

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET
POPULAIRE**
**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche
scientifique**
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ : Recherche Opérationnelle
Titre du sujet de mémoire de master
L'équilibre de Nash dans les SVM
Réalisé par Kamelia DIF

Sous la direction de **Madame Achemine Farida**

Membres du jury :

Mme. Bouarab Ouiza	MCA UMMTO	Président
Mme. Achemine Farida	MCA UMMTO	rapporteur
Mme. Fahem Karima	MCB UMMTO	Examinatrice

Remerciements

Je tiens premièrement à prosterner remerciant **Allah** le tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Je remercie ensuite ma promotrice, pour ses orientations, ses conseils judicieux.

je remercie également tout le personnel du département de Mathématiques, particulièrement mes enseignants, qui m'ont aidé à enrichir mes connaissances durant les cinq ans de ma formation.

Surtout les membres de jury qui nous ferons l'honneur de juger mon travail. A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Dédicaces

À

*La mémoire de mon très cher père que son âme repose en paix,
Ma chère mère ma source d'encouragement et de réussite ; pour son aide et son soutien,*

Mes très chers frères et mes chères sœurs,

Mes nièces,

Mes neveux,

Toutes mes amies et mes amis,

La promotion RO 2021,

Je dédie ce modeste travail.

Kamelia DIF

Table des matières

Introduction Générale	6
1 Notions de base de la théorie des jeux	8
1.1 Introduction	8
1.2 Généralités	8
1.3 Classification des jeux :	9
1.4 Présentation d'un jeu non coopératif	13
1.4.1 La forme stratégique (ou normale)	14
1.5 Concepts de solution pour un jeu non coopératif sous forme normale	15
1.5.1 Équilibre en stratégies strictement dominantes	15
1.5.2 Équilibre De Nash	18
2 Équilibre de Nash	20
2.1 Introduction	20
2.2 Définition de l'équilibre de Nash	20
2.3 Problème d'existence de l'équilibre de Nash	22
2.4 Quelques Propriétés de l'équilibre de Nash	24
3 Équilibre de Nash dans les SVM	29
3.1 Introduction	29
3.2 Notions de base de SVM	29
3.2.1 Marge et hyperplan canonique	32
3.2.2 Vecteurs de support	35
3.2.3 Marges souples	36
3.3 Marge souple et Équilibre de Nash	40
3.3.1 Position du problème	40
3.3.2 Reformulation en utilisant l'équilibre de Nash	42

Conclusion 47
Bibliographie 48

Introduction Générale

La théorie des jeux est un domaine des mathématiques qui s'intéresse aux interactions stratégiques des agents (appelés « joueurs »). Elle étudie les situations où les choix de deux protagonistes - ou davantage - ont des conséquences pour l'un comme pour l'autre. Le jeu peut être à somme nulle (ce qui est gagné par l'un est perdu par l'autre, et réciproquement) ou, plus souvent, à somme non-nulle. La théorie des jeux devient un champ de recherche à part entière avec la publication de "Theory of Games and Economic Behavior" par **John Von Neumann** et **Oskar Morgenstern** en 1944. Cet ouvrage fondateur détaille la méthode de résolution des jeux à somme nulle. Il s'agissait de modéliser les jeux à somme nulle où la somme des gains entre les joueurs est toujours égale à zéro. Vers 1950, **John Nash** a présenté une définition d'une stratégie optimale pour un jeu à plusieurs joueurs, dite équilibre de Nash. Ce résultat génial a été raffiné par **Reinhard Selten**; cela leur a valu le "prix Nobel d'économie" en 1994 pour leurs travaux sur la théorie des jeux, avec **John Harsanyi** qui avait travaillé sur les jeux en information incomplète. Depuis 1944, 11 prix Nobel d'économie ont été décernés à des économistes pour leurs recherches sur la théorie des jeux. Outre le champ de l'économie, la théorie des jeux trouve des applications dans les sciences sociales, la théorie des contrats, les sciences politiques, en psychologie, et en biologie évolutionniste.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à une approche utilisant l'équilibre de Nash dans les SVM Couellan (2017). Les machines à vecteurs de support ou séparateurs à vaste marge (en anglais support vector machine, SVM) sont un ensemble de techniques d'apprentissage supervisé destinées à résoudre des problèmes de classification. Les SVM sont une généralisation des classifieurs linéaires.

Les séparateurs à vaste marge ont été développés dans les années 1990 à partir des considérations théoriques de **Vladimir Vapnik** sur le développement d'une théorie statistique de l'apprentissage : la théorie de **Vapnik-Chervonenkis**. Ils ont rapidement été adoptés pour leur capacité à travailler avec des données de grandes dimensions, le faible nombre d'hyperparamètres, leurs garanties théoriques, et leurs bons résultats en pratique. Les SVM ont été appliqués à de très nombreux domaines (bio-informatique, recherche d'information, vision par ordinateur, finance ...).

Les séparateurs à vastes marges sont des classificateurs qui reposent sur deux idées clés, qui permettent de traiter des problèmes de discrimination non linéaire, et de reformuler le problème de classement comme un problème d'optimisation quadratique. La première idée clé est la notion de marge maximale. La marge est la distance entre la frontière de séparation et les échantillons les plus proches. Ces derniers sont appelés vecteurs supports. Dans les SVM, la frontière de séparation est choisie comme celle qui maximise la marge.

Ce choix est justifié par la théorie de **Vapnik-Chervonenkis** (ou théorie statistique de l'apprentissage), qui montre que la frontière de séparation de marge maximale possède la plus petite capacité. Le problème est de trouver cette frontière séparatrice optimale, à partir d'un ensemble d'apprentissage. Ceci est fait en formulant le problème comme un problème d'optimisation quadratique, pour lequel il existe des algorithmes connus.

Les SVM peuvent être utilisés pour résoudre des problèmes de discrimination de deux classes, c'est-à-dire décider à quelle classe appartient un échantillon (classe 1 ou classe -1), c'est-à-dire prédire la valeur numérique d'une variable. La résolution de ce problème passe par déterminer une règle permettant de classer les données qui est (la règle) l'hyperplan qui sépare les données.

En effet, il existe une infinité d'hyperplans séparateurs, donc le choix de l'hyperplan séparateur n'est pas évident. Ainsi pour résoudre ce problème, il a été montré, qu'il existe un unique hyperplan optimal, défini comme l'hyperplan qui maximise la marge entre les échantillons et l'hyperplan séparateur c'est-à-dire faire appel au concept de marge souple. Couellan 2017 a proposé une méthode utilisant l'équilibre de Nash pour déterminer l'hyperplan séparateur dans le cas de marge souple. Et cela, en considérant un jeu à deux joueurs, et à chaque joueurs on associe une classe. Chaque joueur a pour objectif de minimiser la distance la plus proche entre sa classe et l'hyperplan de séparation. De toute évidence, si les deux joueurs interagissent simultanément avec leur propre objectif, ils tenteront tous les deux de minimiser la distance à l'hyperplan d'une manière non-coopérative.

Notre mémoire est organisé comme suit. Après une introduction générale, nous commençons naturellement par présenter dans le premier chapitre les notions de bases de la théorie des jeux. Le deuxième chapitre nous est consacré au concept d'équilibre de Nash. Dans le troisième chapitre, nous allons présenter les concepts de base des SVM et la méthode de Couellan (2017) dans le cas de deux classes. Puis, nous terminons par une conclusion générale.

Chapitre 1

Notions de base de la théorie des jeux

1.1 Introduction

Historiquement, la théorie des jeux est construite dans la seconde partie du XXème siècle sur les contributions séminales de Von Neumann et Morgenstern (1944) et John Forbes Nash (1951). L'étude des jeux de société tels que les échecs ou le poker fût l'une des sources d'inspiration de la "théorie des jeux". La théorie moderne s'est éloignée de ses racines et étudie plus généralement les situations de conflit.

Elle consiste à analyser l'interaction dans un groupe d'agents rationnels qui ont un comportement stratégique. "La théorie des jeux est un ensemble d'outils analytiques destiné à nos aider à comprendre les phénomènes que nous observons lorsque des décisions interagissent" (Osborne et Rubinstein,1994).

Ce type de situations est très fréquent en économie (on pense bien sûr aux situations de concurrence imparfaite), mais aussi en sciences politiques (vote stratégique, compétition électorale. . .), en biologie (théorie de l'évolution) ou en sociologie (société de la confiance/défiance). L'objet de la théorie des jeux est de formaliser ces interactions pour tenter d'en prévoir l'issue, mais aussi d'aider le où les joueurs à choisir la « bonne » stratégie.

Dans ce chapitre nous allons rappeler les notions générales de la théorie des jeux et les différentes classes des jeux.

1.2 Généralités

Dans cette section, on rappelle les concepts de base de la théorie des jeux.

Définition 1. Un jeu : Dans la théorie des jeux, un jeu est un ensemble de situations de conflit à l'intérieur duquel les joueurs choisissent entre les actions possibles. Chaque choix (ou action) est connecté à un ensemble de résultats possibles décrits par valeur sur des échelles de préférence.

Définition 2. Conflit : On appelle conflit toute situation mettant en jeu différents agents (joueurs) et caractérisé par trois conditions suivantes :

1. Tout joueur peut par sa propre décision influencer l'issue du jeu, c'est-à-dire déterminer un ensemble de résultats dans lequel se situera forcément l'issue du jeu.
2. Aucun joueur ne contrôle complètement le processus, c'est-à-dire qu'aucun agent ne peut par son seul comportement, décider le résultat du jeu (aucun joueur n'est dictateur).
3. les joueurs apprécient de façon différente les résultats possible du jeu.

Définition 3. Un joueur (groupe d'agents) : On appelle joueur toute personne qui participe au conflit et capable de prendre une décision. Il est l'unité de décision dans un jeu.

Définition 4. Une stratégie : Une stratégie est les possibilités de suite d'actions qui s'offrent à chaque joueur.

Définition 5. Interaction : Toute action choisie par un joueur aura une influence sur celles des autres joueurs.

Définition 6. Une utilité (gain) : Le gain d'un joueur est le bénéfice négatif (perte) ou positif (gain) qui résulte des choix de tous les joueurs.

Définition 7. La rationalité : La rationalité individuelle d'un joueur est une règle de maximisation du profit individuel.

1.3 Classification des jeux :

La diversité des situations conflictuelles qu'on peut rencontrer en pratique engendre différents types de jeux et des méthodes spécifiques de résolution. La classification des jeux se fait :

- Selon le nombre de coups : la forme normale, la forme extensive.
- Selon la relation entre les joueurs : coopératifs ou non coopératifs.
- Selon l'information que possède chaque joueur sur les données de jeu : à information complète ou incomplète -jeu à information parfaite ou jeu à information imparfaite.

Avant de passer à la classification des jeux certaines définitions sont nécessaires.

Définition 8. Coalition : Une coalition est une partie de l'ensemble des joueurs, qui s'organisent d'une certaine façon.

