

République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou



**Faculté des Sciences
Département de Mathématiques**

Mémoire de Master

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Option : Modélisation Mathématique

Intitulé du mémoire

**L'équi-asymptotique presque périodicité. Application
aux équations intégrales.**

Réalisé par :

MOHAND SAIDI Siham

Dirigé par :

SMAALI Manal

Devant le jury d'examen composé de :

MORSLI	Mohamed	Professeur	UMMTO	Président
SMAALI	Manal	MCA	UMMTO	Rapporteur
DAOUI	Amina	MCB	UMMTO	Examinatrice
MELLAH	Omar	MCB	UMMTO	Examineur

Soutenu le 06/07/2017.

Table des matières

Introduction générale	2
1 Les fonctions asymptotiquement presque périodiques	4
1.1 Préliminaires	4
1.1.1 Espace de Banach	4
1.1.2 Fonctions à valeurs dans un espace de Banach	5
1.2 Les fonctions presque périodiques	7
1.2.1 Définitions et propriétés fondamentales	7
1.2.2 Théorèmes de Composition	12
1.3 Les fonctions asymptotiquement presque périodiques	15
1.3.1 Définitions et propriétés fondamentales	15
1.3.2 Théorèmes de Composition	21
1.4 L'Èqui-asymptotique presque périodicité	23
2 Solution asymptotiquement presque périodique pour une classe d'équations intégrales	30
2.1 Un théorème de point fixe dans l'algèbre de Banach	30
2.2 Théorème d'existence	34
Conclusion	40
Annexe	41
Bibliographie	42

Introduction générale

La modélisation mathématique de certains problèmes naturels conduit généralement à des modèles qui sont continus ou discrets. Ils sont présentés par des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles, ou par des équations intégrales.

De nombreux phénomènes ou signaux aléatoires présentent des propriétés de périodicité dues souvent à leur mode de production (machines rotatives, oscillateurs...). Il existe plusieurs domaines d'applications, notamment en économie, physique, médecine, biologie, écologie,.. etc. Cette périodicité, temporelle ou spatiale, peut être détectée à partir de l'observation directe de la série des données, ou elle peut être cachée dans sa structure, mais la plus part des séries qui modélise certains phénomènes, ont un comportement presque périodique ou asymptotiquement presque périodique.

La presque périodicité a été introduite pour la première fois en 1923 par le mathématicien **Harald Bohr**¹, son idée était simple et claire mais pas maniable, dans sa première publication il se concerna sur les fonctions continues à valeurs dans un espace vectoriel complexe, par la suite c'est **S.Bochner**² qui a étendu cette notion au cas des fonctions à valeurs dans un espace de Banach de dimension fini ou infini, donna une autre définition de la presque périodicité équivalente à celle de **Harald Bohr**. Cette dernière à fournit un moyen plus simple pour démontrer certains résultats.

Il faut aussi mentionner les noms de S.Stepanov, A.Besicovitch, H.Weyl, J.Favard, J.Von Neumann, et pleins d'autres mathématiciens qui ont contribué au développement de cette théorie.

En 1941, **Fréchet** à introduit l'asymptotique presque périodicité, une généralisation de la presque périodicité, des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et qui

1. Né le 22 avril 1887 à Copenhague, Danemark et mort le 22 janvier 1951 à Copenhague.

2. Né le 20 aout 1899 à Houston et mort le 2 mai 1982 à Houston.

ont un comportement presque périodique à partir d'un certain rang. A. Precupanu [20], W. H. Summer, W. M. Ruess [21] et E. Vesentini [22] ont généralisé cette notion aux cas des fonctions à valeurs dans un espace abstrait. Par la suite beaucoup de chercheurs se sont intéressés à la recherche des solutions asymptotiquement presque périodiques pour les équations différentielles et intégrales, citons A. M. Fink [12], C. Corduneanu[[4]], S. Zaidman [25] et H. R. Henriquez [14] , [15].

Dans ce manuscrit nous allons nous intéresser à la recherche des solutions asymptotiquement presque périodique des équations intégrales développé dans l'article [11], nous allons introduire la notion de l'équi-asymptotique presque périodicité qui va jouer un rôle important pour l'obtention d'un théorème d'existence d'une solution asymptotiquement presque périodique.

Ce mémoire est divisé en deux chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'introduction des notions nécessaires pour la compréhension théorique des fonctions presque périodiques et asymptotiquement presque périodiques.

Le noyau principale de ce chapitre est l'équi-asymptotique presque périodicité.

Le deuxième chapitre est consacré au problème d'existence des solutions asymptotiquement presque périodiques pour une certaine classe d'équations intégrales. Le résultat sera illustré par un exemple d'application.

À la fin de ce mémoire nous avons mis une partie annexe où nous avons rappelé quelques résultats importants de l'analyse fonctionnelle.

Chapitre 1

Les fonctions asymptotiquement presque périodiques

Dans ce chapitre, nous ferons une petite synthèse des propriétés fondamentales des fonctions presque périodiques et asymptotiquement presque périodiques à valeurs dans un espace de Banach. Des résultats de composition ainsi qu'un critère de compacité dans l'espace des fonctions asymptotiquement presque périodiques seront énoncés.

Commençons par un rappel de quelques notions de bases dans les espaces de Banach, dont on aura besoin dans la suite de ce document (voir [17], [23], [10]).

1.1 Préliminaires

Notons par $(X, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé.

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1. Une suite de vecteurs (x_n) de X est dite de **Cauchy**, si pour tout $\epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $m, n > n_\epsilon$, on a

$$\| x_n - x_m \| < \epsilon.$$

Proposition 1.1.1. Si (x_n) est une suite de Cauchy dans X , alors la suite $(\| x_n \|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Définition 1.1.2. Un espace vectoriel normé X est dit de Banach si toute suite de Cauchy est convergente dans X .

1.1. PRÉLIMINAIRES

Définition 1.1.3. Un sous ensemble S de X est dit *fermé*, si toute suite d'éléments de S convergente dans X , sa limite est aussi dans S .

Définition 1.1.4. Soit S un sous ensemble de X , alors la fermeture de S noté par $\bar{S}$ est l'ensemble $\{x \in X : \exists (x_n) \subseteq S, x_n \rightarrow x\}$.

Définition 1.1.5. Un sous ensemble S de X est dit **dense** dans X si $\bar{S} = X$.

Définition 1.1.6. $S \subset X$ est dit **relativement compact** si son adhérence $\bar{S}$ est compact.

Définition 1.1.7. Un ensemble A est dit **relativement dense** dans $\mathbb{R}$ s'il existe un $l > 0$ tel que $A \cap [l, l+a] \neq \emptyset, \forall a \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.1.2. Un sous-espace S d'un espace de X est **relativement compact** si de toute suite de S , on peut extraire une sous-suite qui converge dans X .

Définition 1.1.8. Un ensemble $A \subset X$ est dit **pré-compact** si $\forall \epsilon > 0 \exists$ un recouvrement fini de A par des boules de rayon ϵ .

1.1.2 Fonctions à valeurs dans un espace de Banach

Maintenant nous allons considérer des fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach $(X, \| \cdot \|)$.

Définition 1.1.9. Une fonction f est dite **uniformément continue** sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) = \delta, \forall t_1, t_2 \in I, \text{ on a } |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| < \epsilon.$$

Proposition 1.1.3. Soit $I = [a, b]$, alors $C(I, X) = \{f : I \rightarrow X, \text{ telle que } f \text{ est continue sur } I\}$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{C(I, X)} = \sup_{t \in I} \|f(t)\| = \|f\|_{\infty}.$$

Proposition 1.1.4. L'ensemble $CB(\mathbb{R}, X) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow X, \text{ telle que } f \text{ est continue et bornée sur } \mathbb{R}\}$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{CB(\mathbb{R}, X)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| = \|f\|_{\infty}.$$

Définition 1.1.10. Un ensemble $F \subset C(\mathbb{R}, X)$ est dit **equi-continue** si $\forall \epsilon > 0, \forall t_0, \exists \delta(\epsilon, t_0) = \delta$ avec $|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|f(t) - f(t_0)\| < \epsilon, \forall f \in F$.

1.1. PRÉLIMINAIRES

Définition 1.1.11. Un ensemble $F \subset C(\mathbb{R}, X)$ est dit *equi-uniformément continue* si

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) = \delta$ avec $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| < \epsilon, \forall f \in F$.

Définition 1.1.12. Une suite (f_n) est *uniformément convergente* vers f si :

$$\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$.

1.2 Les fonctions presque périodiques

1.2.1 Définitions et propriétés fondamentales

La notion de presque périodicité a été introduite par H.Bohr comme généralisation de la périodicité :

Définition 1.2.1. (*Presque périodicité au sens de Bohr*) Une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ est dite **presque périodique** (pp) si :
 $\forall \epsilon > 0$, l'ensemble $T(f, \epsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$ où :

$$T(f, \epsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} : \|f(t + \tau) - f(t)\| < \epsilon, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Autrement dit, f est presque périodique si $\forall \epsilon > 0$, $\exists l(\epsilon) = l$ tel que $\forall a \in \mathbb{R}$, $T(f, \epsilon) \cap [a, a + l] \neq \emptyset$.

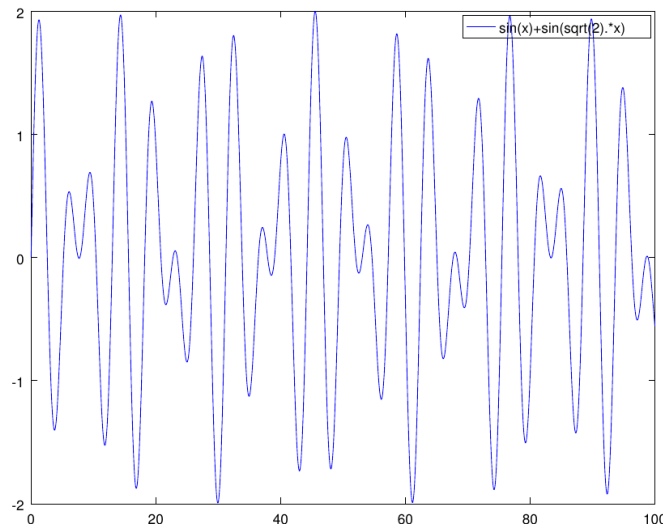
Remarque 1.2.1. L'ensemble $T(f, \epsilon)$ est appelé ensemble des ϵ -translation ou ϵ -périodes de f .

L'ensemble des fonctions presque périodiques sera noté $PP(\mathbb{R}, X)$.

Exemple 1.

1. Toute fonction périodique continue est presque périodique, en effet, $\forall \epsilon > 0$, $T(f, \epsilon)$ contient l'ensemble des multiples de la période qui est relativement dense dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction suivante est presque périodique mais pas périodique : (voir [12])

$$f(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x).$$



1.2. LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

Maintenant nous allons énoncer quelques théorèmes importants.

