République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERI Tizi Ouzou

Faculté des sciences. Département Mathématique

Mémoire
Réalisé pour l'obtention du diplôme de Master
en **Mathématiques**

Option :
Analyse et modélisation mathématiques

Thème :
La théorie spectrale des semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornés

Présenté par :
BELHADJ Samir

Devant le jury

MORSLI Mohamed : Président

CHALLALI Nourdine : Rapporteur

MELLAH Omar : Examinateur

soutenu le 14 juillet 2015

Remerciement

Tout d'abord, je remercie Monsieur **CHALLALI Nourdine** pour le choix de ce thème et de l'avoir encadré, et je le remercie encore et infiniement pour son aide, sa patience et sa disponibilité.

Mes remerciements vont également au professeur Monsieur **MORSLI Mohamed**, enseignant à l'université Mouloud MAMMERI, pour avoir voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury. De même je remercie Monsieur **MELLAH Omar**, docteur et enseignant à l'université Mouloud MAMMERI, pour l'honneur qu'il m'a fait de bien vouloir accepter d'en faire partie.

Je remercie aussi tous mes enseignants qui m'ont aidé durant mon cursus universitaire.

Enfin, je remercie toute personne m'ayant aidé à comprendre certaines choses dans cette vie, particulièrement en Mathématiques.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Ma famille : mes parents, mes frères et soeurs.

Tous ceux que j'aime et je respecte.

Table des matières

Introduction **4**

1 Semi-groupes d'opérateurs linéaires **6**
1.1 Semi-groupes uniformément continus 6
1.2 Semi-groupes fortement continus 13

2 Spectre d'un opérateur linéaire et résolvante **21**
2.1 Spectre d'un opérateur linéaire borné 21
2.2 Spectre d'un opérateur linéaire fermé 26

3 Théorie spectrale des semi-groupes **28**
3.1 Théorie spectrale des semi-groupes uniformément continus 28
3.2 Théorie spectrale des semi-groupes fortement continus 31

4 Equations différentielles linéaires et semi-groupes **39**
4.1 Problème de Cauchy et solution classique 39
4.2 Equation de la chaleur en dimension 1 dans l'espace $L^2([0,1])$ 44

Bibliographie **48**

Introduction

La théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach a commencé au début de 19 ème siècle. Elle a connu ses premiers développements grâce au travaux de Yosida en 1948 avant d'atteindre son sommet avec l'édition de" *Semigroups and Functional Analysis* " de Carl Einer HILLE et Ralph Saul Phillips en 1957.

Récemment, cette théorie est devenue un objet important, en mathématiques, dans l'étude de l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles, ainsi que dans d'autres domaines scientifiques (phisiques et mécaniques). En effet, elle reçoit un grand nombre d'applications dans l'étude du contrôle et de la stabilité des systèmes gouvernés par des équations différentielles. Donc il est préférable, en mathématiques, de considérer les études sur les $\mathbb{C}$-espaces de Banach .

Pour une famille d'opérateurs linéaires une étude remarquable est celle de déterminer son spectre qui est une généralisation, en dimension infinie, de l'ensemble des valeurs propres d'une matrice. Ainsi la théorie spectrale nous permet d'avoir l'inversibilité des éléments (opérateurs) ayant la propriété $\lambda I \neq A$.

Notre travail est consacré à l'étude de la propriété spectrale des semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornés, ainsi il se compose d'une introduction qui nous en donne une idée générale, quatre chapitres et une bibliographie .

Dans le premier chapitre, on trouve une étude générale des semi-groupes unifomément et fortement continus d'opérateurs linéaires bornés dans un $\mathbb{C}$-espace de Banach avec quelques propriétés, ainsi la notion des générateurs infinitésimaux voire des résultats liant ces deux notions : des conditions (nécéssaires et suffisantes) pour qu'un opérateur linéaire génére un semi-groupe, comme les théorèmes de Hille-Yosida et Lumer-Phillips qui jouent un rôle important pour l'existance et l'unicité des solutions des équations différentielles.

Le deuxième chapitre est consacré à la théorie spectrale, nous y étudions les spectres des opérateurs linéaires borné et férmé ainsi celle de la résolvente et ses propriétés.

Le troisième chapitre est réservé pour la théorie spectrale des semi-groupes uniformément et fortement continus d'opérateurs linéaires, qui nous permet d'obtenir des résultats liant une famille d'opérateurs linéaires à la résolvante et d'avoir des opérateurs bornés comme la transformée de Laplace .

Enfin, le quatrième chapitre nous donne l'importance de la théorie des semi-groupes pour établir le problème de l'existence et l'unicité des solutions pour le problème de Cauchy linénaire homogène, avec une application du théorème de Lumer-Phllips : nous allons donner un exemple dans un espace de Hilbert (l'équation de la chaleur dans l'espace $L^2([0,1])$). Nous chercherons le domaine de l'opérateur $A = \frac{d^2}{dx^2}$ et le semi-groupe qu'il génére.

Chapitre 1

Semi-groupes d'opérateurs linéaires

Rappellons qu'un opérateur linéaire borné est un opérateur linéaire continu $T : E \longrightarrow F$, avec E et F sont deux espaces vectoriels normés, tel que

$$\exists C > 0, \forall u \in E, \| Tu \|_F \leq C \| u \|_E$$

et il est férmé si l'image de toute partie férmée de E par cet opérateur est férmée dans F. On note par $L(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de E dans F. Si $F = E$ on le note $L(E, E)$ ou encore $L(E)$.

Si l'espace $(F, \| \,.\, \|_F)$ est un espace de Banach, alors l'espace $L(E, F)$ muni de la norme

$$\| T \|_{L(E,F)} = \sup_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\| Tu \|_F}{\| u \|_E} = \sup_{\| u \|_E = 1} \| Tu \|_F$$

est aussi un espace de Banach.

Dans la suite, E désigne un $\mathbb{C}$-espace de Banach et *B(E)* l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans E .

1.1 Semi-groupes uniformément continus

Dans ce paragraphe nous allons présenter quelques notions de semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach E.

Définition 1.1. .[1] on appelle semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur E une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \; B(E)$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) $T(0) = I$;

ii) $T(t+s) = T(t)T(s) = T(s)T(t), \quad \forall t, s \geq 0;$

Définition 1.2. .[1] Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset B(E)$ est dit uniformément continu, s'il vérifie :

iii) $\lim_{t\longrightarrow 0} \parallel T(t) - I \parallel_{B(E)}= 0.$

Définissons maintenant le générateur d'un semi-groupe uniformément continu.

Définition 1.3. .[2] on appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ l'opérateur linéaire

A défini sur l'ensemble

$$D(A) = \{x \in E \ / \ \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad existe\}$$

par

$$Ax = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Exemple 1.1. .[2] Soients $p \in [1, \infty[$ et

$$l_p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^p < \infty\}$$

avec la norme

$$\parallel (x_n)_{n\in\mathbb{N}*} \parallel_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Considérons une suite bornée de nombres réels positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Alors la famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur l'espace l_p définie par

$$T(t)(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (e^{-a_n t} x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad \forall t \geq 0,$$

est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A tel que

$$A(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (-a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},$$

avec

$$D(A) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l_p \mid (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l_p\}.$$

Lemme 1.1. *.[2] Soit $A \in B(E)$. Alors $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés sur E ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A.*

Preuve. Soient $A \in B(E)$ *et* $t \in [0,\infty[\longrightarrow T(t) \in B(E)$ une application définie par :

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

qui est une serie convergente pour la norme des opérateurs définie plus haut.
De plus, il est évident que $T(0) = I$ et $T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall\, t, s \geq 0$. Grâce à l'inégalité

$$\| T(t) - I \| \leq e^{t\|A\|} - 1, \quad \forall\, t \geq 0,$$

il résulte que :

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \| T(t) - I \| = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\| \frac{T(t)-I}{t} - A \| &= \| \frac{1}{t}(e^{tA} - I - tA) \| \\
&= \| \frac{1}{t}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I - tA) \| \\
&= \| \frac{1}{t}(I + tA + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I - tA) \| \\
&= \frac{1}{t} \| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \| \\
&\leq \frac{1}{t}(1 + t \| A \| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - 1 - t \| A \|) \\
&\leq \frac{1}{t}(e^{t\|A\|} - 1 - t \| A \|) \\
&= \frac{e^{t\|A\|} - 1}{t \| A \|} \| A \| - \| A \| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

$si \;\; t \longrightarrow 0.$

Nous obtenons, alors :

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A.$$

Donc la famille $\{e^{tA}\}_{t \geq 0} \subset B(E)$ est un semi-groupe uniformément continu dont le générateur infinitésimal est A. $\square$

Lemme 1.2. *Etant donné $A \in B(E)$, il existe un unique semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ tel que*

$$T(t) = e^{tA}, \quad \forall t \geq 0$$

ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A .