Définition 9. Structure de coalition : On appelle structure de coalition toute partition de l'ensemble des joueurs.

Définition 10. Accord contraignant : Un accord entre les joueurs est dit contraignant s'il existe un organe de contrôle qui peut garantir son application, par exemple un état, un gouvernement,...

Définition 11. Jeux avec paiement latéraux : Ce sont les jeux où les transferts d'utilité entre les joueurs sont possibles. Il permet aux joueurs de céder une partie de leurs gains à d'autres joueurs pour former des coalitions dans le but d'augmenter leurs gains.

Définition 12. Jeux sans paiement latéraux : Ce sont les jeux où les joueurs reçoivent seulement le gain que leur donnent les règles du jeu. Il leur est interdit de recevoir ou de donner une partie de leurs gains aux autres.

Classification selon le nombre de coups : Les jeux non coopératifs sont décrits sous deux formes : la forme normale et la forme extensive.

1. **Jeux sous forme normale** Ce sont les jeux qui se déroulent en un seul coup. La forme normale d'un jeu peut être utilisée dans le cas où les joueurs interviennent simultanément.

Dans la forme normale, on se contente d'une énumération de toutes les stratégies avec les issues et les gains qu'elles engendrent .

Dans le cas des jeux finis (l'ensemble des stratégies des joueurs sont finis) la représentation se fait par un tableau donnant les gains des joueurs pour chacune des issues possibles, les lignes et colonnes correspondent aux diverses stratégies.

Exemple 13. (« Matching Pennies »)

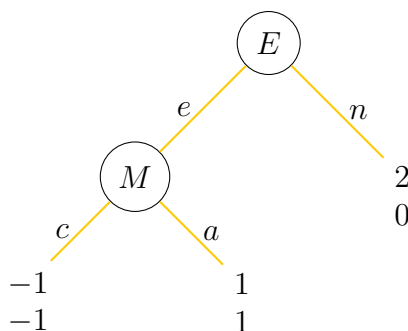
Chaque joueur possède une pièce de monnaie et choisit secrètement de la mettre sur Pile (P) ou sur Face (F). Le joueur 1 gagne si son choix est le même que celui du joueur 2 et, dans ce cas, le joueur 2 perd. Dans le cas contraire c'est le joueur 2 qui gagne et le joueur 1 qui perd. Ce jeu est donné par la matrice :

	P	F
P	(1,-1)	(-1,1)
F	(-1,1)	(1,-1)

2. **Jeux sous forme extensive (étendue) :** Dans ce cas les joueurs peuvent intervenir plusieurs fois. Ce sont les jeux qui comportent plusieurs coups. La forme extensive d'un jeu peut être utilisée dans le cas où les règles du jeu stipulent que certains joueurs interviennent plusieurs fois. La représentation se fait par un arbre dit de Kuhn, qui consiste à clarifier la séquence des actions des joueurs et l'information dont ils disposent à chaque nœud.

Exemple 14. (Le jeu «d'entrée»)

Une firme M est en situation de monopole sur un marché. Une autre firme E peut décider d'entrer (e) ou non (n) sur le marché. Si la firme E décide d'entrer, la firme M peut alors soit combattre (c), soit s'accommoder (a). Les paiements pour M et pour E sont $(2, 0)$ si E n'entre pas, $(-1, -1)$ si E entre et M combat, et $(1, 1)$ si E entre et M s'accommode. On représente ce jeu par l'arbre suivant :



Classification selon l'information que possède chaque joueur :

Définition 15. (Jeux à information complète)

Un jeu est dit à information complète si chacun des joueurs connaît la structure du jeu. C'est-à-dire chacun des participants connaît lors de la prise de décision l'ensemble de ses stratégies et celles des autres joueurs et les gains qui s'y attachent. Donc, chaque joueur peut se mettre à la place des autres joueurs et de modélisateur le jeu. Si au moins un joueur ne connaît pas entièrement la structure du jeu, le jeu est dit à information incomplète.

Définition 16. (Jeux à information parfaite)

Un jeu est dit à information parfaite si chacun des joueurs, au moment de choisir son action, a une connaissance parfaite de l'ensemble des décisions prises antérieurement par les autres joueurs. Un jeu est à information imparfaite si un des joueurs ne connaît pas, à un moment du déroulement du jeu, ce qu'à joué un autre joueur. Ceci peut arriver dans le cas où on cache l'information aux joueurs ou par ce que les joueurs jouent simultanément.

Exemple 17. .

- Les échecs sont à information complète et parfaite.
- Du fait de l'incertitude sur les gains (cartes de l'adversaire cachées), le poker est à information incomplète.

Classification selon les relations entre les joueurs :

— **Jeux coopératifs :**

On dit qu'un jeu est coopératif, lorsque les joueurs qui y participent communiquent entre eux et peuvent former des coalitions par un accord contraignant. Autrement dit, les joueurs ont la possibilité de remettre leur pouvoir de décision entre les mains d'une instance collective qu'ils auront créé ensemble. Les jeux coopératifs se divisent en deux catégories : les jeux sans paiements latéraux et les jeux avec paiements latéraux.

- **Jeux non coopératifs :** On appelle jeu non coopératif, tout jeu où les joueurs ne peuvent pas se regrouper en coalitions, mais ils peuvent se mettre d'accord sur telle ou telle issue, à condition qu'ils ne contractent pas d'accord contraignant. Aucun joueur ne cherchera à manipuler les autres. Il ne cherchera qu'à maximiser son gain.

Autres classes des jeux :

Jeux à deux personnes :

Les jeux à deux personnes, ou duels, constituent la plus grande partie des jeux de société, comme les échecs, ou encore les jeux d'équipes (coalition). Les jeux à deux personnes ont fait l'objet d'analyses poussées par les théoriciens.

Jeux à n -personnes ($n \geq 3$) :

Un jeu à n -personnes est un jeu où le nombre de joueurs intervenant dans le jeu est supérieur à deux. Lorsque l'on étend les résultats obtenus par la théorie des jeux à deux personnes aux jeux à n -personnes.

Jeux à deux joueurs et à somme nulle :

On dit qu'un jeu à deux personnes est à somme nulle si le montant total des gains à la fin de la partie est nulle. En d'autres termes si le montant total gagné par un joueur est égal au montant perdu par l'autre (ce qui est gagné par l'un est perdu par l'autre, et réciproquement).

Les échecs ou le poker sont des jeux à somme nulle car les gains d'un joueur sont exactement les pertes de l'autre.

Le jeu peut être à somme nulle ou, plus souvent, à somme non-nulle. Un exemple de jeu à deux joueurs à somme nulle est celui du pierre-feuille-ciseaux.

Les situations d'affaires, la vie politique ou le dilemme du prisonnier sont des jeux à somme non-nulle car certaines issues sont profitables pour tous, ou dommageables pour tous.

Exemple 18. (*Pierre-feuille-ciseaux*)

C'est un jeu effectué avec les mains et opposant deux joueurs. Il possède de nombreux noms alternatifs, notamment en variant l'ordre des termes ou en remplaçant certains mots comme « papier » par « feuille » ou « pierre » par « caillou » ou « roche ».

L'ensemble de stratégies pour chaque joueur est $\{P, F, C\}$.

l'utilité pour chaque joueur est 1 point en cas de victoire, 0 sinon.

Ce jeu est donné par le tableau suivant :

	<i>P</i>	<i>F</i>	<i>C</i>
<i>P</i>	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$
<i>F</i>	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$
<i>C</i>	$(0,1)$	$(1,0)$	$(0,0)$

Exemple 19. (*Le Dilemme du Prisonnier*)

*Deux criminels sont arrêtés et interrogés dans des pièces séparées. Ils ont le choix entre dénoncer leur complice (action *D*) ou se taire et donc coopérer avec leur complice (action *C*). Un criminel dénoncé par son complice se verra infliger une lourde peine (quatre ans, que l'on représente par le paiement -4) et une peine légère dans le cas contraire (un an, que l'on représente par le paiement -1).*

De plus, le fait de dénoncer l'autre permet d'obtenir une remise de peine (un an de moins, traduit par $+1$ dans son paiement), que l'on soit soi-même dénoncé ou pas). Le jeu peut donc se représenter comme suit :

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	$(-1,-1)$	$(-4,0)$
<i>D</i>	$(0,-4)$	$(-3,-3)$

1.4 Présentation d'un jeu non coopératif

Un jeu non coopératif peut être défini de deux manières différentes :

1. Forme extensive (arborescente).
2. Forme stratégique (normale).

Dans la section suivante, nous donnerons la forme stratégique d'un jeu.

1.4.1 La forme stratégique (ou normale)

Un jeu sous forme normale est un jeu non-coopératif, à information complète. C'est un jeu simultanée car les stratégies sont choisies simultanément et les joueurs sont rationnels (ils cherchent à maximiser leurs gains).

Un jeu sous forme normale

$$J = \langle N, X, f \rangle$$

est la donnée de trois éléments :

$N = \{1, 2, \dots, n\} \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}^*$ est l'ensemble des n joueurs.

$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$; où $X_i \subseteq R^{n_i}$; $n_i \in \mathbb{N}^*$ est l'ensemble des stratégies du joueur $i \in N$.

$f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$, où $f_i : X \rightarrow R$; $i = \overline{1, n}$; f_i est la fonction gain du joueur, d'utilité ou de paiement du joueur $i \in N$. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f_i(x)$, $i \in N$.

- On parlera de jeu fini si X_i est fini $\forall i \in N$.

- Le gain du joueur dépend de sa stratégie et celles des autres joueurs.

Remarque 20. 1. Le déroulement d'un tel jeu se fait de la manière suivante :

Chaque joueur $i \in N$ choisit indépendamment et simultanément une stratégie $x_i \in X_i$, $i \in N$;

Le joueur i obtient un paiement égal à $f_i(x_1, x_1, \dots, x_n)$, $i \in N$.

On supposera que chaque joueur cherche à maximiser son propre paiement, et que tous les joueurs connaissent le jeu, c'est à dire l'ensemble des joueurs, leurs ensembles d'actions, ainsi que leurs fonctions de paiement.

2. Dans le cas d'un jeu à deux joueurs, la structure de paiement peut s'exprimer à l'aide d'une matrice (appelée matrice de paiement).

Autrement dit, soit $N = \{1, 2\}$ on va appeler le joueur 1 par le joueur ligne et le joueur 2 par le joueur colonne.

On note $X_1 = \{1, \dots, n\}$ l'ensemble de stratégies de joueur ligne et $X_2 = \{1, \dots, m\}$ l'ensemble de stratégies de joueur colonne.

Alors la fonction de paiement des joueurs f_1, f_2 peut s'exprimer sous la forme d'une matrice à n lignes et m colonnes, dont le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j est le couple $(f_1(i, j), f_2(i, j))$.

Exemple 21. Considérons le jeu suivant :

1.5. CONCEPTS DE SOLUTION POUR UN JEU NON COOPÉRATIF SOUS FORME NORMALE

On appelle le joueur 1 joueur ligne et le joueur 2 joueur colonne.

