République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences

Département de mathématique

Option : analyse mathématique et applications

Mémoire de Master

Sujet :

Sur une somme des cotangentes associées à la fonction zêta d'Estermann

Réalisé par : **ABDELILA Romila**

Membre de jury :

Mme. KHALLES Fazia	**Président**
Mr . HAMAZ Abdelghani	**Examinateur**
Mr. GOUBI Mouloud	**Encadreur**

Année universitaire : 2018/2019

Table des matières

REMERCIEMENTS

Je remercie, tout d'abord le Grand Dieu de m'avoir donné la force et la volonté d'accomplir ce travail et ma famille pour leur soutiens

Tout d'abord, je tiens à remercier notre département de Mathématiques, et avant toute personne, Monsieur : Goubi Mouloud pour avoir accepté de diriger mon travail, pour son soutien, son encadrement et son assistance sur le plan méthodologique et bibliographique.

Je tiens à exprimer également, mon remerciement aux membres de jury qui ont acceptés d'évaluer ce travail, Merci à vous madame : Khellas Fazia d'avoir acceptée de présider le jury, Merci à vous monsieur : Hamaz Abdelghani pour faire l'honneur d'accepter d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont également à tous les professeurs et enseignants du département qui ont suivi toute au long de notre cycle d'étude.

Introduction

Dans ce travail on s'intéresse à des sommes des cotangentes de la forme de

$$C_0\left(\frac{q}{p}\right)=\sum_{r=1}^{p-1}\frac{r}{p}\cot\left(\frac{\pi r q}{p}\right),$$

cette sommes est enfaite la valeur de la fonction Zêta d'Estermann

$$D\left(s,\frac{q}{p}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)\exp\left(n\frac{q}{p}\right)}{n^s}$$

en $s=0$:

$$D\left(\frac{q}{p}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}C_0\left(\frac{q}{p}\right)$$

C_0 est liée à la sommes de Vassionnine par la relation $C_0(\frac{q}{p})=-V(\bar{q},p)$ et cette dérivées est liée au critère de Baez-duarte concernant l'hypothèse de Riemann

Dans le premier chapitre on revient sur quelques résultats classiques concernent C_0 et V dans le cas général

Ensuite dans le deuxième on explique le liens entre ces sommes et l'hypothèse de Riemann

Enfin , on termine le travail par quelques résultats récents développées dans l'article [4] de monsieur Goubi dans le cas particulier $q=1$.

Chapitre 1

Quelques résultats classiques sur la sommes des cotangentes $c_0\left(\frac{p}{q}\right)$

1.1 Introduction

Les sommes des cotangentes $c_0\left(\frac{r}{b}\right)$ sont associées directement à la fonction zêta d'Estermann. Elles sont également révélées importantes dans le critère de Nyman-beureling concernant l'hypothèse de Riemann.

1.2 La somme des cotangente et ses applications

On se concentre sur l'étude de la somme des cotangentes suivantes :

Définition 1.1.

$$C_0\left(\frac{r}{b}\right) = -\sum_{m-1}^{b-1} \frac{m}{b} \cot\left(\frac{\pi m r}{b}\right)$$

où $r, b \in \mathbb{N}, b \geqslant 0, 1 \leqslant r \leqslant b$ *est* $(r, b) = 1$.

$C_0\left(\frac{r}{b}\right)$ est une fonction impaire et périodique de période 1, elle est aussi un nombre algébrique.

L'importance de cette somme réside dans sa relation avec la fonction zêta d'Esterman et son lien avec l'hypothèse de Riemann.

Définition 1.2. *La fonction Zêta d'Estrmann* $E(s, \frac{r}{b}, \alpha)$ *est définie avec les série* *de Dirichlet suivante*

$$E(s,\frac{r}{b},\alpha)=\sum_{k\geqslant 1}\frac{\sigma_\alpha(n)\exp(2\pi inr/b)}{n^s}$$

où $\mathfrak{Re}(s)<\mathfrak{Re}\,(\alpha)+1, b\leqslant 1,(r,b)=1$ *et* $\sigma_\alpha(n)=\sum_{d|n}d^\alpha$

T.Estermann a introduit et étudié la fonction ci-dessus dans le cas particulier où $\alpha=0$ et L.Kiuchi dans l'intervalle $[-1,0]$. la fonction Zêta d'Estermann se prolonge analytiquement à une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ qui a deux pôles simple $s=1$ et $\delta=1+\alpha$ si $\alpha\neq 0$. Ou un pôle double en $s=1$ si $\alpha=0$. De plus, son 'équation fonctionnelle est donnée par

$$\begin{aligned}E(s,\frac{r}{b},\alpha) &= \tfrac{1}{\pi}\left(\tfrac{b}{2\pi}\right)^{1+\alpha-2s}\Gamma(1-s)\Gamma(1+\alpha-s)\left[\cos\left(\tfrac{\pi\alpha}{2}\right)E(1+\alpha-s,\tfrac{\bar r}{b},\alpha)\right.\\ &\qquad\left.-\cos\left(\pi s-\tfrac{\pi\alpha}{2}\right)E(1+\alpha-s,\tfrac{\bar r}{b},\alpha)\right]\end{aligned}$$

$\bar r$ est l'inverse de r modulo b c.à.d $\bar r r\equiv(\mod b)$ et Γ est la fonction Gamma.

R.Balasubramanian , J.B.Conrey , D.R.Heath-Brown , ont utilisés les propriétés de $E(.,\frac{r}{b},0)$ pour trouver une forme asymptotique de

$$I=\int_0^T\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\left|A\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2dt,$$

et $A(s)$ est un polynôme de Dirichlet.
L'écriture asymptotique de l'integralle I est utilisées pour les théorèmes qui fournissent une borne inférieure pour la partie réelle des zéros de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$.
M.Ishibashi a présenté un bon résultat concernant la valeur de $E(s,\frac{r}{b},\alpha)$ on $s=0$

Théorème 1 (Ishibashi)**.**
Soit $b\geqslant 2, 1\leqslant r\leqslant b,(r,b)=1,\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. *alors :*

(01) pour même α *, ça tiens :*

$$E(0,\frac{r}{b},\alpha)=\left(\frac{-i}{2}\right)^{\alpha+1}\sum_{m=1}^{b-1}\frac{m}{b}\cot^\alpha\left(\frac{pmr}{b}\right)+\frac{1}{4}\delta_\alpha,0,$$

où $\delta_{\alpha,0}$, *est la fonction Delta de Kronecker.*

(02) pour α entier négatif différent de -1 on a :

$$E(0, \frac{r}{b}, \alpha) = \frac{B_{\alpha+1}}{2(\alpha+1)},$$

Le nombre B_m est le m^{eme} nombre de Bernoulli, sachant que $B_{2m+1} = 0$. et

$$B_{2m} = 2\frac{(2m)!\zeta\,(2m)}{(2\pi)^{2m}}.$$

Ainsi pour $b \leq 2, 1 \leq r \leq b, (r, b) = 1$, on aurra

$$E(0, \frac{r}{b}, 0) = \frac{1}{4} + \frac{i}{2}C_0\left(\frac{r}{b}\right).$$

Justement cette relation établit le lien exacte entre la somme des cotangentes $C_0\left(\frac{r}{b}\right)$ et la fonction zêta d'Estermann.
Dans le travail de S. Bettin et J. B. Conrey [22], la loi de réciprocité suivante satisfaite par $C_0\left(\frac{r}{b}\right)$:

$$C_0\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b}{r}C_0\left(\frac{b}{r}\right) - \frac{1}{\pi r} = \frac{i}{2}\psi_0\left(\frac{r}{b}\right),$$

où

$$\psi_0(z) = -2\frac{\log 2\pi z - \gamma}{\pi i z} - \frac{2}{\pi}\int_{(\frac{1}{2})} \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{\sin \pi s} z^{-s} ds,$$

avec $\gamma = 0,5772$ est la constante d'Euler-Mascheroni.

Cette formule de réciprocité montre que $C_0\left(\frac{r}{b}\right)$ peut être interprété comme une forme modulaire quantique (imparfaite) de poids 1 , au sens de D. Zagier.

Par ailleurs $C_0\left(\frac{r}{b}\right)$ est associée à un l'étude de l'hypothèse de Riemann, à travers sa relation avec la somme V dite de Vasionnine.

La somme de Vasionnie est définie comme suit :

$$V\left(\frac{r}{b}\right) = \sum_{m=1}^{b-1} \left\{\frac{mr}{b}\right\} \cot\left(\frac{\pi m r}{b}\right), \tag{1.1}$$

où $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor, u \in \mathbb{R}$ est la partie fractionnaire de u. Son lien avec C_0 est tout simplement

$$V\left(\frac{r}{b}\right) = -C_0\left(\frac{\bar{r}}{b}\right).$$

La somme de Vasionnine est auto-associée à l'étude de l'hypothèse de Riemann à travers l'identité suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi(rb)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\left(\frac{r}{b}\right)^{it}\frac{dt}{\frac{1}{4}+t^2} &= \frac{\log 2\pi-\gamma}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b}\right) \\ &+ \frac{b-r}{2rb}\log\frac{r}{b}-\frac{\pi}{2rb}\left(V\left(\frac{r}{b}\right)+V\left(\frac{b}{r}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

On note que la seule fonction non explicite dans la parie droite de (1.2) est la somme symmétrique $V\left(\frac{r}{b}\right)+V\left(\frac{b}{r}\right)$ qui contient justement la somme de Vassionnine
Le critère de Baéz-Duarte concernant l'hypothèse de Riemann (HR) stipule que (HR) est vraie si et seulement on a

$$\lim_{N\to+\infty} d_N = 0$$

où

$$d_N^2 = \inf_{d_N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|1-\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)d_N\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\frac{dt}{\frac{1}{4}+t^2}$$

et l'infimum est pris sur tous les polynômes de Dirichlet de la forme

$$D_N(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s}.$$

Par conséquent, il découle des arguments ci-dessus que les informations qu'on peut avoir de C_0 peuvent nous aider à comprendre mieux l'hypothèse de Riemann.

