des contrôleurs pour les systèmes linéaires.

Supposons que le profil de la commande optimale est un profil du type bang-bang à une commutation. En définissant la nouvelle entrée comme suit :

$$u_n = u - f_c sgn(\dot{x}) \qquad (III.13)$$

L'équation du mouvement du système devient linéaire. Cependant, la nouvelle entrée n'est plus un profil bang-bang. La figure III.2 illustre comment peut-on déterminer la commande optimale. Tout d'abord, le profil de la vitesse est imposé par exemple comme indiqué dans le graphique supérieur de la figure III.2. T_1 et T_3 correspondent au moment où la vitesse de la masse devient nulle et T_2 est le moment où la nouvelle commande commute. La force de frottement peut être déterminée à partir de ce profil de vitesse qui est représenté dans le troisième graphique de la Figure III.2. Ensuite, la nouvelle commande peut être déterminée comme la somme de l'entrée réelle et de la force de frottement comme indiqué dans le dernier graphique de la Figure III.2.

Maintenant, la nouvelle commande peut être paramétrée par les instants de commutation de la vitesse et de commande, et le temps final désignés respectivement par T1, T2, T3 et Tf. On impose aussi la position finale de la masse est toujours supérieure à la position initiale de la masse, c'est-à-dire,

$$x_1(T_f) > x_1(0) .$$

Ainsi, selon les profils de vitesse et de commande imposés on peut avoir plusieurs scénarios pour la nouvelle commande. Par exemple, on peut avoir les cas suivants :

$$u_n(t) = \begin{cases} U - f_c & 0 \leq t < T_1 \\ -U - f_c & T_1 \leq t < T_f \\ 0 & T_f \leq t \end{cases} \tag{III.14}$$

$$u_n(t) = \begin{cases} U + f_c & 0 \leq t < T_1 \\ U - f_c & T_1 \leq t < T_2 \\ -U - f_c & T_2 \leq t < T_f \\ 0 & T_f \leq t \end{cases} \tag{III.15}$$

$$u_n(t) = \begin{cases} U - f_c & 0 \leq t < T_1 \\ -U - f_c & T_1 \leq t < T_2 \\ -U + f_c & T_2 \leq t < T_f \\ 0 & T_f \leq t \end{cases} \tag{III.16}$$

$$u_n(t) = \begin{cases} U + f_c & 0 \leq t < T_1 \\ U - f_c & T_1 \leq t < T_2 \\ -U - f_c & T_2 \leq t < T_3 \\ -U + f_c & T_3 \leq t < T_f \\ 0 & T_f \leq t \end{cases} \tag{III.17}$$

