

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA

RECHERCHE SIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI OUZOU

FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme MASTER 2

En Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

Thème

Etude expérimentale et numérique
du champ de contraintes
développé dans un contact
plan/plan en présence d'un effort
tangential

Proposé et dirigé par :

M^r : A. BILEK

Etudié par :

M^r : ZAIDI KAMEL

Promotion 2011

REMERCIEMENTS

JE TIENS À EXPRIMER MES SINCÈRES REMERCIEMENTS À MON PROMOTEUR, M^r: ALI BILEK POUR AVOIR BIEN VOULU M'ENCADRER ET POUR SES PRÉCIEUX CONSEILS ET SES REMARQUES INSTRUCTIVES ET ENRICHISSANTES.

JE TIENS À REMERCIER ÉGALEMENT TOUS CEUX QUI ONT CONTRIBUÉ À MA FORMATION.

JE REMERCIE LES RESPONSABLES DE LA BIBLIOTHÈQUE DU DÉPARTEMENT GÉNIE MÉCANIQUE POUR LEURS DISPONIBILITÉS.

DÉDICACE

JE DÉDIE CE MODESTE TRAVAIL À :

- **MES TRÈS CHERS PARENTS**
- **MES FRÈRES ET SŒURS**
- **MES AMIS**
- **TOUS LES ÉTUDIANTS DE LA PROMOTION**

Sommaire

Introduction générale

Chapitre I : Rappel sur l'élasticité linéaire

I.1 Introduction.....	1
I.2 Loi de comportement	
I.3 Equations d'équilibre	2
I.3.1 Equations d'équilibre en coordonnées cartésiennes	
I.4 Loi de comportement	5
I.5 La loi de Hooke	6
I.5.1 Cas de l'état plan de contrainte	8
I.6 Représentation de quelque cas particulier avec le Cercle de Mohr	9
I.6.1 Traction ou compression hydrostatique	
I.6.2 Traction ou compression simple dans une direction	
I.6.3 Cisaillement simple.....	10
I.6.4 Etat de contrainte tri-axial de révolution	
I.6.5 Etat de contrainte plan	
I.7 Conclusion	11

Chapitre II : Théorie de photoélasticimétrie

II.1 Introduction.....	12
II.2 Photoélasticité	
II.3 Principe de la photoélasticimétrie	
II.4 Rappels sur la lumière	13
II.4.1 Onde lumineuse plane	
II.4.2 La lumière naturelle	
II.4.3 Lumière monochromatique	
II.4.4 Lumière polychromatique.....	14
II.5 La polarisation de la lumière	
II.5.1 Lumière polarisée rectilignement	
II.5.2 Lumière polarisée circulairement	15
II.6 La biréfringence	
II.6.1 La biréfringence naturelle.....	16
II.6.2 La biréfringence accidentelle (provoquée)	

II.7 Instruments de photoélasticité	17
II.7.1 Banc de photoélasticimétrie	
II.7.2 Différents types de polariscope	
II.7.3 Eléments fondamentaux du polariscope	
II.8 Différents procédés de la photoélasticimétrie	18
II.8.1 Photoélasticimétrie par transmission	
II.8.2 Photoélasticimétrie par réflexion.....	19
II.8.2.1 Fonctionnement du polariscope à réflexion	
II.8.2.2 Avantage de la photoélasticimétrie par réflexion	20
II.8.2.3 Les matériaux des revêtements	
II.9 Effet de la biréfringence sur la lumière	21
II.10 La constante de frange	23
II.11 Analyse des isoclines	
II.11.1 Elimination des isoclines	
II.12 Analyse des isochromes	
II.13 Expression analytique des isoclines et isochromes	24
II.14 Les isostatiques.....	25
II.14.1 Propriété des isostatique	26
II.15 Les compensateur	
II.16 Conclusion	
Chapitre III: Formulation du problème de contact mécanique Théorie de HERTZ	
III.1 Introduction	27
III.2 Application d'un effort normal.....	28
III.2.1 Contact sphère sur sphère et sphère sur plan	
III.2.2 Contact cylindre sur cylindre et cylindre sur plan.....	29
III.2.2.1 Distribution des contraintes	
III.2.2.2 Champ de contraintes dues aux pressions Hertziennes	31
III.2.3 distribution des contraintes dans le contact plan sur plan	32
III.2.3.1 Formulation du problème du contact plan sur plan	
III.2.3.2 Représentation de la distribution des isostatiques.....	34
III.3 Application d'un effort normal et tangentiel	
III.3.1 Contact cylindre –plan en présence d'un effort tangentiel.....	35
III.4 Conclusion	36

Chapitre IV: Présentation du logiciel CASTEM 2000

IV.1 Introduction	37
IV.2 Présentation de CSTEM	
IV.3 Domaine d'utilisation	
IV.4 Mise en œuvre	
IV.4.1 Les processus élémentaires	
IV.4.2 Règles syntaxique du GIBIANE	38
IV.4.3 Les erreurs les plus fréquentes dans gibiane/castem.....	39
IV.5 Les principes de développement de CASTEM 2000	40
IV.5.1 La simplicité	
IV.5.2 L'orthogonalité des processus	
IV.5.3 La visibilité et la localité des processus	
IV.5.4 La régularité des processus	
IV.5.5 La documentation des processus	41
IV.6 Système d'unité	
IV.7 Types d'objets et principaux opérateurs	
IV.7.1 Objet de type Champ par point	42
IV.7.2 Objet de type Champ par élément	
IV.7.3 Objet de type Liste	
IV.7.4 Objet de type Evolution	43
IV.8 Procédure de résolution d'un problème avec CASTEM	
IV.8.1 Paramètres généraux	
IV.8.2 Géométrie	44
IV.8.3 Modèle de comportement	
IV.8.4 Caractéristiques des matériaux	
IV.8.5 Conditions aux limites et chargement	
IV.8.6 Résolution	45
IV.8.7 Post-traitement	
IV.9 Le maillage	
IV.9.1 Objet du maillage	
IV.10 Représentation de quelques directives	46
IV.10.1 La directive OPTI(ON)	
IV.10.2 La directive TRAC(ER)	
IV.10.3 La directive MESS(AGE)	