Théorème 1.2.1. *Toute fonction presque périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ est bornée dans X .*

Preuve. Soit f une fonction presque périodique, et soit $l = l(\epsilon)$ le nombre correspondant à $\epsilon = 1$ dans la définition d'une fonction presque périodique. Sur l'intervalle $[0, l]$ f est continue donc bornée¹. Soit $M > 0$ telle que :

$$\|f(t)\| < M, \quad \forall t \in [0; l]$$

Si on choisit t arbitrairement, alors l'intervalle $[-t, -t+l]$ contient au moins un nombre de translation τ , correspond à $\epsilon = 1$ et le fait que $t + \tau \in [0, l]$, on aura :

$$\|f(t)\| \leq \|f(t + \tau) - f(t)\| + \|f(t + \tau)\| < 1 + M,$$

ce qui montre que f est bornée.

■

Théorème 1.2.2. *Toute fonction presque périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ et $l = l(\frac{\epsilon}{3})$ le nombre correspondant à $\frac{\epsilon}{3}$ dans la définition d'une fonction presque périodique.

Comme f est uniformément continue sur l'intervalle $[0, 2 + l]^2$, on aura : $\forall \epsilon > 0, \exists 0 < \delta < 1$, tel que pour t' et $t'' \in [0, 2 + l]$ avec $|t' - t''| < \delta$, on a $\|f(t') - f(t'')\| < \frac{\epsilon}{3}$.

Maintenant soit t_1 et t_2 tels que $|t_1 - t_2| < \delta$, et soit τ une $\frac{\epsilon}{3}$ -translation de la fonction f tel que $\tau \in [-t_1 + 1, -t_1 + 1 + l]$, c-à-d $-t_1 + 1 < \tau < -t_1 + 1 + l$. Grâce à la relation $|t_2 - t_1| < \delta$, on aura $t_1 - \delta < t_2 < t_1 + \delta$ et $t_1 - \delta + \tau < t_2 + \tau < t_1 + \delta + \tau$, mais $1 < t_1 + \tau < 1 + l$ implique que $1 - \delta < t_2 + \tau < 1 + \delta + l$, d'où $0 < t_2 + \tau < 2 + l$, un intervalle qui contient aussi $t_1 + \tau$, alors on aura $\|f(t_2 + \tau) - f(t_1 + \tau)\| < \frac{\epsilon}{3}$. Comme résultat :

$$\begin{aligned} \|f(t_2) - f(t_1)\| &\leq \|f(t_2) - f(t_2 + \tau)\| + \|f(t_2 + \tau) - f(t_1 + \tau)\| \\ &\quad + \|f(t_1 + \tau) - f(t_1)\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$.

-
1. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ est bornée sur chaque sous intervalle borné de $\mathbb{R}$.
 2. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur chaque compact de $\mathbb{R}$.

1.2. LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

■

Théorème 1.2.3. *L'ensemble des valeurs d'une fonction presque périodique qui est à valeurs dans X est relativement compact.*

Preuve. *Puisqu'on travaille dans un espace de Banach, la relative compacité coïncide avec la pré-compacité. Il est donc suffisant de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des valeurs de f peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ϵ .*

Soit $\epsilon > 0$ et $l = l(\frac{\epsilon}{2})$ le nombre correspondant à $\frac{\epsilon}{2}$ dans la définition d'une fonction presque périodique. Puisque f est continue sur l'intervalle $[0, l]$, alors l'ensemble des valeurs de f sur cet intervalle est compact. Maintenant on note par $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ les centres des boules de rayon $\frac{\epsilon}{2}$ qui recouvre l'ensemble $\{f(t); t \in [0, l]\}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ et τ une $\frac{\epsilon}{2}$ -translation, telle que $\tau \in [-t, -t+l]$ alors, $(t+\tau) \in [0, l]$, et soit a_j le centre d'une boule de rayon $\frac{\epsilon}{2}$ qui contient $f(t+\tau)$, alors :

$$\|f(t) - a_j\| \leq \|f(t) - f(t+\tau)\| + \|f(t+\tau) - a_j\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

donc $f(t) \in B(a_j, \epsilon)$.

Finalement $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \in \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \epsilon)$ c-à-d $\{f(t); t \in \mathbb{R}\} \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \epsilon)$.

■

Définition 1.2.2. *Une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ est dite **normale** si toute suite $(s'_n) \subset \mathbb{R}$ possède une sous-suite (s_n) telle que $\{f(\cdot + s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.*

Le théorème suivant dû à S.Bochner, nous donne l'équivalence entre la normalité et la presque périodicité au sens de H.Bohr.

Théorème 1.2.4. *(Critère de S.Bochner)[4]*

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ est presque périodique si et seulement si elle est normale.

Théorème 1.2.5. *Soit f et g deux fonctions presque périodiques à valeurs dans X , alors :*

1. $\lambda f \in PP(\mathbb{R}, X)$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. $f + g \in PP(\mathbb{R}, X)$
3. La fonction $t \rightarrow f(t + a) = f_a \in PP(\mathbb{R}, X)$.
4. La fonction $t \rightarrow f(\alpha t) \in PP(\mathbb{R}, X)$.

1.2. LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

5. La fonction $t \rightarrow \|f(t)\| \in PP(\mathbb{R}, X)$.

Preuve. Pour la démonstration nous allons utiliser le théorème 1.2.4 :

-(1) Soit $f \in PP(\mathbb{R}, X)$, et une suite $(h'_n) \subset \mathbb{R}$. $\exists$ une sous suite (h_n) de (h'_n) telle que $\{f(\cdot + h_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, mais on aura aussi $\{\lambda f(\cdot + h_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'où $\lambda f \in PP(\mathbb{R}, X)$.

-(2) Soit $f \in PP(\mathbb{R}, X)$. Pour toute suite $(h''_n) \subset \mathbb{R}$, il existe une sous suite (h'_n) telle que la suite de fonctions $\{f(\cdot + h'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Soit maintenant $g \in PP(\mathbb{R}, X)$, il existe une sous suite (h_n) de (h'_n) telle que la suite de fonctions $\{g(\cdot + h_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, et sachant que (h_n) est une sous suite de (h''_n) alors $\{f(\cdot + h_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Donc $\{f(\cdot + h_n) + g(\cdot + h_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'où $f + g \in PP(\mathbb{R}, X)$.

-(3) Soit $f \in PP(\mathbb{R}, X)$ et $(h'_n) \subset \mathbb{R}$. Il existe une sous suite (h_n) de (h'_n) telle que $\{f(\cdot + h_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, c-à-d qu'il existe une fonction g telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + h_n) - g(t)\| = 0.$$

Posons $t = s + a$, on aura

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + h_n) - g(t)\| &= \sup_{s+a \in \mathbb{R}} \|f(s + a + h_n) - g(s + a)\| \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}} \|f(s + a + h_n) - g(s + a)\| \end{aligned}$$

D'où la $\{f(\cdot + a + h_n)\}$ converge uniformément vers $g(\cdot + a)$, alors $f_a \in PP(\mathbb{R}, X)$.

-(4) Soit $f \in PP(\mathbb{R}, X)$ et $(h'_n) \subset \mathbb{R}$. il existe une sous suite (h_n) de (h'_n) telle que $\{f(\cdot + h_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, c-à-d qu'il existe une fonction g telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + h_n) - g(t)\| = 0.$$

Posons $t = \alpha s$, on aura

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + h_n) - g(t)\| &= \sup_{\alpha s \in \mathbb{R}} \|f(\alpha s + h_n) - g(\alpha s)\| \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}} \|f(\alpha s + h_n) - g(\alpha s)\|. \end{aligned}$$

1.2. LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

D'où $\{f(\alpha + h_n)\}$ converge uniformément vers $g(\alpha)$, alors $f(\alpha t) \in PP(\mathbb{R}, X)$.

-(5) elle provient de l'inégalité suivante :

$$| \|f(t + \tau)\| - \|f(t)\| | \leq \|f(t + \tau) - f(t)\|.$$

■

Théorème 1.2.6. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions presque périodiques à valeurs dans X , et si

$$\lim f_n(t) = f(t),$$

uniformément sur $\mathbb{R}$, alors f est presque périodique.

Preuve. Sachant que f est une limite uniforme des $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon)$ avec la propriété que $n \geq N(\epsilon)$ on a

$$\|f_n(t) - f(t)\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On fixe $n_0 \geq N(\epsilon)$, on considère $l = l(\frac{\epsilon}{3})$ déterminé par la presque périodicité de f_{n_0} et τ une $(\frac{\epsilon}{3})$ -translation de f_{n_0} . Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} \|f(t + \tau) - f(t)\| &\leq \|f(t + \tau) - f_{n_0}(t + \tau)\| \\ &\quad + \|f_{n_0}(t + \tau) - f_{n_0}(t)\| \\ &\quad + \|f_{n_0}(t) - f(t)\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre la presque périodicité de f .

■

Remarque 1.2.2. Ce résultat exprime le fait que $PP(\mathbb{R}, X)$ est un **sous espace fermé** de $CB(\mathbb{R}, X)$ muni de la norme uniforme.

D'où $(PP(\mathbb{R}, X), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Avant de définir le critère de compacité pour une famille de fonctions pp, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 1.2.3. un ensemble $F \subset C(\mathbb{R}, X)$ est dit **équi-presque périodique** si $\forall \epsilon > 0$, l'ensemble $T(F, \epsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$ où :

$$T(F, \epsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} : \|f(t + \tau) - f(t)\| < \epsilon, \quad \forall f \in F, \quad \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

1.2. LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

Théorème 1.2.7. (voir [4])

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille F de fonctions de $PP(\mathbb{R}, X)$ soit relativement compacte est que les propriétés suivantes soient vérifiées :

1. F est equi-continue.
2. F est equi-presque périodique.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{f(t), f \in F\}$ est relativement compact dans X .

1.2.2 Théorèmes de Composition

Avant de donner les théorèmes de composition nous aurons besoin de la notion d'une fonction presque périodique à paramètre.

Définition 1.2.4. Une fonction continue $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$ est dite presque périodique par rapport à t , uniformément par rapport aux ensembles compacts de X , lorsque $\forall \epsilon > 0$, $\forall K$ un sous-ensemble **compact** de X , l'ensemble

$$T(F, K, \epsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} : \|F(t + \tau, x) - F(t, x)\| < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in K\},$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

La collection de telles fonctions sera noté par $PP(\mathbb{R} \times X, X)$.

