

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOU MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Thèse De Doctorat - LMD

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

OPTION : RECHERCHE OPERATIONNELLE ET OPTIMISATION

Présentée par :

Karim Benalia

Sujet :

Contrôle en temps optimal et l'invariance d'échelle

Soutenue le 18 octobre 2017 devant le jury d'examen composé de :

M. Mohamed AIDENE	Professeur U.M.M.T.O	Président
M. Brahim OUKACHA	M.C.A U.M.M.T.O	Rapporteur
Mme. Claire DAVID	M.A.Habilitée UPMC Paris 06	Co-Directrice
M. Said DJENOUNE	Professeur U.M.M.T.O	Examineur
M. Bachir SADI	M.C.A U.M.M.T.O	Examineur
M. Méziane AIDER	Professeur U.S.T .H.B	Examineur

Remerciements

Les travaux décrits dans ce manuscrit, sont réalisés dans le Laboratoire de Recherche Opérationnelle et de Mathématiques de la Décision de l'université Mouloud MAMMERY de Tizi-Ouzou. Ces travaux n'auraient pas vu le jour sans le soutien aussi bien scientifique qu'humain que m'ont apporté mon directeur de thèse, le Professeur Brahim Oukacha de l'université Mouloud MAMMERY de Tizi-Ouzou, ainsi que mon co-directeur, le Professeur Claire David de Sorbonne université. Leurs conseils, leurs soutiens et leurs disponibilités avec laquelle ils m'ont encadré, m'ont été indispensables pour mener à bien ce travail. Je les remercie pour m'avoir guidé jusqu'au bout pour la réalisation de ce manuscrit.

Il m'est très agréable de remercier le Professeur Mohamed Aidene de l'université Mouloud MAMMERY de Tizi-Ouzou, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements vont particulièrement vers le Professeur Meziane AIDER de l'université US-THB d'avoir accepté de faire partie de mon jury. et de s'être déplacé pour la soutenance.

Je remercie également Mr. Said Djenoune et Mr. Bachir Sadi, Professeurs à l'université U.M.M.T.O de faire partie de mon jury et d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont particulièrement a mes parents pour m'avoir inculqué le goût d'apprendre et de m'avoir encouragé sans cesse pour toujours aller plus loin. Je tiens aussi à exprimer mes vifs remerciement à mes frères, particulièrement koussiala, et mes soeurs qui m'ont soutenu sans faille durant mes études.

Je remercie également les membres du laboratoire LAROMAD pour leurs conseils, sans oublier Thiziri et Laslouse, ainsi que tous les membres de la faculté des sciences.

Résumé

On s'intéresse dans cette thèse à l'étude du problème de contrôle en temps optimal de l'équation de la chaleur linéaire, unidimensionnelle, en présence d'un paramètre d'échelle. Ce problème est fortement lié aux différentes notions de contrôlabilité, du principe du maximum de Pontriaguine et de la propriété de bang-bang. A cet effet, nous construisons en premier lieu une solution exacte. La dépendance de cette solution par rapport au paramètre d'échelle conduit ainsi à étudier l'existence et l'unicité d'un contrôle en temps optimal. On voit qu'en supposant la contrôlabilité à zéro, on peut établir une propriété de type bang-bang.

Dans la suite, on traite un exemple numérique de contrôle en temps optimal pour l'équation de la chaleur linéaire avec l'invariance d'échelle par une méthode de type directe. Nous comparons enfin les résultats obtenus par une autre méthode indirecte.

Keywords : Contrôle en temps optimal, contrôlabilité, équation de la chaleur linéaire, Propriété de bang-bang, principe du maximum de Pontriaguine, l'invariance d'échelle.

Abstract

In this paper, we study the optimal time problem for the one-dimensional, linear heat equation, in the presence of a scaling parameter. To begin with, we build an exact solution. The dependence of this solution as regards the scaling parameter naturally opens the way to study the existence and uniqueness of an optimal time control.

If, moreover, one assumes the L^∞ null controllability, it enables to establish a bang-bang type property.

Keywords : Optimal time control problem, null controllability, bang- bang property, heat equation, Scaling parameter.

Table des matières

Remerciements	ii
Résumé	iii
Liste des tableaux	vii
Notations	viii
Liste des travaux scientifiques	x
Introduction	1
1 Généralités sur les équations différentielles	4
1.1 Introduction	4
1.2 Concepts fondamentaux	4
1.2.1 Equation différentielle ordinaire du premier ordre	4
1.2.2 Théorèmes d'existence et d'unicité	5
1.3 Méthodes numériques de résolution	6
1.3.1 Méthode d'Euler	6
1.3.2 Méthode du point milieu	7
1.3.3 Méthode de Runge Kutta	9
1.3.4 Exemple d'application	12
1.4 Méthodes numériques de résolution des EDP	13
1.4.1 Méthode des Différences Finies	13
1.4.2 Méthode des Eléments Finis	19
1.4.3 Méthode des Volumes Finis	22
1.4.4 Exemple numérique	23
1.5 Méthodes semi-analytiques pour la résolution des équations différentielles	24
1.5.1 Méthode des Itérations Variationnelles	25
1.5.2 Exemple d'application	30
1.6 Conclusion	31
2 Introduction au contrôle optimal	32
2.1 Introduction	32
2.2 Système de contrôle	32
2.3 Contrôle optimal	33
2.3.1 Problème posé	33
2.4 Contrôlabilité	34
2.4.1 Cas des systèmes linéaires	34
2.5 Méthodes de résolutions	38
2.6 Principe du maximum de Pontriaguine	38
2.6.1 Exemple d'application	41
2.6.2 Principe du maximum par l'approche variationnelle	42

2.7	Méthode numérique de résolution de problème de contrôle optimal des...	46
2.7.1	Méthodes directes	47
2.7.2	Méthodes indirectes	57
2.8	Conclusion	59
3	Contrôle en temps optimal	60
3.1	Introduction	60
3.2	Contrôle en temps optimal en dimension finie	61
3.2.1	Principe du maximum et la propriété de bang-bang	62
3.2.2	Unicité et principe d'optimalité d'un contrôle en temps optimal	64
3.3	Notions de contrôlabilité et d'observabilité	65
3.3.1	Définitions	66
3.3.2	Dualité entre la contrôlabilité et l'observabilité	67
3.3.3	Contrôle dans l'espace $L^\infty([0, t]; U)$	69
3.4	Contrôle en temps optimal en dimension infinie	71
3.4.1	Principe du maximum et la contrôlabilité exacte	72
3.4.2	Propriété de bang-bang et un type de L^∞ -contrôlabilité à zéro	74
3.4.3	Technique de Lebeau-Robbiano pour l'équation de la chaleur	75
3.5	Méthodes numériques	76
3.5.1	Présentation des méthodes	76
3.5.2	Exemple numérique	78
3.6	Conclusion	80
4	Contrôle en temps optimal de l'équation de la chaleur	81
4.1	Introduction	81
4.2	Solutions invariantes d'échelle pour l'équation de la chaleur	81
4.3	Contrôle en temps optimal avec l'invariance d'échelle	84
4.4	Application numérique	91
4.4.1	Position du problème	91
4.4.2	Résolution	92
	Conclusion Générale	97
	Annexe 1	99
	Annexe 2	104
	Bibliographie	108

Table des figures

2.1	Trajectoire et commande optimales par le principe du maximum	42
4.1	L'évolution de la norme L^2 du contrôle en temps avec $\Lambda = 1$	95
4.2	L'évolution de la norme L^2 du contrôle en temps avec $\Lambda = 2$	95
4.3	L'évolution de la norme L^2 du contrôle en temps avec $\Lambda = 8$	96
4.4	L'évolution de la norme L^2 du contrôle en temps avec $\Lambda = 15$	96
4.5	Trajectoire de la solution et l'évolution du contrôle pour $N = 10$	104
4.6	Trajectoire de la solution et l'évolution du contrôle pour $N = 20$	105
4.7	Trajectoire de la solution et l'évolution du contrôle pour $N = 40$	105
4.8	Trajectoire de la solution et l'évolution du contrôle pour $N = 100$	106
4.9	Trajectoire de la solution et l'évolution du contrôle par la méthode de tir pour $p_{int}^0 = [1, 1]$, $t_{f\ int} = 5$	107
4.10	Trajectoire de la solution et l'évolution du contrôle par la méthode de tir pour $p_{int}^0 = [1, 1]$, $t_{f\ int} = 100$	107

Liste des tableaux

1.1	Comparaison entre la solution exacte et les solutions numériques	12
1.2	Pourcentage de l'erreur relative pour chaque méthode	12
1.3	Méthode des Différences Finies et des Eléments Finis	24
1.4	Méthode des Volumes Finis	24
4.1	Résultat de simulation-Temps optimal	94
4.2	Temps final numérique- Par la méthode directe	104
4.3	Temps final numérique- Par la méthode de tir	106

Notations

\forall : pour tout.

\exists : il existe.

| ou t.q. : tel que.

p.p. : presque partout.

\mathbb{R} : ensemble des nombres réels.

\mathbb{R}^+ : ensemble des nombres réels positifs.

\mathbb{R}^n : espace vectoriel de dimension n construit sur le corp des réels.

\mathbb{C} : ensemble des nombres complexes.

\mathbb{N} : ensemble des entiers naturels.

\mathbb{Z} : ensemble des entiers relatifs.

ϵ : nombre petit positif (tolérance).

$R(\cdot)$: résolvante.

Ω : sous-ensemble de \mathbb{R}^n .

ω : sous-ensemble de Ω .

$\text{Re } z$: partie réelle d'un nombre complexe z .

$\text{Im } z$: partie imaginaire d'un nombre complexe z .

Ran : l'image d'un opérateur.

Ker : le noyau d'un opérateur.

$\partial\Omega$: frontière de Ω .

x : variable d'espace.

t : variable de temps.

$[0, l]$: intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités 0 et l .

$[0, t_f]$: intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités 0 et t_f .

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$: vecteur d'état.

$u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$: vecteur de contrôle.

$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T \in \mathbb{R}^n$: vecteur adjoint.

λ : multiplacteur de lagrange général.

Λ : paramètre d'échelle.

$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$: dérivée temporelle.

$\frac{\partial y}{\partial t}$ ou y_t : dérivée partielle du premier ordre par rapport à t .

$\frac{\partial y}{\partial x}$ ou y_x : dérivée partielle du premier ordre par rapport à x .

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ou y_{xx} : dérivée partielle du second ordre par rapport à x .

H : fonction hamiltonienne.

\mathcal{L} : focntion de lagrange.

X : espace des états.

U : espace des contrôles.

\inf : l'infimum.

\sup : le supremum.

\min : le minimum.

\max : le maximum.

\lim : la limite.

Vect : espace vectoriel engendré par.

det : Déterminant .

$rg(A)$: Rang de la matrice A .

A' : Transposé de la matrice A .

$\text{int } X$: l'intérieur d'un ensemble X .

∂X : la frontière d'un ensemble X .

\overline{X} : l'adhérence d'un ensemble X .

X' : le dual d'un espace X .

X^\perp : l'orthogonal de X .

A^* : l'adjoint d'un operateur A .

$\sigma(A)$: le spectre d'un operateur A .

$\mu(e)$: la mesure de Lebesgue d'un ensemble e . $M_{n \times m}(K)$: ensemble des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients dans K .

$M_n(K)$: ensemble des matrices carrées d'ordre, à coefficients dans K .

$||$: valeur absolue ou module.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$: le produit scalaire dans la dualité X', X .

$|||_X$: norme associée à un espace de Banach.

E_T : Application entrée sortie au temps T . $\mathcal{L}(E, F)$: ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F .

$L^p(\Omega, K)$: ensemble des applications mesurables de dans X de puissance p intégrables.

$L^\infty(\Omega, K)$: ensemble des applications mesurables bornées de dans X .

$H_0^1(\Omega)$: ensemble des applications $f \in H^1(\Omega)$ t.q. f s'annule sur $\partial\Omega$.

Les opérateurs :

∇ : gradient.

Δ : laplacien.

χ_e : la fonction indicatrice d'un ensemble e .

$S(t)$: le semigroupe fortement continu engendré par l'opérateur A .

$Q_t u$: voir (3.6).

Ψ_t : l'opérateur d'observation en temps $t > 0$.

$\Psi_{t,e}$: l'opérateur d'observation en temps $t > 0$ sur $e \subset [0, t]$ de mesure strictement positive.

Ψ_t^d : l'opérateur d'observation pour le couple (A^*, B^*) en temps $t > 0$.

$\Psi_{t,e}^d$: l'opérateur d'observation pour le couple (A^*, B^*) en temps $t > 0$ sur $e \subset [0, t]$ de mesure strictement positive.

\mathfrak{R}_t : l'opérateur de réflexion sur $L^2([0, t]; U)$.

$C_t, C_{t,e}$: coût du contrôle.

Les ensembles admissibles pour le contrôle :

$\mathcal{L}_K(t)$: voir (3.5).

$\mathcal{L}_1(t)$: voir (3.27).

Les ensembles accessibles :

R_K^∞ : voir (3.8).

R^∞ : voir (3.7).

B_1^∞ : voir (3.29).

Liste des travaux scientifiques

Publication internationale

1. Karim BENALIA, Claire DAVID and Brahim OUKACHA. *An optimal time control problem for the one-dimensional, linear heat equation, in the presence of a scaling parameter*. RAIRO-OPERATIONS RESEARCH, DOI :10.1051/ro/2017006.

Communications :

1. Karim BENALIA, Claire DAVID and Brahim OUKACHA. *Contrôle en temps de l'équation linéaire unidimensionnelle de la chaleur avec paramètre d'échelle*. colloque international sur l'optimisation et les systèmes d'information (COSI), Université Ferhat Abbas setif, 31 Mai au 01 juin 2016.

2. Karim BENALIA, Claire DAVID and Brahim OUKACHA. *Contrôlabilité de l'équation de la chaleur linéaire avec l'invariance d'échelle*. JSLAROMAD'III UMMTO, du 26 au 28 Octobre 2015.

3. Karim BENALIA, Claire DAVID and Brahim OUKACHA. *Optimisation et l'invariance d'échelle*. JDROM'2015 USTHB, 25-26 November 2015.

4. Karim BENALIA, Claire DAVID and Brahim OUKACHA. *Contrôle optimal stochastiques et application en économie*. MSTD -USTHB -22-23 Avril 2017.

5. Karim BENALIA, Claire DAVID and Brahim OUKACHA. *Contrôle en temps optimal. Prix du meilleur papier jeune chercheur*, COSI 2016, 31 Mai 2016.

Introduction Générale

Les études sur la théorie du contrôle optimal ont pour but de présenter les aspects théoriques et numériques de cette discipline, ainsi que les applications dans des domaines très divers. La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles [40, 35, 91, 98, 99], des équations intégrales, des équations intégro-différentielles, des équations aux dérivées partielles, et des équations stochastiques, etc [72, 8, 12, 16, 32, 37, 39]. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines des mathématiques. Les problèmes de contrôle optimal décrits par les équations différentielles ordinaires sont appelés des systèmes de contrôle à paramètres localisés ou systèmes de contrôle en dimension finie [40, 51, 87, 88, 57, 66] . Tandis que les problèmes de contrôle optimal décrits par les équations aux dérivées partielles sont appelés des systèmes de contrôle à paramètres distribués ou répartis ou problèmes de contrôle optimal en dimension infinie [53, 71, 77, 41, 42, 45, 31].

L'objectif de la théorie du contrôle est de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. On dit qu'un système est contrôlable si on est capable de l'amener d'un point initial arbitraire vers un point final souhaité. Ainsi la théorie de contrôle optimal a de nombreuses applications : les guidages aérospatiaux et aéronautiques, automobile, robotique, réseaux informatiques, télécommunication, bioréacteurs, contrôles des procédés chimiques, etc.

En mathématiques, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Historiquement, le problème de contrôle optimal est apparu après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique de vol. Il est fortement lié à la mécanique classique (principe de Fermat, problème de la brachistochrone, équations d'Euler-Lagrange etc). On se réfère au livre de H. Herman Goldstine [30] pour le développement de la théorie du calcul des variations.

La résolution du problème de contrôle optimal a pu démarré avec le célèbre principe du maximum de Pontriaguine (PMP), formulé par L.S. Pontriaguine en 1956 [70], qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales (voir par exemple l'article de R.V. Gamkrelidze [29] pour la découverte de ce principe). Ainsi la programmation dynamique de Hamilton-Jacobi-Bellman [7] qui fournit une condition suffisante d'optimalité. Cette théorie est développée plus tard dans différentes branches mathématiques : le problème de contrôle optimal en dimension finie (ou contrôle des équations différentielles ordinaires) et en dimension infinie (ou contrôle des équations aux dérivées partielles), la théorie de contrôle stochastique, la théorie des jeux, etc [40, 51, 53, 78, 36].

Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité appelé aussi problème de commandabilité [69, 70, 43, 44, 46]. En suite, une fois le problème de contrôlabilité résolu, il faut chercher parmi toutes les trajectoires possibles celle qui donne le coût minimum (ou maximum)[70]. Pour obtenir la solution d'un problème de contrôle optimal, on utilise généralement deux approches.

La première est dite directe et la deuxième est dite indirecte. L'approche directe consiste à discrétiser le système et le contrôle en transformant le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes, puis résoudre ce problème d'optimisation ainsi obtenu, en se basant, par exemple, sur les méthodes d'Euler, de Rung-Kutta ou bien les méthodes de types SQP (Méthode de programmation quadratiques successive), etc [8, 52, 21, 17, 47, 49, 81]. Ces méthodes sont les plus simples à mettre en oeuvre. Tandis que l'approche indirecte est basée sur le principe du maximum de Pontriaguine (PMP) [69, 70], qui donne des conditions nécessaires d'optimalité. On cherche ensuite les trajectoires vérifiantes ces conditions, ce qui revient en pratique à chercher le zéro d'une certaine fonction de tir associée au problème original. Ces méthodes sont à la fois précises et rapides, mais en revanche elles sont très sensibles à l'initialisation [57, 68, 66, 62].

Un problème de contrôle en temps optimal consiste à trouver le temps minimal pour qu'un contrôle admissible amène un système dynamique d'un point initial arbitraire au point final prescrit. Plus précisément, nous considérons le problème de contrôle en temps optimal qui se formule de la manière suivante :

Problème : Trouver le temps minimal $t^* > 0$ tel que la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{y} = f(y, u), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, T],$$

avec u une fonction de contrôle, satisfasse les contraintes suivantes :

- l'état final est imposé : $y(t^*) = y_1$
- les contraintes sur le contrôle : $u(t) \in U$, pour $t \in [0, T]$,
- les contraintes sur l'état : $y(t) \in K$, pour $t \in [0, T]$.

Les données de ce problème sont la fonction f , les conditions initiales et finales y_0 et y_1 et les ensembles admissibles U et K , respectivement pour les variables de contrôle et d'état. Ce problème est classique en dimension finie (contrôle des équations différentielles ordinaires) et il est connu qu'un contrôle en temps optimal possède des propriétés intéressantes : le principe du maximum de Pontriaguine et la propriété de bang-bang. Ces résultats ont été découverts dans l'article de R. Bellman, I. Glicksberg et O. Gross [7]. L'extension en dimension infinie (ou contrôle des équations aux dérivées partielles) est initialement apparue dans l'article de H.O. Fattorini [24] et est beaucoup développée dans le livre de J.L. Lions [53] et le livre de H.O. Fattorini [26].

Beaucoup de progrès ont été faits ces dernières années dans le cadre du contrôle en temps optimal associés à quelques équations aux dérivées partielles (contrôle en dimension infinie). Plus particulièrement, dans [55] J. Lohéac et de M. Tucsnak ont établi la propriété de bang-bang pour le contrôle en temps optimal en passant par le principe du maximum. La condition pour qu'un contrôle en temps optimal satisfasse le principe du maximum est la contrôlabilité exacte du problème. on sait que pour certaines équations, comme pour l'équation de la chaleur, la contrôlabilité exacte n'est pas vérifiée. Dans [61] M. Tucsnak, S. Micu et de I. Roventa ont étudié d'autres conditions pour qu'un contrôle en temps optimal satisfasse la propriété de bang-bang sans passer par le principe du maximum. De plus, en supposant un type de contrôlabilité approchée du système (comme pour les équations de type Schrödinger), on peut établir la propriété de bang-bang [94, 89, 25, 85, 83].

Cependant, on sait que beaucoup d'équations aux dérivées partielles possèdent une invariance d'échelle comme pour l'équation de la chaleur. Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude d'un problème de contrôle optimal en temps de l'équation de la chaleur linéaire, unidimensionnelle, en présence d'un paramètre d'échelle. A cet effet, nous construisons en premier lieu une solution exacte. La dépendance de cette solution par rapport au paramètre d'échelle conduit ainsi à étudier l'existence et l'unicité d'un contrôle optimal en temps. On voit qu'en supposant la contrôlabilité à zéro, on peut établir une propriété de type bang-bang.

Le présent travail est divisé en quatre chapitres , organisés de la manière suivante :

Le premier chapitre sera consacré à la présentation de quelques notions de base sur les équations différentielles ordinaires, ainsi que quelques méthodes numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles, qui sont la base fondamentale du contrôle optimal des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles.

Au second chapitre, on s'intéresse à donner les fondements théoriques du contrôle optimal, ainsi que quelques méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal, à savoir les méthodes directes et les méthodes indirectes.

Dans la première partie du troisième chapitre, on présente quelques résultats sur le contrôle en temps optimal en dimension finie. La deuxième partie est consacrée à présenter quelques notions préliminaires sur la contrôlabilité et l'observabilité. On voit la dualité entre elles et aussi la notion du coût de contrôle. Dans la troisième partie, on présente des résultats en dimension infinie. on se réfère à l'article de M. Tucsnak, S. Micu et de I. Roventa [61] et à l'article de G. Wang [94] pour cette partie. Enfin, dans la quatrième partie , on présente quelques méthodes numériques pour la résolution de problème de contrôle en temps optimal.

Le quatrième chapitre est décomposé en deux parties. La première partie est consacré à l'étudier l'existence et l'unicité d'un contrôle en temps optimal de l'équation de la chaleur avec l'invariance d'échelle. En supposant la L^∞ -contrôlabilité à zéro, on peut établir une propriété de type bang-bang. Dans La deuxième partie, on traite un exemple numérique du problème par une méthode de type directe. Nous comparons enfin les résultats obtenus par une autre méthode indirecte.

Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques notions générales sur les équations différentielles. Le chapitre est décomposé en trois parties. La première partie est dédiée à la présentation des concepts de base sur les équations différentielles ordinaires, ainsi que quelques méthodes numériques de résolution, en se référant au livre de J.P. Demailly [21] et au livre de E. Hairer [33]. Dans la deuxième partie, on s'intéresse à donner quelques méthodes numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles, qui sont la base fondamentale du contrôle optimal des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles, en se référant au livre de P.A. Raviart and J.M. Thomas[75], livre de J. Stoer et R. Bulirsch [84] et au livre de E. G.D. Silva [82] pour les résultats de cette partie. La troisième partie est consacrée à la présentation de quelques méthodes semi analytiques pour la résolution des équations différentielles, telle que la méthode des itérations variationnelles [34, 35, 97].

1.2 Concepts fondamentaux

Une *équation différentielle*, en mathématique, est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différenciation auquel une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles jouent un rôle important dans différents domaines, en physique, en chimie, en économie,... etc. Ces équations ont rarement des solutions exactes, autrement dit, la résolution de ces équations différentielles n'est pas toujours possible, elles ne s'intègrent pas d'une manière exacte. On fait appel dans ce cas à des méthodes numériques afin de trouver des solutions approchées.

1.2.1 Equation différentielle ordinaire du premier ordre

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

une application continue, on considère la relation

$$y' = f(t, y), \quad (t, y) \in U, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m. \quad (1.1)$$

La relation (1.1) est appelée équation différentielle ordinaire du premier ordre.

Une solution de (1.1) sur un intervalle $I = [0, T] \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que :

$$\forall t \in I, \text{ on a } (t, y(t)) \in U \text{ et } y'(t) = f(t, y(t)).$$

L'inconnue de l'équation (1.1) est une fonction de t .

Problème de Cauchy

Etant donnée un point $(0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ de (1.1) sur un intervalle I contenant 0, telle que $y(0) = y_0$.

Ce problème est formulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0, \forall t \in [0, T]. \end{cases} \quad (1.2)$$

Dans la pratique, la variable t représente le temps et y représente l'état d'un système donné.

1.2.2 Théorèmes d'existence et d'unicité

L'objet de ce paragraphe est de rappeler quelques résultats classiques concernant l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires.

Théorème d'existence

Considérons l'équation différentielle (1.1)

$$y' = f(t, y).$$

On sait bien que la solution de cette équation sous les conditions initiales $(0, y_0)$ est donnée par la formule suivante :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds, \quad t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Théorème 1.2.1. (Cauchy-Péano)[21] :

Soit f une fonction continue dans un voisinage du point $(0, y_0)$ de I dans \mathbb{R}^m , alors il existe un intervalle J voisinage de 0 dans I et une fonction y de classe C^1 dans J telle que

$$\forall t \in J, y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0.$$

Théorème d'unicité

On a besoin d'introduire les définitions suivantes :

Définition 1.2.1.

On appelle solution locale du problème (1.2), la donnée d'un couple (I_0, y) , où I_0 est un intervalle de \mathbb{R} , qui est un voisinage de 0 inclu dans I et y est une fonction de $C^1(I_0)$ telle que

$$y(I_0) = y_0 \text{ et } \forall t \in I_0, \quad y'(t) = f(t, y(t)).$$

Définition 1.2.2.

On dit que la solution locale (J, l) prolonge la solution locale (I, y) , si on a $I \subset J$, et $\forall t \in I \quad y(t) = l(t)$; si de plus $I \neq J$, on dit que (J, l) prolonge strictement (I, y) .

Définition 1.2.3.

On dit que (I_0, y) est une solution globale du problème (1.2) dans I , si (I_0, y) est une solution locale de ce problème et $I_0 = I$.

Théorème 1.2.2. [21]

On suppose que I est sous la forme $[0, T]$ ou $[0, +\infty]$ et que f est continue sur $I \times \mathbb{R}^m$ et qu'il existe une fonction $l \in \mathfrak{S}(I)$ telle que :

$$\forall t \in I, \forall y, z \in \mathbb{R}^m, |f(t, y) - f(t, z), y - z| \leq l(t) |y - z|,$$

alors le problème (1.2) admet une unique solution,

où $\mathfrak{S}(I)$ est un espace vectoriel normé des fonctions réelles mesurables sur I telle que :

$$\|f\| = \int_I |f(x)| dx < +\infty.$$

Corollaire 1.2.3. (Cauchy-Lipschitz) [21]

On suppose que la fonction f est continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^m$ et qu'il existe un réel l tel que :

$$\forall (t, y) \text{ et } (t, z) \in I_0 \times \mathbb{R}^m, |f(t, y) - f(t, z)| \leq l|y - z|$$

alors le problème (1.2) admet une unique solution.

1.3 Méthodes numériques de résolution des équations différentielle ordinaires

On présente ici quelles méthodes de résolution du problème de Cauchy défini précédemment. On se réfère au livre de J.P. Demailly [21], livre de E. Hairer [33] et au livre de V. Legat [52] pour la présentation cette partie.

1.3.1 Méthode d'Euler

Reprenons le problème de Cauchy (1.2) :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0, \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

Subdivisons l'intervalle $[0, T]$ comme suit :

$$0 \leq t_0 \leq t_1 \dots \leq t_n \leq t_{n+1} \leq \dots \leq t_N = T.$$

Posons

$$h_n = t_{n+1} - t_n; \quad h = \max_{0 \leq n \leq N} h_n.$$

Pour $0 \leq n \leq N$, la solution du problème (1.2) est donnée par :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds. \quad (1.3)$$

Par récurrence, nous construisons une approximation y_n de $y(t_n)$ en remplaçant la relation précédente par

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (1.4)$$

Ce qui revient à approcher, pour $s \in]t_n, t_{n+1}[$, $f(s, y(s))$ par $f(t_n, y_n)$. Le schéma défini par la relation (1.4) s'appelle le schéma d'Euler.

Remarque 1.3.1.

Pour calculer l'estimation de l'erreur $e_n = |y(t_n) - y_n|$ entre la solution exacte du problème (1.2) et la solution approchée donnée par (1.4), il suffit d'appliquer l'hypothèse de Cauchy-Lipschitz (Corrolaire 1.2.3).

1.3.2 Méthode du point milieu

Notons M_n le point coordonnées $(t_n, y(t_n))$ du graphe de y . Le segment $[M_n, M_{n+1}]$ a une pente plus proche en générale de $y'(t_n, \frac{h_n}{2})$ pente de la tangente au "point milieu " que de $y'(t_n)$, pente de la tangente de M_n .

On peut considérer q'une approximation de $y(t_{n+1})$ à partir de $y(t_n)$ meilleur que l'expression $y(t_n + h_n)$ de la méthode d'Euler. On écrit donc :

$$y(t_n + h_n) \simeq y(t_n) + h y'(t_n + \frac{h_n}{2}). \quad (1.5)$$

Posons $h_n = h$ et si y est de classe C^3 , il vient alors

$$y(t + h) = y(t) + h y'(t) + \frac{1}{2} h^2 y''(t) + \frac{1}{6} h^3 y'''(t) + O(h^3);$$

$$y'(t + \frac{h}{2}) = y'(t) + \frac{1}{2} h y''(t) + \frac{1}{6} h^2 y'''(t) + O(h^2).$$

L'erreur comise est donc :

$$e = y(t + h) - y(t) - h y'(t + \frac{h}{2}) = \frac{1}{6} h^3 y'''(t) + O(h^3).$$

Soit une erreur en h^3 au lieu de h^2 dans la méthode d'Euler. On a par ailleurs

$$y'(t + \frac{h}{2}) = f(t + \frac{h}{2}, y(t + \frac{h}{2})).$$

Comme la valeur de $y(t + \frac{h}{2})$ n'est pas connue, on l'approxime par

$$y\left(t + \frac{h}{2}\right) \simeq y(t) + \frac{h}{2}f(t, y(t)), \quad (1.6)$$

d'où

$$y(t+h) \simeq y(t) + hf\left(t + \frac{h}{2}, y\left(t + \frac{h}{2}\right)\right).$$

L'algorithme du point milieu est associé au choix

$$\Phi(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right)$$

et donne lieu au schéma

$$\begin{cases} y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2}f(t_n, y_n), \\ p_n = f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right), \\ y_{n+1} = y_n + h_n p_n, \\ t_{n+1} = t_n + h_n. \end{cases} \quad (1.7)$$

En utilisant les approximations faites en (1.5) et (1.6), on calcule l'erreur de consistance, et on en déduit que la méthode du point milieu est d'ordre 2.

Notions de consistance, de stabilité et de convergence.

Définition 1.3.1.

On dit qu'une méthode est consistante si pour toute solution exacte $y(\cdot)$ la somme des erreurs de consistances relatives à $y(\cdot)$, soit $\sum_{0 \leq n \leq N} |e_n|$, tend vers 0 quand h_{max} tend vers 0.

Une autre notion importante est la notion de stabilité. Dans la pratique, le calcul récurrent des points y_n est en effet entaché d'erreur d'arrondi e_n . Pour que les calculs soient significatifs, il est indispensable que la propagation de ces erreurs reste contrôlable.