1.3 Espace de Hilbert et quelques propriétés de la somme de Vassionnine

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([0,+\infty[;t^{-2}dt)$ muni de produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{\infty} f(t)\overline{g(t)}t^{-2}dt, f,g\in H \tag{1.3}$$

Pour tout entier p, considère la fonction e_p définie par

$$e_p(t) = \left\{\frac{t}{p}\right\}$$

et fonction indicatrice de l'intervalle $[1, +\infty[$ donnée par

$$\mathcal{X}(t) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad t \in [1, \infty] \\ 0 \qquad \textit{ailleurs} \end{cases}$$

la distance d_n de χ à le sous-espace H_n, est donnée par

$$d_n = \operatorname{dist}(\chi, H_n) = \inf_{h \in H_n} \|\mathcal{X} - h\|.$$

Dans [1] les auteurs on conjecturé que

$$d_n^2 \sim \frac{2 + \alpha - \log 4\pi + o(1)}{\log n}, \ n \longrightarrow +\infty$$

Par contre ils ont démontré que [9]

$$d_n^2 \geq \frac{2 + \alpha - \log 4\pi + o(1)}{\log n}, \ n \longrightarrow +\infty.$$

Ainsi pour calculer cette distance on doit évaluer deux type de produit internes ; le premier est connu $\langle \chi, e_p \rangle$ qui est donné par la formule suivante :

$$\langle \chi, e_p \rangle = \frac{\log p + 1 - \alpha}{p}.$$

Le deuxème produit scalaire est $\langle e_p, e_q \rangle$. Sa valeur est donnée par la formule de Vassionnine

$$\langle e_p, e_q \rangle = \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + \frac{p - q}{pq} \log \frac{q}{p} - \frac{\pi}{2pq} \left[V(q, p) + V(p, q) \right] \tag{1.4}$$

La somme Vassionnin-cotangente $V(p, q)$ est toujours curieuse, récemment, Betlin et Conrey [2] ont prouvés la loi de réciprocité suivante

$$\frac{\bar{q}}{p} V(q, p) + V(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{1}{\pi p} - g(\frac{\bar{q}}{p}) \tag{1.5}$$

où g est une fonction analytique dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ qui a le développement asymptotique suivant d'ordre $N \geq 2$, $n \longrightarrow \infty$

$$g(n) = -\frac{\log 2\pi n - \alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{N}\frac{\xi(k)\beta_k}{k}n^k + O(x^{N+1})$$

Pour $q = 1$, la somme des cotangentes (1.1) est d'abord étudié par Vassionnine, il a montré la formule asymptotique (pour p assez grand) suivante

$$V(1,p) = \frac{p\log p}{\pi} + \frac{p}{\pi}(\log 2\pi - \alpha) + O(\log p)$$

où la notation grand O de Landau dénote le caractère dominé d'une fonction par rapport à une autre.

M. Th. Rassia et H. Maire [13] ont montré que

$$V(1,p) = -\frac{p\log p}{\pi} + \frac{p}{\pi}(\log 2\pi - \alpha) + O(1).$$

Ou encore pour $p, n \in \mathbb{N}$, $p > 6N$ avec $N = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$; M. Th. Rassias et H. Maier [3] ont montré qu'il existe des constantes réelles positives $A_1, A_2 \leq 1$ et des constantes réelles $E_2, l \in \mathbb{N}$ avec $|E_2| \geq (A_2 l)^{2p}$, tel que pour chaque n on a :

$$V(1,p) = -\frac{p\log p}{\pi} + \frac{p}{\pi}(\log 2\pi - \gamma) + \frac{1}{p} - \sum_{l=1}^{n} E_2 p^{-1} - R_n^*(p) \tag{1.6}$$

avec $|R_n^*(p)| \leq (nA_2)^{4n}.p^{-(n+1)}$.

La somme $V(p,q)$ peut est en faite la valeur de la fonction Zeta Estermann [2] en $s = 0$

$$E_0(s, \frac{p}{q}) = \sum_{k\geq 1}\frac{\sigma(k)}{n^s}\exp(\frac{2\pi ikp}{q})$$

1.3.1 Résultat principal

On considère la fonction Digamma suivante :

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+z}\right)$$

et la fonction symétrique :

$$G(p,q) = \sum_{r=1}^{pq-1} \left(\psi\left(\frac{r+1}{pq}\right) - \psi\left(\frac{r}{pq}\right) \right) \left\{\frac{r}{p}\right\} \left\{\frac{r}{q}\right\} \tag{1.7}$$

En fonction de G on a cette nouvelle de reciprocité de $V\left(\frac{q}{p}\right)$

Théorème 2. *pour p, q on a :*

$$V(p,q) + V(q,p) = \frac{1}{n} \log p^{q-1} q^{p-1} - \frac{2}{\pi} - pg(\frac{1}{p}) - qg(\frac{1}{q}) - \frac{2}{\pi} G(p,q). \tag{1.8}$$

Et le corollaire suivant découle

Corollaire 1.1. *pour p, q :*

$$\langle e_p, e_q \rangle = \frac{2 + (\log 2\pi - \gamma)(p+q)}{2pq} - \frac{1}{2pq} \log p^{p-1} q^{q-1} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{q} g(\frac{1}{p}) + \frac{1}{p} g(\frac{1}{q}) \right) \tag{1.9}$$

Ainsi on obtient l'écriture asymptotique suivante de $V(\bar{a}, pa + r)$.

Théorème 3. *Soient $a > r$ et p entier tel que : $(a, pa + r) = 1$, $\bar{a}a \equiv 1(\mod ap + r)$ et $\bar{r}r \equiv 1(\mod a)$, pour p assez grand on a :*

$$\begin{aligned} V(\bar{a}, pa + r) = &-(p + \frac{r}{a}) \vee (\bar{r}, a) - \frac{1}{\pi a} + \frac{1}{\pi}(p + \frac{r}{a}) \left(\log \frac{2\pi a}{pa + r} - \alpha \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{4^k . \pi^{2k-1} . \beta_{2k}^2}{k(2k)!} \left(\frac{a}{pa + r} \right)^{2k-1} + O(\frac{1}{pN}) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Et le corollaire suivant découle :

Corollaire 1.2. *Soit $a \geq 1$, pour un grand p on a :*

$$\begin{aligned} V(p+1, ap + a - 1) = &-(p + 1 - \frac{1}{a})V(1, a) - \frac{1}{\pi a} \\ &+ \frac{1}{\pi} \left(p + 1, -\frac{1}{a} \right) \left(\log \frac{2\pi a}{(p+1)a - 1} - \alpha \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{4^k \pi^{2k-1} \beta_{2k}^2}{k(2k)!} \left(\frac{a}{(p+1)a - 1} \right)^{2k-1} + O\left(\frac{1}{pN} \right) \end{aligned} \tag{1.11}$$

dans le cas particulier $a = 1$ on :

$$\begin{aligned} V(1,p) &= \frac{1}{p}\left(\log\frac{2\pi}{p} - \alpha\right)p - \frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{144p} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}(-1)^k\frac{4^k\pi^{2k-1}\beta_{2k}^2}{k(2k)!}\left(\frac{1}{p}\right)^{2k-1} + O\left(\frac{1}{pN}\right) \end{aligned} \tag{1.12}$$

La relation (3.12) améliore la formule asymptotique (3.5) prouvé par H. Maier et M. Th. Rassiais [3] .

On donne quelques exemples :

Exemple 1.1. *Pour un grand* p *on a :*

$$\begin{aligned} V(p+1,2p+1) &= -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(\log\frac{4\pi}{2p+1} - \alpha\right) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}(-1)^k\frac{4^k\pi^{2k-1}\beta_{2k}^2}{k(2k)!}\left(\frac{2}{2p+1}\right)^{2k-1} + O\left(\frac{1}{pN}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(ep+1,3p+1) &= -\frac{p+\frac{1}{3}}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{\pi}\left(p+\frac{1}{3}\right)\left(\log\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}(-1)^k\frac{4^k\pi^{2k-1}\beta_{2k}^2}{k(2k)!}\left(\frac{3}{3p+1}\right)^{2k-1} + O\left(\frac{1}{pN}\right) \end{aligned}$$

1.3.2 Cas général : p, q arbitraires

Soit $\omega = (p,q) \geq 1$. Ainsi dans ce cas on a la formle de Vassionnine généralisée :

$$\begin{aligned} \langle e_p, e_q\rangle &= \frac{\log 2\pi - \alpha}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) + \frac{p-q}{2pq}\log\frac{q}{p} \\ &- \frac{\pi\omega}{2pq}\left(V\left(\frac{p}{\omega},\frac{q}{\omega}\right) + V\left(\frac{q}{\omega},\frac{p}{\omega}\right)\right) \end{aligned}$$

Conséquence du théorème (2) on trouve une nouvelle expression pour $\langle e_p, e_q\rangle$, voir [23] :

$$\begin{aligned}\langle e_p, e_q\rangle =& \frac{2\omega + (\log 2\pi - \alpha)(p+q)}{2pq} \\ &- \frac{1}{2pq}\left[(p-\omega)\log p + (q-\omega)\log q - (p+q-2\omega)\log\omega\right] \\ &+ \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{p} g\left(\frac{\omega}{q}\right) + \frac{1}{q} g\left(\frac{\omega}{p}\right)\right]\end{aligned}$$