Exemples 1.2.1. la fonction construite par Sibuya ([24], page 18) qui est définit ainsi

$$F(t, x) = (\|x\| + \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t) + 2.1)^{\frac{1}{2}}.$$

appartient à $PP(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

La proposition suivante due à P. Cieuta et al (voir [2]) donne une caractérisation des fonctions de $PP(\mathbb{R} \times X, X)$:

Proposition 1.2.1. Soit $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ une fonction continue, alors $F \in PP(\mathbb{R} \times X, X)$ si et si seulement si :

1. $\forall x \in X, F(., x) \in PP(\mathbb{R}, X)$.
2. F est uniformément continue sur tout compact de X uniformément sur $\mathbb{R}$, c-à-d $\forall \epsilon > 0, \forall K$ de $X, \exists \delta(\epsilon, K) = \delta, \quad \forall x_1, x_2 \in K,$

$$\|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

1.2. LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

Théorème 1.2.8 (voir [1]). Soit $F \in PP(\mathbb{R} \times X, X)$ et $x \in PP(\mathbb{R}, X)$. Alors la fonction $F(., x(.)) \in PP(\mathbb{R} \times X, X)$.

Remarque 1.2.3. Les théorèmes de composition où superposition de fonctions presque périodiques sont essentiellement utilisés dans la recherche des solutions presque périodiques des équations différentielles et équations intégrales. Comme dans ce type de problème une condition de Lipschitz est souvent imposée (c'est le cas du problème qui sera traité au chapitre 2). Nous énonçons le théorème de composition suivant qui est un corollaire du théorème 1.2.8 :

Théorème 1.2.9. Soit $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$ une fonction continue telle que $\forall x \in X$, $F(., x) \in PP(\mathbb{R}, X)$ et F est lipschitzienne uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$
C-à-d il existe un $L > 0$, tel que

$$\| F(t, x) - F(t, y) \| \leq L \| x - y \|, \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si $g \in PP(\mathbb{R}, X)$, alors la fonction $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ définie par $\Gamma(.) = F(., g(.))$ est presque périodique.

Preuve. D'après la proposition 1.2.1, $F \in PP(\mathbb{R} \times X, X)$. Posons $R_g = \{g(t), t \in \mathbb{R}\}$, comme $g \in PP(\mathbb{R}, X)$, on sait que $\overline{R_g}$ est compact dans X (voir le théorème 1.2.3).

Soit alors $\epsilon > 0$, posons $\delta = \min(\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2L})$, et soit

$$\tau \in T(g, \delta) \cap T(F, \overline{R_g}, \delta),$$

on aura d'une part

$$\| g(t + \tau) - g(t) \| < \delta \leq \frac{\epsilon}{2L}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

et d'autre part

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \| F(t + \tau, g(t + \tau)) - F(t, g(t)) \| < \delta \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad (1.2)$$

Finalement, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \| \Gamma(t + \tau) - \Gamma(t) \| &= \| F(t + \tau, g(t + \tau)) - F(t, g(t)) \| \\ &\leq \| F(t + \tau, g(t + \tau)) - F(t, g(t + \tau)) \| \\ &\quad + \| F(t, g(t + \tau)) - F(t, g(t)) \| \\ &\leq \| F(t + \tau, g(t + \tau)) - F(t, g(t + \tau)) \| \\ &\quad + L \| g(t + \tau) - g(t) \|, \end{aligned}$$

1.2. LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

D'après les équations (1.1) et (1.2) on aura,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \| \Gamma(t + \tau) - \Gamma(t) \| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \| F(t + \tau, g(t + \tau)) - F(t, g(t)) \| < \epsilon.$$

Alors $\Gamma : t \rightarrow F(t, g(t))$ est presque périodique.

■

1.3 Les fonctions asymptotiquement presque périodiques

1.3.1 Définitions et propriétés fondamentales

Le concept de périodicité asymptotique a été introduit dans la littérature par le mathématicien français Fréchet. Une telle notion est une généralisation naturelle du concept de la presque périodicité.

Définition 1.3.1. Une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ est **asymptotiquement presque périodique** (au sens de Bohr) : Si $\forall \epsilon > 0, \exists$ une constante $M(\epsilon) > 0$ telle que l'ensemble

$$T(f, \epsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} : \|f(t + \tau) - f(t)\| < \epsilon, \forall t \in \mathbb{R}, |t|, |t + \tau| > M(\epsilon)\},$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.3.1. L'ensemble des fonctions asymptotiquement presque périodiques sera noté par $\mathbf{APP}(\mathbb{R}, X)$.

Dans la suite nous allons donner une caractérisation de l'asymptotique presque périodicité, pour cela nous aurons besoin de définir l'espace $C_0(\mathbb{R}, X)$:

$$C_0(\mathbb{R}, X) = \{f \in C(\mathbb{R}, X) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0\}.$$

Proposition 1.3.1. (voir [21], [25]) $f \in \mathbf{APP}(\mathbb{R}, X)$ si et seulement si $\exists$ un $g \in \mathbf{PP}(\mathbb{R}, X)$ et un $h \in C_0(\mathbb{R}, X)$ telle que

$$f = g + h. \quad (1.3)$$

La décomposition de la proposition 1.3.1 est unique, la démonstration est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 1.3.1. Si $f \in \mathbf{PP}(\mathbb{R}, X)$ telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t)\| = 0$, alors $f = 0$.

Preuve. Soit $f \in \mathbf{PP}(\mathbb{R}, X)$. D'après le théorème 1.2.4, de toute suite $(u_n) \subset \mathbb{R}$ on peut extraire une sous suite (u_{n_k}) telle que $\{f(\cdot + u_{n_k})\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Notons cette limite par $l(t)$, on aura alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t + u_{n_k}) = l(t), \quad (1.4)$$

On sait que :

$$|\|f(t + u_{n_k})\| - \|l(t)\|| \leq \|f(t + u_{n_k}) - l(t)\|,$$

1.3. LES FONCTIONS ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE PÉRIODIQUES

et d'après (1.4) on aura : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \| f(t + u_{n_k}) \| = \| l(t) \| . \quad (1.5)$$

Comme $(u_{n_k} \rightarrow +\infty)$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \| f(t) \| = 0$, on déduit que $\| l(t) \| = 0$. D'où $l(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Maintenant,

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} l(t - u_{n_k}) = 0,$$

uniformément pour $t \in \mathbb{R}$, d'où $f = 0$.

■

Proposition 1.3.2. Soit f une fonction asymptotiquement presque périodique, la décomposition donnée dans (1.3) est unique, en d'autres termes :

$$APP(\mathbb{R}, X) = PP(\mathbb{R}, X) \oplus C_0(\mathbb{R}, X).$$

Preuve. On pose $f = g_1 + h_1 \in APP(\mathbb{R}, X)$, avec $g_1 \in PP(\mathbb{R}, X)$ et $h_1 \in C_0(\mathbb{R}, X)$ et si on pose aussi que $f = g_2 + h_2 \in APP(\mathbb{R}, X)$ avec $g_2 \in PP(\mathbb{R}, X)$ et $h_2 \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

On obtient alors $g_1 - g_2 = h_2 - h_1$, et puisque $g_1 - g_2 \in PP(\mathbb{R}, X)$ et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| g_1(t) - g_2(t) \| = 0.$$

On aura $g_1 = g_2$ cela va entraîner $h_1 = h_2$.

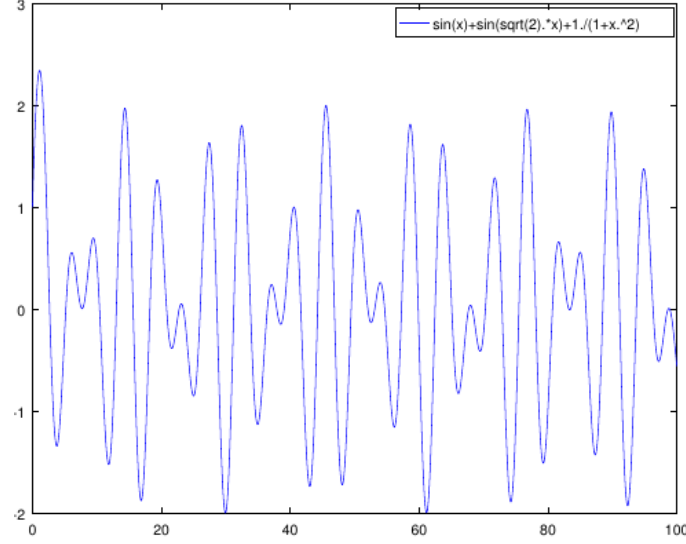
■

Exemples 1.3.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que,

$$f(x) = [\sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)] + \frac{1}{1+x^2}.$$

On voit que f est bien une fonction asymptotiquement presque périodique :

1.3. LES FONCTIONS ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE PÉRIODIQUES



Dans ce qui suit, on note par f_{pp} la composante presque périodique de f , et f_{c_0} la composante de f qui appartient à $C_0(\mathbb{R}, X)$.

Proposition 1.3.3. (voir[11]) Soit $f \in APP(\mathbb{R}, X)$.

(a) f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(b) $\{ f_{pp}(t) : t \in \mathbb{R} \} \subset \overline{\{ f(t) : t \in \mathbb{R} \}}$.

(c) Le rang de f est précompact dans X .

Preuve. Soit $f \in APP(\mathbb{R}, X)$ tel que

$$f = f_{pp} + f_{c_0},$$

-(a) :

Puisque f_{pp} est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$, donc il suffit de montrer la bornitude et l'uniforme continuité de f_{c_0} sur $\mathbb{R}$.

On a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| f_{c_0}(t) \| = 0.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, $\exists A > 0$ tel que $\| f_{c_0}(t) \| < \epsilon$, pour tout $t \geq A$.

Vérifions que f est bornée sur $\mathbb{R}$. On a $f_{c_0}(t)$ est bornée sur le compact $[0; A]$.

D'où $\forall t \geq 0$,

$$\| f_{c_0}(t) \| < \max(\epsilon, \sup_{0 \leq t \leq A} \| f_{c_0}(t) \|),$$

donc $f_{c_0}(t)$ est bornée sur $[0, +\infty)$ et par suite f est **bornée** sur $[0, +\infty)$. De même, en exploitant le fait que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \| f_{c_0}(t) \| = 0$ on vérifie que f_{c_0} est borné sur $(-\infty, 0]$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

1.3. LES FONCTIONS ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE PÉRIODIQUES

Montrons maintenant que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On sait que f_{c_0} est uniformément continue sur le compact $[0; A + 1]$,
c-à-d,

$$\forall \epsilon > 0, \exists 0 < \sigma < 1, \forall t, t' \in [0, A + 1], |t - t'| < \sigma \implies \|f_{c_0}(t) - f_{c_0}(t')\| < \epsilon.$$

En particulier si $t, t' \in [0, A + \sigma]$, $|t - t'| < \sigma$ on aura

$$\|f_{c_0}(t) - f_{c_0}(t')\| < \epsilon.$$

Maintenant, si t et t' sont supérieures à A , avec $|t - t'| < \sigma$,

$$\|f_{c_0}(t) - f_{c_0}(t')\| \leq \|f_{c_0}(t)\| + \|f_{c_0}(t')\| < 2\epsilon,$$

et si $0 \leq t < A$ et $t' \geq A$ avec $|t - t'| < \sigma$ on aura $t' \in [A; A + \sigma]$ et on a toujours que

$$\|f_{c_0}(t) - f_{c_0}(t')\| < \epsilon.$$

Par suite f_{c_0} est uniformément continue sur $[0; \infty)$.