Définition 1.3.2.

On dit qu'une méthode numérique est stable s'il existe une constante $S \geq 0$, telle que pour toutes suites $(y_n), (\hat{y}_n)$ définies par

$$y_{n+1} = y_n + h_n + \Phi(t_n, y_n, h_n), \quad 0 \leq n \leq N$$

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + h_n + \Phi(t_n, \hat{y}_n, h_n) + e_n, \quad 0 \leq n \leq N$$

on ait

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\hat{y}_n - y_n| \leq S(|\hat{y}_0 - y_0| + \sum_{0 \leq n \leq N} |e_n|).$$

Autrement dit, une petite erreur sur la donnée initiale $|\hat{y}_0 - y_0|$ et de petits erreurs d'arrondis dans le calcul de \hat{y}_n provoquent une erreur finale $\max |y_n - y(t_n)|$ contrôlable.

Une autre notion importante est la notion de convergence.

Définition 1.3.3.

On dit qu'une méthode numérique est convergente si pour toute solution exacte $y(\cdot)$ pour $t_n = nh_n$ fixé, la suite y_n telle que :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \text{ vérifie } \max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \rightarrow 0$$

quand $y_0 \rightarrow y(t_0)$ et quand $h_{max} \rightarrow 0$.

1.3.3 Méthode de Runge Kutta

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

En introduisant un schéma numérique de la forme

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h, \\ y_{i+1} = y_i + h\Phi(t_i, y_i, h_i), \end{cases}$$

où la fonction d'incrémention Φ est une approximation de $f(t, y)$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

Supposons un entier q , une matrice A carée d'ordre q dont les éléments triangulaires supérieurs sont nuls y compris la diagonale, et un vecteur $b = (b_1, b_2, \dots, b_q)$.

L'algorithme de Runge-Kutta est la suivant :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(b_1 k_1 + \dots + b_q k_q), \\ t_{i+1} = t_i + h, \\ k_j = f(t_i + c_j h, y_i + h(a_{j1} k_1 + \dots + a_{jq} k_q)). \end{cases}$$

Le vecteur b vérifie $b_1 + b_2 + \dots + b_q = 1$.

Les coefficients c_j sont les sommes des éléments de la ligne j de la matrice A . Dans ces méthodes le pas h peut facilement varier, une méthode de Ruge-Kutta est entièrement déterminée par la donnée de l'entier q , du vecteur b et de la matrice A .

Méthode d'ordre 1 (q=1)

Pour $q = 1$, le seule choix possible est
 $b = 1, a_{11} = 0$, l'algorithme est donnée par

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h, \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i). \end{cases}$$

Il s'agit de la méthode d'Euler.

Méthode d'ordre 2 (q=2)

Pour déterminer toutes les méthodes d'ordre 2, cherchons une fonction Φ de la forme :

$$\Phi = b_1 k_1 + b_2 k_2$$

où les coefficients k_1 et k_2 sont donnés par :

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i, y_i), \\ k_2 = f(t_i + ch, y_i + ahk_1). \end{cases}$$

Développons y_{i+1} au voisinage du point (t_i, y_i) :

$$y_{i+1} = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y(t_i)) + f(t_i, y(t_i)) \right] \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y(t_i)).$$

Développons de même k_2 au voisinage du point (t_i, y_i) :

$$y_{i+1} = y_i + hb_1 k_1 + hb_2 f(t_i, y_i) + hc \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + ahf(t_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i) \right] + O(h^2).$$

En identifiant les deux expressions on obtient :

$$\begin{cases} y(t_i) = y_i, \\ f(t_i, y_i) = (b_1 + b_2)f(t_i, y_i), \\ \frac{1}{2}f'_t + \frac{1}{2}f'_y f = b_2(cf'_t + af'_y f), \end{cases}$$

on en déduit que :

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1, \\ b_2 c = b_2 a = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

soit en posant :

$b_2 = \alpha, b_1 = 1 - \alpha$ et $c = a = \frac{1}{2}$, on retrouve les trois cas standard :

La méthode d'Euler s'obtient pour $\alpha = 0$

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$$

La méthode de Heun (Euler- Cauchy) est obtenue pour $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2), \\ k_1 = f(t_i, y_i) \\ k_2 = f(t_i + h, y_i + hk_1). \end{cases}$$

La méthode de Rung-Kutta est obtenue pour $\alpha = 1$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hk_2, \\ k_1 = f(t_i, y_i), \\ k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + hk_1). \end{cases}$$

Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4

i. Etant donné un pas h , une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'iteration N .

ii. Pour $0 \leq i \leq N$:

$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

Ecrire t_{i+1} et y_{i+1}

iii. L'iteration se termine quand $i + 1 = N$.

1.3.4 Exemple d'application

Dans cet exemple, on s'intéresse à trouver la méthode la plus précise, Pour cela on compare la méthode d'Euler et celles de Runge-Kutta d'ordre 2 et d'ordre 4 :

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème est :

$$y(t) = \frac{1}{t+1}$$

Avec la méthode d'Euler, la solution de ce problème est :

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) = y_i - hy_i^2.$$

Dans le tableau ci-dessous, on donne une comparaison entre la solution exacte et les solutions numériques obtenues avec la méthode d'Euler et la méthode Runge-Kutta d'ordre 2 et d'ordre 4 pour un pas $h = 0,1$:

i	h_i	y_i exacte	Méthode d'Euler	Méthode RK2	Méthode RK4
1	0.1	0.90909091	0.90909090	0.90975000	0.90909119
2	0.2	0.83333333	0.81900000	0.83434337	0.83333373
3	0.3	0.76923077	0.75192390	0.77041775	0.76923121
4	0.4	0.71428571	0.69538494	0.71985663	0.71428616
5	0.5	0.66666667	0.64702892	0.67422925	0.66666710

TABLE 1.1 – Comparaison entre la solution exacte et les solutions numériques

On donne dans le tableau ci-dessous, le pourcentage de l'erreur relative pour chaque méthode

i	Méthode d'Euler	Méthode RK2	Méthode RK4
1	1.00	0.072	0.00030
2	1.72	0.1212	0.000050
3	2.25	0.1543	0.00006
4	2.65	0.7792	0.000063
5	3.95	1.2844	0.000064

TABLE 1.2 – Pourcentage de l'erreur relative pour chaque méthode

D'après ce tableau on remarque que l'erreur augmente dans la méthode d'Euler au fur et à mesure que i augmente, de même pour la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 par contre elle diminue dans la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Il est donc généralement préférable d'utiliser des méthodes d'ordre aussi élevé que possible.

1.4 Méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles

Dans cette partie, nous présentons quelques méthodes numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles, qui sont la base fondamentale du contrôle optimal des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles.

Les équations aux dérivées partielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, chimiques, biologiques,... etc. Ces équations ont rarement des solutions exactes, autrement dit, la résolution de ces équations différentielles n'est pas toujours possible, elles ne s'intègrent pas d'une manière exacte. On fait appel dans ce cas à des méthodes numériques afin de trouver des solutions approchées. on se réfère au livre de P. A. Raviart et JM Thomas [75], livre de J. Stoer et R. Bulirsch [84], et au livre de E. G.D. Silva [82] pour la présentation de ces méthodes numériques.

Définition 1.4.1.

Une Equation aux Dérivées Partielles (EDP) est une equation fonctionnelle qui met en relation des dérivées partielles. Typiquement, si u est une fonction à valeurs scalaires des variables x et y , $(x, y) \in \Omega$, où Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^2 , une EDP est une relation de la forme :

$$F(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \Omega \quad (1.8)$$

où F désigne une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R}^5 .

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation. L'équation (1.8) est donc d'ordre 1.

La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u . L'équation (1.8) est donc de dimension 2.

Resoudre l'EDP consiste donc à déterminer toutes les fonctions u définies sur Ω satisfaisant (1.8).

L'analyse numérique des EDP est un vaste domaine, que nous aborderons ici sous l'angle de trois méthodes numériques de base : méthode de différences finies, méthode des éléments finis et méthode des volumes finis [74, 75, 82, 84].

1.4.1 Méthode des Différences Finies

1.4.1.1 Principe de la méthode

Le principe de la méthode de différences finies repose sur la formule de Taylor, permettant d'approcher les dérivées de la fonction inconnue par des dérivées discrètes. Si y est une fonction régulière de x et $\Delta x > 0$ est un pas d'espace (destiné à tendre vers 0), on peut discrétiser de plusieurs manières différentes sa dérivée :

- Différence décentrée avant :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} + O(\Delta x),$$

- Différence décentrée arrière :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x) = \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x),$$

- Différence centrée :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x) = \frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

Pour la dérivée seconde, une discrétisation "naturelle" est

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x) = \frac{y(x + \Delta x) - 2y(x) + y(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

Notation indicielle - cas 1D

Considérons un cas monodimensionnel, où l'on souhaite déterminer une grandeur $y(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. La recherche d'une solution discrète de la grandeur y amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de $N + 1$ points x_i pour $i = 0, 1, \dots, N$ régulièrement espacés avec un pas Δx . Les points $x_i = i\Delta x$ sont appelés les noeuds du maillage.

Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie se ramène ainsi à la recherche de N valeurs discrètes de cette grandeur aux différents noeuds du maillage.

On note y_i la valeur discrète de $y(x)$ au point x_i , soit $y_i = y(x_i)$.

De même pour la dérivée de $y(x)$ au noeud x_i , on note

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_i = y'_i.$$

Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur y .

1.4.1.2 Exemples d'applications

Exemple 1

Considérons le problème monodimensionnel de la conduction de la chaleur dans une barre de $1m$ de longueur. Le champ de température $T(x, t)$ vérifie l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

où α est la diffusivité thermique.

A cette EDP s'ajoute deux conditions aux limites aux extrémités de la barre $T(0, t) = T_g$ et $T(1, t) = T_d$ ainsi qu'une condition initiale $T(x, 0) = T_0$.

L'intervalle $[0, 1]$ est discrétisé en $N + 1$ noeuds de coordonnées x_i , $i = 0, \dots, N$ régulièrement espacés. Notons Δx le pas d'espace. Le temps est discrétisé en intervalles de pas constant Δt . Notons T_i^n la température au noeud $x_i = i\Delta t$ et à l'instant $t = n\Delta t$.

On peut utiliser deux approches pour discrétiser cette équation de la chaleur. La première dite explicite, utilise une discrétisation au noeud x_i et à l'itération courante n :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^n = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^n$$

Et la seconde dite implicite utilise une discrétisation au noeud x_i et à l'itération $n + 1$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^{n+1} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^{n+1}$$

Schéma explicite

Nous utilisons un schéma avant d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^n = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

En posant $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, la température à l'itération $n + 1$ est donnée par :

$$T_i^{n+1} = \lambda T_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)T_i^n + \lambda T_{i+1}^n, \quad i = 1, \dots, N - 1$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{pmatrix}^n + \lambda \begin{pmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{pmatrix}$$

Schéma implicite

Nous utilisons un schéma arrière d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^{n+1} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

En posant $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, la température à l'itération $n + 1$ est donnée par :

$$(1 + 2\lambda)T_i^{n+1} - \lambda(T_{i+1}^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) = T_i^n, \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ +\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{pmatrix}^n + \lambda \begin{pmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{pmatrix}$$

A chaque itération, le vecteur des inconnues discrètes se détermine par résolution d'un système linéaire. La matrice du système étant tridiagonale, un algorithme de Thomas (basé sur la méthode du pivot de Gauss) est très souvent utilisé [75].

Algorithme de Thomas

Cet algorithme est utilisé pour la résolution d'un système avec une matrice tridiagonale de dimension N faisant intervenir un vecteur d'inconnues discrètes X_i , de la forme :

$$b_1 X_1 + c_1 X_2 = d_1, \quad i = 1$$

$$a_i X_{i-1} + b_i X_i + c_i X_{i+1} = d_i, \quad i = 2, \dots, N-1$$

$$a_N X_{N-1} + b_N X_N = d_N, \quad i = N$$

Le calcul s'effectue en deux étapes (qui correspondent aux deux étapes du pivot de Gauss).

Étape 1 : La triangularisation fait apparaître les coefficients α_i et β_i évalués par récurrence :

$$\alpha_i = \frac{-a_i}{b_i + c_i \alpha_{i+1}} \quad \text{et}$$

$$\beta_i = \frac{d_i - c_i \beta_{i+1}}{b_i + c_i \alpha_{i+1}}, \quad \text{pour } i = N, \dots, 1.$$

Étape 2 : La deuxième étape détermine les inconnues selon la récurrence :

$$\begin{cases} X_1 = \beta_1, \\ X_i = \alpha_i X_{i-1} + \beta_i, \quad i = 2, \dots, N. \end{cases}$$

Exemple 2 : Discrétisation de l'équation de la chaleur en 2D stationnaire

Considérons le problème bidimensionnel stationnaire de la conduction de la chaleur dans un domaine rectangulaire $[0, L_x] \times [0, L_y]$. Le champ de température $T(x, y)$ vérifie l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \\ T(0, y) = T_g \quad \text{et} \quad T(L_x, y) = T_d, & 0 < y < L_y \\ T(x, 0) = T_b \quad \text{et} \quad T(x, L_y) = T_h, & 0 < x < L_x \end{cases}$$

Le domaine de calcul est discrétisé en $(N+1) \times (P+1)$ noeuds (x_i, y_j) ($i = 0, \dots, N$ et $j = 0, \dots, P$). On supposera que les pas d'espace dans chaque direction Δx et Δy sont constants. La température discrète au noeud (x_i, y_j) sera notée $T_{i,j} = T(x_i, y_j)$.

Nous utilisons un schéma centré d'ordre 2 pour approximer les dérivées secondes en espace :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{ij} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{ij} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

La formulation discrétisée est alors :

$$\Delta y^2(T_{i+1,j}+T_{i-1,j})+\Delta x^2(T_{i,j+1}+T_{i,j-1})-2(\Delta x^2+\Delta y^2)T_{i,j} = 0, \text{ pour } i = 1, \dots, N-1 \text{ et } j = 1, \dots, P-1.$$

Soit sous forme matricielle, pour $N = P = 4$, en posant $A = \Delta x^2 + \Delta y^2$:

$$\begin{pmatrix} -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta x^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ y_{12} \\ y_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_b \\ \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_d \\ \Delta y^2 T_g \\ 0 \\ \Delta y^2 T_d \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_h \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_d \end{pmatrix}$$

Dans le cas où les pas d'espace sont identiques $\Delta x = \Delta y$, la formulation devient :

$$T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = 0, \text{ pour } i = 1, \dots, N-1 \text{ et } j = 1, \dots, P-1.$$

Soit sous forme matricielle, pour $N = P = 4$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ y_{12} \\ y_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} T_b + T_g \\ T_b \\ T_b + T_d \\ T_g \\ 0 \\ T_d \\ T_h + T_g \\ T_h \\ T_h + T_d \end{pmatrix}$$

Notons I la matrice identité d'ordre 3 et D la matrice de dimension 3 définie par :

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Notons T_1, T_2, T_3, B_1, B_2 et B_3 les vecteurs à 3 composantes définis par :

$$T_1 = \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} T_b + T_g \\ T_b \\ T_b + T_d \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} T_g \\ T_0 \\ T_d \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} T_h + T_g \\ T_h \\ T_h + T_d \end{pmatrix}.$$

Le système peut s'écrire sous la forme matricielle bloc suivante :

$$\begin{pmatrix} D & I & 0 \\ I & D & I \\ 0 & I & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

La matrice obtenue est tridiagonale et chacun de ses blocs est tridiagonal. La résolution du système peut s'effectuer par la méthode de Thomas matriciel [75].

1.4.2 Méthode des Eléments Finis

La méthode des Eléments Finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres, par exemple, ses valeurs en certains points (les noeuds du maillage). Cette méthode est particulièrement bien adaptée aux problèmes d'équilibre. Elle permet de traiter des géométries complexes contrairement aux Différences Finies, mais elle demande un grand coût de temps de calcul et de mémoire [82, 75].

Le principe de la méthode sur 1D

Pour illustrer le principe de la méthode des éléments finis, on considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -y''(x) = f(x), & x \in]0, 1[\\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

L'approche repose sur la méthode de Galerkin qui permet d'écrire le système différentiel sous forme variationnelle dans un espace de dimension finie [17, 82, 75].

Soit une fonction $z(x) \in C^1([0, 1])$, nulle en 0 et 1. On peut écrire :

$$- \int_0^1 y''(x)z(x)dx = \int_0^1 f(x)z(x)dx.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_0^1 y'(x)z'(x)dx = \int_0^1 f(x)z(x)dx, \quad \forall z \in V, \quad (1.10)$$

avec $V = \{z \in C^0([0, 1]); z(0) = z(1) = 0, \text{ continue par morceaux}\}$ un sous-espace vectoriel de $C^1([0, 1])$.

Une solution de la forme variationnelle (1.10) s'appelle solution faible du problème différentiel de départ.

On cherche alors à écrire un problème approché dans un sous-espace vectoriel de dimension finie :

Soit \tilde{V} un sous-espace vectoriel de V de dimension N finie. Soient $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$, N fonctions linéairement indépendantes de V . Ces fonctions constituent une base du sous-espace \tilde{V} . Ainsi, toute fonction \tilde{y} de \tilde{V} peut se décomposer selon :

$$\tilde{y}(x) = \sum_{j=1}^N y_j \Phi_j(x).$$

Résoudre le problème différentiel de départ revient alors à chercher une solution $\tilde{y} \in \tilde{V}$ telle que :

$$\int_0^1 \tilde{y}'(x) \tilde{z}'(x) dx = \int_0^1 f(x) \tilde{z}(x) dx, \quad \forall \tilde{z} \in \tilde{V}.$$

C'est-à-dire chercher N réels y_1, y_2, \dots, y_N vérifiant :

$$\sum_{j=1}^N y_j \int_0^1 \Phi_j'(x) \tilde{z}'(x) dx = \int_0^1 f(x) \tilde{z}(x) dx, \quad \forall \tilde{z} \in \tilde{V}.$$

Ou encore :

$$\sum_{j=1}^N y_j \int_0^1 \Phi_j'(x) \Phi_i'(x) dx = \int_0^1 f(x) \Phi_i(x) dx, \quad \forall \Phi_i \in \tilde{V}.$$

Soient A la matrice $N \times N$ d'éléments courant a_{ij} et B un vecteur à N composantes b_i définies par :

$$a_{ij} = \int_0^1 \Phi_j'(x) \Phi_i'(x) dx \text{ et } b_i = \int_0^1 f(x) \Phi_i(x) dx.$$

Par définition, la matrice A est symétrique. Notons Y le vecteur des N inconnues y_1, y_2, \dots, y_N . Le problème différentiel se ramène finalement à la résolution du système linéaire

$$A.Y = B.$$

Il reste maintenant à choisir les N fonctions Φ_i de façon à ce que le système soit simple à résoudre numériquement.

Choix des fonctions Φ_i

L'intervalle $]0, 1[$ est discrétisé en N points de coordonnées x_i . Les fonctions $\Phi_i(x)$ sont choisies comme fonctions polynomiales de degré 1 définies par :

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces fonctions sont appelées les éléments finis de degré 1. Avec ces éléments finis, la matrice A est tridiagonale. Il est aussi possible de choisir pour éléments finis des fonctions de degré 2 ou plus.

Le calcul de la matrice A fait intervenir les dérivées $\Phi'_i(x)$ simples à calculer :

$$\Phi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculons maintenant les éléments de la matrice A , tridiagonale et symétrique. Les trois termes des diagonales sont :

$$a_{ii} = \int_0^1 \Phi'_i(x) \Phi'_i(x) dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i},$$

$$a_{ii+1} = \int_0^1 \Phi'_{i+1}(x) \Phi'_i(x) dx = \frac{-1}{x_{i+1} - x_i},$$

$$a_{i-1i} = \int_0^1 \Phi'_i(x) \Phi'_{i-1}(x) dx = \frac{-1}{x_i - x_{i-1}}.$$

Et calculons les composantes du vecteur B par une méthode des trapèzes (chaque intégrale sur un segment élémentaire sera évaluée comme l'aire du trapèze correspondant), soit :

$$b_i = \int_0^1 f(x) \Phi_i(x) dx = f_i \left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \right).$$

Le système linéaire à résoudre s'écrit donc, sous forme indicelle :

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} f_i, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Dans le cas où les N points de l'intervalle $]0,1[$ sont régulièrement espacés avec un pas h . La discrétisation en Eléments Finis devient :

$$\frac{2y_i - y_{i+1} - y_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Soit sous forme matricielle :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}$$

1.4.3 Méthode des Volumes Finis

La méthode des Volumes Finis consiste à intégrer, sur des volumes élémentaires, les équations écrites sous forme intégrale. C'est une méthode particulièrement bien adaptée à la discrétisation spatiale des lois de conservation, contrairement aux Eléments Finis, et est ainsi très utilisée en mécanique des fluides. Sa mise en oeuvre est simple si les volumes élémentaires ou "volumes de contrôle" sont des rectangles en 2D ou des parallélépipèdes en 3D. Cependant, la méthode des Volumes Finis permet d'utiliser des volumes de forme quelconque et donc de traiter des géométries complexes, contrairement aux Différences Finies.

Principe de la méthode : Cas monodimensionnel

Pour illustrer le principe de la méthode des Volumes Finis, on considère une loi de conservation 1D :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int y dx + \int \frac{\partial f(y)}{\partial x} dx = 0$$

Où y est une grandeur physique fonction de la variable d'espace x et du temps t et $f(y)$ est une fonction de y .

Le domaine de calcul est divisé en N mailles de centre x_i . Chaque maille a une taille $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. Les indices demi-entier désignent les interfaces de la maille avec les mailles voisines.

Le temps est discrétisé en intervalles de pas constant Δt . La fonction y est supposée constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de la moyenne. Notons y_i^n cette valeur moyenne dans la i -ème maille de centre x_i , à l'instant $t = n\Delta t$.

Ainsi, on a :

$$\forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \text{ et } t = n\Delta t, \quad y(x, t) = y_i^n.$$

La discrétisation spatiale par les Volumes Finis consiste à intégrer maille par maille la loi de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{maille}} y dx + \int_{\text{maille}} \frac{\partial f(y)}{\partial x} dx = 0.$$

Soit pour la i -ème maille de centre x_i , au temps $t = n\Delta t$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} y dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial f(y)}{\partial x} dx = 0.$$

Ce qui s'intègre comme suit :

$$h_i \frac{\partial y_i^n}{\partial t} + \hat{f}_{i+1/2}^n - \hat{f}_{i-1/2}^n = 0.$$

La quantité $\hat{f}_{i+1/2}^n$ désigne une approximation du flux $f(y)$ à l'interface $x_{i+1/2}$ et au temps $n\Delta t$. Ce flux numérique s'évalue en fonction des valeurs moyennes de y dans les mailles voisines, ce qui détermine le schéma numérique.

Une méthode d'Euler explicite est utilisée pour évaluer la dérivée en temps (d'autres schémas peuvent être utilisés, par exemple le schéma de Runge-Kutta). La formulation discrétisée en Volumes Finis de la loi de conservation est ainsi :

$$h_i \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\Delta t} + \hat{f}_{i+1/2}^n - \hat{f}_{i-1/2}^n = 0.$$

1.4.4 Exemple numérique

Dans cette partie, nous comparons les trois méthodes de discrétisation sur un simple exemple numérique. On choisit comme fonction $f(x) = \sin(\pi x)$. L'équation différentielle à résoudre est donc :

$$\begin{cases} -y''(x) &= \sin(\pi x), \quad x \in]0, 1[\\ y(0) &= y(1) = 0 \end{cases}$$

La solution analytique du problème est $y(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}$.

Notons par un indice a la solution analytique.

Divisons l'intervalle $]0, 1[$ en dix segments réguliers de pas $h = 0, 1$.

Pour les discrétisations avec les Différences Finies et les Elements Finis, il y a $N = 9$ noeuds de calculs. Et pour la méthode des Volumes Finis, il y a $N = 10$ mailles de calculs.

La solution discrète obtenue avec les Différences Finies (ou les Eléments Finis) est reportée dans le tableau 1.3 :

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
y_i	0.0316	0.06	0.0826	0.09716	0.10216	0.09716	0.0826	0.06	0.0316
$(\tilde{y}_i)_a$	0.0313	0.0595	0.082	0.09636	0.10113	0.09636	0.082	0.0595	0.0313
erreur	$9.6 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$8.3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$8.3 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-3}$	$9.6 \cdot 10^{-3}$

TABLE 1.3 – Méthode des Différences Finies et des Eléments Finis

Le calcul de la valeur moyenne de $f(x)$ dans la i -ème maille est : $\tilde{f}_i = f_i \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} h}{\frac{\pi}{2} h} \right)$.

Notons $(\tilde{y}_i)_a$ la valeur moyenne de la solution analytique calculée sur la i -ème maille soit :

$$(\tilde{y}_i)_a = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} y(x) dx = y_i \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} h}{\frac{\pi}{2} h} \right).$$

La valeur moyenne par maille obtenue avec les Volumes Finis est reportée dans le tableau 1.4.

x_i	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.95
y_i	0.01589	0.04612	0.07184	0.0905	0.1003	0.1003	0.0905	0.07184	0.01589
$(\tilde{y}_i)_a$	0.01585	0.046	0.07164	0.0902	0.1001	0.1001	0.0902	0.07164	0.01585
erreur	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$

TABLE 1.4 – Méthode des Volumes Finis

Les trois méthodes permettent d'obtenir des résultats avec une bonne précision. L'erreur la plus faible est obtenue avec la méthode des Volumes Finis.

1.5 Méthodes semi-analytiques pour la résolution des équations différentielles

Dans les trentes dernières années, des mathématiciens ont développé des méthodes semi analytiques pour la résolution des équations différentielle ordinaires, des équations intégrales et des équations aux dérivées partielles. Ces méthodes permettant d'obtenir une solution exacte ou une solution approchée avec une grande précision, même aux équations qui sont fortement non linéaire, en utilisant un schéma itératif. Parmi ces méthodes, on peut citer : Méthode de Décomposition d'Adomian [1] et méthode des Itérations Variationnelles [34].

Dans la partie suivante, nous présentons la méthode des Itérations Variationnelles pour la résolution des équations différentielles.

1.5.1 Méthode des Itérations Variationnelles

La méthode des Itérations Variationnelles (en anglais Variational Iteration Method (VIM)) a été établie par le mathématicien Chinois Ji-Huan He [34] en 1997. Cette méthode est très utilisée et très efficace pour la résolution analytique ou numérique des équations différentielles. La méthode donne des approximations de la résolution qui converge rapidement vers la solution exacte du problème si elle existe, sinon dans le cas où la solution exacte n'existe pas, alors la solution du problème est approchée par une série tronquée formée par les n premiers termes.

Principe de la méthode : Cas des équations différentielles ordinaires

Pour illustrer le principe de la méthode des itérations variationnelles, on considère l'équation différentielle écrite sous la forme canonique :

$$Ly(t) + Ny(t) = h(t), \quad (1.11)$$

où L et N sont respectivement l'opérateur linéaire et non linéaire, et h est une fonction analytique donnée.

En construisant une fonctionnelle de correction [34] associée à l'équation (1.11) dans la direction de t de la forme :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) [(Ly_n(\tau) + N\tilde{y}_n(\tau) - h(\tau))] d\tau, \quad \tau \in [0, t] \quad (1.12)$$

où λ est un multiplicateur de lagrange [41], qui peut être calculé par la théorie du calcul des variations, et \tilde{y} la variation restreinte qui signifie que $\delta\tilde{y} = 0$.

On commence par déterminer le multiplicateur de lagrange λ par une intégration par parties comme suit :

- Pour $L = \frac{d}{dt}(\cdot)$:

En mettant la fonctionnelle de correction stationnaire par rapport à y_n et posons $\delta\tilde{y}_n(0) = 0$, on aura

$$\begin{aligned} \delta y_{n+1}(t) &= \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) [(y'_n(\tau) + N\tilde{y}_n(\tau) - h(\tau))] d\tau \\ &= \delta y_n(t) + \lambda(t)\delta y_n(t) - \int_0^t \lambda'(\tau)\delta y_n(\tau)d\tau = 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

De plus, d'après l'équation (1.13), on peut obtenir facilement les conditions de stationnarité

$$\begin{cases} \delta y_n(\tau) : \lambda'(\tau) = 0, \\ \delta y_n(t) : 1 + \lambda'(t) = 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

ce qui donne $\lambda = -1$

- Pour $L = \frac{d^2}{dt^2}(\cdot)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta y_{n+1}(t) &= \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) y_n''(\tau) d\tau \\ &= \delta y_n(t) + \lambda(t) \delta y_n'(t) - \lambda'(t) \delta y_n(t) + \int_0^t \lambda''(\tau) \delta y_n(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.15)$$

avec les conditions de stationnarité

$$\begin{cases} \delta y_n(\tau) : \lambda''(\tau) = 0, \\ \delta y_n(t) : 1 - \lambda'(t) = 0, \\ \delta y_n'(t) : \lambda(t) = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

ce qui donne $\lambda(\tau) = \tau - t$.

- De manière générale, si $L = \frac{d^m}{dt^m}(\cdot)$, on obtient :

$$\lambda(\tau) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau - t)^{m-1}, \quad m \geq 1. \quad (1.17)$$

En utilisant la fonctionnelle de correction (1.12), on peut maintenant facilement choisir une approximation initiale $y_0(t)$ de la solution de problème (1.11) et les autres approximations successives $y_i(t)$, $i \geq 0$. Par conséquent, la solution exacte est donnée par :

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t). \quad (1.18)$$

Principe de la méthode : Cas des équations aux dérivées partielles

Pour illustrer le principe de la méthode des itérations variationnelle, on considère l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante :

$$Ly(x, t) + Ny(x, t) = h(x, t), \quad (1.19)$$

où L et N sont respectivement l'opérateur linéaire et non linéaire, et h est une fonction donnée.

En construisant la fonctionnelle de correction [34] associée à l'équation (1.19) dans la direction de t et x comme suit :

$$y_{n+1}(x, t) = y_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\tau) [(Ly_n(x, \tau) + N\tilde{y}_n(x, \tau) - h(x, \tau))] d\tau, \quad (1.20)$$

$$y_{n+1}(x, t) = y_n(x, t) + \int_0^x \lambda(\tau) [(Ly_n(\tau, t) + N\tilde{y}_n(\tau, t) - h(\tau, t))] d\tau, \quad (1.21)$$

où λ est un multiplicateur de lagrange [41], qui peut être calculé par la théorie du calcul des variations, et \tilde{y} la variation restreinte qui signifie que $\delta\tilde{y} = 0$.

Approche itérative de la méthode des itérations variationnelle [67]

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$Ly(t) + Ny(t) = h(t), \quad t > 0, \quad (1.22)$$

où $L = \frac{d^m}{dt^m}$, $m \in \mathbb{N}$ est un opérateur linéaire, N est un opérateur non linéaire

et $h(t)$ est une fonction analytique connue.

Les conditions initiales sont données par :

$$y^k(0) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.23)$$

avec c_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, sont des nombres réels connus.