IV.10.4 La directive DENS(ITE)	
IV.11 Représentation de quelques opérateurs	47
IV.11.1 L'opérateur DROI(TE)	
IV.11.2 L'opérateur DALL(ER)	
IV.11.3 L'opérateur VOLU(ME)	
IV.11.4 L'opérateur MODE(LE)	48
IV.11.5 L'opérateur EXTR(AIRE)	
IV.11.6 L'opérateur DEFO(RME)	
IV.11.7 L'opérateur PRES(SION)	
IV.11.8 L'opérateur VECT(EUR)	
IV.11.9 L'opérateur BSIG	
IV.12 Architecture générale des programmes que nous avons établi	49
IV.13 Conclusion.....	50
Chapitre V: Partie pratique et partie numérique	
V.1 Introduction	51
V.2 Partie expérimentale	
V.2.1 Modèle utilisé	
V.2.2 Dispositif de chargement	52
V.2.3 Application de la charge	54
V.2.3.1 Effort normal	
V.2.3.2 Effort tangentiel	55
V.2.4 Analyse expérimentale des contraintes	
V.2.4.1 Application d'un effort normal	
V.2.4.1.1 Différence de contraintes principales suivant l'axe de symétrie vertical	
V.2.4.1.2 Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ clair	56
V.2.4.1.3 Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ sombre	57
V.2.4.1.4 Détermination de la différence de contraintes principales sur l'axe de symétrie vertical	
V.2.4.1.5 Visualisation des franges isoclines.....	58
V.2.4.1.6 Exploitation des isoclines.....	59
V.2.4.2 Application d'un effort tangentiel	62

V.2.4.2.1	Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ sombre	
V.2.4.2.2	Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ clair	63
V.2.4.2.3	Détermination de la différence de contraintes principales suivant l'axe vertical	
V.2.4.2.4	Isoclines obtenues expérimentalement en présence d'un effort tangentiel	65
V.3	Etude numérique	
V.3.1	Application d'un effort normal	
V.3.1.1	Les isochromes obtenues numériquement	67
V.3.1.2	Les isoclines obtenues numériquement	68
V.3.1.3	Extraction de l'effort normal appliqué	69
V.3.1.4	Extraction des valeurs de différence de contraintes suivant l'axe de symétrie vertical	70
V.3.2	Application d'un effort tangentiel	72
V.3.2.1	Les isochromes obtenues numériquement en présence d'un effort tangentiel	
V.3.2.2	Les isoclines obtenues numériquement en présence d'un effort tangentiel	73
V.3.2.3	Extraction de l'effort tangentiel appliqué	75
V.3.2.4	Extraction des valeurs de différence de contraintes suivant l'axe vertical	76
V.4	Comparaison des résultats	78
V.4.1	Comparaison des résultats obtenus en présence d'un effort normal	
V.4.1.1	Superposition et comparaison des images isochromes	
V.4.1.2	Comparaison des images isoclines	79
V.4.1.3	Superposition des courbes	80
V.4.2	Comparaison des résultats obtenus en présence d'un effort tangentiel	81
V.4.2.1	Superposition et comparaison des images isochromes	
V.4.2.2	Superposition et comparaison des images isoclines	82
V.4.2.3	Superposition des courbes en présence d'un effort tangentiel	83
V.5	Discussion des résultats	
V.5.1	Discussion des résultats obtenus en présence d'un effort normal	
V.5.2	Discussion des résultats obtenus en présence d'un effort tangentiel	84
V.6	Conclusion	85

Conclusion générale

Liste des figures

Figure I.1: Contraintes tangentielles \perp à l'axe z d'un cube élémentaire	3
Figure I.2: Réciprocité des contraintes tangentielles	4
Figure I.3 : Equilibre en translation suivant l'axe X	5
Figure I.4: l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation relative d'une éprouvette en traction simple	6
Figure I.5: cube soumis au chargement	7
Figure I.6: Représentation de Mohr pour une traction ou compression hydrostatique.....	9
Figure I.7: Représentation de Mohr pour une traction simple	9
Figure I.8: Représentation de Mohr pour un cisaillement simple.....	10
Figure I.9: Représentation de Mohr pour un état de contrainte tri-axial de révolution	10
Figure I.10: Représentation de Mohr pour un état de contrainte plan	11
Figure II.1: lumière polarisée rectilignement suivant x	15
Figure II.2: Polariscopes circulaire	15
Figure II.3: Phénomène de biréfringence naturelle	16
Figure II.4: Montage photoélastique classique	19
Figure II.5: polariscopes à réflexion.....	20
Figure II.6: Polariscopes rectilignes en champ obscur.....	21
Figure II.7: Tenseur des contraintes en un point M dans un matériau photoélastique	25
Figure II.8: tracé des isostatiques	25
Figure II.9: Compensateur BRAVAIS.....	26
Figure III.1: a)Contact sphère-sphère b) Contact sphère-plan	28
Figure III.2: Contact entre deux cylindres le long de leurs génératrices et distribution de la pression dans la zone de contact	29
Figure III.3: Contrainte cylindre sur plan.....	30
Figure III.4: Isovaleurs des contraintes principales et du cisaillement maximal.....	33
Figure III.5: Isoclines et isostatiques dans un plan semi infini	34
Figure III.6: Etat de contrainte en présence d'un effort tangentiel.....	35
Figure III.7: Contact cylindre plan en présence d'un effort tangentiel	36
Figure V.1: Représentation du modèle utilisé	51
Figure V.2 : parallélépipède en aluminium	52
Figure V.3: Représentation de contact entre les deux pièces.....	52
Figure V.4 : dispositif de chargement	53
Figure V.5 : Représentation des différentes pièces	53

Figure V.6 : Représentation de la tige d'application de la charge	54
Figure V.7 : Réseau d'isochromes sur le modèle en champ clair	56
Figure V.8: Réseau d'isochromes sur le modèle en champ sombre.....	57
Figure V.9 : Différence des contraintes principales suivant l'axe de symétrie vertical pour le contact plan/ plan obtenues expérimentalement	58
Figure V.10: Relevé des isoclines par rotation des polaroids par pas de 10 degrés.....	59
Figure V.11 : Localisation des isoclines correspondant aux directions principales.....	59
Figure V.12: Tracé des Isoclines et isostatiques pour le contact plan sur plan.....	60
Figure V.13: Isoclines et isostatiques pour le contact plan / plan	61
Figure V.14: Réseau d'isochromes sur le modèle en champ sombre en présence d'un effort tangentiel..	62
Figure V.15: Réseau d'isochromes sur le modèle en champ clair en présence d'un effort tangentiel	63
Figure V.16 : Différence des contraintes principales suivant l'axe vertical pour le contact plan / plan obtenues expérimentalement en présence d'un effort tangentiel	64
Figure V.17: Isocline à 0° en présence d'un effort tangentiel.....	65
Figure V.18: a) modèle éléments finis et la surface totale maillé b) Affinage de maillage au voisinage de la zone du contact	66
Figure V.19 : représentation de la déformée	67
Figure V.20 : Isochromes obtenues numériquement avec CASTEM	67
Figure V.21 : Isochromes obtenues avec CASTEM et traitées avec surfer	67
Figure V.22: Isoclines obtenues numériquement avec CASTEM avec un pas de 10 degrés.....	68
Figure V.23 : Isoclines obtenues numériquement et traitées avec SURFER	69
Figure V.24: Efforts élémentaires engendrés par le chargement normal.....	69
Figure V.25 : Différence des contraintes principales suivant l'axe de symétrie vertical obtenue numériquement.....	72
Figure V.26: Isochromes obtenues numériquement avec CASTEM	73
Figure V.27 : Isochromes obtenues numériquement et traitées avec SURFER	73
Figure V.28: Isoclines obtenues numériquement avec CASTEM avec un pas de 10 degré en présence d'un effort tangentiel	74
Figure V.29: Isoclines obtenues numériquement et traitées avec SURFER avec un pas de 10 degré en présence d'un effort tangentiel	74
Figure V.30: Efforts élémentaires engendrés par le chargement tangentiel	75
Figure V.31 : Différence des contraintes principales suivant l'axe vertical en présence d'un effort tangentiel obtenue numériquement	78