Preuve. On sait que pour $A \in B(E)$, il existe un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ uniformément continu généré par A .
Supposons maitenant qu'il existe un autre semi-groupe uniformément continu $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ généré aussi par A, alors on a :

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A$$

et

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{S(t) - I}{t} = A$$

donc

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \parallel \frac{T(t) - S(t)}{t} \parallel = 0$$

Puisque T(t) et S(t) sont bornés donc pour $a \geq 0$, et si I_a est un intervalle tel que $I_a = [0, a[$, alors $\exists c \geq 1$, dépendante de a, telle que

$$\sup_{t \in I_a} \{\parallel T(t) \parallel, \parallel S(t) \parallel\} \leq c.$$

Par suite, pour $\epsilon > 0, \exists h \in I_a, \;\; h > 0$ tel que

$$\parallel \frac{T(t) - S(t)}{t} \parallel \leq \frac{\epsilon}{ac^2}, \quad \forall \; t \in [0, h[.$$

Soit $t \in I_a$ et n$\in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{t}{n} \in]0, h[$
alors

$$T(t) - S(t) = T(n\frac{t}{n}) - S(n\frac{t}{n})$$

$$= T(n\frac{t}{n})S(0\frac{t}{n}) - T((n-1)\frac{t}{n})S(1\frac{t}{n})$$

$$+T((n-1)\frac{t}{n})S(1\frac{t}{n}) - T((n-2)\frac{t}{n})S(2\frac{t}{n})$$

$$+T((n-2)\frac{t}{n})S(2\frac{t}{n}) - T((n-3)\frac{t}{n})S(3\frac{t}{n})$$

$$+\cdots - T(0\frac{t}{n})S(n\frac{t}{n})$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}[T((n-k)\frac{t}{n})S(k\frac{t}{n}) - T((n-k-1)\frac{t}{n})S((k+1)\frac{t}{n})]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} T((n-k-1)\frac{t}{n})[T(\frac{t}{n}) - S(\frac{t}{n})]S((k)\frac{t}{n}), \quad \forall t \in I_a$$

De l'inégalité

$$\| \frac{T(t) - S(t)}{t} \| \leq \frac{\epsilon}{ac^2}$$

on obtient

$$\| T(\frac{t}{n}) - S(\frac{t}{n}) \| \leq \frac{\epsilon.t}{ac^2.n}.$$

Donc

$$\| T(t) - S(t) \| \leq \sum_{k=0}^{n-1} c.\frac{\epsilon.t}{ac^2 n}.c < \epsilon.$$

Puisque $\epsilon > 0$ est arbitaire donc T(t)=S(t) pour tout t$\in I_a$, et comme $a \in]0, \infty[$ est aussi arbitraire, il en résulte que T(t)=S(t), $\forall t \in]0, \infty[$.

Donc, pour un opérateur $A \in B(E)$ il existe un seul semi-groupe uniformément continu généré par A. $\square$

La condition nécéssaire et suffisante pour qu'un opérateur soit un générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.1. *.[2] Un opérateur A :E$\longrightarrow$ E est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement s'il est linéaire et borné.*

Pour démonter ce théorème on a besoin du lemme suivant

Lemme 1.3. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow E$ une application continue. Alors*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds = f(a).$$

Preuve. On a

$$\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds - f(a) \| = \| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} [f(s) - f(a)]ds \|$$

$$\leq \sup_{s \in [a, a+t]} \| f(s) - f(a) \| .$$

L'égalité résulte de la continuité de A. $\square$

Revenons maintenant à la preuve du théorème.

$\Longrightarrow$ Soit A :E$\longrightarrow$ E le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset B(E)$. Alors

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \| T(t) - I \| = 0.$$

L'appliction $t \in [0, \infty[\longrightarrow T(t) \in B(E)$ est continue et par suite $\int_0^t T(s)ds \ \in B(E)$, avec le lemme (1.3) on voit que

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)ds = T(0) = I,$$

il existe donc h> 0 tel que

$$\| \frac{1}{h} \int_0^h T(s)ds - I \| < 1.$$

Par suite l'élément $\frac{1}{h} \int_0^h T(s)ds$ est inversible, donc $\int_0^h T(s)ds$ est aussi inversible et on a :

$$\frac{T(s) - I}{s} \int_0^h T(t)dt = \frac{1}{s}[\int_0^h T(t+s)dt - \int_0^h T(t)dt]$$

En posant $u = t + s$ on obtient

$$\frac{T(s) - I}{s} \int_0^h T(t)dt = \frac{1}{s} \int_s^{h+s} T(u)du - \frac{1}{s} \int_0^h T(u)du$$

$$= \frac{1}{s} \int_s^0 T(u)du + \frac{1}{s} \int_0^h T(u)du$$

$$+\frac{1}{s} \int_h^{h+s} T(u)du - \frac{1}{s} \int_0^h T(u)du$$

$$= \frac{1}{s} \int_h^{h+s} T(u)du - \frac{1}{s} \int_0^h T(u)du$$

On obtient donc

$$\lim_{s \longrightarrow 0} \frac{T(s) - I}{s} \int_0^h T(t)dt = \lim_{s \longrightarrow 0}[\frac{1}{s} \int_h^{h+s} T(u)du - \frac{1}{s} \int_0^{0+s} T(u)du]$$

$$= T(h) - T(0) = T(h) - I.$$

d'où

$$\lim_{s \longrightarrow 0} \frac{T(s) - I}{s} = [T(h) - I].[\int_0^h T(t)dt]^{-1}$$

Par conséquent le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est l'opérateur A=$[T(h) - I].[\int_0^h T(t)dt]^{-1} \in B(E)$.

$\Longleftarrow$ Cette implication est obtenue du lemme(1.1) et du lemme(1.2). $\square$

1.2 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.4. .[1] Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit fortement continu s'il vérifie :

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \parallel T(t)x - x \parallel_E = 0, \quad \forall x \in E.$$

On voit que

$$\lim_{t\longrightarrow 0} T(t)x = x,$$

donc T(t) est fortement continue en t=0, c'est pour quoi on l'appelle aussi C_0-semi-groupe.[1]

Définition 1.5. .[2] On appelle générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un opérateur A défini sur l'ensemble

$$D(A) = \{x \in E \mid \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad existe\}$$

par

$$Ax = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in E.$$

Exemple 1.2. .[1] Notons par $C_b(\mathbb{R}^+)$ l'espace des fonctions uniformément continues et bornées définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. C'est un espace de Banach.
Posons $X = C_b(\mathbb{R}^+)$ et définissons la famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ par

$$[T(t)Q](y) = Q(t + y), \quad pour\ y \in \mathbb{R}^+, Q \in X$$

On voit bien que :

1) $T(0) = I$;

2) $T(t + s) = T(t)T(s)$;

3)
$$\lim_{t\longrightarrow 0} \parallel T(t)Q - Q \parallel = \lim_{t\longrightarrow 0}\{\sup_{y\in\mathbb{R}^+} \mid Q(t+y) - Q(y) \mid\} = 0,$$

donc $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A défini sur

$$D(A) = \{Q \in X/ \;\; \alpha Q(y) = \frac{d}{dy}Q \in X\}$$

par

$$AQ = \alpha Q, \quad \forall Q \in D(A).$$

Remarque 1.1. On a

$$\parallel T(t)x - x \parallel \leq \parallel T(t) - I \parallel \parallel x \parallel$$

pour tout x dans E et pour tout t positif. Il en résulte que les semi-groupes uniformément continus sont C_0-semi-groupes. Mais la récéproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.3. .[3] Dans l'exemple (1.2), on a vu que l'opérateur A défini sur l'ensemble

$$D(A) = \{Q \in X/ \;\; \alpha Q(y) = \frac{d}{dy}Q \in X\}$$

par

$$AQ = \alpha Q = Q', \quad \forall Q \in D(A).$$

génére un C_0-semi-groupe. Mais cet opérateur est non borné. Compte tenu du théorème(1.1), il ne peut pas générer un semi-groupe uniformément continu.