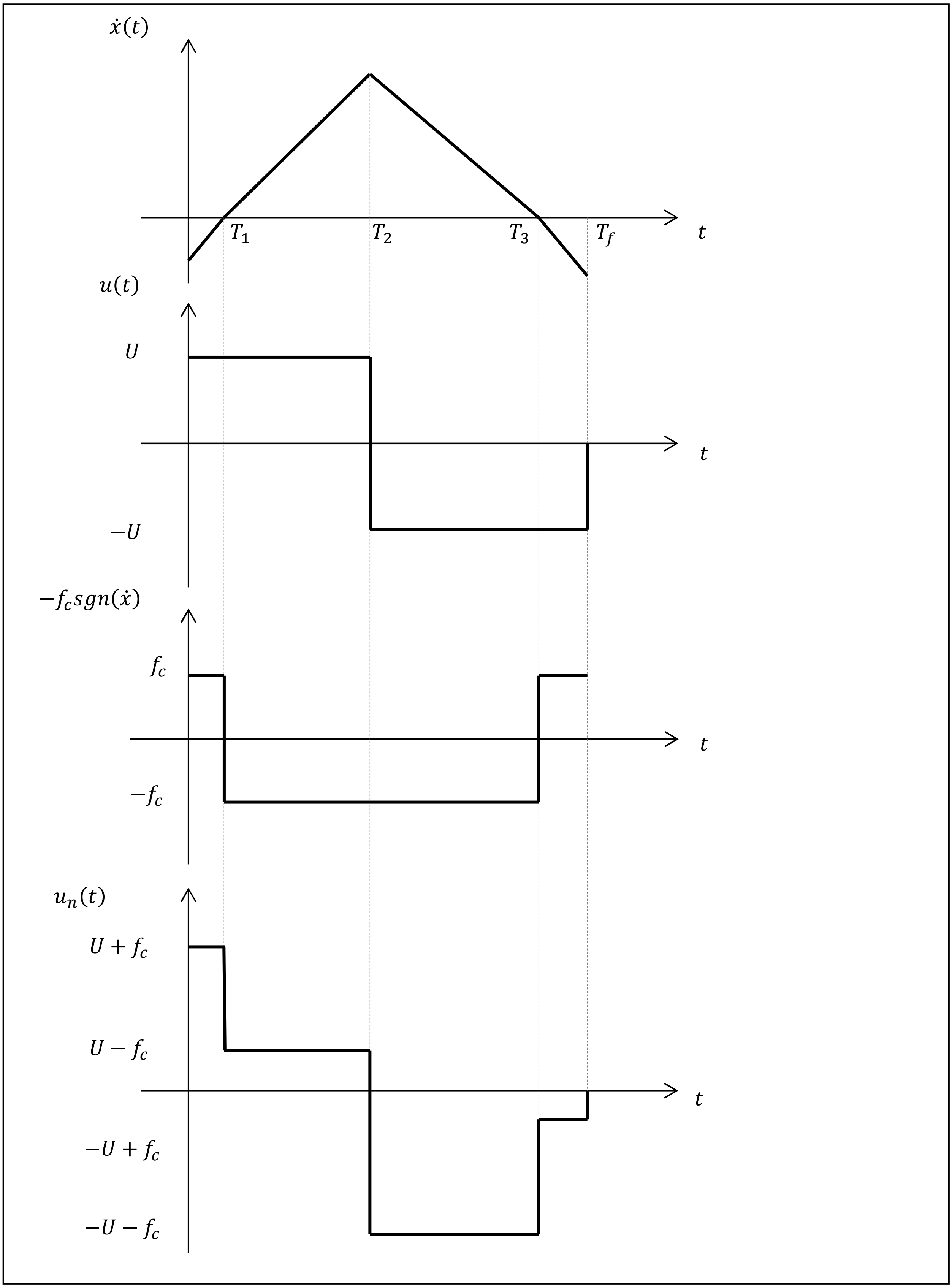

Figure III.2 : Interprétation de la nouvelle commande.

Étant donné que la nouvelle commande est paramétrée en termes d'instants de commutations inconnus et du temps final, l'équation du mouvement du système peut être intégrée sur l'horizon de commande. Considérons le premier cas (), pour déterminer les différents instants de commutations, on a

$$x(T_1) = e^{AT_1}x_0 + \int_0^{T_f} (u - f_c)\, e^{A(T_1-\tau)}Bd\tau$$

(III.18)

$$x\left(T_f\right) = e^{A\left(T_f-T_1\right)}x(T_1) + \int_{T_1}^{T_f} (-u - f_c)\, e^{A(T_2-\tau)}Bd\tau$$