Figure V.32 : Superposition des isochromes relevées expérimentalement et des isochromes calculées avec CASTEM et traitées avec SURFER.....	79
Figure V.33 : Superposition de l'isocline obtenue numériquement et traitée avec Surfer avec sa correspondante obtenue expérimentalement	80
Figure V.34 : Superposition des courbes numérique et expérimentale.....	81
Figure V.35 : Superposition des isochromes relevées expérimentalement et des isochromes calculées avec CASTEM et traitées avec SURFER en présence d'un effort tangentiel.....	82
Figure V.36: Superposition des isoclines obtenues expérimentalement et numériquement à 0°	82
Figure V.37 : Superposition des courbes numérique et expérimentale en présence d'un effort tangentiel	83
Figure V.38 : déviation des franges obtenues expérimentalement.....	85
Figure V.39 : déviation des franges obtenues numériquement	85

Liste des tableaux

Tableau II.1 : L'intensité I pour les différentes configurations	23
Tableau V. 1 : Valeurs de la différence de contraintes relevées expérimentalement	57
Tableau V. 2 : Valeurs de la différence des contraintes relevées expérimentalement en présence d'un effort tangentiel	64
Tableau V.3 : Extraction de l'effort normal correspondant au déplacement imposé	70
Tableau V. 4 : Valeurs de la différence des contraintes relevées numériquement	71
Tableau V.5 : Extraction de l'effort tangentiel correspondant au déplacement imposé	76
Tableau V. 6 : Valeurs de la différence de contraintes relevées numériquement en présence d'un effort tangentiel	77

Principales notations

INDICES	UNITE	SINIFICATION
σ ou Σ	--	Tenseur des contraintes
σ_{ij}	--	Composantes du tenseur des contraintes
σ_1, σ_2 et σ_3	Mpa	Contraintes normales principales
σ_e	Mpa	Limite élastique
σ_r	Mpa	Limite à la rupture
τ	Mpa	Contrainte de cisaillement
ν	--	Coefficient de poisson
E	Mpa	Module d'élasticité longitudinal (Module de Young)
G	Mpa	Module d'élasticité transversal (module de cisaillement)
γ	%	Distorsion angulaire (ou glissement)
λ	μm	Longueur d'onde
δ		Retard relatif entre deux vibrations
μ et λ	Mpa	Coefficients de Lamé
\vec{B}	--	Vecteur induction magnétique
N	(ordre)	Ordre de frange
f	N/mm.ordre	Constante de frange

INTRODUCTION GENERALE

Pour transmettre une puissance ou un mouvement on utilise généralement des systèmes mécaniques composés de plusieurs pièces mécaniques. L'usure entre les différentes pièces en contact est due à différents facteurs : les charges appliquées, les états de surfaces, les couples transmis... etc. Il est donc très important de connaître les contraintes engendrées par les charges appliquées et les couples transmis.

Les champs de contraintes développés dans les structures peuvent être étudiés à l'aide de trois méthodes : analytique, expérimentale et numérique. Parfois la méthode analytique est très complexe, la solution numérique sera alors comparée avec les résultats expérimentaux.

Il existe plusieurs méthodes pour analyser les contraintes expérimentalement, parmi ces méthodes on peut citer la photoélasticimétrie, la méthode du Moiré, la méthode du vernis craquelant ...etc.

Pour ce présent travail nous avons choisit la photoélasticimétrie pour l'étude expérimentale et le logiciel CASTEM 2000 pour l'étude numérique.

Le but de ce travail est de déterminer les champs des contraintes développés dans un contact plan sur plan en présence d'un effort tangentiel principalement au voisinage de la zone du contact.

Notre travail est subdivisé en six chapitres.

Le premier chapitre à été consacré à quelque rappel sur l'élasticité linéaire. La théorie de l'élasticité linéaire est à l'origine de la résolution analytique des problèmes posés en calcul des structures, cette théorie suppose que les matériaux sont homogènes, élastiques et isotropes.

Dans le deuxième chapitre on présente quelques rappels de la photoélasticimétrie, méthode expérimentale non destructive basée sur la biréfringence accidentelle. Elle permet d'obtenir un champ complet des contraintes appliqués au modèle étudié en exploitant les réseaux des franges isochromes et isoclines.

Le troisième chapitre détaille la théorie de HERT établie en 1881 ; cette théorie permet, sous certaines conditions, de déterminer la dimension de l'aire de contact ainsi que la distribution des contraintes et des déformations.

Une présentation du logiciel CASTEM 2000 est donnée au quatrième chapitre, où nous avons exposé les principales règles syntaxiques du langage, ainsi que quelques directives et opérateurs.

Le cinquième chapitre est consacré à la partie pratique et la partie numérique qui sont l'objectif principal de notre travail. Nous avons utilisé la méthode photoélasticimétrie et l'analyse numérique à l'aide de *CASTEM 2000*. La comparaison et la discussion des résultats obtenus font objet de ce chapitre.

Enfin on termine par une conclusion générale.

Rappel sur l'élasticité linéaire

I.1 Introduction

L'élasticité linéaire se situe dans le cadre de la description des solides déformables. Elle impose la linéarité à la loi de comportement élastique reliant le tenseur des contraintes à celui des déformations.