Théorème 1.2. *.[2] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés. Alors*
i) $\exists h > 0$ et $M \geq 1$ tels que

$$\parallel T(t) \parallel \leq M, \quad \forall t \in [0, h];$$

ii) $\exists w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tels que

$$\parallel T(t) \parallel \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve.

i) Supposons que $\forall h > 0$, $M \geq 1$ il existe $t_0 \in [0, h]$ tels que $\| T(t) \| > M$. En particulier, pour h=$\frac{1}{n}$ et M =n$\in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ tels que :$\| T(t_n) \| > n$.
Donc, la suite $(\| T(t_n) \|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non bornée. Par suite, du théorème de Banach-steinhaus, il existe $x_0 \in E$ tel que $(\| T(t_n)x_0 \|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit non borneé.
D'autre part, on a

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \| T(t_n)x_0 \| = \| x_0 \| .$$

Ce qui est contradictoire.

ii) Pour $h > 0$ et $t > h$, on pose m=$[\frac{t}{h}] \in \mathbb{N}^*$, donc il existe $r \in [0, h[$ tel que t=mh+r. Alors :

$$\| T(t) \| = \| T(mh)T(r) \|$$

$$\leq \| T(h) \|^m \| T(r) \|$$

$$\leq M^m M \leq M e^{\frac{t}{r} lnM}.$$

Pour $w = \frac{lnM}{r}$, on obtient le résultat . $\square$

Notons par $SG(M, w)$ l'ensemble des C_0-semi-groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in B(E)$ pour lesquels il existe $M \geq 1$ et $w \geq 0$ tel que

$$\| T(t) \| \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Corollaire 1.1. *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe, alors l'application $t \in [0, \infty[\longrightarrow T(t)x \in E$ est continue sur $[0, \infty[, \quad \forall x \in E$.*

Preuve. Soient $t_0 \in [0, \infty[, h > 0$ et $x \in E$.
Si $t_0 < h$, on a

$$\| T(t_0 + h)x - T(t_0)x \| \leq \| T(t_0) \| \| T(h)x - x \|$$

$$\leq Me^{wt_0} \| T(h)x - x \|$$

Si $t_0 \geq h$, on a :

$$\| T(t_0+h)x - T(t_0)x \| \leq \| T(t_0-h) \| \| T(h)x - x \|$$

$$\leq Me^{w(t_0-h)} \| T(h)x - x \|,$$

ainsi on obtient la continuité, en t_0, de l'application. $\square$

Proposition 1.1. *.[2] Soient $\{T(t)\} \in SG(M,w)$ et A son générateur infinitésimal. Alors : Si $x \in D(A)$, alors $T(t)x \in D(A)$ et on a*

$$T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall t \geq 0$$

Preuve. Soit $x \in D(A)$. Alors, pour tout $t, h \geq 0$ on a :

$$T(t)Ax = T(t) \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h}$$

$$= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h}$$

Donc $T(t)x \in D(A)$ et on a

$$T(t)Ax = AT(t)x \quad \forall t \geq 0 \qquad \square$$

Théorème 1.3. *.[2] Soient $\{T(t)\} \in SG(M,w)$ et A son générateur infinitésimal. Alors l'application*

$$t \in [0, \infty] \longrightarrow T(t)x \in E$$

est dérivable sur $[0, \infty], \forall x \in D(A)$, et on a

i) $\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x$;

ii) $T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds, \quad \forall t \geq 0.$

Preuve.

i) Soient $x \in D(A), t \geq 0, h > 0$. Alors :
Si $h \geq t$, on a

$$\| \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax \| \leq \| T(t) \| \| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \|$$

$$\leq Me^{wt} \parallel \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \parallel,$$

par conséquent,

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax$$

d'où $\frac{d+}{dt}T(t)x = T(t)Ax, \quad \forall t \geq 0.$

Si $t \geq h$, alors on a

$$\parallel \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax \parallel \leq \parallel T(t-h) \parallel \parallel \frac{T(h)x - x}{h} - Ax + Ax - T(h)Ax \parallel$$

$$\leq Me^{w(t-h)}(\parallel \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \parallel + \parallel T(h)Ax - Ax \parallel).$$

Donc $\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = T(t)Ax$, d'où

$$\frac{d-}{dt}T(t)x = T(t)Ax, \quad \forall t > 0.$$

Puisque, l'application est aussi dérivable en 0, on a pour $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall x \in D(A).$$

ii) Si $x \in D(A)$, alors

$$\frac{d}{ds}T(s)x = T(s)Ax, \quad \forall s \in [0,t], \ t \geq 0$$

donc

$$\int_0^t T(t)Axdx = \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)xds = T(t)x - x, \quad \forall t \geq 0 \qquad \square.$$

Remarque 1.2. .[2]

i) Il résulte de la continuité de l'application $t \in [0, \infty[\longrightarrow T(t)x \in E$ que si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe, on a

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

ii) Si l'application définie dans le théorème(1.3) est dérivable pour tout $x \in E$, le C_0-semi-groupe est dit différentiable.

Proposition 1.2. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M, w)$ et A son générateur infinitésimal. Alors si $x \in E$ on a*

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A)$$

et

$$A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. Soient $x \in E$ et $h > 0$. Alors

$$\frac{T(h) - I}{h}\int_0^t T(s)xds = \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds$$

$$= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds$$

$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds.$$

Par passage à la limite, on obtient

$$A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x, \quad \forall t \geq 0$$

et

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A). \qquad \square$$

Théorème 1.4. *.[2] Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,w)$. Alors*

i) $\overline{D(A)} = E$;

ii) A est un opérateur férmé.

iii) Le semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est unique.

Preuve.

i) Soient $x \in E$ et $t_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$ telle que $\lim_{n\longrightarrow\infty} t_n = 0$. Alors

$$x_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds \in D(A),$$

donc

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = T(0)x = x.$$

Par conséquent, $\overline{D(A)} = E$.

ii) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} Ax_n = y.$$

Alors

$$\begin{aligned}\| T(s)Ax_n - T(s)y \| &\leq \| T(s) \| \| Ax_n - y \| \\ &\leq Me^{wt} \| Ax_n - y \|, \quad \forall s \in [0,t].\end{aligned}$$

Par suite, pour $s \in [0,t]$, $\ T(s)Ax_n$ converge uniformément vers $T(s)y$, et on a aussi

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_nds,$$

donc

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(T(t)x_n - x_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^t T(s)Ax_nds$$

ou bien

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds.$$

Finalement,

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y = y.$$

On a donc $x \in D(A)$ et $Ax = y$, d'où A est un opérateur férmé.

iii) Supposons qu'il existe un autre semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A. Alors, pour tout $t \geq 0$ et $x \in D(A)$, on a

$$\frac{d}{ds}(T(t-s)S(s)x) = T(t-s)AS(s) - T(t-s)AS(s) = 0, \forall s \in [0,t]$$

donc $T(t-s)S(s)x$ est constante, $\forall s \in [0,t]$. Par conséquent, $T(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in D(A)$. Puisque $t \geq 0$ est arbitraire et $\overline{D}(A) = E$ donc $T(t)x = S(t)x$ pour tout $t \geq 0$ et $x \in E$. Finalement $T(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0$.

$\square$

Remarque 1.3. .[2] Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe, A son générateur infinitésimal et $F \in B(E)$. Aolrs
$T(t)F = FT(t)$ pour tout $t \geq 0$ si, et seulement si, $FD(A) \subseteq D(A)$ et $FAx = AFx, \quad \forall x \in D(A)$.

Chapitre 2

Spectre d'un opérateur linéaire et résolvante

2.1 Spectre d'un opérateur linéaire borné

Définition 2.1. Pour $A \in L(E)$, le sectre de A est la partie de $\mathbb{C}$ définie par

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \lambda I - A \text{ n'est pas inversible dans } L(E)\}.$$

Les éléments de $\sigma(A)$ sont appelés valeurs spectrales.

