

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERY, Tizi-Ouzou**



**Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique**

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme

*de MASTER ACADEMIQUE EN AUTOMATIQUE
OPTION : COMMANDE DES SYSTEMES*

Thème

***Commande Optimale des Systèmes Non
linéaires par l'Approche de l'Équation de
Riccati Dépendante de l'État***

Proposé par : **Mr. Ahmed. MAIDI**

Présenté par : **Melle. Rima. KECILI**

Dirigé par : **Mr. Ahmed. MAIDI**

Soutenu le : / 07 /2013

Promotion 2013

Remerciement

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères et les plus vifs à mon promoteur M^r A.MAIDI qui m'a fait bénéficier tout au long de ce travail de son savoir, de son aide et de ses conseils.

Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à mener à terme ce travail.

Je remercie également les membres de jury qui feront l'honneur d'évaluer ce travail.

Je tiens aussi à remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation ainsi que le personnel de la bibliothèque.

Dédicaces

Dédicaces

Je dédie cet humble travail

- A mes chers parents.
- A ma chère grande- mère Malha et mes chères tentes Zahra, Fatima et Malika.
- A mes chers frères.
- A mes proches et tous mes amis (es).
- A tous les professeurs qui m'ont donné un enseignement noble et profond.

Sommaire

Sommaire

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I

Commande linéaire quadratique

I. Introduction.....	3
II. Commande optimale.....	3
II. 1.Problème de Mayer.....	4
II. 2.Problème de Lagrange.....	4
II. 3.Problème de Bolza.....	4
III. Formulation d'un problème de commande LQ.....	5
IV. Rappel sur les propriétés des systèmes dynamiques.....	6
IV.1. Commandabilité et stabilité.....	6
IV. 2. Critère de commandabilité (critère de Kalman).....	7
IV.3. Observabilité et détectabilité.....	7
IV.4. Critère d'observabilité (critère de Kalman).....	7
V. Principe de minimum (principe de Pontriaguine).....	8
VI. Résolution d'un problème de commande linéaire quadratique.....	10
VI. 1. Problème de commande LQ à horizon fini.....	10
VI. 1. a. Problème de poursuite.....	11
VI. 1. b. Problème de régulation.....	14
VI. 2. Problème de commande LQ à horizon infini.....	14
VII. Matrice de pondération.....	15
VII. 1. Choix des matrices de pondération.....	15
VII.2. Rôles des matrices de pondération.....	15
V.III. Exemple d'application.....	16
IX. Conclusion.....	18

Chapitre II

Généralités sur les systèmes non linéaires

I. Introduction	19
II. Définition des systèmes non linéaires.....	19
III. Les non linéarités usuelles.....	21
IV. Les non linéarités combinées	21

.....	
V. Représentation des systèmes non linéaires.....	23
VI. Bifurcation et chaos.....	24
VI. 1. Bifurcation.....	24
VI. 2. Chaos.....	24
V.II. Exemple pratique d'un système non linéaire.....	25
V.II. 1. Définition du formalisme de Lagrange.....	25
V.II.2. Calcul des équations différentielles.....	26
V.II.3. Représentation d'état.....	27
VIII. Conclusion.....	28

Chapitre III

Equation de Riccati dépendante de l'état

I. Introduction.....	29
II. Historique.....	29
III. Formulation du problème de commande.....	29
IV. Structure d'un correcteur SDRE.....	34
V. Exemple illustratif.....	35
VI. Conclusion.....	38

Chapitre IV

Commande d'un VSE par l'approche SDRE

I. Introduction.....	39
II. Description d'un vérin.....	39
III. Fonctionnement d'un vérin simple effet.....	40
III. 1. Force statique.....	40
III. 2. Force dynamique.....	42
IV. Modélisation d'un VSE.....	43
V. Commande du vérin par l'approche SDRE.....	45
VI. Conclusion.....	48
Conclusion générale.....	49

Bibliographie

Introduction générale

Le contrôle des processus consiste à déterminer une loi de commande permettant d'assurer à ce dernier un comportement désiré, et comme les industries modernes sont devenues plus exigeantes, le rôle de l'automaticien est non seulement concevoir la loi de commande mais aussi, il doit optimiser cette dernière, c'est le problème de commande optimale. La théorie du contrôle optimale a commencé dans les années 50, avec la formulation du principe de minimum de Pontriaguine qui généralise les équations d'Euler-Lagrange de calcul des variations, l'objectif est de déterminer une loi de commande qui optimise un certain critère de performances (fonction de coût) tout en respectant les contraintes imposées.

La conception de la loi de commande nécessite la connaissance du modèle mathématique régissant la dynamique du procédé, lorsqu'on tient compte du modèle linéaire du système en optimisant un critère quadratique, on est alors amené à résoudre un problème de commande linéaire quadratique (LQC), l'application du principe de minimum de Pontriaguine nous conduit à résoudre l'équation de Riccati, (Lacopo Francesco Riccati, mathématicien Italien - Venise 1676 -Trévisé 1754 -).

Les méthodes traditionnelles utilisées pour la commande des systèmes (méthodes qui se basent sur le modèle linéaire du procédé) s'avèrent inutiles face à des systèmes possédant de fortes non linéarités, car la représentation linéaire d'un système physique n'est qu'une approximation valable au voisinage d'un point de fonctionnement. Cette représentation est très limitée puisque elle ne reflète pas fidèlement le comportement de la dynamique du système. De ce fait, de nombreuses recherches de méthodes de commande non linéaires sont apparues, parmi ces méthodes, on a la commande des systèmes par l'équation de Riccati dépendante de l'état (SDRE, State Dependant Riccati Equation). Cette dernière constitue une adaptation de la commande linéaire quadratique pour les systèmes non linéaires.

L'objectif de notre travail est de présenter la commande SDRE et de montrer ces performances en appliquant à un vérin simple effet.

Notre travail fera l'objet de quatre chapitres organisés comme suit :

Le premier chapitre commence par une présentation de la théorie de la commande optimale en définissant les types de problème de commande et le principe de minimum de Pontriaguine, par la suite, nous allons exposer la base de la commande linéaire quadratique qui se résume dans la formulation et la résolution du problème par l'équation de Riccati et on termine le chapitre par un exemple illustratif sur la commande LQ.

Le deuxième chapitre est consacré à des généralités sur les systèmes non linéaires, nous allons commencer par la définition des systèmes non linéaires et une description de quelques non linéarités usuelles et combinées, puis nous allons définir la représentation d'état des systèmes non linéaires et pour finir on présente un exemple pratique d'un système non linéaire.

Dans le troisième chapitre, nous allons présenter la nouvelle technique de commande des systèmes non linéaires étudiée dans ce mémoire, c'est-à-dire l'approche de l'équation de Riccati dépendante de l'état. Nous allons présenter un historique sur l'évolution de cette méthode de commande, la formulation d'un problème de commande par la technique SDRE pour terminer par un exemple illustratif simulé sous l'environnement MATLAB.

Le quatrième chapitre est réservé à la commande d'un vérin simple effet dont le comportement dynamique est non linéaire par l'approche de l'équation de Riccati dépendante de l'état. Nous allons donc, décrire le vérin, étudier son fonctionnement et construire le modèle d'état non linéaire pour pouvoir synthétiser par la suite la commande SDRE. Les performances de la commande sont évaluées par simulation.

Notre travail se termine par conclusion générale.

Chapitre I

Commande linéaire quadratique

I. Introduction

La conception de la commande d'un système dynamique a pour objectif de déterminer des lois de commandes permettant d'assurer des performances désirées. Mais, souvent, on est amené à optimiser cette commande, c'est le problème de la commande optimale.

Dans les problèmes de commande optimale, on rencontre souvent le critère quadratique, qui s'appuie sur la minimisation de l'énergie de l'entrée (énergie minimale), et la réduction de l'écart entre l'état du système et l'état désiré (problème de poursuite). Cette énergie est élevée au carré, de plus, même si les systèmes physiques sont en général non linéaires, on est souvent amené à linéariser le système, nécessairement dans les problèmes de commande LQ, d'où l'appellation: commande linéaire quadratique connue sous son sigle abrégé LQC, provenant de la dénomination anglaise « Linear Quadratic Control ».

Ce chapitre est consacré à la commande linéaire quadratique illustrée par un exemple de simulation sous l'environnement MATLAB.

II. Commande optimale

Un système dynamique est caractérisé à chaque instant t par ses variables d'état représentées par le vecteur d'état suivant:

$$X(t) = (x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \dots \dots \quad x_n(t)) \quad (\text{I.1})$$

Si le système est commandable, il est possible de faire évoluer son état en agissant sur d'autres variables appelées variables de commande ou de contrôle, notées :

$$U(t) = (u_1(t) \quad u_2(t) \quad \dots \dots \dots \quad u_m(t)) \quad (\text{I.2})$$

Les variables d'état et celles de la commande d'un système non linéaire sont liées par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t), t) \quad (\text{I.3})$$

Dans le cas des systèmes linéaires, l'équation d'état est représentée comme suit :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (\text{I.4})$$

A : Matrice d'évolution du système de dimension $(n \times n)$

B : Matrice de commande de dimension $(n \times m)$

Lorsque la commandabilité du système est vérifiée, on dispose alors d'une infinité de trajectoires présentant l'ensemble des commandes admissibles qui permettent de transférer le système de son état initial $x^0(t=0)$ à un état final $x^f(t=t_f)$ (x^0 et x^f étant fixés à priori), il se pose alors le problème du choix entre ces diverses trajectoires ; la commande optimale est l'objet de la sélection de la trajectoire qui optimise le critère de performances tout en respectant les contraintes imposées par le cahier des charges.

Le critère de performances (appelé aussi fonction de coût) doit être choisi selon les objectifs désirés comme : la poursuite, la régulation, le temps minimale, l'énergie minimale et la consommation minimale. Sous la forme générale, le critère est donné comme suit :

$$J(x(t)) = \underbrace{(x(t_f), t_f)}_{\text{partie terminale}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt}_{\text{partie intégrale}} \quad (\text{I.5})$$

Selon la forme du critère, on distingue trois types de problème de commande optimale :

II .1. Problème de Mayer

Dans ce cas, le critère ne comporte que la partie terminale, cette dernière exprime l'objectif à optimiser à l'instant final ' t_f '.

$$J(x(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) \quad (\text{I.6})$$

II .2. Problème de Lagrange

Ce problème ne comporte que la partie intégrale qui exprime l'objectif à optimiser sur tout l'horizon de commande.

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{I.7})$$

II .3. Problème de Bolza

C'est la combinaison des deux cas précédents

$$J(x(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{I.8})$$

III. Formulation d'un problème de commande LQ [1], [2]

Hypothèses :

Considérons un système dynamique non bruité, linéaire, à coefficients constants, à temps continu, commandable, observable et stabilisable par un retour d'état, représenté sous la forma matricielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) & \text{(I.9)} \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) & \text{(I.10)} \end{cases}$$

L'équation (I. 9) est l'équation d'état, et (I. 10) est celle de sortie ;

L'objectif de la commande comporte la poursuite et l'énergie minimale, on définit alors le vecteur d'erreur, exprimée comme suit :

$$e(t) = X^d(t) - X(t) \quad \text{(I.11)}$$

$Y(t)$: vecteur de sortie de dimension $(q \times 1)$.

$X^d(t)$: vecteur de l'état désiré de dimension $(n \times 1)$.