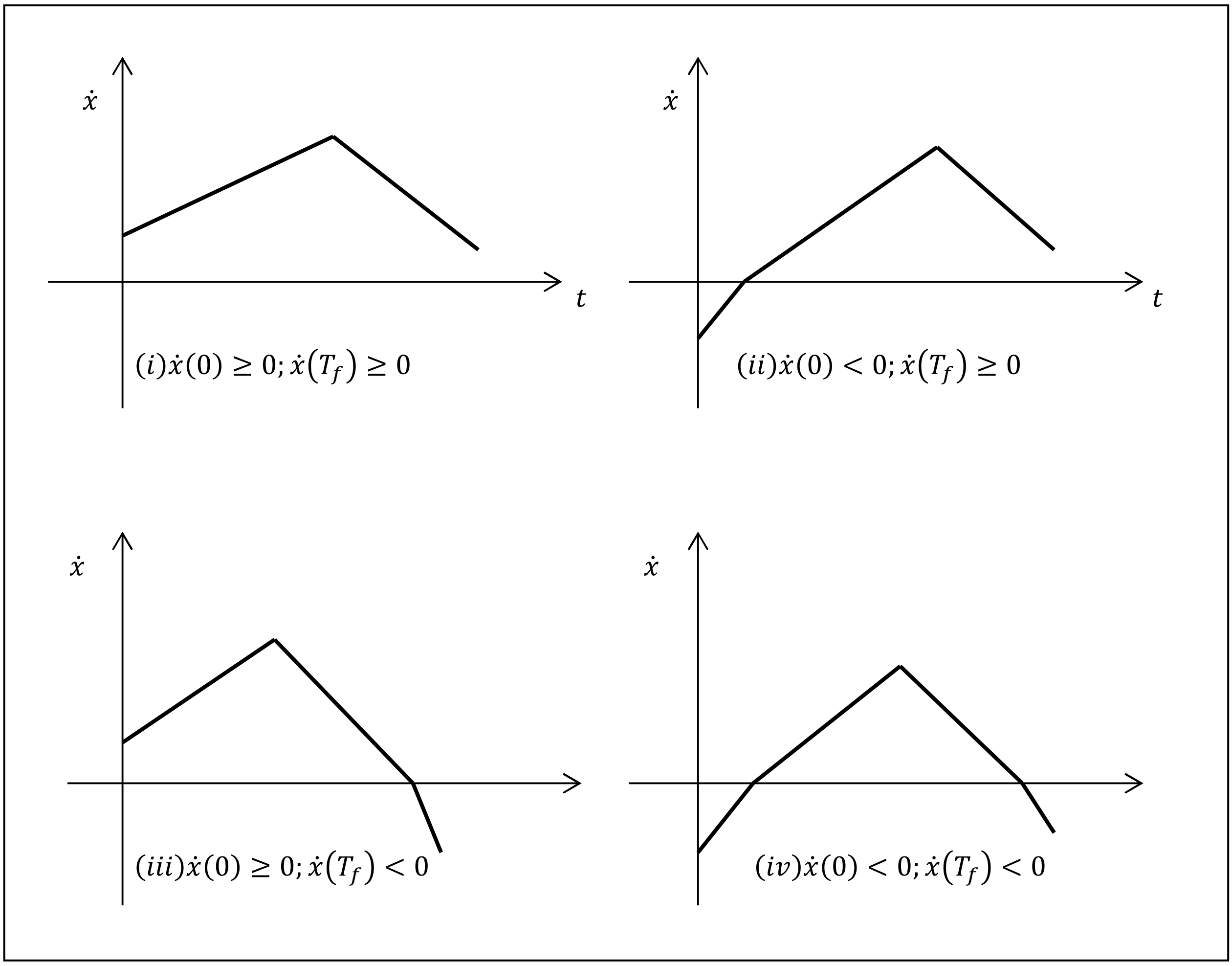

Figure III.3 : Exemples de profils possibles de vitesse différents pour la masse.

De même pour le cas (2), on a les équations suivantes :

$$x(T_1) = e^{AT_1}x_0 + \int_0^{T_1} (U + f_c)e^{A(T_1-\tau)}Bd\tau$$

$$x(T_2) = e^{A(T_2-T_1)}x(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} (U + f_c)e^{A(T_2-\tau)}Bd\tau \qquad \text{(III.19)}$$

$$x(T_f) = e^{A(T_3-T_2)}x(T_2) + \int_{T_2}^{T_3} (U + f_c)e^{A(T_f-\tau)}Bd\tau$$

Dans dernier cas, T_1 est l'instant de commutation de la vitesse et T_2 est l'instant de commutation de la nouvelle commande u_n. Ainsi, comme à T_f, on a

$$x(T_f) = [x_1(T_f) \quad x_2(T_f)]^T \qquad \text{(III.20)}$$

Et à T_1 , la vitesse doit satisfaire

$$x_2(T_1) = 0 \qquad \text{(III.21)}$$

Ainsi, la résolution des équations (III.18), permet de déterminer les différents instants de commutation T_1 , T_2 et le temps final T_f. Il reste à déterminer les trajectoires optimales pour les états et la commande.

III.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons introduit la classe du système intrinsèquement perturbé par un exemple illustratif. Il s'agit d'un système mécanique caractérisé par une force de friction dont le sens dépend de la vitesse de déplacement de la masse. Pour résoudre un problème de commande optimale d'un système perturbé, nous avons défini une nouvelle entrée permettant de linéariser le système. Puis, des profils de vitesse et de commande peuvent être imposés de sorte à satisfaire le cahier des charges. La première étape consiste à déterminer les différents instants de commutation et éventuellement le temps final pour les profils de vitesse et de commande choisis de sorte à réaliser les objectifs.

Dans le chapitre suivant, pour déterminer la commande optimale et profiles optimaux pour les états, on utilise le principe du minimum.

IV.1 Introduction

Certain système dynamique caractérisé par des perturbations internes, par exemple la force de frottement est liées directement à la vitesse de déplacement d'une masse, la conception des lois de commande optimale est difficile pour ce type de système.

Dans ce chapitre, on présente s'intéresse à la résolution d'un problème de commande optimale d'un système intrinsèquement perturbé en utilisant le principe du minimum de Pontriaguine pour concevoir des lois de commande dans le cas de la présence des perturbations interne.