De la même manière on démontre l'uniforme continuité sur $(-\infty, 0]$. D'où f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

-(b) :

Considérons la fonction $f \in APP(\mathbb{R}, X)$, on associe à f et f_{pp} deux sous-ensemble de l'espace de Banach X :

$B = \{ x \in X, \text{ tel que } \exists \text{ une suite } (t_n) \subset \mathbb{R} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = x \}.$

$D = \{ x \in X, \text{ tel que } \exists \text{ une suite } (t_n) \subset \mathbb{R} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} f_{pp}(t_n) = x \}.$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = x$ si et si seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{pp}(t_n) = x$, d'où $B = D$, on

note aussi que $B \subset \overline{\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}}$, et $\{f_{pp}(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset D$, en effet

$f_{pp}(t)$ est presque périodique, soit donc $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ et soit $\tau_n \in [n, n + l_{\epsilon_n}]$ un nombre qui correspond à $\frac{1}{n}$ -translation pour f_{pp} .

$\forall t_0 \in \mathbb{R}$, on a $\|f_{pp}(t_0 + \tau_n) - f_{pp}(t_0)\| < \frac{1}{n}$, de plus $\tau_n \geq n$ d'où $t_0 + \tau_n \rightarrow \infty$.

En conclusion :

$$\{f_{pp}(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset D = B \subset \overline{\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}}.$$

D'où,

$$\{f_{pp}(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \overline{\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}}.$$

1.3. LES FONCTIONS ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE PÉRIODIQUES

-(c) :

Notons le rang de f par R_f , le rang de f_{pp} par $R_{f_{pp}}$ et le rang de f_{C_0} par $R_{f_{C_0}}$. On sait que le $R_{f_{pp}}$ est précompact, de plus $R_{f_{C_0}}$ est précompact, en effet, soit $(t_n) \subset \mathbb{R}$.

Si (t_n) est borné, $\exists (t_{n_k}) \rightarrow t_0$, comme f_{C_0} est continue alors,

$$f_{C_0}(t_{n_k}) \rightarrow f_{C_0}(t_0).$$

Si $t_n \rightarrow \infty$ alors on sait déjà que $f_{C_0}(t_n) \rightarrow 0$.

Finalement $R_f \subset R_{f_{pp}} + R_{f_{C_0}}$ est précompact.

■

Proposition 1.3.4. soit f et $g \in APP(\mathbb{R}, X)$ et $Q \in APP(\mathbb{R}, X)$ et soit c un nombre complexe :

- ★ $c.f \in APP(\mathbb{R}, X)$.
- ★ $f+g \in APP(\mathbb{R}, X)$.
- ★ $f.Q \in APP(\mathbb{R}, X)$.
- ★ $t \mapsto f(t+a) \in APP(\mathbb{R}, X), \forall a \in \mathbb{R}$.

Preuve. Les deux premières propriétés sont évidente car :

si $f \in APP(\mathbb{R}, X)$, avec $f = f_{pp} + f_{C_0}$ et en multipliant cette équation par c , on aura $c.f = c.f_{pp} + c.f_{C_0}$ d'où $c.f \in APP(\mathbb{R}, X)$.

Maintenant si on pose :

$$f = f_{pp} + f_{C_0} \quad \text{et} \quad g = g_{pp} + g_{C_0},$$

alors,

$$f + g = (f_{pp} + g_{pp}) + (f_{C_0} + g_{C_0}),$$

d'où $f+g \in APP(\mathbb{R}, X)$.

Pour la troisième propriété il suffit de prendre $f = f_{pp} + f_{C_0}$ et $Q = Q_{pp} + Q_{C_0}$, cela implique que :

$$Q.f = Q_{pp}.f_{pp} + (Q_{pp}.f_{C_0} + Q_{C_0}.f_{pp} + Q_{C_0}.f_{C_0}).$$

La fonction $Q_{pp}.f_{pp}$ est presque périodique, et puisqu'on a $Q_{pp}(t)$ et $f_{pp}(t)$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, on voit que : $\lim_{t \rightarrow \infty} Q_{pp}.f_{C_0} + Q_{C_0}.f_{pp} + Q_{C_0}.f_{C_0} = 0$, alors $f.Q \in APP(\mathbb{R}, X)$.

Pour la dernière propriété, c'est simple de voir que la translaté d'une fonction asymptotiquement presque périodique l'est aussi.

■

1.3. LES FONCTIONS ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE PÉRIODIQUES

Proposition 1.3.5. *Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in APP(\mathbb{R}, X)$ telle que f_n converge uniformément vers f c-à-d*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0,$$

alors $f \in APP(\mathbb{R}, X)$.

Proposition 1.3.6. *L'espace $APP(\mathbb{R}, X)$ est un espace de Banach muni de la norme suivante :*

$$\|f\|_{APP} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f_{pp}(t)\| + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f_{c_0}(t)\|.$$

Preuve. *Pour montrer que l'espace $APP(\mathbb{R}, X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{APP}$ est un espace de Banach il suffit de vérifier que la $\|\cdot\|_{APP}$ et équivalente à $\|\cdot\|_{\infty}$.*

Soit $f \in APP(\mathbb{R}, X)$ alors d'après la proposition 1.3.2 on a :

$$f(t) = f_{pp}(t) + f_{c_0}(t),$$

On sait que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f_{pp}(t)\| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| \quad (1.6)$$

et cela est du au fait que

$$\{f_{pp}(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \overline{\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}}.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty} &\leq \|f\|_{APP} \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f_{pp}(t)\| + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f_{pp}(t) - f(t)\| \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| \\ &= 3 \cdot \|f\|_{\infty}, \end{aligned}$$

d'où

$$\|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{APP} \leq 3 \cdot \|f\|_{\infty}.$$

donc les deux normes sont équivalentes.

Finalement l'espace $APP(\mathbb{R}, X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{APP}$ est un espace de Banach.

■

1.3. LES FONCTIONS ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE PÉRIODIQUES

1.3.2 Théorèmes de Composition

Avant de donner le théorème de composition nous avons besoin de définir la notion d'asymptotique presque périodicité pour une fonction F à paramètre.

Définition 1.3.2. Une fonction continue $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$ est dite asymptotiquement presque périodique par rapport à t et uniformément par rapport aux sous-ensembles **compacts** de X , lorsque : $\forall \epsilon > 0, \forall K$ compact, il existe un $M(\epsilon) > 0$ t.q

$$T(F, K, \epsilon) = \{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{x \in K} \| F(t + \tau, x) - F(t, x) \| < \epsilon, \\ |t|, |t + \tau| > M(\epsilon) \},$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble de telles fonctions est noté **APP**($\mathbb{R} \times X, X$).

Remarque 1.3.2.

1. Notons par l'espace $C_0(\mathbb{R} \times X, X)$:

$C_0(\mathbb{R} \times X, X) = \{ \Psi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X, \text{ telle que :}$

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \| \Psi(t, x) \| = 0, \quad \forall K \text{ compact dans } X \}.$$

Alors toute fonction $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ asymptotiquement presque périodique admet une décomposition unique, comme suit $F = H + G$ tel que $H \in PP(\mathbb{R} \times X, X)$ et $G \in C_0(\mathbb{R} \times X, X)$.

2. $F \in APP(\mathbb{R} \times X, X)$ si et seulement si :

- $\forall x \in X, F(., x)$ est asymptotiquement presque périodique.
- F est uniformément continue sur les compacts de X , uniformément en t .

Théorème 1.3.1. Soit $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$ t.q $\forall x \in X, F(., x)$ est asymptotiquement presque périodique. Posons $F = H + G$ tels que $\forall x \in X, H(., x) \in PP(\mathbb{R}, X)$ et $G(., x) \in C_0(\mathbb{R}, X)$ avec H et G sont lipschitziennes en x , uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$, c-à-d il existe deux constantes $L_1, L_2 > 0$, telle que

$$\| H(t, x) - H(t, y) \| \leq L_1 \| x - y \|, \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

et

$$\| G(t, x) - G(t, y) \| \leq L_2 \| x - y \|, \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

Si $f \in APP(\mathbb{R}, X)$ alors la fonction Γ définie par $\Gamma(.) = F(., f(.))$ appartient à $APP(\mathbb{R}, X)$.

1.3. LES FONCTIONS ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE PÉRIODIQUES

Preuve. Posons $f=h+g$, tel que $h \in PP(\mathbb{R}, X)$ et $g \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Maintenant

$$\begin{aligned} F(t, f(t)) &= H(t, h(t)) + [F(t, f(t)) - H(t, h(t))] \\ &= H(t, h(t)) + [H(t, f(t)) - H(t, h(t))] + G(t, f(t)). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème 1.2.9, $t \mapsto H(t, h(t))$ est presque périodique.

Du fait que l'ensemble des valeurs de f est relativement compact et $G \in C_0(\mathbb{R} \times X, X)$ on aura aussi $t \mapsto G(t, f(t)) \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Il nous reste de montrer que

$$H(t, f(t)) - H(t, h(t)) \in C_0(\mathbb{R}, X).$$

Puisque $g \in C_0(\mathbb{R}, X)$, c-à-d pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $A > 0$ tel que pour tout $|t| > A$ on a $\|g(t)\| < \frac{\epsilon}{L_1}$ pour .

Le fait que H est lipschitzienne on aura :

$$\|H(t, f(t)) - H(t, h(t))\| < L_1 \|f(t) - h(t)\| = L_1 \|g(t)\| < \epsilon,$$

Alors

$$[H(t, f(t)) - H(t, h(t))] \in C_0(\mathbb{R}, X).$$

Donc $t \mapsto F(t, f(t))$ est asymptotiquement presque périodique.

■

1.4 L'Èqui-asymptotique presque périodicité

Maintenant nous allons introduire la notion de l'équi-asymptotique presque périodicité. cette notion permet d'énoncer un résultat fondamental de compacité dans l'espace $APP(\mathbb{R}, X)$.