Remarque 2.1. .[6] Puisque A est inversible si et seulement si A est bijectif donc

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \lambda I - A \text{ n'est pas bijectif}\}.$$

Définition 2.2. .[6] -L'ensemble des valeurs propres de $A \in L(E)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ n'est pas injectif .

-L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre ponctuel de A et est noté $\sigma_p(A)$.

-Un vecteur $u \in E$ non nul tel que $Au = \lambda u$ est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Enfin, on appelle multiplicité de la valeur propre λ la dimension de $Ker(\lambda I - A)$.

Lemme 2.1. *.[2] Si $A \in B(E)$ et $\|A\| < 1$, alors $(I - A) \in GL(E)$ et*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

.

Preuve. Posons $Y_n = I+A+A^2+A^3.........+A^n$. Alors :

$$\| Y_{n+p} - Y_n \| \leq \frac{\| A \|^{n+1}}{1- \| A \|} \quad pour \quad n \longrightarrow \infty.$$

Par consèquent, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Mais *B(E)* est une algèbre de Banach. Donc la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, soit $Y \in B(E)$ sa limite. De l'égalité $(I - A)Y_n = I - A^{n+1}$, il resulte que $\lim_{n\longrightarrow\infty}(I - A)Y_n = \mathrm{I}$, d'où $(I - A)Y$=I. Nous obtenons, de façon analogue, $Y(I - A) = I$. Finalement, $I - A \in GL(E)$ et on a bien

$$Y(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n. \qquad \square$$

Remarque 2.2. .[2] Si $\| I - A \| < 1$, alors $A \in GL(E)$ et

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - A)^n$$

.

Proposition 2.1. *.[2] Soit $A \in B(E)$. Alors $\sigma(A)$ est un ensemble compact .*

Preuve. L'ensemble $(\sigma(A))^c$ est l'image réciproque de l'ouvert $GL(E)$ par l'application

$$\mathbb{C} \longrightarrow L(E)$$

$$\lambda \longrightarrow \lambda I - A.$$

C'est donc un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\sigma(A)$ est férmé dans $\mathbb{C}$. De plus, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $| \lambda | > \| A \|$. Alors $\lambda I - A = \lambda(I - \frac{1}{\lambda}A)$ et $\| \frac{1}{\lambda}A \| < 1$. Donc $\lambda I - A$ est aussi inversible. Alors $\lambda \notin \sigma(A)$. Ainsi on a $\sigma(A) \subset \overline{D}(0, \| A \|)$ et $\sigma(A)$ est borné. C'est donc un fermé borné de $\mathbb{C}$. Par conséquent, il est compact. $\square$

Définition 2.3. .[6] L'ensemble

$$(\sigma(A))^c = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A)^{-1}\text{est inversible dans B(E)}\}$$

s'appelle l'ensemble résolvant de A $\in$ *B(E)* qu'on note $\rho(A)$.

Définition 2.4. .[2] L'application

$$R(.;A) : \rho(A) \longrightarrow B(E)$$

$$R(\lambda;A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

s'appelle la résolvante de A

Nous allons maintenant donner les propriétés de la résolvante d'un opérateur linéaire A .

Proposition 2.2. *.[2] La résolvante d'un opérateur linéaire $A \in B(E)$, a les propriétés suivantes :*
i) *Si* $\lambda, \mu \in \rho(A), alors$

$$R(\lambda;A) - R(\mu;A) = (\mu - \lambda)R(\lambda;A)R(\mu;A);$$

ii) *R(. ; A) est une application analytique sur $\rho(A)$;*
iii) *si $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\mid \lambda \mid > \parallel A \parallel$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et nous avons*

$$R(\lambda;A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \;;$$

iv) *nous avons*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda;A) = (-1)^n n! R(\lambda;A)^{n+1} \textit{ quels que soient } n \in \mathbb{N}^* \quad \textit{et} \quad \lambda \in \rho(A).$$

Preuve. i) On a

$$\begin{aligned} R(\lambda;A) - R(\mu;A) &= (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} \\ &= (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A - \lambda I + A)(\mu I - A)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda;A)R(\mu;A) \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(A); \end{aligned}$$

ii) Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$. Notons D$(\lambda_0; \frac{1}{\|R(\lambda_0;A)\|})$ le disque ouvert de centre λ_0 et de rayon $\frac{1}{\|R(\lambda_0;A)\|}$. Alors, pour $\lambda \in D(\lambda_0; \frac{1}{\|R(\lambda_0;A)\|})$ nous avons :

$$(\lambda I - A) = [I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)](\lambda_0 I - A).$$

Mais, nous avons :

$$\| (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A) \| = | \lambda_0 - \lambda | . \| R(\lambda_0; A) \| < 1.$$

Compte tenu du lemme 2.1, il résulte que :

$$I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A) \in GL(E),$$

d'où $\lambda I - A \in GL(E)$ et :

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{-1} &= (\lambda_0 I - A)^{-1}[I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)]^{-1} \\ &= R(\lambda_0; A)\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; A)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; A)^{n+1}.\end{aligned}$$

Donc R(. ;A) est analytique sur $\rho(A)$.

iii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $| \lambda | > \| A \|$. Alors $\| \lambda^{-1}A \| < 1$, d'où $I - \lambda^{-1}A \in GL(E)$. De plus :

$$(I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}A)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n} .$$

Par conséquent :

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}} .$$

iv) Pour cela, nous procédons par récurrence. Pour $n = 1$, nous avons :

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda, A) = \frac{d}{d\lambda}(\lambda I - A)^{-1} = -(\lambda I - A)^{-2} = -R(\lambda; A)^2.$$

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}.$$

montrons que :

$$\frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} R(\lambda, A) = (-1)^{n+1} (n+1)! R(\lambda, A)^{n+2}.$$

Nous avons :

$$\frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} R(\lambda, A) = \frac{d}{d\lambda} (\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A))$$

$$= \frac{d}{d\lambda} [(-1)^n n! (\lambda I - A)^{-n-1}]$$

$$= (-1)^n n! (-n-1)(\lambda I - A)^{-n-2}$$

$$= (-1)^{n+1} (n+1)! R(\lambda; A)^{n+2}$$

et par conséquent :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad \square$$

Remarque 2.3. .[2] De la propriété (iii) de la proposition 2.2, il résulte que :

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ | \lambda | > \| A \| \} \subset \rho(A) \ .$$

Définition 2.5. Pour un opérateur linéaire $A \in B(E)$, le nombre

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \ \sigma(A)} | \lambda |$$

s'appelle le rayon spectral de A .

Remarque 2.4. .[6] Pour un opérateur $A \in B(E), \sigma(A)$ est contenu dans le cercle de centre O et de rayon r(A). de plus, on peut montrer que

$$r(A) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel A^n \parallel^{\frac{1}{n}} .$$

2.2 Spectre d'un opérateur linéaire férmé

Maintenant, nous allons présenter quelques notions de la théorie spectrale pour un opérateur linéaire férmé $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$.

Définition 2.6. .[2] L'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A : D(A) \longrightarrow E \text{ est un opérateur bijectif}\}$$

s'appelle l'ensemble résolvant de A.

Remarque 2.5.

i) $\rho(A)$ est un ensemble ouvert[2] et $\sigma(A)$ est un ensemble férmé[2] ;

ii) L'opérateur linéaire $(\lambda I - A)$ est continu et bijectif dans E , donc l'opérateur

$$(\lambda I - A)^{-1} : E \longrightarrow E$$

est continu dans E.

Définition 2.7. .[2] L'application

$$R(.; A) : \rho(A) \longrightarrow B(E)$$

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}, \quad pour \lambda \in \rho(A).$$

s'appelle la résolvante de A.

Proposition 2.3. *.[4] Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$, un opérateur linéaire férmé. Alors*

i) R(. ; A) est une application analytique sur $\rho(A)$;

ii) si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, alors

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A);$$

iii) nous avons

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1} \text{ quels que soient } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lambda \in \rho(A).$$

Preuve. Elle est analogue à celle de la proposition(2.2). $\square$

Remarque 2.6. Il existe des opérateurs ayant un spectre non borné.

Exemple 2.1. .[2] Prenons E=$C([0,1])$ et considérons l'opérateur

$$D : C^1([0,1]) \longrightarrow E$$

défini par

$$Df = f'.$$

Dans ce cas, nous avons $\sigma(D) = \mathbb{C}$.