IV.2 Formuler le problème :

Dans le chapitre précédent, nous avons mentionné que les profils de vitesse et de commande peuvent être imposés. La première étape consiste à déterminer les différents instants des différentes commutations. Dans cette section, on s'intéresse à la détermination des trajectoires optimales des états et de la commande. Pour cela considérons le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{\mathrm{u(t)}} \int_0^{T_f} 1\, dt \qquad (IV.1)$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\left(u(t) - f_c sgn(\dot{x}(t))\right),$$

$$x(0) = [x_1(0) \;\; x_2(0)\,]^T \quad , \quad x(0) = \left[x_1(T_f) \;\; x_2(T_f)\,\right]^T$$

$$-U \leq u(t) \leq U,$$

$$u_n = \begin{cases} U + f_c & 0 \leq t < T_1 \\ U - f_c & T_1 \leq t < T_2 \\ -U - f_c & T_2 \leq t < T_f \\ 0 & T_f \leq t \end{cases}$$

Avec :

$$u_n = u(t) - f_c sgn(\dot{x}(t)) \qquad (IV.2)$$

Un exemple de profiles, avec trois commutations, possible est donné par la Figure IV.1.

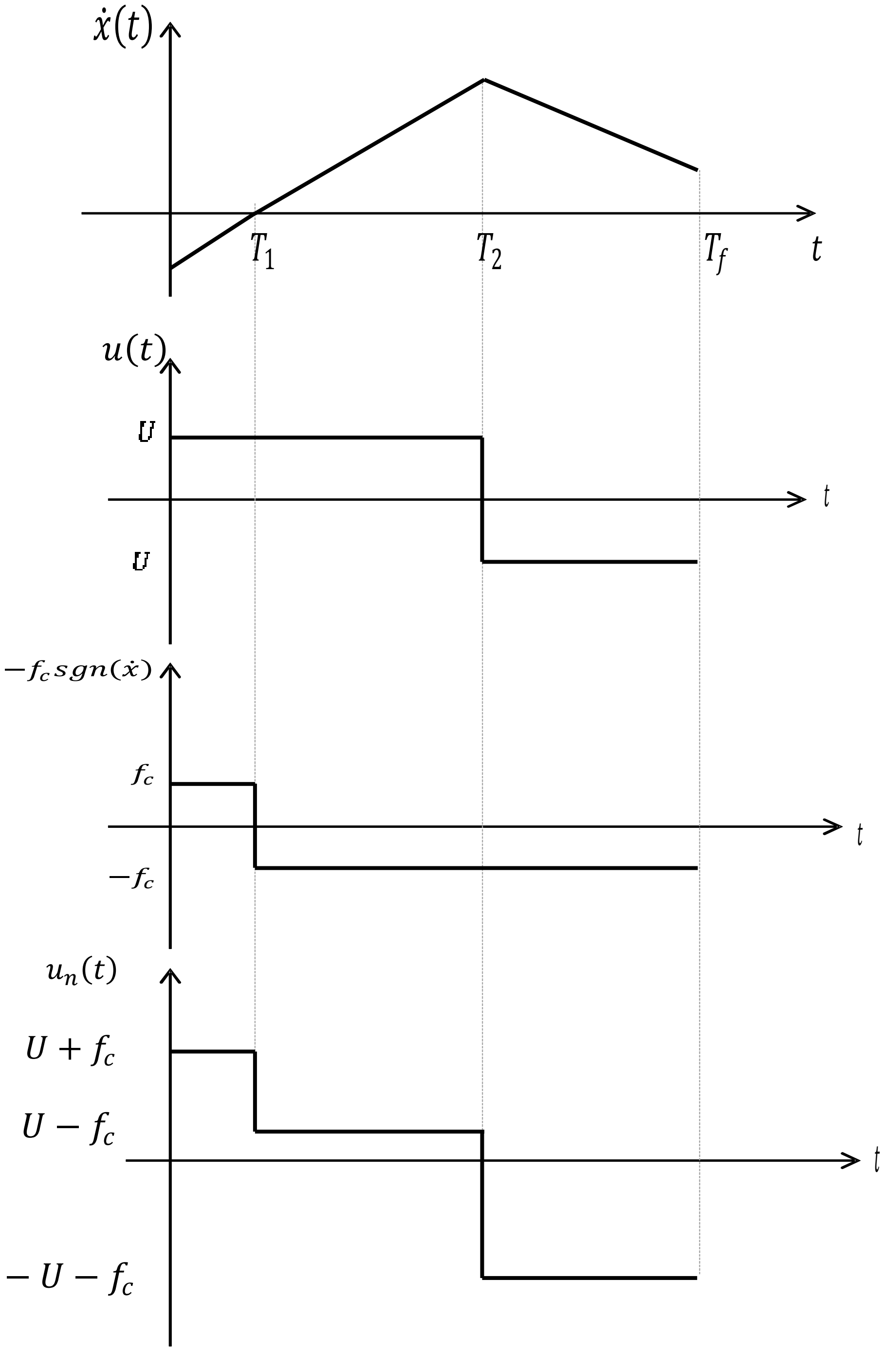

Figure IV.1 : Exemple de profils possibles.