Définition 1.4.1. *Un ensemble $F \subset C(\mathbb{R}, X)$ est dit **équi-asymptotique presque périodique** :*

Si $\forall \epsilon > 0, \exists$ une constante $M(\epsilon) > 0$ tel que l'ensemble :

$$T(F, \epsilon) = \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_{t \in \mathbb{R}} \| f(t + \tau) - f(t) \| < \epsilon, \text{ tel que } |t|, |t + \tau| > M(\epsilon), \forall f \in F \right\},$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.4.1. [11] *Soit $F \subset APP(\mathbb{R}, X)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *F est précompact dans $APP(\mathbb{R}, X)$.*
2. *F satisfait les trois propriétés suivantes :*
 - (a) : *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\{f(t) : f \in F\}$ est précompact dans X .*
 - (b) : *F est équi-uniformément continue.*
 - (c) : *F est équi-asymptotiquement presque périodique.*
3. *G est précompact dans $PP(\mathbb{R}, X)$, et H est précompact dans $C_0(\mathbb{R}, X)$, où :*

$$G = \{f_{pp}(t) : f \in F\} \quad \text{et} \quad H = \{f_{c_0}(t) : f \in F\}.$$

Preuve. *Nous allons diviser la démonstrations en trois étapes :*

★ *Étape(1) : démontrer que (1) $\implies$ (2) :*

Soit F précompact dans $APP(\mathbb{R}, X)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\{f(t) : f \in F\}$ est précompact dans X , d'où (a).

Comme F est précompact dans $APP(\mathbb{R}, X)$, soit $\epsilon > 0$, $\exists \{f_i\}_{i=1}^k$ telle que $F \subset \bigcup_{i=1}^k B(f_i, \frac{\epsilon}{3})$.

L'équi-uniforme continuité de $\{f_i\}_{i=1}^k$ nous donne,

$$\exists \sigma(\epsilon) = \sigma, t, q \quad |t_1 - t_2| < \sigma \implies \|f_i(t_1) - f_i(t_2)\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall i = \overline{1, k}.$$

Soit maintenant $f \in F$, $\exists$ un $i_0 \in \{\overline{1, k}\}$ t.q

$$\|f(t) - f_{i_0}(t)\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

1.4. L'ÉQUI-ASYMPTOTIQUE PRESQUE PÉRIODICITÉ

On choisit t_1 et t_2 arbitrairement tels que $|t_1 - t_2| < \sigma$,

$$\begin{aligned} \|f(t_1) - f(t_2)\| &\leq \|f(t_1) - f_{i_0}(t_1)\| + \|f_{i_0}(t_1) - f_{i_0}(t_2)\| \\ &\quad + \|f_{i_0}(t_2) - f(t_2)\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

d'où l'équi-uniforme continuité de F , c-à-d (b).

Montrons **l'équi-asymptotique presque périodicité** de F :

Puisque F est précompact dans $APP(\mathbb{R}, X)$, il existe $\{f_i\}_{i=1}^k$ tel que F

$$\subset \bigcup_{i=1}^k B(f_i, \frac{\epsilon}{3}).$$

$\{f_i\}_{i=1}^k$ est équi-asymptotiquement presque périodique,

c-à-d $\forall \epsilon > 0, \exists M(\epsilon), \exists l(\epsilon) = l$ t.q $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a + l]$ vérifiant

$$\|f_i(t + \tau) - f_i(t)\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad (1.7)$$

$\forall t \in \mathbb{R}, |t|, |t + \tau| > M(\epsilon), \forall i = \overline{1, k}$.

Maintenant soit $f \in F$, il existe un $i_0 \in \{\overline{1, k}\}$ t.q

$$\|f(t) - f_{i_0}(t)\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

alors,

$$\begin{aligned} \|f(t + \tau) - f(t)\| &\leq \|f(t + \tau) - f_{i_0}(t + \tau)\| + \|f_{i_0}(t + \tau) - f_{i_0}(t)\| \\ &\quad + \|f_{i_0}(t) - f(t)\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

d'où l'équi-asymptotique presque périodicité de F .

★ **Étape(2) : montrer que (2) $\implies$ (3) :**

Puisque on travaille sur des espaces complets la précompacité est équivalente à la relative compacité, soit donc $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset G, \forall n, \exists f_n \in F$, et $h_n \in H$, telle que $f_n = g_n + h_n$, d'après (a) et (b), et en appliquant le **théorème d'Arzela-Ascoli** (voir annexe), en choisissant une suite diagonale, on peut extraire une sous suite $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ qu'on va noter toujours par $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ telle que $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ est uniformément convergente sur chaque compact de $\mathbb{R}$.

Puisque $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ est équi-asymptotiquement presque périodique

$\forall \epsilon > 0, \exists l(\epsilon)$ et $M(\epsilon) > 0$, tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| > M(\epsilon)$, il va exister un τ tel que :

$$\tau \in [M(\epsilon) + 1 - t; M(\epsilon) + 1 - t + l(\epsilon)],$$

1.4. L'ÈQUI-ASYMPTOTIQUE PRESQUE PÉRIODICITÉ

qui satisfait :

$$\| f_n(t + \tau) - f_n(t) \| < \frac{\epsilon}{3}; \quad (1.8)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons que $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ est uniformément convergente sur $[-M(\epsilon) - 1 - l(\epsilon); M(\epsilon) + 1 + l(\epsilon)]$, et pour tout $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour $m \geq n \geq N$ on a

$$\| f_m(t) - f_n(t) \| < \frac{\epsilon}{3}, \quad (1.9)$$

en lient (1.8) et (1.9), pour tout $m \geq n \geq N$ et $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| > M(\epsilon)$, on a :

$$\begin{aligned} \| f_m(t) - f_n(t) \| &\leq \| f_m(t) - f_m(t + \tau) \| \\ &\quad + \| f_m(t + \tau) - f_n(t + \tau) \| + \| f_n(t) - f_n(t + \tau) \| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

D'après la dernière inégalité et (1.9) on aura la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$.

Maintenant on sait que :

$$\{g_m(t) - g_n(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \overline{\{f_m(t) - f_n(t) : t \in \mathbb{R}\}},$$

alors pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $\{g_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, c'est à dire $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge dans $PP(\mathbb{R}, X)$, donc G est précompact dans $PP(\mathbb{R}, X)$, de plus F est précompact cela va impliquer que H est aussi précompact.

★ Etape(3) : montrer que (3) $\implies$ (1) :

G est précompact dans $PP(\mathbb{R}, X)$ et H est précompact dans $C_0(\mathbb{R}, X)$. D'après la proposition 1.3.2, la somme directe de G et H va nous donner un ensemble F qui est précompact dans $APP(\mathbb{R}, X)$.

■

Remarque. Le théorème 1.4.1 est une extension du théorème 1.2.7 pour les sous ensembles de $PP(\mathbb{R}, X)$.

Théorème 1.4.2. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F est équi-asymptotiquement presque périodique.
2. G est équi-presque périodique et H est équi- C_0 , où

$$G = \{f_{pp}(t) : f \in F\} \quad \text{et} \quad H = \{f_{c_0}(t) : f \in F\}.$$

1.4. L'ÈQUI-ASYMPTOTIQUE PRESQUE PÉRIODICITÉ

Preuve. la preuve de (2) à (1) est directe.

En effet, d'après la définition de l'équi-presque périodicité de G et l'équi- C_0 de H on aura :

$\forall \epsilon > 0, \exists l_\epsilon, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a + l_\epsilon],$

avec :

$$\| f_{pp}(t + \tau) - f_{pp}(t) \| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall f_{pp} \in G. \quad (1.10)$$

Et,

$\forall \epsilon > 0, \exists M(\epsilon) > 0, \quad t.q \quad |t| > M(\epsilon) \text{ on aura}$

$$\| f_{C_0}(t) \| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall f_{C_0} \in H. \quad (1.11)$$

D'après la proposition 1.3.2, on a :

$$f = f_{pp} + f_{C_0},$$

Soit $f \in F, \forall \epsilon > 0$, de (1.10) et (1.11) $\exists$ une constante $M(\epsilon) > 0$

$$\begin{aligned} \| f(t + \tau) - f(t) \| &= \| (f_{pp}(t + \tau) + f_{C_0}(t + \tau)) - (f_{pp}(t) + f_{C_0}(t)) \| \\ &\leq \| f_{pp}(t + \tau) - f_{pp}(t) \| + \| f_{C_0}(t + \tau) - f_{C_0}(t) \| \\ &\leq \| f_{pp}(t + \tau) - f_{pp}(t) \| + \| f_{C_0}(t + \tau) \| + \| f_{C_0}(t) \| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

$\forall |t| > M(\epsilon) \text{ et } |t + \tau| > M(\epsilon)$, d'où f est asymptotiquement presque périodique, alors F est équi-asymptotiquement presque périodique.

Maintenant nous allons démontrer que (1) $\implies$ (2) :

Puisque F est équi-asymptotiquement presque périodique, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exists M_k > 0$, et un ensemble relativement dense noté $T(F, k) \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\| f(t + \tau) - f(t) \| < \frac{1}{k}, \quad (1.12)$$

pour tout $f \in F, t \in \mathbb{R}$, avec $|t| > M_k$ et $\tau \in T(F, k)$, et $|t + \tau| > M_k$. De plus $\forall f \in F \subset APP(\mathbb{R}, X)$, notons que f est uniformément continue, alors $\exists \sigma_k^f > 0$ telle que

$$\| f(t_1) - f(t_2) \| < \frac{1}{k}, \quad (1.13)$$

pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, avec $|t_1 - t_2| < \sigma_k^f$.

Maintenant, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on choisit $\tau_k^t \in T(F, k)$ avec $|t + \tau_k^t| > M_k$ et aussi, on note que

$$g_k^f(t) = f(t + \tau_k^t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall f \in F.$$

1.4. L'ÈQUI-ASYMPTOTIQUE PRESQUE PÉRIODICITÉ

Dans la suite la démonstration sera faite en 8 étapes.