La théorie de l'élasticité suppose que les matériaux sont :

- Parfaitement élastiques (si les forces extérieures qui provoquent leur déformation ne dépassent pas une certaine limite, celle-ci disparaît en même temps que la force qui lui a donné naissance). Les matériaux possèdent cette propriété à un degré variable en pratique.
- Homogènes et distribués uniformément dans tout le volume qu'ils occupent, de telle sorte que le plus petit élément détaché d'un corps possède les mêmes propriétés physiques que le corps tout entier.
- Isotropes, c'est-à-dire que leurs propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions. Les matériaux utilisés dans les constructions ne satisfont pas en générale, dans leur ensemble, à cette dernière hypothèse ; ils sont en effet constitués souvent de cristaux (acier par exemple) de formes divers et différemment orientés. Cependant, les théories générales de l'élasticité, quoique fondées sur l'homogénéité et l'isotropie, donnent des résultats tout à fait valables.

I. 2 Loi de comportement

A partir de certaines hypothèses comme l'élasticité, homogénéité et l'isotropie, on écrit la loi de comportement d'un milieu élastique linéaire comme suit:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{I.1})$$

Ou encore avec : $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ (I.2)

Où σ_{ij} est le tenseur des contraintes qui un tenseur symétrique s'écrivant sous forme matricielle

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{I.3})$$

ε_{ij} est le tenseur des déformations, défini par

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I.4})$$

Dans l'hypothèse des petites déformations.

λ et μ sont les coefficients de Lamé

E et ν sont les modules de Young et de Poisson

Un tenseur de contrainte possède trois invariants définis comme suit :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \text{tr}|\Sigma| = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \frac{1}{2} [(\text{tr}\Sigma)^2 - \text{tr}(\Sigma^2)] \\ I_3 &= \det(\Sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.5})$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les valeurs propres du tenseur Σ , elles sont aussi appelées contraintes normales principales associées aux directions principales.

I.3 Equations d'équilibre

II.3.1 Equations d'équilibre en coordonnées cartésiennes

Considérons un élément de volume de côtes dx et dy et d'épaisseur uniforme Δz autour du point M et on considère les contraintes tangentielles perpendiculaires à l'axe Z .

Les forces de volume de projection F_x et F_y ont une résultante qui passe par le centre de gravité du volume (le point M), leur moment par rapport au point M est nul. Le volume élémentaire étant en équilibre dans la structure, la somme des moments dans le plan XOY est

nulle. Lorsque un effort fait basculer la structure de X vers Y dans le sens trigonométrique, le moment associé est compté positif. Il est négatif dans le sens inverse.

Le moment par rapport au point M généré par la contrainte de cisaillement $\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx$

est :

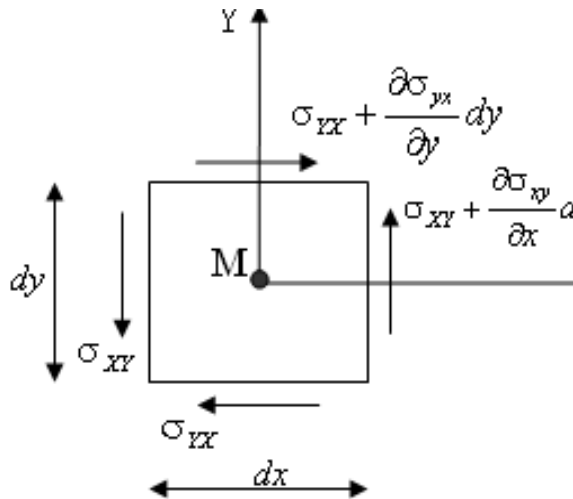
$$\left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \Delta z \frac{dx}{2} \quad (\text{I.6})$$


Figure I.1: Contraintes tangentielles \perp à l'axe z d'un cube élémentaire [2]

Équilibre en rotation du volume élémentaire :

$$\left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} dy \Delta z - \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right) \frac{dy}{2} dx \Delta z - \sigma_{yx} \frac{dy}{2} dx + \sigma_{xy} \frac{dx}{2} dy \Delta z = 0$$

L'équation ci-dessus est vrai quelque soit le petit élément de volume donc :

$$-2\sigma_{yx} - \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy + 2\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx \quad (\text{I.7})$$

Les longueurs dx et dy étant infinitésimales, il est légitime de supposer que les variations des contraintes sur dx et dy sont négligeables par rapport aux contraintes elles même. Il reste après simplification l'égalité entre les deux contraintes de cisaillement agissant sur deux facettes perpendiculaires : [3]

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (\text{I.8})$$

Par un raisonnement similaire sur les autres faces du volume élémentaire, on montre que le tenseur des contraintes est symétrique : c'est le théorème de réciprocité des contraintes tangentielles.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (I.9)$$

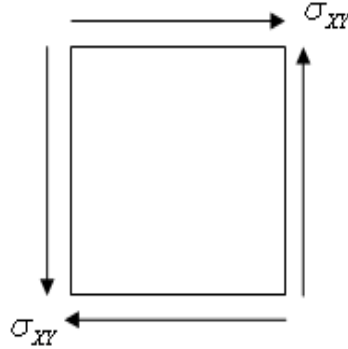


Figure I.2: Réciprocité des contraintes tangentielles [2]

Soit maintenant un petit volume élémentaire autour de M, en équilibre dans la structure soumise à des forces de volume de densité F_X , F_Y , et F_Z . Sur chaque facette du volume s'exercent une contrainte normale et deux contraintes tangentielles. Ecrivons l'équilibre en translation sur X du volume élémentaire en ne représentant sur chaque face que la contrainte agissant selon X pour simplifier la représentation graphique.

On représente sur la figure (I.3) les forces appliquées sur chaque facette selon l'axe X.

La somme de toutes les forces dans chaque direction est nulle pour chaque volume élémentaire d'une structure elle-même en équilibre.

Suivant l'axe des X et après simplification, on a :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz dx dy + F_x dx dy dz = 0$$

Soit encore :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (I.10)$$

Par un raisonnement analogue, la somme des forces appliquées sur l'axe Y est nulle ainsi que celle sur l'axe Z. On obtient des formules équivalentes à la précédente en permutant les indices. En tout on aura les 3 relations d'équilibre suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.11})$$

Ces relations se regroupent en une seule, en adoptant les conventions classiques pour les indices muets et les dérivées partielles :

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0 \quad (\text{I.12})$$

Elle est vraie en tout point du solide et elle est considérée comme l'équation de base de la mécanique des milieux continus.