IV.3 Conditions d'optimalité :

Pour un système dynamique caractérisé par le frottement, le profil de commande est du type bang-bang avec une fonction de commutation définie par $B^T\lambda$

Supposons que l'entrée de commande commute aux instants T_i $(i = 1,2, \dots, l)$, et la vitesse du système change son signe m fois aux instants T_{kj} $(j = 1 \dots m)$. Par exemple, dans la figure III.2, T_2 est l'instant de commutation de la commande et T_1 est l'instant de commutation de vitesse. Par conséquent, $l = 2, k_1 = 1$ et $m = 1$. Dans le cas général, le problème de contrôle optimal dans l'équation (I.1) peut être réécrit avec la nouvelle commande comme suit :

$$\min_{\mathrm{u(t)}} \int_0^{T_f} 1\, dt \qquad \text{(IV.3)}$$

Sujet à :

$$\dot{x} = Ax + B\big(u + (-1)^j f_c\big) \qquad T_{j-1} \le t < T_j$$

$$x_2\big(T_{KJ}\big) = 0$$

$$x(T_0) = [x_1(T_0)\ \ x_2(T_0)]^T\ , \qquad x\big(T_f\big) = \big[x_1\big(T_f\big)\ \ x_2\big(T_f\big)\big]^T$$

$$-U \le u \le U$$

Pour $j = 1, \dots, m + 1$. Le Lagrangienne de nouveau problème s'écrit comme suit :

$$L = \psi^T N + \int_{t_0}^{T_f} (H - \lambda^T \dot{x})\, dt \qquad \text{(IV.4)}$$

Fonction d'Hamilton :

$$H = 1 + \lambda^T\big[Ax + B\big(u + (-1)^j f_c\big)\big]\ \ ,\ \ T_{j-1} \le t < T_j \qquad \text{(IV.5)}$$

Avec les contraintes intérieures aux points de commutations de la vitesse :

$$[\dot{x}(T_{k1}) \dots \dots \dots \dot{x}(T_{km})] = 0 \qquad \text{(IV.6)}$$

L'indice m+1, correspond à l'instant final T_f, est une variable libre.

Les multiplicateurs de Lagrange sont définis comme :

$$\psi_j \begin{cases} \geq 0 & t = T_{kj} \\ = 0 & si \;\; t \neq T_{kj} \end{cases} \qquad j = 1 \dots \dots m \qquad \text{(IV.7)}$$

Les conditions d'optimalité est sont données comme suit :

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda(t)} \qquad (IV.8)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)} \qquad (IV.9)$$

$$u = -Usgn\big(B^T \lambda(t)\big) \qquad (IV.10)$$

Et les conditions aux points de commutations données comme suit :

$$\lambda\big(T_{kj}^-\big) = \lambda\big(T_{kj}^+\big) + \psi \frac{\partial N_{kj}}{\partial x\big(T_{kj}\big)}$$

$$et \qquad H\big(T_{kj}^-\big) = H\big(T_{kj}^+\big) - \psi \frac{\partial N_{kj}}{\partial x\big(T_{kj}\big)} \qquad (IV.11)$$

L'Hamiltonian doit être continu aux points de commutation car la contrainte du point N_{kj} dans l'équation (IV.11) n'est pas une fonction explicite du temps. Alors, on dit imposer

$$H\big(T_{kj}^-\big) = H\big(T_{kj}^+\big) \qquad (IV.12)$$

IV.4 Exemple d'application :

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$min_{u(t)} \int_0^{T_f} 1\, dt \qquad \text{(IV.13)}$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(u(t) - f_c sgn(\dot{x})\right)$$

$$x(0) = [0 \quad -1]^T$$

$$x(T_f) = [1 \quad 0]^T$$

$$-1 \leq u \leq 1$$

Où $f_c = 0.4$. Le profil de contrôle optimal est un bang-bang à une commutation à $t = T_2$ et la vitesse aussi commute une fois à $t = T_1$.