Étape (1) :

Pour tout $f \in F$ alors

$$\| g_k^f(t_1) - g_k^f(t_2) \| < \frac{5}{k}. \quad (1.14)$$

En effet, soit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, avec $|t_1 - t_2| < \sigma_k^f$, par (1.12) et (1.13) on a :

$$\begin{aligned} \| g_k^f(t_1) - g_k^f(t_2) \| &= \| f(t_1 + \tau_k^{t_1}) - f(t_2 + \tau_k^{t_2}) \| \\ &\leq \| f(t_1 + \tau_k^{t_1}) - f(t_1 + \tau_k^{t_1} + \tau) \| \\ &\quad + \| f(t_1 + \tau_k^{t_1} + \tau) - f(t_2 + \tau_k^{t_1} + \tau) \| \\ &\quad + \| f(t_2 + \tau_k^{t_1} + \tau) - f(t_2 + \tau) \| \\ &\quad + \| f(t_2 + \tau) - f(t_2 + \tau_k^{t_2} + \tau) \| \\ &\quad + \| f(t_2 + \tau_k^{t_2} + \tau) - f(t_2 + \tau_k^{t_2}) \| < \frac{5}{k}, \end{aligned}$$

avec $\tau \in T(F, k)$ et satisfait que :

$$\min\{t_1 + \tau_k^{t_1} + \tau, \quad t_2 + \tau_k^{t_1} + \tau, \quad t_2 + \tau, \quad t_2 + \tau_k^{t_2} + \tau\} > M_k.$$

D'où l'uniforme continuité de g_k^f pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Étape (2) :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\| g_k^f(t + \tau) - g_k^f(t) \| < \frac{5}{k}. \quad (1.15)$$

En effet, soit $f \in F$, $t \in \mathbb{R}$, et $\tau \in T(F, k)$, en utilisant (1.12), on a

$$\begin{aligned} \| g_k^f(t + \tau) - g_k^f(t) \| &= \| f(t + \tau + \tau_k^{t+\tau}) - f(t + \tau_k^t) \| \\ &\leq \| f(t + \tau + \tau_k^{t+\tau}) - f(t + \tau + \tau_k^{t+\tau} + \tau') \| \\ &\quad + \| f(t + \tau + \tau_k^{t+\tau} + \tau') - f(t + \tau_k^{t+\tau} + \tau') \| \\ &\quad + \| f(t + \tau_k^{t+\tau} + \tau') - f(t + \tau') \| \\ &\quad + \| f(t + \tau') - f(t + \tau_k^t + \tau') \| \\ &\quad + \| f(t + \tau_k^t + \tau') - f(t + \tau_k^t) \| < \frac{5}{k}, \end{aligned}$$

où $\tau' \in T(F, k)$ qui satisfait que :

$$\min\{t + \tau + \tau_k^{t+\tau} + \tau', \quad t + \tau_k^{t+\tau} + \tau', \quad t + \tau', \quad t + \tau_k^t + \tau'\} > M_k.$$

d'où la presque périodicité de g_k^f .

1.4. L'ÈQUI-ASYMPTOTIQUE PRESQUE PÉRIODICITÉ

Étape (3) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a,

$$\| g_m^f(t + \tau) - g_n^f(t) \| < \frac{4}{n}. \quad (1.16)$$

En effet, soit $f \in F$, $t \in \mathbb{R}$, et pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$, sans perte de généralité, on peut supposer que $M_{k+1} > M_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, en utilisant (1.12), on a :

$$\begin{aligned} \| g_m^f(t + \tau) - g_n^f(t) \| &= \| f(t + \tau_m^t) - f(t + \tau_n^t) \| \\ &\leq \| f(t + \tau_m^t) - f(t + \tau_m^t + \tau) \| \\ &\quad + \| f(t + \tau_m^t + \tau) - f(t + \tau_m^t + \tau + \tau_n^t) \| \\ &\quad + \| f(t + \tau_m^t + \tau + \tau_n^t) - f(t + \tau_n^t + \tau) \| \\ &\quad + \| f(t + \tau_n^t + \tau) - f(t + \tau_n^t) \| \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{4}{n}, \end{aligned}$$

ou $\tau \in T(F, k)$ qui satisfait que :

$$\min\{t + \tau + \tau_m^t, \quad t + \tau_m^t + \tau_n^t + \tau, \quad t + \tau + \tau_n^t\} > M_m.$$

D'où g_n^f est une suite de Cauchy.

Étape (4) :

Soit

$$g^f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in F.$$

d'après l'étape (3) on sait que pour tout $f \in F$, g^f est bien définie, de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\| g^f(t) - g_n^f(t) \| < \frac{4}{n}, \quad (1.17)$$

pour tout $f \in F$, $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Étape (5) :

pour tout $f \in F$, g^f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

En effet, d'après (1.14) et (1.17), on a :

$$\begin{aligned} \| g^f(t_1) - g^f(t_2) \| &\leq \| g^f(t_1) - g_n^f(t_1) \| \\ &\quad + \| (g_n^f(t_1) - g_n^f(t_2)) \| \\ &\quad + \| g_n^f(t_2) - g^f(t_2) \| \\ &< \frac{4}{n} + \frac{5}{n} + \frac{4}{n} = \frac{13}{n}, \end{aligned}$$

1.4. L'ÈQUI-ASYMPTOTIQUE PRESQUE PÉRIODICITÉ

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ avec $|t_1 - t_2| < \sigma_n^f$.

Étape (6) :

Pour tout $f \in F$, $\{g^f\}_{f \in F}$ est équi-presque périodique.

En effet, d'après (1.15) et (1.17) et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \|g^f(t + \tau) - g^f(t)\| &\leq \|g^f(t + \tau) - g_n^f(t + \tau)\| \\ &\quad + \|(g_n^f(t + \tau) - g_n^f(t))\| \\ &\quad + \|g_n^f(t) - g^f(t)\| \\ &< \frac{4}{n} + \frac{5}{n} + \frac{4}{n} = \frac{13}{n}, \end{aligned}$$

pour tout $f \in F$, et $\tau \in T(F, n)$, et $t \in \mathbb{R}$. Alors $\{g^f\}_{f \in F}$ est équi-presque périodique.

Étape (7) :

$\{h^f\}_{f \in F}$ est équi- C_0 , où $h^f(t) = f(t) - g^f(t)$ pour tout $f \in F$, et $t \in \mathbb{R}$.

En effet, par l'étape (5), $h^f \in C(\mathbb{R}, X)$ pour tout $f \in F$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, et d'après (1.17) et d'après la définition de τ_n^t , on a :

$$\begin{aligned} \|h^f(t)\| &= \|f(t) - g^f(t)\| \leq \|f(t) - g_n^f(t)\| \\ &\quad + \|g_n^f(t) - g^f(t)\| \\ &\leq \|f(t) - f(t + \tau_n^t)\| + \frac{4}{n} \\ &< \frac{1}{n} + \frac{4}{n} = \frac{5}{n}, \end{aligned}$$

pour tout $f \in F$, $t \in \mathbb{R}$, avec $|t| > M_n$. donc $\{h^f\}_{f \in F}$ est équi- C_0 .

Étape (8) :

D'après les étapes qui précèdent on a

$$H = \{h^f\}_{f \in F} \quad \text{et} \quad G = \{g^f\}_{f \in F}.$$

■

Chapitre 2

Solution asymptotiquement presque périodique pour une classe d'équations intégrales

De divers problèmes classiques dans la théorie des équations différentielles (ordinaires ou partielles) conduisent à des équations intégrales, divers problèmes liés aux sciences appliquées sont favorables aux équations intégrales d'une manière naturelle, ces équations sont des outils mathématiques compétents dans la modélisation de nombreux phénomènes.

Pour une lecture complète, le lecteur pourra consulter les ouvrages [5], [3].

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux solutions asymptotiquement presque périodique de l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t, x(t)) \cdot \int_{\mathbb{R}} k_i(t, s) g_i(s, x(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

$\forall i=1..n$, $f_i, g_i, k_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions qui vont satisfaire quelques conditions que nous allons citer par la suite.

Il faut aussi mentionner que des études ont été faite pour obtenir l'existence des solutions périodiques et presque périodique pour les équations intégrales non linéaire, pour une lecture plus précise on fait référence à [18], [7].

2.1 Un théorème de point fixe dans l'algèbre de Banach

Avant d'établir le théorème d'existence d'une solution asymptotiquement presque périodique, nous allons énoncer un théorème du point fixe dans l'al-

2.1. UN THÉORÈME DE POINT FIXE DANS L'ALGÈBRE DE BANACH

gèbre de Banach qui est une adaptation du théorème.2.1 cité dans [6] pour les opérateurs de la forme

$$\Gamma(x) = \sum_{i=1}^n A_i x B_i x,$$

avec A_i et B_i des opérateurs à valeurs dans un espace de Banach.

Théorème 2.1.1. *soit n un entier positif, et C un sous espace fermé, borné, convexe d'un espace de Banach X , on suppose que les opérateurs $A_i : X \rightarrow X$ et $B_i : C \rightarrow X$ avec $i = \overline{1, n}$ satisfont les propriétés suivantes :*

(a) : *Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\exists L_i > 0$ tel que :*

$$\| A_i x - A_i y \| \leq L_i \| x - y \| \quad \forall x, y \in X.$$

(b) : *Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, B_i est continue et $B_i(C)$ est précompact.*

(c) : *Pour chaque $y \in C$, $x = \sum_{i=1}^n A_i x B_i y$ implique que $x \in C$.*

alors $\Gamma(x) = x = \sum_{i=1}^n A_i x B_i x$ a une solution à condition que $\sum_{i=1}^n L_i M_i < 1$ où $M_i = \sup_{x \in C} \| B_i x \|$, pour $i = \overline{1, n}$.

Preuve. *On cherche le point fixe de l'opérateur :*

$$\Gamma(x) = \sum_{i=1}^n A_i x B_i x.$$

Soit $y \in C$, et soit $H_y : X \rightarrow X$ avec X un espace de Banach, tel que

$$H_y(x) = \sum_{i=1}^n A_i x B_i y, \quad \forall x \in X,$$

H_y est bien un opérateur contractant.

En effet

$$\begin{aligned} \| H_y(x_1) - H_y(x_2) \| &= \left\| \sum_{i=1}^n A_i x_1 B_i y - \sum_{i=1}^n A_i x_2 B_i y \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \| (A_i x_1 B_i y - A_i x_2 B_i y) \| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \| (A_i x_1 - A_i x_2) B_i y \| \\ &\leq \sum_{i=1}^n (L_i \cdot M_i) \| x_1 - x_2 \| \end{aligned}$$

2.1. UN THÉORÈME DE POINT FIXE DANS L'ALGÈBRE DE BANACH

Alors, $\exists \alpha > 0$, avec $\alpha = \sum_{i=1}^n L_i M_i < 1$, tel que :

$$\| H_y(x_1) - H_y(x_2) \| < \| x_1 - x_2 \|, \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (2.2)$$

D'après (2.2) et le fait que $H_y : X \rightarrow X$, il existe bien un unique point fixe $x^* \in X$ tel que :

$$H_y(x^*) = x^* = \sum_{i=1}^n A_i x^* B_i y.$$

D'après (c) du théorème.2.1.1 $x^* \in C$.