$e(t)$: vecteur de l'erreur entre l'état du système et l'état désiré de dimension $(n \times 1)$.

C : matrice d'observation de dimension $(q \times n)$.

D : matrice de transmission directe de dimension $(q \times m)$;

Généralement, la transmission directe entre l'entrée et la sortie du système est nulle, ($D=0$).

La fonction de coût est exprimée comme suit :

$$J = \frac{1}{2} \int \left(\underbrace{e^T(t)Qe(t)}_{J_e} + \underbrace{U^T(t)RU(t)}_{J_u} \right) dt + \frac{1}{2} \underbrace{e^T(t_f)Fe(t_f)}_{J_f} \quad \text{(I.12)}$$

Les termes quadratiques J_e , J_u et J_f désignent respectivement: la minimisation de l'écart entre l'état du système $x(t)$ et l'état désiré $x^d(t)$, c'est la nature du régime transitoire, la minimisation de l'énergie de commande et la minimisation du vecteur d'erreur à l'instant final.

Le terme $1/2$ n'a aucune signification physique, il représente simplement une commodité de calcul.

La matrice de pondération associée au vecteur d'erreur R est une matrice symétrique, définie positive, car représentant une forme quadratique définie positive, caractéristique dont on rappelle ici la définition :

$$u^T R u > 0, \forall u \neq 0 ; u^T R u = 0 \text{ pour } u = 0 \text{ uniquement}$$

La matrice Q , quant à elle, est une matrice symétrique, semi-définie positive. Elle représente donc une forme quadratique semi-définie positive :

$$x^T Q x \geq 0, \forall x \Rightarrow x^T Q x \text{ peut être nulle pour } x \neq 0$$

La matrice de pondération F associée au vecteur d'erreur à l'instant final est une matrice symétrique et définie positive.

Les coefficients de pondération (éléments des matrices de pondération) reflètent l'influence de chaque composante du vecteur auquel la matrice correspondante est associée.

Remarque 1

Pour synthétiser la commande optimale, le système doit être commandable, et l'implémentation de cette dernière nécessite la disponibilité de l'état, dans le cas contraire la synthèse d'un observateur est indispensable.

IV. Rappel sur les propriétés des systèmes dynamiques

IV.1. Commandabilité et stabilité [3]

La commandabilité est la capacité à trouver une commande $u(t)$ permettant d'amener un système d'un état initial quelconque x_0 à $t=0$, à un état final quelconque x_f à $t=t_f$ en un temps fini.

La **stabilité** est une propriété relativement faible, mais importante en pratique, c'est la première condition souvent exigée par le cahier des charges. Elle est assurée pour un système LTI (linéaire à temps invariant) ssi :

- ses pôles non commandables sont stables, i.e. les variables naturellement non commandables sont stables.
- il existe une commande par retour d'état, $u = -Kx$ telle que la matrice $A-BK$ soit **Hurwitz** (la partie réelle des valeurs propres < 0).

On dit alors que le système est stabilisable.

IV.2. Critère de commandabilité (critère de Kalman) [1]

La condition nécessaire et suffisante pour que le système à temps continu $\dot{x} = AX + BU$ (A, B constantes) soit complètement commandable (gouvernable) est que la matrice de commandabilité

$$= (B \quad AB \quad \dots \dots \dots A^{n-1}B)$$

Soit de rang plein égal à n donc possède n colonnes linéairement indépendantes.

Remarque 2

Cas d'une seule entrée :

$$= (b \quad Ab \quad \dots \dots \dots A^{n-1}b)$$

Doit alors être régulière, c'est-à-dire $\det \neq 0$. [1]

IV.3. Observabilité et détectabilité [3]

L'observabilité est la capacité à déduire à n'importe quel instant $t' > 0$, l'état $x(t)$ du système en connaissant son modèle, sa sortie et sa commande sur l'horizon de temps $[0 \ t]$.

La **détectabilité** est une propriété plus faible. Elle est obtenue pour un système LTI ssi :

- Les pôles non observables sont stables
- Il existe une matrice de gain d'observateur d'état K telle que la matrice $A-KC$ soit **Hurwitz**.

IV.4. Critère d'observabilité (critère de Kalman) [1]

La condition nécessaire et suffisante pour que le système à temps continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = AX(t) + BU(t) & \text{(I.9)} \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) & \text{(I.10)} \end{cases}$$

(A, B, C , et D constantes) soit complètement observable est que la matrice d'observabilité

$$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit de rang plein ($= n$), donc possède n colonnes linéairement indépendantes.

Remarque 3

Cas d'une seule sortie :

$$\theta = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{pmatrix}$$

Doit alors être régulière, c'est-à-dire $\det \neq 0$. [1]

Remarque 4

Les deux notions, commandabilité et stabilité sont respectivement duales aux deux notions d'observabilité et de détectabilité.

V. Principe du minimum (principe de Pontriaguine)

Soit le problème d'optimisation dynamique suivant :

$$\min_{u(t)} J(x(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt$$

Soumis aux contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= AX(t) + BU(t) \\ X(t_0) &= X_0 \\ X(t_f) &= X_f \text{ (fixé) ou libre} \end{aligned}$$

On peut mettre le critère sous la forme suivante :

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\varphi(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dt} \lambda(x(t), t) \right) dt + \Psi(x(t_0), t_0)$$

avec :

$$\Psi(x(t_0), t_0) > 0$$

Alors, le problème à résoudre devient :

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\varphi(x(t), u(t), t) + \frac{d(x(t), t)}{dt} \right) dt$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - AX(t) + BU(t) &= 0 \\ X(t_0) &= X_0 \\ X(t_f) &= X_f \text{ (fixé) ou libre} \end{aligned}$$

C'est un problème d'optimisation avec contraintes de type égalité. **Pontryaguine** a proposé l'introduction des multiplicateurs de Lagrange dépendants du temps $\lambda(t)$, appelés en commande optimale les variables adjointes, cette procédure élimine la contrainte égalité, i.e. l'équation d'état, le problème à résoudre devient :

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\varphi(x(t), u(t), t) + \frac{d(x(t), t)}{dt} + \lambda(t)^T (\dot{x}(t) - AX(t) + BU(t)) \right) dt$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} X(t_0) &= X_0 \\ X(t_f) &= X_f \text{ (fixé) ou libre} \end{aligned}$$

Introduisons la fonction d'Hamilton (Hamiltonien) définie comme suit :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \varphi(x(t), u(t), t) + \lambda(t)^T (\dot{x}(t) - AX(t) + BU(t))$$

Et en développant la dérivée partielle : $\frac{d(x(t), t)}{dt}$ comme suit :

$$\frac{d(x(t), t)}{dt} = \frac{d(x(t), t)}{dx(t)} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{d(x(t), t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dt}$$

Le problème prend alors la forme suivante :

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left(H(x(t), u(t), \lambda(t), t) + \frac{d(x(t), t)}{dx(t)} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{d(x(t), t)}{dt} - \lambda(t)^T (\dot{x}(t) - AX(t) + BU(t)) \right) dt$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} X(t_0) &= X_0 \\ X(t_f) &= X_f \text{ (fixé) ou libre} \end{aligned}$$

En utilisant le calcul des variations, on obtient les équations *Hamilton Pontriaguine* :

$$\frac{dH(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{du(t)} = 0 \quad (\text{I.13})$$

L'équation (I.13) permet d'avoir la loi de commande optimale en fonction des variables d'état $x(t)$, et les variables adjointes $\lambda(t)$:

$$\Rightarrow U^*(t) = \tilde{f}(x(t), \lambda(t), t)$$

On remplace cette dernière dans l'Hamiltonien pour avoir H^* ;

$$H^*(x(t), \lambda(t), t) = H(x(t), u(t), \lambda(t), t)|_{u(t)=u^*(t)}$$

En dérivant cette équation par rapport à λ , puis par rapport à x , on obtient les équations *HP* (équations d'Hamilton-Pontriaguine) :

$$\dot{\lambda}(t) = \nabla_{\lambda(t)} H^*(x(t), \lambda(t), t) \quad (\text{I.14})$$

$$\dot{x}(t) = -\nabla_{x(t)} H^*(x(t), \lambda(t), t) \quad (\text{I.15})$$

Pour déterminer les expressions optimales $x^*(t)$ et $\lambda^*(t)$, on doit résoudre le système d'équations différentielles ordinaire (I.14) et (I.15).

VI. Résolution d'un problème de commande linéaire quadratique [2], [4], [5]

Suivant l'état désiré (x^d est nul ou variant en fonction du temps) ; deux cas de problème sont présentés, le problème de la poursuite et le problème de la régulation.

VI.1. Problème de commande LQ à horizon fini

Le temps final ' t_f ' est fixé à une valeur finie.

VI.1.a. Problème de poursuite

Ce problème revient à calculer un retour d'état qui permet de stabiliser le système à l'état désiré x^d en minimisant l'énergie de commande :

$$\Rightarrow U^* = -KX + HX^d \quad (\text{I.16})$$

Le schéma de commande est représenté comme suit :

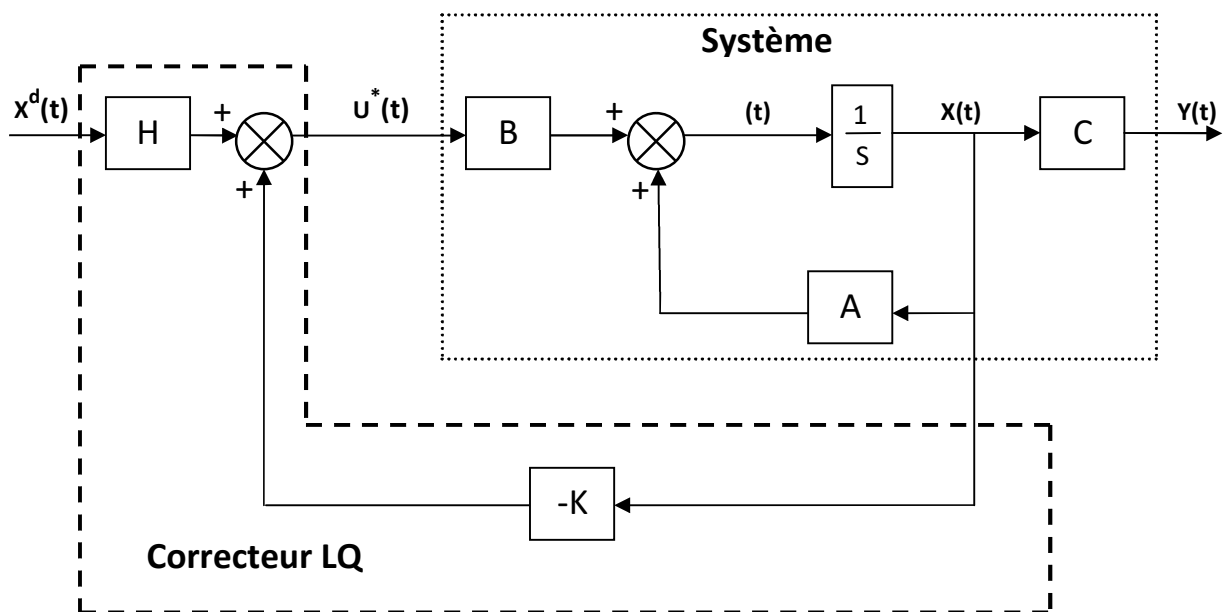


Figure VI.1.a.1 : schéma de commande LQ

Le critère à minimiser dans ce cas est :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (e^T(t)Qe(t) + U^T(t)RU(t))dt \quad (\text{I.17})$$

L'application du principe du minimum présenté donne l'Hamiltonien suivant :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{2} (e^T Q e(t) + U^T R U(t)) + \lambda^T(t)(t) \quad (\text{I.18})$$

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{2}(e^T Q e(t) + U^T R U(t)) + \lambda^T(t)(A X(t) + B U(t)) \quad (\text{I.19})$$

$\lambda(t)$ est le vecteur adjoint composé des dérivées partielles du critère par rapport à la variable d'état.