Ainsi, la nouvelle commande est paramétrée comme suit :

$$u_n = \begin{cases} 1.4 & 0 \leq t < T_1 \\ 0.6 & T_1 \leq t < T_2 \\ -1.4 & T_2 \leq t < T_f \\ 0 & T_f \leq t \end{cases} \qquad \text{(IV.14)}$$

Pour déterminer les différents instants de commutation et le temps final, on résoudre les équations suivantes :

$$x(T_1) = e^{AT_1} x_0 + \int_0^{T_1} (U + f_c) e^{A(T_1 - \tau)} B d\tau \qquad \text{(IV.15)}$$

$$x(T_2) = e^{A(T_2 - T_1)} x(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} (U + f_c) e^{A(T_2 - \tau)} B d\tau \qquad \text{(IV.16)}$$

$$x(T_f) = e^{A(T_f - T_2)} x(T_2) + \int_{T_2}^{T_f} (U + f_c) e^{A(T_f - \tau)} B d\tau \qquad \text{(IV.17)}$$

La résolution de ces trois équations donne les instants de commutation suivants :

$$T_1 = 0.7143$$
$$T_2 = 2.4938 \qquad \text{(IV.18)}$$
$$T_f = 3.2564$$

À partir du temps de commutation qui en résulte, la condition d'optimalité peut être vérifiée. Le problème de contrôle optimal dans l'équation (IV.14) peut être réécrit comme suit:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u + f_c) \qquad 0 \leq t < T_1$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u - f_c) \qquad T_1 < t \leq T_f$$

$$x_2(T_1) = 0 \qquad \text{(IV.19)}$$

$$x(0) = [0 \quad -1]^T \quad ; \quad x(T_f) = [1 \quad 0]^T$$

$$-1 \leq u \leq 1$$

Le Lagrangien du système s'écrit

$$L = \psi x_2(T_1) + \int_0^{T_f} (H - \lambda^T \dot{x})\, dt \qquad \text{(IV.20)}$$

D'où l'Hamiltonian

$$H = \begin{cases} 1 + \lambda^T[Ax + B(u + f_c)] & 0 \le t < T_1 \\ 1 + \lambda^T[Ax + B(u - f_c)] & T_1 < t \le T_f \end{cases} \qquad \text{(VI.21)}$$

Les conditions d'optimalité s'écrivent

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \begin{cases} Ax + B(u + f_c) & 0 \le t < T_1 \\ Ax + B(u - f_c) & T_1 < t \le T_f \end{cases} \qquad (IV.22)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T\lambda \qquad (IV.23)$$

$$u = -sgn(B^T\lambda) \qquad (IV.24)$$

Et la contrainte à l'instant de commutation T_1 est :

$$\lambda(T_1^-) = \lambda(T_1^+) + \psi \frac{\partial N}{\partial x(T_1)} \quad et \quad H(T_1^-) = H(T_1^+) \qquad (IV.25)$$

Où N est une contrainte à vérifier à l'instant de commutation T_1, on a $N = x_2(T_1)$. La continuité de l'Hamilton impose

$$\begin{aligned} &1 + [\lambda_1(T_1^-) \quad \lambda_2(T_1^-)]\big(Ax(T_1^-) + B(1 + f_c)\big) \\ &= 1 + [\lambda_1(T_1^+) \quad \lambda_2(T_1^+)]\big(Ax(T_1^+) + B(1 - f_c)\big) \end{aligned} \qquad \text{(IV.26)}$$

Puisque seulement $\lambda_2$est discontinu à $t = T_1$, on suppose que :

$$\lambda_2\,(T_1^+) = \lambda_2(T_1^-) + \gamma\lambda_2(T_1^-) \qquad (IV.27)$$

Remplaçant les matrices A et B dans l'équation (IV.27)

$$1 + [\lambda_1(T_1^-) \quad \lambda_2(T_1^-)] \begin{bmatrix} x_2(T_1^-) \\ 1 + f_c \end{bmatrix} = 1 + [\lambda_1(T_1^+) \quad \lambda_2(T_1^+)] \begin{bmatrix} x_2(T_1^+) \\ 1 - f_c \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2(T_1^-)(1 + f_c) = \lambda_2(T_1^+)(1 - f_c) \qquad (IV.28)$$

En remplaçant (IV.28) dans (IV.29) on trouve

$$\lambda_2(T_1^-)(1 + f_c) = \left(\lambda_2(T_1^-) + \gamma\lambda_2(T_1^-)\right)(1 - f_c) \qquad \text{(IV.29)}$$

D'où

$$\gamma = \frac{2f_c}{1 - f_c} \qquad (IV.30)$$

L'équation des variables adjointes permet d'écrire les trajectoires optimales suivantes :

$$\lambda(T_1^-) = e^{-A^T T_1}\, \lambda(0)$$

$$\lambda(T_1^+) = (I + J)\, \lambda(T_1^-)$$

$$\lambda(T_2) = e^{-A^T (T_2 - T_1)}\, \lambda(T_1^+) \qquad \text{(IV.31)}$$

Où J et définit comme suit :

$$J \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.32)}$$

Le problème revient à chercher $\lambda(0)$. Ainsi à t=0, on a

$$H(0) = J + \lambda^T[Ax(0) + B(1 + f_c)] = 1 + \lambda^T(0)\begin{bmatrix} -1 \\ (1 + f_c) \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{(IV.33)}$$

Qui nécessite

$$\lambda^T(0)\begin{bmatrix} -1 \\ (1 + f_c) \end{bmatrix} = -1 \qquad \text{(IV.34)}$$

Cette équation permet de définir la valeur de $\lambda(0)$ permettant de définir la commande optimale. Ainsi, en faisant des tests de simulation, on détermine la valeur $\lambda(0)$ et de déduire la commande optimale.