1.4 Calcul d'un produit scalaire

Soit p un entier positif et v_p est la fonction donnée par $v_p(t) = \left\{\frac{t}{p}\right\}$: v_p est définit sur $\mathbb{R}_+$ et comme une restriction de e_p à $\mathbb{N}$:

$$v_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \\ \{k/p\} & x \in [k, k+1] \end{cases}$$

On a la relation :

$$v_p = e_p - \frac{1}{p} e_1 \tag{1.13}$$

Ensuite d'après la définition (1.1) on obtient :

$$\langle v_p, v_q\rangle = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)} \left\{\frac{k}{p}\right\}\left\{\frac{k}{q}\right\}$$

Lemme 1. *Soient p, q des nombres premier, on a :*

$$\frac{2pq}{\pi}\langle V_p, V_q\rangle = V(1,p) + V(1,q) - [V(p,q) + V(q,p)] + \frac{1}{\pi}\log p^{q-1} q^{p-1}$$

Démonstration. En utilisant l'expression (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\langle v_p, v_q\rangle &= \langle e_p - \frac{1}{p} e_1, e_q - \frac{1}{q} e_1\rangle \\ &= \langle e_p, e_q\rangle + \frac{1}{pq}\langle e_1, e_1\rangle - \frac{1}{p}\langle e_1, e_q\rangle - \frac{1}{q}\langle e_1, e_p\rangle\end{aligned}$$

d'autre part, d'après la formule de Vassionnine (1.3) on obtient

$$\langle e_1, e_q\rangle = \frac{\log 2\pi - \alpha}{2}\left(1+\frac{1}{q}\right) + \frac{1-q}{2q}\log q - \frac{\pi}{2q}V(1,q)$$

$$\langle e_1, e_p\rangle = \frac{\log 2\pi - \alpha}{2}\left(1+\frac{1}{p}\right) + \frac{1-p}{2p}\log p - \frac{\pi}{2p}V(1,p)$$

$$\langle e_p, e_q\rangle = \frac{\log 2\pi - \alpha}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) + \frac{p-q}{2pq}\log\frac{q}{p} - \frac{\pi}{2qq}\left[V(q,p)+V(p,q)\right]$$

Par conséquent, on déduit :

$$\begin{aligned}\frac{2pq}{\pi}\langle v_p, v_q\rangle &= V(1,p)+V(1,q)-V(p,q)-V(q,p)\\ &+\frac{1}{\pi}(q\log p + p\log q - \log pq)\end{aligned}$$

La série

$$\sum_{k\geq}\frac{1}{k(k+1)}\left\{\frac{k}{p}\right\}\left\{\frac{k}{q}\right\} \tag{1.14}$$

est convergente on réécrive sous une autre forme pour entier k , on pose : $k\equiv r(pq), 1\leq r\leq pq-1$ et ensuite

$$\left\{\frac{k}{p}\right\}\left\{\frac{k}{q}\right\} = \left\{\frac{r}{p}\right\}\left\{\frac{r}{q}\right\}$$

la série (1.14) est égale à :

$$\sum_{r=1}^{pq-1}\sum_{i\geq 0}\frac{1}{(ipq+r)(ipq+r+1)}\left\{\frac{r}{p}\right\}\left\{\frac{r}{q}\right\} \tag{1.15}$$

Finalement pour estimer $\langle V_p, V_q\rangle$ on doit calculer les sommes :

$$\sum_{i\geq 0}\frac{1}{(ipq+r)(ipq+r+1)}$$

□

Lemme 2. *Pour a, b deux nombres positifs distincts, on a :*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{\psi(a)-\psi(b)}{a-b}$$

Démonstration. On écrit :

$$\begin{aligned}\psi(a)-\psi(b) &= \frac{1}{b}.\frac{1}{a}+\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k+b}-\frac{1}{k+a}\right)\\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+b)}\end{aligned}$$

Soit $\alpha > 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha k+a)(\alpha k+b)} = \frac{\psi(a/\alpha)-\psi(b/\alpha)}{\alpha(a-b)} \tag{1.16}$$

On a l'intégral :

$$\psi(a)-\psi(b) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{1-e^{-t}}dt$$

Ensuite on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a-b}{(k+a)(k+b)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+b}-\frac{1}{k+a}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 (x^{k+b-1}-x^{k+a-1})dx\\ &= \int_0^1 \frac{x^{b-1}-x^{a-1}}{1-x}dx\\ &= \int_0^{\infty}\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{1-e^{-t}}dt\end{aligned}$$

□

Donc dans le cas particulier $\alpha = pq$ de la relation (1.15) et (2.4), on obtient le résultat.

1.5 Identités supplémentaire sur $V(p,q)$

Dans cette section on rapport les sommes $V(p,q)$ à des séries convergentes intéressantes et bien connues . la fonction ψ et cotangente sont liés par la formule de réflexion

$$\psi(1-z) = \psi(z) = \pi\cot(\pi z) \tag{1.17}$$

De plus ψ peut être écrit en termes de fonction harmonique

$$H_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+z}$$

et le n^{eme} nombre harmonique

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

comme suit

Lemme 3. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(z) > 0$ alors, on a :*

$$\psi(z) = \lim_{n\to\infty} (\log n - H_n(z))$$

en $z = n$ entier positif on a :

$$\psi(n+1) = -\gamma + H_n$$

Démonstration. C'est facile de voire que :

$$\begin{aligned}\psi(z) &= -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+z} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\log n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+z} \right)\end{aligned}$$

ensuite :

$$\begin{aligned}\psi(n+1) &= \lim_{n\to\infty} \left(\log m - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+n+1} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} - \sum_{k=n}^{k+n} \frac{1}{k+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\log m - \sum_{k=0}^{k+n} \frac{1}{k+1} \right) + H_n \\ &= -\gamma + H_n\end{aligned}$$

□

Proposition 1.1. *Pour $m = \bar{p}/q$ avec $(p,q)=1$, on a :*

$$V(p,q) = \frac{1}{\pi q}\sum_{k\geq 0}\sum_{r=1}^{q-1}\frac{r(1-2rn)}{(k+1)(k+rn)}$$

Démonstration. On a : :

$$V(p,q) = \sum_{r=1}^{q-1}\left\{\frac{rp}{q}\right\}\cot\left\{\frac{\pi r}{q}\right\} = \sum_{r=1}^{q-1}\frac{V}{q}\cot\frac{\pi r\bar{p}}{q}$$

Par la formule (3.1) on a :

$$\cot\left(\frac{\pi r\bar{p}}{q}\right) = \frac{1}{\pi}\left[\psi\left(\frac{q-r-\bar{p}}{q}\right)-\psi\left(\frac{r\bar{p}}{q}\right)\right]$$

Et d'après la relation (1.7) et (2.5) on a :

$$\psi\left(\frac{q-r-\bar{p}}{q}\right)-\psi\left(\frac{r\bar{p}}{q}\right) = q\sum_{k\geq 0}\frac{q-2r\bar{p}}{(q(k+1)-r\bar{p})(qk+r\bar{p})}$$

ensuite

$$V(p,q) = \frac{1}{p}\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{k\geq 0}\frac{r(q-2r\bar{p})}{(q(k+1)-r\bar{p})(qk-r\bar{p})}$$

et on obtient :

$$V(p,q) = \frac{1}{\pi q}\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{k\geq 0}\frac{r(1-2rn)}{(k+1-rn)(k+rn)}$$

□

1.6 Une autre estimation de $V(p,q)+V(q,p)$

On va établir une autre formule asymptotique pour la somme $V(p,q)+V(q,p)$. on prouve le lemme suivant :

Lemme 4. *Soit p un entier positif , on a :*

$$\frac{\log p}{p} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}\left\{\frac{k}{p}\right\} \tag{1.18}$$

$$\sum_{r=1}^{pq-1}\left\{\frac{r}{p}\right\}\left\{\frac{r}{q}\right\}=\frac{(p-1)(q-1)}{4}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}\left\{\frac{k}{p}\right\}&=\sum_{k\geq 1}\left\{\frac{k}{p}\right\}\int_0^1(x^{k-1}-x^k)dx\\&=\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{i\geq 0}\left\{\frac{r}{p}\right\}\int_0^1(x^{ip+r-1}-x^{ip+r})dx\\&=\frac{1}{p}\int_0^1\frac{\sum_{r=1}^{p-1}rx^{r-1}}{1+x+\cdots+x^{p-1}}dx=\frac{\log p}{p}\end{aligned}$$

Ensuite on obtient(1.18), On écrit

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{pq-1}\left\{\frac{r}{p}\right\}\left\{\frac{r}{q}\right\}&=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{t=1}^{q-1}\left\{\frac{iq+t}{p}\right\}\left\{\frac{t}{q}\right\}\\&=\frac{1}{pq}\sum_{t=1}^{q-1}t\left(\sum_{i=0}^{q-1}p\left\{\frac{iq+t}{p}\right\}\right)\end{aligned}$$

et on prend $r=p\left\{\frac{iq+1}{p}\right\}$, on observe que r est entier et varier de 1 à $p-1$, Alors on a :

$$\sum_{r=1}^{pq-1}\left\{\frac{r}{p}\right\}\left\{\frac{r}{q}\right\}=\frac{1}{pq}\sum_{t=0}^{q-1}\sum_{r=1}^{p-1}tr=\frac{(p-1)(q-1)}{4}$$

□

Corollaire 1.3. *Soit p un entier positif . Alors on a :*

$$\log p=\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p-1}r\left(\psi\left(\frac{r+1}{p}\right)-\psi\left(\frac{r}{p}\right)\right)$$

Démonstration. On commence par l'égalité

$$\frac{\log p}{p}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}\left\{\frac{k}{p}\right\}=\sum_{r=1}^{p-1}\left(\sum_{i\geq 0}\frac{1}{(ip+r)(ip+r+1)}\right)\left\{\frac{r}{p}\right\}$$

de (2.4) on a :