La fonctionnelle de correction de l'équation (1.22) peut s'écrire comme suit :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) [(Ly_n(\tau) + Ny_n(\tau) - h(\tau))] d\tau. \quad (1.24)$$

En remplaçant le multiplicateur de lagrange (1.17) dans la fonctionnelle de correction (1.24), on obtient la formule itérative suivante :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau - t)^{m-1} [(Ly_n(\tau) + Ny_n(\tau) - h(\tau))] d\tau. \quad (1.25)$$

Soit \mathcal{A} un opérateur définit comme suit :

$$\mathcal{A}[y] = \int_0^t \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau - t)^{m-1} [(Ly(\tau) + Ny(\tau) - h(\tau))] d\tau, \quad (1.26)$$

et définissons les composantes v_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ comme suit :

$$\begin{cases} v_0(t) = y_0(t), \\ v_1(t) = \mathcal{A}[v_0(t)], \\ v_2(t) = \mathcal{A}[v_0(t) + v_1(t)], \\ \vdots \\ v_{k+1}(t) = \mathcal{A}[v_0(t) + v_1(t) + \dots + v_k(t)]. \end{cases} \quad (1.27)$$

Par conséquent, on aura

$$y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t). \quad (1.28)$$

En utilisant les relations (1.26) et (1.27), on peut obtenir la solution du problème (1.22), sous la forme d'une série :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t). \quad (1.29)$$

Choix de l'approximation initiale v_0

L'approximation initiale v_0 est choisie en tenant compte des conditions initiales et les conditions aux limites du problème.

Pour les problème de Cauchy, l'approximation initiale est donnée par :

$$v_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{(k)}}{k!} t^k. \quad (1.30)$$

Convergence de la méthode des itérations variationnelle

Dans cette section, on présente des résultats concernant la convergence de la méthode des itérations variationnelle.

Théorème 1.5.1. [67]

Soit \mathcal{A} l'opérateur défini en (1.26) d'un espace de Hilbert H dans H . La solution

$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$, définie en (1.29), converge si $\exists 0 < \gamma < 1$ tel que :

$$\|\mathcal{A}[v_0 + v_1 + \dots + v_{k+1}]\| \leq \gamma \|\mathcal{A}[v_0 + v_1 + \dots + v_k]\| \quad (1.31)$$

c'est-à-dire $\|v_{k+1}\| \leq \gamma \|v_k\|$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.5.2. [67]

Si la solution $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$, définie en (1.29), converge, alors elle est une solution exacte du problème (1.22).

Définissons maintenant les paramètres suivants :

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{\|v_{i+1}\|}{\|v_i\|}, & \text{si } \|v_i\| \neq 0, \\ 0, & \text{si } \|v_i\| = 0. \end{cases} \quad (1.32)$$

On énonce ensuite le théorème suivant

Théorème 1.5.3. [67]

Si les paramètres β_i , $i = 1, 2, \dots, l$ ne sont pas inférieurs à 1 et $\beta_i \leq 1$ pour $i > l$, alors la série

$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ du problème (1.22) converge vers la solution exacte du problème.

Le théorème précédent implique que les premiers termes de β_i n'ont pas d'effet sur la convergence de la série.

Résultats de convergence pour les équations différentielles ordinaires

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^m}{dt^m}y(t) + Ny(t) = h(t), & t > 0, \\ y^k(0) = c_k, & k = 0, 1, \dots, m-1, \end{cases} \quad (1.33)$$

où $m \in \mathbb{N}$ et N est un opérateur non linéaire et h est une fonction analytique donnée.

La formule itérative du problème (1.33) est donnée comme suit :

$$\begin{cases} v_{k+1}(t) = \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau-t)^{m-1} \left(\frac{d^m}{d\tau^m} [v_0(\tau) + \dots + v_k(\tau)] + N[v_0(\tau) + \dots + v_k(\tau)] - h(\tau) \right) \right] d\tau, \\ v_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} t^k. \end{cases} \quad (1.34)$$

Alors la solution $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ converge vers la solution exacte du problème (1.33) si $\exists 0 < \gamma < 1$ tel que :

$$\|v_{k+1}\| \leq \gamma \|v_k\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.35)$$

Résultats de convergence pour les équations aux dérivées partielles

Considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^m}{dt^m}y(x, t) + Ny(x, t) = h(x, t), & t > 0, \\ y^k(x, 0) = f_k(x), & k = 0, 1, \dots, m-1, \end{cases} \quad (1.36)$$

où $m \in \mathbb{N}$ et N est un opérateur non linéaire et h est une fonction analytique donnée.

La formule itérative du problème (1.36) est donnée comme suit :

$$\begin{cases} v_{k+1}(x, t) = \int_0^t \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau-t)^{m-1} \left(\frac{d^m}{d\tau^m} [v_0(x, \tau) + \dots + v_k(x, \tau)] \right. \\ \quad \left. + N[v_0(x, \tau) + \dots + v_k(x, \tau)] - h(x, \tau) \right) d\tau, \\ v_0(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x)}{k!} t^k. \end{cases} \quad (1.37)$$

Alors la solution $y(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t)$ converge vers la solution exacte du problème (1.36) si $\exists 0 < \gamma < 1$ tel que :

$$\|v_{k+1}\| \leq \gamma \|v_k\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.38)$$

1.5.2 Exemple d'application

Considérons l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x, t) - y(x, t), & 0 < x < \pi, t > 0, \\ y(x, 0) = \sin x, \\ y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \end{cases} \quad (1.39)$$

La solution exacte du problème (1.39) est donnée par

$$y(x, t) = \sin x e^{-2t} \quad (1.40)$$

La formule itérative pour le problème (1.39) est donnée comme suit :

$$\begin{cases} v_{k+1}(x, t) = - \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial \tau} v_0(x, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} v_1(x, \tau) + \dots + \frac{\partial}{\partial \tau} v_k(x, \tau) \right) \\ \quad - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1(x, \tau) + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_k(x, \tau) \right) \\ \quad + (v_0(x, \tau) + v_1(x, \tau) + \dots + v_k(x, \tau)) d\tau, \\ v_0(x, \tau) = \sin x. \end{cases} \quad (1.41)$$

De plus, les approximations successives sont données comme suit :

$$\begin{cases} v_1(x, t) = -2t \sin x, \\ v_2(x, t) = \frac{(2t)^2}{2!} \sin x, \\ v_3(x, t) = -\frac{(2t)^3}{3!} \sin x, \\ \quad \vdots \\ v_k(x, t) = -(-1)^k \frac{(2t)^k}{k!} \sin x. \end{cases} \quad (1.42)$$

Par conséquent, la solution est donnée comme suit

$$y(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t) = \sin x \left(1 - (2t) + \frac{(2t)^2}{2!} + \frac{(2t)^3}{3!} + \dots + -(-1)^k \frac{(2t)^k}{k!} \right), \quad (1.43)$$

ce qui correspond à la solution exacte (1.40).

Calculons maintenant le β_i

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \frac{\|v_1(x, t)\|}{v_0(x, t)} = 2, \\ \beta_1 = \frac{\|v_2(x, t)\|}{v_1(x, t)} = 1, \\ \beta_2 = \frac{\|v_3(x, t)\|}{v_2(x, t)} = \frac{2}{3}, \\ \beta_3 = \frac{\|v_4(x, t)\|}{v_3(x, t)} = \frac{1}{2}, \\ \vdots \\ \beta_i = \frac{\|v_{i+1}(x, t)\|}{v_i(x, t)} = \frac{2}{i}. \end{array} \right. \quad (1.44)$$

On remarque que $\beta_i < 1, \forall i \geq 2$. Donc, on en déduit que la suite de fonction générée par la méthode des itérations variationnelles converge vers la solution exacte du problème.

1.6 Conclusion

La modélisation des problèmes de contrôle se fait généralement par des équations différentielles ordinaires ou bien par des équations aux dérivées partielles. Ceci procure aux équations différentielles un rôle majeur dans la théorie du contrôle. La résolution numérique ou semi-analytiques des équations différentielles est le domaine de l'analyse numérique où les applications sont le plus nombreuses.

Chapitre 2

Introduction au contrôle optimal

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la présentation des concepts de base de la théorie du contrôle optimal. Il s'organise en six parties : Après avoir donné dans la première et la seconde partie, un bref aperçu sur la théorie du contrôle et le contrôle optimal, la troisième partie comporte des rappels sur la contrôlabilité des systèmes linéaires et des systèmes non linéaires, en se référant aux livres de E. Trélat [87, 88], livre de J. M. Coron [18] et au livre de D.G. Hull [40] pour les résultats de cette partie. La quatrième partie, dévolue aux différentes méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal, à savoir les méthodes directes [57, 68, 02] et les méthodes indirectes [87, 88, 40, 69, 70]. Dans la cinquième partie, nous avons présenté l'énoncé général du principe du maximum de Pontriaguine [70], ainsi que un aperçu sur le principe du maximum par l'approche variationnelle [87]. La sixième partie est consacrée à la présentation de quelques méthodes numériques de résolution de problème de contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués linéaires de types paraboliques, en se référant au livre de A. P. Sage et C. C. White [78], l'article de M. L. Wang et R. Y. Chang [95], l'article de S. Kazem J.A. Rad et K. Parand [45], et au livre de K. B. Datta et B. M. Mohan [20].

2.2 Système de contrôle

Définition 2.2.1.

De manière abstraite, un système de contrôle est la donnée d'un espace d'états Y , d'un espace de contrôles U et d'une loi d'évolution du type :

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), \tag{2.1}$$

où $y(t) \in Y$ est l'état du système à l'instant $t \in [0, T]$ et $u(t) \in U$ le contrôle choisi.

Notons que la complexité de l'étude d'un système de contrôle dépendra de la complexité des espaces Y et U , et surtout de la nature de l'équation d'évolution (2.1). En particulier, la distinction majeure est de savoir si Y et U sont des espaces de dimension finie (équations différentielles ordinaires) ou infinie (équations aux dérivées partielles).

Dans la partie suivante, on présente des résultats préliminaires concernant les notions de contrôle optimal et de contrôlabilité des systèmes linéaires et des systèmes non linéaires (voir par exemple les chapitres 1 et 2 du livre E. Trélat [88]).

2.3 Contrôle optimal

2.3.1 Problème posé

La formulation générale d'un problème de contrôle optimal est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(T, u) = g(T, y(T)) + \int_0^T f^0(t, y(t), u(t)) dt \rightarrow \min_u, \quad (1) \\ \dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), \quad (2) \\ y(0) = y_0 \in M_0, \quad (3) \\ y(T) = y_T \in M_T, \quad (4) \\ u \in U, t \in I = [0, T], \quad (5) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

où M_0 et M_T sont deux variétés de \mathbb{R}^n , I un intervalle de \mathbb{R} , y_0 est la position initiale du système (2), y_T est sa position finale. $u(\cdot)$ est la commande du problème (2.2) et U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

La fonction $J(T, u)$ est appelé coût, critère de qualité ou but du problème (2.2).

On distingue trois problèmes importants :

Problème de de Bolza

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$J(T, u) = g(T, y(T)) + \int_0^T f^0(t, y(t), u(t)) dt.$$

Problème de Lagrange

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$J(T, u) = \int_0^T f^0(t, y(t), u(t)) dt.$$

Problème de Mayer

Ici c'est le problème dont le critère est le suivant :

$$J(T, u) = g(T, y(T)),$$

c'est à dire $f^0 = 0$, $J(T, u)$ est le coût terminal.

L'unicité de la solution du système (2) – (4) est assurée par le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles.

Soit $y(\cdot)$ la solution de l'équation (2) du système (2.2), $y(\cdot)$ varie en fonction du contrôle u .

Avant de résoudre un problème de contrôle optimal, on se pose les questions suivantes :

Question 1 : Existe-t-il un contrôle $u \in U$ tel que la trajectoire associée à u joigne l'état initial $y_0 \in \mathbb{R}^n$ à un état final $y_T \in \mathbb{R}^n$ en un temps fini ? C'est le problème de contrôlabilité appelé aussi problème de commandabilité.

Question 2 : Si le système est contrôlable, on peut vouloir déterminer un contrôle $u \in U$ tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne l'état initial $y_0 \in \mathbb{R}^n$ à un état terminal $y_T = y(T) \in \mathbb{R}^n$, en minimisant un certain critère de performance.

2.4 Contrôlabilité

Reprenons le cas de système dynamique :

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), \quad y(0) = y_0, t \in I = [0, T]. \quad (2.3)$$

Définition 2.4.1.

le système (2.3) est dit contrôlable si pour tous points $y_0 \in M_0$ et $y_T = y(T) \in M_T$, il existe un contrôle $u(\cdot)$ telle que la trajectoire associée à u relie y_0 à y_T en un temps fini.

Pour ce problème de contrôlabilité, Kalman a donné dès 1949 une caractérisation des systèmes linéaires autonomes, contrôlables en dimension finie. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus compliqué. Il constitue un domaine de recherche actif.

2.4.1 Cas des systèmes linéaires

Commençons par définir "Ensemble accessible" :

Définition 2.4.2.

L'ensemble des points accessibles à partir de y_0 en temps T est défini comme suit :

$$Acc(y_0, T) = \{y_u(T), u \in U\},$$

où $y_u(\cdot)$ est la solution du système (2) du problème (2.2) associée au contrôle u

$Acc(y_0, T)$ est l'ensemble des extrémités terminales des solutions du système (2), en temps T lorsque le contrôle u varie.

Définition 2.4.3.

Le système (2) du problème (2.2) est dit contrôlable en temps T si

$$Acc(y_0, T) = \mathbb{R}^n.$$

Il est dit contrôlable en temps quelconque t depuis y_0 si

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{t \geq 0} Acc(y_0, t).$$

Systèmes linéaires autonomes

Le système linéaire autonome décrit par :

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad t \in I = [0, T]$$

est dit contrôlable, si pour tous points $y_0 \in M_0$ et $y_T = y(T) \in M_T$, il existe un contrôle $u(\cdot)$ dans l'ensemble U , tel que la trajectoire correspondante $y(\cdot)$ transfère le système de l'état initial donné y_0 à un état final y_T en temps fini.

Théorème 2.4.1. [88]

Le système autonome

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad t \in I = [0, T]$$

est contrôlable si la matrice

$$K = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

est de rang n .

Remarque 2.4.1.

K est une matrice à n lignes et $n \times m$ colonnes, elle est appelée matrice de Kalman.

La condition rang $K = n$ est appelée condition de Kalman.

Systèmes linéaires non autonomes

Considérons le système

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \in I = [0, T] \quad (2.4)$$

La solution du système (2.4) en temps t est

$$y(t) = R(t)y_0 + \int_0^t R(t)R^{-1}(s)B(s)u(s)ds, \quad t \in I = [0, T],$$

où $R(\cdot)$ est la résolvante, solution du système :

$$\begin{cases} \dot{R}(t) &= A(t)R(t), \\ R(0) &= Id, \end{cases}$$

où Id est la matrice identité.

Théorème 2.4.2. [88]

Le système (2.4) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice

$$D = \int_0^T R(t)^{-1}B(t)B(t)'R(t)^{-1'}dt,$$

est inversible.

D est appelée matrice de contrôlabilité.

Cas des systèmes non linéaires

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= Ay(t) + B(u(t)), \\ y(0) &= y_0, \quad u \in U, t \in I = [0, T]. \end{cases} \quad (2.5)$$

Où y est un vecteur de \mathbb{R}^n , A une matrice dans $M_n(\mathbb{R})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, fonction non linéaire du contrôle $u(\cdot)$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'état initial du système (2.5).

Pour les systèmes de contrôle non linéaires, il est impossible d'étudier la contrôlabilité globale, le problème est beaucoup plus compliqué du fait qu'on ne peut pas utiliser la caractérisation de Kalman. Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'étude de la contrôlabilité locale du système (2.5).

Définition 2.4.4.

Soit $y_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (2.5) est localement contrôlable au voisinage de y_1 en temps T depuis y_0 , si $y_1 \in \text{Acc}(y_0, T)$.

Autrement dit, il existe un voisinage V dans $V(y_1)$, tel que $V \subset \text{Acc}(y_0, T)$.

Application entrée sortie

Définition 2.4.5.

Soit $T > 0$. L'application entrée sortie en temps T du système (2.5) initialisée à y_0 est l'application

$$\begin{aligned} E_T : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\rightarrow y_u(T), \end{aligned}$$

où U est l'ensemble des contrôles u tels que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, T]$.

Etant donné un point $y_1 \in \mathbb{R}^n$, le problème est donc de trouver un temps T et un contrôle u sur $[0, T]$ telle que la trajectoire associée à u , solution du système (2.5) vérifie.

$$y_u(0) = y_0, \quad y_u(T) = y_1$$

où y_u est la solution du système (2.5) associée au contrôle u initialisée à y_0 au temps $t = 0$. On donne une autre caractérisation de la contrôlabilité locale.

Définition 2.4.6.

Soit $y_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (2.5) est localement contrôlable au voisinage de y_1 en temps T depuis y_0 , si

$$\exists V \in V(y) \mid \forall x \in V, \exists u \in U, \text{ tel que } y = E_T(u).$$

Remarque 2.4.2.

L'application entrée sortie E_T est différentiable au sens de Fréchet.

Calculons sa différentielle à l'ordre 1.

$$E_T(u + \delta u)(t) = E_T(u(t)) + dE_T(u(t))\delta u + O(\|\delta u\|_{L^\infty}), \quad t \in [0, T] \quad (2.6)$$

Soit

$$\dot{y}_{u+\delta u}(t) = Ay_{u+\delta u}(t) + B((u + \delta u)(t)), \quad y_{u+\delta u}(t) = y_0, \quad t \in [0, T],$$

Notons par $\delta y(t) = y_{u+\delta u}(t) - y_u(t)$, la variation de la trajectoire $y_u(\cdot)$.

$$\begin{aligned} \delta \dot{y}(t) &= \dot{y}_{u+\delta u}(t) - \dot{y}_u(t) \\ &= Ay_{u+\delta u}(t) + B((u + \delta u)(t)) - Ay_u(t) - B(u(t)), \quad t \in [0, T], \\ &= A(y_{u+\delta u}(t) - y_u(t)) + B((u + \delta u)(t)) - B(u(t)), \quad t \in [0, T], \\ &= A\delta y(t) + dB(u(t))\delta u(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

De la condition d'admissibilité $\delta y(0) = 0$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \delta \dot{y}(t) &= A\delta y(t) + dB(u(t))\delta u(t), \\ \delta y(0) &= 0, \quad u \in U, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.7)$$

Définition 2.4.7.

Le système (2.7) est appelé système linéarisé du système (2.5) le long de $u(\cdot)$.

La solution du système linéarisé (2.7) en temps T est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta y(T) &= \int_0^T e^{(t-s)A} dB(u(s))\delta u(s) ds, \\ dE_T(u)\delta u &= y_{u+\delta u}(T) - y_u(T), \end{aligned}$$

où $dE_T(u)$ est l'application entrée sortie du système (2.7).

Proposition 2.4.3. [88]

Le système (2.5) est localement contrôlable au voisinage de $y_1 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si E_T est localement surjective au voisinage de y_1 .

Remarque 2.4.3.

Si le système linéarisé (2.7) est contrôlable alors $dE_T(u)$ est surjective, en utilisant le théorème des fonctions implicites, on déduit que E_T est localement surjective, de la proposition 2.4.3, on déduit ainsi que le système de départ (2.5) est localement contrôlable au voisinage de y_1 .

Théorème 2.4.4. [88]

Le système (2.5) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice

$$D = \int_0^T e^{-tA} dB(u(t)) dB(u(t))' e^{-tA'} dt,$$

est inversible.

2.5 Méthodes de résolutions

Dans la littérature, on trouve deux approches de résolution des problèmes de contrôle optimal : les méthodes directe et les méthodes indirectes.

Méthodes directes

Les méthodes directes consistent à convertir le problème de contrôle optimal en un problème de programmation non linéaire en effectuant une discrétisation totale du problème. Ensuite, la commande est déterminée en résolvant le problème d'optimisation obtenu par des techniques d'optimisation classiques déterministes ou stochastiques [8]. Dans ce cas, les variables d'optimisation représentent les commandes à appliquer aux différents instants d'échantillonnage.

Parmi les méthodes directes, on trouve la méthode de résolution par l'approche de la programmation linéaire, qui est la méthode adaptée appelée aussi méthode du support [2, 57, 68]. Seulement cette méthode résout les problèmes linéaires. Elle permet d'avoir une solution approchée ou une solution exacte. Une autre méthode directe est la méthode de discrétisation du problème initial [57]. Pour un problème de départ linéaire, on fait une discrétisation de la commande. De là, on obtient un problème de programmation linéaire facile à résoudre. L'inconvénient de cette dernière approche est l'obtention d'une solution approchée.

La mise en oeuvre des méthodes directes est simple, car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable, on n'a pas à étudier les variables adjointes ou bien à connaître à l'avance la structure des commutations. Ces méthodes sont moins précises.

Une revue des différentes méthodes faisant partie de cette classe peut être trouvées dans [57, 51, 73, 8].

Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontriaguine [69, 70] qui donne une condition nécessaire d'optimalité, il faut vérifier à posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée. Ces méthodes ont l'extrême précision numérique, mais elles sont très sensibles au choix de la condition initiale. Contrairement aux méthodes directes, les méthodes indirectes nécessitent une étude théorique préalable et l'étude des variables adjointes. Pour ces méthodes, la structure des commutations doit être connue à l'avance, elles sont efficaces en toute dimension.

Il existe également des approches probabilistes [8], ces méthodes consistent à exprimer le problème de commande optimale dans des espaces de mesure, puis à rechercher la commande optimale en tant que mesure d'occupation, qui est approchée par un nombre fini de ses moments. Cette méthode utilise des outils de géométrie algébrique et elle permet de réduire le problème de contrôle optimal à un problème d'optimisation de dimension finie.

Pour plus de précisions sur les méthodes de résolution, on renvoie le lecteur aux travaux [87, 88, 40, 79, 83].

2.6 Principe du maximum de Pontriaguine

Avant d'énoncer le principe du maximum, introduisons certaines définitions et propriétés essentielles.

Définition 2.6.1.

Le contrôle u est dit extrémal sur $[0, t]$ si la trajectoire du système (2) du problème de contrôle (2.2) associée u vérifie

$$y(t) \in \partial \text{Acc}(y_0, t), \quad t \in [0, T].$$

Définition 2.6.2.

Un contrôle $u^*(t), t \in [0, T]$ est dit optimal pour le problème (2.2) si $u^*(\cdot)$ est extrémal et $J(u^*(t)) < J(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t), t \in [0, T]$.

Théorème 2.6.1. [88]

Considérons le système

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad y(0) = y_0, \quad \forall t \in [0, T]$$

Supposons que le domaine des contraintes noté Ω est compact. Le contrôle u est extrémal sur $[0; T]$ si et seulement si il existe une solution non triviale $p(t)$, de l'équation $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ telle que :

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v, \quad \text{pour presque tout } t \in [0, T]. \quad (2.8)$$

Remarque 2.6.1.

- Le vecteur $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.
- Si $\Omega = [-a, a], a \in \mathbb{R}$ positif, la condition (2.8) signifie que

$$u(t) = \text{sign}(p(t)B(t))$$

On dit que $u(t)$ est bang-bang.

Dans ce cas, la fonction $\gamma(t) = p(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation. Le temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t), t \in [0, T]$ change de signe est appelé temps de commutation.

On énonce par la suite le théorème principal de cette partie :

Théorème 2.6.2. [88]

Considérons le système de contrôle dans \mathbb{R}^n

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), \quad (2.9)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , les contrôles sont des applications mesurables bornées à valeurs dans $\Omega \in \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_f deux sous ensembles de \mathbb{R}^n . Notons par U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_f en temps t .

On définit le coût

$$J(T, u) = g(T, y(T)) + \int_0^T f^0(t, y(t), u(t)) dt$$

où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , $y(\cdot)$ est la solution de (2.9) associée au contrôle u .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_f en minimisant le coût J (le temps final peut être fixé ou non.).

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $y(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, appelé vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$ tel que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial et tels que pour presque tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, y(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (2.10)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}(t, y(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (2.11)$$

où $H(t, y, p, p^0, u) = p'(t)f(t, y, u) + p^0 f^0(t, y, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$.

$$H(t, y(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(t, y(t), p(t), p^0, v). \quad (2.12)$$

Si de plus le temps final pour joindre M_f n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\max_{v \in U} H(t, y(t), p(t), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, y(T)). \quad (2.13)$$

Si de plus M_0 et M_f (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $y(0) = y_0 \in M_0$ et $y(T) = y_f \in M_f$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalités aux deux extrémités (ou juste l'une des deux) :

$$p(0) \perp T_{y(0)}M_0, \quad (2.14)$$

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, y(T)) \perp T_{y(T)}M_f, \quad (2.15)$$

Remarque 2.6.2.

Si f et f^0 ne dépendent pas du temps t c'est à dire si le système considéré est autonome, alors l'Hamiltonien H ne dépend pas de t et on a :

$$\forall t \in [0, T], \max_{v \in U} H(t, y(t), p(t), p^0, v) = \text{Cste.}$$

Définition 2.6.3.

Les conditions (2.14) et (2.15) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

Remarque 2.6.3.

Lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximisation 2.12 devient

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

2.6.1 Exemple d'application

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \int_0^T dt \rightarrow \min_u, \\ \dot{x}(t) = u(t), \\ \dot{y}(t) = x(t), \\ |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

On cherche à résoudre le problème de temps minimal pour atteindre le point final $(-2, 2)$, en allant de l'origine en appliquant Le principe du maximum.

L'Hamiltonien du problème (2.16) est

$$H(t, x(t), y(t), p_x(t), p_y(t), p^0, u) = p_x(t)u + p_y(t)x(t) + p^0$$

où p_x et p_y sont les composantes du vecteur adjoint. Elles sont solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_x(t) = \frac{-\partial H}{\partial x} = -p_y(t) \\ \dot{p}_y(t) = \frac{-\partial H}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

ce qui est équivalent au système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} p_y(t) = \text{Cste} = \lambda \\ p_x(t) = -\lambda t + c \end{array} \right.$$

Reprenons l'expression de l'Hamiltonien : $H = p_x(t)u + p_y(t)x(t) + p^0$, alors quelque soit la valeur de p^0 ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}(p_x(t)u + p_y(t)x(t)), \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \Leftrightarrow u = \text{sign}(p_x(t)). \end{aligned}$$

De la, le contrôle extrémal sera le suivant :

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } p_x(t) < 0 \\ +1 & \text{si } p_x(t) > 0 \end{cases}$$

On remarque que Les contrôles extrémaux ont en plus une commutation. Soit t_c , ce temps de commutation. La trajectoire obtenue pour $u(t) = 1$ sur $[0, t_c]$ et pour $u(t) = -1$ sur $[t_c, T]$ est :

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in [0, t_c], \text{ on obtient } & \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 \end{cases} \\ \text{Si } t \in [t_c, T], \text{ on obtient } & \begin{cases} x(t) = -t + t_c \\ y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t_c t - \frac{1}{2}t_c^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Les résultats d'un tel problème sont tracés dans la figure suivante :

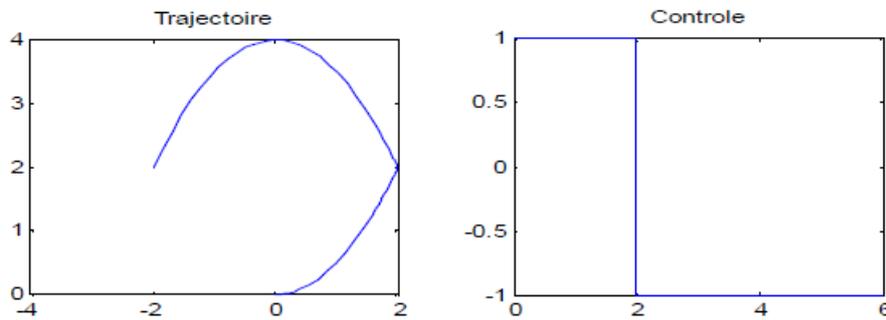


FIGURE 2.1 – Trajectoire et commande optimales par le principe du maximum

2.6.2 Principe du maximum par l'approche variationnelle

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = g(y(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} dt \rightarrow \min_u \\ \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), \\ y(t_0) = y_0, \\ u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [t_0, t_f]. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Soit $u^*(t), t \in [0, t_f]$ une commande optimale, et $y^*(t), t \in [0, t_f]$ sa trajectoire correspondante.

Posons

$$u(t) = u^*(t) + h\eta(t), \quad t \in [t_0, t_f]$$

et

$$y(t) = y^*(t) + h\Phi(t), \quad y_0 = y^*(t_0), \quad \Phi(t_0) = 0,$$

où $\eta(t)$ et $\Phi(t)$ sont des directions et h le pas.

Du système (26), on aura

$$\dot{y}(t) = \dot{y}^*(t) + h\dot{\Phi}(t) = f(y^*(t), h\Phi(t), u^*(t) + h\eta(t), t)$$

$$= f(y^*(t), u^*(t), t) + \frac{\partial f}{\partial y} h\Phi(t) + \frac{\partial f}{\partial u} h\eta(t) + O(h)$$

où $\frac{\partial f}{\partial y}$ est le jacobien de f par rapport à y , $\frac{\partial f}{\partial u}$ est le Jacobien de f par rapport à u , et $O(h)$ est un vecteur de \mathbb{R}^n vérifiant $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h)}{h} = 0$.

De la relation précédente, on obtient

$$h\dot{\Phi}(t) = \frac{h\partial f}{\partial y} \Phi(t) + \frac{h\partial f}{\partial u} \eta(t) + O(h)$$

ce qui est équivalent à

$$h\dot{\Phi}(t) = \frac{\partial f}{\partial y} \Phi(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \eta(t) + \frac{Oh}{h}$$

De l'admissibilité de y et y^* , on a $y(t_0) = y_0 = y^*(t_0)$, ce qui donne $\Phi(t_0) = 0$.

Notons par Ψ la solution de l'équation différentielle :

$$\dot{\Psi}(t) = f((y^*), u^*(t), t)\Psi(t) + f((y^*), u^*(t), t)\eta(t), \quad \Psi(t_0) = 0.$$

En utilisant cette solution, on déduit que

$$y(t) = y^*(t) + h\Psi(t) + O(h)$$

Notons par $p(t)$, $t \in [0, T]$, une fonction continue de \mathbb{R}^n et soit la fonction Hamiltonienne

$$H(y, p, u, t) = f^0(y, u, t) + pf(y, u, t)$$

En utilisant ces dernières fonctions, la fonctionnelle J du problème (2.17) prend la forme suivante :

$$J(u) = g(y(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} (H(y(t), p(t), u(t), t) - p(t)\dot{y}(t)) dt$$

La variation de la fonctionnelle J sera :

$$J(u(t)) - J(u^*(t)) = g(y(t_f) - g(y^*(t_f))) + \int_{t_0}^{t_f} (H(y(t), p(t), u(t), t) - H(y^*(t), p(t), u^*(t), t)) dt \\ + \int_{t_0}^{t_f} p(t)(\dot{y}^*(t) - \dot{y}(t)) dt.$$

En faisant un développement par la formule de Taylor, on obtient :

$$H(y(t), p(t), u(t), t) = H(y^*(t), p(t), u^*(t), t) + \nabla H|_y (y - y^*) + \nabla H|_u (u - u^*) + O(h)$$

où $\nabla H|_y$ est le gradient de H par rapport à y et où $\nabla H|_u$ est le gradient de H par rapport à u .