Les résultats de simulation obtenus sont donnés par les Figures suivantes, on remarque que les objectifs fixés sont attraient.

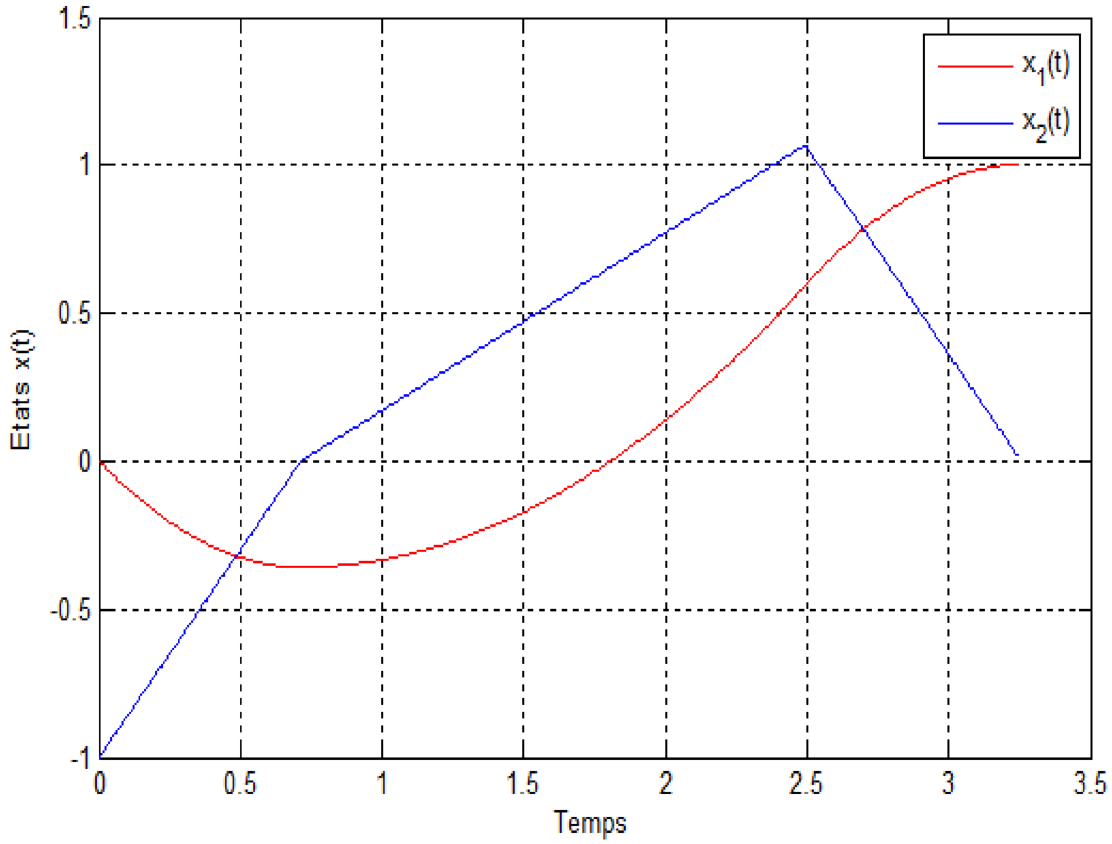

Figure IV.2 : Trajectoires optimales pour les états.