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(pi+r)(pi+r+1)}=\frac{\psi(r+1)/p-\psi(r/p)}{p}$$

donc le résultat suit. □

Proposition 1.2. *Soient p , q deux entier coprime, on met*

$$\Delta(p,q)=\frac{2}{\pi}\left(1+\max\left\{\frac{(p-1)(q-1)}{4}\psi\left(\frac{1}{pq}\right),\min\{q-\gamma-\psi(q),p-\gamma-\psi(p)\}\right\}\right).$$

ensuite on a :

$$\begin{aligned}\Delta(p,q)&<\frac{1}{\pi}\log p^{q-1}q^{p-1}-pg\left(\frac{1}{p}\right)-qg\left(\frac{1}{q}\right)-V(p,q)-V(q,p)\\&\leq\frac{2+2\sqrt{pq\log p\log q}}{\pi}\end{aligned}\tag{1.19}$$

Démonstration. D'après l'égalité (1.2) on remarque que :

$$\langle v_p,v_q\rangle\leqslant\sum_{k\geq1}\frac{1}{k(k+1)}\left\{\frac{k}{p}\right\}=\frac{\log p}{p}$$

et

$$\langle v_p,v_q\rangle\leqslant\sum_{k\geq1}\frac{1}{k(k+1)}\left\{\frac{k}{q}\right\}=\frac{\log q}{q}$$

on déduit que $\langle v_p,v_q\rangle\leqslant\sqrt{\log p\log q/pq}$ pour $q<p$ on a :

$$\langle v_p,v_q\rangle>\frac{1}{pq}\sum_{k=1}^{q-1}\frac{k}{k+1}$$

de même si $p<q$ on a :

$$\langle v_p,v_q\rangle>\frac{1}{pq}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{k}{k+1}$$

donc on a :

$$\langle v_p,v_q\rangle>\frac{1}{pq}\left(q-\sum_{k=1}^{q-1}\frac{1}{k+1}\right)\ ,\text{ et }\langle v_p,v_q\rangle>\frac{1}{pq}\left(p-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k+1}\right)$$

de (3.2) on a

$$\langle v_p, v_q\rangle > \frac{1}{pq}(q-\gamma-\psi(q)) \text{ , et } \langle v_p, v_q\rangle > \frac{1}{pq}(p-\gamma-\psi(p))$$

ensuite $\langle v_p, v_q\rangle > \frac{1}{pq}\min\{q-\gamma-\psi(q), p-\gamma-\psi(p)\}$ finalement on obtient :

$$\frac{1}{\pi pq}\min\{q-\gamma-\psi(q), p-\gamma-\psi(p)\} < \frac{1}{\pi}\langle v_p, v_q\rangle \leqslant \sqrt{\log p \log q/pq}$$

de plus on a :

$$pq\langle v_p, v_q\rangle = G(p,q) = \sum_{r=1}^{pq-1}\left(\psi\left(\frac{r+1}{pq}\right)-\psi\left(\frac{r}{pq}\right)\right)\left\{\frac{r}{p}\right\}\left\{\frac{r}{q}\right\}$$

et pour $x>0$ et $0<y<1$ on a légalité $\psi(x+y)-\psi(x) \geqslant \psi(y)$. on prend $x=\frac{r}{pq}$ et $y=\frac{1}{pq}$ et d'après les inégalités ci-des on obtient :

$$G(p,q) \geqslant \psi\left(\frac{1}{pq}\right)\sum_{r=1}^{pq-1}\left\{\frac{r}{p}\right\}\left\{\frac{r}{q}\right\} \geqslant \frac{(p-1)(q-1)}{4}\psi\left(\frac{1}{pq}\right).$$

de plus

$$\frac{1}{pq}\max\left\{\frac{(p-1)(q-1)}{4}\psi\left(\frac{1}{pq}\right), \min\{q-\gamma-\psi(q), p-\gamma-\psi(p)\}\right\} < \langle v_p, v_q\rangle \leqslant \sqrt{\log p \log q/pq}.$$

ensuite on a :

$$\frac{2}{\pi}\max\left\{\frac{(p-1)(q-1)}{4}\psi\left(\frac{1}{pq}\right), \min\{q-\gamma-\psi(q), p-\gamma-\psi(p)\}\right\} < \frac{2}{\pi}G(p,q) \leqslant \frac{2}{\pi}\sqrt{pq\log p\log q}.$$

de (1.8) on obtient :

$$\frac{2}{\pi}G(p,q)+\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}\log p^{q-1}q^{p-1} - (V(p,q)V(q,p)) - pg\left(\frac{1}{p}\right) - qg\left(\frac{1}{q}\right).$$

Cela implique la relation (4.2) $\square$

Chapitre 2

La somme de Vassionnine et l'hypothèse de Riemann

2.1 Introduction

On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(0, +\infty)$ et le sous-espace $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$ des fonctions de la forme

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \rho\left(\frac{\theta_k}{t}\right),$$

$n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C}, 0 < \theta_k \leq 1,$ pour $1 \leq k \leq n,$ où ρ_t désigne la partie fractionnaire de t. On note $\mathcal{X}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $]0, 1]$.

Il résulte des travaux de Nyman et Beurling [7] que l'hypothèse de Riemann équivaut au fait que $\mathcal{X}$ est limite dans $\mathcal{H}$ d'une suite d'éléments de $\mathcal{B}$,autrement dit au fait que $d(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = 0$ où d désigne la distance naturelle sur $\mathcal{H}$ induite par le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)\bar{g}(t)dt$.

Si l'on note, pour $0 < \lambda \leq 1$, $\mathcal{B}_\lambda$ le sous-espace de $\mathcal{B}$ des fonctions f telles que $\min\limits_{1\leq k\leq n} \theta_k \geq \lambda$ et $D(\lambda) = d(\mathcal{X}, \mathcal{B}_\lambda)$,le théorème de Beurling et Nyman affirme donc l'équivalence entre l'hypothèse de Riemann et la convergence de $D(\lambda)$ vers 0 quand λ tend vers 0.

On dispose sur $D(\lambda)$ de la minoration suivante établie par L.Báez-Duarte, M.Balazard, E.Saias et le premier auteur voir[9].

2.1.1 L'hypothèse de Riemann

On a toujours cherché des formules pour générer les nombres premiers.c'est à dire trouver une formule qui à un entier n associe le n^e nombre premier. Ou d'une manière moins exigeante, on peut se contenter d'exiger une fonction f qui à tout entier n associe un nombre premier et telle que chaque valeur prise ne le soit qu'une fois. Et on souhaite que la fonction soit calculable en pratique (voir [?]) : la fonction ζ de Riemann (Voir[10] et [8]), a été introduite pour fournir la position des nombres premiers : En fait, la position des zéros de la fonction ζ de Riemann fournit la position des nombres premiers et on a même pu trouver une formule exprimant chaque nombre premier en fonction des zéros de la fonction ζ de Riemann !.

Pour rappel, la fonction ζ de Riemann est une fonction analytique complexe méromorphe et définie, pour $\Re(s) > 1$, par la série de Dirichlet $\zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ La fonction ζ admet un prolongement analytique à tout le plan complexe, sauf 1. Il existe plusieurs démonstrations, faisant appel à différentes représentations de la fonction ζ. Parmi elles :

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_0^\infty \frac{\{u\}}{u^{1+s}}du$$

Comme $\{u\}$ est toujours compris entre 0 et 1, l'intégrale est convergente pour $\Re(s) > 0$

La fonction ζ satisfait à l'équation fonctionnelle :

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

valable pour tout nombre complexe s différent de 0 et 1. Ici, Γ désigne la fonction gamma.

est une conjecture formulée en 1859 par le mathématicien Bernhard Riemann. Elle dit que les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle 1/2. Le lien entre la fonction ζ et les nombres premiers avait déjà été établi par Leonhard Euler avec la formule, valable pour $\Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^s})(1-\frac{1}{3^s})(1-\frac{1}{5^s})\cdots}$$

où le produit infini est étendu à l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers. On appelle parfois cette formule produit eulérien. Un autre lien existe aussi avec la fonction de comptage $\pi(x)$ des nombres premiers inférieurs ou égaux à x :

$$\pi(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}, p \geq x} 1$$

On a en effet, pour $\Re(s) > 1$: $\ln \zeta(s) = s \int_2^\infty \frac{\pi(u)}{u(u^s - 1)} du$.

À cause de la relation entre la fonction ζ et la fonction π, l'hypothèse de Riemann a une importance considérable en théorie des nombres : Car elle donne une meilleure estimation de l'erreur intervenant dans le théorème des nombres premiers qui permet d'obtenir une formule qui donne le comportement asymptotique du n^{eme} nombre premier p_n : $p_n \sim n \ln(n)$. En effet : Helge von Koch en 1901 a montré plus précisément : L'hypothèse de Riemann équivaut à $\pi(x) = li(x) + O(\sqrt{x}\ln(x))$. où $li(x) = \int_0^x \frac{dx}{\ln(t)}$.

Malgré tout cela, je trouve que les fonctions ζ et π ne permettent qu'une approximation des nombres premiers.

2.1.2 Théorème de Báez-Duarte

$$\lim_{\lambda \to 0} \inf D(\lambda) \sqrt{\log(1/\lambda)} \geq C,$$

où la constante C est définie par

$$C := \left(\sum_\beta \frac{1}{|\beta|^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

la sommation portant sur les zéros β de la fonction ζ de partie réelle $\frac{1}{2}$, chaque zéro étant compté une seule fois, quel que soit son ordre de multiplicité.