En utilisant la solution $\Psi(t), t \in [t_0, t_f]$, on obtient :

$$H(y(t), p(t), u(t), t) = H(y^*(t), p(t), u^*(t), t) + h \nabla H|_y \Psi(t) + h \nabla H|_u \eta(t) + O(h)$$

et

$$g(y(t_f)) = g(y^*(t_f)) + h \nabla g|_y \Psi(t) + O(h).$$

Trouvons pour $t \in [0, t_f]$ une relation entre $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$:

De ce qui précède, on a

$$h \dot{\Phi}(t) = h \dot{\Psi}(t) + h \nabla H|_y (\Phi(t) - \Psi(t)) + O(h)$$

de là

$$\dot{y}^*(t) - \dot{y}(t) = -h \dot{\Psi}(t) + O(h) \tag{2.18}$$

En utilisant (2.18), la variation de la fonctionnelle J devient :

$$J(u) - J(u^*) = h \nabla g|_y \Psi(t) + h \int_{t_0}^{t_f} \nabla H|_y \Psi(t) dt + h \int_{t_0}^{t_f} \nabla H|_u \eta(t) dt - \int_{t_0}^{t_f} p(t) \dot{\Psi}(t) dt + O(h).$$

En utilisant l'intégrale suivante,

$$\int_{t_0}^{t_f} p(t) \dot{\Psi}(t) dt = p(t_f) \Psi(t_f) - p(t_0) \Psi(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \dot{p}(t) \Psi(t) dt$$

et comme $\Psi(t_0) = 0$, on obtient :

$$J(u) - J(u^*) = \langle h \nabla g |_y - p(t_f), \Psi(t_f) \rangle + h \int_{t_0}^{t_f} [\langle \nabla H |_y p(t), \Psi(t) \rangle + \langle \nabla H |_u p(t), \eta(t) \rangle] dt.$$

Et comme u^* est optimale c'est dire $J(u) - J(u^*) \geq 0$, on déduit

$$\langle h \nabla g |_y - p(t_f), \Psi(t_f) \rangle + h \int_{t_0}^{t_f} [\langle \nabla H |_y p(t), \Psi(t) \rangle + \langle \nabla H |_u p(t), \eta(t) \rangle] dt = 0 \quad (2.19)$$

Les conditions que doit vérifier le vecteur $p(t)$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= \frac{\partial H}{\partial y}(y^*(t), p(t), u^*(t), t) \\ &= - \left[\frac{\partial f^0}{\partial y}(y^*(t), p(t), u^*(t), t) \right] - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(y^*(t), p(t), u^*(t), t) \right] p(t)' \end{aligned} \quad (2.20)$$

où $\frac{\partial f}{\partial y}$ est le Jacobien de f par rapport à y .

De là

$$\langle \nabla g |_y - p(t_f), \Psi(t_f) \rangle + \int_{t_0}^{t_f} \langle \nabla H |_u p(t), \eta(t) \rangle dt = 0$$

De la relation (2.19), on cherche $p^*(t)$ solution du système (2.20) avec la condition initiale

$$p^*(t_f) = p_0 \frac{\partial g}{\partial y}(y^*(t_f)).$$

Finalement on obtient :

$$\int_{t_0}^{t_f} \langle \nabla H |_u p(t), \eta(t) \rangle dt = 0$$

quelque soit $\eta(t)$.

Lemme 2.6.3. [87]

Soit $h(t), \ell(t) \in I = [0, t_f]$ deux fonctions continues sur I . Supposons que

$$\int_{t_0}^{t_f} \langle h(t), \ell(t) \rangle dt = 0, \quad \forall \ell(t), \text{ continue sur } I, \text{ alors } h(t) = 0$$

En utilisant ce lemme et de ce qui précède, on obtient :

$$\nabla H|_{u=0} = 0$$

La fonction $H(x^*(t), p^*(t), p(t), t)$ de la variable u possède un extrémum pour $u = u^*(t), t \in [0, t_f]$.

On énonce par la suite le théorème principal de cette partie :

Théorème 2.6.4. [87]

La condition nécessaire d'optimalité du contrôle $u^*(t), t \in [0, t_f]$ et de sa trajectoire correspondante $y^*(t)$ vérifiant $y^*(t) = y_0$ est l'existence de la fonction $p^*(t), t \in [t_0, t_f]$ solutions des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{y}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(y^*(t), p(t), u^*(t), t), \\ \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial y}(y^*(t), p(t), u^*(t), t), \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $y^*(t_0) = y_0, p^*(t_f) = \frac{\partial g}{\partial y}(y^*(t_f))$, telle que :

$$H(y^*, p^*(t), u^*(t), t) = \min_{u \in U} H(y^*, p^*(t), u(t), t)$$

Pour que $u^*(t), t \in [0, t_f]$ soit un minimum local de J du problème (2.17), il est suffisant que :

- (1) $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$,
- (2) $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$ définie positive,
- (3) la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} & \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{pmatrix}$ soit semi-définie positive .

2.7 Méthode numérique de résolution de problème de contrôle optimal des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles

Dans cette partie, nous nous sommes consacrés à la présentation de quelques méthodes numériques de résolution de problème de contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués linéaires de types paraboliques [77]. Parmi ces méthodes, on utilise généralement deux méthodes, à savoir les méthodes directes et les méthodes indirectes.

2.7.1 Méthodes directes

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de départ en un autre problème plus simple à résoudre en utilisant différentes techniques de résolution, telles que la semi-discrétisation, la discrétisation totale ou la méthode de paramétrisation.

La technique de semi-discrétisation [78], basée sur la méthode des ligne [90], consiste à approcher les dérivées spatiales de l'équation d'état par des équations aux différences en utilisant la technique des différence finies. En conséquence, l'équation d'état donnée par un système d'équation aux dérivées partielles est transformée en un système d'équations différentielles ordinaires. En faisant une approximation de la fonction coût par les quadratures de Gauss, le problème de contrôle de départ est transformé en un problème de contrôle optimal décrit par un système d'équations différentielles ordinaires.

La technique de discrétisation totale [45] permet de transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation statique en utilisant une discrétisation d'espace et de temps. Cette technique repose sur plusieurs différentes méthodes telles que la méthodes des différence finies, la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis.

En utilisant la technique de paramétrisation [76, 20], la résolution se fait en trois étapes. La première étape consiste à transformer le problème de départ à un problème de contrôle en dimension finie. La deuxième étape consiste à transformer le problème obtenu de la première étape soit à un problème d'optimisation statique ou à un problème aux limites. La troisième étape, consiste à déterminer la solution du problème obtenu.

Dans les sous-paragraphes suivants, nous allons illustré les principes de ces méthodes, en se référant au livre de A. p. Sage et C. C. White [78], l'article de M. L. Wang et R. Y. Chang [95], l'article de S. Kazem J.A. Rad et K. Parand [45], et au livre de K. B. Datta et B. M. Mohan [20].

2.6.1.1 Semi-Discrétisation

Pour illustrer le principe de la méthode de semi-discrétisation, On considère le problème de contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués suivant [78] :

$$\min_{u(x,t)} J(u(x,t)) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_0^l [qy^2(x,t) + ru^2(x,t)] dxdt, \quad (2.21)$$

sous la contrainte

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t), \quad (x,t) \in [0,l] \times]0,t_f[, \quad (2.22)$$

avec la condition initiale,

$$y(x,0) = f(x), \quad (2.23)$$

et les conditions aux limites,

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = 0, \quad \text{pour } x = 0, \text{ et } x = l, \quad (2.24)$$

où $q \geq 0$ et $r \geq 0$.

La technique de semi-discrétisation consiste à transformer l'équation d'état donnée par une équation aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires. Cette transformation se fait en remplaçant les dérivées spatiales par des équations aux différences en utilisant la technique des différences finies.

Approximation de l'équation d'état

On subdivise l'intervalle $[0, l]$ en N sous intervalles de longueur $= \frac{l}{N}$, et on définit les noeuds de discrétisation x_k comme suit :

$$x_k = kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (2.25)$$

Au point (x_k, t) , on approche les fonctions $y(x, t)$, $\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$ et $u(x, t)$ par $y_k(t)$, $\dot{y}_k(t)$ et $u_k(t)$, respectivement. En utilisant la technique des différences finies centrées d'ordre 2, on approche la dérivée seconde $\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$ au point (x_k, t) comme suite :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_k, t) = \frac{y_{k+1}(t) - 2y_k(t) + y_{k-1}(t)}{h^2}, \quad (2.26)$$

l'équation d'état (2.22) devient :

$$\dot{y}_k(t) = \frac{1}{h^2}(y_{k+1}(t) - 2y_k(t) + y_{k-1}(t)) + u_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (2.27)$$

ce qui est équivalent au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_0(t) = \frac{1}{h^2}(y_1(t) - 2y_0(t) + y_{-1}(t)) + u_0(t), \\ \dot{y}_1(t) = \frac{1}{h^2}(y_2(t) - 2y_1(t) + y_0(t)) + u_1(t), \\ \dot{y}_2(t) = \frac{1}{h^2}(y_3(t) - 2y_2(t) + y_1(t)) + u_2(t), \\ \vdots \\ \dot{y}_N(t) = \frac{1}{h^2}(y_{N+1}(t) - 2y_N(t) + y_{N-1}(t)) + u_N(t). \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Pour obtenir les valeurs de $y_{-1}(t)$ et $y_{N+1}(t)$, on utilise la technique des différences finies d'ordre 1 au point $x = 0$ et $x = l$, et on aura :

$$\frac{y_{k+1}(t) - y_k(t)}{h} = 0 \Rightarrow y_{k+1}(t) = y_k(t), \quad (2.29)$$

d'où $y_{N+1}(t) = y_N(t)$ et $y_0(t) = y_{-1}(t)$.

En remplaçant les variables $y_{N+1}(t)$ et $y_{-1}(t)$ par leurs valeurs dans le système (2.28), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_0(t) = \frac{1}{h^2}(y_1(t) - 2y_0(t)) + u_0(t), \\ \dot{y}_1(t) = \frac{1}{h^2}(y_2(t) - 2y_1(t) + y_0(t)) + u_1(t), \\ \dot{y}_2(t) = \frac{1}{h^2}(y_3(t) - 2y_2(t) + y_1(t)) + u_2(t), \\ \vdots \\ \dot{y}_N(t) = \frac{1}{h^2}(-y_N(t) + y_{N-1}(t)) + u_N(t). \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Qu'on peut réécrire sous forme matricielle comme suit :

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad (2.31)$$

avec

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

et B est la matrice identité d'ordre $N + 1$.

Approximation de la fonction coût

En utilisant la méthode des trapèzes, on transforme de la fonction coût (2.21) donnée par une intégrale double en intégrale simple comme suit :

$$J(u(t)) = \frac{h}{2} \int_0^{t_f} \left[\left(\frac{1}{2} q y_0^2(t) + \sum_{k=1}^{N-1} q y_k^2(t) + \frac{1}{2} q y_N^2(t) \right) + \left(\frac{1}{2} r u_0^2(t) + \sum_{k=1}^{N-1} r u_k^2(t) + \frac{1}{2} r u_N^2(t) \right) \right] dt,$$

qu'on peut réécrire

$$J = \frac{h}{2} \int_0^{t_f} [y^T(t) Q y(t) + u^T(t) R u(t)] dt,$$

avec

$$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r} = \text{diag} \left[\frac{1}{2}, 1, 1, \dots, 1, \frac{1}{2} \right].$$

Formulation du problème approché

le problème de contrôle optimal à paramètres localisés est donnée comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \frac{h}{2} \int_0^{t_f} [y^T(t) Q y(t) + u^T(t) R u(t)] dt, \quad (2.32)$$

sous les contraintes

$$\dot{y}(t) = A y(t) + B u(t), \quad (2.33)$$

avec la condition initiale,

$$y(0) = y_0, \quad (2.34)$$

où $y_0 = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)]$.

2.6.1.2. La technique de paramétrisation

La technique de paramétrisation consiste à approcher les variables d'état et de contrôle par une somme finie de termes s'écrivant comme un produit de fonctions à variables séparées, c'est à dire :

$$y(x, t) = \sum_{i=0}^N y_i P_i(x),$$

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^N u_i P_i(x),$$

où les P_i , $i = 1, \dots, N$ sont des fonctions polynômiales connues telles que les polynômes de Legendre et les polynômes de Chebychev [20]. Les y_i et u_i , ($i = 1, \dots, N$) sont des fonctions inconnues à déterminer. Cette technique est basée sur les matrices opérationnelles d'intégration pour transformer le problème de départ en un problème de contrôle à paramètres localisés.

La technique de paramétrisation peut être employée en utilisant différentes fonctions orthogonales, telle que les fonctions de Walsh, les polynômes de Legendre, et les polynômes de Chebyshev [20].

Les fonctions orthogonales ont été utilisée de manière intense ces derniers temps pour approcher la solution des systèmes dynamiques [80], les problèmes de contrôle optimal des systèmes à paramètres localisés [76, 59, 96], et sont également utilisées pour approcher la solution des problèmes de contrôle optimal à paramètres distribués [84, 95, 38, 13, 58, 77].

Pour mieux illustrer le principe de la méthode de paramétrisation par les fonctions orthogonales, nous traitons le cas des polynômes de Legendre.

Dans la partie suivante, on présente des résultats préliminaires concernant les polynômes de Legendre décalés (voir par exemple livre de K. B. Datta et B. M. Mohan [20]).

Polynôme de Legendre

Les fonctions de Legendre représentent les solutions de l'équation différentielle de Legendre donnée par :

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} \bar{P}_n(x) \right) + n(n+1) \bar{P}_n(x) = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad (2.35)$$

où $\bar{P}_n(x)$ désignent les polynômes de Legendre.

En faisant un changement de variable, on pose

$$x = \frac{2t}{t_f} - 1, \quad (2.36)$$

on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt} \left(t(t_f - t) \frac{d}{dt} P_n(t) \right) + n(n+1) P_n(t) = 0, \quad t \in [-1, 1]. \quad (2.37)$$

On appelle l'équation différentielle (2.37) équation différentielle décalée de Legendre, où t_f peut être choisi arbitrairement et $P_n(t)$ désignent les polynômes de Legendre décalés.

La solution de l'équation (2.35) est donnée par :

$$\begin{cases} \bar{P}_0(x) = 1, \\ \bar{P}_1(x) = x, \\ \bar{P}_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ \vdots \\ \bar{P}_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}, \end{cases} \quad (2.38)$$

avec

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \quad (2.39)$$

et la solution de l'équation (2.37) est donnée par :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = \frac{2t}{t_f} - 1, \\ \bar{P}_2(x) = 6 \left(\frac{t}{t_f} \right)^2 - 6 \frac{t}{t_f} - 1, \\ \vdots \\ \bar{P}_n(x) = \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j (2n-j)!}{j!((n-j)!)^2} \left(\frac{t}{t_f} \right)^{n-j}, \end{cases} \quad (2.40)$$

avec

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad (2.41)$$

On présente ensuite quelques propriétés des polynômes de Legendre décalés :

Orthogonalité

Les polynômes de Legendre décalés satisfont la propriété de l'orthogonalité sur $[0, t_f]$:

$$\int_0^{t_f} P_i(t) P_j(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ \frac{t_f}{2i+1} & \text{si } j = i. \end{cases} \quad (2.42)$$

Récurtivité

Une autre propriété importante des polynômes de Legendre décalés est la récursivité suivante :

$$P_{i+1}(t) = \frac{2i+1}{i+1} \phi(t) P_i(t) - \frac{i}{i+1} P_{i-1}(t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.43)$$

avec

$$\phi(t) = \frac{2t}{t_f} - 1, \quad (2.44)$$

et $P_0(t) = 1$ et $P_1(t) = \phi(t)$.

De plus les polynômes de Legendre décalés satisfont la propriété suivante :

$$\left(\frac{2(2i+1)}{t_f} \right) P_i(t) = \dot{P}_{i+1}(t) - \dot{P}_{i-1}(t). \quad (2.45)$$

Approximation de la fonction intégrables

Soit $f(t)$ une fonction de carée intégrable sur $[0, t_f]$, alors $f(t)$ peut être exprimée en termes de polynômes de Legendre décalé comme suit :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i P_i(t) = f^T P(t), \quad (2.46)$$

où

$$f^T = [f_0, f_1, \dots, f_{m-1}]^T, \quad (2.47)$$

est le spectre de Legendre de $f(t)$, et

$$[P_0(t), P_1(t), \dots, P_{m-1}(t)]^T, \quad (2.48)$$

est le vecteur de polynômes de Legendre décalés.

Les coefficients f_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, m-1$) sont déterminés comme suit :

$$f_i = \frac{(2i+1)}{t_f} \int_0^{t_f} f(t) P_i(t) dt. \quad (2.49)$$

Supposons que la dérivée de la fonction $f(t)$ est donnée par :

$$\dot{f}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i P_i(t), \quad (2.50)$$

et en utilisant la formule de récurrence (2.45), la relation entre les coefficients f_i de l'équation (2.46) et les g_i de l'équation (2.50) est donnée comme suit :

$$f_i = \frac{h}{2} \left[\frac{g_{i-1}}{(2i-1)} - \frac{g_{i+1}}{(2i+3)} \right]. \quad (2.51)$$

Si la série dans l'équation (2.51) est tronquée jusqu'à l'ordre $m - 1$, alors l'équation (2.51) peut s'écrire comme suit :

$$F = KG, \quad (2.52)$$

où

$$F = [f_1, f_2, \dots, f_{m-1}], \quad (2.53)$$

$$G = [g_1, g_2, \dots, g_{m-2}], \quad (2.54)$$

et K est une $(m - 1) \times (m - 1)$ matrice donnée comme suit :

$$K = \frac{t_f}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{5} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{5} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{-1}{9} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2m-7} & 0 & \frac{1}{2m-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2m-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2m-3} \end{bmatrix}$$

En transformant par la suite le problème de contrôle optimal à paramètres distribués (2.21)–(2.24) en un problème de contrôle optimal à paramètres localisés, plus précisément en un problème de contrôle optimal décrit par des équations différentielles ordinaires.

Approximation des problèmes de contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués

On approche d'abord les fonctions $y(x, t)$ et $u(x, t)$ par des séries de Legendre décalées finies comme suit :

$$y(x, t) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(t) P_i(x) = Y^T(t) P(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.55)$$

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i(t) P_i(x) = U^T(t) P(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.56)$$

où

$$Y(t) = [y_0(t), y_1(t), \dots, y_{n-1}(t)]^T, \quad (2.57)$$

$$U(t) = [u_0(t), u_1(t), \dots, u_{n-1}(t)]^T, \quad (2.58)$$

$$P(x) = [P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-1}(x)]^T, \quad (2.59)$$

et les $P_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$ sont des polynômes de Legendre décalés définis sur $[0, l]$.

En multipliant l'équation (2.22) par $P^T(x)$, et en utilisant les équations (2.56) – (2.57), ensuite en intégrant par rapport à x , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^l \dot{Y}^T(t) P(x) P^T(x) dx &= \int_0^l Y^T(t) \ddot{P}(x) P^T(x) dx + \int_0^l U^T(t) P(x) P^T(x) dx \\ &= -Y^T(t) \int_0^l \dot{P}(x) \dot{P}^T(x) dx + \int_0^l U^T(t) P(x) P^T(x) dx. \end{aligned} \quad (2.60)$$

En utilisant la propriété de l'orthogonalité (2.42), on aura :

$$\int_0^l P(x) P^T(x) dx = l \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Si on pose

$$d_{ij} = \int_0^l \dot{P}_i(x) \dot{P}_j(x) dx, \quad (2.62)$$

on obtient alors

$$\int_0^l \dot{P}(x) \dot{P}^T(x) dx = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & d_{0,n-1} \\ d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{n-1,0} & d_{n-1,1} & \dots & d_{n-1,n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

où

$$d_{ij} = d_{ji} = \begin{cases} \frac{2i(i+1)}{l} & \text{si } i \leq j \text{ et } i+j = 0 \text{ ou pair,} \\ 0 & \text{si } i \leq j \text{ et } i+j = 0 \text{ est impair.} \end{cases} \quad (2.64)$$

En remplaçant les équations (2.62) et (2.64) dans l'équation (2.61), on obtient le système de contrôle décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + U(t), \quad (2.65)$$

avec

$$A = -(D)^{-1}V^T = \frac{-1}{l} \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & d_{0,n-1} \\ 3d_{10} & 3d_{11} & \dots & 3d_{1,n-1} \\ 5d_{20} & 5d_{21} & \dots & 5d_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (2n-1)d_{n-1,0} & (2n-1)d_{n-1,1} & \dots & (2n-1)d_{n-1,n-1} \end{bmatrix},$$

où

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix},$$

$$\text{et } V = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & d_{0,n-1} \\ d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{n-1,0} & d_{n-1,1} & \dots & d_{n-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

En remplaçant les équations (2.55)-(2.56) et (2.61) dans (2.21), la fonction coût devient

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [Y^T Q Y(t) + U^T(t) R U(t)] dt, \quad (2.66)$$

où

$$Q = q \int_0^l P(x) P^T(x) dx = qD, \quad (2.67)$$

$$R = r \int_0^l P(x) P^T(x) dx = rD, \quad (2.68)$$

Le problème de contrôle optimal à paramètres distribués est maintenant réduit à un problème de contrôle à paramètres localisés, donnée par le problème quadratique suivant :

$$\begin{cases} J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [Y^T Q Y(t) + U^T(t) R U(t)] dt, \\ \dot{Y}(t) = AY(t) + U(t), \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \quad (2.69)$$

2.7.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes se font en deux étapes, la première partie repose sur la dérivation des conditions nécessaires d'optimalité par le principe du minimum de Pontriaguine [70], et la deuxième étape fait recours à une méthode numérique pour la résolution des équations aux dérivées partielles [53]. Autrement dit, la méthode indirecte résout le problème indirectement en convertissant le problème de contrôle en un problème aux limites. Par conséquent, dans les méthodes indirectes, la solution du problème est obtenue en résolvant un système d'équation aux dérivées partielles et la solution obtenue satisfait les conditions initiales et les conditions aux limites. On se réfère aux livres de J. L. Lions [53, 54], l'article de A. Borzi [9], et au livre de O. Von Stryk et R. Bulirsch [92] pour la présentation de cette méthode.

Pour illustrer le principe de cette approche, on considère le problème de contrôle optimal suivant : Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un compact connexe, $\partial\Omega$ est de la classe C^∞ .

$$\min J(u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2, \quad (2.70)$$

sous les contraintes

$$-\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \Delta y(x, t) = u(x, t), \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, t_f), \quad (2.71)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.72)$$

$$y(x, t) = 0, \quad \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \times (0, t_f), \quad (2.73)$$

où $y_0(x) \in H_0^1(\Omega)$, $\nu > 0$ est le poids de la fonction coût et y_d est l'état désiré. En appliquant le principe du minimum de Pontriaguine, le système (2.70)-(2.73) est caractérisé par les conditions d'optimalité suivantes :

$$-\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \Delta y(x, t) - \frac{1}{\nu} p(x, t), \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \Delta p(x, t) + (y - y_d), \quad (2.75)$$

$$u = \frac{1}{\nu} p, \quad (2.76)$$

avec la condition initiale $y(x, 0) = y_0(x)$ et la condition terminale pour l'équation de l'état adjoint $p(x, t_f) = 0$.

Approximation des conditions d'optimalité

Dans [9] Borzi a proposé une approche basée sur la structure des différences finies et le schéma d'Euler implicite pour le système des conditions d'optimalité (2.74)-(2.76).

Soit $h > 0$ un pas de discrétisation de domaine d'espace et soit la suite de noeuds $\{\Omega_h\}_{h>0}$ définie comme suit :

$$\Omega_h = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_j = jh, \quad j \in \mathbb{Z}\} \cap \Omega. \quad (2.77)$$

On suppose que Ω est un carré et que les valeurs de la grille spatiale de pas h sont choisies de telle sorte que les frontières de Ω coïncident avec les lignes de la grille.

Soit $\Delta t = \frac{t_f}{N_t}$ la longueur de pas de discrétisation de domaine du temps, et on définit le maillage

$$Q_{h,\Delta t} = \{(x, t_m) : x \in \Omega_h, t_m = (m-1)\Delta t, \quad 1 \leq m \leq N_t + 1\}. \quad (2.78)$$

On approche la dérivée temporelle $\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$ au point $x \in \Omega_h$ et $t = t_m$ soit par le schéma implicite

$$\partial_t^+ y_h^m = \frac{y_h^m - y_h^{m-1}}{\Delta t}, \quad (2.79)$$

ou bien par le schéma explicite

$$\partial_t^- y_h^m = \frac{y_h^{m+1} - y_h^m}{\Delta t}, \quad (2.80)$$

et on approche l'opérateur laplacien Δy au point $x \in \Omega_h$ et $t = t_m$ par la formule des cinq points comme suit :

$$\Delta y_h^m = \frac{y_{i+1,j}^m + y_{i-1,j}^m - 4y_{i,j}^m + y_{i,j+1}^m + y_{i,j-1}^m}{h^2}, \quad (2.81)$$

Soit V_h l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur l'intervalle $[t_m, t_{m+1})$ défini sur le cylindre Q_h comme suit :

$$V_h = \{v_h \mid v_h(t) = v_h(t_m) \text{ pour } t \in [t_m, t_{m+1}), \quad v_h(t_m) \in L_h^2(\Omega_h)\}. \quad (2.82)$$

Soient $\tilde{R}_{h,Q} : L^2(Q) \rightarrow V_h$ et $R_{h,Q} : H^{2,1}(Q) \rightarrow V_h$ des opérateurs de restriction [32], tel que

$$\|\tilde{R}_{h,Q}v - R_{h,Q}v\|_0 \leq k h^2 \|v\|_{H^{2,1}(Q)}, \quad (2.83)$$

où $\|\cdot\|_0$ désigne la norme associée au produit scalaire discret sur $L^2(Q)$ et k est une constante positive.

Soit y_h^m et u_h^m les approximations de la solution $y(x, t)$ et $u(x, t)$ au point $x \in \Omega_h$ et $t = t_m$, respectivement. le problème (2.70)-(2.73), peut être réécrit comme suit :

$$\min \frac{1}{2} \|y_h^m - R_{h,Q}y_d\|_0^2 + \frac{\nu}{2} \|u_h^m\|_0^2, \quad (2.84)$$

sous la contrainte

$$-\partial_t^+ y_h^m + \Delta_h y_h^m = u_h^m. \quad (2.85)$$

et les conditions nécessaires d'optimalité sont données par :

$$-\partial_t^+ y_h^m + \Delta_h y_h^m = \frac{\Delta t}{\nu} p_h^m, \quad (2.86)$$

$$\partial_t^1 p_h^m + \Delta_h p_h^m = -\Delta t (y_h^m - \tilde{y}_{dh}^m). \quad (2.87)$$

Le schéma numérique est

$$-(1 + 4\gamma)y_{ij}^m + \gamma(y_{i+1,j}^m + y_{i-1,j}^m + y_{i,j+1}^m + y_{i,j-1}^m) + y_{i,j}^{m-1} = \frac{\Delta t}{\nu} p_{i,j}^m, \quad 2 \leq m \leq N_t + 1, \quad (2.88)$$

$$-(1 + 4\gamma)p_{ij}^m + \gamma(p_{i+1,j}^m + p_{i-1,j}^m + p_{i,j+1}^m + p_{i,j-1}^m) + p_{i,j}^{m+1} = -\Delta t (y_{i,j}^m - \tilde{y}_{di,j}^m), \quad 1 \leq m \leq N_t. \quad (2.89)$$

avec $\gamma = \frac{\Delta t}{h^2}$, $2 \leq i, j \leq N_x$ et $\tilde{y}_d = \tilde{R}_{h,Q} y_d$.

2.8 Conclusion

Ce chapitre dédié à la présentation des concepts de base de la théorie du contrôle optimal. Après la formulation mathématique des problèmes de contrôle optimal, on a étudié la notion de contrôlabilité des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. On a énoncé le principe du maximum de (PMP) qui donne une condition nécessaire d'optimalité et la programmation dynamique de Hamilton-Jacobi-Bellman qui fournit une condition suffisante d'optimalité. Puis on a donné les différentes méthodes de résolution de problème de contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués linéaires de types paraboliques.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude de problème de contrôle en temps optimal.

Chapitre 3

Contrôle en temps optimal

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire quelques concepts de base sur le problème de contrôle en temps optimal en dimension finie (ou contrôle des équations différentielles ordinaires) et en dimension infinie (ou contrôle des équations aux dérivées partielles). Plus précisément, on cherche à étudier l'existence et l'unicité d'un contrôle en temps optimal et de donner des conditions pour lesquelles le principe du maximum et la propriété de type bang-bang [7] sont satisfaits. Ces résultats ont été découverts dans l'article de R. Bellman, I. Glicksberg et O. Gross [7], et l'article de H.O. Fattorini [24]. L'extension en dimension infinie est premièrement apparue dans l'article de H.O. Fattorini [25] et est beaucoup développée dans le livre de J.L. Lions [53] et le livre de H.O. Fattorini [26]. On se réfère aussi aux livres de E. Trélat [87], livre de C. Ting WU [100], et aux livres de J. Lohéac [55, 56] pour la présentation de ce chapitre

Nous commençons par énoncer le problème sous une forme générale pour les systèmes linéaires :

Soient X, U deux espaces de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X)$ et $B \in \mathcal{L}(U, X)$.

On considère l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 \in X, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $u \in L^\infty([0, T]; U)$ et $\|u(t)\|_{L^\infty([0, T]; U)} \leq 1$ pour $t \in [0, T]$ p.p..

Définition 3.1.1. *On dit qu'un élément $y_f \in X$ est accessible s'il existe un réel strictement positif $\tau > 0$, et u dans $L^\infty([0, \tau]; U)$ tels que :*

$$\|u(t)\|_{L^\infty([0, \tau]; U)} \leq 1, \quad \text{pour } t \in [0, \tau] \text{ p.p.,} \quad (3.2)$$

et tels que la solution de (3.1) satisfasse :

$$y(\tau) = y_f. \quad (3.3)$$

L'objectif est de trouver le contrôle u^* qui vérifie (3.2) et (3.3) avec le temps final τ^* le plus petit possible.

3.2 Contrôle en temps optimal en dimension finie

Nous présentons ici quelques résultats centraux en dimension finie. Ces résultats sont issus de l'article de R. Bellman, I. Glicksberg et O. Gross [7], de livre de C.Ting WU [100], et de l'article de H.O. Fattorini [24].

On considère la même équation que celle décrite dans l'introduction avec $X = \mathbb{R}^n$ et $U = \mathbb{R}^m$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 \in X, \end{cases} \quad (3.4)$$

où $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ et $u \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$.

On suppose que $u(t) \in K$, pour presque tout $t \in [0, T]$, où K est un voisinage compact convexe de 0 dans \mathbb{R}^m .

Et on note également $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^n (et de \mathbb{R}^m).

On notera aussi $\mathcal{L}_K(t)$ l'ensemble admissible des contrôles :

$$\mathcal{L}_K(t) = \{u \in L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m); \text{Ran } u \in K\}. \quad (3.5)$$

La solution y de (3.4) s'écrit sous la forme :

$$y(t) = S(t)y_0 + \Phi_t u, \quad t \in [0, T], \quad (3.6)$$

avec $\Phi_t u = \int_0^t S(t - \sigma)Bu(\sigma)d\sigma$, où $S(t) = e^{tA}$.