	<i>G</i>	<i>D</i>
<i>H</i>	(2,2)	(2,-1)
<i>B</i>	(-3,0)	(0,4)

La matrice de paiement est une matrice de taille 2×2 , puisque chacun des deux joueurs à deux stratégies :

L'ensemble de stratégies de joueur ligne est : $X_1 = \{H, B\}$

L'ensemble de stratégies de joueur colonne est : $X_2 = \{G, D\}$

Dans les 4 cases du tableau, il y a un couple de nombres réels : Le premier chiffre est le paiement du joueur ligne, et le seconde chiffre est le paiement du joueur colonne.

- Lorsque le joueur ligne joue *H* et le joueur colonne joue *G*, le joueur ligne obtient 2 et le joueur colonne obtient 2. Ceci se traduit par $f_1(H, G) = 2$, $f_2(H, G) = 2$.
- Lorsque le joueur ligne joue *H* et le joueur colonne joue *D*, le joueur ligne obtient 2 et le joueur colonne obtient -1. Ceci se traduit par $f_1(H, D) = 2$, $f_2(H, D) = -1$.
- Lorsque le joueur ligne joue *B* et le joueur colonne joue *G*, le joueur ligne obtient -3 et le joueur colonne obtient 0. Ceci se traduit par $f_1(B, G) = -3$, $f_2(B, G) = 0$.
- Lorsque le joueur ligne joue *B* et le joueur colonne joue *D*, le joueur ligne obtient 0 et le joueur colonne obtient 4. Ceci se traduit par $f_1(B, D) = 0$, $f_2(B, D) = 4$.

1.5 Concepts de solution pour un jeu non coopératif sous forme normale

En théorie des jeux, un concept de solution (dit équilibre) est un ensemble de lois (aboutissant à des équations mathématiques) qui permettent de sélectionner parmi toutes les issues possibles, un sous ensemble d'issue satisfaisant certaines propriétés, jugées désirables si les joueurs possèdent certaines facultés de raisonnement (rationalité, prudence, connaissance...).

Dans cette section, nous exposerons quelques concepts de solution pour un jeu sous forme normale (stratégique).

1.5.1 Équilibre en stratégies strictement dominantes

Une technique de résolution des jeux est l'élimination répétée des stratégies dominées. À la première étape, toutes les stratégies dominées sont éliminées du jeu, puisque les

1.5. CONCEPTS DE SOLUTION POUR UN JEU NON COOPÉRATIF SOUS FORME NORMALE

joueurs ne vont pas les choisir à l'équilibre. Cela conduit à un nouveau jeu, plus réduit. Des stratégies qui n'étaient pas auparavant dominées peuvent le devenir, du fait de l'élimination de situations non pertinentes. On les élimine à leur tour, jusqu'à ce qu'il n'existe plus de stratégie dominée dans le jeu.

Soit $x \in X$, on note

$$X_{-i} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n \\ x_{-i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Définition 22. On dit que la stratégie $x_i \in X_i$ du joueur i est strictement dominée dans le jeu J si et seulement s'il existe une stratégie $t_i \in X_i$ telle que

$$\forall x_{-i} \in X_{-i}, f_i(x_i, x_{-i}) < f_i(t_i, x_{-i}).$$

Contre toute "défense", jouer la stratégie t_i donne toujours strictement plus au joueur i que jouer la stratégie x_i .

Définition 23. On dit que la stratégie x_i est dominée par la stratégie t_i pour le joueur i , si et seulement si

$$\begin{cases} \forall x_{-i} \in X_{-i}, f_i(x_i, x_{-i}) \leq f_i(t_i, x_{-i}), \\ \exists x_{-i} \in X_{-i}, f_i(x_i, x_{-i}) < f_i(t_i, x_{-i}), \end{cases}$$

(avec une inégalité stricte au moins).

Contre toute "défense", jouer la stratégie t_i donne toujours autant et au moins une fois plus au joueur i que jouer x_i .

Définition 24. On appelle stratégie strictement dominante pour le joueur i une stratégie qui domine strictement toute autre stratégie de ce joueur.

Définition 25. On appelle stratégie dominante une stratégie qui domine toute autre stratégie de ce joueur.

Remarque 26. Si x_i est strictement dominée par t_i alors, face à n'importe quelle stratégie des autres joueurs, en jouant t_i , le joueur i gagne strictement plus que ce qu'il aurait gagné en jouant x_i . Il paraît donc naturel et logique de supposer qu'un joueur rationnel ne va jamais jouer une stratégie strictement dominée.

Définition 27. (Équilibre en stratégie strictement dominante)

Une situation $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X$ est appelée **équilibre en stratégie strictement dominante**, si chaque composante $x_i^* \in X_i$ est une stratégie strictement dominante pour le joueur i , $\forall i \in N$.

1.5. CONCEPTS DE SOLUTION POUR UN JEU NON COOPÉRATIF SOUS FORME NORMALE

Procédure d'élimination itérée des stratégies strictement dominées (PEISSD) :

On considère le jeu sous forme normale

$$J = \langle N, X, f \rangle$$

Pour tout joueur $i \in N$, on note $SD^i(J)$ l'ensemble de stratégies strictement dominées du joueur i .

- Partant d'un jeu $J_0 = J = \langle N, X, f \rangle$
- Pour tout $i \in N$, on pose : $X_i^1 = X_i \setminus SD^i(J_0)$ et $J_1 = \langle N, X^1, f \rangle$ est le jeu dans lequel les fonctions de paiement sont définies par restriction sur X^1 ;
avec $X^1 = X_1^1 \times X_2^1 \times X_3^1 \times \dots \times X_n^1$
- Pour tout entier $k > 1$ et tout $i \in N$, on pose :
 $X_i^k = X_i^{k-1} \setminus SD^i(J_{k-1})$ et $J_k = \langle N, X^k, f \rangle$; $X^k = \prod_{i=1}^N X_i^k$
- Pour tout $i \in N$ on pose enfin : $X_i^\infty = \bigcap_k X_i^k$ et $J_\infty = \langle N, X^\infty, f \rangle$

Remarque 28. On dit qu'un jeu sous forme normale J est résoluble par PEISSD si on obtient une unique issue en éliminant les stratégies strictement dominées.

Exemple 29. On considère le jeu sous forme normale suivant :

	A	B	C
x	(11,11)	(5,10)	(5,12)
y	(6,7)	(9,4)	(4,5)
z	(5,5)	(9,2)	(6,8)

Résoudre par le PEISSD :

L'ensemble de stratégie de joueur ligne est $\{x, y, z\}$.

L'ensemble de stratégie de joueur colonne est $\{A, B, C\}$.

Dans chaque case de la matrice, le nombre gauche l'utilité du joueur 1 (joueur ligne) et le nombre de droite l'utilité du joueur 2 (joueur colonne).

Les joueurs sont rationnels, nous allons déterminer l'équilibre en stratégies strictement dominantes.

Élimination répétées des stratégies strictement dominées :

B est une stratégie strictement dominée par A pour le joueur colonne.

Ainsi, B peut être supprimée, on obtient le jeu réduit

1.5. CONCEPTS DE SOLUTION POUR UN JEU NON COOPÉRATIF SOUS FORME NORMALE

	A	C
x	(11,11)	(5,12)
y	(6,7)	(4,5)
z	(5,5)	(6,8)

y est strictement dominée par x pour le joueur ligne.

Ainsi, y peut être supprimée, On obtient le jeu réduit :

	A	C
x	(11,11)	(5,12)
z	(5,5)	(6,8)

A est strictement dominée par C pour le joueur colonne.

Ainsi, A peut être supprimée, On obtient le jeu réduit :

	C
x	(5,12)
z	(6,8)

x est strictement dominée par z pour le joueur ligne.

Ainsi, x peut être supprimée, On obtient le jeu réduit :

	C
z	(6,8)

Ainsi, l'issue finale du jeu est (z, C) est l'équilibre obtenu par le procédé PEISSD.

Ce jeu est résoluble par le procédé PEISSD.

1.5.2 Équilibre De Nash

La méthode précédente de résolution des jeux peut ne pas permettre d'avancer dans certains jeux.

	A	B	C
x	(0,4)	(4,0)	(5,3)
y	(4,0)	(0,4)	(5,3)
z	(3,5)	(3,5)	(6,6)

1.5. CONCEPTS DE SOLUTION POUR UN JEU NON COOPÉRATIF SOUS FORME NORMALE

Ce jeu ne possède pas de stratégie strictement dominées. Pour le résoudre, on a besoin d'un autre concept : celui de l'équilibre de Nash.

L'équilibre de Nash peut être définie de la façon suivante :

Définition 30. *Un équilibre de Nash est une combinaison de stratégies telle qu' aucun joueur ne peut augmenter son gain en modifiant sa stratégie compte tenu des stratégies jouées par les autres joueurs.*

Nous reprendrons la définition de l'équilibre de Nash d'une façon plus formelle et nous étudierons ce concept d'une façon plus détaillé dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Équilibre de Nash

2.1 Introduction

Dans un contexte non coopératif, on a suggéré le concept de solution consistant à éliminer par itération les stratégies strictement dominées, seulement ce dernier ne permet pas de résoudre le jeu. Il faut donc faire appel à un autre concept ; l'équilibre de Nash est, de loin, le plus utilisé.

L'équilibre de Nash doit son nom au mathématicien économiste JOHN Nash (prix Nobel d'économie en 1994) qui l'a introduit en 1951 dans sa thèse de doctorat. Il décrit une issue dans laquelle aucun joueur ne souhaite modifier son comportement et le comportement de ses adversaires. Donc il est l'issue cohérente pour laquelle aucun joueur ne regrettera a posteriori son choix.

Dans ce chapitre, nous allons rappeler la définition de l'équilibre de Nash, donner un théorème d'existence, et nous allons donner quelques propriétés de cet équilibre et quelques exemples.

Dans cette partie, on considère le jeu sous forme normale

$$J = \langle N, X, f \rangle.$$

2.2 Définition de l'équilibre de Nash

L'équilibre de Nash est un concept de solution des jeux sous forme normale, proposé par John Forbes Nash en 1950 couramment utilisé en théorie des jeux. Il est une situation où chaque joueur prévoit correctement le choix des autres, chaque joueur maximise son gain, compte tenu de cette prévision.

Un équilibre de Nash est un ensemble de stratégies (une par joueur) tel qu'aucun joueur

2.2. DÉFINITION DE L'ÉQUILIBRE DE NASH

ne peut obtenir un gain supplémentaire en changeant unilatéralement de stratégies.