Signalons que ce résultat à été récemment amélioré par J.-F.Burnol [Burnol 01] qui a établi le théorème suivant

2.1.3 Théorème de Burnol

$$\lim_{\lambda \to 0} \inf D(\lambda) \sqrt{\log(1/\lambda)} \geq \left(\sum_\beta \frac{m(\beta)^2}{|\beta|^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

où la sommation porte toujours sur les zéros β de la fonction ζ de partie réelle $\frac{1}{2}$ et $m(\beta)$ désigne la multiplicité de β.

On remarquera que d'une part si l'hypothèse de Riemann est fausse les deux théorèmes précédents sont triviaux puisque le membre de gauche vaut $+\infty$. D'autre part, on sait [Rosser 39, p. 29] que sous l'hypothèse de Riemann on a

$$\sum_{\beta} \frac{m(\beta)^2}{|\beta|^2} = 2 + \gamma - \log 4\pi$$

où γ désigne la constante d'Euler. Cela permet donc d'affirmer finalement à partir du résultat de Burnol que

2.1.4 Théorème

$$\liminf_{\lambda \to 0} D(\lambda)\sqrt{\log(1/\lambda)} \geq \sqrt{2 + \gamma - \log 4\pi},$$

Les résultats numériques mentionnés en [Báez-Duarte et al. 00] et développés dans ce qui suit ont conduit leurs auteurs à formuler la conjecture suivante

2.1.5 Conjecture

On a

$$\lim_{\lambda \to 0} D(\lambda)\sqrt{\log(1/\lambda)} \geq \sqrt{2 + \gamma - \log 4\pi},$$

Nous présentons ici un certain nombre de résultats numériques concernant l'approximation de la fonction $\mathcal{X}$ par des éléments de $\mathcal{B}$.

2.2 Produits scalaires

La plupart des calculs présentés ici nécessitent l'évaluation des produits scalaires entre les fonctions g_θ définies par $g_\theta(t) := \rho(\theta/t)$ pour $\theta > 0$.

On utilise pour cela les formules explicites de Vassiounine [Vassiounine 96] suivantes s'appliquant aux fonctions $e_n(t) = g_{\frac{1}{n}}(t) = \rho(\frac{1}{nt}), n \geq 1$

2.2.1 Théorème de Vassiounine

On a pour $n, m \geq 1$

$$\begin{aligned}\langle e_n, e_m\rangle = & \frac{\log(2\pi)-\gamma}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)+\frac{m-n}{2mn}\log\left(\frac{n}{m}\right) \\ & -\frac{\pi\omega}{2nm}\sum_{k=1}^{n_0-1}\rho\left(\frac{km_0}{n_0}\right)\cot\frac{\pi k}{n_0} \\ & -\frac{\pi\omega}{2mn}\sum_{k=1}^{m_0-1}\rho\left(\frac{kn_0}{m_0}\right)\cot\frac{\pi k}{m_0}\end{aligned}$$

où $\omega = (n,m), n = \omega n_0, m = \omega m_0$ et γ désigne la constante d'Euler.

A partir de ces formules, il est aisé d'établir les résultats plus généraux suivants

2.2.2 Proposition

on a :

(i) $\langle g_\theta, g_\theta\rangle = \theta\langle e_1, e_1\rangle = \theta(\log(2\pi)-\gamma)$ pour tout $\theta \geq 0$;

(ii) $\langle g_{\frac{p}{q}}, g_{\frac{p'}{q'}}\rangle = pp'\langle e_{p'q}, e_{pq'}\rangle$ pour $p, p', q, q' \geq 1$, $p \leq q$,et $p' \leq q'$;

(iii) $\langle \mathcal{X}, g_\theta\rangle = \theta(-\log\theta + 1 - \gamma)$ pour tout $0 \leq \theta \leq 1$.

2.3 Calcule de la distance d_n

D'après la formule d'inversion de Moebius et le théorème des nombres premiers, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\rho\left(\frac{1}{kt}\right) = -1 \qquad \text{pour tout } t > 0$$

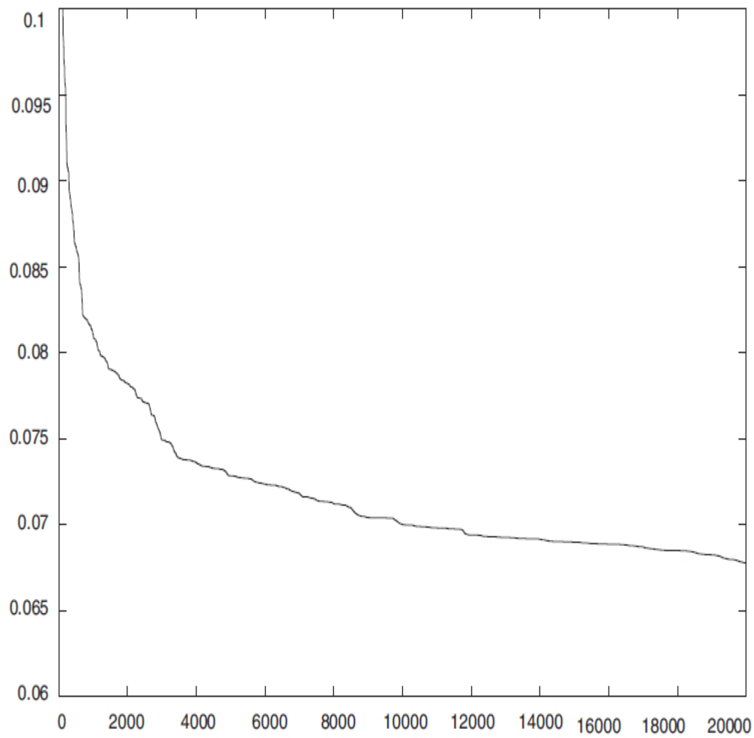

FIGURE 2.1 – La distance d_n de 1 à 20 000.

Une première approche naturelle consiste donc à se restreindre aux fonctions de $\mathcal{B}$ ayant des paramètres θ rationnels et plus précisément de la forme $\frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*$. On considère pour cela les fonctions e_k définies par $e_k(t) = \rho\left(\frac{1}{kt}\right)$ pour $k \geq 1$ et on note V_n le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_1, \cdots, e_n)$. On s'intéresse alors à la distance $d_n := d(\mathcal{X}, V_n)$ dans $\mathcal{H}$.

Les résultats numériques qui suivent plaident en faveur de la conjecture suivante déjà énoncée en [9] et similaire à la conjecture précédente.

2.3.1 Conjecture

On a

$$d_n^2 \sim \frac{2 + \gamma - \log 4\pi}{\log n} \qquad \text{quand } n \to +\infty$$

Rappelons que la convergence de d_n vers zéro entraîne automatiquement l'hypothèse de Riemann [16], puisque $D(\frac{1}{n}) \leq d_n$ mais en revanche la réciproque n'est pas claire [1].

1. En fait, la question est maintenant réglée, cf Addendum.

Des calculs sur d_n ont déjà été présentés en [Bťaez-Duarte et al. 00], nous les avons prolongés jusqu'à $n = 20000$. La méthode est fondée sur une orthonormalisation de Gram-Schmidt de la base des $(e_k), k \leq 1$. Nous avons également utilisé d'autres méthodes de calculs comme la formule

$$d_n^2 = \frac{\det Gram(e_1, \cdots, e_n, \mathcal{X})}{\det Gram(e_1, \cdots, e_n)},$$

voi[5]
20 24 15

Chapitre 3

Quelques résultats récents dans le cas de $c_0\left(\frac{1}{q}\right)$

Résumée : Dans ce chapitre, nous étudions la somme des cotangentes $c_0\left(\frac{1}{q}\right)$ liée à la fonction Zeta d'Estermann dans le cas particulier où le numérateur est égale à 1 et obtenir deux développements en série utiles de $c_0\left(\frac{1}{p}\right)$.

3.1 Introduction

Pour un entier positif p et $q = 1, 2, ..., p-1$, tel que $(p.q) = 1$, soit la somme des cotangentes (voir [10]).

$$c_0\left(\frac{p}{q}\right) = -\sum_{k=1}^{p-1} \frac{k}{p} \cot \frac{\pi k q}{p}$$

$c_0\left(\frac{p}{q}\right)$, c'est la valeur en $s = 0$

$$E_0\left(s, \frac{q}{p}\right) = \frac{1}{4} + \frac{i}{2} . c_0\left(\frac{p}{q}\right)$$

de la fonction zeta déstermann

$$E_0\left(s,\frac{q}{p}\right) = \sum_{k\geqslant 1}\frac{d\left(k\right)}{k^s}\exp\left(\frac{2\pi iq}{p}\right)$$

cette somme est liée á la somme de vassionnie par la relation (voir [22]) :

$$V\left(\frac{q}{p}\right) = \sum_{r=1}^{p-1}\left\{\frac{rq}{p}\right\}\cot\left(\frac{\pi r}{p}\right) = -c_0\left(\frac{\overline{q}}{p}\right)$$

Il est bien connu que la somme $c_0\left(\frac{1}{p}\right)$ satisfait á la formule de réciprocité (voir [22]).

$$c_0\left(\frac{q}{p}\right) + \frac{p}{q}c_0\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{\pi q} = \frac{i}{2}\psi_0\left(\frac{p}{q}\right)$$

Ce pose dans l'étude de la fonction Zeta de Riemann en vertu de la formule : (voir [2,2])

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{pq}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\left(\frac{p}{q}\right)^{it}\frac{dt}{\frac{1}{4}+t^2}$$

$$= \frac{\log 2\pi-\gamma}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) + \frac{p-q}{2pq}\log\frac{q}{p} - \frac{\pi}{2pq}\left(V\left(\frac{p}{q}\right)+V\left(\frac{q}{p}\right)\right)$$

Cette formule est liée á l'approche de Nyman, Beurling et Baez Duarte á l'hypothése de Riemann (voir [15]), qui stipule que l'hypothése de Riemann est vraie si et seulement si :

$\lim_{n\to\infty} d_N = 0$
oú

$$d_N^2 = \inf\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|1-\zeta A\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\frac{dt}{\frac{1}{4}+t^2}$$

Et l'infimum est repris sur tous les polynômes de Dirichlet.

$$A_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s}$$

Dans un travail récent avec A.Bayad [4] , nous avons prouvé que la somme $V\left(\frac{q}{p}\right)$ satisfait à la formule de réciprocité

$$V\left(\frac{q}{p}\right) + V\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{\pi}\left(G(p,p) + G(q,q) + (q-p)\log\frac{q}{p}\right) \tag{3.1}$$

où

$$G(p,q) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{pq}{k(k+1)} \left\{\frac{k}{p}\right\} \left\{\frac{k}{q}\right\}$$

En suit la restriction de la relation ((3.1)) à $q=1$ donne :

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{\pi}G(p,p) - (p-1)\log p$$

Notre itérêt dans ce travail est exactement le cas où $q=1$ afin d'obtenir deux développements en série de $c_0\left(\frac{1}{p}\right)$.