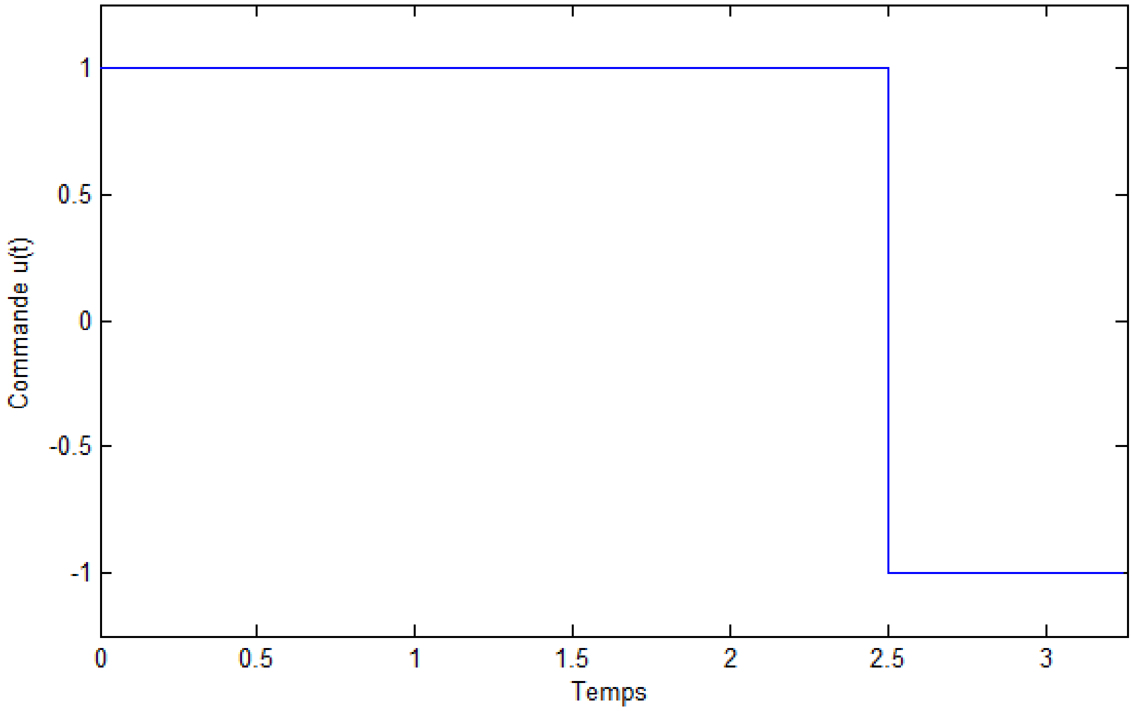

Figure IV.3 : Commande optimale $u(t)$

IV.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons utilisé le principe du minimum pour la synthèse d'une loi de commande du type bang-bang pour un système intrinsèquement perturbé. Nous avons montré que les conditions d'optimalité restent les mêmes mais des contraintes imposées aux temps de commutations sur les variables adjointes doivent être définies. Ainsi, par le choix d'une valeur adéquate aux variables adjointes, la commande optimale peut être déterminée en faisant des tests de simulation.

La résolution de ces conditions d'optimalité pour un scénario donné pour la commande a été illustrée par exemple d'application.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la commande optimale des systèmes dynamiques. L'objectif est d'étudier le principe de minimum pour concevoir des lois de commande pour un système intrinsèquement perturbé. Un exemple du système mécanique avec une force de frottement est pris comme exemple d'application.

En premier, on a présenté les différentes étapes de la formulation d'un problème de commande optimale et nous avons présenté aussi les différentes méthodes de la résolution optimale. Puis, on a présenté le principe de minimum de Pontriaguine, une méthode élégante qui permet de déterminer la commande optimale. Après, nous avons introduit les systèmes perturbés et leur commande optimale. A la fin, nous avons utilisé le principe du minimum pour la détermination de la commande optimale pour un système incertain.

L'étude effectuée démontre l'efficacité du principe du minimum dans la détermination de la commande optimale même en présence de commutation. En effet, en plus des conditions d'optimalité définies par les équations d'Hamilton-Pontriaguine et les conditions aux limites, des contraintes aux instants de commutation sont introduites. La résolution des ces conditions d'optimalité permet de déterminer la commande optimale permettant de ramener le système à l'état désiré en présence des perturbations internes.

Bibliographie

[1].Emmanuel Trélat. **«** Commande optimale» Notes du cours A08 2007/2008.

[2].ISSAT Kairouan. « Cours de Commande optimale» 2010-2011

[3]. Ahmed Maidi. « Cours de la théorie d'optimisation et de la commande optimale ».

Department d'Automatique, UMMTO. 2005.

[4].*Process control and identification of optimal control*

[5].*Optimal Reference Shaping for Dynamical Systems: Theory and applications*

Les mots clé :

- La commande optimale
- Principe du minimum de Pontriaguine
- Commande optimale d’un système perturbé
- Système intrinsèquement perturbé
- Méthode de résolution d’un problème de commande optimale
- Condition d’optimalité
- La commande bang-bang
- Commande à temps minimale
- Equation d’Hamilton-Pontriaguine

Résumé :

Certains systèmes dynamiques sont caractérisés par des perturbations internes. Par exemple, les forces des frottements sont liés directement aux vitesses .la conception des lois de commande optimale est très difficile. Dans ce travaille, on utilise le principe du minimum de Pontriaguine pour concevoir des lois des commandes dans le cas de la présence des perturbations interne.