La commande optimale est donnée par :

$$\frac{\partial H(x(t), u(t), t)}{\partial u(t)} = 0$$

$$\Rightarrow R U(t) + B^T \lambda(t) = 0 \quad (\text{I.20})$$

$$\Rightarrow U^*(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (\text{I. 21})$$

L'équation (I. 21) représente l'expression de la commande optimale.

Les équations *HP* sont données par les expressions suivantes:

$$\dot{\lambda}(t) = \nabla_{\lambda(t)} H^*(x(t), \lambda(t), t)$$

$$\dot{x}(t) = A X(t) + B U(t)$$

En remplaçant $u(t)$ par son expression (I. 21), on obtient :

$$\dot{x}(t) = A X(t) - B R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (\text{I.22})$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\nabla_{x(t)} H^*(x(t), \lambda(t), t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -A^T \lambda(t) + Q e(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -A^T \lambda(t) - Q X(t) + Q X^d(t) \quad (\text{I.23})$$

Les deux équations (I. 22), (I. 23) sont appelées les équations d'Hamilton Pontriaguine.

En pose :

$$S = BR^{-1}B^T$$

On peut mettre alors les équations HP sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + Q \begin{bmatrix} 0 \\ X^d(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I.24})$$

Il en résulte une transformation linéaire liant les deux vecteurs $x(t)$ et $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = P(t)X(t) - V(t) \quad (\text{I.25})$$

La dérivée de $\lambda(t)$ par rapport au temps est :

$$\dot{\lambda}(t) = P(t)\dot{x}(t) + \dot{P}(t)X(t) - \dot{V}(t) \quad (\text{I.26})$$

A partir des équations (I. 23) et (I. 26), on peut avoir l'égalité suivante :

$$P(t)\dot{x}(t) + \dot{P}(t)X(t) - \dot{V}(t) = -A^T\lambda(t) - QX(t) + QX^d(t) \quad (\text{I.27})$$

Remplaçons $\dot{x}(t)$ par son expression (I. 22), puis $\lambda(t)$ par son expression (I. 25), on aboutit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} ((\dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q)X(t) \\ = \dot{V}(t) + (A^T + P(t)BR^{-1}B^T)V(t) + QX^d(t) \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

La relation (I. 25) doit être vérifiée quelque soit $x(t)$, alors on doit imposer :

$$(\dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q) = 0 \quad (\text{I.29})$$

$$(\dot{V}(t) + (A^T + P(t)BR^{-1}B^T)V(t) + QX^d(t)) = 0 \quad (\text{I.30})$$

L'équation (I. 29) est appelée **l'équation différentielle de Riccati**.

La matrice $P(t)$ est l'inconnu à déterminer, lorsque on résout l'équation différentielle de Riccati, on trouvera éventuellement plusieurs solutions mais on choisit celle qui est symétrique et définie positive.

VI.1.b. Problème de régulation

Le problème de régulation est un cas particulier de la poursuite, dans ce cas l'état désiré est nul ($x^d = 0$), l'objectif est de ramener le système à son point de fonctionnement.

$$\Rightarrow U^* = -KX \quad (\text{I.31})$$

Le critère à minimiser est :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t)Qx(t) + U^T(t)RU(t))dt$$

La forme matricielle représentant les équations HP devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I.32})$$

La relation liant les deux vecteurs $x(t)$ et $\lambda(t)$ est :

$$\lambda(t) = P(t)X(t) \quad (\text{I.33})$$

Puisque $X_d = 0$, le vecteur $V(t)$ est nul, il en résulte seulement l'équation différentielle de Riccati :

$$\dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = 0 \quad (\text{I.34})$$

La matrice $P(t)$ est l'inconnu à déterminer.

VI.2. Problème de commande LQ à horizon infini

Dans ce cas l'horizon de commande est infini, à ($t_f = \infty$), lorsque le régime permanent (statique) est atteint, les deux vecteurs $P(t)$ et $V(t)$ sont constants, les dérivées $\dot{P}(t)$ et $\dot{V}(t)$ sont nulles, on obtient alors les deux équations algébriques suivantes :

$$P(t)A + A^T P(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = 0 \quad (\text{I.35})$$

$$(A^T + P(t)BR^{-1}B^T)V(t) + QX^d(t) = 0 \quad (\text{I.36})$$

L'équation (I. 35) est appelée **l'équation algébrique de Riccati**.

La matrice $P(t)$ est l'inconnu à déterminer.

Remarque 5 [4]

La commande LQ est une commande robuste puisque elle offre des marges de stabilité (gain et phase) importantes;

La marge de gain est infinie.

La marge de phase est supérieure à 60° .

VII. Matrices de pondération

VII.1. Choix des matrices de pondération

Les matrices de pondération sont choisies généralement diagonales, on choisit n scalaires pour l'état et m scalaires pour la commande.

Les étapes à suivre pour le choix des pondérations en vue d'aboutir à un correcteur satisfaisant sont :

- initialement, les deux matrices R et Q doivent être égales aux matrices identité.
- Deuxièmement, on accélère ou on décélère le système, en multipliant, Q par un scalaire α ($\alpha > 1$ pour accélérer le système et $\alpha < 0$ pour le décélérer), jusqu'à obtention d'une dynamique moyenne adaptée.
- On peut équilibrer la dynamique des états, en augmentant la pondération de Q qui correspond aux états lents.
- On peut aussi équilibrer l'influence des actionneurs, en réglant les pondérations de R .

On reprend les étapes 2, 3, 4 jusqu'à satisfaction du cahier des charges.

VII.2. Rôles des matrices de pondération

- Le rôle de la matrice de pondération Q , est d'associer à chaque état $x(t)$, dans le cas de la régulation, ou à chaque erreur $e(t)$, dans le cas de la poursuite, des poids (coefficient).
- Le rôle de la matrice de pondération R est d'associer un poids adéquat à chaque élément du vecteur de commande.

VIII. Exemple d'application

Soit un système dynamique linéaire représenté par l'équation d'état suivante :

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(t)$$

Considérons le cas de la régulation suivant le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left(X^T(t) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X(t) + U^T(t) 1 U(t) \right) dt$$

on peut remarquer que le système en boucle ouverte contient une valeur propre instable ($S_2 = 3$).

$$\det(SI - A) = 0 \Rightarrow \begin{cases} S_1 = -1 \\ S_2 = 3 \end{cases}$$

Commandabilité :

$$\theta = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rang}(\theta) = 2 \Rightarrow$ le système est commandable.

La commande optimale $u(t)$ est donnée par :

$$u(t) = -KX$$

$$K = R^{-1}B^T P$$

Où, P est la solution de l'équation de Riccati, donnée par :

$$P(t)A + A^T P(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = 0$$

Après la résolution de cette équation, on trouve :

$$P = \begin{bmatrix} 4.2976 & 4.6872 \\ 4.6872 & 7.2046 \end{bmatrix}$$

La matrice P est symétrique et définie positive.

$$K = [4.6872 \quad 7.2046]$$

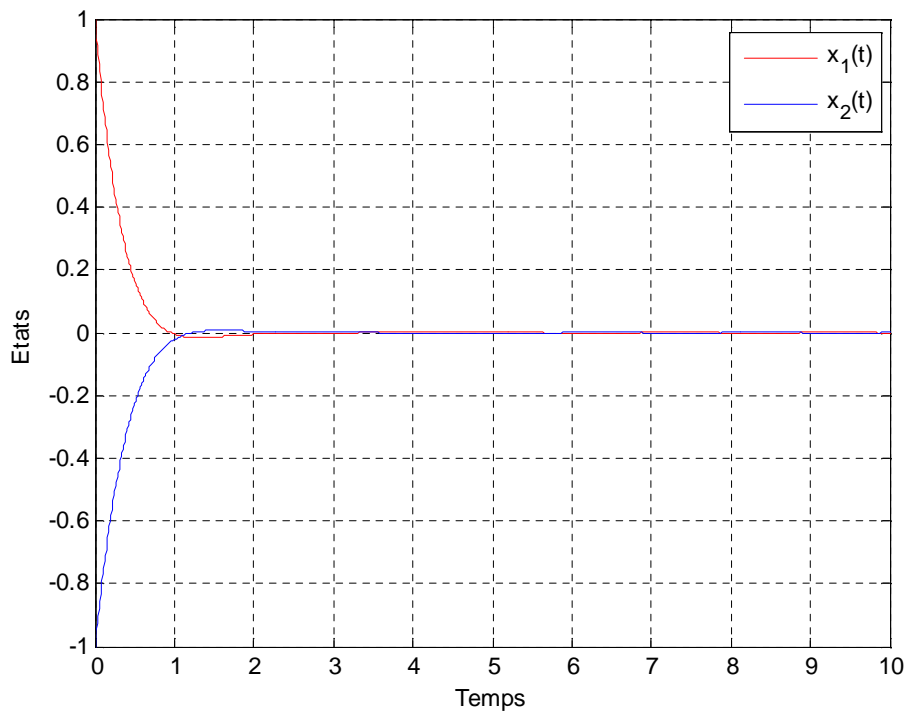
La loi de commande est donnée par l'expression suivante :

$$u(t) = [4.6872 \quad 7.2046] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Le système en boucle fermée contient deux valeurs propres complexes conjuguées à parties réelles négatives (stables) :

$$\begin{cases} \delta_1 = -2.6023 - j1.3312 \\ \delta_2 = -2.6023 + j1.3312 \end{cases}$$

Les résultats de la simulation obtenus sont donnés par la Figure VII.1. On constate que les deux états convergent vers les valeurs désirées.



IX. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons formulé et résolu le problème de la commande linéaire quadratique LQ. Dans une commande LQ, le système à commander est linéaire par contre le critère est quadratique.

En utilisant le principe de minimum basé sur la résolution des équations d'Hamilton Pontriaguine, on a démontré que la détermination de la commande optimale se ramène à la résolution de deux équations différentielles. Dans le cas d'un horizon infini, le problème se ramène à des équations algébriques. Les performances de la commande LQ ont été démontrées par un exemple de simulation.

La commande linéaire quadratique s'applique seulement pour les systèmes linéaires, pour les systèmes non linéaires, une linéarisation autour d'un point de fonctionnement doit être toujours réalisée ce qui nous contraint à imposer des variations de consignes autour de ce point. Pour surmonter cette difficulté, une généralisation de la commande LQ au système non linéaire a été proposée appelée commande « équation de Riccati dépendante de l'état ». Cette dernière est appliquée en considérant le modèle non linéaire du système, ainsi, une description des systèmes non linéaires fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre II

Généralités sur les
systèmes non linéaires

I. Introduction

Intrinsèquement, la plus part des systèmes physiques ont un comportement non linéaires, les non linéarités peuvent être de nature différentes, non linéarités naturelles (système physique) induisant souvent des effets indésirables, et non linéarités artificielles (système de commande), elles sont mises en œuvre dans le but de compenser les effets induits par les non linéarités naturelles. Pour refléter fidèlement la dynamique du système, ce dernier doit être représenté par un modèle non linéaire.