On rappelle d'abord les différents écrits asymptotiques de $c_0\left(\frac{1}{p}\right)$, dans la littérateur dans [[19],Théorème (1.2) et Théorème (1.3)] M.Th.Rassias prouvé que :

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\pi}p\log p - \frac{p}{\pi}(\log 2\pi - \gamma) + \{o(\log p) \quad or \;\; o(1)\}$$

Dans [[14], Théorème (1.7)] H.Maier et M.Th Rassias.fournir l'amélioration suivante.
Soit $b,\, n \in \mathbb{N},\;\; b \geqslant 6N,\;\; avec\, N = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$

Il existe des constantes réelles absolues $A_1, A_2 \geq 1$ et constante réel absolue E_l, l *avec* $|E_l| \leqslant (A_1 l)^{2l}$, tel que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\pi} p \log p - \frac{p}{\pi}(\log 2\pi - \gamma) - \frac{1}{\pi} + \sum_{l=1}^{n} E_l p^{-l} + R_n^*(p)$$

où

$$|R_n^*(p)| \leqslant (A_2 n)^{4n} p^{-(n+1)}$$

Seulement dans [[14], Théorème (1.9)] H.Maier and M.Th Rassias fournir une autre amélioration

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\pi} p \log p - \frac{p}{\pi}(\log 2\pi - \gamma) + c_1 p + o(1)$$

Nous attirons l'attention que S.Bettin trouve d'autres reformulations de $c_0\left(\frac{1}{p}\right)$ inspiré de la théorie des fraction continues (voir [3])

Enfin, d'un autre point de vue, nous montrons dans [6] avec A.Bayad et M.O.Hernane que :

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\log\frac{2\pi}{p} - \gamma\right) p + \frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{36p}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} (-1)^k \frac{4^k \pi^{2k-1} B_{2k}^2}{k(2k)!}\left(\frac{1}{P}\right)^{2k-1} + o\left(\frac{1}{p^n}\right)$$

Dans le même article [6], une représentation intégrale de $c_0\left(\frac{1}{p}\right)$, est donnée par :

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{(p-2)x^p - px^{p-1} + px - p + 2}{(x-1)^2(x^p-1)}\, dx \tag{3.2}$$

Corollaire 3.1.

Soit p entier positif, on a :

$$V(1,p) = -\frac{p(\psi(p)+\gamma-2)+2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k\geqslant 1}\sum_{r=1}^{p-1}\frac{r(p-2r)}{(p(k+1)-r)(k+r)} \tag{3.3}$$

$$V(1,p) = -\frac{p(\psi(p)+\gamma-2)+2}{\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{k\geqslant 1}\sum_{r=1}^{\lfloor p/2\rfloor}\frac{(p-2r)^2}{(p(k+1)-r)(pk+r)}$$

Démonstration.

D'après la proposition (. chapitre 1 .) on a :

$$V(q,p) = \frac{1}{\pi p}\sum_{k\geqslant 0}\sum_{r=1}^{p-1}\frac{r(1-2rx)}{(k+1-rx)(k+rx)}$$

dans le cas particulier où $p=1$, on obtient :

$$V(1,p) = \frac{1}{\pi p}\sum_{k\geqslant 0}\sum_{r=1}^{p-1}\frac{r(1-2r/p)}{(k+1-r/p)(k+r/p)}$$

en suite on a :

$$V(1,p) = \frac{1}{\pi}\sum_{k\geqslant 0}\sum_{r=1}^{p-1}\frac{r(1-2r)}{(p(k+1)-r)(qk+r)}$$

et

$$\begin{aligned}V(1,p) &= \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{p-1}\frac{p-2r}{p-r} - \frac{1}{\pi}\sum_{k\geqslant 1}\sum_{r=}^{p-1}\frac{r(p-2r)}{(p(k+1)-r)(pk+r)}\\ &= \frac{1}{p}(p(2-H_{p-1})-2) + \frac{1}{\pi}\sum_{k\geqslant 1}\sum_{r=1}^{p-1}\frac{r(p-2r)}{(q(k+1)-r)(qk+r)}\end{aligned}$$

d'après Lemme (5.2) *chapitre .) on obtient* (1.3)

On prend $t + r = p$ *pour avoir :*

$$\frac{1}{(p(k+1)-r)(pk+r)} = \frac{1}{(p(k+1)-t)(pk+t)}$$

$$r(p-2r) + t(p-2t) = (p-2r)^2$$

$\square$

Proposition 3.1.

La somme $V(1,p)$ *a la représentation intégrale suivante :*

$$V(1,p) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{(p-2)x^p - px^{p-1} + px - p + 2}{(x-1)^2(x^p-1)}\,dx \tag{3.4}$$

Démonstration.

Pour démontrer la formule , on utilise l'identité ((3.1))

$$V(1,p) = \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{p-1} r \sum_{k\geqslant 0} \frac{p-2r}{(p(k+1)-r)(pk+r)}$$

On a :

$$\frac{p-2r}{(pk+p-r)(pk+r)} = \frac{1}{pk+r} - \frac{1}{pk+p-r}$$

tel que :

$$\frac{1}{pk+r}=\int_0^1 x^{pk+r-1}\,dx$$

et :

$$\frac{1}{pk+p-r}=\int_0^1 x^{pk+p-r-1}\,dx$$

ensuite :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0}\frac{p-2r}{(pk+p-r)\,(pk+r)}&=\sum_{k\geqslant 0}\int_0^1\left(x^{pk+r-1}-x^{pk+p-r-1}\right)\;dx\\&=\int_0^1\left(x^{r-1}-x^{p-r-1}\right)\sum_{k\geqslant 0}x^{pk}\,dx\\&=\int_0^1\frac{x^{r-1}-x^{p-r-1}}{1-x^p}\,dx\end{aligned}$$

car ona : $\sum\limits_{k\geqslant 0}x^{pk}=\frac{1}{1-x^p}$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}V\left(1,p\right)&=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{p-1}r\int\limits_0^1\frac{x^{r-1}-x^{p-r-1}}{1-x^p}\;dx\\&=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\sum\limits_{k=1}^{p-1}r\,x^{r-1}-x^{p-2}\sum\limits_{r=1}^{p-1}r\left(\frac{1}{x}\right)^{r-1}}{1-x^p}\;dx\end{aligned}$$

d'autre par :

$$\sum_{r=1}^{p-1} r x^{r-1} = \left(\sum_{r=0}^{p-1} x^r \right) = \left(\frac{1-x^p}{1-x} \right)'$$

où :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-x^p}{1-x} \right)' &= \frac{\left(-px^{p-1}\right)(1-x) + 1 - x^p}{(1-x)^2} \\
&= \frac{-px^{p-1} + px^p + 1 - x^p}{(1-x)^2} \\
&= \frac{(p-1)\,x^p - px^{p-1} + 1}{(1-x)^2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

on a aussi :

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{p-1} r \left(\frac{1}{x} \right)^{r-1} &= \frac{(p-1)\,x^{-p} - px^{1-p} + 1}{\left(1-x^{-1}\right)^2} \\
&= \frac{(p-1)\,x^{2-p} - px^{3-p} + x^2}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

$$x^{p-2} \sum_{r=1}^{p-1} r \left(\frac{1}{x} \right)^{r-1} = \frac{p-1-px+x^p}{(1-x)^2} \qquad (2)$$

en mettant $(1)-(2)$ *on obtient :*

$$\frac{(p-1)\,x^p - px^{p-1} + 1 - p + 1 + px - x^p}{(1-x)^2} = \frac{(p-2)\,x^p - px^{p-1} + px + 2 - p}{(1-x)^2}$$

ce qui donner la formule (1.2)

$$V(1,p) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{(p-2)\,x^p - px^{p-1} + px + 2 - p}{(1-x)^2\,(x^p-1)}\,dx$$

$\square$

On donne quelque valeurs de $V(1,p)$

Exemple 3.1.

$$\begin{aligned}
V(1,2) &= 0\\
V(1,3) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\\
V(1,4) &= -\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

En appliquant une technique de la théorie de la fonction génératrice [11] aux intégrales précédentes, on obtient deux expansions en séries de $c_0\left(\frac{1}{p}\right)$

3.2 Expansion en série de $c_0\left(\frac{1}{p}\right)$

Soit b_k la suite entière définie par $b_0 = 1, b_1 = 2$ et les formules récursives :

$$\begin{aligned}
&b_k - 2b_{k-1} + b_{k-2} = 0\\
&2 \leqslant k \leqslant p-1 \ , \quad k = p+1 \ , \ \ b_p - 2b_{p-1} + b_{p-2} \ = 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&b_k - 2b_{k-1} + b_{k-2} - b_{k-p} + 2b_{k-p-1} - b_{k-p-2} = 0\\
&k \geqslant p+2
\end{aligned}$$

Selon les termes b_k, on obtient la première expansion de la série dans le théorème suivant .