Chapitre 3

Théorie spectrale des semi-groupes

3.1 Théorie spectrale des semi-groupes uniformément continus

Dans ce paragraphe nous donnerons quelques propriétés spectrale des semi-groupe et nous allons voir à quelles conditions un opérateur linéaire soit un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe.

Théorème 3.1. *.[2] Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu et A son générateur infinitésimal. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \| A \|$. Alors l'application*

$$R_\lambda : E \longrightarrow E$$

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt$$

définit un opérateur linéaire borné. De plus $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda; A)x, \quad \forall x \in E$

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \| A \|$. On a

$$\| T(t) \| \leq e^{t\|A\|}, \quad \forall t \geq 0.$$

Donc

$$\| e^{-\lambda t} T(t) x \| \leq e^{-((Re\lambda - \|A\|)t} \| x \|, \quad \forall x \in E,$$

et

$$\int_0^\infty e^{-(Re\lambda - \|A\|)t} = \frac{1}{Re\lambda - \| A \|}.$$

Alors l'application R_λ est linéaire et bornée, de plus on a
pour $x \in E$,

$$R_\lambda Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{dT(t)}{dt}xdt$$

$$= -x + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x$$

$$= -x + \lambda R_\lambda x.$$

Donc $x = R_\lambda(\lambda I - A)x, \quad \forall x \in E$, par conséquent, $R_\lambda(\lambda I - A) = I$.
On a aussi,

$$AR_\lambda x = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)xdt$$

$$= R_\lambda Ax \qquad \forall x \in E.$$

On a ainsi, $AR_\lambda x = R_\lambda Ax = -x + \lambda R_\lambda x,\ \forall x \in E$. Donc $(\lambda I - A)R_\lambda = I$.
Finalement, $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda = R(\lambda; A)$. $\square$

Définition 3.1. .[2] L'application

$$R_\lambda : E \longrightarrow E,$$

définie par

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt, \lambda \in \mathbb{C}$$

avec $R_\lambda \geq \| A \|$, s'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A.

Remarque 3.1. .[2] On a

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re\lambda >\parallel A \parallel\} \subset \rho(A)$$

et

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re\lambda \leq\parallel A \parallel\},$$

on obtient donc

$$\parallel R(\lambda, A) \parallel\leq \frac{1}{Re\lambda- \parallel A \parallel}$$

$\forall\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda >\parallel A \parallel$.

Maintenant, avant d'énoncer un résultat qui nous donne une formule pour calculer T(t) à partir d'un générateur A, nous introduisons la définition suivante :

Définition 3.2. .[2] Un contour de Jordan lisse et fermé qui entoure $\sigma(A)$, s'appelle un contour de Jordan A-sectral s'il est homotope avec un cercle de centre O et de rayon $r >\parallel A \parallel$.

Théorème 3.2. *.[2] Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.*
Si Γ_A est un contour de Jordan A-spectral, alors on a

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. Si Γ_A est un contour de Jordan A-spectral alors il est homotope avec un cercle C_r de centre O et de rayon $r >\parallel A \parallel$. Donc on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda.$$

D'autre part, on a

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

qui est une série convergente par rapport à λ sur les sous-ensembles compacts de $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ \mid \lambda \mid >\parallel A \parallel\}$, en particulier sur C_r et on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} \sum_{0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{n+1}} d\lambda A^n$$

En appliquant la formule de Cauchy[7], avec la fonction $f(\lambda) = \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{n+1}}$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{n+1}} d\lambda = \frac{t^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

donc,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = e^{tA} = T(t), \quad \forall t \geq 0. \qquad \square$$

3.2 Théorie spectrale des semi-groupes fortement continus

Avant de donner à quelles conditions un opérateur linéaire soit un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe nous introduisons, sans démonstration, les résultats suivants

Proposition 3.1. *.[2]*

a- *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M, w)$ *un semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal. Alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re\lambda > w$ *on a*

$$\| R(\lambda, A)^n \| \leq \frac{M}{(Re\lambda - w)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ avec\ R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

b- *Pour un opérateur linéaire* A *vérifiant la propriété (**a**) on a pour tout* $\lambda \in \mathbb{C} \ \ / \ \ Re\lambda > w$

$$\lim_{Re\lambda \longrightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in E,$$

de plus, $\lambda AR(\lambda, A) \in B(E)$ *et*

$$\lim_{Re\lambda \longrightarrow \infty} \lambda AR(\lambda, A)x = Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

La famille $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_w}$ *où* $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)x$ *pour tout* $\lambda \in \Lambda_w$ *s'appelle l'approximaton généralisée de Yosida de l'opérateur* A*, avec* $\Lambda_w = \{\lambda \in \mathbb{C} \;\; / \;\; Re\lambda > w\}$

c- *Soit* $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ *un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes*

c1-) *A est un opérateur férmé et* $\overline{D(A)} = E$

c2-) *A vérifie la propriété (**a**).*

Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda w}$ *est l'aproximation généralisée de Yosida de l'operateur* A*, alors pour tout* $\alpha, \beta \in \Lambda_w$ *ona*

$$\| e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x \| \leq M^2 te^{wt} \| A_\alpha x - A_\beta x \|, \quad \forall x \in E, \; t \geq 0.$$

Définition 3.3. Un opérateur linéaire A est dit

1) dissipatif si
$$\| (\lambda I - A)x \| \geq \lambda \| x \|, \quad \forall \lambda > 0, \quad x \in D(A).$$

2) Maximal si $R(I - A) = \{y \in E \;\; / \;\; \exists x \in D(A), \;\; y = Ax\} = E$.

3) m-dissipatif si A est dissipatif et existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 I - A) = E$.

Remarque 3.2. .[3] Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel $Im(\lambda_0 I - A) = E$ alors $\forall\lambda > 0$ on a $Im(\lambda I - A) = E$.

Théorème 3.3. ***(Hille-Yosida)****.[3] Un opérateur linéaire* $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$*, est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M, w)$ *si, et seulement si*
i) A est férmé et $\overline{D(A)} = E$.
ii) $\exists w \geq 0, \;\; M \geq 1, \; \Lambda_w \subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda \in \Lambda_w$ *on a*

$$\| R(\lambda, A)^n \| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve. $\Longrightarrow$ On obtient cette implication en utilisant la proposition (3.1) et le théorème (1.4)

$\Longleftarrow$ Supposons maintenant que les conditions i) et ii) sont vérifiées. Soit $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_w}$ l'approximation de Yosida de l'opérateur A. De la proposition (1.3), on a $A_\lambda \in B(E)$ et

$$\lim_{Re\lambda\longrightarrow\infty} A_\lambda x = Ax, \quad x \in D(A).$$

Pour $\lambda \in \Lambda_w$, soit $\{T(t)\}_{t\geq} = e^{tA_\lambda}$ le semi-groupe engendré par A_λ. avec la proposition (1.3) on a

$$\| T_\alpha(t)x - T_\beta(t)x \| \leq M^2 te^{wt} \| A_\alpha x - A_\beta x \|,$$

pour $\alpha,\ \beta \in \Lambda_w,\ x \in D(A)$ et $t \geq 0$.
Soient $[D(A)]$ l'espace de Banach de $D(A)$ avec la norme

$$\| \,.\, \|_{D(A)} = \| x \| + \| Ax \|$$

et $B([D(A)], E)$ l'espace des opérateurs bornés sur $[D(A)]$ à valeurs dans E muni de la topologie forte. Notons par $C([0,\infty[, B([D(A)], E))$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0,\infty[$ à valeurs dans $B([D(A)], E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de $[0,\infty[$. Si $[a,b] \subset [0,\infty[$, alors pour tout $x \in D(A)$ nous avons

$$\sup_{t\in[a,b]} \| T_\alpha(t)x - T_\beta(t)x \| \leq M^2 be^{wb} \| A_\alpha x - Ax \| + \| A_\beta x - Ax \| \longrightarrow 0 \text{ si } Re\alpha,\ Re\beta \longrightarrow \infty,$$

d'où $(\{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0})_{\lambda\in\Lambda_w}$ est une suite de Cauchy dans $C([0,\infty[, B([D(A)], E))$, donc il existe un unique $T_0 \in C([0,\infty[, B([D(A)], E))$ tel que $T_\lambda(t)x \longrightarrow T_0(t)x$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de $[0,\infty[$. Puisque $\| T_\lambda(t) \| \leq Me^{wt}$, $\forall t \geq 0$ on obtient