Ce chapitre commence par une définition des systèmes non linéaires, suivi d'une représentation de quelques non linéarités usuelles et combinées, pour terminer par un exemple illustratif d'un système non linéaire décrit par l'équation différentielle et la représentation d'état.

II. Définition des systèmes non linéaires

Il est possible de donner comme définition d'un système non linéaire, tout système ne vérifiant pas les propriétés mathématiques des systèmes linéaires à temps invariant [6] ; définissons alors les systèmes linéaires et leurs propriétés :

On appelle un système linéaire, tout système physique représenté par une équation différentielle linéaire à coefficients constants, cette dernière peut conduire à une autre représentation, appelée représentation d'état (ou modèle d'état) en faisant un changement de variables.

On considère un système linéaire donné par l'équation d'état :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (\text{II. 1})$$

Ce système est caractérisé par les propriétés dynamiques suivantes : [6]

- Si $\det(A) \neq 0$ le système possède un seul point d'équilibre isolé solution de l'équation $\dot{X} = 0$, et si $\det(A) = 0$ le système possède une infinité de points d'équilibre non isolé.
- Le point d'équilibre est stable si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle négative.
- Le système vérifie le principe de superposition énoncé comme suit :

Soit $S_1(t)$ et $S_2(t)$ les deux réponses du système respectives aux deux entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$, le principe de superposition est vérifié si la réponse du système à l'entrée $\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$ est $\alpha S_1(t) + \beta S_2(t)$.

Remarque 1 [7]

Les systèmes représentés par des équations linéaires à coefficients variables (fonction du temps) sont, pour les mathématiciens, des systèmes linéaires. Les ingénieurs les appellent « systèmes linéaires à coefficient variables », réservant la qualification de « systèmes linéaires » aux systèmes régis par des équations différentielles à coefficients constants.

Caractéristique statique

En plus des propriétés dynamiques, le système asservi peut être aussi défini par sa caractéristique statique.

Une courbe caractéristique est une courbe donnant en régime permanent les valeurs d'une sortie $s(t)$ en fonction de celles d'une entrée $e(t)$ (les autres grandeurs d'entrées étant maintenues égales à des valeurs constantes déterminées).[8]

Pour le cas des systèmes linéaires, la courbe caractéristique est une droite de pente K , où K est le gain statique du système. [8]

Remarque 2

La réponse temporelle d'un système dynamique est une exponentielle, pour définir la courbe caractéristique, on tient compte que des valeurs de la sortie en régime permanent (droite).

La courbe caractéristique d'un système linéaire définie par l'équation $S(t) = Ke(t)$ est illustrée par la figure (II.II.1) suivante :[7]

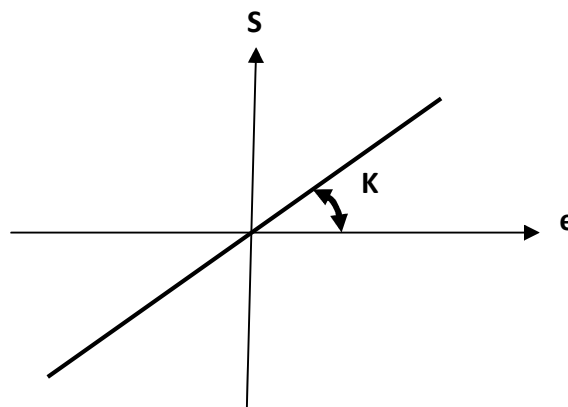


Figure II.II.1 : caractéristique linéaire idéale

III. Les non linéarités usuelles [8]

La caractéristique d'amplitude (caractéristique statique) d'un organe réel n'est jamais parfaitement rectiligne ; il y a toujours une courbure plus au moins marquée [16], elle est donnée par la figure (II. III.1).

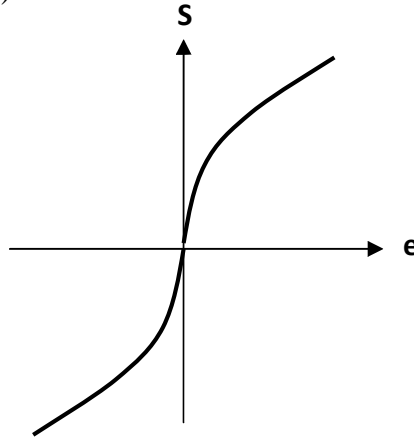


Figure II.III.1 : Courbure

En outre, même réputé linéaire, possède un seuil de sensibilité ou zone morte représentée par la figure (II.III.2), et une saturation représentée par la figure (II.III.3).

Les organes travaillant par **plus ou moins** ou **tout ou rien** (cas du relais), possèdent une caractéristique représentée par la figure (II.III.4).

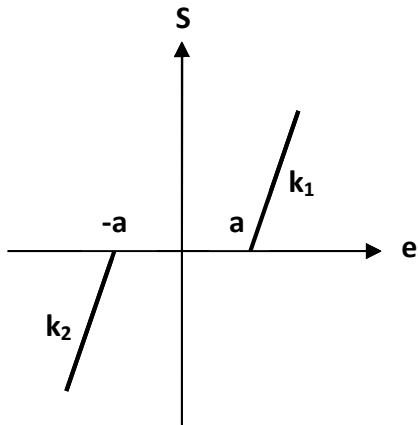
On peut aussi définir une autre non linéarité rencontrée souvent dans les transmissions mécaniques (engrenages) à cause du jeu qui est le backlash (forme d'une hystérésis). L'hystérésis est illustrée par la figure (II.III.5)

IV. Non linéarités combinées [8]

Les non linéarités précédentes peuvent s'associer de façon diverse en donnant toutes les combinaisons possibles :

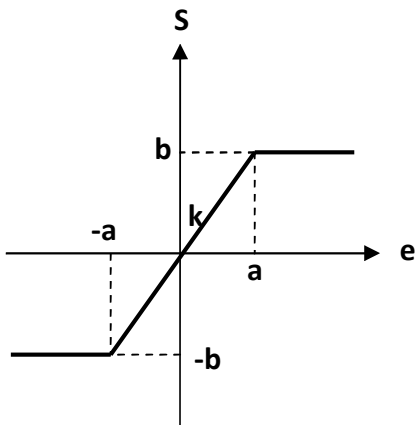
- Seuil et saturation (Figure II.IV.1)
- Zone morte et saturation définissant un relais à trois positions (Figure II.IV.2).
- Saturation, zone morte et hystérésis (Figure II.III.3).

Ces combinaisons permettent de rapprocher toutes les nonlinéarités présentes dans les systèmes asservis.



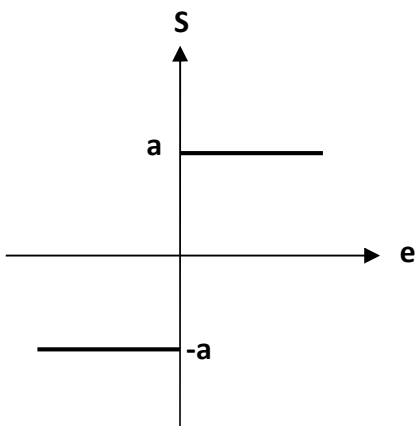
$$\begin{cases} |e| < a, s = 0 \\ e > a, s = k_1 e \\ e < -a, s = k_2 e \end{cases}$$

Figure II.III.2 : Seuil



$$\begin{cases} |e| < a, s = ke \\ e > a, s = b \\ e < -a, s = -b \end{cases}$$

Figure II.III.3 : Saturation



$$\begin{cases} e > 0, s = a \\ e = 0, s = 0 \\ e < 0, s = -a \end{cases}$$

Figure II.III.4 : plus ou moins

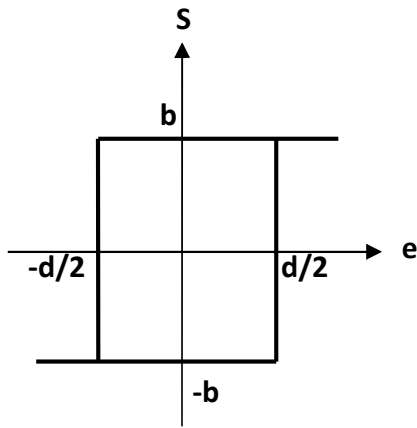


Figure II.III.5: Hystérésis

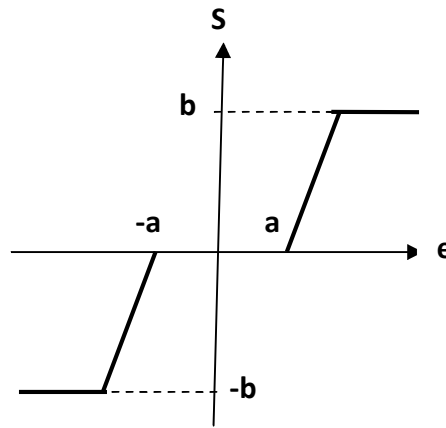


Figure II.IV.1: Seuil et saturation

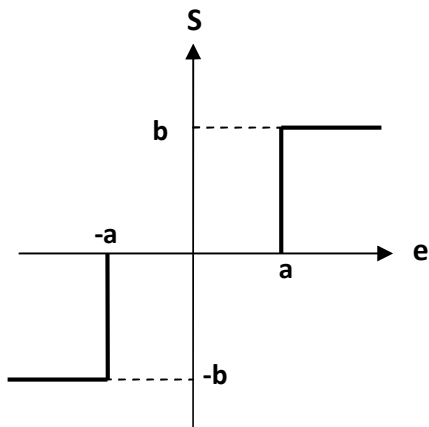


Figure II.IV.2 : Plus ou moins avec zone morte

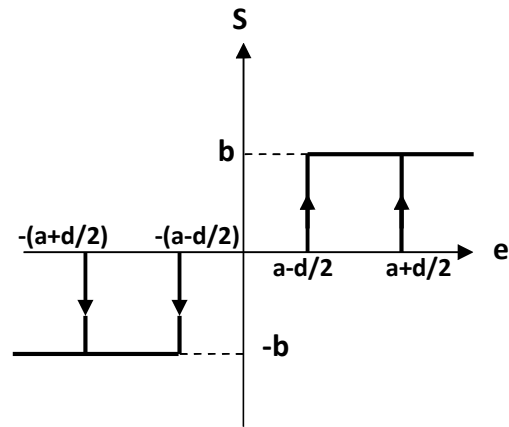


Figure II.IV.3: Plus ou moins avec zone morte et hystérésis

V. Représentation des systèmes linéaires

On considère un système non linéaire d'entrée $u(t)$, d'état $x(t)$ et de sortie $y(t)$;

La représentation d'état donne l'évolution de l'état du système non linéaire, par un ensemble d'équations différentielles non linéaire du premiers ordre, données par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \text{(II.2)} \\ y(t) = h(x(t), u(t)) & \text{(II.3)} \end{cases}$$

L'équation (II. 2) est appelée équation d'état et l'équation (II.3) est l'équation de sortie.

$x(t)$ est le vecteur d'état à l'instant t .

$u(t)$ est le vecteur d'entrée à l'instant t .