Théorème 4.

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\pi}p\,(p-1)\,(p-2)\sum_{k\geqslant 0}\frac{b_k}{(k+1)\,(k+p+1)\,(k+2)\,(k+p)} \tag{3.5}$$

Pour $p \geq 1$, on définit la fonction arithmétique a_p

$$a_p(k) = \begin{cases} 1 & si \;\; p/k \\ -1 & si \;\; k \equiv 1 \pmod p \\ 0 & par\, tout \end{cases}$$

cette fonction n'est pas multiplicative.

En générale les fonction arithmétiques sont définies à partir de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

On peut étendre cette définition à $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ensemble de fonction de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{C}$.

dans ce cas, la fonction correspondante est :

$$A : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \quad avec : \quad A(p) = a_p$$

de plus, $A(pq) = \pm A(p)\, A(q)$ et $|A|$ est multiplicative.

Soit la fonction $M(p,k)$ définit par :

$$M(p,0) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{3}{2}p + 1$$

et

$$M(p,k) = (p-1)\left(\frac{1}{2}p + k - 1\right) - k(p+k-1)\left(H_{p+k-1} - H_k\right), \quad k \geqslant 1$$

où H_k est le nombre Harmonique

$$H_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}$$

Suite à cette fonction, un second développement en série de $c_0\left(\frac{1}{p}\right)$ est donné dans le théorème (2.2).

Démonstration.

On s'inspire de la théorie des fonction génératrices [4, 6], et on montre que la séquence b_k est générée par la fonction rationnelle :

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x + x^2 - x^p + 2x^{p+1} - x^{p+2}}$$

□

Plus précisément on obtient le lemme suivant :

Lemme 5.

$$\frac{1}{1 - 2x + x^2 - x^p + 2x^{p+1} - x^{p+2}} = \sum_{k\geqslant 0} b_k x^k \tag{3.6}$$

Démonstration.

Il est bien connu que :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geqslant 0} x^k, \quad |x| < 1 \tag{3.7}$$

avec : $0 \leq x < 1$

$$0 < (x-1)^2 (1 - x^p) < 1$$

et

$$(x-1)^2 (1 - x^p) = 1 - \left(2x - x^2 + x^p - 2x^{p+1} + x^{p+2}\right)$$

en suite on a :

$$0 < 2x - x^2 + x^p - 2x^{p+1} + x^{p+2} < 1$$

□

De plus, $f(x)$ est développable sur des séries entières pour obtenir le résultat, il faut prendre la quantité $2x - x^2 + x^p - 2x^{p+1} + x^{p+2}$ au lieu de x dans la dernière formule ((3.7)). On écrit :

$$\frac{1}{1-2x+x^2-x^p+2x^{p+1}-x^{p+2}} = \sum_{k\geqslant 0} d_k x^k$$

ensuite :

$$\left(1-2x+x^2-x^p+2x^{p+1}-x^{p+2}\right)\left(\sum_{k\geqslant 0} d_k x^k\right) = 1$$

Pour les calculer, on utilise le produit connu de Cauchy de deux séries complètes.

$$\left(\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k\right)\left(\sum_{j\geqslant 0} d_j x^j\right) = \sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j d_{k-j}\right) x^k$$

Qui généré le produit d'un polynôme de degré n avec une série entière qui donne également une série entière comme suit :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{j\geqslant 0} d_j x^j\right) = \sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{j=0}^{\min(n,k)} a_j d_{k-j}\right) x^k$$

on revient à $f(x)$, et on écrit :

$$1-2x+x^2-x^p+2x^{p+1}-x^{p+2} = \sum_{k=0}^{p+2} a_k x^k$$

avec

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 1, \quad a_p = -1, \quad a_{p+1} = 2, \quad a_{p+2} = -1$$

et les autres sont égale à 0.
On conclue que :

$d_0 = 1, \quad d_1 = -2$. La formule :

$$\sum_{j=0}^{\min(p+2,k)} a_j d_{k-j} = 0$$

Stipule que :

$$d_k - 2d_{k-1} + d_{k-2} = 0\ ,\ 2 \leqslant k \leqslant p-1\ ,\ k = p+1$$
$$d_p - 2d_{p-1} + d_{p-2} = 1$$

et

$$d_k - 2d_{k-1} + d_{k-2} - d_{k-p} + 2d_{k-p} - d_{k-p-2} = 0$$
$$k \geq p+2$$

enfin, on voit que d et b sont identique pour tout entier $k \geq 0$,voir [6] .

Pour obtenir le résultat ((3.5)) de théorème ((4)) , on doit substituer l'expression ((3.6)) à l'identité ((3.2)) et obtenir :

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{k\geqslant 0} b_k \int_0^1 \left((p-2)\,x^{k+p} - px^{k+p-1} + px^{k+1} + (2-p)\,x^k\right) dx$$

De plus

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{\pi}\sum_{k\geqslant 0} b_k \left(\frac{p-2}{k+p+1} - \frac{p}{k+p} + \frac{p}{k+2} + \frac{p-2}{k+1}\right)$$

Finalement

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\pi} p\,(p-1)\,(p-2)\sum_{k\geqslant 0} \frac{b_k}{(k+1)\,(k+p+1)\,(k+2)\,(k+p)}$$

et $c_0\,(1) = c_0\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ est compatible avec la définition de c_0.

Concernant l'identité ((3.6)) , lemme ((5)) , on remarque que :

$$\frac{1}{(1-x)^2(1-x^p)} = \sum_{k\geqslant 0} b_k x^k\,, \qquad |x|<1$$

De plus, pour $x = \frac{1}{2}$ on déduit que les coefficients b_k satisfaire les affirmations suivants :

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{b_k}{2^k} = \frac{2^{p+2}}{2^p-1} \quad \textit{and} \quad \lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{2^k} = 0$$

Théorème 5.

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{k\geqslant 0} a_p(k)\,M(p,k) \tag{3.8}$$

Démonstration.

D'abord on commence par montrer une autre représentation intégrale de $c_0\left(\frac{1}{p}\right)$ □

Lemme 6.

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\sum\limits_{r=1}^{p-1}(p-r-1)\,rx^{r-1}}{1+x+...+x^{p-1}}\,dx \tag{3.9}$$

Démonstration.

On montre que :

$$(p-2)\,x^p - px^{p-1} + px - p + 2 = (x-1)^3\sum_{r=1}^{p-1}(p-r-1)\,rx^{r-1}$$

$$
\begin{aligned}
(x-1)^3 \sum_{r=1}^{q-1} (q-r-1)\ r\,x^{r-1} \ &= \ \left(x^3-3x^2+3x-1\right) \sum_{r=1}^{p-1} (p-r-1)\, r\, x^{r-1} \\
&= \sum_{r=3}^{p} (p-r+1)\,(r-2)\, x^r - 3 \sum_{p=2}^{p-1} (p-r)\,(r-1)\, x^r \\
&\quad +3 \sum_{r=1}^{p-2} (p-r-1)\ r x^r - \sum_{r=0}^{p-3} (p-r-2)\,(r+1)\ x^r
\end{aligned}
$$

Il est évident de remarquer que :

$$(p-r+1)\,(r-2) - 3\,(p-r)\,(r-1) + 3\,(p-r-1)\, r - (p-y-2)\,(r+1) = 0$$

on remplaçant r par sa valeur dans chaque série, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&(p-2)\, x^p + 2\,(p-3)\, x^{p-1} + 3\,(p-4)\, x^{p-2} - 3\,(p-2)\, x^{p-1} \\
&-6\,(p-3)\, x^{p-2} - 3\,(p-2)\, x^2 + 3\,(p-2)\, x^{p-2} + 3\,(p-2)\, x \\
&+6\,(p-3)\, x^2 - p + 2 - 2\,(p-3)\, x - 3\,(p-4)\, x^2
\end{aligned}
$$

on simplifie

$$
\begin{aligned}
&(2p-6-3p+6)\, x^{p-1} + (3p-12-6p+18+3p-6)\, x^{p-2} \\
&+ (-3p+6+6p-18-3p+12)\, x^2 + (3p-6-2p+6)\, x \\
&+ (p-2)\, x^p - p + 2
\end{aligned}
$$

d'où

$$(x-1)^3 \sum_{r=1}^{p-1} (p-r-1)\, r x^{r-1} = (p-2)\, x^p - p x^{p-1} + p x - p + 2$$

$\square$

Le théorème ((5)) est immédiat du lemme de la manière suivante :

$$\frac{1}{1+x+...+x^{p-1}} = \frac{1-x}{1-x^p}$$

et $\quad |x| < 1,$ ensuite :

$$\frac{1}{1+x+...+x^{p-1}} = \frac{1-x}{1-x^p} = \sum_{k\geqslant 0} (1-x)\, x^{pk}$$

de plus :

$$\frac{1}{1+x+...+x^{p-1}} = \sum_{k\geqslant 0} a_p\,(k)\, x^k$$

et on a :

$$\frac{\sum\limits_{r=1}^{p-1}(p-r-1)\, r x^{r-1}}{1+x+...+x^{p-1}} = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0} a_p\,(k)\ (p-r-1)\, r x^{k+r-1}$$

le passent aux intégrale

et sachant que $\int_0^1 x^{k+r-1}\, dx = \frac{1}{k+r}$ alors

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{r=1}^{p-1} a_p\,(k) \frac{(p-r-1)\, r}{k+r}$$

avec :

$$\sum_{r=1}^{p-1} \frac{(p-r-1)\ r}{k+1} = \ (p-1)\left(\frac{1}{2}p+k-1\right) - k\,(p+k-1)\sum_{r=k+1}^{p+k-1}\frac{1}{r}$$

d'où on déduit le résultat

3.3 Connexion à la fonction digamma

Nous terminant ce travail en revisitant la preuve de l'expression de $c_0\left(\frac{1}{p}\right)$ en fonction de la fonction digamma et des polynômes de Bernoulli dans le travail [1] de L.Báez Duarte.