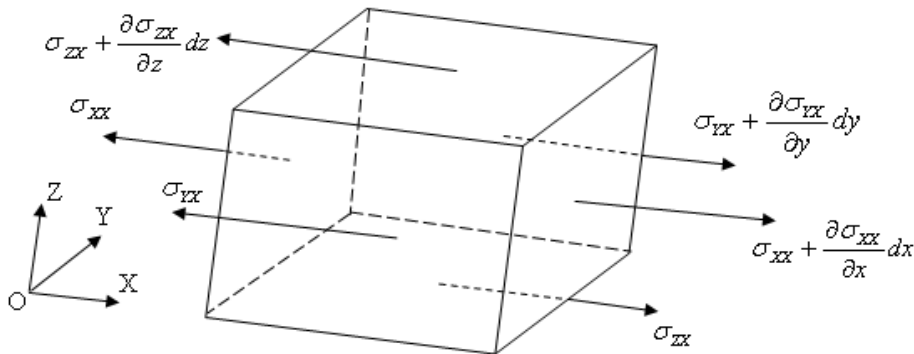


Figure I.3 : Equilibre en translation suivant l'axe X [2]

I.4 Loi de comportement

On se place dans les hypothèses de linéarité géométrique et matérielle en ne considérant dans la suite de cette partie que les matériaux homogènes: les caractéristiques ne dépendent pas du point étudié. On se limite également au domaine élastique linéaire, ce qui est une autre manière de dire que les contraintes varient proportionnellement à la déformation. Les déformations doivent être suffisamment petites de manière à rester dans la partie linéaire de la loi constitutive et présenter le même comportement en traction et en compression. D'autre part, on suppose que la loi reliant les déplacements aux déformations est également linéaire. [3]

Soit le matériau caractérisé par un comportement résumé par l'essai de traction simple.

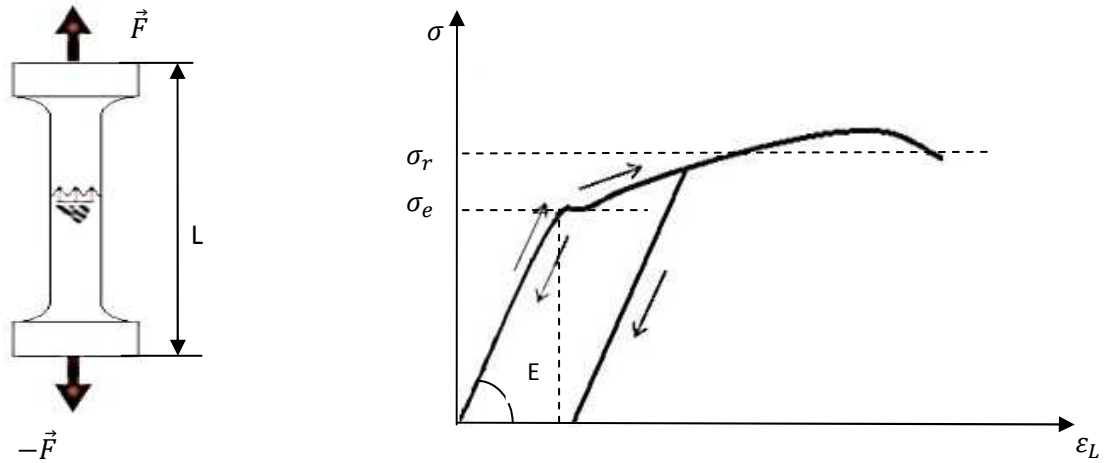


Figure I.4: l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation relative d'une éprouvette en traction simple

Tel que : $\sigma = F/A$ la contrainte résultant de la force f

$\epsilon_l = \Delta L/L$ l'allongement relatif

A : la section de l'éprouvette

L : longueur de l'éprouvette

I.5 La loi de Hook

Lorsque il s'agit d'un matériau homogène et isotrope La relation entre la contrainte σ et la déformation ϵ est liée par la loi de HOOK et la loi de LAME comme suit : [3]

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Loi de HOOK} & \\
 & [\epsilon] = f([\sigma]) & \\
 [\sigma] & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} & [\epsilon] \\
 & \text{Loi de LAME} & \\
 & [\sigma] = f^{-1}([\epsilon]) &
 \end{array}$$

Soit un cube soumis au chargement sur les trois facettes :

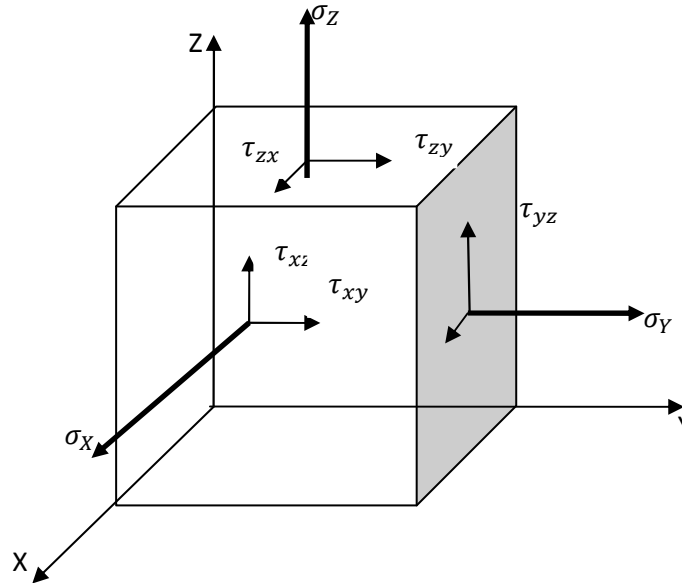


Figure I.5: cube soumis au chargement

Relation des déformations en chargement normal (loi de Hook généralisée)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{yy} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} + \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} + \frac{1}{E}\sigma_{zz} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.13})$$

Ecriture des relations (I.13) sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{I.14})$$

Relation des déformations en chargement tangentiel

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\sigma_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\sigma_{yz} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\sigma_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.15})$$

Tel que : E : module de Young

ν: coefficient de poisson

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$: est le module d'élasticité en cisaillement ou le module de glissement, c'est le coefficient qui relie les contraintes tangentielles aux déformations angulaires.