Définition 31. (*Équilibre de Nash*)

Un profil de stratégies $(x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)) \in X$ est un équilibre de Nash du jeu sous forme normale J si et seulement si :

$$\forall i \in N, \forall x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{-i}^*) \leq f_i(x_i^*, x_{-i}^*).$$

Définition 32. On appelle la correspondance de meilleure réponse (qui est une application multivoque) de joueur i , l'application

$$C_i : X_{-i} \mapsto 2^{X_i}$$

$$x_{-i} \mapsto C_i(x_{-i})$$

2^{X_i} est ensemble de toutes les parties de X_i , $i \in N$.

$$C_i(x_{-i}) = \{x_i^* \in X_i / f_i(x_i^*, x_{-i}) = \max_{y_i \in X_i} f_i(y_i, x_{-i})\}.$$

La correspondance des meilleures réponses C_i d'un joueur i , $i \in N$, donne ses choix optimaux vis-à-vis de toutes les stratégies possibles des autres joueurs.

Ainsi, on peut réunir les meilleures réponses de tous les joueurs en définissant la correspondance

$$C : X \mapsto 2^X$$

$$x \mapsto C(x) = \prod_{i \in N} C_i(x_{-i})$$

Définition 33. (*Le point fixe*)

On dit que $x \in X$ est un point fixe de la correspondance $C(\cdot)$ si

$$x \in C(x).$$

Lemme 34. Une issue \bar{x} du jeu J est un équilibre de Nash si et seulement si \bar{x} est un point fixe c'est-à-dire :

$$\bar{x} \in C(\bar{x}).$$

Démonstration. Soit $\bar{x} \in X$ un équilibre de Nash dans le jeu J , alors on a les équivalences suivantes :

\bar{x} est un équilibre de Nash $\Leftrightarrow \forall i \in N, \forall x_i \in X_i, f_i(\bar{x}_i, x_i) \leq f_i(\bar{x}_i, \bar{x}_i)$

$\Leftrightarrow \forall i \in N, \bar{x}_i \in C_i(\bar{x})$

$\Leftrightarrow \bar{x} \in C(\bar{x})$

□

D'après le Lemme 34, pour démontrer l'existence de l'équilibre de Nash, il suffit de montrer que l'application multivoque $C(\cdot)$ admet au moins un point fixe. Pour cela, il faut vérifier les conditions du théorème de Kakutani.

2.3 Problème d'existence de l'équilibre de Nash

Le problème d'existence d'un équilibre de Nash est un problème mathématique difficile. Pour cela Nash a utilisé un instrument très puissant d'analyse mathématique qui est le théorème du point fixe, pour établir des conditions suffisantes d'existence de cet équilibre.

Dans ce paragraphe, on va se limiter à énoncer un théorème d'existence dont la démonstration se basera sur la notion du point fixe d'une application multivoque.

Le théorème donnant les conditions d'existence d'un équilibre de Nash est donné ci-dessous.

Théorème 35. (*Théorème de Nash, 1951*)

Supposons que dans le jeu J , les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $X_i, i = \overline{1, n}$, sont non vides, convexes et compacts ;
2. Les fonctions $x \mapsto f_i(x)$ sont continues sur X ;
3. Les $x_i \mapsto f_i(x_i, x_{-i})$ sont quasi-concaves $\forall x_{-i} \in X_{-i}$;

Alors le jeu J possède au moins un équilibre de Nash.

Démonstration. Pour démontrer le théorème de Nash, il suffit de vérifier les conditions du théorème de Kakutani pour la correspondance de meilleures réponses C . On rappelle le théorème du point fixe de Kakutani.

Théorème 36. (*Théorème du Kakutani, 1941*)

Soient X un ensemble **non vide, convexe, compact** et $C : X \mapsto 2^X$ une correspondance

2.3. PROBLÈME D'EXISTENCE DE L'ÉQUILIBRE DE NASH

fermée à valeurs non vides, convexe et compact. Alors C admet au moins un point fixe :

$$\exists x^0 \in X, x^0 \in C(x^0).$$

1. $X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n \neq \emptyset$ est compact et convexe.

2. Montrons que $C(x) = \prod_{i \in N} C_i(x_{-i}) \neq \emptyset$

On a $C(x) = \prod_{i \in N} C_i(x_{-i}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall i \in N, C_i(x_{-i}) \neq \emptyset$, donc ça revient à montrer que $C_i(x_{-i}) \neq \emptyset, \forall i \in N$.

On a $C_i(x_{-i}) = \{\bar{x}_i \in X_i \text{ tel que } f_i(\bar{x}_i, x_{-i}) = \sup_{y_i \in X_i} f_i(y_i, x_{-i})\}$;

Comme la fonction f_i est continue sur X_i , qui est compact, alors f_i atteint sa borne supérieure :

$$(\exists \bar{x}_i \in X_i \text{ tel que } f_i(\bar{x}_i, x_{-i}) = \sup_{y_i \in X_i} f_i(y_i, x_{-i}))$$

En d'autres termes $\bar{x}_i \in C_i(x_{-i})$. Par conséquent, $\forall i \in N, C_i(x_{-i}) \neq \emptyset$.

3. Montrons que $\forall x \in X, C(x)$ est convexe.

Soient $z, t \in C(x)$, $\lambda \in [0, 1]$. On doit montrer que $\lambda z + (1 - \lambda)t \in C(x)$. C'est-à-dire $\lambda z_i + (1 - \lambda)t_i \in C_i(x_{-i}), \forall i \in N$.

On a

$$\forall i \in N, z_i \in C_i(x_{-i}) \Leftrightarrow \forall y_i \in X_i, f_i(z_i, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}).$$

$$\forall i \in N, t_i \in C_i(x_{-i}) \Leftrightarrow \forall y_i \in X_i, f_i(t_i, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}).$$

Comme f_i est quasi-concave, alors

$$f_i(\lambda z_i + (1 - \lambda)t_i, x_{-i}) \geq \min\{f_i(z_i, x_{-i}), f_i(t_i, x_{-i})\} \geq f_i(y_i, x_{-i}), \forall y_i \in X_i$$

$$\Rightarrow \lambda z_i + (1 - \lambda)t_i \in C_i(x_{-i}), \forall i \in N.$$

D'où $\lambda z + (1 - \lambda)t \in C(x)$. $C(x)$ est donc convexe $\forall x \in X$.

4. Montrons que $\forall x \in X, C(x)$ est compact.

Comme X est compact, donc il suffit de montrer que $C(x)$ est fermé.

$$C_i(x_{-i}) = \{\bar{x}_i \in X_i \text{ tel que } f_i(\bar{x}_i, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}), \forall y_i \in X_i\}, i \in N.$$

Soit (\bar{x}_i^k) une suite de $C_i(x_{-i})$ telle que

$$(\bar{x}_i^k) \mapsto x_i^*, \text{ pour } k \rightarrow +\infty.$$

Montrons que $x_i^* \in C_i(x_{-i})$:

On a

$$\forall k \in N, \bar{x}_i^k \in C_i(x_{-i}) \Rightarrow f_i(\bar{x}_i^k, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}), \forall y_i \in X_i.$$

$$\Rightarrow \forall y_i \in X_i, \lim_{k \rightarrow +\infty} f_i(\bar{x}_i^k, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i})$$

$$\Rightarrow \forall y_i \in X_i, f_i(\lim_{k \rightarrow +\infty} (\bar{x}_i^k), x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}), (\text{ car } f_i \text{ est continue })$$

$$\Rightarrow \forall y_i \in X_i, f_i(x_i^*, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i})$$

$$\Rightarrow x_i^* \in C_i(x_{-i}).$$

Donc $C_i(x_{-i})$ est fermé $\Rightarrow C(x)$ est fermé.

Toutes les conditions du théorème de Kakutani sont vérifiées par $C(\cdot)$, donc l'application multivoque $C(\cdot)$ admet un point fixe $\bar{x} \in C(\bar{x})$. D'après le Lemme 35, \bar{x} est un équilibre de Nash dans le jeu J . \square

2.4 Quelques Propriétés de l'équilibre de Nash

Propriétés 37. *L'équilibre de Nash est une issue individuellement rationnelle.*

Définition 38. *Une issue x d'un jeu J vérifie le principe de la rationalité individuelle (est individuellement rationnelle) si et seulement si :*

$$\forall i \in N, \nu_i \leq f_i(x),$$

avec $\nu_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_{-i}, x_i)$ (dit niveau de sécurité du joueur i , ou bien le gain minimal garanti pour le joueur i).

Lorsque les quantités ν_i , $i \in N$ existent, on a pour $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X$ un

2.4. QUELQUE PROPRIÉTÉS DE L'ÉQUILIBRE DE NASH

équilibre de Nash du jeu sous forme normale J ,

$$\forall i \in N, \forall x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{-i}^*) \leq f_i(x_i^*, x_{-i}^*).$$

Il est évident que

$$\forall i \in N, \forall x_i \in X_i, \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}^*) \leq f_i(x_i^*, x_{-i}^*).$$

Ce qui implique

$$\forall i \in N, \nu_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}^*) \leq f_i(x_i^*, x_{-i}^*).$$

Exemple 39. (*Dilemme de prisonnier*)

On a ici une autre formulation du dilemme du prisonnier. Deux accusés d'un crime séparés dans deux cellules, ont été interrogés

- Si les deux avouent, ils seront condamnés à 3 ans de prison.
- S'ils se taisent tous les deux, ils seront condamnés à 1 an de prison chacun.
- Si l'un des deux avoue, il sera libre et son témoignage sera utilisé contre l'autre, qui sera condamné à 4 ans de prison.

Ce jeu sera représenté par le tableau suivant :

	avouer	ne pas avouer
avouer	(-3,-3)	(0,-4)
ne pas avouer	(-4,0)	(-1,-1)

L'issue (avouer,avouer) est un équilibre de Nash pour ce jeu, en effet, si le premier joueur a décidé d'avouer, alors le deuxième joueur n'a pas intérêt à se taire sinon il sera condamné pour 4 ans, de même pour le deuxième joueur, s'il décide d'avouer alors la meilleure réponse de premier est d'avouer. Le gain correspondant est (-3,-3).

On pose :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le niveau de sécurité pour le joueur (1) est : $\nu_1 = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{-3, -4\} = -3$.

Le niveau de sécurité pour le joueur (2) est : $\nu_2 = \max_j \min_i b_{ij} = \max_j \{-3, -4\} = -3$

2.4. QUELQUE PROPRIÉTÉS DE L'ÉQUILIBRE DE NASH

$$\nu_1 = -3 \leq -3.$$

$$\nu_2 = -3 \leq -3$$

Donc la situation (avouer, avouer) (qui est un équilibre de Nash) est individuellement rationnelle dans le jeu du dilemme du prisonnier.

Propriétés 40. *L'équilibre de Nash n'est pas toujours Pareto optimal.*

Définition 41. (Pareto optimal)

On dit qu'un profil de stratégies $x^0 \in X$ est Pareto optimal, s'il n'existe pas un autre profil de stratégies qui la domine au sens de Pareto.