$$\| T_0(t)x \| \leq Me^{wt} \| x \|, \quad \forall t \geq 0,\ x \in D(A).$$

Considérons l'application linéaire

$$Q_0 :\ D(A) \longrightarrow C([a,b], E)$$

telle que

$$Q_0(x) = T_0(.)x, \quad \forall [a,b] \subset [0,\infty[.$$

Comme on a

$$\| Q_0 x \| = \sup_{t\in[a,b]} \| T_0(t)x \|$$

$$\leq Me^{wb} \parallel x \parallel$$

$$\leq Me^{wb} \parallel x \parallel_{D(A)}, \quad \forall x \in D(A),$$

donc Q_0 est continue et puisque $\overline{D(A)} = E$ alors Q_0 se prolonge de façon unique en une application linéaire continue $Q: \ E \longrightarrow C([a,b], E)$ telle que

$$Q|D(A) = Q_0$$

et

$$\parallel Qx \parallel_{C([a,b],E)} \leq Me^{wb} \parallel x \parallel, \quad \forall x \in E.$$

Par conséquent, il existe un seul opérateur linéaire $T \in C([a,b], B(E))$ tel que $Qx = T(.)x$.

On peut répéter ce procédé pour tout les intervalles compacts de $[0, \infty]$ et voit qu'il existe un seul opérateur linéaire, noté aussi $T \in C([a,b], B(E))$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $T_\lambda(t)x \longrightarrow T(t)x$ si $Re\lambda \longrightarrow \infty$ uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0, \infty[$. De plus

$$\parallel T(t) \parallel \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Il vient donc que

$$T(0)x = \lim_{Re\lambda \longrightarrow \infty} T_\lambda(0)x = x, \quad \forall x \in E$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{t \longrightarrow 0} T(t)x &= \lim_{t \longrightarrow 0} [\lim_{Re\lambda \longrightarrow \infty} T_\lambda(t)x] \\ &= \lim_{Re\lambda \longrightarrow \infty} [\lim_{t \longrightarrow 0} T_\lambda(t)x] = x, \quad \forall x \in E.\end{aligned}$$

Soient $t, s \in [0, \infty[$ et $x \in E$. Alors

$$\parallel T(t+s)x - T(t)T(s)x \parallel \leq \parallel T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x \parallel + \parallel T_\lambda(t+s)x - T_\lambda(t)T(s)x \parallel$$

$$+ \parallel T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x \parallel$$

$$\leq \parallel T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x \parallel + \parallel T_\lambda(t) \parallel \parallel T_\lambda(s)x - T(s)x \parallel$$

$$+ \parallel T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x \parallel .$$

Puisque $T_\lambda(t) \longrightarrow T(t), \quad si\ Re\lambda \longrightarrow \infty$ pour la topologie forte de $B(E)$, il s'ensuit que $T(t+s)x = T(t)T(s)x, \quad \forall x \in E$, par conséquent $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,w)$.

Montrons que A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Pour tout $x \in D(A)$ on a

$$\parallel T_\lambda(s)A_\lambda x - T(s)Ax \parallel \leq \parallel T_\lambda(s) \parallel\parallel A_\lambda x - Ax \parallel + \parallel T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax \parallel$$

$$\leq Me^{wt} \parallel A_\lambda x - Ax \parallel + \parallel T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax \parallel,$$

qui converge vers 0 lorsque $Re\lambda$ tend vers ∞, uniformément par rapport à $s \in [0,t]$. D'où

$$T(t)x - x = \lim_{Re\lambda \longrightarrow \infty} [T_\lambda(t)x - x]$$

$$= \lim_{Re\lambda \longrightarrow \infty} \int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda x ds$$

$$= \int_0^t T(s)Axds, \quad \forall x \in D(A)\ et\ t \geq 0.$$

Soit B le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si $x \in D(A)$, alors

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Axds = Ax$$

et nous voyons que $x \in D(B)$, par conséquent, $D(A) \subset D(B)$ et $B|D(A) = A$. D'autre part, on a l'inégalité

$$\parallel T(t) \parallel \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Si $\lambda \in \Lambda_w$, alors $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Soit $x \in D(B)$, on a donc $(\lambda I - B)x \in E$ et comme l'opérateur $(\lambda I - A) : D(A) \longrightarrow E$ est bijectif, il existe $x' \in D(A)$ tel que $(\lambda I - A)x' = (\lambda I - B)x$. Puisque $B|D(A) = A$, il vient que $(\lambda I - B)x' = (\lambda I - B)x$ et comme $\lambda \in \rho(B)$ il en résulte que $x' = x$. Par suite, $x \in D(A)$ et donc $D(B) \subset D(A)$

donc $D(A) = D(B)$ et $A = B$.

Ainsi, A est le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, et grâce à l'unicité de l'engendrement, ce semi-groupe est unique. $\square$

Théorème 3.4. ***(Lumer, Phillips)****.[3] Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire tel que $\overline{D(A)} = E$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) A génére un semi-groupe de contractions, c.à.d un C_0-semi-groupe satisfaisant

$$\| T(t) \| \leq 1, \quad \forall t \geq 0;$$

b) A est m-dissipatif .

Preuve.

i) [3].

2) Supposons que A est m-dissipatif à domaine dense dans E. Alors $\exists \lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 I - A) = E$. De la remarque (3.2) on obtient $Im(\lambda I - A) = E, \quad \forall \lambda > 0$. Donc $]0, \infty[\subset \rho(A)$, et comme A est dissipatif, il vient que

$$\| (\lambda I - A) \| \geq \lambda \| x \|, \quad \forall x \in D(A).$$

D'où

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Par le théorème (3.3) on voit que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(1, 0)$. $\square$

Introduisons maintenant la transformée de Laplace pour un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M, w)$.

Théorème 3.5. *.[3] Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,w)$ et A son générateur infinitésimal. Si $\lambda \in \Lambda_w$, alors l'application*

$$R_\lambda : E \longrightarrow E$$

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt$$

définit un opérateur linéaire borné sur E, pour $\lambda \in \rho(A)$. Et on a

$$R_\lambda x = R(\lambda, A)x, \quad \forall\ x \in E.$$

Preuve. Soit $\lambda \in \Lambda_w$. Puisque $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,w)$, alors on a

$$\| T(t) \| \leq M e^{wt}, \quad \forall t \geq 0$$

et on voit que

$$\| e^{-\lambda t} T(t) x \| \ \leq e^{-Re\lambda t} \| T(t) \| \| x \| \ \leq M e^{-(Re\lambda - w)t} \| x \|, \quad \forall x \in E.$$

Définissons l'application

$$R_\lambda : E \longrightarrow E$$

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt.$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire, de plus on a

$$\| R_\lambda x \| \leq \int_0^\infty \| e^{-\lambda t} T(t) x dt \|$$

$$\leq \frac{M}{Re\lambda - w} \| x \|, \quad \forall x \in E,$$

d'où il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné.
Si $x \in E$, alors on a

$$\frac{T(h) R_\lambda x - R_\lambda x}{h} = \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h) x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

$$= \frac{e^{\lambda h}}{h}[\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds - \int_0^h e^{-\lambda s}T(s)xds] - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

$$= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}T(s)xds,$$

par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} = \lambda R_\lambda x - x.$$

Il en résulte que $R_\lambda x \in D(A)$, $AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x$ ou bien $(\lambda I - A)R_\lambda x = x$, $\forall x \in E$.
Si $x \in D(A)$, alors on obtient

$$R_\lambda Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}T(t)xdt$$

$$= [e^{-\lambda t}T(t)x]_0^\infty + \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

$$= -x + \lambda R_\lambda x,$$

d'où $R_\lambda(\lambda I - A)x = x$, $\forall x \in D(A)$.
Finalement, on voit que $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda; A)x$, $\forall x \in E$. $\square$

Définition 3.4. .[2] L'opérateur

$$R_\lambda : E \longrightarrow E$$

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

pour $\lambda \in \Lambda_w$,

Chapitre 4

Equations différentielles linéaires et semi-groupes

4.1 Problème de Cauchy et solution classique

Soient E un espace de Banach et A un opérateur linéaire défini sur un sous-ensemble $D(A)$ de E.
On se donne une fonction $U(.) \in E$. Soit t une variable représentant le temps telle que $U(t=0) = U_0$, et considèrons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = AU(t) \qquad pour \;\; t > 0; \\ \\ U(0) = U_0. \end{cases} \qquad \textbf{(PCA)}$$

Définition 4.1. (Solution classique)

i) Le problème **(PCA)** est dit le problème de Cauchy abstrait associé à l'opérateur $A : D(A) \longrightarrow E$ et à la valeur initiale U_0;

ii) La fonction $U : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ est dite solution (classique) du problème **(PCA)** si U est continuement différentiable, $U(t) \in D(A), \;\; \forall t \geq 0$, et vérifie **(PCA)**.