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{p-1} B_1\left(\frac{r}{p}\right)\psi\left(\frac{r}{p}\right)$$

où B_1 est le polynôme de Bernoulli réduit :

$$B_1(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in \mathbb{Z} \\ \{x\} - \dfrac{1}{2} & partout \end{cases}$$

et ψ la fonction digamma définie par :

$$\psi(Z) = -\gamma - \frac{1}{Z} + \sum_{k \geqslant 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+Z} \right)$$

En commençant par la démonstration d'une propriété de ψ qui sera utilisée plus tard .

Proposition 3.2.

$$\psi\left(\frac{r+1}{p}\right) - \psi\left(\frac{r}{p}\right) = p \int_0^1 \frac{x^{r-1}}{1+x+...+x^{p-1}}\,dx \tag{3.10}$$

Démonstration.
On cite de [6] la formule :

$$\psi\left(\frac{r+1}{p}\right) - \psi\left(\frac{r}{p}\right) = p \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(pk+r+1)(pk+r)}$$

le terme générale $\frac{1}{(pk+r+1)(pk+r)}$ *peut s'écrire comme suit :*

$$\frac{1}{(pk+r+1)(pk+r)} = \frac{1}{pk+r} - \frac{1}{pk+r+1} = \int_0^1 \left(x^{pk+r-1} - x^{pk+r} \right) dx$$

et le passage à la somme indique que :

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(pk+r+1)(pk+r)} = \int_0^1 \frac{x^{r-1} - x^r}{1-x^p}\,dx$$

Finalement

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(pk+r+1)\,(pk+r)}=\int_0^1\frac{x^{r-1}}{1+x+...+x^{p-1}}\,dx$$

Ona ((3.10)) □

Dans [18], il est montré que :

$$\log\, p=\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p-1}r\left(\psi\left(\frac{r+1}{p}\right)-\psi\left(\frac{r}{p}\right)\right)$$

cette identité conduit au proposition intéressant suivant :

Proposition 3.3.

$$\sum_{r=1}^{p}\psi\left(\frac{r}{p}\right)=-\gamma p-p\log p \tag{3.11}$$

Démonstration.

$$\sum_{r=1}^{p-1}r\left(\psi\left(\frac{r+1}{p}\right)-\psi\left(\frac{r}{p}\right)\right)=p\log p$$

on a :

$$\sum_{=1}^{p-1}r\left(\psi\left(\frac{r+1}{p}\right)-\psi\left(\frac{r}{p}\right)\right)=\sum_{r=1}^{p-1}r\,\psi\left(\frac{r+1}{p}\right)-\sum_{r=1}^{p-1}r\,\psi\left(\frac{r}{p}\right)$$

$$= \sum_{j=2}^{p} (j-1)\, \psi\left(\frac{j}{p}\right) - \sum_{j=1}^{p-1} j\, \psi\left(\frac{j}{p}\right)$$

$$= -\psi\left(\frac{1}{p}\right) + (p-1)\ \psi\,(1)\ - \sum_{j=2}^{p-1} \psi\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$= (p-1)\ \psi\,(1)\ - \sum_{j=1}^{p-1} \psi\left(\frac{j}{p}\right)$$

$$= -\gamma p - \sum_{j=1}^{p} \psi\ \left(\frac{j}{p}\right)$$

d'où :

$$\sum_{r=1}^{p} \psi\left(\frac{r}{p}\right) = -\gamma p - p\log p$$

$\square$

Selon l'identité ((3.10)) , et la représentation intégrale on conclure que :

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\pi p}\sum_{r=1}^{p-1} (p-r-1)\ r\ \left(\psi\left(\frac{r+1}{p}\right) - \psi\left(\frac{r}{p}\right)\right)$$

en combinant cet relation avec l'identité ((3.11)) , on trouve :

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{\pi}\log\, p + \frac{1}{\pi p}\sum_{r=1}^{p-1} (p-r)\ r\ \left(\psi\left(\frac{r+1}{p}\right) - \psi\left(\frac{r}{p}\right)\right)$$

et

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{\pi}\log\, p - \gamma\frac{p-1}{\pi p} + \frac{1}{\pi p}\sum_{r=1}^{p-1} (2r-p-1)\ \psi\left(\frac{r}{p}\right)$$

ensuite :

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\pi p}\sum_{r=1}^{p-1}(2r-p)\ \psi\left(\frac{r}{p}\right)$$

mais :

$$2r - p = 2p\left(\frac{r}{p} - \frac{1}{2}\right) = 2pB_1\left(\frac{r}{p}\right)$$

ce qui donne :

$$c_0\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{p} B_1\ \left(\frac{r}{p}\right)\ \psi\left(\frac{r}{p}\right)$$

CONCLUSION

Dans ce travail on a récolté quelques informations sur la somme des cotangentes $C_0\left(\frac{q}{p}\right)$.

En se servant de l'article de M.Goubi pour refaire la démonstration de quelques développements en série entière de $C_0\left(\frac{1}{p}\right)$, avec un plus de détails sur les techniques de calcul utilisées . Il reste à signaler que ce thème est d'actualités et nécessite un effort considérable car $C_0\left(\frac{q}{p}\right)$ est liée directement à la fameuse hypothèse de Riemann qui reste encore un problème ouvert.

Bibliographie

[1] Notes sur la fonction ζ de riemann. *3.Adv.Math*, 149(1) :130–144, 2000.

[2] A reciprocity formula for a cotangent sum. *Int. Math. Res. Not*, 2013(24) :5709–5726, 2013.

[3] Generalization of a cotangent sum associated to the esterman zeta function. *Commun. Contemp. Math*, 18 :1550078, 89 pp, 2016.

[4] A.Bayad and M.Goubi. Reciprocity formulea for generaliezed dedekind-vasynin-cotangent sums. *Math. Methods Appl. Sci*, 42(4) :1082–1098, 2019.

[5] M.Goubi A.Bayad. Proof of the mobius conjecture revisited. *Proc. Jangjen Math Soc*, 16(2) :237–243, 2013.

[6] M.Goubi ? A.Bayad and M.O.Hernan. Explicite and asymptotic formilae for vasyunin-cotangent sums. *Publ.Inst.Math (Beograd) (N.S)*, 102(116) :155–174, 2017.

[7] F. Richard B. Landreau. le critère de beurling et nyman pour l'hypothèse de riemann aspects numériques. *Exp. Math*, 11(3) :349–360, 2002.

[8] R. J. Backlund. Sur les zéros de la fonction zeta de riemann. *CRAS*, 158 :1979–1981, 1914.

[9] M.Balazard. A. de Roton. Sur un critère de baez-duarte pour l'hypothèse de riemann. *Int.J.Number Theory*, 6(4) :883–903, 2010.

[10] Pierre Colmez et Philippe Biane Jean-Benoît Bost. La fonction zêta. *Éditions de l'École polytechnique*, Paris,2002.

[11] G.B.Djordjevie and G.V.Milovannovie. Special classes of polynominals. *Univercity of Nis, Faculty of Technology, Lleskovac*, 2014.

[12] Mouloud Goubi. Series expansion of a cotangent sum related to the estermann zeta function. *Kragujevac Journal of mathematics*, 45(3) :343–352, 2021.

[13] M. Th. Rassias H. Maier. The order of magnitude for moments for certain cotangent sums. *J.Math, Anal. Appl*, 429(1) :576–590, 2015.

[14] M.Th.Rassias H.Maier. Generalization of a cotangent sum associated to the esterman zeta function. *Commun. Contemp. Math*, 18(1), 2016, DOI 10.1142/S0219199715500789.

[15] M.Th.Rassias H.Maier. Explicite estimates of sums relatedto the nyman-beurling criterion for the riemann hypothesis. *J.Funt. Anal.DOI 10.1016/j.jfa*, 2018.06.022.

[16] M.Balazard. Sur les dilatations entières de la fonction partie fractionnaire. *Funct. Approximation, Comment. Math*, 35 :37–49, 2006.

[17] M.Goubi. Successives derivatives of fibonacci type polynominals of higher order in two variables. *Filomat*, 32(4) :5149–5159, 2018.

[18] A.Bayad M.Goubi and M.O.Hernane. Explicit and asymptotique formular for vasynin-cotangent sums. *Publ. Inst. Math (Beograd)(N.S)*, 102(116) :155–174, 2017.

[19] M.Th.Rassias. A cotangent sum related to zeros of the estermann zeta function. *Appl.Math.Comput*, 240 :161–167, 2014.

[20] P.Rath S. Gun, M Ram Murty. Linear independence of diagamma function and a variant of a conjecture of rohrlich. *J. Number Theory*, 129(8) :1858–1873, 2009.

[21] S.Bettin. On the distribution of a cotangent sums. *Int. Math. Res. Not IRMN*, 2015(21) :11419–11432, 2015.

[22] S.Bettin and J.B.Conry. Period functions and cotangent sums. *Algebra and Number Theory*, 7(1) :215–242, 2013.

[23] V.I.Vasyunin. On a biorthogonal systeme associated with rhe riemann hypothesis. *Algebra i Analiz*, 7(3) :118–135, 1995.

[24] W.T.Sulaiman. Turan inequalities for the diagamma and polygamma functions. *South Asian. J.Math*, 1(2) :49–55, 2014.