Maintenant soit $N : C \rightarrow X$, tel que

$$N_y = z,$$

où $z \in X$ est l'unique solution de l'équation :

$$z = \sum_{i=1}^n A_i z B_i y, \quad \forall y \in C.$$

On veut montrer que N est un **opérateur continu** sur C , soit alors $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans C qui converge vers y , le fait que C est fermé, y est dans C ,

$$\begin{aligned} \| N_{y_n} - N_y \| &= \left\| \sum_{i=1}^n A_i N_{y_n} B_i y_n - \sum_{i=1}^n A_i N_y B_i y \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n (\| A_i N_{y_n} B_i y_n - A_i N_y B_i y_n \| + \| A_i N_y B_i y_n - A_i N_y B_i y \|) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \| (A_i N_{y_n} - A_i N_y) \| \| B_i y \| + \| A_i N_y \| \| y_n - y \| \\ &\leq \sum_{i=1}^n ((L_i M_i) \| N_{y_n} - N_y \| + \| A_i N_y \| \| y_n - y \|), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \limsup_n \| N_{y_n} - N_y \| &\leq \sum_{i=1}^n (L_i M_i) \limsup_n \| N_{y_n} - N_y \| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \| A_i N_y \| \limsup_n \| y_n - y \|, \end{aligned}$$

d'après cette inégalité, on déduit que :

$$\lim_n \| N_{y_n} - N_y \| = 0,$$

2.1. UN THÉORÈME DE POINT FIXE DANS L'ALGÈBRE DE BANACH

d'où la continuité de N sur C .

Maintenant on veut montrer que N est un **opérateur compact** sur C .

Pour tout $z \in C$ et $\forall i = \overline{1, n}$ on a :

$$\begin{aligned} \|A_i z\| &\leq \|A_i a\| + \|A_i z - A_i a\| \\ &\leq \|A_i a\| + L_i \|z - a\| \\ &\leq c_i, \end{aligned}$$

où $c_i = \|A_i a\| + L_i \text{diam}(C)$ pour un a fixé dans C .

Soit $\epsilon > 0$, d'après (b) B_i est complètement continu et $B_i(C)$ est totalement borné, alors il existe $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ dans C tel que :

$$B_i(C) \subset \bigcup_{j=1}^n \beta(w_j, \sigma),$$

avec $w_j = B_i(y_j)$ et $\sigma = (\frac{1 - L_i M_i}{c_i})\epsilon$ et $\beta(w_j, \sigma)$ est une boule ouverte de centre w_j et de rayon σ .

Alors pour tout $y \in C$, il existe un $y_k \in Y$ tel que :

$$\|B_i y_k - B_i y\| < (\frac{1 - L_i M_i}{c_i})\epsilon.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \|N_y - N_{y_k}\| &\leq \sum_{i=1}^n \|A_i z B_i y - A_i z_k B_i y_k\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n (\|A_i z B_i y - A_i z_k B_i y\| + \|A_i z_k B_i y - A_i z_k B_i y_k\|) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (\|A_i z - A_i z_k\| \|B_i y\| + \|A_i z_k\| \|B_i y - B_i y_k\|) \\ &\leq \sum_{i=1}^n L_i M_i \|z - z_k\| + \sum_{i=1}^n \|A_i z_k\| \|B_i y - B_i y_k\| \end{aligned}$$

cela va impliquer que

$$\|N_y - N_{y_k}\| \leq \sum_{i=1}^n L_i M_i \|N_y - N_{y_k}\| + \sum_{i=1}^n \|A_i z_k\| \|B_i y - B_i y_k\|,$$

et

$$(1 - \sum_{i=1}^n L_i M_i) \|N_y - N_{y_k}\| \leq \sum_{i=1}^n \|A_i z_k\| \|B_i y - B_i y_k\|$$

2.2. THÉORÈME D'EXISTENCE

d'où

$$\begin{aligned} \|N_y - N_{y_k}\| &\leq \frac{1}{(1 - \sum_{i=1}^n L_i M_i)} \sum_{i=1}^n (c_i \|B_i y - B_i y_k\|) \\ &\leq \frac{1}{(1 - \sum_{i=1}^n L_i M_i)} \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{\frac{1}{n} - L_i M_i}{c_i} \right) \epsilon \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

et donc pour tout $y \in C$ on aura :

$$N(C) \subset \bigcup_{j=1}^n \beta(z_j, \epsilon),$$

avec $z_j = N_{y_j}$, comme résultat $N(C)$ est totalement borné. N est continu et N un opérateur compact sur C , d'après le théorème du point fixe de Schauder (voir annexe), N a un point fixe dans C , et d'après la définition de N :

$$x = Nx = \sum_{i=1}^n A_i N x B_i x,$$

l'opérateur $\Gamma(x)$ a une solution dans C .

■

2.2 Théorème d'existence

Maintenant nous allons présenter le théorème d'existence d'une solution asymptotiquement presque périodique pour l'équation intégral (2.1).

Théorème 2.2.1. Soit $p \geq 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Supposons que les propriétés suivantes sont vérifiées :

H1 : Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_i(\cdot, x) \in APP(\mathbb{R})$. f_i est lipschitzienne par rapport à x , $\forall t \in \mathbb{R}$.
C-à-d il existe une constante $L_i > 0$ telle que :

$$|f_i(t, x) - f_i(t, y)| \leq L_i |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

H2 : Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $g_i(t, x)$ est L^p -**Carathéodory** c-à-d $g_i(\cdot, x)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $g_i(t, \cdot)$ est continue pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, et pour tout $r > 0$, il existe une fonction $\mu_i^r \in L^p(\mathbb{R})$ telle que $|g_i(t, x)| \leq \mu_i^r(t)$ pour tout x telle que $|x| \leq r$ et pour presque pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2.2. THÉORÈME D'EXISTENCE

H3 : Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $K_i^* \in APP(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}))$ où $[K_i^*(t)](s) = k(t, s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.

H4 : Il existe une constante $r_0 > 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^n L_i \cdot K_i \cdot \|\mu_i^{r_0}\|_p < 1, \quad (2.3)$$

où $K_i = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|K_i^*(t)\|_q$; et

$$\sum_{i=1}^n \left[\sup_{t \in \mathbb{R}, |x| \leq r} |f_i(t, x)| \cdot K_i \cdot \|\mu_i^{r_0}\|_p \right] < r, \quad \forall r > r_0. \quad (2.4)$$

Alors (2.1) admet une solution asymptotiquement presque périodique.

Preuve. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ on note

$$(A_i x)(t) = f_i(t, x(t)), \quad x \in APP(\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R},$$

et

$$(B_i x)(t) = \int_{\mathbb{R}} k_i(t, s) g_i(s, x(s)) ds, \quad x \in APP(\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Maintenant on montre que A_i , B_i sont des applications de $APP(\mathbb{R})$ dans $APP(\mathbb{R})$.

Fixons un $x \in APP(\mathbb{R})$, en utilisant H1 et d'après le théorème 1.3.1, on aura que $A_i x \in APP(\mathbb{R})$.

Par l'hypothèse H2, et pour $r = \|x\|_{APP(\mathbb{R})}$, soit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} |B_i x(t_1) - B_i x(t_2)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} k_i(t_1, s) g_i(s, x(s)) ds - \int_{\mathbb{R}} k_i(t_2, s) g_i(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |k_i(t_1, s) g_i(s, x(s)) - k_i(t_2, s) g_i(s, x(s))| ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |(k_i(t_1, s) - k_i(t_2, s)) g_i(s, x(s))| ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |(k_i(t_1, s) - k_i(t_2, s)) u_i^{\|x\|_{APP(\mathbb{R})}}| ds \\ &\leq \|K_i^*(t_1) - K_i^*(t_2)\|_q \cdot \|u_i^{\|x\|_{APP(\mathbb{R})}}\|_p. \end{aligned}$$

Alors

$$|B_i x(t_1) - B_i x(t_2)| \leq \|K_i^*(t_1) - K_i^*(t_2)\|_q \cdot \|u_i^{\|x\|_{APP(\mathbb{R})}}\|_p. \quad (2.5)$$

2.2. THÉORÈME D'EXISTENCE

D'après (2.5) et le fait que $K_i^* \in APP(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}))$, on conclut que $B_i x \in APP(\mathbb{R})$.

Soit $C = \{x \in APP(\mathbb{R}), \|x\| \leq r_0\}$, où r_0 est une constante de l'hypothèse H_4 , on voit que C n'est pas vide, fermé, convexe et borné dans $APP(\mathbb{R})$.

D'après l'hypothèse H_1 , pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\|A_i x - A_i y\| \leq L_i \|x - y\| \quad \forall x, y \in X,$$

d'où (a) du théorème 2.1.1 est satisfaite.

Nous allons montrer que (b) du théorème 2.1.1 est satisfaite :

Premièrement nous allons montrer que B_i est continu :

Soit $x_k \rightarrow x$ dans $APP(\mathbb{R})$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |B_i x_k(t) - B_i x(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} k_i(t, s) g_i(s, x_k(s)) ds - \int_{\mathbb{R}} k_i(t, s) g_i(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} | [K_i^*(t)](s) (g_i(s, x_k(s)) - g_i(s, x(s))) | ds \\ &\leq \|K_i^*(t)\|_q \|g_i(\cdot, x_k(\cdot)) - g_i(\cdot, x(\cdot))\|_p \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|K_i^*(t)\|_q \|g_i(\cdot, x_k(\cdot)) - g_i(\cdot, x(\cdot))\|_p \end{aligned}$$

Alors

$$|B_i x_k(t) - B_i x(t)| \leq K_i \|g_i(\cdot, x_k(\cdot)) - g_i(\cdot, x(\cdot))\|_p,$$

avec $g_i(t, \cdot)$ est continue pour tout $t \in \mathbb{R}$, en utilisant le **théorème de convergence dominée de Lebesgue**¹, on conclut que $B_i x_k \rightarrow B_i x$ dans $APP(\mathbb{R})$. Alors B_i est continu.

Par un calcul direct on obtiendra :

$$|B_i x(t)| \leq K_i \|u_i^{r_0}\|_p, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in C,$$

ce qui veut dire que $B_i(C)$ est **uniformément borné**, d'où $\forall t \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{B_i x(t), x \in C\}$$

, est borné dans $\mathbb{R}$, d'où il est précompact.

Et d'après (2.5),

pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$: on a

$$|B_i x(t_1) - B_i x(t_2)| \leq \|K_i^*(t_1) - K_i^*(t_2)\|_q \cdot \|\mu_i^{r_0}\|_p,$$

1. soit (f_n) une suite dans L^1 , s'il existe une fonction $h(x)$ intégrable telle $|f_n(x)| \leq h(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et si $f_n \rightarrow f$ u-pp alors $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

2.2. THÉORÈME D'EXISTENCE

$B_i(C)$ est **équi-asymptotiquement presque périodique** car :

$\forall i=1..n$ on a K_i^* est asymptotiquement presque périodique, et si τ est une $\frac{\epsilon}{r_0}$ -translation et sachant que $\mu_i^{r_0}$ est p -intégrable et en supposant que $\|\mu_i^{r_0}\|_p = r_0$ alors :

$$|B_i x(t + \tau) - B_i x(t)| \leq \|K_i^*(t + \tau) - K_i^*(t)\|_q \cdot \|\mu_i^{r_0}\|_p \leq \frac{\epsilon}{r_0} \cdot r_0 = \epsilon,$$

donc toute $\frac{\epsilon}{r_0}$ -translation de K_i^* est une ϵ -translation de B_i , alors $B_i(C)$ est équi-asymptotiquement presque périodique.