Ecriture sous forme matricielle des relations (I.15):

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} \quad (\text{I.16})$$

Pour un état quelconque de contrainte la matrice 6x6 n'est pas symétrique à moins de l'exprimer en utilisant les distorsions angulaires $\gamma_{ij}=2\varepsilon_{ij}$ au lieu des déformations angulaires ε_{ij} . Pour un matériau isotrope, c'est-à-dire un matériau pour lequel les caractéristiques mécaniques sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace, deux coefficients seulement permettent d'écrire la relation (I.16). [2]

$$\sigma = H \varepsilon \quad (\text{I.17})$$

La matrice des déformations est donnée sous la forme (I.18) :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} \quad (\text{I.18})$$

I.5.1 Cas de l'état plan de contrainte

Considérons une structure plane, chargée sur son plan et qui se déforme dans son plan. La matrice des contraintes est plane mais celle des déformations ne l'est pas. Car la déformation peut se faire dans toutes les directions, on écrit alors :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Les relations déformation-contraintes dans ce cas s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} \\
 \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.19})$$

I.6 Représentation de quelque cas particulier avec le Cercle de Mohr

I.6.1 Traction ou compression hydrostatique

On dit que $\bar{\sigma}$ est un tenseur traction ou de compression hydrostatique si $\bar{\sigma}$ est sphérique. Les trois contraintes sont égales à σ_m et toutes les directions sont principales, s'est en particulier l'état de contraintes qui existe dans un fluide au repos, d'où le qualificateur « hydrostatique ».

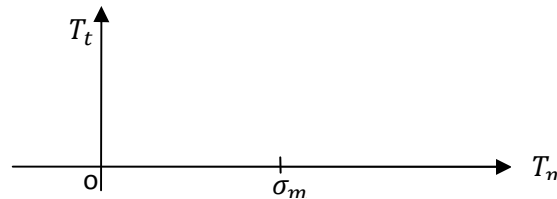


Figure I.6: Représentation de Mohr pour une traction ou compression hydrostatique

I.6.2 Traction ou compression simple dans une direction

Le tenseur $\bar{\sigma}$ définit une traction ou une compression simple dans la direction du vecteur \vec{u} si \vec{u} définit une direction principale de $\bar{\sigma}$ et si la contrainte principale correspondante est la seule n'est pas nulle. On dit aussi que, $\bar{\sigma}$ est un tenseur uniaxial.

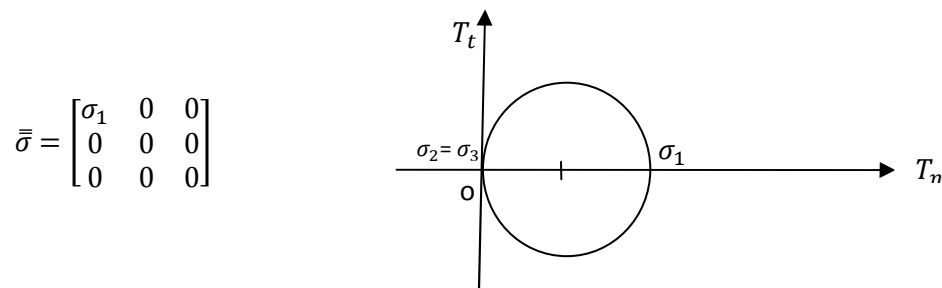


Figure I.7: Représentation de Mohr pour une traction simple

I.6.3 Cisaillement simple

Le tenseur $\bar{\sigma}$ définit un cisaillement simple dans directions orthogonales \vec{u} et \vec{u}' si la matrice de $\bar{\sigma}$ s'écrit dans une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{u}'')$. [3]

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

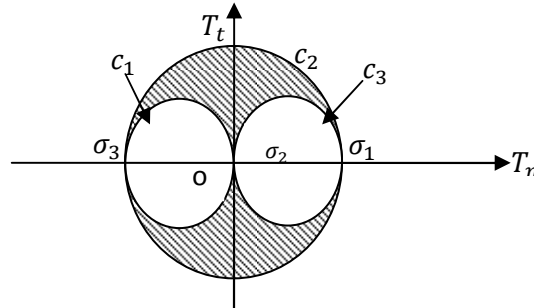


Figure I.8: Représentation de Mohr pour un cisaillement simple

I.6.4 Etat de contrainte tri-axial de révolution

Le tenseur $\bar{\sigma}$ définit un état de contrainte tri-axial de révolution si deux contraintes principales sont égales et non nulles.

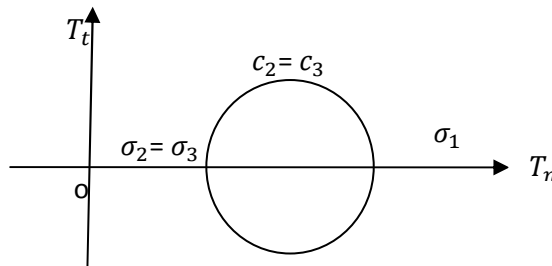


Figure I.9: Représentation de Mohr pour un état de contrainte tri-axial de révolution

I.6.5 Etat de contrainte plan

Le tenseur $\bar{\sigma}$ définit un état de contrainte plan si l'une des contraintes principale est nulle. [3]

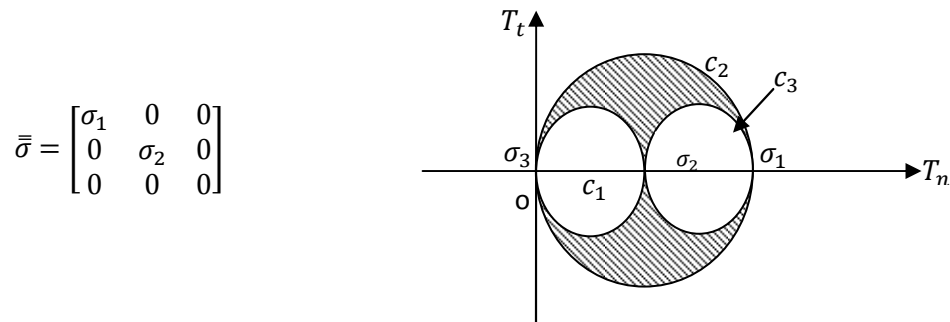


Figure I.10: Représentation de Mohr pour un état de contrainte plan

I.7 Conclusion

Après avoir donné un aperçu sur l'élasticité linéaire, base sur laquelle sont fondés les chapitres suivantes, dans le chapitre II qui va suivre, on exposera la théorie de la photoélasticimétrie qui permet de déterminer directement la différence des contraintes principales ou bien le rayon de cercle de Mohr sur toute la surface du modèle en utilisant le phénomène de double réfraction appelé aussi biréfringence.

Théorie de la photoélasticimétrie

II.1 Introduction

La technique de la photoélasticimétrie est fondée sur la physique des ondes lumineuse et la biréfringence de certains matériaux. Elle est largement utilisée dans des secteurs de technologie avancée comme l'aéronautique.