Théorème 4.1. *.[1] Soit A un opérateur linéaire à domaine dense dans E, avec $\rho(A) \neq \emptyset$. Alors le problème* ***(PCA)*** *a une unique solution classique pour tout $U_0 \in D(A)$ si, et seulement si, A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in E$.*

Preuve. *La condition est suffisante :*
Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in E$, alors pour $U_0 \in D(A)$ on a $T(t)U_0 \in D(A)$, de plus

$$\frac{d}{dt}T(t)U_0 = AT(t)U_0 = T(t)AU_0.$$

Ainsi la fonction U définie par $U(t) = U(t, U_0) = T(t)U_0$, *pour* $t \geq 0$, satisfait les propriétés de la définition, donc c'est une solution du problème **(PCA)**. Puisque on a l'unicité de l'engendrement, donc cette solution est unique.

La condition est nécéssaire :
Supposons maintenant que le problème **(PCA)** a une unique solution classique $U(t) = U(t, U_0)$, $t \geq 0$, $\forall\ U_0 \in D(A)$. On montre que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in E$. Puisque $\rho(A) \neq \emptyset$ donc A est férmé, et aussi $D(A)$.
En munissant $D(A)$ de la norme

$$\| U \|_D = \| U \|_E + \| AU \|_E, \quad U \in D(A),$$

on voit que $(D(A), \| \,.\, \|_{D(A)})$ est un espace de Banach, on le note $[D(A)]$.
Soit l'espace $C(I, [D(A)])$ des fonctions continues et définies de $I = [0, a]$, avec $a \in]0, \infty[$, à valeurs dans $[D(A)]$ muni de la norme

$$\| U \|_C = \sup\{\| U(t) \|_D, \quad t \in I\}$$

c'est aussi un espace de Banach.

Introduisons l'opérateur $S : [D(A)] \longrightarrow C(I, [D(A)])$ défini par

$$(SU_0)(t) = U(t, U_0), \quad t \in I, \quad pour \quad tout \quad U_0 \in D(A).$$

Il est linéaire et férmé. En effet
Pour la linéarité, grâce à l'unicité de la solution, on a si $U_0 + V_0$ est la condition initiale de U alors $U(t, U_0 + V_0) = U(t, U_0) + U(t, +V_0)$,

Maintenant, soient $\{U_{0,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \in [D(A)]$ telle que $U_{0,n} \longrightarrow U_0$ dans $([D(A)], \| \,.\, \|_D)$ et $SU_{0,n} \longrightarrow y$ dans $(C(I, [D(A)]), \| \,.\, \|_C)$.
Montrons que $y = SU_0$. Par hypothèse, $(SU_{0,n})(t) = U(t, U_{0,n})$, $t \in I$, est une solution du problème **(PCA)** associée à la valeur initiale $U_{0,n} \in D(A)$. Puisque $U(t, U_{0,n}) \in D(A)$, *pour* $t \in I$, alors on peut écrire $U(t, U_{0,n})$ sous la forme

$$U(t, U_{0,n}) = U_{0,n} + \int_0^t AU(r, U_{0,n})dr$$

qui est équivalent à

$$(SU_{0,n})(t) = U_{0,n} + \int_0^t A(SU_{0,n})(r)dr.$$

En faisant tendre n vers l'infini et en utilisant le fait que A est férmé et $SU_{0,n} \longrightarrow y$ on obtient

$$y(t) = U_0 + \int_0^t Ay(r)dr.$$

De l'unicité de la solution, on aura

$$y(t) = U(t, U_0) = (SU_0)(t), \quad pour\ t \in I,$$

par conséquent $y = SU_0$, et S est un opérateur linéaire férmé de $[D(A)]$ à valeurs dans $C(I, [D(A)])$. Avec le théorème du graphe férmé il résulte que S est borné.
On pose $T(t)U_0 = (SU_0)(t), \quad t \in I$, une application linéaire de $[D(A)]$ à valeurs dans $[D(A)]$. Puisque S est borné on obtient

$$\sup_{t\in I} \| T(t)U_0 \|_D = \sup_{t\in I} \| (SU_0)(t) \|_D \leq L \| U_0 \|_D,$$

pour $L > 0$, une constante indépendente de U_0. Soient s,t tels que $s + t \in I$. Alors

$$U(t + s, U_0) = U(t, U(s, U_0)) = U(s, U(t, U_0)),$$

par conséquent,

$$T(t + s)U_0 = T(t)T(s)U_0 = T(s)T(t)U_0.$$

Nous allons maintenant prolonger l'opérateur T à l'exterieur de I.
Pour $t > a$ et $na \leq t < (n + 1)a$, on définit $T(t) = T(t - na)(T(a))^n$, qui est défini pour tout $t > 0$, On voit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe dans l'espace de Banach $[D(A)]$, donc $\exists M \geq 1,\ w \in \mathbb{R}$ tels que

$$\| T(t) \|_{L(D(A))} \leq Me^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Montrons que $T(t),\ t \geq 0$, peut être prolongé de $[D(A)]$ à $E \supset D(A)$. Pour cela on utilise le prolongement par continuité. Montrons que

$$\exists K/ \ \ 0 < K < \infty \ \ / \quad \| T(t)U \| \leq K \| U \| e^{wt}, \quad t \geq 0, \quad \forall\, U \in D(A).$$

Pour $U \in D(A)$ et $\lambda \in \rho(A)$, on a l'équation $(\lambda I - A)y = U$ a une unique solution $y \in D(A^2) = \{x \in D(A) \ / \ \ Ax \in D(A)\}$ et elle est donnée par $y = R(\lambda, A)U$. Ainsi

$$\| T(t)U \| = \| T(t)(\lambda I - A)y \|$$

$$\leq | \lambda | \| T(t)y \| + \| T(t)Ay \| .$$

En admettant, pour l'instant, que $T(t)Ay = AT(t)y$, on a

$$\begin{aligned} \| T(t)U \| &\leq (| \lambda | +1) \| T(t)y \|_D \\ &\leq (| \lambda | +1)M \| y \|_D e^{wt}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

puisque $R(\lambda, A)$ et $AR(\lambda, A)$ sont bornés donc
$\exists C > 0$ tel que

$$\| y \|_D = \| y \| + \| Ay \|$$

$$= \| R(\lambda, A)U \| + \| AR(\lambda, A)U \|$$

$$\leq C \| U \| .$$

Finalement, pour $K = CM(1 + \lambda)$, on aura l'inégalité en question.

Montrons maintenant que $T(t)Ay = AT(t)y$.
Pour $y \in D(A^2)$, la fonction $U(t, Ay), \; t \geq 0$ est l'unique solution de classe C^1 du problème **(PCA)** associé à la valeur initiale $U_0 = Ay$, ainsi $U(t, Ay) = T(t)Ay$.
On définit

$$W(t) = y + \int_0^t U(r, Ay)dr.$$

On a W est de classe C^1 et $\frac{d}{dt}W = U(t, Ay)$, d'autre part, puisque U est de classe C^1 à valeurs dans $D(A)$ et A étant férmé, on a

$$U(t, Ay) = Ay + \int_0^t \frac{d}{dt}U(r, Ay)dr$$

$$= Ay + \int_0^t AU(r, Ay)dr$$

$$= A(y + \int_0^t U(r, Ay)dr) = AW.$$

Donc $\frac{d}{dt}W = AW$ et $W(0) = y$, par conséquent $W(t) = T(t)y, \quad t \geq 0$.
En combinant ces résultat on obtient

$$AT(t)y = AW(t) = U(t, Ay) = T(t)Ay, \quad t \geq 0.$$

finalement, par le principe du prolongement par continuité, on peut prolonger $T(t), \quad t \geq 0$, à un C_0-semi-groupe noté aussi $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, car $\overline{D}(A) = E$.