Autrement dit, une issue x^0 est dite Pareto optimale pour un problème d'optimisation $\langle X, f(x) \rangle$, si :

$$\begin{cases} \forall i \in N, f_i(x^0) \geq f_i(x) \\ \exists j, f_j(x^0) > f_j(x) \end{cases}$$

Dans l'exemple du dilemme de prisonnier, on remarque que la situation (avouer, avouer) n'est pas Pareto optimal, car elle est dominée par la situation (ne pas avouer, ne pas avouer).

Propriétés 42. *L'équilibre de Nash n'existe pas toujours dans un jeu.*

En effet, considérons le jeu suivant :

Exemple 43.

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	$(\underline{1}, 0)$	$(0, \underline{1})$
<i>B</i>	$(0, \underline{1})$	$(\underline{1}, 0)$

Ce jeu ne possède pas d'équilibre de Nash car quelque soit le couple de stratégies $\{A, B\} \times \{C, D\}$ l'un des deux joueurs aurait obtenu plus (1 contre 0) s'il avait modifié son choix.

Propriétés 44. *Pluralité des équilibres de Nash. Un jeu peut avoir plusieurs équilibres de Nash.*

Exemple 45. (Bataille des sexes).

Les deux joueurs sont un homme et une femme. Chacun a le choix entre deux possibilités : acheter un billet soit pour une représentation à l'opéra, soit pour un match de foot. Ces possibilités seront notées respectivement par *O* et *F*. Ils préfèrent avant tout être ensemble, mais la femme préfère l'opéra à le foot, et l'homme préfère le foot à l'opéra. On représente

2.4. QUELQUE PROPRIÉTÉS DE L'ÉQUILIBRE DE NASH

la situation dans le jeu suivant dans lequel la femme choisit les colonnes et l'homme choisit les lignes.

	O	F
O	$(\underline{2}, \underline{1})$	$(0, 0)$
F	$(0, 0)$	$(\underline{1}, \underline{2})$

Dans ce jeu, (O, O) et (F, F) sont deux équilibres de Nash .

Dans ce cas, nous sommes incapables de prédire quelle sera exactement la solution de jeu.

Propriétés 46. *Tout équilibre obtenu par le procédé PEISSD est un équilibre de Nash, mais l'inverse n'est pas toujours vrai.*

Exemple 47. *On considère le jeu sous forme normale suivant :*

	A	B	C	D
x	$(0, 0)$	$(6, -2)$	$(8, 3)$	$(3.5, 4)$
y	$(1, 1)$	$(8, -1)$	$(1, 0)$	$(4, 2)$
z	$(2, 7)$	$(2, 6)$	$(10, 2)$	$(3, 5)$
t	$(1.5, 6)$	$(3, 5)$	$(9, 4)$	$(2.5, 5)$

Résoudre par le PEISSD :

L'ensemble de stratégie de joueur ligne est $\{x, y, z, t\}$.

L'ensemble de stratégie de joueur colonne est $\{A, B, C, D\}$.

Dans chaque case de la matrice, le nombre gauche l'utilité du joueur 1 (joueur ligne) et le nombre de droite l'utilité du joueur 2 (joueur colonne).

Les joueurs sont rationnels, nous allons déterminer l'équilibre en stratégies strictement dominantes.

Élimination répétées des stratégies strictement dominées :

B est une stratégie strictement dominée par A pour le joueur colonne.

C est une stratégie strictement dominée par D pour le joueur colonne.

Ainsi, B et C peuvent être supprimées, on obtient le jeu réduit

	A	D
x	$(0, 0)$	$(3.5, 4)$
y	$(1, 1)$	$(4, 2)$
z	$(2, 7)$	$(3, 5)$
t	$(1.5, 6)$	$(2.5, 5)$

2.4. QUELQUE PROPRIÉTÉS DE L'ÉQUILIBRE DE NASH

x est une stratégie strictement dominée par y pour le joueur ligne.

t est une stratégie strictement dominée par z pour le joueur ligne.

Ainsi, x et t peuvent être supprimées, on obtient le jeu réduit :

	A	D
y	$(1,1)$	$(4,\underline{2})$
z	$(\underline{2},7)$	$(3,5)$

Ce jeu n'est pas résoluble par le procédé PEISSD.

Les équilibres de Nash de ce jeu sont (y, D) et (z, A) qui ne sont pas des équilibres par PEISSD.

Exemple 48. On reprend l'exemple 29 du Chapitre 1, donné par le tableau suivant :

	A	B	C
x	$(11,11)$	$(5,10)$	$(5,12)$
y	$(6,7)$	$(9,4)$	$(4,5)$
z	$(5,5)$	$(9,2)$	$(\underline{6},\underline{8})$

Ce jeu a une solution par le procédé PEISSD : (z, C) . On vérifie facilement que c'est aussi un équilibre de Nash du jeu.

Chapitre 3

Équilibre de Nash dans les SVM

3.1 Introduction

Les machines à vecteurs de support, ou SVM (Support vector machines) sont une méthode relativement récente. Elles sont introduites par **Vladimir Vapnik**, **Bernhard Boser** et **Isabelle Guyon** en 1992. Les SVM sont un ensemble de technique de classification supervisée destinées à résoudre des problèmes de classification (c-à-d trier des individus en fonction de leurs caractéristiques) et des problèmes de discrimination à deux classes (dans lequel on tente de déterminer la classe à laquelle appartient un individu parmi deux choix possibles).

Pour ce faire, on utilise les caractéristiques connues de cet individu. Ces n caractéristiques sont représentées par un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$. La classe à laquelle appartient l'individu est représentée par $y \in \{-1, 1\}$, où une des classes possible est représentée par 1 et l'autre par -1 . Donc le problème de cette classification c'est de trouver y en se servant de x .

Dans ce travail, on s'intéresse à la classification supervisée qui utilise un ensemble de données pour le quelles le classement est déjà connu et s'en serve pour construire une règle qui permet d'effectuer une bonne classification, cet ensemble est appelé ensemble d'apprentissage, et la règle trouvée doit être la plus générale possible.

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques notions de bases sur les SVM, le problème de marge souple et sa reformulation en utilisant l'équilibre de Nash.

3.2 Notions de base de SVM

Définition 49. (*Ensemble d'apprentissage*)

C'est un ensemble de données pour lesquelles le classement est déjà connu. Il sert pour construire une règle qui permet d'effectuer une bonne classification des données.

On définit l'ensemble d'apprentissage de l données de la forme

$$(x_i, y_i) \in X \times \{-1, 1\}, \quad (i = 1, \dots, l).$$

(souvent $X = \mathbb{R}^n$).

On considère un ensemble d'apprentissage $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^n \times \{-1, 1\}$, $(i = 1, \dots, l)$. Dans un problème de classement à deux classes, le but est de construire une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui permet de prédire si un nouvel exemple $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ appartient à la classe +1 ou à la classe -1.

On cherche alors une "surface de séparation" $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que si $f(x) > 0$ alors x est affecté à la classe +1 et si $f(x) < 0$ alors x est affecté à la classe -1.

Définition 50. (*Hyperplan séparateur*)

On appelle hyperplan séparateur tout hyperplan qui sépare les classes et qui est représenté sous la forme : $W \cdot \mathbf{x} + b = \sum_{i=1}^n w_i x_i + b = 0$ (noté aussi $W^T \mathbf{x} + b$), où $W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des coefficients de l'hyperplan et $b \in \mathbb{R}$ un scalaire appelé le biais (W est le vecteur orthogonal à l'hyperplan et b est le déplacement par rapport à l'origine).

On dira d'un tel plan qu'il sépare les données ou un hyperplan séparateur.

Définition 51. On dit que les données sont **linéairement séparables** s'il existe un hyperplan $W \cdot \mathbf{x} + b = 0$ tel que :

$W \cdot \mathbf{x} + b > 0$ pour tout \mathbf{x} appartenant à la **classe 1**, et

$W \cdot \mathbf{x} + b < 0$ pour tout \mathbf{x} appartenant à la **classe -1**,

avec $W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des coefficients de l'hyperplan et $b \in \mathbb{R}$ est un scalaire appelé le biais.

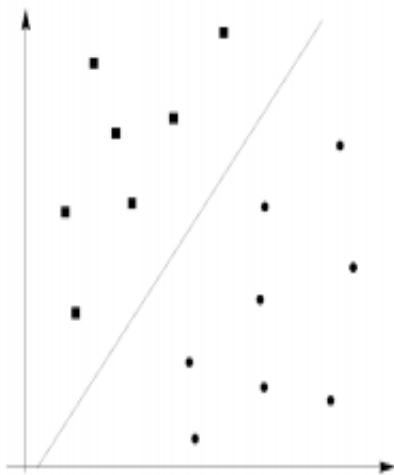


FIGURE 3.1 – Des données linéairement séparables

On suppose que les données d'apprentissage sont linéairement séparables, c'est à dire qu'il existe un hyperplan qui sépare les données sans erreur. Trouver la règle permettant de classer les données de l'ensemble d'apprentissage est donnée comme suit. On prend l'hyperplan séparateur, puis on classe les données selon le côté de l'hyperplan où elles se trouvent.

Soit $W \cdot \mathbf{x} + b$ un hyperplan séparateur. On utilise la fonction *indicatrice* pour effectuer la classification des données par rapport au coté de l'hyperplan où elles se trouvent

$$\text{Classe}(x) = \text{signe}(W \cdot \mathbf{x} + b),$$

avec

$$\text{signe}(W \cdot \mathbf{x} + b) = \begin{cases} -1, & \text{si } W \cdot \mathbf{x} + b < 0 \\ 0, & \text{si } W \cdot \mathbf{x} + b = 0 \\ 1, & \text{si } W \cdot \mathbf{x} + b > 0 \end{cases}$$

Grâce à la fonction indicatrice, on constate qu'il suffit de trouver un hyperplan qui sépare les données pour déterminer une règle permettant de les classer.

Cependant, si les données sont linéairement séparables, il existe une infinité d'hyperplans qui peuvent servir de séparateurs. L'idée des SVM est de choisir le meilleur hyperplan, celui qui donnera la règle qui se généralisera le mieux à d'autres données que celles de l'ensemble d'apprentissage.

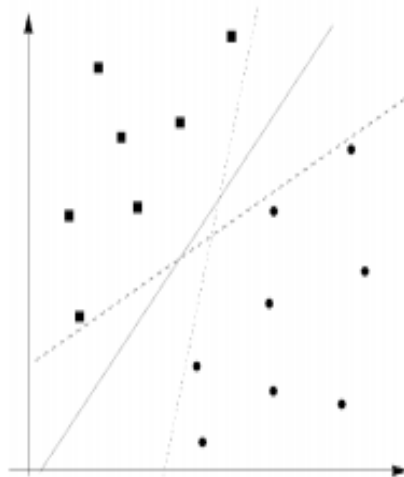


FIGURE 3.2 – Il existe une infinité d'hyperplan pouvant séparer les données

Afin de déterminer ce qui caractérise le meilleur hyperplan, introduisons le concept de marge.

3.2.1 Marge et hyperplan canonique

Définition 52. La marge d'un hyperplan est la distance entre l'hyperplan et la données la plus proche.