Notons par $y(t, y_0, u) = S(t)y_0 + \Phi_t u$ la trajectoire de la solution engendrée par u .

On définit aussi deux ensembles accessibles à partir du point 0 :

$$R^\infty(t) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = \Phi_t u, u \in L^\infty([0, t]; \mathbb{R}^m)\}, \quad (3.7)$$

$$R_K^\infty(t) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = \Phi_t u, u \in \mathcal{L}_K(t)\}. \quad (3.8)$$

On peut maintenant donner une définition d'un problème de contrôle en temps optimal :

Définition 3.2.1.

Soient $y_0, y_f \in \mathbb{R}^n$, avec y_f accessible. On dit qu'un contrôle $u^* \in \mathcal{L}_K(\tau^*)$ avec $y_f = S(\tau^*)y_0 + \Phi_{\tau^*}u^*$ est optimal en temps, si pour tout $u \in \mathcal{L}_K(t)$ tel que : la solution de l'équation (3.4) vérifie $y(t) = y_f$, on a $t \geq \tau^*$.

On énonce dans le théorème suivant l'existence d'un contrôle en temps optimal.

Théorème 3.2.1. [100]

Si y_f du problème (3.4) est accessible, alors il existe un contrôle en temps optimal.

3.2.1 Principe du maximum et la propriété de bang-bang

Les problèmes de contrôle en temps optimal sont des problèmes classiques pour les systèmes finies. On voit que pour tels systèmes, il est bien connu (c.f R. Bellman, I. Glicksberg et O. Gross [7]) qu'ils satisfont le principe du maximum de Pontriaguine et qu'ils conduisent à un contrôle bang-bang.

On définit tout d'abord ce que l'on entend par "Le principe du maximum de Pontriaguine" en dimension finie :

Définition 3.2.2. (Principe du maximum)

On dit qu'un contrôle $u^* \in \mathcal{L}_K(t)$ vérifie le **principe du maximum** s'il existe $\eta \in \mathbb{R}^n, \eta \neq 0$ tel que :

$$\langle B^*S(t-\sigma)^*\eta, u^*(\sigma) \rangle = \max_{u \in K} \langle B^*S(t-\sigma)^*\eta, u \rangle, \text{ pour } \sigma \in [0, t] \text{ p.p.} \quad (3.9)$$

Dans la partie suivante, on donne une condition nécessaire de l'optimalité en temps. Plus précisément, on verra qu'un contrôle en temps optimal satisfait le principe du maximum. De plus, en ajoutant une condition supplémentaire, il possède la propriété de bang bang. On verra qu'en supposant des conditions sur le point initial ou le point final, le principe du maximum devient une condition suffisante d'optimalité en temps.

On commence par énoncer deux lemmes utiles pour le théorème principal.

Lemme 3.2.2. [10]

On a des équivalences entre les trois assertions suivantes :

- (a) $\forall t > 0, \text{int } R_K^\infty(t) \neq \emptyset$
- (b) $\forall t > 0, R^\infty(t) = \mathbb{R}^n$
- (c) $(\forall \sigma > 0, B^*S(\sigma)^*\eta = 0) \Rightarrow \eta = 0$ (3.10)

Lemme 3.2.3. [10]

Supposons que (3.10) est vraie. Alors, on peut définir une norme dans $R^\infty(t) = \mathbb{R}^n$ par

$$\|y\|_{R^\infty(t)} = \inf\{\|u\|_{L^\infty([0,t];\mathbb{R}^m)} \mid y = \Phi_t u, u \in L^\infty([0,t];\mathbb{R}^m)\}. \quad (3.11)$$

Cette norme est équivalente à toutes les normes de \mathbb{R}^n .

De plus, si on définit pour tout $t > 0$ une constante $C_t > 0$ par

$$C_t = \sup_{y \neq 0, y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\|y\|_{R^\infty(t)}}{\|y\|_X} \right\}, \quad (3.12)$$

alors $t \rightarrow C_t$ est décroissante.

On a aussi besoin d'un théorème de séparation qui est une conséquence du théorème de Hahn-Banach [10] (voir par exemple le théorème 1.13 du livre de V. Barbu et T. Precupanu [4]).

Définition 3.2.3.

Soit C un sous ensemble, convexe et non vide d'un espace de Hilbert X .
On dit que $\tilde{x} \in C$ est un point d'appui de C s'il existe $f \in X'$ telle que :

$$\sup\{f(x), x \in C\} = f(\tilde{x}).$$

Théorème 3.2.4. [4]

Soit C un sous ensemble convexe d'un espace de Hilbert X .
Si $\text{int } C \neq \emptyset$, alors pour tout $x \in \partial C$, x est un point d'appui de C .

On énonce maintenant le théorème le plus important de cette section qui montre que le principe du maximum est une condition nécessaire d'optimalité en temps [7, 100].

Théorème 3.2.5. (Principe du maximum, condition nécessaire)[7].

Si $u^* \in \mathcal{L}_K(\tau^*)$ est un contrôle optimal en temps τ^* , alors u^* vérifie le principe du maximum (3.9).

On énonce ensuite le théorème concernant la propriété de bang-bang. on verra que si u satisfait le principe du maximum (3.9) et si la propriété (3.10) est vraie, alors u possède la propriété de type bang-bang (3.13).

Corollaire 3.2.6. (Propriété de bang-bang).

Si on a (3.10) et si u^* est un contrôle optimal en temps τ^* , alors

$$u^*(t) \in \partial K \text{ pour } t \in [0, \tau^*] \text{ p.p.} \quad (3.13)$$

Démonstration.

On remarque que le lemme 3.2.3 nous assure que $B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta \neq 0$ si $\eta \neq 0$.

D'après le théorème 3.2.5, on sait qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}^n, \eta \neq 0$ tel que u^* vérifie (3.9).

Nous pouvons définir pour tout $\sigma \in [0, \tau^*]$

$$\tilde{u}(\sigma) = \frac{B^*S(t - \sigma)^*\eta}{\|B^*S(t - \sigma)^*\eta\|} \text{ et } \rho(\sigma) = \max_{\rho \in \mathbb{R}^+} \{\rho \mid \rho \tilde{u}(\sigma) \in K\}. \quad (3.14)$$

Il est clair que $\rho(\sigma)\tilde{u}(\sigma) \in \partial K$.

De plus, comme u^* vérifie (3.9), on obtient que pour tout $\sigma \in [0, \tau^*]$:

$$\langle B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta, u^*(\sigma) \rangle \geq \langle B^*S(\tau^* - \sigma)^*\eta, \rho(\sigma)\tilde{u}(\sigma) \rangle = \rho(\sigma)\|B^*S(t - \sigma)^*\eta\|. \quad (3.15)$$

Pour σ fixé, on peut projeter $u^*(\sigma)$ selon la direction $\tilde{u}(\sigma)$. Alors,

$$u^*(\sigma) = r\tilde{u}(\sigma) + v, \quad (3.16)$$

avec $\langle \tilde{u}(\sigma), v \rangle = 0$ et $r \leq \rho(\sigma)$.

Par (3.15) et (3.16), on a :

$$\begin{aligned} \rho(\sigma)\|B^*S(t-\sigma)^*\eta\| &\leq \langle B^*S(\tau^*-\sigma)^*\eta, u^*(\sigma) \rangle = \langle B^*S(\tau^*-\sigma)^*\eta, r\tilde{u}(\sigma) \rangle \\ &= r\|B^*S(t-\sigma)^*\eta\| \leq \rho(\sigma)\|B^*S(t-\sigma)^*\eta\|. \end{aligned}$$

Donc $u^* = \rho(\sigma)\tilde{u}(\sigma) \in \partial K$, pour $\sigma \in [0, \tau^*]$ p.p. □

On énonce dans le théorème suivant une condition suffisante pour qu'un contrôle u^* soit optimal en temps.

Théorème 3.2.7. *(Principe du maximum, condition suffisante)[7].*

Supposons qu'on a la propriété (3.10). Si un contrôle $u^ \in \mathcal{L}_K(\tau^*)$ vérifie le principe du maximum (3.9) et si on a $y_0 = 0$ ou $y_f = 0$, alors u^* est un contrôle en temps optimal.*

3.2.2 Unicité et principe d'optimalité d'un contrôle en temps optimal

On commence par définir la notion de convexité stricte [4].

Définition 3.2.4.

On dit qu'un ensemble C est strictement convexe si

$$\forall x, y \in C, x \neq y \Rightarrow \forall t \in]0, 1[, tx + (1-t)y \in \text{int } C.$$

On énonce ensuite la proposition qui traite l'unicité d'un contrôle en temps optimal :

Proposition 3.2.8. *Si $K \subseteq \mathbb{R}^m$ est strictement convexe et si la propriété (3.10) est vraie, alors le contrôle en temps optimal est unique.*

Démonstration.

Supposons u, v deux contrôles optimaux en temps t .

D'après le corollaire 3.2.6, u, v possèdent la propriété de bang-bang. Autrement dit :

$$u(\sigma), v(\sigma) \in \partial K \text{ pour } \sigma \in [0, t]$$

Si $u \neq v$, alors il existe $e \subset [0, t]$ de mesure strictement positive, tel que :

$$u(\sigma) \neq v(\sigma), \text{ pour tout } \sigma \in e.$$

On pose $w = \frac{u+v}{2}$.

Il est clair que w est aussi un contrôle en temps optimal.

Or par la convexité stricte de K , pour tout $\sigma \in e$, $w(\sigma)$ est à l'intérieur de K , ce qui est contradictoire avec la propriété de bang-bang. D'où l'unicité.

□

On énonce finalement une propriété d'optimalité :

Proposition 3.2.9. (*Principe d'optimalité*) [7].

Supposons que u^ est un contrôle optimal en temps τ^* .*

Pour $t \in [0, \tau^]$, on considère le problème de contrôle en temps optimal avec le même point initial y_0 et $y_f = y(t, y_0, u^*)$.*

Alors, u^ est aussi le contrôle optimal en temps t , qui entraîne y_0 à $y(t, y_0, u^*)$.*

3.3 Notions de contrôlabilité et d'observabilité

Dans cette section, nous présentons quelques résultats concernant les notions de contrôlabilité et d'observabilité classiques (voir par exemple les chapitres 6 et 11 du livre de G. Weiss et M. Tucsnak [89], et au livre de E. Zuazua [102]). On voit aussi quelques notions particulières dont on a besoin plus tard.

On considère le système linéaire suivant en dimension infinie.

Soient X et U deux espaces de Hilbert. On identifie U et U' (respectivement X et X') dans toute la suite, où U' est le dual de U .

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 \in X, \end{cases} \quad (3.17)$$

où $A : D(A) \rightarrow X$ est un opérateur qui engendre un semigroupe $S(t)$ fortement continu, B est un opérateur dans $\mathcal{L}(U, X)$ et $u \in L^2([0, T]; U)$.

On sait que la solution de (3.17) s'écrit :

$$y(t) = S(t)y_0 + \Phi_t u, \quad t \in [0, T]$$

avec

$$\Phi_t u = \int_0^t S(t - \sigma)Bu(\sigma)d\sigma, \quad \Phi_t \in \mathcal{L}(L^2([0, t]; U), X). \quad (3.18)$$

Commençons d'abord par décrire quelques définitions dont on a besoin plus tard :

3.3.1 Définitions

Définition 3.3.1.

- On dit que le système (3.17) (ou (A, B)) est exactement contrôlable en temps t si $\text{Ran } \Phi_t = X$.
- On dit que (A, B) est approximativement contrôlable en temps t si $\text{Ran } \Phi_t$ est dense dans X .
- Soit $e \subset [0, t]$ un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive. On dit que (A, B) est approximativement contrôlable en temps t sur e si l'image de la fonction $\Phi_{t,e} \in \mathcal{L}(L^2([0, t]; U), X)$ définie par :

$$\Phi_{t,e} = \int_0^t \chi_e(\sigma) S(t - \sigma) B u(\sigma) d\sigma$$

est dense dans X , où χ_e est la fonction indicatrice de l'ensemble e .

On présente ensuite les notions d'observabilités :

Définition 3.3.2.

Supposons que $C \in L(X, U)$. On définit un opérateur d'observation en temps t , noté Ψ_t par

$$(\Psi_t y_0)(\sigma) = C S(\sigma) y_0, \quad \forall y_0 \in X, \quad \forall \sigma \in [0, t] \quad (3.19)$$

On sait que $\Psi_t \in \mathcal{L}(X, L^2([0, t]; U))$.

De plus, on peut aussi définir un opérateur d'observation en temps t sur e , avec $e \subset [0, t]$ de mesure strictement positive noté $\Psi_{t,e}$, par :

$$\Psi_{t,e} = \chi_e \Psi_t, \quad \Psi_{t,e} \in \mathcal{L}(X, L^2([0, t]; U)). \quad (3.20)$$

Définition 3.3.3.

- On dit que (A, C) est exactement observable en temps t si Ψ_t est borné inférieurement, c'est à dire :

$$\exists c > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x\|_X \leq c \|\Psi_t x\|_{L^2([0, T]; U)}.$$

- On dit que (A, C) est approximativement observable en temps t si $\text{Ker } \Psi_t = \{0\}$.
- Soit $t > 0$ et $e \subset [0, t]$ de mesure strictement positive. On dit que (A, C) est approximativement observable en temps t sur e si $\text{Ker } \Psi_{t,e} = \{0\}$.

On a besoin d'introduire les notions de contrôlabilité à zéro :

Définition 3.3.4.

- On dit que (A, B) est contrôlable à zéro en temps $t > 0$ si $\text{Ran } S(t) \subset \text{Ran } \Phi_t$.
- On dit que (A, B) est L^∞ -contrôlable à zéro en temps $t > 0$ si $\text{Ran } S(t) \subset \Phi_t(L^\infty(0, t]; U)$.
- On dit que (A, B) est contrôlable à zéro en temps $t > 0$ sur e si $\text{Ran } S(t) \subset \text{Ran } \Phi_{t,e}$.
- On dit que (A, B) est L^∞ -contrôlable à zéro en temps $t > 0$ sur e si $\text{Ran } S(t) \subset \Phi_{t,e}(L^\infty(0, t]; U)$.

3.3.2 Dualité entre la contrôlabilité et l'observabilité

Avant de présenter la dualité entre la contrôlabilité et l'observabilité, on a besoin d'introduire le lemme suivant :

Lemme 3.3.1. [101]

Soient X_1, X_2 et X_3 trois espaces de Banach, $G : D(G) \subseteq X_2 \rightarrow X_3$ un opérateur linéaire, fermé et de domaine dense et $F \in \mathcal{L}(X_1, X_3)$. Alors, on a les équivalences (a) \Leftrightarrow (b), (c) \Leftrightarrow (d) et (e) \Leftrightarrow (f), où :

(a) $\text{Ran } F \subset \text{Ran } G$;

(b) $\exists c_1 > 0, \{Fy \mid y \in X_1, \|y\|_{X_1} \leq c_1\} \subset \{Gx \mid x \in D(G), \|x\|_{X_2} \leq 1\}$;

(c) $\exists c_2 > 0, \forall x \in X_3, \|F^*x\|_{X_1} \leq c_2 \|G^*x\|_{X_2}$;

(d) $\exists c_3 > 0, \{Fy \mid y \in X_1, \|y\|_{X_1} \leq c_3\} \subset \overline{\{Gx \mid x \in D(G), \|x\|_{X_2} \leq 1\}}$;

(e) $\overline{\text{Ran } F} \subset \overline{\text{Ran } G}$;

(f) $\text{Ker } G^* \subset \text{Ran } F^*$.

Si on a de plus que X_2 est réflexif, alors (a) \rightarrow (c).

On note Ψ_t^d l'opérateur d'observation pour (A^*, B^*) en temps $t > 0$, et $\Psi_{t,e}^d = \chi_e \Psi_t^d$, c'est à dire :

$$\Psi_t^d(\sigma) = B^*S(\sigma)^*, \quad \forall \sigma \in [0, t]. \quad (3.21)$$

$$\Psi_{t,e}^d(\sigma) = \chi_e(\sigma)B^*S(\sigma)^*, \quad \forall \sigma \in [0, t]. \quad (3.22)$$

On note aussi \mathfrak{R}_t l'opérateur de réflexion sur $L^2([0, t]; U)$ défini par :

$$\mathfrak{R}_t u(\sigma) = u(t - \sigma) \text{ pour tout } \sigma \in [0, t]$$

De plus, on remarque que \mathfrak{R}_t est autoadjoint et unitaire.

On énonce ensuite un théorème concernant la dualité entre la contrôlabilité et l'observabilité, en se référant au livre de M. Tucsnak and G. Weiss [89].

Théorème 3.3.2. [89](Dualité entre la contrôlabilité et l'observabilité)

1. (A, B) est exactement contrôlable en temps $t > 0$ si et seulement si l'opérateur $\Phi_t^* \in \mathcal{L}(X, L^2([0, t]; U))$, où Φ_t^* défini par :

$$(\Phi_t^* y)(\sigma) = \Re_t \Psi_t^d(\sigma) = B^* S(t - \sigma)^* y, \quad \forall y \in X, \quad \forall \sigma \in [0, t]. \quad (3.23)$$

est borné inférieurement

2. Soit $t > 0$ et $e \in [0, t]$ de mesure strictement positive. On note $e' := \{t - \sigma \mid \sigma \in e\}$.

Alors, on a $\Phi_{t,e}^* \in \mathcal{L}(X, L^2([0, t]; U))$ défini par :

$$(\Phi_{t,e}^* y)(\sigma) = \Re_t \Psi_{t,e'}^d(\sigma) = \chi_e(\sigma) B^* S(t - \sigma)^* y, \quad \forall y \in X, \quad \forall \sigma \in [0, t]. \quad (3.24)$$

De plus, (A, B) est approximativement contrôlable en temps t sur e si et seulement si (A^*, B^*) est approximativement observable en temps t sur e' .

Remarque 3.3.1.

d'après la première assertion du théorème 3.3.2, on a :

$$\begin{aligned} (A, B) \text{ est exactement contrôlable en temps } t > 0, \\ \Leftrightarrow \exists K_t > 0, \forall y \in X, \quad K_t \|\Phi_t^* y\|_{L^2([0, t]; U)} \geq \|y\|_X. \end{aligned} \quad (3.25)$$

On appelle C_t le coût du contrôle, la plus petite constante K_t pour que (3.25) soit vraie.

Remarque 3.3.2.

• Dans toute la suite du chapitre 3, on va voir plusieurs notations pour le coût du contrôle. On choisit de les noter par la façon suivante :

◦ Pour le problème concernant la norme $L^\infty([0, t]; U)$, on rajoute un indice ∞ au dessus, c'est à dire C_t^∞ .

◦ Pour le problème où on cherche à amener le système à zéro, on rajoute un indice 0 au dessus, c'est à dire C_t^0 .

◦ Pour le problème où le support de contrôle est inclus dans $e \in [0, t]$ de mesure strictement positive, on rajoute un indice e au dessous, c'est à dire $C_{t,e}$.

On présente par la suite un théorème concernant la dualité entre la contrôlabilité à zéro et une inégalité d'observabilité.

Théorème 3.3.3. [89]

Soient $t > 0, e \in [0, t]$ de mesure strictement positive et $e' := \{t - \sigma \mid \sigma \in e\}$.

Alors, on a l'équivalence entre :

- (i) (A, B) est contrôlable à zéro en temps t sur e ,
- (ii) $\exists K_{t,e} > 0, \forall y \in X, K_{t,e} \|\Psi_{t,e'}^d y\|_{L^2([0,t];U)} \geq \|S(t)^* y\|_X$.

On appelle les inégalités de type (ii) inégalité d'observabilité et $C_{t,e}^0$ coût de contrôle, la plus petite constante $K_{t,e}$ pour que l'inégalité d'observabilité soit vraie.

Remarque 3.3.3.

Prenons $e = [0, t]$ dans le théorème précédent. On obtient la dualité classique entre la contrôlabilité à zéro et une inégalité d'observabilité, c'est à dire :

$$\begin{aligned} & (A, B) \text{ est contrôlable à zéro en temps } t > 0, \\ \Leftrightarrow & \exists K_t > 0, \forall y \in X, K_t \|\Phi_t^* y\|_{L^2([0,t];U)} \geq \|S(t)^* y\|_X. \end{aligned} \quad (3.26)$$

On note par analogie à la remarque 3.3.1, C_t^0 la plus petite constante K_t pour que l'inégalité (3.26) soit vraie et on l'appelle le coût du contrôle.

3.3.3 Contrôle dans l'espace $L^\infty([0, t]; U)$

Dans cette section on présente quelques résultats utiles pour contrôler le système par des contrôles dans $L^\infty([0, t]; U)$ au lieu de $L^2([0, t]; U)$. On se réfère au livre de O. Carja [11], livre de C. T. WU [100] et au livre de H. O. Fattorini [26] pour les résultats de cette section.

On définit un ensemble de contrôles admissibles, que l'on note $\mathcal{L}_1(t)$ par

$$\mathcal{L}_1(t) = \{u \in L^\infty([0, t]; U) \mid \|u\|_{L^\infty([0,t];U)} \leq 1\}. \quad (3.27)$$

On définit aussi deux autres ensembles accessibles à partir du point 0 :

$$\mathcal{R}^\infty(t) = \{y \in X \mid y = \Phi_t u, u \in L^\infty([0, t]; U)\}, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{B}_1^\infty(t) = \{y \in X \mid y = \Phi_t u, u \in \mathcal{L}_1(t)\}. \quad (3.29)$$

Lemme 3.3.4. [11]

On définit une norme pour l'espace $R^\infty(t)$ par :

$$\|y\|_{R^\infty(t)} = \inf \{ \|u\|_{L^\infty([0,t];U)} \mid u \in L^\infty([0,t];U), \Phi_t u = y \} \quad (y \in R^\infty(t)). \quad (3.30)$$

Alors, $(R^\infty(t), \|\cdot\|_{R^\infty(t)})$ est un espace de Banach.

De plus, pour tout $0 < s < t$, on a les inclusions continues suivantes :

$$R^\infty(s) \subset R^\infty(t) \subset X.$$

On peut maintenant énoncer le lemme suivant :

Lemme 3.3.5. [26]

Si (A, B) est exactement contrôlable en temps t , alors les normes $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_{R^\infty(t)}$ sont équivalentes. De plus, si on définit C_t^∞ par :

$$C_t^\infty = \sup_{y \neq 0, y \in X} \left\{ \frac{\|y\|_{R^\infty(t)}}{\|y\|_X} \right\} \quad (3.31)$$

alors $t \rightarrow C_t^\infty$ est décroissante en temps.

Remarque 3.3.4.

Si on suppose que (A, B) est L^∞ -contrôlable à zéro en temps t sur e . Alors pour tout $y_0 \in X$, on peut définir un ensemble A_{t,e,y_0} non vide par :

$$A_{t,e,y_0} := \{u \in L^\infty([0,t];U) \mid S(t)y_0 + \Phi_{t,e}u = 0\}. \quad (3.32)$$

On peut par analogie définir le coût du contrôle comme une constante :

$$C_{t,e}^{\infty,0} = \sup_{y_0 \neq 0, y_0 \in X} \left\{ \frac{\inf_{u \in A_{t,e,y_0}} \{ \|u\|_{L^\infty([0,t];U)} \}}{\|y_0\|_X} \right\} \quad (3.33)$$

Il est clair que $t \rightarrow C_{t,e}^{\infty,0}$ est décroissante.

On donne ensuite la dualité entre la L^∞ -contrôlabilité à zéro en temps $t > 0$ sur $e \in [0, t]$ de mesure strictement positive et un type d'inégalité d'observabilité.

Théorème 3.3.6. [26]

Soient $t > 0, e \in [0, t]$ de mesure strictement positive et $e' := \{t - \sigma \mid \sigma \in e\}$.

Alors, on a l'équivalence entre :

(i) (A, B) est L^∞ -contrôlable à zéro en temps t sur e , et le coût du contrôle $C_{t,e}^{\infty,0}$ est plus petit qu'une constante $K_{t,e}$.

(ii) $\exists K_{t,e} > 0, \forall y \in X, K_{t,e} \|\Psi_{t,e'}^d y\|_{L^2([0,t];U)} \geq \|S(t)^* y\|_X$.

3.4 Contrôle en temps optimal en dimension infinie

On commence par décrire le système en dimension infinie.

Soient X et U et deux espaces de Hilbert. On identifie U et U' (respectivement X et X') dans toute la suite, où U' est le dual de U .

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 \in X, \end{cases} \quad (3.34)$$

où $A : D(A) \rightarrow X$ est un opérateur qui engendre un semigroupe $S(t)$ fortement continu, B est un opérateur dans $\mathcal{L}(U, X)$ et $u \in L^\infty([0, T]; U)$.

On sait que la solution de (3.34) s'écrit :

$$y(t) = S(t)y_0 + \Phi_t u, \quad t \in [0, T]$$

avec

$$\Phi_t u = \int_0^t S(t - \sigma)Bu(\sigma)d\sigma, \quad \Phi_t \in \mathcal{L}(L^2([0, t]; U), X). \quad (3.35)$$

On rappelle que l'on note $y(t, y_0, u) = S(t)y_0 + \Phi_t u$ la trajectoire de la solution.

On garde les notations pour les ensembles $\mathcal{L}_k(t)$ (3.5), $R^\infty(t)$ (3.28) et $B_1^\infty(t)$ (3.29).

On redéfinit la notion de l'optimalité en temps dans la dimension infinie, comme dans la définition 3.2.1.

Définition 3.4.1.

On dit qu'un point $y \in X$ est accessible en temps $t > 0$ si $y - S(t)y_0 \in B_1^\infty$.

Soient $y_0, y_f \in X$, avec y_f accesible. On dit qu'un contrôle $u^ \in \mathcal{L}_1(\tau^*)$ avec $y_f = S(\tau^*)y_0 + \Phi_{\tau^*}u^*$ est optimal en temps, si :*

$\forall u \in \mathcal{L}_1(t)$ la solution de l'équation (3.34) vérifie $y(t) = y_f$, on a $t \geq \tau^$.*

On redéfinit aussi le principe du maximum et la propriété de bang-bang dans la dimension infinie.

Définition 3.4.2.

On dit qu'un contrôle $u^ \in \mathcal{L}_1(t)$ vérifie le **principe du maximum** si il existe $\eta \in X, \eta \neq 0$ t.q. :*

$$\langle B^*S(t - \sigma)^*\eta, u^*(\sigma) \rangle = \max_{u \in U, \|u\|_U \leq 1} \langle B^*S(t - \sigma)^*\eta, u \rangle, \quad \text{pour } \sigma \in [0, t] \text{ p.p.} \quad (3.36)$$

Définition 3.4.3.

On dit qu'un contrôle $u \in \mathcal{L}_1(t)$ possède la propriété de bang-bang si

$$\|u(\sigma)\|_U = 1 \quad \text{pour tout } \sigma \in [0, t] \text{ p.p.} \quad (3.37)$$

On établit dans le théorème suivant l'existence d'un contrôle optimal en temps, en se référant au livre de H.O. Fattorini [24].

Théorème 3.4.1. [24]

Soient $y_0, y_f \in X$, avec y_f accessible. Alors, le contrôle en temps optimal existe.

3.4.1 Principe du maximum et la contrôlabilité exacte

Dans cette partie, on présente quelques résultats sur le principe du maximum et la contrôlabilité exacte pour les systèmes infinis. On voit qu'en supposant la contrôlabilité exacte du système, le contrôle optimal en temps vérifie le principe du maximum (théorème 3.4.2). De plus, en supposant un type de contrôlabilité approchée du système, on peut établir la propriété de bang-bang (théorème 3.4.3). Ces résultats sont obtenus dans l'article de J. Lohéac et M. Tucsnak [55].

Résultat principal

Avant d'énoncer le résultat principal, on commence par un théorème du livre de Fattorini [26], qui montre qu'un contrôle optimal en temps doit satisfaire le principe du maximum.

Théorème 3.4.2. [26]

Supposons que (A, B) est exactement contrôlable en tout $t > 0$. Si u^* est un contrôle optimal en temps τ^* , alors u^* vérifie le principe du maximum (3.36).

Avec le théorème précédent, on peut facilement déduire un résultat concernant la propriété de bang-bang, en se référant à l'article de J. Lohéac et M. Tucsnak [55].

Théorème 3.4.3. (Propriété de bang-bang)[55]

Supposons que (A, B) est exactement contrôlable en tout $t > 0$ et que u^* est un contrôle optimal en temps τ^* .

Si (A, B) est approximativement contrôlable en temps τ^* sur tout sous-ensemble $e \in [0, \tau^*]$ de mesure strictement positive, alors u^* possède la propriété de bang-bang (3.37).

Enfin si de plus U est strictement convexe, alors le contrôle optimal en temps est unique.

Remarque 3.4.1.

Soit $(U, \|\cdot\|)$ est un espace normé.

On dit que U est strictement convexe si :

$$\forall x, z \in U, x \neq z, (\|x\| = \|z\| = 1) \Rightarrow \left\| \frac{x+z}{2} \right\| < 1.$$

Application aux équations de type Schrödinger

Considérons les équations de type Schrödinger avec un contrôle interne. Plus précisément, on considère l'équation

$$\begin{cases} \dot{y}(x, t) &= -i\Delta y(x, t) + ia(x)y(x, t) + \mathbb{1}_\omega(x)u(x, t), & \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ y(x, t) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ y(x, t=0) &= y_0 \in L^2(\Omega), & \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.38)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, ω est un ouvert de Ω non vide, $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et u est un contrôle vérifiant $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\omega)} \leq 1$.

On écrit d'abord le système (3.38) sous une forme formelle :

Posons $X = L^2(\Omega)$ et $U = L^2(\omega)$. On définit l'opérateur A par :

$$A := \begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow X \\ \varphi \rightarrow A\varphi = -i\Delta\varphi + ia(x), \end{cases}$$

et l'opérateur $B \in \mathcal{L}(U, X)$ par :

$$Bu = \chi_\omega, \quad u \in L^2(\omega).$$

Avec les notations ci-dessus le système (3.38) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 \in X, \end{cases} \quad (3.39)$$

Dans [89], M. Tucsnak et G. Weiss ont étudié la contrôlabilité exacte du système (3.38). ils démontrent que si on a la contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes, alors on aura la contrôlabilité exacte pour l'équation de Schrödinger (théorème 6.7.2 de [89]).

On peut donc appliquer le théorème (3.4.2), qui montre que le contrôle optimal en temps du système (3.38) doit satisfaire le principe du maximum.

De plus, la contrôlabilité approchée en tout $t > 0$ sur tout $e \subset [0, t]$ de mesure strictement positive du système (3.38) a été démontrée par J. Lohéac et M. Tucsnak [55]. Enfin, on peut appliquer le théorème 3.4.3 pour obtenir la la propriété de bang-bang (3.37).

Remarque 3.4.2.

Dans cette partie, on a vu qu'en supposant la contrôlabilité exacte du système, un contrôle en temps optimal doit satisfaire le principe du maximum. En s'appuyant sur le principe du maximum, si on suppose en plus que :

$$\forall \eta \in X, \eta \neq 0 \Rightarrow B^*S(t - \sigma)^*\eta \neq 0,$$

alors le contrôle en temps optimal possède la propriété de bang-bang.