Il reste à montrer que A est le générateur infinitésimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.
Puisque $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in E$ est un C_0-semi-groupe donc il existe un unique opérateur A_1 borné, générateur de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ tel que $\overline{D}(A_1) = E$, donc

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h}(T(t)x - x) = A_1 x, \quad x \in D(A_1).$$

D'autre part, on a $T(t)x = U(t, x) \in D(A)$ et $\frac{d}{dt}T(t)U \mid_{t=0} = AU$.
Par conséquent, $A_1 x = Ax, \quad \textit{pour } x \in D(A)$, donc A est la restriction de A_1 à $D(A)$ ou encore $A \subset A_1$.
Montrons maintenant l'inclusion inverse.
Pour $\lambda > w$ et $x \in D(A^2)$, on voit que

$$e^{-\lambda t} AT(t)x = e^{-\lambda t} T(t)Ax = e^{-\lambda t} T(t)A_1 x, \quad t \geq 0.$$

En intégrant sur $[0, \infty[$ on obtient

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} AT(t)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)A_1 x,$$

et puisque A est férmé, il s'ensuit que

$$AR(\lambda, A_1)x = R(\lambda, A_1)A_1 x = A_1 R(\lambda, A)x.$$

Cette dérnière égalité est provenue du fait que $x \in D(A^2) \subset D(A) \subset D(A_1)$ et que A_1 se commute avec sa résolvante, de plus l'égalité est vérifiée pour tout $x \in E$, car $\overline{D}(A) = E$.
Ainsi on conclut que

$$AU = A_1 U, \quad \forall U \in D(A_1),$$

ce que implique que $A_1 \subset A$ ou encore A_1 est la restriction de A à $D(A_1)$, donc $A_1 = A$.

Finalement, on voit que A est le générateur infinitésimal de C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. $\square$

4.2 Equation de la chaleur en dimension 1 dans l'espace $L^2([0,1])$

Exemple 4.1. Considérons l'espace $L^2([0,1])$ muni de la norme

$$\| z \| = < z, z >^{\frac{1}{2}} = (\int_0^1 z(t)\overline{z(t)}dt)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est un espace de Banach. Soit maintenant le problème suivant

$$\begin{cases} Az(x) = \frac{d^2}{dx^2}z(x) & x \in [0,1]; \\ \\ \frac{d}{dx}z(0) = \frac{d}{dx}z(1) = 0. \end{cases} \qquad (\mathbf{P})$$

On pose

$$D(A) = \{z, \frac{d^2}{dx^2}z \in L^2([0,1]), \quad z \ et \quad \frac{d}{dx}z \ \text{ absolument continue et } \frac{d}{dx}z(0) = \frac{d}{dx}z(1) = 0\}.$$

Tout d'abord, nous allons chercher les conditions de l'existence et de l'unicité de la solution(classique), donc on peut, par exemple, chercher si A est m-dissipatif.

Remarque 4.1. . [4] Puisque L^2 est réflexif, un opérateur linéaire A est dissipatif si

$$Re < Ax, x > \leq 0.$$

Donc on a

a) $R(I - A) = \{y \in L^2([0,1]) \ / \ \exists z \in D(A), \quad y = z(x) - \frac{d^2}{dx^2}z(x), \quad avec \ x \in [0,1]\} = L^2([0,1])$.

b)

$$< Az, z >= \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} z(x)\overline{z(x)} dx$$

$$= [\frac{d}{dx} z(x)\overline{z(x)}]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dx} z(x) \overline{\frac{d}{dx} z(x)} dx$$

$$= - \int_0^1 \mid \frac{d}{dx} z(x) \mid^2 dx$$

$$= - \parallel z \parallel^2 \leq 0, \quad \forall z \in D(A).$$

Donc A est dissipatif et maximal, par le théorème de Lumer-Phillips, il génére un semi-groupe de contractions. Par suite, puisque l'espace $C^\infty([0,1])$ est dense dans $L^2([0,1])$ et $C^\infty([0,1]) \subset D(A)$, donc $D(A)$ est aussi dense dans $L^2([0,1])$. Finalement, grâce au théorème(4.1), il existe une unique solution pour le problème (**P**).

Par suite, puisque A est maximal, pour tout $f \in L^2([0,1])$, il existe un unique $z \in D(A)$ tel que

$$(I - A)z = f.$$

On a

$$(I - A)z = z - \frac{d^2}{dx^2} z = f,$$

et la solution est donnée par

$$z(x) = \cosh(x)z(0) + \int_0^x \sinh(x - r)f(r)dr,$$

avec

$$z(0) = \frac{-1}{\sinh(1)} \int_0^1 \cosh(1 - r)f(r)dr.$$

Mais comment définir ce semi-groupe ?
Pour cela, on considére le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) & x \in [0,1], \quad t \geq 0; \\ \frac{\partial z}{\partial x}(0,t) = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial x}(1,t) = 0; \\ z(x,0) = z_0(x) \text{ donnée.} \end{cases}$$

Résolvons, par la méthode de séparation des variables, l'équation suivante

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t).$$

On a

$$z(x,t) = T(t)z_0(x),$$

donc

$$T'(t)z_0(x) = T(t)z_0''(x),$$

ce qui implique que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{z_0''(x)}{z_0(x)} = \lambda.$$

Par conséquent,

$$T(t) = Ce^{\lambda t}, \quad avec \;\; C = constante.$$

Résolvons maintenant l'équation

$$z_0'' = \lambda z_0.$$

On a

Cas 01. Si $\lambda > 0$.
On obtient $z_0(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$, et avec les conditions aux bords on aura $A = B = 0$, donc $z_0(x) = 0$ qui est une solution triviale.

Cas 02. Si $\lambda = 0$.
On obtient $z_0(x) = Ax + B$ et avec les conditions aux bords on aura $A = 0$, et B constante

donc $z_0(x) = B$ qui est aussi une solution triviale.

Cas 03. Si$\lambda < 0$.
On obtient $z_0(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$ et avec les conditions aux bords on aura $B = 0$, et $-\sqrt{-\lambda}A\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$, donc soit $A = 0$ soit $\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$.
Pour $A = 0, z_0(x) = 0$ est une solution triviale.
Maintenant, si $\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$, c.à.d $\sqrt{-\lambda} = n\pi$ ce qui implique que $\lambda = -n^2\pi^2$, avec $n \in \mathbb{N}*$.
Ainsi on obtient

$$z_0(x) = \sum_{n\geq 1} A_n \cos(-n\pi x).$$

par suite, avec $z(x,t) = T(t)z_0(x)$ on aura

$$z(x,t) = T(t)\sum_{n\geq 1} A_n \cos(-n\pi x)$$

$$= \sum_{n\geq 1} C_n e^{-n^2\pi^2 t}\cos(-n\pi x), \quad avec \;\; C_n = CA_n \;\; et \;\; C_0 = 0.$$

Pour chaque fonction donnée f on peut calculer les A_n en utilisant les coefficients de Fourier.

Biblographie

[**1**] AHMED. N.U semigroup theory with applications to systems and control. Logman Scientific and Technical. London 1991.

[**2**] DEN LEMLE Ludovic. Autour des propriétés spectrales des semi-groupes. Lecturas Matematicas. Volum 31(2010).

[**3**] DEN LEMLE Ludovic. La formule de Lie-Trotter pour les semi-groupes fortement continus. Mémoire de recherche. 4 juillet 2001.

[**4**] Khodja F.A et Benabdallah.A. Une introduction à la théorie du contrôle. Universités de Franche Comté et de Provence (2005).

[**5**] Klaus-Jochen Engel Rainer Nagel. One-Parameter Semigroups for Lineair Evaluation Equations. Spring Verlag. New York. INC 2000.

[**6**] Marco J.P. Mathématiques L3. Analyse. 47 bis. Rue des vinaigriers 75010 Paris. Juin 2009.

[**7**] Michèle A. Analyse complexe. Institut de recherche mathématique avoncé. Université Louis Pasteur et CNRS. France. 10 Mai 2010.