$y(t)$ est le vecteur de sortie à l'instant t .

f et h sont deux fonctions vectorielles de dimension n, p respectivement.

On appelle système non linéaire affine par rapport à l'état, un système dont la représentation d'état prend la forme suivante : [6]

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u)x(t) + B(u) & \text{(II.4)} \\ y = C(u)x(t) + D(u) & \text{(II.5)} \end{cases}$$

Dans le cas d'un système non linéaire affine par rapport à l'entrée, la représentation d'état est donnée comme suit : [6]

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) + B(x)u(t) & \text{(II.6)} \\ y = C(x) + D(x)u(t) & \text{(II.7)} \end{cases}$$

Cette représentation est rencontrée souvent sous la forme suivante : [6]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + g(x)u & \text{(II.8)} \\ y(t) = h(x) & \text{(II.9)} \end{cases}$$

VI. Bifurcation et chaos

VI .1. Bifurcation

Pour certains systèmes non linéaires, le nombre de points est susceptible d'être changé lorsque la valeur d'un paramètre du système est modifiée, ceci entraîne un changement structurel du système, ainsi, la stabilité du système sera affectée.

Les valeurs critiques des paramètres induisant ce genre de phénomène **appelées valeur critique de bifurcation**.

VI .2. Chaos

Pour un système linéaire stable, une légère modification des conditions initiales produit une petite variation de la sortie, par contre certains systèmes non linéaires ont un comportement très sensible aux variations des conditions initiales. La notion du chaos réside

dans le coté non prédictible de la réponse d'un système non linéaire en fonction des variations des conditions initiales.

VII. Exemple pratique d'un système non linéaire

Considérons comme exemple illustratif un pendule simple dont il faut déterminer l'équation différentielle régissant la dynamique en utilisant le formalisme de Lagrange, à partir de cette dernière, on déduit la modèle d'état.

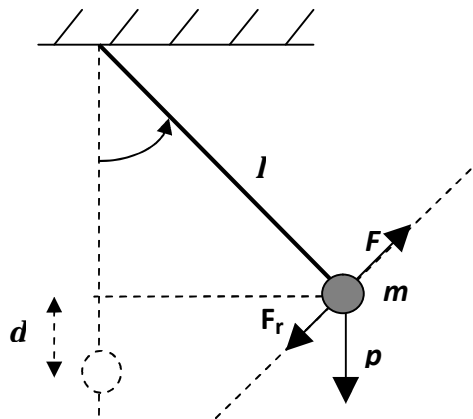


Figure II.VII.1 : Pendule simple

l : longueur de la tige du pendule.

m : masse au bout de la tige.

: angle que fait le pendule avec la verticale.

F : force motrice.

F_r : force des frottements.

P : le poids de la masse m .

VII .1. Définition du formalisme de Lagrange

Le Lagrangien (L) est donné par la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$L = E_c - E_p \quad (\text{II. 10})$$

E_c : énergie cinétique.

E_p : énergie potentielle.

L'équation de Lagrange est la suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum M \quad (\text{II.11})$$

$\sum M$: somme des moments de toutes les forces appliquées au système.

VII. 2. Calcul des équations différentielles

Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} l \dot{\theta}^2 \quad (\text{II. 12})$$

l est le moment d'inertie donné par le théorème de Huygens comme suit :

$$l = l_{\Delta} + ml^2 \quad (\text{II.13})$$

Donc :

$$E_c = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 \quad (\text{II.14})$$

Energie potentielle :

$$E_p = Pd = mgd \quad (\text{II. 15})$$

d représente la hauteur du point matériel m tel que le point de passage de la masse m par l'axe d'équilibre (verticale) est considéré comme référence des potentiels. Ainsi, on a :

$$d = l (1 - \cos \theta) \quad (\text{II. 16})$$

$$E_p = mgl(1 - \cos \theta) \quad (\text{II. 17})$$

On calcule alors le Lagrangien :

$$L = E_c - E_p \quad (\text{II. 18})$$

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \quad (\text{II. 19})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \ddot{\theta} + mlg \sin \theta \quad (\text{II.20})$$

Calcul des moments :

Dans notre cas, on a le moment moteur dû à la force motrice et le moment résistant dû à la force des frottements.

Le moment moteur :

$$\eta_m = Fl \quad (\text{II. 21})$$

Le moment résistant :

$$\eta_r = -F_r = -f_r l \dot{\theta} l = -f_r l^2 \dot{\theta} \quad (\text{II. 22})$$

f_r : coefficient des frottement.

Signalons ici que le couple du poids est nul car sa direction est parallèle à la verticale.

On a alors :

$$\sum M = Fl - f_r l^2 \dot{\theta} \quad (\text{II. 23})$$

En portant les équations (II. 20) et (II.23) dans (II.11), on aura :

$$ml^2 \ddot{\theta} + mlg \sin \theta = Fl - f_r l^2 \dot{\theta} \quad (\text{II.24})$$

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{f_r}{m} \dot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = \frac{1}{ml} F(t) \quad (\text{II.25})$$

Cette équation représente l'équation différentielle régissant le comportement dynamique du système, on remarqua qu'elle est non linéaire.

VII .3. Représentation d'état

On peut passer de l'équation différentielle à la représentation d'états en faisant le changement de variable suivant :

$$x_1(t) = \theta(t) \quad (\text{II. 26})$$

$$x_2(t) = \dot{\theta}(t) \quad (\text{II.27})$$

On a donc :

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t) = x_2(t) \quad (\text{II. 28})$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}(t) = -\frac{f_r}{m} \dot{\theta}(t) - \frac{g}{l} \sin \theta(t) + \frac{1}{ml} F(t) \quad (\text{II. 29})$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{f_r}{m} x_2(t) - \frac{g}{l} \sin x_1(t) + \frac{1}{ml} F(t) \quad (\text{II. 30})$$

Ainsi le modèle d'état d'un pendule simple est le suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{f_r}{m}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin x_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{II. 31})$$

Tel que $u(t) = F(t)$ représente la commande du système.

$x_1(t)$ représente la position de la masse m (l'angle que fait avec la verticale)

$x_2(t)$ représente la vitesse angulaire.

Le modèle d'état est non linéaire.

VIII. Conclusion

Les méthodes de commandes basées sur le modèle linéaire (modèle approximé) se révèlent complètement inefficaces face à des systèmes à forte non linéarité. En plus, la synthèse de commande linéaire n'est pas nécessairement plus simple à mettre en œuvre. L'évolution des technologies constitue un facteur supplémentaire au développement des techniques de commande non linéaire, de ce fait, de nombreuses recherches de méthodes de commandes non linéaires sont apparues.

Dans ce chapitre, nous avons présenté des notions de base sur les systèmes non linéaires telles que, la définition et la représentation d'état des systèmes non linéaires, ce qui nous permettra de présenter dans le prochain chapitre une nouvelle loi de commande non linéaire appelée commande des systèmes non linéaires par l'approche SDRE.

Chapitre III

Equation de riccati
dependante de l'état

I. Introduction

Comme son nom l'indique, la résolution des problèmes de commande suivant la méthode LQ par l'équation de Riccati vue en chapitre 1 n'est applicable que pour le modèle linéarisé au tour du point d'équilibre, donc la loi de commande obtenue n'est valable qu'au voisinage de ce point. Pour synthétiser une loi de commande valable pour le système non linéaire, on suit les mêmes étapes de synthèse d'une commande LQ en considérant le modèle non linéaire du système, on arrive alors à une nouvelle équation dite : équation de Riccati dépendante de l'état, connue sous le nom SDRE qui provient de la dénomination anglaise « State Dependant Riccati Equation ». La technique SDRE peut être considérée comme la généralisation de la commande LQ aux systèmes non linéaires.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la commande SDRE d'un système non linéaire.

II. Historique

L'idée de l'adaptation de la commande linéaire quadratique pour les systèmes non linéaires en utilisant l'approche de l'équation de Riccati dépendante de l'état (SDRE) est proposée dans un premier temps par Pearson (1962), étendue plus tard et améliorée par Wernli et Cook (1975) [9]. L'évolution de la puissance des calculateurs et les avancées remarquables en théorie d'estimation des systèmes dynamiques ont incitée, ces dernières années, certains auteurs de reprendre les travaux sur cette technique Friedland (1996), et Mracek et Cloutier (1998). Cette méthode est applicable pour une grande classe des systèmes dynamiques. Elle a été appliquée avec succès dans plusieurs domaines tel que la robotique, systèmes biomédicales, systèmes automobiles, stabilisation des satellites, optimisation des trajectoires des missiles et des avions... [9], [10]

III. Formulation du problème de commande [9], [10], [11]

Considérons un problème de régulation à horizon infini d'un système non linéaire, déterministe, autonome, affine par rapport aux entrées, ayant une dynamique représentée par l'équation d'état suivante :

$$\dot{X} = f(x) + g(x)U, \quad x(0) = x_0 \quad (\text{III.1})$$

$g(x) \neq 0, \forall x$.

$X \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état.

$U \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande.

Le but est d'assurer la régulation en minimisant le critère suivant :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t)Q(x)x(t) + U^T(t)R(x)U(t))dt \quad (\text{III.2})$$

Le critère considéré est non quadratique en x mais quadratique en u .

Pour tout x les deux matrices de pondération Q et R doivent être respectivement, semi définie positive et définie positive.

Par analogie avec la commande linéaire quadratique, l'objectif est de chercher le retour d'état $K(x)$ tel que :

$$u(x) = -K(x)X, \quad K(0) = 0 \quad (\text{III.3})$$

La SDRE consiste à généraliser la commande linéaire quadratique au système non linéaire. Cette méthode est basée sur la notion de la linéarisation étendue (extended linearization) applicable pour une certaine classe de systèmes non linéaires décrite par l'équation (III.1) pour lesquels la factorisation suivante

$$f(x) = A(x)x$$

et

$$B(x) = g(x)$$

est possible.

Dans ce cas le système prend la forme suivante

$$\dot{X} = A(x)X + B(x)U, \quad x(0) = x_0 \quad (\text{III.4})$$

Montrons que cette factorisation n'est pas unique, c'est-à-dire plusieurs possibilités existent pour le choix de la matrice $A(x)$. Le choix de cette dernière sera discuté dans la suite du chapitre.

La généralisation de la commande LQ aux systèmes non linéaires dépend essentiellement de la factorisation $A(x)$, c'est-à-dire des propriétés de la matrice $A(x)$.

Les définitions suivantes sont associées à la représentation des systèmes sous la forme (III.4). [9]

Définition 1

La représentation (III.4) est observable dans une région $\Omega \in \mathbb{R}^n$ si la paire $\{A(x), B(x)\}$ est observable au sens linéaire pour tout $x \in \Omega$.

Définition 2

La représentation (III.4) est contrôlable dans une région $\Omega \in \mathbb{R}^n$ si la paire $\{A(x), B(x)\}$ est contrôlable au sens linéaire pour tout $x \in \Omega$.

Définition 3

La représentation (III.4) est détectable dans une région $\Omega \in \mathbb{R}^n$ si la paire $\{A(x), B(x)\}$, est détectable au sens linéaire pour tout $x \in \Omega$.

Définition 4

La représentation (III.4) est stabilisable dans une région $\Omega \in \mathbb{R}^n$ si la paire $\{A(x), B(x)\}$ est stabilisable au sens linéaire pour tout $x \in \Omega$.