Il est possible d'établir la propriété de bang-bang sans passer par le principe du maximum :

Dans [26], Fattorini considère un système de contrôle total. Plus précisément, posons $B = Id$. Dans ce cas, on peut montrer qu'un contrôle en temps optimal possède toujours la propriété de bang-bang sans la condition de contrôlabilité exacte. Quant au principe du maximum, il faut toujours supposer la contrôlabilité exacte du système.

En plus, dans ce cas, en ajoutant une condition supplémentaire $\|Ay_0\| < 1$ ou $\|Ay_f\| < 1$, le principe du maximum devient une condition suffisante pour l'optimalité en temps.

On sait qu'il existe des équations, par exemple, l'équation de type de la chaleur, qui ne possèdent pas la contrôlabilité exacte. On va voir dans ce cas, qu'en supposant un type de L^∞ -contrôlabilité à zéro le contrôle en temps optimal possède la propriété de bang-bang. Cependant, sous cette condition, le principe du maximum n'est pas clair. On va expliciter ce cas dans la suite.

3.4.2 Propriété de bang-bang et un type de L^∞ -contrôlabilité à zéro

Dans cette partie, on présente quelques résultats sur la propriété de bang-bang et un type de L^∞ -contrôlabilité à zéro, on verra qu'en supposant la L^∞ -contrôlabilité à zéro en tout temps $t > 0$ sur tout $e \in [0, t]$ de mesure strictement positive, le contrôle en temps optimal possède la propriété de bang-bang (théorème 3.4.4). On présente aussi à la fin une condition suffisante (théorème 3.4.5) pour que le système possède ce type de la L^∞ -contrôlabilité à zéro dans le cas $A = A^* < 0$, diagonalisable avec résolvante compacte.

Quant aux systèmes qui ne possèdent pas la contrôlabilité exacte, on tente d'établir un type de L^∞ -contrôlabilité à zéro (comme pour l'équation de la chaleur), en s'appuyant sur la technique de Lebeau-Robbiano [48] pour obtenir la propriété de bang-bang d'un contrôle en temps optimal. Ces résultats sont obtenus dans l'article de S. Micu, I. Roventa, et M. Tucsnak [61], l'article de l'article de L. Miller [63], et l'article de G. Wang [94] où la propriété de bang-bang est établie pour le contrôle optimal en temps de l'équation du type de la chaleur en s'appuyant sur une technique introduite par G. Lebeau et L. Robbiano [48].

Résultat principal

On énonce tout de suite le résultat principal :

Théorème 3.4.4. [94]

Supposons que (A, B) est L^∞ -contrôlable à zéro en tout $t > 0$ sur tout $e \in [0, t]$ de mesure strictement positive et que U est strictement convexe.

Soient $y_0, y_f \in X$ avec y_f accessible. Alors, il existe un unique contrôle optimal u^* en temps τ^* et u^* possède la propriété de bang-bang (3.37).

3.4.3 Technique de Lebeau-Robbiano pour l'équation de la chaleur

Dans cette section, on s'appuie sur une méthode introduite par G. Lebeau et L. Robbiano [48] pour obtenir la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur. Plus précisément, on considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(x, t) = \Delta y(x, t) + \mathbb{1}_\omega(x) u(x, t), & \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ y(x, t) = 0 & \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ y(x, 0) = y_0 \in L^2(\Omega), & \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.40)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un compact connexe, $\partial\Omega$ est de la classe C^∞ , $\omega \subset \Omega$ est un ouvert non vide et que u est un contrôle vérifiant pour tout $t > 0$, $\|u(0, t)\|_{L^2(\omega)} \leq 1$.

Posons $X = L^2(\Omega)$ et $U = L^2(\omega)$. On définit l'opérateur A par :

$$A := \begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow X \\ \varphi \rightarrow A\varphi = \Delta\varphi, \end{cases},$$

Avec les notations ci-dessus le système (3.40) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 \in X, \end{cases} \quad (3.41)$$

où $A = \Delta$ et $B = \mathbb{1}_\omega$.

Dans ce paragraphe, On verra une condition suffisante pour que (A, B) possède la L^∞ -contrôlabilité à zéro en tout temps $t > 0$ sur tout $e \in [0, t]$ de mesure strictement positive, ce qui est similaire au théorème 3.2 de [61].

Ici, On suppose que $A = A^* < 0$ et que A est diagonalisable avec une base orthornormée formée par les vecteurs propres $(\varphi_k)_k$ de A où les valeurs propres associées $(-\lambda_k)_k$ sont t.q.

pour tout $k \geq 1$, $\lambda_k > 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = +\infty$.

On suppose de plus que la résolvante de A est compacte.

Avec les hypothèses ci-dessus, on peut écrire :

$$A\psi = - \sum_{k \geq 1} \lambda_k \langle \psi, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad \forall \psi \in D(A). \quad (3.42)$$

$$S(t)y = \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k t} \langle y, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad \forall t > 0, \forall y \in X. \quad (3.43)$$

Pour $\varsigma > 0$ on définit le sous-espace V_ς de X par :

$$V_\varsigma = \text{vect} \{ \varphi_k \mid \lambda_k^{\frac{1}{2}} \leq \varsigma \}$$

et On note P_ς la projection de X sur V_ς .

On énonce par la suite le résultat principal de cette partie :

Théorème 3.4.5. [94]

Soit $\tau > 0$ et $e \subset [0, \tau]$ un ensemble de mesure strictement positive.

Si pour tout $\varsigma > 0$, (A, B) vérifie l'inégalité :

$$\exists d_0, d_1 > 0 \forall \varphi \in V_\varsigma, \|\varphi\|_X \leq d_0 e^{d_1 \varsigma} \|B^* \varphi\|_U, \quad (3.44)$$

alors (A, B) est L^∞ -contrôlable à zéro en tout $t > 0$ sur tout $e \subset [0, t]$ de mesure strictement positive.

3.5 Méthodes numériques de résolution des problèmes de contrôle en temps optimal

Dans la littérature, on trouve deux types de résolutions des problèmes de contrôle en temps optimal à savoir : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes consistent à discrétiser la solution du système et le contrôle en transformant le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes. Les méthodes indirectes sont basées sur une méthode de tir [92] en appliquant le principe du maximum de Pontriaguine [70].

Dans la suite, on présente juste deux méthodes pour la résolution des problèmes de contrôle en temps optimal : la discrétisation totale pour les méthodes directes et la méthode de tir simple pour les méthodes indirectes. on se réfère au livre de Emmanuel Trélat [88] et à l'article de O. Von Stryk et R. Bulirsch [92] pour plus de détails sur les différentes méthodes numériques.

3.5.1 Présentation des méthodes

On présente par la suite les principes de deux méthodes numériques.

Méthodes directes : la discrétisation totale

C'est la méthode la plus évidente pour traiter un problème de contrôle en temps optimal.

On discrétise la solution du système et le contrôle en un vecteur $Y = (y_1, \dots, y_N, u_1, \dots, u_n)$, et on se ramène à résoudre un problème d'optimisation non-linéaire de la forme :

$$\min_{Y \in W} F(Y), \quad (3.45)$$

où $W = \{Y \mid g_i(Y) = 0, i \in 0, \dots, r, g_j(Y) \leq 0, j \in r + 1, \dots, m\}$.

Plus précisément, on choisit les contrôles dans un espace de dimension finie (par exemple, des contrôles constants par morceaux), puis on intègre le système en utilisant une méthode d'intégration numérique par exemple méthode d'Euler ou bien Runge-Kutta (voir chapitre 1) sur chaque intervalle

$[t_i, t_{i+1}]$ où $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$.

On peut choisir par exemple des contrôles linéaires sur chaque subdivision $[t_i, t_{i+1}]$. Par ailleurs, on choisit une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple, si on choisit le schéma d'Euler explicite, on obtient :

$$y_{i+1} = h_i f(t_i, y_i, u_i), \quad \text{où } h_i = t_{i+1} - t_i.$$

L'ensemble W représente les conditions initiales, finales du système, les contraintes sur la solution du système et les contraintes sur le contrôle. F est la fonction à optimiser.

Dans le cas du problème en temps optimal, on prend $F(Y) = t_f$. De plus, si le temps final t_f n'est pas connu, on rajoute une variable t_f au vecteur Y et une équation supplémentaire $t_f \geq 0$ à l'ensemble de contraintes W .

On se ramène à résoudre un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes (3.45). Ce problème peut être résolu en utilisant par exemple la méthode de SQP, ou par une méthode de pénalisation [27]. On se réfère aux livres de R. Fletcher [27] et [28] pour plus de détails sur la méthode SQP et sur d'autres méthodes d'optimisation non linéaire.

En résumé, il existe une infinité de variantes pour les méthodes directes selon le choix de l'approximation du contrôle sur chaque subdivision du temps, le choix de la méthode d'intégration de l'équation différentielle, et le choix de la méthode de la discrétisation de l'équation différentielle. On se réfère ainsi à l'article de M. Diehl, H.G.Bock, H. Diedam et P.-B. Wieber [22] pour d'autres méthodes directes et au livre de J.T. Betts [8] pour la mise en oeuvre des méthodes directes.

Méthodes indirectes : la méthode de tir simple

La méthode de tir simple est basée sur l'application de principe du maximum de Pontriaguine [70] qui donne une condition nécessaire d'optimalité. Si on est capable, à partir du principe du maximum, d'exprimer le contrôle optimal en fonction de $(y(t), p(t))$, où $p(t)$ est la solution du système adjoint, la solution du problème en temps optimal s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t)), \\ R(y_0, y(t_f)) = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

où R représente les conditions initiales et finales du système.

A l'aide des méthodes numériques, on peut trouver $y(t, y_0)$ la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t)), \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.47)$$

Pour simplifier l'écriture, on note $Y = (y_0, t_f)$ et posons une fonction $G(Y) = R(y_0, y(t_f, y_0))$.

Le problème en temps optimal (3.46) est équivalent à résoudre $G(Y) = 0$.

Le problème consiste donc à trouver un zéro de la fonction G et on peut utiliser par exemple la méthode de Newton. On se réfère par exemple au livre de J. Stoer et R. Bulirsch [84] pour plus de détails sur la méthode de Newton.

On peut citer aussi d'autres types de méthode indirecte, par exemple, la méthode de tir multiple qui découpe le système en N intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ et résout le sous-système optimal sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ en prenant en compte la continuité de $y(t, y_0)$ en chaque instant t_i . On se réfère au livre de J. Store et R. Bulirsch [84] pour des détails sur la méthode de tir multiple. Ainsi, on renvoie le lecteur au livre de E. Trélat [87] pour la comparaison entre les deux méthodes.

3.5.2 Exemple numérique

Considérons le problème de contrôle en temps optimal en dimension finie :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = z(t), & x(0) = 0, \\ \dot{z}(t) = u(t), & z(0) = 0, \end{cases} \quad (3.48)$$

où $|u(t)| \leq 1$.

Notons $y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec les notations ci-dessus, le système (3.48) s'écrit sous la forme :

$$\dot{y} = Ay(t) + Bu(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, t_f]. \quad (3.49)$$

Pour la méthode directe, on choisit N , le nombre de subdivisions en temps et on note $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{N+1} = t_f$ la discrétisation du temps.

Par la suite, on prend des valeurs initiales pour le temps final t_f et pour le contrôle $[u_1, \dots, u_N]$ où $u_i \in \mathbb{R}^m$, pour tout $i \in [0, N]$.

Notre but consiste à minimiser le temps final, en prenant en compte la condition finale $y(t_f) = y_f$, la contrainte sur le contrôle : pour tout $i \in 0, \dots, N$, $\|u_i\|_{\mathbb{R}^m} \leq 1$ et le fait que le temps final doit être positif. On intègre Ensuite le système sur chaque subdivision du temps $[t_i, t_{i+1}]$, en utilisant par exemple la méthode d'Euler explicite.

En utilisant la fonction `methodedirecte.m` (voir l'Annexe 1.A) qui donne les résultats et les dessins pour la trajectoire de la solution et du contrôle. Le principe est d'utiliser `fmincon.m` pour minimiser la fonction `principal.m` qui prend une variable X contenant les discrétisations du contrôle U et le temps final t_f sous les contraintes écrites dans la fonction `contrainte.m`. On choisit ici la méthode SQP pour la méthode d'optimisation non linéaire.

On rappelle que dans le corollaire 3.2.6, on a montré qu'en supposant la contrôlabilité exacte du système, le contrôle optimal en temps a la forme :

$$u^*(\sigma) = \frac{B^*S(t-\sigma)^*\eta}{\|B^*S(t-\sigma)^*\eta\|_{\mathbb{R}^m}}, \quad \sigma \in [0, t_f] \quad (3.50)$$

pour un $\eta \neq 0, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Notons $p(t)$ la solution du système adjoint avec une condition finale :

$$\begin{cases} \dot{p}(t) &= -A^*p(t), \quad t \in [0, t_f], \\ p(t_f) &= \eta. \end{cases} \quad (3.51)$$

Il est clair que l'on peut réécrire (3.50) comme :

$$u^*(\sigma) = \frac{B^*p(\sigma)}{\|B^*p(\sigma)\|_{\mathbb{R}^m}}, \quad \sigma \in [0, t_f] \quad (3.52)$$

Pour simplifier l'écriture, on note $X = (p(0), t_f)$.

Le principe de la méthode de tir consiste de trouver un zéro de la fonction `F.m` (Voir Annexe 1-B) qui prend X comme variable et qui rend la valeur $y(t_f) - y_f$. On utilise la fonction `ode113.m` pour calculer la solution du système $y(t)$ et la solution du système adjoint $p(t)$.

Appliquons maintenant la méthode pour l'exemple précédent en calculant le temps minimal exact.

remarquons d'abord que $\text{Ran} [AB, B] = 2 = n$. Donc, (A, B) est exactement contrôlable.

En se référant au [87], on peut obtenir la fonction temps minimal comme :

$$T(x_f, z_f) = \begin{cases} 2\sqrt{x_f + \frac{1}{2}z_f^2} - z_f & \text{si } x_f \geq \frac{z_f^2}{2} \text{signe}(z_f), \\ 2\sqrt{-x_f + \frac{1}{2}z_f^2} + z_f & \text{si } x_f \leq \frac{z_f^2}{2} \text{signe}(z_f). \end{cases} \quad (3.53)$$

On cherche par la suite le problème de contrôle en temps optimal avec la condition finale :

$$y_f = \begin{pmatrix} x_f \\ z_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule (3.53), on trouve que $t_{f\text{exact}} = 1 + \sqrt{2} \approx 2.4142$.

Les résultats obtenus en matlab peuvent être trouvés dans l'Annexe 2.A. On remarque que pour la méthode directe, si on augmente le nombre de discrétisation, le temps final numérique est plus proche du temps final exact. De plus, le résultat obtenu par la méthode de tir est très précis par rapport à celui obtenu par la méthode directe, mais si on prend une valeur initiale t_f trop loin du temps final exact, on obtient un résultat mauvais.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation de quelques concepts de base pour le problème de contrôle en temps optimal. Notre but dans ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité d'un contrôle en temps optimal et de donner des conditions pour lesquelles le principe du maximum et la propriété de type bang-bang sont satisfaits.

Pour des systèmes possédant la contrôlabilité exacte, le principe du maximum est une condition nécessaire de l'optimalité en temps. Pour obtenir la propriété de bang-bang d'un contrôle en temps optimal, il faut examiner si le système possède un type de contrôlabilité approchée. Quant aux équations qui ne possèdent pas la contrôlabilité exacte comme pour l'équation de la chaleur, on tente d'établir un type de L^∞ -contrôlabilité à zéro en s'appuyant sur la technique de Lebeau-Robbiano pour obtenir la propriété de bang-bang d'un contrôle en temps optimal.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude de problème de contrôle en temps optimal de contrôle optimal en temps de l'équation de la chaleur, en présence d'un paramètre d'échelle.

Chapitre 4

Contrôle en temps optimal de l'équation de la chaleur avec l'invariance d'échelle

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse, à l'étude d'un problème de contrôle optimal en temps de l'équation de la chaleur linéaire, unidimensionnelle, en présence d'un paramètre d'échelle. Ce problème est fortement lié aux différentes notions de contrôlabilité, du principe du maximum de Pontriaguine et de la propriété de bang-bang. A cet effet, nous construisons en premier lieu une solution exacte. La dépendance de cette solution par rapport au paramètre d'échelle conduit ainsi à étudier l'existence et l'unicité d'un contrôle en temps optimal. On voit qu'en supposant la L^∞ -contrôlabilité à zéro, on peut établir une propriété de type bang-bang. Dans la dernière section, on traite un exemple numérique en utilisant une méthode de type directe. Nous comparons par la suite les résultats obtenus par une autre méthode indirecte par exemple : la méthode de tir.

4.2 Solutions invariantes d'échelle pour l'équation de la chaleur

On considère une barre mince de longueur infinie (représentée par l'axe réel), et on cherche l'évolution au cours du temps de la température y dans cette barre.

La fonction $y(x, t)$ donne la température au point x à l'instant t . Si la barre a une conductivité thermique homogène et en absence de sources de chaleur, y vérifie

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T].$$

où T est un réel strictement positif. avec la condition initiale :

Si la température a l'instant $t = 0$ est connue et donnée par la fonction $y_0(x)$, alors on ajoute une condition initiale

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La solution analytique est donnée, pour tout (x, t) de $\mathbb{R} \times [0, T]$, par :

$$y_{\text{classical}}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} y_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} ds$$

On sait de plus que l'équation linéaire de la chaleur possède une invariance naturelle d'échelle [3]. Autrement dit, si l'on désigne par y une solution, alors, pour tout réel strictement positif Λ , l'application :

$$(t, x) \mapsto y_{\Lambda}(t, x) = \Lambda y(\Lambda^2 t, \Lambda x)$$

est aussi solution.

Remarque 4.2.1. (*Invariance d'échelle*).

Une équation aux dérivées partielles d'évolution est dite invariante d'échelle s'il existe deux paramètres réels α et β tels que pour tout $\Lambda > 0$, on ait le résultat suivant :

Si le champ de vecteur initial $y_0(x)$ génère une solution $y(t, x)$, alors la solution associée à la donnée remise à l'échelle $\Lambda^\alpha y_0(\Lambda x)$ est $\Lambda^\alpha y(\Lambda^\beta t, \Lambda x)$.

Dans le cas de l'équation de la chaleur un calcul immédiat fournit que $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ comme seules possibilités.

On construit par la suite la solution invariante d'échelle pour l'équation de la chaleur.

En appliquant la méthode développée par Jean-Yves Chemin et Claire David [14], [15], on définit l'application \mathcal{F} , de $L_{loc}^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$ par :

$$\mathcal{F}(y_0, \Lambda, N_0) = y_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^{N_0} \Lambda^{-j} y_0(\Lambda^{-j} \cdot) \quad , \quad \varepsilon \in \{-1, +1\}, N_0 \in \mathbb{N}^*.$$

La construction de cette application est issue de la théorie dite « des profils », introduite par P. Gérard et H. Bahouri [3]. Elle repose sur l'idée selon laquelle deux solutions d'une équation d'évolution, d'échelles suffisamment différentes, n'interagissent presque pas.

On s'intéresse donc, dans ce qui suit, à des données initiales de la forme :

$$y_0(x) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N_0} y_{0,\Lambda,j}(x) = y_0(x) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N_0} \frac{1}{\Lambda^j} y_0\left(\frac{x}{\Lambda^j}\right) \quad , \quad \Lambda > 0$$

La solution analytique exacte \tilde{y} , qui dépend de la variable d'espace x , du temps t , et du paramètre d'échelle Λ , est donnée par :

$$\tilde{y}(x, t, \Lambda) = y_{\text{classical}}(x, t) + \varepsilon \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_0} y_{0,\Lambda,j}(u) e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}} du$$

Il est intéressant de remarquer que :

$$\tilde{y}(x, t, \Lambda) = y_{\text{classical}}(x, t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N_0} \frac{1}{\Lambda} y_{\text{classical}} \left(\frac{x}{\Lambda^j}, \frac{t}{\Lambda^{2j}} \right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{y}(x, t, \Lambda) &= \Delta y_{\text{classical}}(x, t) + \frac{\varepsilon}{\Lambda} \sum_{j=1}^{N_0} \Delta y_{\text{classical}} \left(\frac{x}{\Lambda^j}, \frac{t}{\Lambda^{2j}} \right) \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}(x, t, \Lambda) &= \frac{\partial y_{\text{classical}}}{\partial t}(x, t) + \frac{\varepsilon}{\Lambda} \sum_{j=1}^{N_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[y_{\text{classical}} \left(\frac{x}{\Lambda^j}, \frac{t}{\Lambda^{2j}} \right) \right] \end{aligned}$$

On construit ainsi, une solution exacte de l'équation linéaire de la chaleur. La dépendance de cette solution par rapport au paramètre d'échelle Λ permet d'exercer un contrôle sur cette solution. Notre but ici, est de déterminer la nature du contrôle et d'étudier l'existence et l'unicité d'un contrôle optimal en temps.

Remarque 4.2.2.

Notre approche a, classiquement, consisté à étudier un système avec contrôle interne, en présence d'un paramètre d'échelle. Il est intéressant de remarquer que, du fait de l'expression de la solution avec paramètre :

$$\tilde{y}(x, t, \Lambda) = y_{\text{classical}}(x, t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N_0} \frac{1}{\Lambda^j} y_{\text{classical}} \left(\frac{x}{\Lambda^j}, \frac{t}{\Lambda^{2j}} \right)$$

il apparaît comme intéressant de considérer un contrôle de la forme :

$$\varepsilon \sum_{j=1}^{N_0} \frac{u_j}{\Lambda^j} y_{\text{classical}} \left(\frac{x}{\Lambda^j}, \frac{t}{\Lambda^{2j}} \right)$$

On obtient ainsi, un système affine en contrôle. Pour tout entier j de $\{1, \dots, N_0\}$, le contrôle u_j correspond donc à un déplacement dans la direction

$$f_j = \varepsilon \frac{1}{\Lambda^j} y_{\text{classical}} \left(\frac{x}{\Lambda^j}, \frac{t}{\Lambda^{2j}} \right)$$

ce qui conduit à s'intéresser à l'algèbre de Lie engendrée par la famille

$$(f_j)_{1 \leq i \leq N_0}$$

dans l'esprit de ce qui est présenté dans [18], [16], dans la mesure où se déplacer, sur des sous-intervalles de K , dans des directions données $f_i, f_j, i \neq j$, fait intervenir les crochets de Lie.

4.3 Contrôle en temps optimal avec l'invariance d'échelle pour l'équation de la chaleur

Reprenons la solution exacte de l'équation de la chaleur avec l'invariance d'échelle

$$\tilde{y}(x, t, \Lambda) = y_{\text{classical}}(x, t) + \varepsilon \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_0} y_{0,\Lambda,j}(u) e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}} du$$

La dépendance de cette solution par rapport au paramètre d'échelle Λ conduit, naturellement, à un problème de contrôle interne avec un paramètre d'échelle, que l'on peut formuler de la façon suivante :

Si l'on se donne un compact $\Omega \subset \mathbb{R}$, et un domaine $\omega \subset \Omega$, quel type de contrôle u doit-on exercer pour obtenir un résultat donné ?

Le système associé est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}(x, t, \Lambda) = \Delta \tilde{y}(x, t, \Lambda) + \mathbb{1}_\omega(x) u(x, t) & \forall (x, t, \Lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \\ \tilde{y}(x, t, \Lambda) = 0 & x \in \partial\Omega, (t, \Lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \\ \tilde{y}(x, 0, \Lambda) = \tilde{y}_0 \in L^2(\Omega) & \forall \Lambda \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\mathbb{1}_\omega$ est la fonction caractéristique de ω :

$$\forall x \in \Omega : \quad \mathbb{1}_\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et u est un contrôle vérifiant :

$$\forall t \geq 0 : \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0$$

C_0 étant une constante strictement positive, dépendant de la condition initiale \tilde{y}_0 .

Dans ce qui suit, la condition initiale sera ajustée afin que l'on ait :

$$C_0 \leq 1$$

On rappelle les résultats classiques suivants :

Proposition 4.3.1. [60]

Pour tout réel strictement positif T , et toute fonction continue u sur $\omega \times [0, T]$, l'unique solution y telle que :

$$y(t = 0, \cdot) = y_0(\cdot)$$

est donnée, pour tout x de Ω , et tout t de $[0, T]$, par :

$$y(x, t) = e^{t\Delta} y_0(x) + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{1}_\omega(x) u(\tau, x) d\tau.$$

Proposition 4.3.2. [60]

Pour tout réel strictement positif T , et toute fonction continue u de $L^2(\omega \times [0, T])$, le système (4.1) admet une solution unique \tilde{y} telle que :

$$\tilde{y} \in C([0, T], H_1^0(\Omega)) \quad , \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$$

Comme rappelé dans [71], il est alors naturel d'introduire, pour tout réel strictement positif T , l'ensemble des états atteignables à l'instant T associé au système 4.1 :

$$\mathcal{R}(T) = \{\tilde{y}(T) \mid u \in L^2(\Omega \times [0, T])\}$$

Proposition 4.3.3.

Pour tout réel strictement positif T , l'ensemble $\mathcal{R}(T)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration.

L'ensemble $\mathcal{R}(T)$ est bien un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$.

Intéressons-nous à l'orthogonal de $\mathcal{R}(T)$ dans $L^2(\Omega)$. A cet effet, on considère le problème rétrograde :

$$\begin{cases} -\dot{\varphi}(x, t) = \Delta \varphi(x, t) & \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T] \\ \varphi(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \\ \varphi(\cdot, T) = \varphi_0 \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (4.2)$$

Ce problème, qui se ramène à l'équation de la chaleur classique via le changement de variable

$$t \mapsto T - t$$

admet une solution unique φ dans

$$C([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T], H_1^0(\Omega))$$

avec :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2([0, T], H^{-1}(\Omega)).$$

En multipliant membre à membre par φ la relation :

$$\dot{y} = \Delta y + \mathbb{1}_\omega u$$

on obtient :

$$\varphi \dot{y} = \varphi \Delta y + \varphi \mathbb{1}_\omega u$$

ce qui, en intégrant, conduit à :

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi \dot{y} \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \varphi \Delta y \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \varphi u \, dx \, dt$$

soit :

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi \dot{y} \, dx \, dt = - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \varphi u \, dx \, dt$$

soit :

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi \dot{y} \, dx \, dt = - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x} y \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} y \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \varphi u \, dx \, dt$$

soit :

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi \dot{y} \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} y \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \varphi u \, dx \, dt$$

puisque φ et y s'annulent sur la frontière $\partial\Omega$. Une nouvelle intégration par parties conduit à :

$$\int_\Omega y(x, T) \varphi(x, T) \, dx - \int_0^T \int_\Omega \dot{\varphi} y \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} y \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \varphi u \, dx \, dt.$$

Compte-tenu de :

$$-\dot{\varphi} = \Delta \varphi$$

on a donc :

$$\int_{\Omega} y(x, T) \varphi(x, T) dx = \int_0^T \int_{\omega} \varphi u dx dt.$$

Comme

$$\varphi(\cdot, T) = \varphi_0 \in \mathcal{R}(T)^{\perp}$$

on en déduit alors :

$$\int_0^T \int_{\omega} \varphi u dx dt = \int_{\Omega} y(x, T) \varphi(x, T) dx = 0.$$

La fonction contrôle u étant quelconque, il en résulte :

$$\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T].$$

Le résultat de prolongement de Mizohata [65] permet d'en déduire :

$$\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T].$$

Par suite :

$$\varphi_0 = 0.$$

L'orthogonal de $\mathcal{R}(T)$ dans $L^2(\Omega)$ est donc réduit au singleton $\{0\}$.

On peut alors appliquer le critère de densité, corollaire du théorème de Hahn-Banach :

$$\left(\mathcal{R}(T)^{\perp}\right)_{\perp} = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) \mid \forall \psi \in \mathcal{R}(T)^{\perp} : \langle \varphi, \psi \rangle = 0 \right\} = \overline{\mathcal{R}(T)}$$

qui permet d'affirmer que la condition nécessaire et suffisante de densité de $\mathcal{R}(T)$ dans $L^2(\Omega)$:

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = L^2(\Omega)$$

équivalent donc à :

$$\mathcal{R}(T)^{\perp} = \{0\}.$$

□

Corollaire 4.3.4.

Etant donné \hat{y} dans $L^2(\Omega)$, et un réel strictement positif ε , il existe un contrôle u appartenant à $L^2(\Omega \times [0, T])$ tel que :

$$\|y(\cdot, T) - \hat{y}\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$$

Remarque 4.3.1.

Ainsi, l'étude de la contrôlabilité approchée de notre système linéaire (4.1) se ramène à un problème de continuité, pour le problème adjoint associé.

Notre but étant, de déterminer si l'on peut trouver un contrôle u qui permette de vérifier la propriété de type bang-bang suivante :

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \text{pour } t \in [0, \tau^*] \text{ p.p.}$$

où τ^* est un unique temps optimal permettant d'amener la solution de (4.1) du point initial \tilde{y}_0 au point final \tilde{y}^f au temps τ^* , on retombe donc sur les résultats présentés dans les travaux de G. Lebeau et L. Robbiano [48], qui conduisent au résultat suivant :

Proposition 4.3.5.

On considère le problème de contrôle de l'équation de la chaleur avec l'invariance d'échelle décrit dans (4.1) en gardant toutes les hypothèses sur Ω .

Alors, pour tout \tilde{y}_0 et tout \tilde{y}^f de $L^2(\Omega)$ tels que $\tilde{y}_0 \neq \tilde{y}^f$,

il existe un unique contrôle optimal en temps $u^ \in L^\infty([0, \tau^*]; L^2(\omega))$ entraînant la solution de (4.1) du point initial \tilde{y}_0 au point final \tilde{y}^f en temps minimal τ^**

De plus, u^ vérifie la propriété de bang-bang, i.e. :*

$$\|u(\sigma)\|_U = 1, \quad \text{pour } \sigma \in [0, \tau^*] \text{ p.p.} \quad (4.3)$$

Démonstration.

On commence par décrire le problème sous forme d'un système en dimension infinie.

On rappelle le problème de contrôle de l'équation de la chaleur avec l'invariance d'échelle :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}(x, t, \Lambda) &= \Delta \tilde{y}(x, t, \Lambda) + \mathbb{1}_\omega(x) u(x, t), & \forall (x, t, \Lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \\ \tilde{y}(x, t, \Lambda) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega, \forall (t, \Lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \\ \tilde{y}(x, 0, \Lambda) &= \tilde{y}_0 \in L^2(\Omega), & \forall \Lambda \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un compact connexe, $\partial\Omega$ est de la classe C^∞ , $\omega \subset \Omega$ est un ouvert non vide et que u est un contrôle vérifiant pour tout $t > 0$, $\|u(0, t)\|_{L^2(\omega)} \leq 1$.