$B_i(C)$ est **équi-uniformément continu** car :

$\forall i=1....n$ on a K_i^* est uniformément continue, c-à-d

$$\forall \epsilon' = \frac{\epsilon}{r_0} > 0, \exists \sigma(\epsilon') = \sigma, \quad \forall t_1, t_2 \quad |t_1 - t_2| \leq \sigma \implies |K_i^*(t_1) - K_i^*(t_2)| \leq \epsilon',$$

et le fait que $\mu_i^{r_0}$ est p -intégrable et en supposant que $\|\mu_i^{r_0}\|_p = r_0$ Alors :

$$|B_i x(t_1) - B_i x(t_2)| \leq \|K_i^*(t_1) - K_i^*(t_2)\|_q \cdot \|\mu_i^{r_0}\|_p \leq \frac{\epsilon}{r_0} \cdot r_0 = \epsilon.$$

et d'après le théorème 1.4.1 on déduit que $B_i(C)$ est précompact dans $APP(\mathbb{R})$.

Maintenant, vérifions que la propriété (c) du théorème 2.1.1 est satisfaite.

Soit $y \in C$, et $x = \sum_{i=1}^n A_i x \cdot B_i y$, On suppose que x n'est pas dans C , c-à-d $\|x\| > r_0$. D'après (2.4) on obtient :

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n A_i x \cdot B_i y \right\| \leq \sum_{i=1}^n \left[\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_i(t, x(t))| \cdot K_i \cdot \|\mu_i^{r_0}\|_p \right] < r_0 < \|x\|,$$

qui est une contradiction, d'où $x \in C$ et d'après (2.3) on a :

$$\sum_{i=1}^n (L_i \cdot M_i) = \sum_{i=1}^n L_i \cdot \sup_{x \in C} \|B_i x\| \leq \sum_{i=1}^n L_i \cdot K_i \cdot \|\mu_i^{r_0}\|_p < 1.$$

Donc toutes les propriétés du théorème 2.1.1 sont satisfaites. L'opérateur $x = \sum_{i=1}^n A_i x \cdot B_i x$ admet une solution dans $APP(\mathbb{R})$; c-à-d l'équation (2.1) a une solution asymptotiquement presque périodique. ■

Maintenant nous allons donner un exemple qui vas illustrer le théorème 2.2.1.

2.2. THÉORÈME D'EXISTENCE

Exemple 2. Soit $n=1$, $p=1$, $q=\infty$,

$$\begin{aligned} f_1(t, x) &= \frac{\arctan x \cdot (\sin t + \sin(\pi t) + e^{-t^2})}{10}, \\ g_1(t, x) &= \frac{x \sin(xe^{t^2})}{4(1+t^2)}, \\ k_1(t, s) &= (\sin t + \sin(\sqrt{2}t) + \frac{1}{1+t^2}) \cdot e^{-s^2}. \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(., x) \in APP(\mathbb{R})$ car f_1 s'écrit comme somme d'une fonction presque périodique et une fonction continue telle que sa limite à l'infini tend vers 0. De plus on a :

$$\begin{aligned} |f_1(t, x) - f_1(t, y)| &= \left| \frac{\arctan x \cdot (\sin t + \sin(\pi t) + e^{-t^2})}{10} - \frac{\arctan y \cdot (\sin t + \sin(\pi t) + e^{-t^2})}{10} \right| \\ &\leq \left| \frac{3}{10} (\arctan x - \arctan y) \right| \\ &\leq \frac{3}{10} |x - y|, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

on sait que (H1) est satisfaite avec $L_1 = \frac{3}{10}$, et (H2) est aussi satisfaite pour :

$$\mu_1(r) = \frac{r}{4(1+t^2)}, \quad r > 0.$$

c-à-d $g_1(t, x)$ est L^1 -Carathéodory est de plus,

$$\begin{aligned} |g_1(t, x)| &= \frac{x \sin(xe^{t^2})}{4(1+t^2)} \\ &\leq \left| \frac{x}{4(1+t^2)} \right| \\ &\leq \left| \frac{r}{4(1+t^2)} \right| \end{aligned}$$

(H3) est aussi satisfaite, c-à-d K_i^* est asymptotiquement presque périodique car elle s'écrit sous forme d'une somme de deux fonction : l'une est presque périodique et l'autre est ergodique, avec $k_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|K_i^*(t)\|_\infty \leq 3$.

De plus par un calcul direct on peut montrer que (H4) est satisfaite pour $r_0 = 1$. En effet

$$L_1 \cdot k_1 \cdot \|\mu_1^{r_0}\|_p = \frac{3}{10} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4(1+t^2)} < 1$$

2.2. THÉORÈME D'EXISTENCE

Alors

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, |x| \leq r} |f_1(t, x)| \cdot K_1 \cdot \|\mu_1^1\|_p < r, \quad \forall r > 1.$$

Par le théorème 2.2.1 l'équation intégrale :

$$x(t) = f_1(t, x(t)) \cdot \int_{\mathbb{R}} k_1(t, s) g_1(s, x(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

admet une solution asymptotiquement presque périodique.

Conclusion

Dans se manuscrit nous avons montrer le rôle important de l'équi-asymptotique presque périodicité pour la recherche d'une solution asymptotiquement presque périodique pour une classe d'équations intégrales, citons qu'il y'a peu de publication concernant notre thème, c'est la raison qui nous a motivé à développer l'article [11].

Annexe

Dans toute la suite, $(X, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach.

Théorème. (Arzela Ascoli)

Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Un sous ensemble $F \subset C(K, X)$ est relativement compact ssi F est équi-continu et $\forall t \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{f(t), f \in F\}$ est pré-compact dans X .

Définition. Un opérateur $T : X \rightarrow X$ est dit **totalelement borné** si pour tout sous ensemble borné S de X , l'ensemble $T(S)$ est totalelement borné dans X .

Définition. Un opérateur $T : X \rightarrow X$ est dit **complètement continu** s'il est totalelement borné et continu.

Définition. Un opérateur $T : (X, \| \cdot \|) \rightarrow (X, \| \cdot \|)$ est **lipschitzien** s'il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$\| Tx - Ty \| \leq L \cdot \| x - y \| .$$

Si $L < 1$, l'opérateur T est contractant.

Théorème. (Point fixe de Banach)

Soit $T : X \rightarrow X$ un opérateur contractant, alors T admet un unique point fixe $x \in X$.

Théorème. (Point fixe de Schauder)

Soit C un sous ensemble non vide convexe et fermé de X , et supposons que $T : C \rightarrow C$ est un opérateur continu tel que $T(C)$ est relativement compact. Alors T admet un point fixe.

Bibliographie

- [1] J. Blot, P.Cieuta, G. M. N'Guérékata and D. Pennequin ; Superposition operators between various almost periodic functions spaces and applications ; Commun. Math. Anal. 6(1) 2008, pp 42-70.
- [2] P. Cieuta, S. Fatajou and G. M. N'Guérékata, Composition of pseudo almost periodic and pseudo-almost automorphic functions and application to evolution equations, Appl. Anal. 89(1)(2010), pp (11-27).
- [3] P.J. Colins, Differential and integral equations. Senior research follow. St Edmund Hall. Oxford, 2006.
- [4] C. Corduneanu ; Almost periodic functions, second edition, Chelsea publishing company New york, 1989.
- [5] C. Corduneanu ; Integral equations and applications, the university of Texas at Arlington, 1991.
- [6] B.C.Dhag, On a fixed point theorem in Banach algebras with applications, Appl. Math. Lett. 18(2005), 273-280.
- [7] H.S.Dhang, Y.Y.Chen, G.M.N'Guérékata, C^m -almost periodic and almost periodic solutions for some nonlinear integral equations, Electron. J. Qual. Theory Diff. Equ. 6(2012),1-13.
- [8] H.S.Dhang, Y.Y.Chen, G.M.N'Guérékata, The space of continuous periodic functions is a set of first category in $AP(X)$, Journal of function spaces and Applications Volume 2013, Article ID 275702.
- [9] T. Diagana ; Almost automorphic type and almost periodic type functions in abstract spaces, Springer publisher. Washington, DC.

BIBLIOGRAPHIE

November 2012.

- [10] J. Dieudonné, Elements d'analyse, Tome 1, fondements de l'analyse moderne, Edition Jaques Gabay, Paris 1979.
- [11] H. S. Ding, Q. L. Liu, G. M. N'Guérékata, Equi-asymptotically almost periodic functions and Applications to functional integral equations, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. (2013), No. 103, pp. 1-9.
- [12] A.M.Fink ; Almost periodic differential equations, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
- [13] D. Giraudo ; Fonctions presque périodiques, Travail d'étude et de la recherche Rouen 2011.
- [14] H. R. Henriquez ; Asymptotically almost periodic solutions of abstract retarded functional differential equations of first order, nonlinear analysis RWA 10(2009), 2441-2454.
- [15] H. R. Henriquez ; Asymptotically almost periodic solutions of abstract retarded functional differential equations of second order, Z.Angew. Math. Phys, 60(2009), 797-822.
- [16] E.Hernandez, M. Pierri, M. A. Bena ; Asymptotically almost periodic solution for abstract neutral integro-differential equations, Applied Mathematics and Computation 217 (2011), 8963-8972.
- [17] A. Kolmogorov, S. Fomine ; Elements de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Édition MIR MOSCOU, 1994.
- [18] W. Long ; X. Zheng ; L. Li ; Existence of periodic solutions for a class of functional integral equations, 57(2012), 1-11.
- [19] A. D. Polyanin and A. V.Manzhurov, Handbook of integral equations, Boca Raton, London New York Washington, D.C, 1998.

BIBLIOGRAPHIE

- [20] A. Precupanu. Fonctions et suites asymptotiquement presque périodiques avec des valeurs dans un espace de Banach. An. Sti. Uni. "AL.I.Cuza" Iasi Sect.I a Mat. (N.S), 15 :29-38, 1969.
- [21] W. M. Ruess and W. H. Summer, Compactness in spaces of vector valued continuous functions and Asymptotic almost periodicity, Math. Nachr. 135(1988) 7-33.
- [22] E. Vesentini. Spectral properties of weakly asymptotically almost periodic semigroups. Adv. Math, 128(2) : 217-241, 1997.
- [23] R. Walter, Functional analysis, McGraw-Hill, Inc, 1973.
- [24] T.Yoshizawa stability theory and the existence of periodic solution and almost periodic solutions, Springer-verlag, new york, 1975.
- [25] S. Zaidman ; Almost Periodic functions in abstract spaces, Res. Notes Math, vol(126), Pitman, Boston, 1985.
- [26] C. Zhang; Almost periodic type functions and Ergodicity, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2003.