Définition 5

La représentation (III.4) est Hurwitz, dans une région Ω , si les valeurs propres de la matrice $A(x)$ sont dans le demi-plan gauche (valeurs à partie réelle négative) pour tout $x \in \Omega$.

A partir de ces définitions, il ressort que l'application de la commande LQ aux systèmes non linéaires dépend de la région Ω (sous-espace d'état) mais cette dernière ne peut pas être spécifiée. Ainsi, une perte de commandabilité où une instabilité peut resurgir lorsque le système fonctionne.

Exemple

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}\quad (\text{III.5})$$

On donne trois représentations équivalentes sous la forme (III.4) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A_i(x) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad i = 1, 2, 3$$

Les trois matrices à coefficients dépendants de l'état sont données par :

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 - x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

$$A_2(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 & 1 - \frac{1}{2}x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

$$A_3(x) = \begin{bmatrix} -x_2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Par exemple, pour ces matrices les valeurs propres et leurs matrices de commandabilité et d'observabilité dépendent de l'état $x(t)$, donc les propriétés fondamentales du système (commandabilité et observabilité et stabilité) dépendent de la variable t .

Pour déterminer ces factorisations, plusieurs solutions ont été proposées. Bass (1991), propose de prendre, si $f(0)=0$,

$$A(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x\lambda} d\lambda \quad (\text{III.9})$$

En introduisant une variable λ dans le but de simplifier le calcul des intégrales. [10]

Pour l'exemple précédent, on a

$$\begin{aligned} f_1 &= x_2 - x_1 x_2 \\ f_2 &= u \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Par conséquent,

$$A(x) = \int_0^1 \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right]_{x=x\lambda} d\lambda$$

$$A(x) = \int_0^1 \left[\begin{array}{cc} -x_2 & 1 - x_1 \\ 0 & 0 \end{array} \right]_{x=x\lambda} d\lambda$$

$$A(x) = \int_0^1 \left[\begin{array}{cc} -x_2 \lambda & 1 - x_1 \lambda \\ 0 & 0 \end{array} \right] d\lambda$$

$$A(x) = \left[\begin{array}{cc} -x_2 \frac{\lambda^1}{2} \Big|_0^1 & \lambda \Big|_0^1 - x_1 \frac{\lambda^2}{2} \Big|_0^1 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$A(x) = \left[\begin{array}{cc} -\frac{x_2}{2} & 1 - \frac{x_1}{2} \\ 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{III.11})$$

Cette matrice correspond à la matrice $A_2(x)$ obtenue en utilisant la méthode de Bass.

Cloutier et ces coauteurs ont proposé de combiner linéairement deux factorisations possibles pour obtenir une autre factorisation. Ainsi, pour deux matrices à coefficients dépendants de l'état, $A_1(x)$ et $A_2(x)$, tel que $f(x) = A_1(x) X = A_2(x) X$, ils proposent de définir :

$$A(x, \alpha) = \alpha A_1(x) + (1 - \alpha) A_2(x), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{III.12})$$

$A(x, \alpha)$ représente un nombre infini de choix pour la matrice $A(x)$. Notons que la non unicité de $A(x, \alpha)$ constitue un degré de liberté supplémentaire pour fixer les performances désirées et éviter des problèmes liés à la commandabilité, à l'observabilité, et la stabilité. Le paramètre α améliore davantage la flexibilité du modèle. [9], [10]

Par exemple en prenant $\alpha = \frac{1}{2}$, on peut définir la matrice suivante

$$A_4\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}A_1(x) + \frac{1}{2}A_2(x)$$

$$A_4\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1-x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 & 1-\frac{1}{2}x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4\left(x, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}x_2 & 1-\frac{3}{4}x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

IV. Structure d'un correcteur SDRE [10], [12]

Une fois le système est factorisé, c'est-à-dire la fonction $f(x)$, sous la forme représentée par l'équation (III.4)

Par analogie avec la commande LQ avec horizon infini, dans le cas de la régulation d'un tel système en minimisant le critère représenté par l'équation (III.2), la loi de commande est :

$$U(x) = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)X \quad (\text{III.14})$$

$P(x)$ est une matrice symétrique, définie positive, c'est la solution unique de l'équation algébrique de Riccati dépendante de l'état SDARE (State Dependand Algebraic Riccati Equation) donnée comme suit :

$$P(x)A(x) + A^T(x)P(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) + Q(x) = 0 \quad (\text{III.15})$$

Par identification entre les deux équations (III.3) et (III.14), on déduit que l'expression du retour d'état est donnée comme suit :

$$K(x) = R^{-1}(x)B^T(x)P(x) \quad (\text{III.16})$$

Alors, en boucle fermée, le système s'écrit comme suit :

$$\dot{X}(t) = [A(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x)]X(t) \quad (\text{III.17})$$

Remarque

- i) Lorsque les coefficients et les matrices de pondération sont constants, le problème de régulation non linéaire par la technique SDRE se réduit en un problème de régulation LQ.
- ii) Comme dans le problème LQR (Linéar Quadratic Regulator), lorsqu'on s'intéresse au régime transitoire, on considère un problème de régulation à horizon fini, ainsi on obtient l'équation différentielle de Riccati dépendante de l'état SDDRE (State Dependant Differential Riccati Equation), mais dans ce cas la résolution en ligne devient très difficile.

V. Exemple illustratif

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2) + u \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Le système en boucle ouverte possède une valeur propre instable à l'origine égale à $0.5 \mp j0.866$. Ce système est stabilisable si le modèle est reformulé sous la forme (III.4) comme suit

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & (1 - 3x_1^2 - 2x_2^2) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \quad (\text{III.19})$$

D'où :

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & (1 - 3x_1^2 - 2x_2^2) \end{bmatrix} ; \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Analysons la commandabilité du système. La matrice de commandabilité est :

$$(x) = [B|AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 - 3x_1^2 - 2x_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

Le déterminant de cette matrice est non nul, alors la matrice de commandabilité est à rang plein $\forall x$, donc le système est commandable.

L'objectif de commande est de minimiser le critère (III.2), en considérant les matrices de pondérations suivantes :

$$Q(x) = \begin{bmatrix} 50 + 400|x_1| & 0 \\ 0 & 50 + 400|x_2| \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

$$R = 1 + 400(x_1^2 + x_2^2) \quad (\text{III.22})$$

Pour implémenter la commande SDRE, à chaque instant t , on résout l'équation de Riccati pour déterminer sa solution définie positive puis on calcul le gain du retour d'état. Les conditions initiales sont

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Les résultats de simulation obtenus sont donnés par les figures (III.V.1) et (III.V.2). On constate que la régulation est assurée et le correcteur SDRE permet de stabiliser le système en boucle fermée.

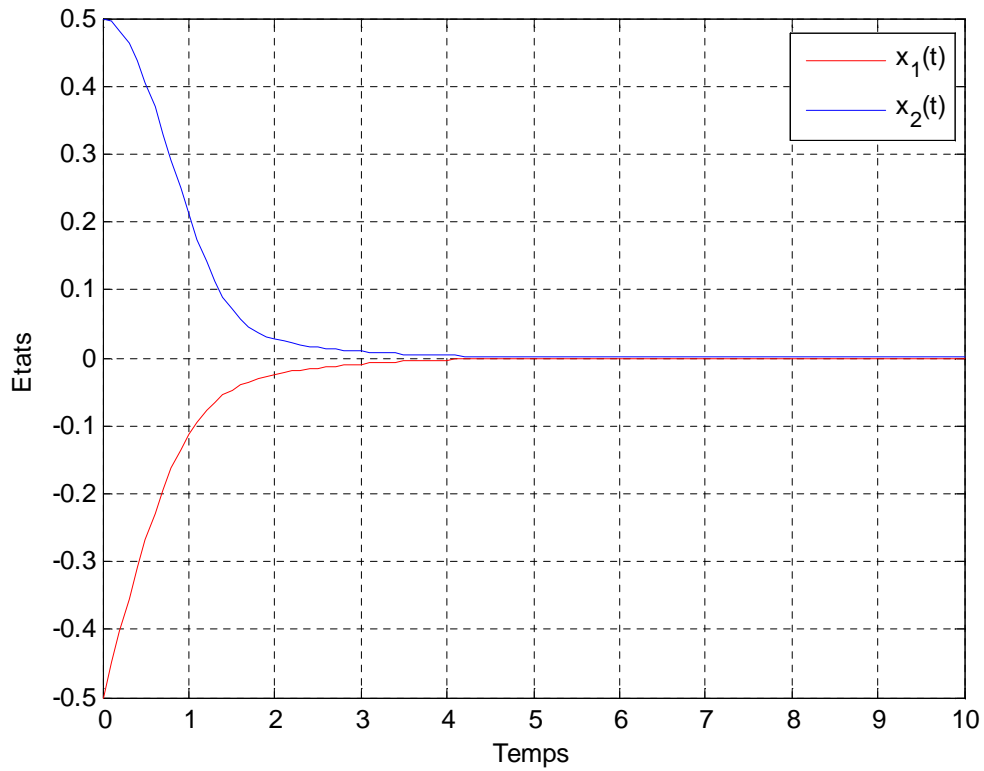


Figure III.V.1 : Evolution des états x_1 et x_2

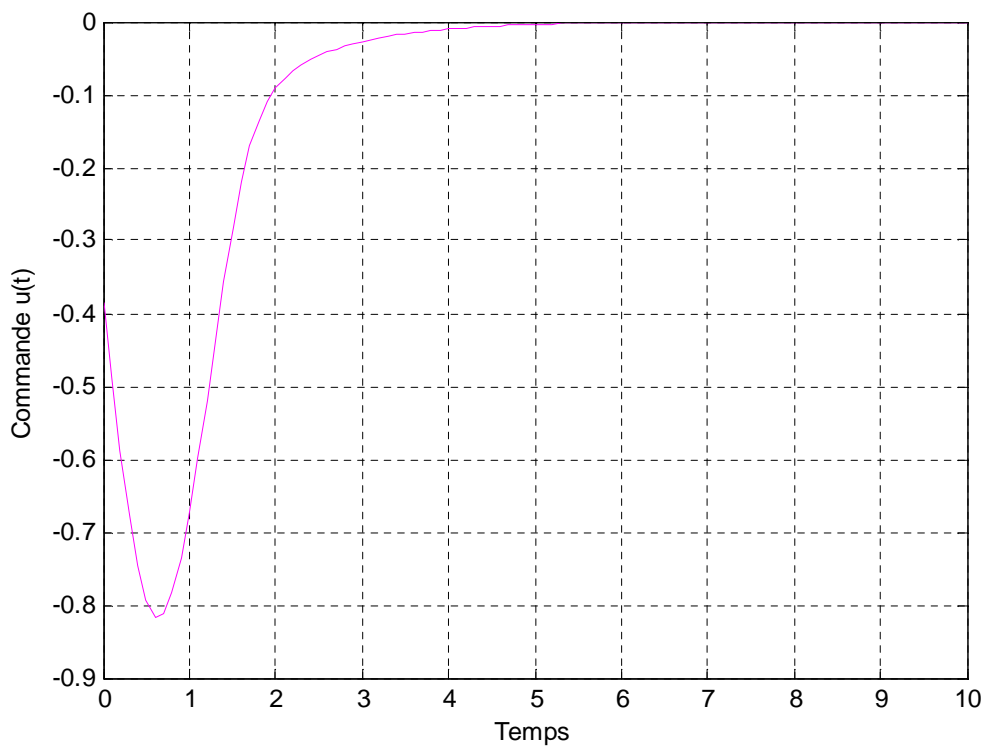


Figure III.V.2: Evolution de la variable de commande u .