Autrement dit, si la distance euclidienne entre un point \mathbf{x} et l'hyperplan $W \cdot \mathbf{x} + b = 0$ est notée par $d(\mathbf{x}, W, b)$ alors la marge M est définie par

$$M = \min\{d(\mathbf{x}_i, W, b), i = 1, \dots, l\}$$

où les x_i sont les données de l'ensemble d'apprentissage.

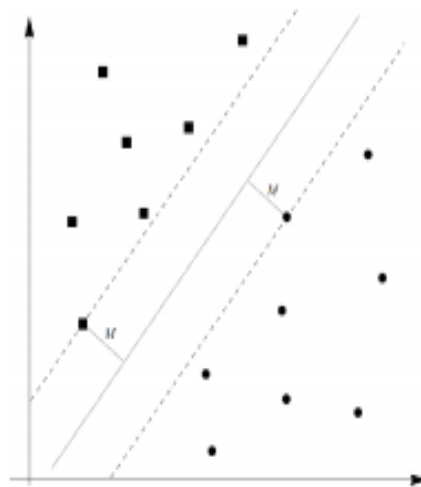


FIGURE 3.3 – La marge

Le concept des SVM est de trouver l'hyperplan qui aura la meilleure généralisation. Dans le cas où les données sont linéairement séparables, elles (les SVM) trouvent l'hyperplan séparateur avec la plus vaste marge possible.

Le problème de trouver l'hyperplan avec la marge maximale est mal posé, car il existe une infinité de manières différentes d'écrire le même hyperplan.

On suppose que $W \cdot \mathbf{x} + b = 0$ est un hyperplan de marge maximale.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Alors, l'hyperplan $\lambda W \cdot \mathbf{x} + \lambda b = 0$ est le même hyperplan et sépare les données car λ est positif. Il correspond aussi à l'hyperplan de marge maximale, mais il possède un vecteur des coefficients et un biais différents (si $\lambda \neq 1$).

L'infinité de manières d'écrire la solution du problème de recherche de l'hyperplan avec la plus vaste marge complique sa résolution. A fin de rendre le problème bien posé, nous allons introduire le concept d'hyperplan canonique.

Définition 53. On dit qu'un hyperplan $W \cdot \mathbf{x} + b = 0$ est canonique si

$$\min\{|W \cdot \mathbf{x}_i + b|, \quad i = 1, \dots, l\} = 1.$$

où les \mathbf{x}_i sont les données de l'ensemble d'apprentissage.

Ce minimum correspond aux données qui sont directement sur la marge.

Remarque 54. — Tout hyperplan séparateur peut s'écrire sous forme canonique.

- Chaque hyperplan canonique s'écrit d'une manière unique.
- Il n'existe qu'un seul hyperplan canonique pour lequel la marge est maximale.

Trouver l'hyperplan

La marge d'un hyperplan canonique est donnée par :

$$M = \frac{1}{\|W\|}$$

avec $\|W\| = \sqrt{w_1^2 + \dots + w_n^2}$. On voit que, plus $\|W\|$ est petite, plus la marge de l'hyperplan canonique correspondant est grande. Ainsi, pour trouver le meilleur hyperplan séparateur il faut trouver celui qui respecte les conditions d'un hyperplan canonique et pour lequel $\|W\|$ est minimale. La recherche du meilleur hyperplan peut s'écrire sous la forme du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{minimiser } \|W\| \\ \text{S.C. } y_i(W \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, l. \end{cases}$$

Les contraintes $y_i(W \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1, i = 1, \dots, l$ assurent que l'hyperplan sépare les données correctement, et qu'il est canonique.

En effet, $y_i(W \cdot \mathbf{x}_i + b) > 0$ si et seulement si $\text{signe}(W \cdot \mathbf{x}_i + b) = \text{signe}(y_i)$, donc si et seulement si \mathbf{x}_i est du bon côté de l'hyperplan. Ainsi, l'hyperplan séparent les données.

Ensuite, $y_i(W \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1$ assure que pour toutes les données qui ne sont pas sur la marge, $|W \cdot \mathbf{x}_i + b| > 1$ et que $|W \cdot \mathbf{x}_i + b| = 1$ pour les données qui sont sur la marge, donc que l'hyperplan est canonique.

Nous avons donc formulé un problème d'optimisation dont la solution optimale est l'hyperplan canonique séparant les données avec la plus vaste marge possible.

Comme $\min \|W\| = \min \sqrt{W \cdot W}$, donc minimiser $\|W\|$ est équivalent à minimiser $W \cdot W$ et aussi minimiser $W \cdot W$ est équivalent à minimiser $\frac{1}{2} W \cdot W$. Par conséquent, on obtient le

problème d'optimisation, équivalent au précédent, qui est sous la forme suivante :

$$\text{minimiser } \frac{1}{2}W.W$$

$$S.C. \quad y_i(W.\mathbf{x}_i + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, l.$$

On note ce problème par le problème primale.

Propriétés 55. *La fonction $f(W) = W.W = w_1^2 + \dots + w_n^2$ est une fonction strictement convexe. Ceci assure qu'il n'y a pas de minimum relatif et qu'il n'existe qu'une unique solution optimale.*

Représentation duale

Nous allons écrire le problème duale du problème primale. Commençons par écrire le Lagrangien. Pour ce faire, nous allons réécrire les contraintes comme suit :

$$-(y_i(W.\mathbf{x}_i + b) - 1) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

La fonction lagrangienne du problème dual est donnée par :

$$L(W, b, \alpha) = \frac{1}{2}W.W - \sum_{i=1}^l \alpha_i(y_i(W.\mathbf{x}_i + b) - 1).$$

Avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, l$, sont les multiplicateurs de K-K-T pour les contraintes.

La fonction objectif du problème dual correspond à la valeur minimale du lagrangien pour un α donné. Ce minimum correspond aux conditions d'optimalités de K-K-T, qui est le point où la dérivée du lagrangien par rapport aux variables du primale est nulle.

Donc, d'après les conditions d'optimalités de K-K-T on a :

$$\frac{\partial L}{\partial W} = W - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i = 0 \Rightarrow W = \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0$$

Implique que le Lagrangien minimal en fonction des variables duales est :

$$\min_W L(W, b, \alpha) = \frac{1}{2}W.W - \sum_{i=1}^L \alpha_i(y_i(W.\mathbf{x}_i + b) - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^l \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j.$$

Donc, le problème dual est :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } \sum_{i=1}^l \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \\ \text{S.C. } \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0. \\ \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, l. \end{cases}$$

La solution de ce problème sera un vecteur $\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_l^*)$, alors qu'on cherche l'équation d'hyperplan qu'il faut pour classer les données à l'aide de la fonction indicatrice :

$$\text{Classe}(\mathbf{x}) = \text{signe}(W \cdot \mathbf{x} + b).$$

Puisque $W = \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i$. Donc, on peut réécrire la fonction indicatrice sous la forme suivante :

$$\text{Classe}(\mathbf{x}) = \text{signe}\left(\sum_{i=1}^l (\alpha_i y_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}) + b\right).$$

Comme l'hyperplan est canonique, et d'après les contraintes du problème primale, si une donnée x_m se trouve sur la marge, alors

$$y_m(W \cdot \mathbf{x}_m + b) = 1$$

Donc,

$$b = \frac{1}{y_m} - W \cdot \mathbf{x}_m = y_m - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_m,$$

puisque $y_m \in \{-1, 1\}$.

3.2.2 Vecteurs de support

La fonction $W \cdot \mathbf{x}$ est une fonction convexe continue et dérivable, et les contraintes $-(y_i(W \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1) \leq 0$, $i = 1, \dots, l$ sont des fonctions affines définie sur \mathbb{R}^n , alors la solution optimale trouvée respecte les conditions de K-K-T.

En particulier, elle respecte la condition complémentaire de K-K-T. C'est-à-dire

$$\alpha_i^* (y_i(W^* \cdot \mathbf{x}_i + b^*) - 1) = 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

Où α^* est la solution du problème dual, et (W^*, b^*) est la solution du problème primale. Cette condition implique que si $(y_i(W^* \cdot \mathbf{x}_i + b^*) - 1) \neq 0$, alors $\alpha_i = 0$.

Par conséquent, α_i est non nul si et seulement si $(y_i(W^*x_i + b^*) - 1) = 0$ ce qui est équivalent à $y_i(W^*x_i + b^*) = 1$. Or, les seuls points où $y_i(W^*x_i + b^*) = 1$ sont les points qui sont sur la marge. Ces points sont appelés les vecteurs de support. Ils présentent les points utiles pour déterminer l'hyperplan.

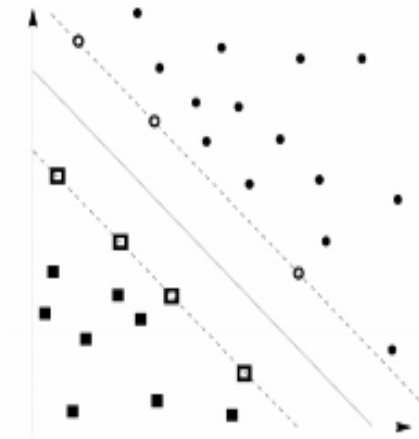


FIGURE 3.4 – Les vecteurs de support

3.2.3 Marges souples

En pratique, les données sont rarement parfaites. Il y a souvent du "bruit", c-à-d des données qui sont mal classées, par un modèle qui est toutefois excellent en général, et les deux classes se retrouvent mélangées autour de l'hyperplan de séparation. Pour gérer ce type de problème on utilise une technique dite de marge souple, qui tolère les mauvais classements :

Rajouter des variables de relâchement des contraintes ξ_i ,

Pénaliser ces relâchements dans la fonction objectif.

Définition 56. *On dit qu'une donnée est du mauvais côté de la marge si elle est mal classée ou si sa distance par rapport à l'hyperplan séparateur est plus petite que la marge.*

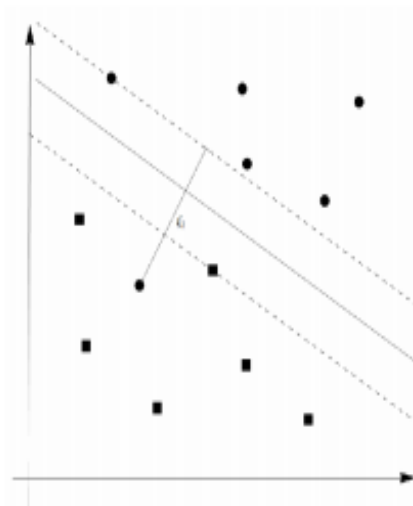


FIGURE 3.5 – La marge souple

La technique de marge souple, proposée par **Corinna Cortes et Vladimir Vapnik** en 1995, permet de tolérer les mauvais classements. Elle cherche l'hyperplan séparateur qui minimise le nombre d'erreurs grâce à l'introduction de variables d'écarts ξ_i .