Sa capacité à simuler des structures complexes a conduit à élaborer des démarches hybrides calcul-photoélasticimétrie. Plus qu'une complémentarité, il s'agit d'une véritable intégration de ces deux moyens prévisionnels. Certains bureaux d'études, possédant de gros moyens de calculs, ont recours systématiquement à la photoélasticité afin d'élaborer par exemple des hypothèses plausibles sur les conditions aux limites. Cette technique est fondée sur le phénomène de biréfringence accidentelle ou effet photoélastique : tout matériau solide transparent acquiert une biréfringence lorsqu'il est soumis à des sollicitations mécaniques extérieures. L'ensemble des lois physiques décrivant ce phénomène constitue la photoélasticité.

Deux grandes familles de techniques existent en photoélasticimétrie :

- Les revêtements photoélastiques ou la photoélasticimétrie par réflexion.
- Les modèles photoélastiques.

II.2 Photoélasticité

La photoélasticimétrie est une méthode expérimentale d'analyse des contraintes. Elle est basée sur le phénomène de double réfraction de la lumière appelé biréfringence.

II.3 Principe de la photoélasticimétrie

La biréfringence est un phénomène optique qui apparaît sous l'effet des contraintes. Cette biréfringence peut être étudiée en analysant la façon dont la polarisation de la lumière est transformée après le passage à travers le matériau. Par exemple, une onde lumineuse polarisée rectilignement pourra ressortir polarisée elliptiquement. Cela s'explique par le fait que les deux composantes de l'onde subissent un retard l'une par rapport à l'autre. Ce retard est directement relié aux contraintes présentes dans le matériau. On peut donc ainsi mesurer les contraintes.

Expérimentalement, on peut simplement utiliser la méthode suivante: une lumière monochromatique est polarisée à l'aide d'un polariseur, envoyée sur l'échantillon à analyser, puis passe à travers un second polaroid (analyseur). Une lentille convergente permet ensuite de faire l'image de l'échantillon sur un écran. Un rayon de lumière polarisée rectilignement va subir une certaine biréfringence différente selon le trajet qu'il emprunte dans le matériau. Sa polarisation va alors être transformée différemment selon le trajet. On verra ainsi apparaître des zones claires ou sombres.

II.4 Rappels sur la lumière

Tout d'abord, rappelons que la lumière est, sous sa forme la plus simple, une onde plane sinusoïdale monochromatique, représentée par deux grandeurs vectorielles sinusoïdales en phase et perpendiculaires, les champs électrique et magnétique. Chacun de ces champs est une fonction sinusoïdale du temps et sa distribution dans l'espace est sinusoïdale le long de l'axe de propagation.

La couleur d'un rayonnement monochromatique est caractérisée par sa longueur d'onde. La lumière blanche visible possède toutes les longueurs d'ondes comprises entre 0.4 et 0.7 μm . Par ordre croissant de longueur d'onde, on passe de 0.4 à 0.7 μm par les violet, indigo, bleu, vert, jaune, orange, rouge.

II.4.1 Onde lumineuse plane

Les ondes lumineuses sont des ondes électromagnétiques. Elles transportent une vibration B (le vecteur induction magnétique) perpendiculaire à sa direction de propagation n . Une onde lumineuse est qualifiée de plane lorsque les surfaces d'ondes sont les plans perpendiculaires à n ; on parle alors du plan d'onde. Ceci s'obtient pratiquement si l'on se place suffisamment loin du point d'émission. [4]

II.4.2 La lumière naturelle

Son vecteur induction magnétique B a une direction, un module et une pulsation aléatoire. Les longueurs d'onde des radiations visibles s'étendent de 0,4 μm à 0,8 μm .

II.4.3 Lumière monochromatique

C'est une lumière d'une couleur donnée. Sa pulsation est constante.

II.4.4 Lumière polychromatique

C'est une lumière qui possède plusieurs longueurs d'ondes.

II.5 La polarisation de la lumière

Propriété d'une onde lumineuse qui décrit le comportement des vecteurs électriques et magnétiques au cours de sa propagation. Plus précisément, la polarisation d'une onde lumineuse indique les directions que prend, au cours de l'évolution temporelle ou le long d'un rayon lumineux donné, le vecteur champ électrique (ou le vecteur champ magnétique) dans le plan orthogonal au vecteur d'onde. On peut citer comme cas particuliers :

- la polarisation linéaire pour laquelle le vecteur champ électrique "pointe" constamment dans une direction donnée
- la polarisation elliptique (dont la polarisation circulaire est un cas particulier) pour laquelle le vecteur champ électrique décrit une ellipse.

Bien souvent, la lumière naturelle n'est pas polarisée, ce qui signifie que les "déplacements" des vecteurs champs électrique et magnétique sont désordonnés.

II.5.1 Lumière polarisée rectilignement

Son vecteur B reste parallèle à une direction fixe X . Si de plus cette lumière est monochromatique et si elle se propage suivant X_3 , B s'écrit : [4]

$$B = B_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{X_3}{c}\right) + \varphi\right) X \quad (\text{II.1})$$

Avec ω : pulsation

$\lambda = 2\pi/\omega$: Sa longueur d'onde

C : célérité de la lumière dans le milieu considéré

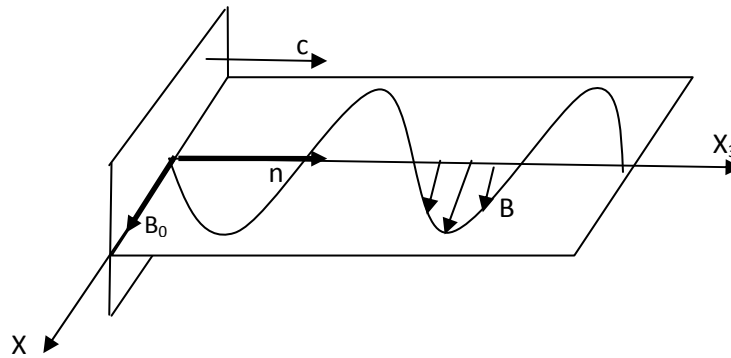


Figure II.1: lumière polarisée rectilignement suivant x [4]

II.5.2 Lumière polarisée circulairement

Pour polariser circulairement une onde lumineuse on utilise deux polaroids à axes perpendiculaires avec deux lames quart d'onde. Ce type de polariscope "élimine" les isoclines et ne laisse voir que les isochromes (très pratique pour mesurer les contraintes). Les lames quart d'onde sont intercalés d'une part entre le polariseur et le modèle et d'autre part entre l'analyseur et le modèle comme le montre la figure (II .2).