VI. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté la commande SDRE qui est une généralisation de la commande LQ aux systèmes non linéaires. Le principe consiste à mettre le système non linéaire sous une forme équivalente en factorisant le modèle en le mettant sous forme d'un modèle linéaire. Cette factorisation n'est pas unique et plusieurs approches pour la factorisation ont été proposées.

Une fois la factorisation est réalisée, on définit la matrice de Riccati dépendante de l'état. Cette matrice est résolue à chaque instant ce qui permet de calculer le gain du retour d'état. Les performances de la SDRE ont été démontrées par un exemple d'application.

Dans le chapitre suivant, cette technique de commande est appliquée pour contrôler un vérin simple effet dont le comportement dynamique est non linéaire.

Chapitre IV

**Commande d'un VSE
par l'approche SDRE**

I. Introduction

La pneumatique joue un rôle très important dans l'automatisation d'un grand nombre de machines et de procédés industriels. Elle est complémentaire à d'autres formes d'énergies telles que l'électricité, la mécanique et l'hydraulique. Ainsi les transmissions oléo-hydrauliques et pneumatiques (TOP) contribuent beaucoup à l'amélioration des performances des systèmes automatisés de production (SAP). Beaucoup de secteurs de production sont concernés tels que l'automobile, aéronautique, marine, industrie agro-alimentaire, équipement de dentisterie et hospitalier, génie civil, travaux publics, robotique, électrotechnique et électronique. L'emploi de l'énergie pneumatique permet de réaliser des automatismes avec des composants simples et robustes, le vérin (simple et double effets) qui constitue un actionneur en pneumatique.

Dans ce chapitre, on propose d'appliquer la SDRE pour la commande d'un vérin simple effet. L'objectif est de remettre le vérin à sa position d'équilibre.

II. Description d'un vérin

Un vérin est un appareil composé d'un cylindre dans lequel se déplace un piston sous l'action d'une pression pneumatique ou hydraulique, et une tige associée au piston qui peut tirer, pousser ou soulever une charge située à l'extérieur du cylindre, il contient des orifices à travers lesquels le fluide entre ou sort de la chambre, il peut être à simple effet (VSE) ou à double effet (VDE), suivant que la pression du fluide peut s'exercer d'un seul ou des deux cotés du piston. Le schéma synoptique du vérin à simple effet est donné par la Figure IV.II.1.

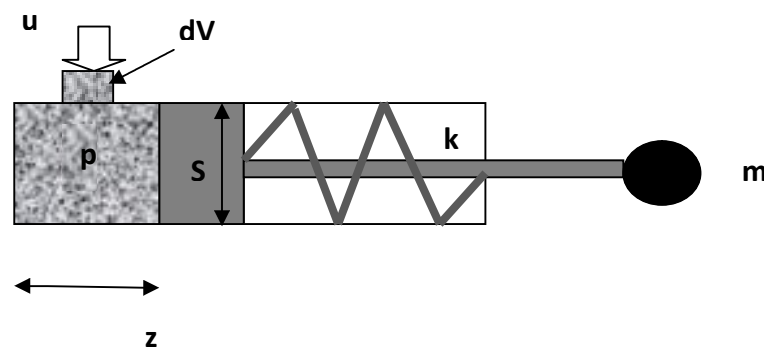


Figure IV.II. 1 : Vérin simple effet

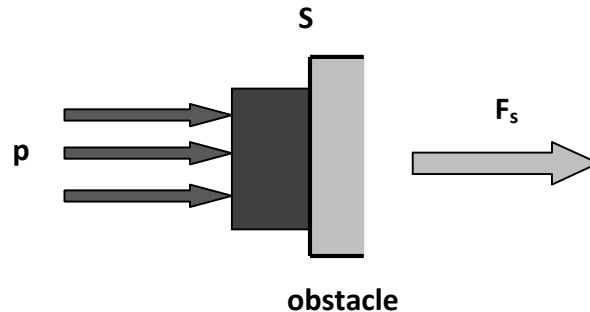
III. Fonctionnement d'un vérin simple effet

Le vérin simple effet transforme l'énergie d'un air comprimé (air atmosphérique soumis à une pression supérieure à celle de l'atmosphère que l'on appelle pression relative ou manométrique) en action mécanique. Ce type de vérin ne peut développer un effort que dans un seul sens, la course de rentrée s'effectue à l'aide d'un ressort, de ce fait, ce type de vérin ne possède qu'une seule entrée d'air.[13]

Sous l'action de l'air comprimé, la tige du vérin sort et comprime le ressort, la chambre avant se trouve à l'atmosphère, le retour de la tige se fait en relâchant la pression, de ce fait le ressort se détend, et la tige revient à sa position de repos.[14]

La force développée avec l'air comprimé dépend de l'usage du vérin, on dispose d'une énergie potentielle exploitable sous forme statique ou sous forme dynamique par transformation en énergie cinétique.[15]

III.1. Force statique



S : surface d'application de la force

P : pression de l'air comprimé

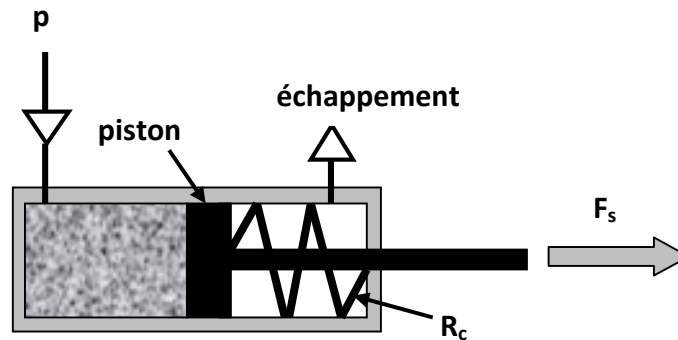
F_s : force statique

Figure IV.III.3: force statique

En faisant agir l'air comprimé sur une face immobile, on obtient une force statique F_s proportionnelle à la pression p et à sa surface d'action S .

$$F_s = pS \quad (\text{IV.1})$$

Et comme c'est le cas d'un vérin simple effet, on doit tenir compte de la force $R_c = kz$ du ressort comprimé d'où :



P : pression de l'air comprimé

F_s : force statique

R_c : force du ressort comprimé

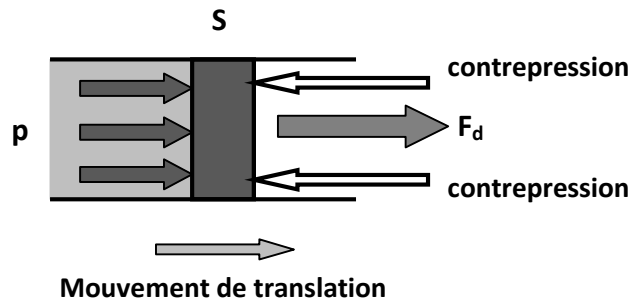
Figure IV.III.2 : force statique du VSE

$$F_s = pS - kz \quad (\text{IV.2})$$

$$[F_s] = [p][S] = \left[\frac{Kg}{s^2m} \right] [m^2] = [N]$$

La force statique est développée par un vérin simple effet lorsque la tige est complètement en sortie.

III.2. Force dynamique



S : surface

P : pression de l'air comprimé

F_d : force dynamique

Figure IV. III.4 : force dynamique

Si la face est mobile en translation, la force dynamique F_d obtenue pendant le mouvement est plus faible car elle dépend des forces qui s'opposent à son déplacement ($\sum F_r$) : force liée à la pression opposée (dite contre-pression) et force de frottement.

Si on suppose que le vide règne dans la chambre du ressort, la contre-pression est nulle, on a alors :

$$F_d = pS - F_r \quad (\text{IV.3})$$

$$[F_d] = [p][S] = \left[\frac{\text{Kg}}{\text{s}^2\text{m}} \right] [\text{m}^2] = [\text{N}]$$

F_r : force de frottement.

$$F_r = f_r \dot{z} \quad (\text{IV.4})$$

f_r : coefficient des frottements.

IV. Modélisation d'un VSE [16]

Les paramètres du VSE schématisé par la figure (IV.II.1) sont les suivants :

k : La raideur du ressort.

S : La surface du piston.

m : La masse au bout du piston.

Hypothèses :

- On considère que la masse m , les masses de tous les autres objets sont négligées.
- On suppose que tout se passe à température constantes T_0 .
- On suppose que le vide règne dans la chambre du ressort (une pression absolue nulle).

n : Nombre de moles de gaz dans la chambre.

V : Le volume de la chambre.

Nous prendrons pour vecteur d'état : $X = (z, \dot{z}, p)$.

z : La position du vérin.

\dot{z} : La vitesse du vérin.

p : La pression dans la chambre du vérin.

L'entrée du système est le débit volumique u d'air vers la chambre du vérin, nous avons donc :

$$u = \left(\frac{V}{n}\right) \dot{n} \quad (\text{IV.5})$$

Pour bien comprendre la relation (IV.5), il suffit de considérer le petit volume d'air dV qui s'apprête à entrer dans la chambre du vérin entre l'instant t et $t+dt$. La loi des gaz parfaits appliquée au petit volume et à la chambre, tous les deux à la même pression, nous donne :

$$p \cdot dV = dn \cdot R \cdot T_0 \quad \text{et} \quad p \cdot V = n \cdot R \cdot T_0 \quad (\text{IV.6})$$

D'où $\frac{dn}{dV} = \frac{n}{V}$, c'est à dire $dV = \frac{V}{n} dn$ donc:

$$u \triangleq \frac{dV}{dt} = \left(\frac{V}{n}\right) \dot{n} \quad (\text{IV.7})$$

Ce qui correspond à la relation (IV.5)

Le principe fondamental de la dynamique nous donne $pS - kz - f_r \dot{z} = m\ddot{z}$.

Donc, les deux premières équations d'état sont :

$$\begin{cases} \dot{z} = \dot{z} \\ \ddot{z} = \frac{Sp - kz - f_r \dot{z}}{m} \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

La loi des gaz parfaits ($pV = nRT$) est donnée par $pzS = nRT$.