L'idée est de modéliser les erreurs potentielles par des variables d'écart positives ξ_i associées aux observations (\mathbf{x}_i, y_i) , $i = 1, \dots, l$. Ce qui revient à attribuer à chaque donnée x_i une valeur ξ_i qui représente à quel point la donnée est éloignée d'un bon classement, puis de tenter de minimiser la somme des ξ_i .

Nous avons donc deux situations :

Pas d'erreur : $y_i(W \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1 \implies \xi_i = 0$.

Erreur : $y_i(W \cdot \mathbf{x}_i + b) < 1 \implies \xi_i = 1 - y_i(W \cdot \mathbf{x}_i + b) > 0$.

On associe à cette définition une fonction coût appelée "coût charnière"

$$\xi = \max(0, 1 - y_i(W \cdot \mathbf{x}_i + b))$$

Ainsi, au lieu d'imposer

$$y_i(W \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1, i = 1, \dots, l$$

ce qui oblige les données à être bien classées, les contraintes seront :

$$y_i(W \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, l; \quad \xi_i \geq 0.$$

Remarque 57. Une donnée est du mauvais côté de la marge si ξ_i est non nul.

Ainsi, notre objectif est de maximiser la marge en minimisant la somme des ξ_i .

Donc, le problème de marge souple est donné par :

$$\begin{cases} \min_{W,b,\xi} \frac{1}{2} \| W \|^2 + C \sum_{i=1}^l \xi_i \\ S.C. \quad y_i(W^T \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1 - \xi_i \\ \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, l \end{cases}$$

où $C > 0$ est une constante qui représente la pénalité d'avoir des données mal classées. Elle est appelée variable de pénalisation des points mal classés. Lorsque C est très élevée, il y aura très peu de données mal classées, alors qu'il y en aura plus pour une valeur plus faible de cette constante. Le choix de C a une grande influence sur le modèle. En pratique, plusieurs modèles sont souvent construits, avec différentes valeurs de C , puis le meilleur est choisi.

Les variables ξ_i s'appellent variables ressort (anglais : slack variables).

Représentation duale

La fonction lagrangienne du problème est donnée par :

$$L(W, b, \xi_i, \alpha, \beta) = \frac{1}{2} \| W \|^2 + C \sum_{i=1}^l \xi_i - \sum_{i=1}^l \alpha_i (y_i(W \cdot \mathbf{x}_i + b) + \xi_i - 1) - \sum_{i=1}^l \beta_i \xi_i,$$

Avec α et β sont les multiplicateurs de K-K-T pour les contraintes.

Les conditions d'optimalités de K-K-T donnent :

1. $\frac{\partial L}{\partial W} = W - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i = 0 \Rightarrow W = \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i = 0$;
2. $\frac{\partial L}{\partial \xi_i} = C - \alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow C = \alpha_i + \beta_i$;
3. $\frac{\partial L}{\partial b} = - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0$.

On obtient $W = \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i$ et $\sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0$ et $C = \alpha_i + \beta_i$ pour tout $i = 1, \dots, l$.

On utilise ces équations pour écrire le lagrangien en fonctions des variables duales

$$\begin{aligned} L(W, b, \xi_i, \alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \| W \|^2 + C \sum_{i=1}^l \xi_i - \sum_{i=1}^l \alpha_i (y_i(W \cdot \mathbf{x}_i + b) + \xi_i - 1) - \sum_{i=1}^l \beta_i \xi_i \\ &= \sum_{i=1}^l \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j). \end{aligned}$$

Il s'agit de la fonction objectif du problème dual pour la marge souple.

Rappelons que dans le problème dual, les multiplicateurs de Lagrange qui sont associés

à des contraintes d'inégalités doivent être supérieurs ou égaux à zéro. Par conséquent, $\alpha_i \geq 0$ et $\beta_i \geq 0$.

Toutefois, β_i n'apparaît pas dans le problème dual, mais on sait que $C - \alpha_i - \beta_i = 0$. La contrainte $\beta_i \geq 0$ s'écrit donc aussi $C - \alpha_i \geq 0$. Ceci implique que $\alpha_i \leq C$.

Le problème dual est donné par

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^l \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \\ S.C. \quad \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0 \\ 0 \leq \alpha_i \leq C; \quad i = 1, \dots, l. \end{cases}$$

Remarque 58. *Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker tiennent toujours dans le cas de la marge souple. Ainsi, d'après la condition complémentaire, pour la solution optimale, les égalités suivantes sont vérifiées :*

$$\alpha_i (y_i (W \cdot \mathbf{x}_i + b) + \xi_i - 1) = 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, l;$$

$$\beta_i \xi_i = (C - \alpha_i) \xi_i = 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

Ceci implique que si $\xi_i \neq 0$, alors $C - \alpha_i = 0$, et donc $C = \alpha_i$. De plus, si un point est tel que $\xi_i \neq 0$, alors il est du mauvais côté de la marge, ce qui découle directement du rôle de ξ_i dans le problème d'optimisation. À l'opposé, tous les points pour lesquels $\xi_i = 0$ sont du bon côté de la marge, et ainsi nécessairement bien classés.

D'autre part, si, pour une certaine donnée, on a $0 < \alpha_i < C$, alors celle-ci est exactement sur la marge. En effet, on a alors $0 < \alpha_i < C$, $\alpha_i \neq C$, et donc il faut que $\xi_i = 0$ pour que $(C - \alpha_i) \xi_i = 0$. De plus, $\alpha_i \neq 0$, ce qui implique que $y_i (W \cdot \mathbf{x}_i + b) + \xi_i - 1 = 0$ afin de respecter l'égalité $\alpha_i (y_i (W \cdot \mathbf{x}_i + b) + \xi_i - 1) = 0$.

Comme $\xi_i = 0$, il s'en suit que

$$y_i (W \cdot \mathbf{x}_i + b) = 1$$

et donc que x_i est directement sur la marge.

Enfin, les points pour lesquels $\xi_i = 0$ et $y_i (W \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1$ ont un α_i nul, afin de respecter l'égalité $\alpha_i (y_i (W \cdot \mathbf{x}_i + b) + \xi_i - 1) = 0$.

Les points directement sur la marge sont appelés vecteurs de support libres (free support vectors), ou encore vecteurs de support non-bornés (unbounded support vectors). Les points pour lesquels $\alpha_i = C$ sont quant à eux appelés vecteur de support bornés (bounded support vectors). Ici encore, les vecteurs de support sont les seuls point qui sont vraiment important pour déterminer l'hyperplan optimal, puisque ce sont les seuls points pour lesquels $\alpha_i \neq 0$.

3.3 Marge souple et Équilibre de Nash

3.3.1 Position du problème

On considère un ensemble de données d'apprentissage $\{\mathbf{x}_i \in R^n, i = 1, \dots, l\}$, et son ensemble correspondant de labels $\{y_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \dots, l\}$ avec l est le nombre de points d'apprentissage.

On considère le problème dual dans le cas de marge souple.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^l \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \\ S.C. \\ \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0 \\ 0 \leq \alpha_i \leq C; \quad i = 1, \dots, l. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Qu'on peut écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^l \alpha_i (\alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) - \sum_{i=1}^l \alpha_i \\ S.C. \\ \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0 \\ 0 \leq \alpha_i \leq C; \quad i = 1, \dots, l. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Dans la dualité (voir D.G. Luenberger, 1997), la distance minimale d'un point à un ensemble convexe est le maximum des distances du point aux hyperplans séparant le point et l'ensemble convexe. Donc, le problème dual (3.2) peut s'exprimer comme la minimisation de la distance entre les enveloppes convexes formées par les points de chaque classe.

Ainsi, ce problème de minimisation de la distance au carré entre les enveloppes convexes se formule comme suit (N.Couellan, 2017).

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha} \frac{1}{2} \|\tilde{x} - \bar{x}\|^2 \\ S.C. \\ \tilde{x} = \sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i \mathbf{x}_i, \\ \bar{x} = \sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i \mathbf{x}_i \\ \sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i = 1, \\ \sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i = 1, \\ \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, l. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

avec $S_{-1} = \{i \setminus y_i = -1, i = 1, \dots, l\}$ et $S_{+1} = \{i \setminus y_i = +1, i = 1, \dots, l\}$.

Proposition 59. (N. Couellan, 2017)

Si α est solution de problème de minimisation de la distance (3.3), alors α est solution de problème duale (3.2).

Démonstration. Soit α solution du problème (3.3), alors elle satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x} = \sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i \mathbf{x}_i, \\ \bar{x} = \sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i \mathbf{x}_i \\ \sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i = 1, \\ \sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i = 1, \\ \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, l. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Comme,

$$\sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i \mathbf{x}_i = - \sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i y_i \mathbf{x}_i, \text{ car } S_{-1} = \{i \setminus y_i = -1, i = 1, \dots, l\}$$

et

$$\sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i \mathbf{x}_i = \sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i y_i \mathbf{x}_i, \text{ car } S_{+1} = \{i \setminus y_i = +1, i = 1, \dots, l\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \frac{1}{2} \|\tilde{x} - \bar{x}\|^2 &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i \right)^T \left(\sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i &= \sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i y_i + \sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i y_i \\ &= - \sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i + \sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i \\ &= -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Donc, le problème (3.3) est équivalent au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j \\ S.C. \\ \sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i = 1, \\ \sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i = 1, \\ \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0, \\ \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, l. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Comme $\sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i = 1$ et $\sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^l \alpha_i = 2$.

C'est une constante qui peut être soustraite à la fonction objectif. Donc α est solution de problème

$$\begin{array}{l} \min_{\alpha} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j - \sum_{i=1}^l \alpha_i \\ S.C. \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, l. \end{array}$$

qui est le problème duale (3.2). □

3.3.2 Reformulation en utilisant l'équilibre de Nash

Dans cette section, nous allons présenter une approche donnée par N. Couellan (2017). On considère deux joueurs : Le joueur 1 associé à la classe +1, et le joueur -1 associé à la classe -1.

L'objectif de chaque joueur est de minimiser la distance la plus proche entre sa classe et l'hyperplan de séparation.

Si les deux joueurs interagissent simultanément, ils tenteront tous les deux de minimiser la distance à l'hyperplan d'une manière non coopérative.

Donc le joueur +1 tente de minimiser la distance entre la classe +1 et l'hyperplan séparateur, et le joueur -1 tente de minimiser la distance entre la classe -1 et l'hyperplan séparateur.

La distance géométrique entre un point $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ et un hyperplan défini par l'équation ($W^T \mathbf{x} + b = 0$), est donnée par

$$\frac{|W^T \mathbf{z} + b|}{\|W\|}.$$

Dans les SVM, W définissant l'hyperplan est exprimé par les variables duales α_i par la relation $W = \sum_{i=1}^{i=l} y_i \alpha_i \mathbf{x}_i$ (voir la section 3.2.4).