Posons $X = L^2(\Omega)$ et $U = L^2(\omega)$. On définit l'opérateur A par :

$$A := \begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow X \\ \varphi \rightarrow A\varphi = \Delta\varphi, \end{cases},$$

et l'opérateur $B \in \mathcal{L}(U, X)$ par

$$Bu = \mathbb{1}_\omega u, \quad u \in L^2(\omega).$$

Avec les notations ci-dessus le système (4.1) s'écrit sous la forme :

$$\dot{\tilde{y}}(t) = A\tilde{y}(t) + Bu(t), \quad \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0, \quad (4.4)$$

où $A = \Delta$ et $B = \mathbb{1}_\omega$.

De plus, d'après la proposition 3.2.12 (Technique de Lebeau-Robbiano [48]), il est clair que $A = A^* < 0$, diagonalisable avec une base orthornormée formée par les vecteurs propres $(\varphi_k)_k$ de A où les valeurs propres associées $(-\lambda_k)_k$ sont telle que :

pour tout $k \geq 1$, $\lambda_k > 0$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_k| = +\infty$, et que la résolvante de A est compacte.

Pour pouvoir appliquer le théorème 3.4.4 de chapitre 3 pour obtenir l'existence, l'unicité du contrôle en temps optimal et la propriété de bang-bang (4.3), il nous suffit d'établir l'inégalité (3.44) et d'utiliser le théorème 3.4.5 pour conclure.

On sait que l'inégalité (3.44) est vérifiée pour $A = \Delta$ et $B = \mathbb{1}_\omega$ (On se réfère au théorème 3 de l'article de G. Lebeau et E. Zuazua [50]). Ce qui implique que (A, B) est L^∞ -contrôlable à zéro en tout $t > 0$ sur tout $e \subset [0, t]$ de mesure strictement positive (Par l'application de théorème 3.4.5.).

L'existence d'un contrôle optimal en temps a été déjà montrée dans le chapitre précédent (le théorème 3.4.1).

L'unicité vient simplement du fait que u^* vérifie la propriété de bang-bang et que U est strictement convexe comme on l'a vu dans le théorème 3.4.3.

Il reste donc à montrer la propriété de bang-bang (4.3).

Par l'absurde, supposons que u^* est le contrôle optimal en temps τ^* et qu'il existe $\epsilon > 0$ et $e \subset [0, \tau^*]$ de mesure strictement positive telle que :

$$\|u^*(\sigma)\|_U \leq 1 - \epsilon, \quad \forall \sigma \in e.$$

Désignons par $\tilde{y}_\Lambda(t) = \tilde{y}(t, \tilde{y}_0, u^*)$ la trajectoire engendrée par u^* à partir du point \tilde{y}_0 au temps t en présence d'un paramètre d'échelle Λ .

On remarque d'abord qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que :

e_0 a une mesure positive, où $e_0 = \{t \in [\delta_0, \tau^* - \delta_0] \mid t \in e\}$.

Il est clair que $\tilde{y}_\Lambda(t) \rightarrow \tilde{y}_0$ (lorsque $t \rightarrow 0$). Donc il existe $0 < \delta < \delta_0$

$$\|\tilde{y}_0 - \tilde{y}_\Lambda(\delta)\|_X \leq \frac{\epsilon}{M}, \quad \text{où } M = \sup_{0 < \delta < \delta_0} \{C_{\tau^* - \delta, e_0 - \delta}^{\infty, 0}\}, \quad (4.5)$$

avec $C_{\tau^* - \delta, e_0 - \delta}^{\infty, 0}$ est le coût du contrôle défini dans le chapitre précédent (3.33).

D'après la L^∞ -contrôlabilité à zéro en temps $\tau^* - \delta$ sur $e_0 - \delta$, on sait qu'il existe un contrôle $v \in L^\infty([0, \tau^*]; U)$ tel que le support de v est inclus dans $e_0 - \delta$ et que :

$$\begin{aligned}
0 &= S(\tau^* - \delta)(\tilde{y}_0 - \tilde{y}_\Lambda(\delta)) + \Phi_{\tau^* - \delta, e_0 - \delta} v \\
&= S(\tau^* - \delta)(\tilde{y}_0 - \tilde{y}_\Lambda(\delta)) + \int_0^{\tau^* - \delta} \chi_{e_0 - \delta}(\sigma) S(\tau^* - \delta - \sigma) B v(\sigma) d\sigma \\
&= S(\tau^* - \delta)(\tilde{y}_0 - \tilde{y}_\Lambda(\delta)) + \int_{\delta}^{\tau^*} \chi_{e_0 - \delta}(\sigma - \delta) S(\tau^* - \sigma) B v(\sigma - \delta) d\sigma \quad (4.6)
\end{aligned}$$

avec

$$\|v(\sigma)\|_U \leq C_{\tau^* - \delta, e_0 - \delta}^{\infty, 0} \|\tilde{y}_0 - \tilde{y}_\Lambda(\delta)\|_X \leq C_{\tau^* - \delta, e_0 - \delta}^{\infty, 0} \frac{\epsilon}{M} \leq \epsilon \quad (\sigma \in e_0 - \delta) \quad (4.7)$$

Notons $\tilde{v}(\sigma) = v(\sigma - \delta)$. Puisque le support de v est inclu dans $e_0 - \delta$, on en déduit que $\tilde{v}(\sigma) = v(\sigma - \delta)$ est non nul si $\sigma - \delta \in \text{supp } v \subset e_0 - \delta$. Autrement dit, le support de \tilde{v} est inclu dans e_0 .

On peut également écrire (4.6) et (4.7) comme suit :

$$0 = S(\tau^* - \delta)(\tilde{y}_0 - \tilde{y}_\Lambda(\delta)) + \int_{\delta}^{\tau^*} \chi_{e_0}(\sigma) S(\tau^* - \sigma) B \tilde{v}(\sigma) d\sigma, \quad (4.8)$$

avec

$$\|\tilde{v}(\sigma)\|_U \leq \epsilon, \quad \sigma \in e_0. \quad (4.9)$$

On montre ensuite que u^* n'est pas le contrôle optimal en temps τ^* pour en déduire la contradiction.

Posons $\tilde{u}(t) = u^*(t + \delta) + \tilde{v}(t + \delta)$ pour $t \in [0, \tau^* - \delta]$.

On vérifie d'abord que $\tilde{u} \in \mathcal{L}_1(\tau^* - \delta)$, où $\mathcal{L}_1(t)$ est l'ensemble des contrôles admissibles donné par

$$\mathcal{L}_1(t) = \{u \in L^\infty([0, t]; U) \mid \|u\|_{L^\infty([0, t]; U)} \leq 1\}.$$

En effet, si $t + \delta \in e_0$, d'après (4.9) on obtient que

$$\|\tilde{u}(t)\|_U \leq \|u^*(t + \delta)\|_U + \|\tilde{v}(t + \delta)\|_U \leq (1 - \epsilon) + \epsilon = 1.$$

Et si $t + \delta$ n'appartient pas au e_0 , on a :

$$\|\tilde{u}(t)\|_U = \|u^*(t + \delta)\|_U \leq 1.$$

Puis, en utilisant le fait que le support de \tilde{v} est inclu dans e_0 et (4.8), on obtient :

$$\begin{aligned}
S(\tau^* - \delta)\tilde{y}_0 + \Phi_{\tau^* - \delta}\tilde{u} &= S(\tau^* - \delta)(\tilde{y}_0 - \tilde{y}_\Lambda(\delta)) + S(\tau^* - \delta) \left(S(\delta)\tilde{y}_0 + \int_0^\delta S(\delta - \sigma)Bu^*(\sigma)d\sigma \right) \\
&\quad + \Phi_{\tau^* - \delta}\tilde{v}(\cdot + \delta) + \Phi_{\tau^* - \delta}u^*(\cdot + \delta) \\
&= S(\tau^* - \delta)(\tilde{y}_0 - \tilde{y}_\Lambda(\delta)) + \Phi_{\tau^* - \delta}\tilde{v}(\cdot + \delta) + S(\tau^*)\tilde{y}_0 + \int_0^\delta S(\tau^* - \sigma)Bu^*(\sigma)d\sigma \\
&\quad + \int_0^{\tau^* - \delta} S(\tau^* - \delta - \sigma)Bu^*(\sigma + \delta)d\sigma \\
&= S(\tau^* - \delta)(\tilde{y}_0 - \tilde{y}_\Lambda(\delta)) + \int_0^{\tau^* - \delta} S(\tau^* - \delta - \sigma)B\tilde{v}(\sigma + \delta)d\sigma + S(\tau^*)\tilde{y}_0 + \int_0^\delta S(\tau^* - \sigma)Bu^*(\sigma)d\sigma \\
&\quad + \int_\delta^{\tau^*} S(\tau^* - \sigma)Bu^*(\sigma)d\sigma \\
&= S(\tau^* - \delta)(\tilde{y}_0 - \tilde{y}_\Lambda(\delta)) + \int_\delta^{\tau^*} \chi_{e_0}(\sigma)S(\tau^* - \sigma)B\tilde{v}(\sigma)d\sigma + S(\tau^*)\tilde{y}_0 + \Phi_{\tau^*}u^* \\
&= 0 + \tilde{y}^f.
\end{aligned}$$

Donc u^* entraîne \tilde{y}_0 au \tilde{y}^f en temps $\tau^* - \delta$.

C'est contradictoire avec l'optimalité en temps τ^* de u^* .

D'où u^* vérifie la propriété de bang-bang. □

4.4 Application numérique

4.4.1 Position du problème

Considérons le problème monodimensionnel de la conduction de la chaleur dans une barre de $1m$ de longueur, en présence d'un paramètre d'échelle Λ . Le champ de température $y(x, t, \Lambda)$ vérifié l'équation de la chaleur avec un contrôle interne dans un domaine $\omega \subset [0, 1]$. Plus précisément, on considère le système suivant :

$$\Lambda^2 y(\Lambda x, \Lambda^2 t) = \Lambda^2 \Delta y(\Lambda x, \Lambda^2 t) + \mathbb{1}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}(x) u(x) \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, t_f], \quad \forall \Lambda > 0$$

$$y(0, t, \Lambda) = 0 \quad , \quad y(1, t, \Lambda) = 0 \quad , \quad \forall t \in [0, t_f], \quad \Lambda > 0$$

4.4.2 Résolution

Résolution par l'approche directe

La discrétisation est effectuée par différences finies, avec un schéma d'Euler implicite. On introduit :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = t_f$$

la discrétisation en temps par n intervalles, et

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_j < \dots < x_{N+1} = 1$$

la discrétisation en espace par $N + 1$ intervalles.

Pour tout i de $\{0, \dots, n\}$ et tout j de $\{0, \dots, N + 1\}$, désignons par

$$y_{i,j} = y_\Lambda(t_i, x_j)$$

la valeur de la solution au temps t_i et au point x_j , pour le paramètre d'échelle Λ . Nos approximations sont les suivantes :

$$\dot{y}_\Lambda(t_i, x_j) \approx \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{t_h}$$

et :

$$\Delta y_\Lambda(t_i, x_j) \approx \frac{y_{i,j+1} + y_{i,j-1} - 2y_{i,j}}{x_h^2}$$

où :

$$t_h = \frac{t_f}{n}, \quad x_h = \frac{\Lambda}{N+1}, \quad t_f = \Lambda^2$$

Pour tout entier i de $\{1, \dots, N\}$, on pose :

$$Y_i = \begin{pmatrix} y_{i,1} \\ y_{i,2} \\ \vdots \\ y_{i,N} \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire le système discrétisé correspondant sous forme matricielle :

$$\Lambda^2 \frac{Y_{i+1} - Y_i}{t_h} = A_h \cdot Y_{i+1} + B_h \cdot U_{i+1} \tag{4.10}$$

où la matrice A_h , de taille $N \times N$, est donnée par :

$$A_h = \frac{\Lambda^2}{x_h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et où la matrice diagonale B_h , de taille $N \times N$, est donnée par :

$$B_h = \text{diag} (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

avec, pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x_i \leq \frac{2}{3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$U_{i+1} = \begin{pmatrix} u_{i,1} \\ \vdots \\ u_{i,N} \end{pmatrix}$$

où $u_{i,j}$ est la valeur choisie pour le contrôle au temps t_i , au point x_j .

Par un simple calcul, résoudre (4.10) revient à résoudre, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, le système :

$$C Y_{i+1} = Y_i + \frac{t_h}{\Lambda^2} B_h \cdot U_i$$

où

$$C = I_N - \frac{1}{\Lambda^2} t_h \cdot A_h$$

I_N étant la matrice identité d'ordre N .

A chaque pas de temps, on inverse donc la matrice C , pour calculer Y_{i+1} en fonction des valeurs de Y_i et U_i .

Désignons par X une variable qui contient toutes les valeurs $u_{i,j}$, $i \in [1, n]$, $j \in [1, N]$, ainsi que le temps final t_f .

On rappelle que le principe de la méthode directe est de minimiser une fonction F qui rend t_f avec les contraintes sur le contrôle, i.e., pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$:

$$\|U_i\|_{L^2([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}])} \leq 1$$

avec la condition finale :

$$Y(t_f) = Y^f$$

On considère ici, comme condition initiale et condition finale respectives :

$$\forall x \in K : \quad y_0(x) = \sin(\pi x) \quad , \quad y^f(x) = 0$$

Notre simulation est effectuée pour :

$$n = N$$

En pratique, on fixe le nombre de discrétisations ($N = 10$ par exemple), et on change la valeur du paramètre d'échelle. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 4.1.

Comparaison avec l'approche indirecte :

On commence par transformer le problème posé en un problème de contrôle en temps optimal de dimension finie, par semi-discrétisation de l'équation de la chaleur afin d'obtenir un système d'équations différentielles ordinaires.

Avec la discrétisation en espace en N intervalles, $x_h = \frac{\Lambda}{N}$. Le système obtenu peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\min \int_0^{t_f} dt \quad (4.11)$$

$$\dot{Y}_i(t) = A_h Y_i(t) + B_h U_i(t), \quad Y_i(0) = Y_{i0}, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (4.12)$$

où A_h et B_h sont définies dans 4.1.

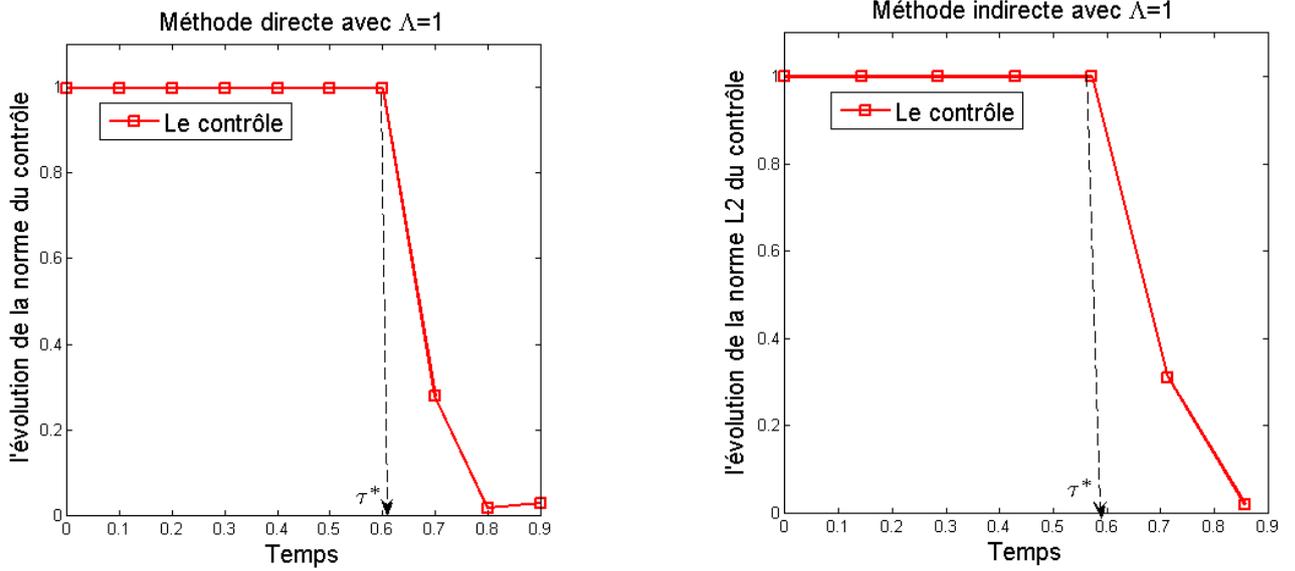
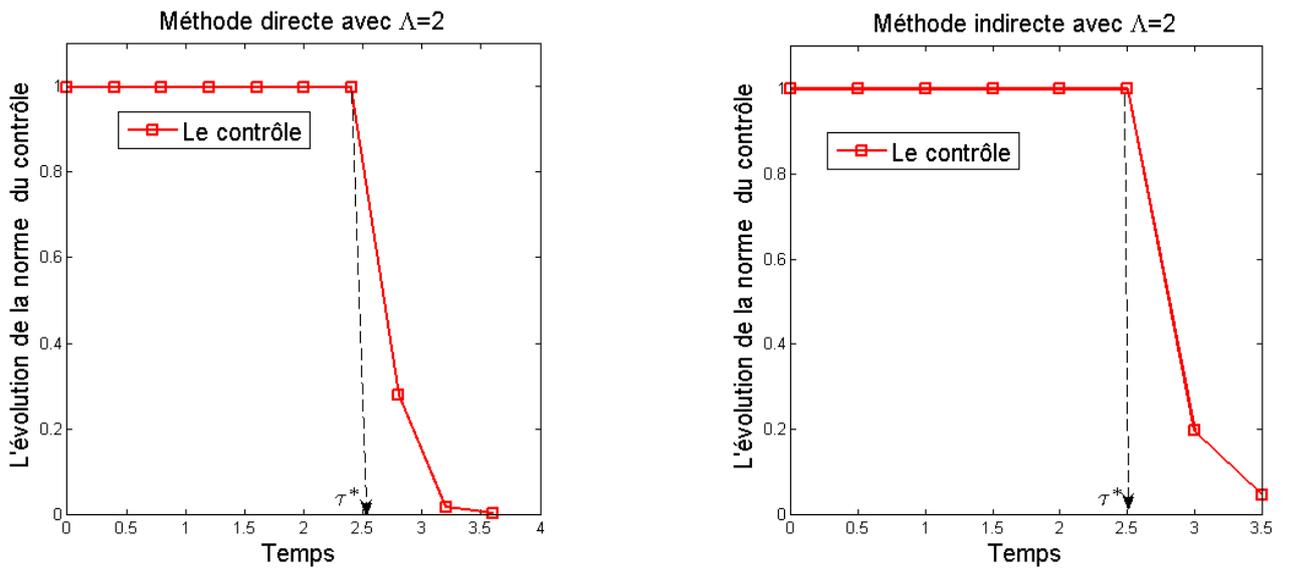
Ensuite, on applique la méthode de tir pour le problème (4.11)-(4.12). On fixe le nombre discrétisations ($N = 10$ par exemple), et on change la valeur du paramètre d'échelle.

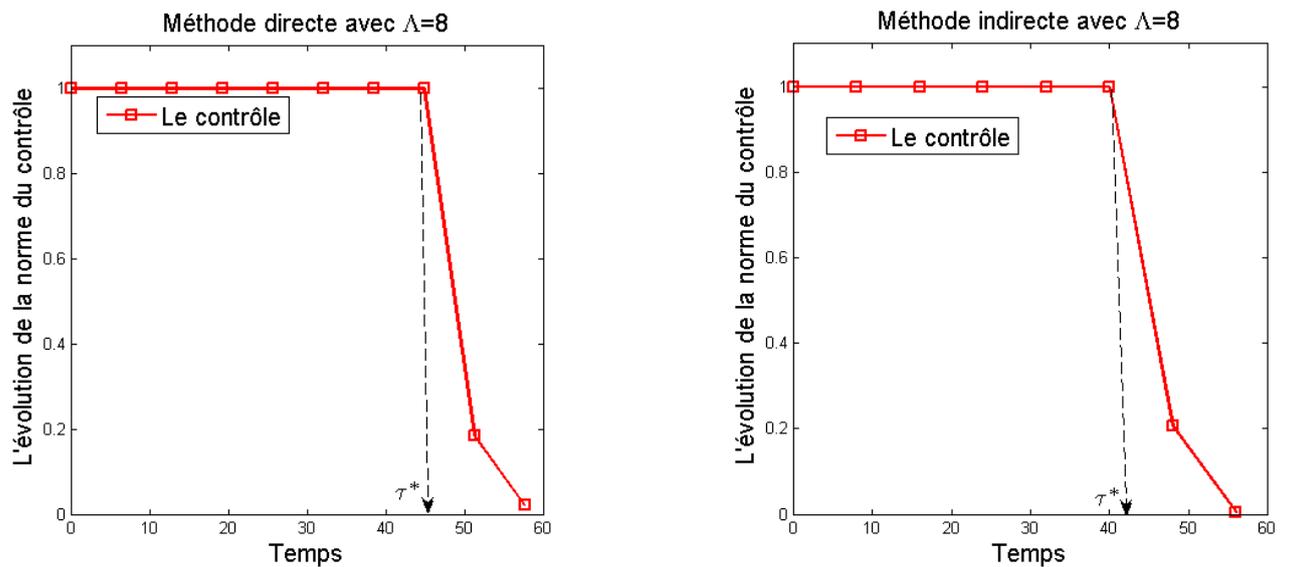
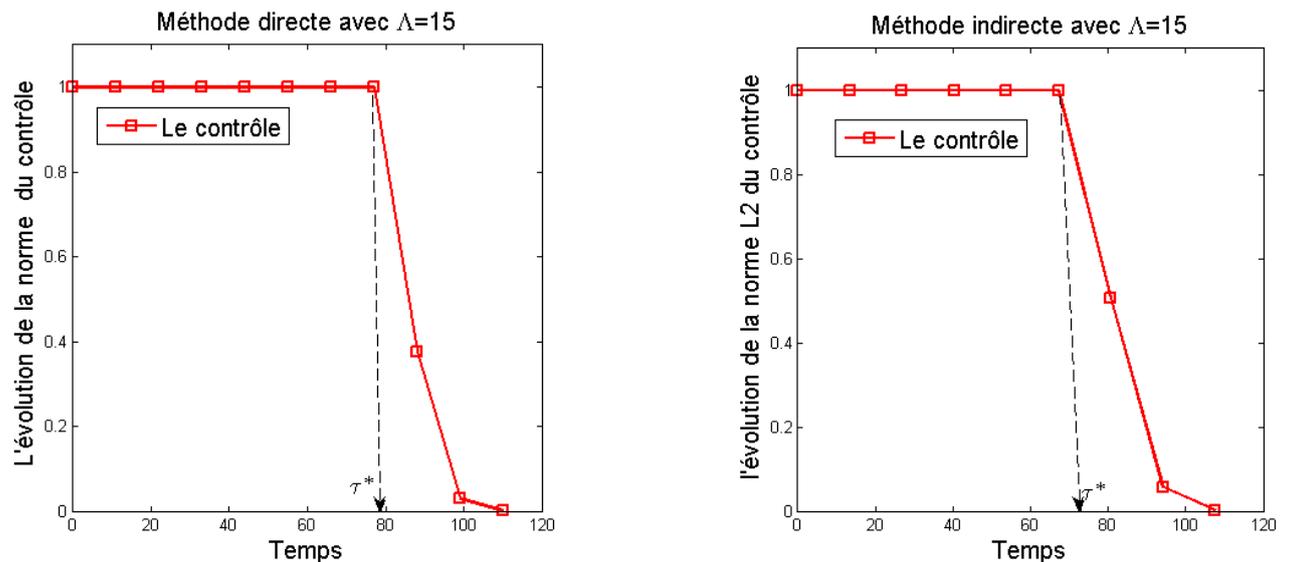
Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant.

Λ	1	2	8	10	15	20
τ^* (Méthode directe)	0.6129	2.5506	44.8033	63.9311	79.1337	109.8435
τ^* (Méthode indirecte)	0.6013	2.5089	43.9041	62.7097	77.8107	109.1337

TABLE 4.1 – Résultat de simulation-Temps optimal

Les figures suivantes présentent l'évolution de la norme L^2 du contrôle en temps réalisés par les deux méthodes (directe et indirecte).

FIGURE 4.1 – L'évolution de la norme L^2 du contrôle en temps avec $\Lambda = 1$ FIGURE 4.2 – L'évolution de la norme L^2 du contrôle en temps avec $\Lambda = 2$

FIGURE 4.3 – L'évolution de la norme L^2 du contrôle en temps avec $\Lambda = 8$ FIGURE 4.4 – L'évolution de la norme L^2 du contrôle en temps avec $\Lambda = 15$

On remarque que la norme L^2 du contrôle en temps est égale à 1 pour tout t de l'intervalle $[0, t_f^*]$. Ainsi, le contrôle possède bien la propriété de bang-bang. Il est intéressant de noter que, si le paramètre d'échelle Λ augmente, il en est de même pour le temps final, mais la propriété de bang-bang est toujours vérifiée. On remarque aussi que les résultats obtenus par les deux méthodes sont presque les mêmes.

Conclusion Générale

La problématique traitée dans cette thèse s'inscrit dans le cadre de contrôle optimal en temps avec l'invariance d'échelle. L'objectif est d'étudier des résultats liant le problème de contrôle en temps optimal avec le principe du maximum et la propriété de bang-bang en présence d'un paramètre d'échelle. Pour des systèmes possédant la contrôlabilité exacte, le principe du maximum est une condition nécessaire d'optimalité en temps. Pour obtenir la propriété de bang-bang d'un contrôle en temps optimal, il faut examiner si le système possède un type de contrôlabilité approchée.

Pour les systèmes qui ne possèdent pas la contrôlabilité exacte, comme pour l'équation de la chaleur, on tente d'établir un type de L^∞ -contrôlabilité à zéro en s'appuyant sur la technique de Lebeau-Robbiano pour obtenir la propriété de bang-bang d'un contrôle en temps optimal. Le principe du maximum nous donne la possibilité de construire des algorithmes numériques pour résoudre le problème de contrôle en temps optimal.

Ainsi, après avoir présenté une synthèse sur la théorie du contrôle en temps optimal en dimensions finie et infinie, un état de l'art sur les méthodes numériques pour la résolution des problèmes de contrôle en temps optimal a été présenté.

Puis, l'étude est axée sur le contrôle en temps optimal de l'équation de la chaleur en présence d'un paramètre d'échelle. on a construit dans un premier lieu une solution analytique exacte, qui dépend de la variable d'espace, du temps, et du paramètre d'échelle. La dépendance de cette solution par rapport au paramètre d'échelle conduit ainsi à étudier l'existence et l'unicité d'un contrôle optimal en temps de l'équation de la chaleur. En supposant la L^∞ -contrôlabilité à zéro, on peut établir une propriété de type bang-bang.

En perspective, le travail présenté dans cette thèse peut être étendu pour les systèmes non linéaires (comme par exemple l'équation de la chaleur non linéaire), l'équation de la chaleur en multidimensions et ainsi pour les équations de type Schrödinger. On discute par la suite de quelques problèmes ouverts liés au sujet de notre travail :

(i) Considérons les équations de type Schrödinger avec un contrôle interne en présence d'un paramètre d'échelle. Plus précisément, on considère l'équation

$$\begin{cases} \dot{y}(x, t, \lambda) = -i\Delta y(x, t, \lambda) + ia(x)y(x, t, \lambda) + \mathbb{1}_\omega(x) u(x, t, \lambda), & \forall (x, t, \lambda) \in K \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \\ y(x, t, \lambda) = 0, & \forall x \in \partial K, \forall (t, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \\ y(t=0) = y_0 \in L^2(K), & \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

où $K \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, ω est un ouvert non vide, $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et u est un contrôle vérifiant $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\omega)} \leq 1$.

Dans ce problème, en s'inspirant de l'article de J. Lohéac et M. Tucsnak [55], on voit qu'en supposant la contrôlabilité exacte du système, le contrôle optimal en temps vérifie le principe du maximum. De plus, en supposant un type de contrôlabilité approchée du système, on peut établir la propriété de bang-bang. De plus on sait bien que les équations de type Schrödinger possèdent une invariance d'échelle, ce qui conduit, naturellement, à un problème de contrôle interne en présence d'un paramètre d'échelle.

(ii) Est-ce que le principe du maximum est toujours valable pour un système qui ne possède pas la contrôlabilité exacte ?

◇ Considérons par exemple l'équation des plaques en présence d'un paramètre d'échelle :

$$\begin{cases} \ddot{y}(x, t, \Lambda) = -i\Delta^2 y(x, t, \Lambda) + \mathbb{1}_\omega(x) u(x, t, \Lambda) & \forall (x, t, \Lambda) \in K \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \\ y(x, t, \Lambda) = \Delta(x, t, \Lambda) = 0 & \forall x \in \partial K, \forall (t, \Lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

où $K \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, ω est un ouvert non vide, $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et u est un contrôle vérifiant $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\omega)} \leq 1$.

Ce système est exactement contrôlable mais semble ne pas posséder la contrôlabilité approchée sur tout ensemble $e \in [0, t]$ de mesure positive. Est-ce qu'un contrôle en temps optimal possède toujours la propriété de bang-bang ? Est-ce qu'il existe donc d'autres moyens pour établir la propriété de bang-bang pour un système exactement contrôlable ?

(iii) Le problème de contrôle en temps optimal en présence d'un paramètre d'échelle où on cherche un contrôle dans $L^1([0, t]; U)$, un espace de Banach non réflexif, est un sujet intéressant mais qui semble difficile.