En différenciant, on obtient :

$$S(\dot{p}z + p\dot{z}) = (\dot{n}T + n\dot{T}) \quad (\text{IV.9})$$

En supposant l'évolution isotherme, cette relation se traduit par :

$$S(\dot{p}z + p\dot{z}) = R\dot{n}T = R\frac{nu}{V}T = pu \quad (\text{IV.10})$$

La troisième équation d'état s'exprime donc par :

$$\dot{p} = \frac{p}{z} \left(\frac{u}{S} - \dot{z} \right) \quad (\text{IV.11})$$

Les équations d'état du système sont donc :

$$\begin{cases} \dot{z} = \dot{z} \\ \ddot{z} = \frac{Sp - kz - f_r \dot{z}}{m} \\ \dot{p} = -\frac{p}{z} \left(\frac{u}{S} - \dot{z} \right) \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

Puisque $X = (z, \dot{z}, p) = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{Sx_3 - kx_1 - f_r x_2}{m} \\ \dot{x}_3 = -\frac{x_3}{x_1} \left(x_2 - \frac{u}{S} \right) \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

V. Commande du vérin par l'approche SDRE

Le modèle non linéaire du vérin simple effet est représenté par l'équation (IV.13) sous la forme

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (\text{IV.14})$$

Pour reformuler le modèle sous la forme

$$\dot{x} = A(x)X + B(x)u \quad (\text{IV.15})$$

on factorise $f(x)$ comme suit :

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f_r}{m} & \frac{S}{m} \\ 0 & -\frac{x_3}{x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{Sx_1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

L'objectif est de ramener le vérin à sa position d'équilibre $x = (0, 0, 0)$ en agissant sur la variable de commande u tout en minimisant l'énergie mise en œuvre, c'est-à-dire

$$J(u(t)) = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (\text{IV.18})$$

Après plusieurs tests, les matrices de pondération ont été choisies comme suit :

$$Q = \begin{bmatrix} x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

$$R = 1 \quad (\text{IV.20})$$

Les paramètres du système ont comme valeurs numériques :

$$m = 1$$

$$S = 1.5$$

$$k = 1$$

$$fr = 1$$

Lorsque la position du vérin est nulle ($z = 0$), le vérin est en butée gauche (la tige du vérin est complètement en entrée), le ressort se trouve en position d'équilibre.

On suppose initialement, i.e. à l'instant où on applique la commande, la tige du vérin est partiellement en sortie, l'état initial du système est représenté par le vecteur suivant :

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50 \\ -0.25 \\ 0.50 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

Notre objectif est de synthétiser une loi de commande qui permet de ramener le vérin à sa position d'équilibre (vérin en butée gauche).

Les résultats de simulation obtenus sont donnés par les Figures (IV.V.1) et (IV.V.2), On remarque la commande appliquée amortie le déplacement de la tige qui atteint sa position d'équilibre après un temps égale à 80s. La variation de commande u est physiquement acceptable.

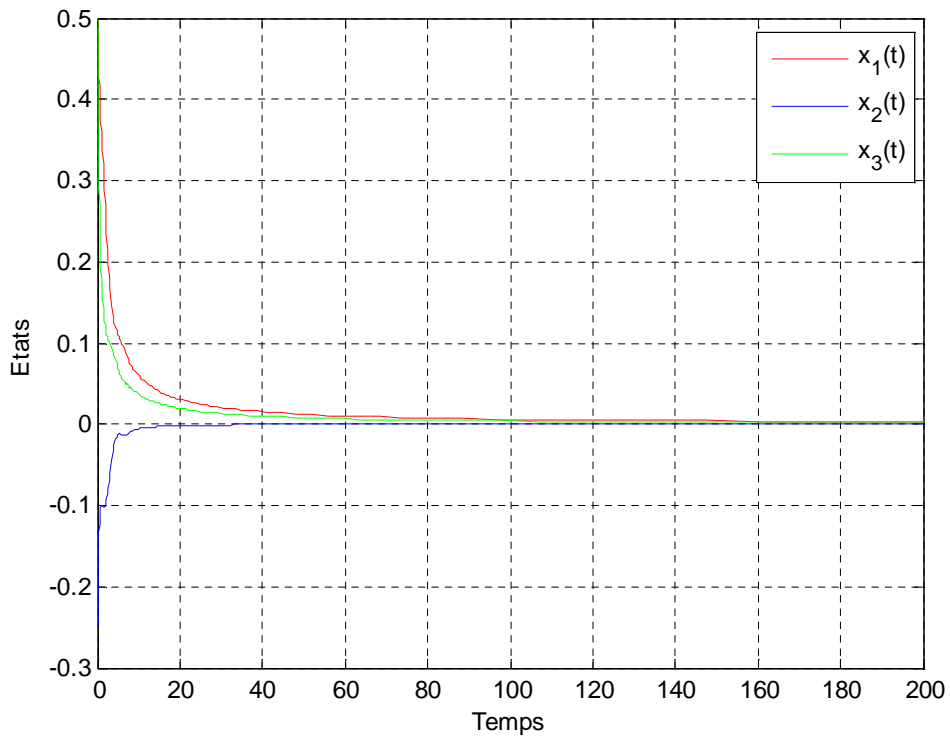


Figure IV.V.1 : les états du système x_1 et x_2 et x_3

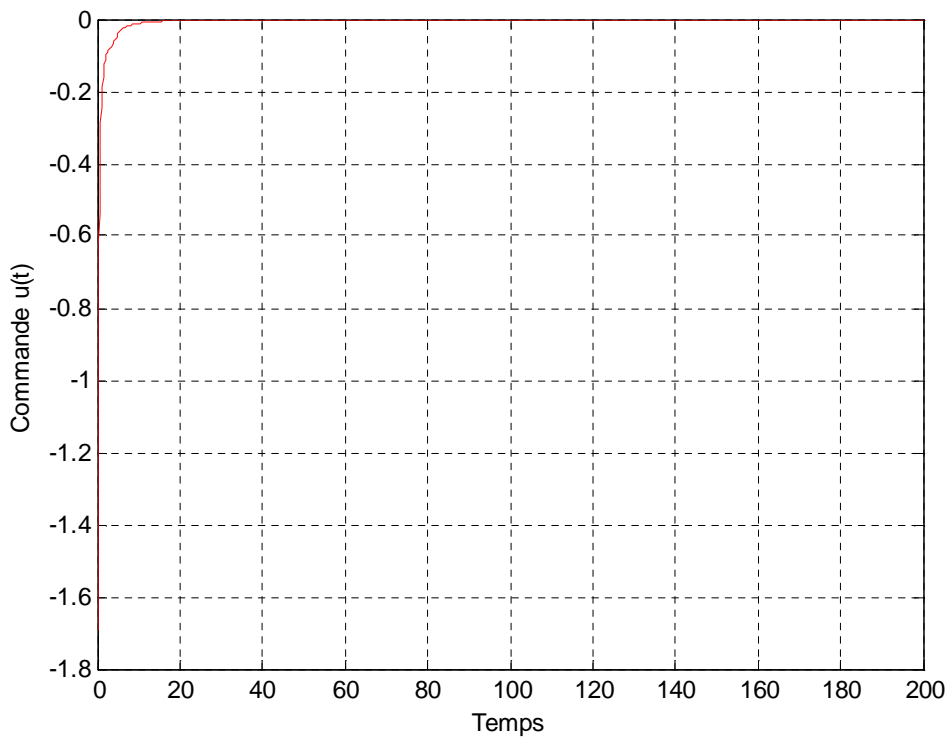


Figure IV.V.2 : commande U

VI. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la commande SDRE pour un système pneumatique. Il s'agit d'un vérin à simple effet dont le comportement dynamique est décrit par un modèle non linéaire. Ce dernier peut être factorisé pour le mettre sous la forme équivalente au modèle linéaire, par conséquent de la commande SDRE est applicable.

Les résultats de simulation montrent que la commande SDRE offre de bonnes performances en régulation. En effet, le vérin atteint sa position d'équilibre avec un régime amorti et une variation de commande acceptable.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la commande optimale des systèmes dynamiques non linéaires. L'objectif est d'étendre la commande linéaire quadratique aux systèmes non linéaires en utilisant la technique State Dependant Riccati Equation.

Dans la première partie, on a présenté la théorie de la commande optimale en définissant les trois types de problème de commande selon la forme du critère. Puis on a insisté sur le problème de commande linéaire quadratique qu'on peut résoudre par l'équation de Riccati. Cette dernière est obtenue en appliquant le principe de minimum de Pontriaguine basé sur le calcul des variations. Puis on a montré par simulation l'apport d'une commande linéaire quadratique. Dans la deuxième partie, on a présenté une étude générale sur les systèmes non linéaires qui se résume dans la définition et la représentation des systèmes non linéaires par le modèle d'état. Le travail présenté dans la troisième partie démontre que la technique SDRE permet de synthétiser des lois de commande sous forme de retour d'état analogue à celui utilisé dans le cas linéaire, le gain du retour dépend de l'état, ce qui donne des lois de commande adaptatives, les résultats de simulation effectués sous MATLAB ont montré que la commande obtenue par la technique SDRE a stabilisé un système instable.

Comme application, on a choisie un actionneur pneumatique ayant un comportement dynamique non linéaire, c'est le vérin simple effet. L'objectif est la conception de la commande permettant de faire revenir le vérin à sa position d'équilibre par l'approche SDRE. Les résultats de simulation ont montré que cette technique peut satisfaire les objectifs du contrôle liés à la stabilisation et la régulation.

Bibliographie

- [1] Éric OSTERTAG, « AUTOMATIQUE: Commande et estimation multivariables, Méthodes linéaires et optimisation », ellipses, Paris, France, 2006.
- [2]. Sofiane. TIGUERCHA, Ramdane. TALHADJT, « Commande linéaire quadratique des systèmes à paramètres distribués basée sur la stratégie de la pré-approximation », mémoire de fin d'études d'ingénieur d'état en automatique, UMMTO, 2010.
- [3]. Bernard. BAYLE, « commande optimale », eavr. u-strasbg.fr/~bernard/education/ensps_3a_copt/slides_copt_3a.pdf.
- [4]. Omar. HABET, Ali. HACHMI, Samir. YESLI, « Synthèse d'un correcteur proportionnel intégral dérivé optimal basé sur la commande linéaire quadratique (LQR) », mémoire de fin d'études d'ingénieur d'état en automatique, UMMTO, 2006.
- [5]. Nadia. MALEK, Sabrina. LABRAOUI, « Commande linéaire quadratique d'un système parabolique », mémoire de fin d'études d'ingénieur d'état en automatique, UMMTO, 2004.
- [6]. André CROSNIER, « Automatique des systèmes non linéaires », documentation internet.
- [7]. M. BENALEGUE, H. MOSTEAI, B. IDRIS, «Systèmes asservis non linéaires ». Edition LAMINE, avenue Abderrahmane Mira B.E.O Alger.
- [8]. Aziz. ADDAR, Mustapha. HABAREK, « commande non linéaire d'un réacteur Biologique », mémoire de fin d'études d'ingénieur d'état en électronique, UMMTO, 2009.
- [9]. Tayfun.CIMEN, « State-Dependant Riccati Equation (SDRE) Control : A Survey », Proceedings of the 17th World congress IFAC, Seoul, Korea, July 6-11, 2008.
- [10]. Tyfun. CIMEN, « Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependant Riccati equation (SDRE) methode », Annual Reviews in Control, 34, PP32-51, 2010.
- [11]. Abdelhamid. IRATNI, « Modeling and simulation of biotechnological process : nonlinear estimation and control of wastewater systems », thèse de doctorat en automatique, Université de Ferhat ABBAS-Sétif, 2012.

[12]. S.Rafee Nekoo, « Nonlinear closed loop optimal control : A modified state-dependant Riccati equation », ISA Transactions, PP1-6, 2012.

[13]. José Roldan VILORIA, «Aide-mémoire pneumatique industrielle », Dunod, Paris, France, Août 2002

[14]. « Le vérin pneumatique », www.mei-latecoere.com.

[15], Lounis. MEDJOUDI, Idir. HETTAK, Djaafar. HAMOUMA, « implémentation d'une commande numérique des vérins sur API en vue d'une automatisation de la chaine de transfert des réfrigérateurs », mémoire de fin d'études d'ingénieur d'état en automatique, UMMTO, 2009.

[16]. Luc. JAULIN, « Représentation d'état pour la modélisation et la commande des systèmes », Hermès, paris, France, 2005.

.