Donc, le joueur 1 résout le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha, W} \frac{|W^T \tilde{x}|}{\|W\|} \\ S.C. \\ \tilde{x} = \sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i \mathbf{x}_i, \\ \sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i = 1, \\ W = \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i, \\ \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, l \end{array} \right. \quad (3.6)$$

et le joueur -1 résout le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha, W} \frac{|W^T \bar{x}|}{\|W\|} \\ S.C. \\ \bar{x} = \sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i \mathbf{x}_i, \\ \sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i = 1, \\ W = \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i, \\ \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, l. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

En utilisant la distance fonctionnelle $|W^T x|$ au lieu de la distance géométrique $\frac{|W^T x|}{\|W\|}$, et en substituant l'expression de W et \tilde{x} dans le problème (3.6), formulez un problème équivalent

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha} |(\sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i)^T (\sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i \mathbf{x}_i)| \\ S.C. \\ \sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i = 1, \\ \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, l. \end{array} \right.$$

Aussi le problème (3.7), pourrait être écrit respectivement sous la forme équivalente.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha} | (\sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i)^T \sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i \mathbf{x}_i | \\ S.C. \\ \sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i = 1, \\ \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, l. \end{array} \right.$$

Pour se conformer aux notations standard de la théorie des jeux, ces deux problèmes sont reformulés dans la forme générale.

Problème d'équilibre de Nash (PEN).

Trouver $\alpha^{-v} \in S_{-v}(\bar{\alpha}^{-v})$ pour $v \in \{-1, 1\}$. Ou v désigne un joueur, et $-v$ son adversaire et $S_v(\bar{\alpha}^{-v})$ est l'ensemble solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha^v} \theta_v(\alpha^v, \alpha^{-v}) \\ \alpha^v \in X^v(\alpha^v). \end{array} \right.$$

avec $X_v(\alpha^v) = \{\alpha^v / \sum_{i \in I_v} \alpha_i^v = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_i^v \geq 0, \forall i \in I_v\}$,

$I_v = \{i / y_i = v\}$.

$$\theta_v(\alpha^v, \alpha^{-v}) = | (\sum_{j \in I_{-v}} y_j \alpha_j^{-v} \mathbf{x}_j + \sum_{i \in I_v} y_i \alpha_i^v \mathbf{x}_i)^T (\sum_{i \in I_v} \alpha_i^v \mathbf{x}_i) |.$$

Dans ce qui suit, nous allons illustrer cette formulation du problème avec des exemples simples.

Exemple 60. *Considérons 3 points de données : $x_1 = (-1, 0)^T$, $x_2 = (0, 1)^T$, et $x_3 = (1, 0)^T$ avec les étiquettes correspondantes : $y_1 = +1$, $y_2 = -1$ et $y_3 = +1$.*

*Le problème est de trouver l'hyperplan séparateur en utilisant la formulation **PEN** ci-dessus peut être écrit comme suit :*

Joueur +1 :

$$\theta_{+1}(\alpha) = | \begin{pmatrix} \alpha_3 - \alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha_3 - \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} | = (\alpha_3 - \alpha_1)^2$$

$$X_{+1}(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_3 / \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_i \geq 0; \quad i = 1, 2, 3\}.$$

Joueur -1 :

$$\theta_{-1}(\alpha) = | \begin{pmatrix} \alpha_3 - \alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} | = \alpha_2^2$$

$$X_{-1}(\alpha) = \{\alpha_2 / \alpha_2 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_i \geq 0; \quad i = 1, 2, 3\}.$$

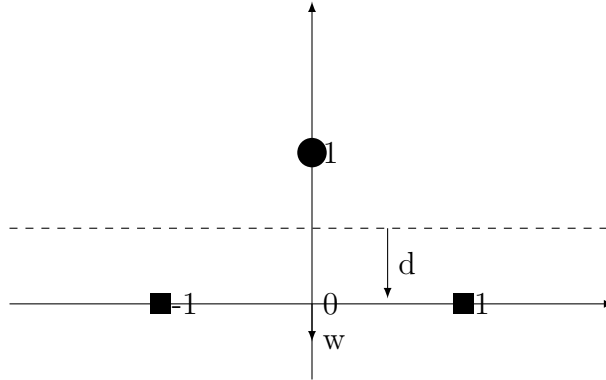
3.3. MARGE SOUPLE ET ÉQUILIBRE DE NASH

Donc, la solution de ce problème du **PEN** est $\alpha = (1/2, 1, 1/2)^T$.

Ce qui conduit à $W = \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i = (0, -1)^T$.

Et la distance $d = \frac{1}{2} \left\| \sum_{i \in S_{-1}} \alpha_i x_i - \sum_{i \in S_{+1}} \alpha_i x_i \right\| = \frac{1}{2}$.

La figure suivante illustre la séparation résultante :



Exemple 61. Considérons 4 points de données :

$x_1 = (-1, 0)^T$, $x_2 = (0, 1)^T$, et $x_3 = (1, 0)^T$, $x_4 = (0, -1)^T$, avec les étiquettes correspondantes $y_1 = -1$, $y_2 = +1$ et $y_3 = +1$, $y_4 = -1$.

Le problème est de trouver l'hyperplan séparateur en utilisant la formulation **PEN** ci-dessus peut être écrit comme suit.

Joueur -1 :

$$\theta_{-1}(\alpha) = \left| \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_4 \end{pmatrix} \right| = \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_4(\alpha_2 + \alpha_4).$$

$$X_{-1}(\alpha) = \{ \alpha_1, \alpha_4 / \alpha_1 + \alpha_4 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_i \geq 0; i = 1, 2, 3, 4 \}.$$

Joueur +1 :

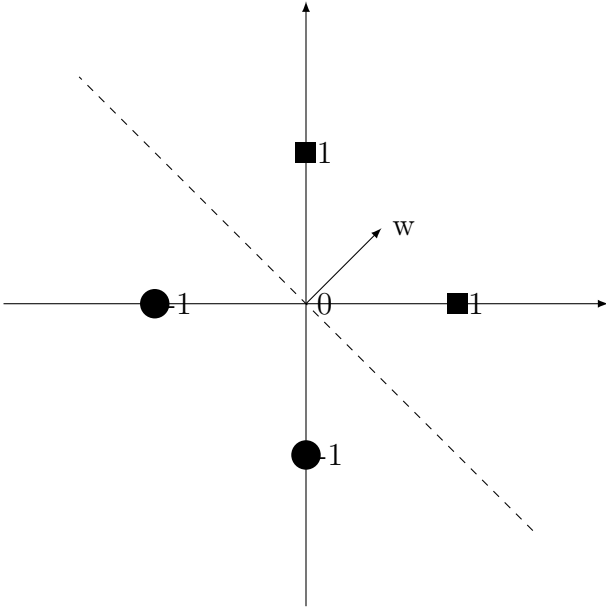
$$\theta_{+1}(\alpha) = \left| \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right| = \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_2(\alpha_2 + \alpha_4).$$

$$X_{+1}(\alpha) = \{ \alpha_2, \alpha_3 / \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_i \geq 0; i = 1, 2, 3, 4 \}.$$

Ce **PEN** a plusieurs solutions. L'une de ces solutions est donnée par $\alpha = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^T$.

Le vecteur W résultant normal à l'hyperplan est alors $W = (1, 1)^T$ et la distance $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La figure suivante illustre la séparation résultante :



Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à une technique de classification supervisée la "marge souple" par partitionnement à base de la théorie des jeux. Nous avons en premier lieu exposé dans le premier chapitre un rappel sur la théorie des jeux ainsi que quelques classes de jeux. Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux jeux sous formes normale.

Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacré à un concept de solution pour un jeu sous forme normale, qui est le concept d'équilibre de Nash. Ainsi, nous avons étudié l'existence de cet équilibre et nous avons présenté quelques une de ses propriétés.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons expliqué le lien entre la classification supervisée à deux classes et les problèmes d'équilibres de Nash (NEP). Essentiellement, nous avons vu que dans le cas des données linéairement séparables, il est nécessaire de trouver un hyperplan séparateur pour séparer les données et les classer.

Pour déterminer l'hyperplan séparateur, ce problème a été modélisé sous forme d'un jeu à deux joueurs sous forme normale, ainsi à chaque joueurs, on a associé une classe de sorte que chaque joueur a pour objectif de minimiser la distance entre sa classe et l'hyperplan de séparation. Autrement dit, ce jeu peut être interprété comme si chaque joueur essaye de tirer l'hyperplan plus près de lui-même.

Cependant, l'application de la théorie des jeux à l'apprentissage supervisé n'a pas vraiment été étudiée, peu de travaux ont été réalisés. Le travail présenté dans ce mémoire, peut avoir un impact sur la suite des travaux de recherches à entreprendre dans l'avenir.

Bibliographie

- [1] ACHEMINE Farida, Etude d'un jeu à deux personnes sous forme normale avec paramètres indéterminés dans le cas de l'ignorance totale. THESE de magister en Mathématiques option Recherche Operationnelle et Optimisation (Université Mouloud MAAMERI TIZI-OUZOU), (2001).
- [2] Couellan N., A note on supervised classification and Nash-equilibrium problems. RAIRO-Opers , 51, 329–341 (2017).
- [3] DJELLOUL Naima Epouse LATROCH, Optimisation Quadratique pour les Machines à Vecteurs de Support SVMs). THESE de Doctorat spécialité Optimisation, Ondelettes et Calcul Fractionnaire (Université de Mostaganem), (2018).
- [4] DJEFFAL Abdelhamid, Utilisation des méthodes Support Vector Machine (SVM) dans l'analyse des bases de données. THESE de Doctorat spécialité Informatique (Université Mohamed Khider - Biskra), (2012).
- [5] FAHEM Karima, Conditions d'existence des Equilibres dans les Jeux Multicritères. Approche par l'élément maximal. THESE de doctorat en Mathématiques option Recherche Operationnelle et Optimisation (Université Mouloud MAAMERI TIZI-OUZOU) (2016).
- [6] FRANCOEUR Dominik, Machines à vecteurs de support. CaMUS 1 (2010), 7–25.
- [7] HERINGER Evelin, KRULIKOVSKI Manoel, SACHINE Mael, RIBEIRO Ademir Alves, Support Vector Machine. Universidade Federal do Parana.
- [8] KACHER Fatiha, Concepts d'équilibre pour un jeu coopératif sous forme normale ayant une structure de coalitions avec paramètres indéterminés. THESE de magister

en Mathématiques option Recherche Operationnelle et Optimisation (Université Mouloud MAAMERI TIZI-OUZOU).

- [9] Kakutani, S., A generalization of Brouwer's Fixed point theorem, Duke Mathematical Journal. Vol. 8 (3), pp. 457–459 (1941).

- [10] Luenberger D.G., Optimization by vector Space methods,1st edition. John Wiley & Sons, Inc ,New york, USA (1997).

- [11] TRISTAN Tomala, JEUX SOUS FORME NORMALE. Ceremade, Université Paris Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16.

- [12] VAPNIK Vladimir, The Nature of Statical Learning. Theory (2000).