Annexe 1

Programmation en matlab

1.A. Méthode directe - Dimension finie

```
function [tf,U] = methodedirecte(N)
```

```
% N : le nombre de discrétisation en temps.
```

```
% tf : le temps final.
```

```
% U : les valeurs du contrôle.
```

```
A=[0 1;0 0];
```

```
B=[0 ;1];
```

```
n=2;
```

```
m=1;
```

```
tf=5;
```

```
% A : matrice de taille n*n.
```

```
% B : matrice de taille n*m.
```

```
% n : la dimension de l'espace X.
```

```
% m : la dimension de l'espace U.
```

```
U=2*rand(m,N)-1;
```

```
X0=[reshape(U,N*m,1);tf];
```

```
y0=zeros(n,1);
```

```
yf =[0 ;-1];
```

```
% y0 : l'état initial.
```

```
% yf : l'état final souhaité.
```

```
options=optimset('Algorithm','sqp');
```

```
% On choisit la méthode sqp comme méthode d'optimisation non linéaire.
```

```
[X,tf] = fmincon(@principal, X0, [], [], [], [], [], @ (X)contrainte(X, A, B, m, N, y0, yf), options);
```

```
% Dessins
```

```
U=X(1 :(end-1));
```

```
U=reshape(U,m,N);
```

```
y=zeros(n,N+1);
```

```
h=tf/N;
```

```
% h : le pas de discrétisation en temps.
```

```
for i=1 :N
```

```
y(:,i+1)=y(:,i)+h*(A*y(:,i)+B*U(:,i));
```

```
end
```

```
subplot(121); plot(y(1,:),y(2,:),'r'); axis square;
```

```
subplot(122); plot(linspace(0,tf,N),U,'r'); axis square;
```

```

function [c,ceq] =contrainte(X,A,B,m,N,y0,yf)

tf=X(end);
U=X(1 :(end-1));
U=reshape(U,m,N);
h=tf/N;
c = [sum(abs(U).^m,1).^(1/m) - 1, -tf];
y=y0;
% c : représente la contrainte qu'en chaque instant  $t_i$ , et
 $\|U(t_i)\|_{\mathbb{R}^m} \leq 1$  et  $tf \geq 0$ .
for i=1 :N
y=y+h*(A*y+B*U( :,i));
% On utilise le schéma d'Euler explicite pour résoudre le système.
end
ceq= y-yf;
% ceq représente la condition finale.
function t = principal(X)
t=X(end);

```

1.B. Méthode de tir - Dimension finie

function [r,tf,u]= methodetir

```

y0=[0;0];
A=[0 1; 0 0];
B=[0;1];
p0=[1;1];
tf=100;
% On prend des valeurs initiales de p(0) et de tf.
n=2; m=1;
yf=[0;-1];
% n : la dimension de l'espace X.
% m : la dimension de l'espace U.
options=optimset('Display','iter','LargeScale','on');
[potf, r] = fsolve (@(X)F(X, A, B, y0, yf, n, m), [p0;tf],options);
% On utilise fsolve.m pour trouver un zéro de F.
% Dessin
tf=potf(end);
p0=potf(1 :end-1);
x0=[y0;p0];
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[Tx, x] = ode113 (@(t, x) state (t, x, A, B, n, m), [0tf], x0, options );
x=x';
y=x(1 :n, :);
p= x((n+1) :end, :);
q=B'*p;
u=zeros(m,length(Tx));
for i=1 :length(Tx)
u( :;i)=q( :;i)/norm(q( :;i),m);
end
subplot(121); plot(y(1, :),y(2, :),'r'); axis square;
subplot(122); plot(Tx,u,'r'); axis square;

```

function res =F(X,A,B,y0,yf,n,m)

```

% F rend la distance entre y(tf) et yf.
tf=X(end); p0=X(1 :(end-1)); x0=[y0;p0];
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[Tx, x] = ode113(@(t, x) state(t, x, A, B, n, m), [0;tf], x0, options);
% x représente les valeurs de y et p en chaque instant.
% On utilise ode113 pour résoudre le problème de Cauchy
res = x(end,1 :n)-yf;

```

function r =state(t,x,A,B,n,m)

```

z= x(1 :n); p= x((n+1) :end);
q=B'*p; u=q/norm(q,m);
% On rappelle que  $u(t) = \frac{B^*p(t)}{\|B^*p(t)\|_{R^m}}$  si il est en temps optimal.
r=[(A*y+B*u); (-A'*p)];

```

1-C. Méthode directe - dimension infinie

Problème de contrôle optimal en temps de l'équation de la chaleur linéaire, unidimensionnelle, en présence d'un paramètre d'échelle Λ .

function [tf,U] = Controlchaleur(N)

```

N = 10;
Lambda = 10;
tf = Lambda * Lambda;
d = N; u=2 * rand(N, d) - 1;
h = Lambda/(N + 1);
th = tf/d;
% N : nombre de discrétisation en espace.
% d : nombre de discrétisation en temps.
% Lambda : paramètre d'échelle.
% h : le pas de discrétisation en espace.
% th : le pas de discrétisation en temps.
d0 = -(2 * Lambda^2/h^2) * ones(N, 1);
d1 = Lambda^2/h^2 * ones(N, 1);
A = spdiags ([d1 d0 d1], -1 : 1, N, N);
% A représente la discrétisation de l'opérateur laplacien.
x = linspace(h, 1 - h, N);
xind = (x >= 1/3) .* (x <= 2/3);
B = spdiags(xind', 0, N, N);
% xind représente la discrétisation de la fonction indicatrice
% B est la matrice diagonale comme diagonale xind.
u = B * u;
X0 = [ reshape(u, d * N, 1); tf ];
T = linspace (0, tf - th, d);

options=optimset('Algorithm','interior-point','MaxFunEvals',1000000,'MaxIter',100000) ;
% On choisit la méthode "point intérieur" comme méthode d'optimisation non linéaire.
[X, f] = fmincon (@principal, X0, [], [], [], [], [], @ (X) contrainte (X, A, B, d, N), options);
% Dessin
tf=X(end);
d=(length(X)-1)/N;
U=reshape(X(1 :end-1),N,d);
y0 = sin(pi * linspace(h, 1 - h,N)');
y = zeros(N, d + 1);
y(:, 1) = y0;
th = tf/d;
C = eye(N,N)-th * A;
normcontrol=zeros(d,1);
for k=1 : d
y(:, k + 1) = Cy(:, k) + th * B * U(:, k));
normcontrol(k) = norm (U(:, k), 2);
end
subplot(121); plot([0 x 1],[0;y( :;end);0], 'r',[0 x 1],zeros(N+2,1),'b'); axis square ;
subplot(122); plot(T,normcontrol,'r'); axis square ;

```

function [c,ceq] =contrainte(X,A,B,d,N)

```

tf=X(end);
U=X(1 :end-1);
U=reshape(U,N,d);
th=tf/d;
h =  $\Lambda/(N + 1)$ ;
U=B*U;
c = [sum(abs(U).^2, 1).^(1/2) - 1,-tf ];
% c : représente la contrainte sur le contrôle
:  $\|U(t_i, \cdot)\|_{L^2([1/2,2/3]} \leq 1$  et que  $tf \geq 0$ .
y0 = sin(pi * linspace(h, 1 - h, N)');
C = eye(N, N) - th * A;
% On considère la condition initiale :
y0(x) = sin(x).
for k=1 :d
y0 = Cy0 + th * B * (:, k);
% On choisit le schéma d'Euler implicite pour discrétiser le système.
end;
ceq= y0- zeros(N,1);
% ceq représente la condition finale y(tf)=yf=0.

```

Annexe 2

2. Simulation numérique

2.A. Méthode directe - Dimension finie

On présente les résultats de la simulation de l'application de la méthode directe en dimension finie dans le tableau suivant :

N	10	20	40	100
t_f	2.2585	2.3333	2.3729	2.3873

TABLE 4.2 – Temps final numérique- Par la méthode directe

Les Résultats et les dessins pour la trajectoire de la solution et du contrôle en temps sont donnés dans les figures suivantes :

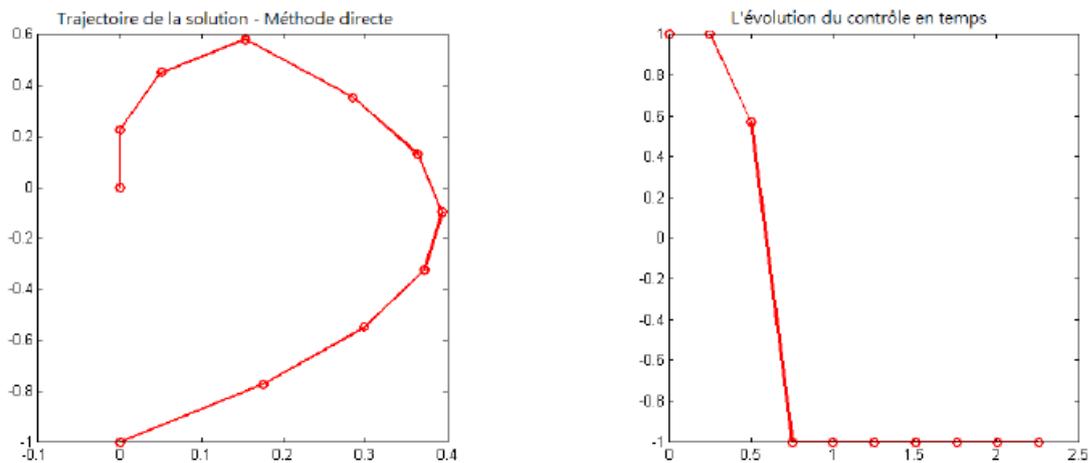
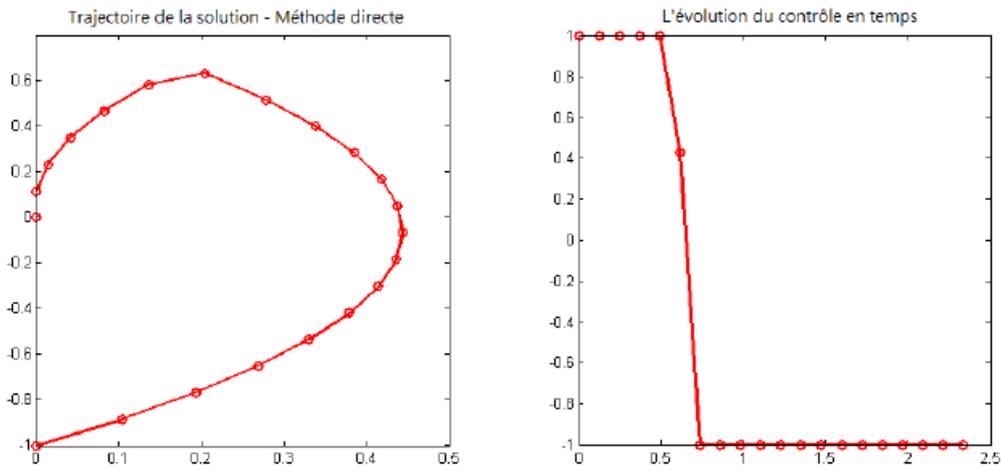
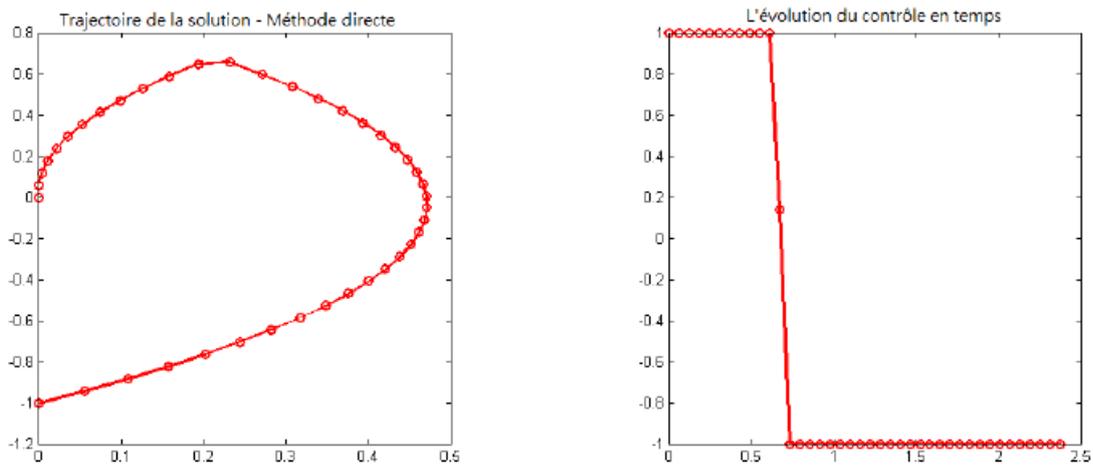
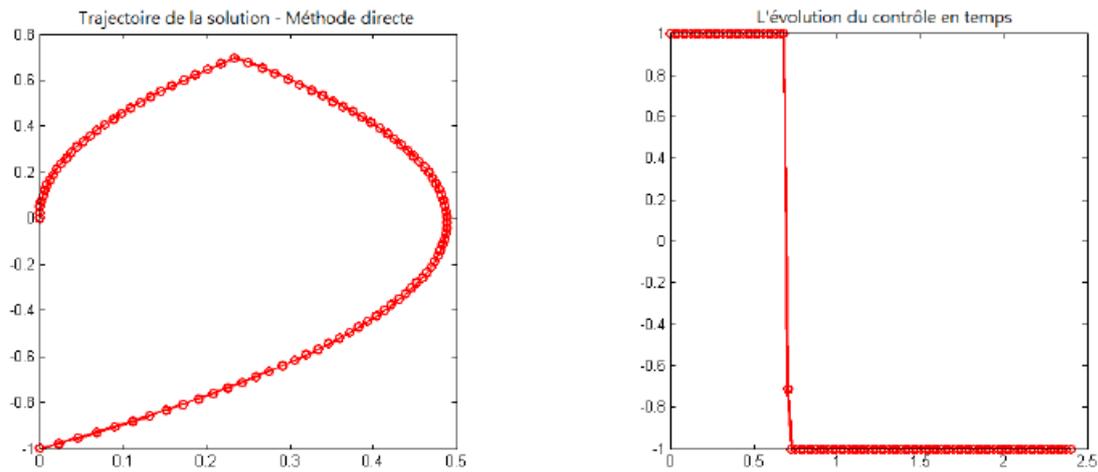


FIGURE 4.5 – Trajectoire de la solution et l'évolution du contrôle pour $N = 10$

FIGURE 4.6 – Trajectoire de la solution et l'évolution du contrôle pour $N = 20$ FIGURE 4.7 – Trajectoire de la solution et l'évolution du contrôle pour $N = 40$

FIGURE 4.8 – Trajectoire de la solution et l'évolution du contrôle pour $N = 100$

2.B. Méthode de tir - Dimension finie

On présente les résultats de la simulation de l'application de la méthode de tir en dimension finie dans le tableau suivant :

	t_f
$p_{int}^0 = [1, 1], t_{f \text{ int}} = 5$	2.4142
$p_{int}^0 = [1, 1], t_{f \text{ int}} = 100$	-2.4142

TABLE 4.3 – Temps final numérique- Par la méthode de tir

On présente dans les figures ci-dessous les trajectoires de la solution et l'évolution du contrôle par la méthode indirecte (méthode de tir)

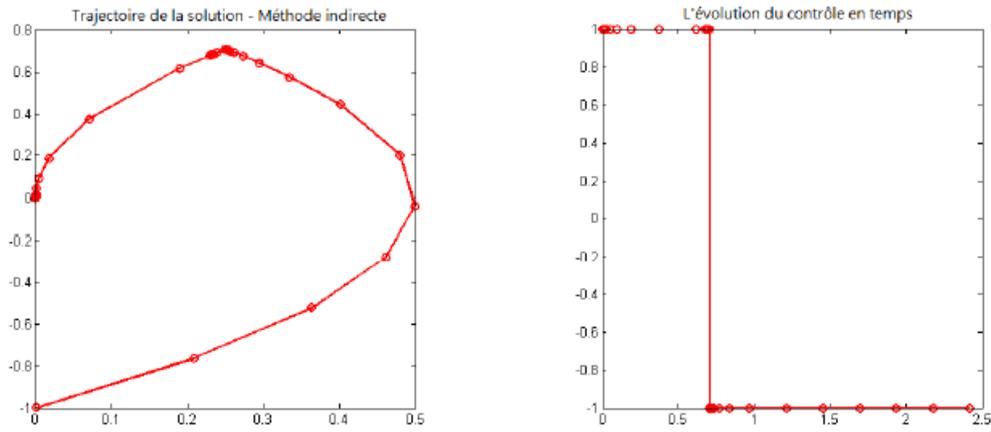


FIGURE 4.9 – Trajectoire de la solution et l'évolution du contrôle par la méthode de tir pour $p_{int}^0 = [1, 1]$, $t_{f\ int} = 5$

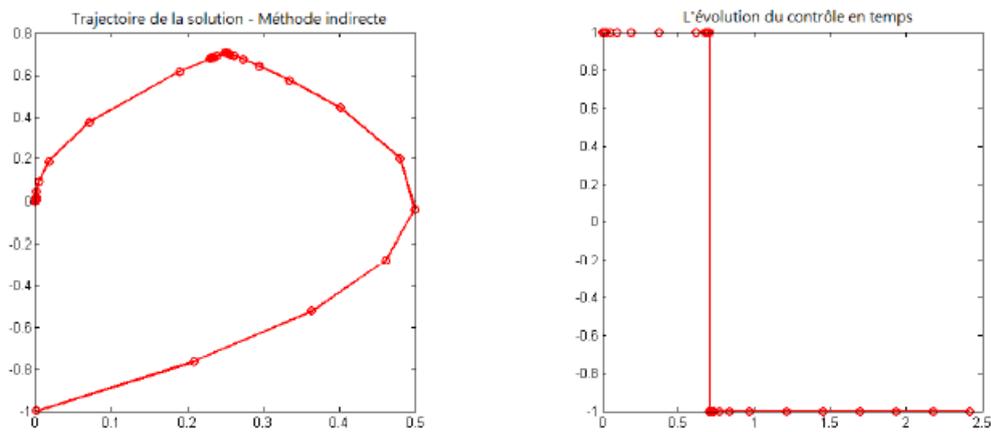


FIGURE 4.10 – Trajectoire de la solution et l'évolution du contrôle par la méthode de tir pour $p_{int}^0 = [1, 1]$, $t_{f\ int} = 100$

Bibliographie

Bibliographie

- [1] G. Adomian. *Nonlinear Stochastic Operator Equations*. Academic Press, Inc. New York, 1983.
- [2] M. Aidene, I. L. Vorobev and B. Oukacha. *Algorithm for solving a linear optimal control problem with minimax*. Performance Index Computational Mathematics and mathematical Physics 45 vol 10, pages 1691-1700, 2005.
- [3] H. Bahouri and P. Gérard. *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations*. American Journal of Math, **112**, pages 131-175 (1999).
- [4] V. Barbu and Th. Precupanu. *Convexity and optimization in Banach spaces*. volume 10 of Mathematics and its Applications (East European Series). D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, romanian edition, 1986.
- [5] V. Barbu. *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht-Boston-London, 1998.
- [6] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary*. SIAM J. Control Optim., 30(5) :1024-1065, September 1992.
- [7] R. Bellman, I. Glicksberg, and O. Gross. *On the "bang-bang" control problem*, Quart. Appl. Math., **14**, pages 11-18 (1956).
- [8] J. T. Betts and S. L. Campbell. *Discretize then optimize, in Mathematics for Industry : Challenges and Frontiers*. D. Ferguson and T. Peters, eds SIAM, 2005.
- [9] A. Borzi. *Multigrid methods for parabolic distributed optimal control problems*. J. Comp. Appl. Math., 157 :365-382, 2003.
- [10] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [11] O. Carja. *On constraint controllability of linear systems in Banach spaces*. J. Optim. Theory Appl., 56(2) :215-225, 1988.
- [12] O. Carja. *The minimal time function in infinite dimensions*. SIAM J. Control Optim., 31(5) :1103-1114, 1993.
- [13] R. Y. Chang and S. Y. Yang. *Solution of two-point-boundary-value problems by generalized orthogonal polynomials and application to optimal control of lumped and distributed parameter systems*. International Journal of Control, 43 : 1785-1802, 1986.
- [14] J. Y. Chemin, Cl. David. *Sur la construction de grandes solutions pour des équations de Schrödinger de type " masse critique*. Séminaire Laurent Schwartz - EDP et applications (2013).
- [15] J. Y. Chemin, Cl. David. *From an initial data to a global solution of the nonlinear Schrödinger equation : a building process*. International Mathematica Research Notices, rnv199, doi :10.1093/imrn/rnv199 (2015).
- [16] W. L. Chow. *Über Systeme von Linearen Partiellen Differentialgleichungen Erster Ordnung*. Math. Ann., **117**, pages 98-105 (1939).
- [17] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation*. Masson 1982.

- [18] J. M. Coron. *Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires*. XUPS 99-02, pages 123-168 (1999).
- [19] R. f. Curtain and H. Zwart. *An Introduction to infinite Dimensional linear systems theory*. : Springer-Verlag, New York, 1978.
- [20] K. B. Datta and B. M. Mohan. *Orthogonal functions in Systems and Control*. Word Scientific, Singapore, 1995.
- [21] J. P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. 3e édition. EDP SCIENCES, page 343, 2006.
- [22] M. Diehl, H. G. Bock, H. Diedam, and P.-B. Wieber. *Fast direct multiple shooting algorithms for optimal robot control*. In Fast motions in biomechanics and robotics, volume 340 of Lecture Notes in Control and Inform. Sci., pages 65-93. Springer, Berlin, 2006.
- [23] R. G. Douglas. *On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space*. Proc. Amer. Math. Soc., 17 :413-415, 1966.
- [24] H. O. Fattorini. *Time-optimal control of solutions of operational differental equations*. J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control, **2**, pages 54-59 (1964).
- [25] H. O. Fattorini. *A remark on the "bang-bang" principle for linear control systems in infinite dimensional spaces*. SIAM J. Control, **6**(3) (1968).
- [26] H. O. Fattorini. *Infinite dimensional linear control systems*. Volume 201 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science B.V., Amsterdam (2005). The time optimal and norm optimal problems.
- [27] R. Fletcher. *Practical methods of optimization*. Vol. 1. John Wiley Sons Ltd., Chichester, 1980. Unconstrained optimization, A Wiley-Interscience Publication.
- [28] R. Fletcher. *Practical methods of optimization*. Vol. 2. John Wiley Sons Ltd., Chichester, 1981. Constrained optimization, A Wiley-Interscience Publication.
- [29] R. V. Gamkrelidze. *Discovery of the maximum principle*. J. Dynam. Control Systems, 5(4) :437-451, 1999.
- [30] H. H. Goldstine. *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*. volume 5 of Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [31] F. Gozzi and P. Loreti. *Regularity of the minimum time function and minimum energy problems : the linear case*. SIAM J. Control Optim., 37(4) :1195-1221 (electronic), 1999.
- [32] W. Hackbusch . *Elliptic Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1992.
- [33] E. Hairer. *Méthodes numériques*. Cours de l'université de Genève, 2004.
- [34] J. H. He. *A new approach to nonlinear partial differential equations*. Communication Nonlinear Science Nimerical Simulation, 34 : 203-205, 1977.
- [35] J. H. He. *Variational Iteration Method for Delay Differential Equations*. Communication Nonlinear Science Nimerical Simulation, 2 : 235-236, 1977.
- [36] J. H. He. *Approximation analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media*. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, 167 : 57-68, 1998.
- [37] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. volume I : fundamentals of numerical discretization. John Wiley Sons, Chichester, New York, 1986.
- [38] I. R. Horng and J. H. Chou. *Application of shifted chebyshev series to the optimal control of linear distributed parameter systems*. International Journal of Control,42 : 233-241, 1985.
- [39] D. G. Hull. *Calculus of variations*. Mineola, New York : Dover Publivations, 1974.
- [40] D. G. Hull. *Optimal control theory for applications*. New York : Springer-Verlag, 2003.

- [41] M. Inokuti, H. Sekine and T. Mura. *Genral use of the lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics, in : S. Namat- Nasser, Variatinal Method in the Mechanics os solids*. Pergamon Press, Oxford 1978.
- [42] A. Ionescu Tulcea and C. Ionescu Tulcea. *Topics in the theory of lifting*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 48. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
- [43] S. Jaffard. *Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque carrée*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 307(14) :759-762, 1988.
- [44] R. E. Kalman, Y. C. Ho et K. S. Narendra : *Controllability of linear dynamical systems*. Contributions to Differential Equations, 1 :189-213, 1963.
- [45] S. Kazem J.A. Rad and K. Parand. *Optimal control of a parabolic distributed parameter system via radial basis function*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 19 :2559-2567, 2014.
- [46] V. Komornik. *On the exact internal controllability of a Petrowsky system*. J. Math. Pures Appl. (9), 71(4) :331-342, 1992.
- [47] I. Lasiecka and R. Triggiani. *Uniform energy decay rates of hyperbolic equations with nonlinear boundary and interior dissipation*. Control and Cybernetics, 37(4) :935-969, 2008.
- [48] G. Lebeau and L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*. Comm. Partial Differential Equations, **20**(1-2), pages 335-356 (1995).
- [49] G. Lebeau. *Contrôle de l'équation de Schrödinger*. J. Math. Pures Appl., 71 :267- 291, 1992.
- [50] G. Lebeau and E. Zuazua. *Null-controllability of a system of linear thermoelasticity*. Arch. Rational Mech. Anal., 141(4) :297-329, 1998.
- [51] E. B. Lee et L. Markus : *Foundations of optimal control theory*. John Wiley Sons Inc., New York, 1967.
- [52] V. Legat. *Mathématique et méthodes numériques*. Cours de l'université catholique de Louvain, 2004.
- [53] J. L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Avant propos de P. Lelong. Dunod, Paris (1968).
- [54] J. L. Lions. *Some Aspects of the optimal control of distributed parameter system*. SIAM, Philadelphia, 1972.
- [55] J. Lohéac and M. Tucsnak. *Maximum principle and bang-bang property of time optimal controls for Schrödinger type systems*. (2012).
- [56] J. Lohéac, *Contrôle en temps optimal et nage à bas nombre de Reynolds*. Thèse de doctorat. Institut Elie Cartan, UMR 7507, INRIA, Nancy-Université, CNRS, décembre 2012.
- [57] K. Louadj. *Résolution des problèmes paramétrés en contrôle optimal*. Thèse de doctorat, page 116, 2012.
- [58] G. B. Mahapatra. *Solution of optimal control problem of linear diffusion equations via walsh functions*. IEEE Trans. On Automatic Control, 24 : 487-489, 1979.
- [59] H. R. Marzban and M. Razzaghi. *Optimal control of linear delay system via hybrid of block-pulse ans legendre polynomials*. Journal of the franklin Institute, 341 : 279-293, 2004.
- [60] K. Mauffrey. *Contrôlabilité des systèmes par des équations aux dérivées partielles*. PhD thesis, Université de Franche- Comté, 2012.
- [61] S. Micu, I. Roventa, and M. Tucsnak. *Time optimal boundary controls for the heat equation*. (November 2011).
- [62] L. Miller. *The control transmutation method and the cost of fast controls*. SIAM J. Control Optim., 45(2) :762-772 (electronic), 2006.
- [63] L. Miller. *On the controllability of anomalous diffusions generated by the fractional Laplacian*. Math. Control Signals Systems, 18(3) :260-271, 2006.

- [64] M. Mirrahimi, P. Rouchon, and G. Turinici. Lyapounov. *Control of bilinear Schrödinger equations*. Automatica, 41 :1987-1994, 2005.
- [65] S. M. Mizohata. *Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs paraboliques*. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A31, pages 219-239 (1958).
- [66] D. S. Naidu. *Optimal Control systems*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 2003
- [67] Z. M. Odibat. *A study on the convergence of variational iteration method*. Mathematical and Computer Modelling, 51 : 1118-1192, 2010.
- [68] B. Oukacha. *Résolution de problème de contrôle optimal*. thèse de doctorat université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2005.
- [69] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes*. Translated from the Russian by K. N. Trilogoff; edited by L. W. Neustadt. Interscience Publishers John Wiley Sons, Inc. New York-London, 1962.
- [70] L. Pontryagin and al. *Mathematical theory of optimal processes*. Eds Mir Moscou, page 504, 1974.
- [71] J. P. Puel. *Contrôle et équations aux dérivées partielles*. XUPS 99, pages 169-188 (1999).
- [72] W. F. Ramirez. *Process Control and Identification* : Academic Press, 1994.
- [73] A. Y. Rao. *A survey of numerical methods for optimal control*. Applied Mathematics and computation, 345 : 543-548, 2007
- [74] J. Rappaz and M. Picasso. *Introduction à l'analyse numérique*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1998.
- [75] P.A. Raviart and JM Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*.
- [76] M. Razzaghi. *Solution of Linear Two-point Boundary Value Problems and Optimal Control of Time-Varying Systems By Shifted Chebyshev Approximations*. Journal of the Franklin Institute, 327 : 321-328, 1990.
- [77] I. S. Sadek and M. A. Bokhari. *Optimal control of a parabolic distributed parameter system via orthogonal polynomial*. Optim. Control App. Meth, 19 : 205-213 1998.
- [78] A. P. Sage and C. C. White. *Optimal Systems Control*. NJ : Prentice Hall, Englewood cliffs, 1977.
- [79] R. W. H. Sargent. *Optimal control*. Journal of computational and Applied Mathematics, 124 :361-371,2000.
- [80] S. Sedaghat, Y. Ordokhan and M. Dehghan. *Numerical solution of the delay differential equations of pantograph type via Chebyshev polynomials* . Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17 :4815-4830, 2012.
- [81] T. I. Seidman and J. Yong. *How violent are fast controls ?*. II. Math. Control Signals Systems, 9(4) :327-340, 1996.
- [82] E. G.da. Silva. *Méthodes et Analyse Numériques*. Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, 2007.
- [83] E. D. Sontag. *Mathematical control theory*. volume 6 of Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998. Deterministic finite-dimensional systems.
- [84] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to numerical analysis*. volume 12 of Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002. Translated from the German by R. Bartels, W. Gautschi and C. Witzgall.
- [85] G. Tenenbaum and M. Tucsnak. *New blow-up rates for fast controls of Schrödinger and heat equations*. J. Differential Equations, 243(1) :70-100, 2007.
- [86] G. Tenenbaum and M. Tucsnak. *On the null-controllability of diffusion equations*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., 17(4) :1088-1100, 2011.
- [87] E. Trélat. *Contrôle optimal*. Mathématiques Concrètes. [Concrete Mathematics]. Vuibert, Paris, 2005. Théorie applications. [Theory and applications].

- [88] E. Trélat. *Contrôle optimal : Théorie et applications*. Université Paris-Sud Laboratoire EN-EDP Mathématiques UMR 8628 Bat 425 ; 91405 Orsay Cedex, page 238, 2005.
- [89] M. Tucsnak and G. Weiss. *Observation and control for operator semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel (2009).
- [90] A. Vande Wouwer, P. Saucez, and W. E. Schiesser. *Adaptive Method of LINES*. CHAP-MAN HALL /CRC, London, 2001.
- [91] R. Vinter. *Optimal control*. Boston, Birkhauser, 2000.
- [92] O. Von Stryk and R. Bulirsch. *Direct and indirect methods for trajectory optimization*. Ann. Oper. Res., 37(1-4) :357-373, 1992. *Nonlinear methods in economic dynamics and optimal control* (Vienna, 1990).
- [93] L. Wang, Qishu Yan. *Bang-bang property of time optimal controls for some semilinear heat equation*. Journal of Optimization Theory and Applications, **165** (1), pages 263-278 (2015).
- [94] G. Wang. *L^∞ -null controllability for the heat equation and its consequences for the time optimal control problem*. SIAM J. Control Optim., **47**(4), pages 1701-1720 (2008)
- [95] M. L. Wang and R. Y. Chang. *Optimal Control of linear distributed parameter systems by shifted legendre polynomial functions*. Journal of Dynamics Systems, Measurement, and control, 105 :222-226, 1983.
- [96] M. L. Wang and R. Y. Chang. *Optimal Control of Lumped Parameter Systems Via Shifted Legendre Polynomial Approximation*. Journal of Optimisation Theory and Applications, 45 :313-324, 1985.
- [97] A. M. Wazwaz. *The variational iteration method for solving linear and nonlinear systems of PDEs*. Computers and Mathematics with Applications, 54 :895-902, 2007.
- [98] A. M. Wazwaz. *Partial differential Equations and Solitary Waves Theory*. Springer, 2009.
- [99] A. M. Wazwaz. *The variational iteration method : A reliable analytic tool for solving linear and nonlinear wave equation*. Computers and Mathematics with Applications, 54 :926-932, 2007.
- [100] C. T. WU. *Contrôle en temps optimal*. Université de lorraine Université Nancy 1 - Henri, septembre 2012.
- [101] J. Zabczyk. *Mathematical control theory : an introduction. Systems Control : Foundations Applications*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.
- [102] E. Zuazua. *Handbook of Differential Equations : Evolutionary Differential Equations*. vol. 3, Elsevier Science, 2006, ch. *Controllability and Observability of Partial Differential Equations : Some results and open problems*, pp. 527-621.