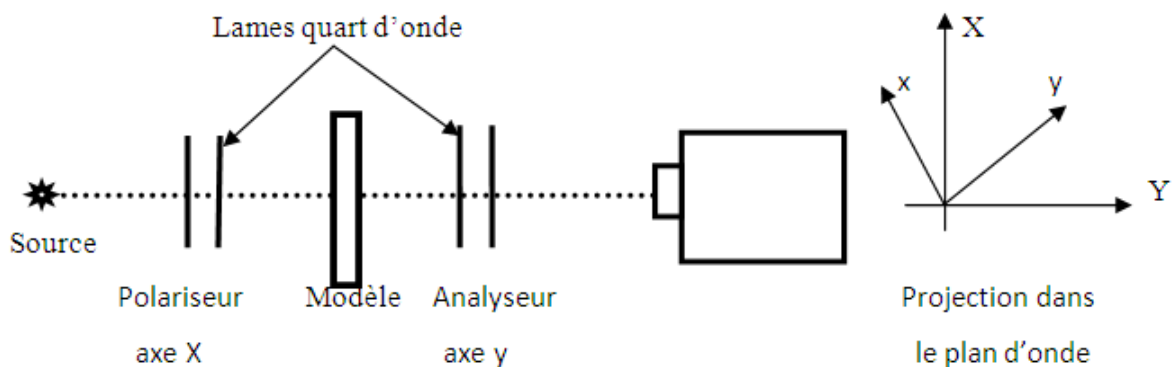


Figure II.2: Polariscope circulaire [1]

II.6 La biréfringence

La biréfringence est la propriété physique d'un matériau dans lequel la lumière se propage de façon anisotrope. C'est un phénomène physique qui fait que lorsqu'un rayon lumineux traverse certains matériaux il se divise en deux rayons lumineux, l'un ordinaire et l'autre extraordinaire se propageant à des vitesses différentes. Dans un milieu biréfringent, l'indice de réfraction n'est pas unique, il dépend des directions de propagation et de polarisation du rayon lumineux.

De ce fait on cite deux types de biréfringence :

II.6.1 La biréfringence naturelle

Certains corps présentent naturellement le phénomène de biréfringence ou double réfraction. L'indice de réfraction passe par des valeurs minimal et maximal selon les directions qu'on appelle axes optiques principaux ou encore axes de biréfringence, Une lumière plane polarisée se divise en deux composantes autonomes (ondes polarisées planes) parallèles aux axes optiques principaux lorsqu'elle traverse ces corps. Le phénomène de biréfringence se caractérise par un retard optique (δ) entre les deux composantes à la sortie du corps. Ceci est dû à la structure anisotrope de la matière.

Un corps transparent, naturellement biréfringent, placé entre deux polaroïds à axes perpendiculaires, l'un quelconque de ses axes étant parallèle à la direction de polarisation, ne modifie pas la zone d'extinction (figure a). Ce même corps biréfringent, placé obliquement laisse passer la lumière avec une couleur qui dépend de la biréfringence du corps (partie hachurée sur la figure b). Le maximum d'intensité est obtenu pour une inclinaison de 45° .

C'est le phénomène de biréfringence naturelle.

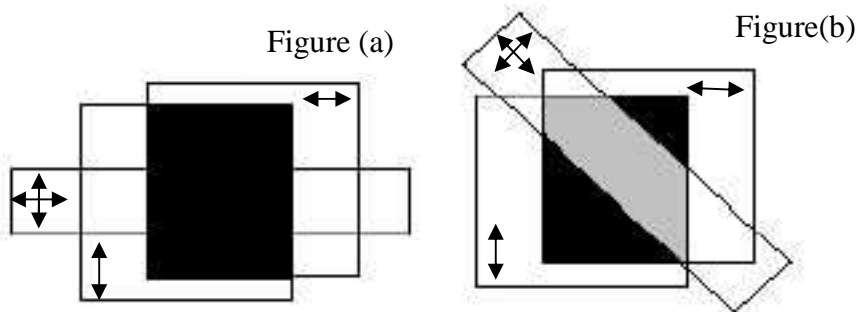


Figure II.3: Phénomène de biréfringence naturelle [7]

II.6.2 La biréfringence accidentelle (provoquée)

Les milieux dans lesquels, il n'y a aucune direction privilégiée (matière à l'état gazeux, liquide et amorphe) ne sont pas biréfringents, mais peuvent le devenir sous l'action d'une cause extérieure qui crée une direction privilégiée : c'est la biréfringence accidentelle (ou induite).

La plupart des corps transparents, isotropes et normalement non biréfringents, le deviennent lorsqu'ils sont soumis à un état de contrainte (phénomène instantané), les axes

principaux de l'état de contrainte coïncident avec les axes optiques principaux, les indices de réfraction principaux, sont en relation linéaire avec les contraintes principales.

$$\left. \begin{array}{l} n_1 = n_1(\sigma_1, \sigma_2) \\ n_2 = n_2(\sigma_2, \sigma_1) \end{array} \right\} \Rightarrow n_1 - n_2 = k(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{II.2})$$

Ces deux composantes vont vibrer selon des plans orthogonaux qui sont parallèles aux directions principales des contraintes (1 et 2), ils ont la même fréquence mais sont déphasées l'une par rapport à l'autre (interférence possible), le retard optique δ entre ces deux composantes sera proportionnel à la différence des indices principaux donc à la différence entre les contraintes principales et à l'épaisseur "d" du matériau.

$$\delta = c \cdot d (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{II.3})$$

II.7 Instruments de photoélasticité

II.7.1 Banc de photoélasticimétrie

Il comprend un appareil dénommé polariscope, qui assure la production (polariseur) et la détection (analyseur) de la lumière, et un montage d'application de la charge. Il nous permet l'analyse expérimentale des contraintes sur les modèles par photoélasticimétrie 2D.

II.7.2 Différents types de polariscope

Il existe plusieurs types de polariscope :

- Le polariscope à réflexion
- Le polariscope à transmission
- Le polariscope à laser

II.7.3 Eléments fondamentaux du polariscope

a) Source lumineuse

On cite trois sortes de sources lumineuses :

a.1) Source lumineuse blanche

C'est une lampe ordinaire dont la lumière sert à l'observation des lignes isoclines et des lignes isochromes.

a.2) Source de lumière monochromatique

Cette lumière est obtenue en filtrant la lumière blanche à l'aide de filtre monochromatique.

Elle permet l'observation aisée des isochromes avec la lumière circulaire. Les isoclines étant éliminées avec les lames quart d'ondes.

a.3) Lumière à vapeur de mercure

Cette lumière permet de visualiser clairement des ordres de frange élevés.

b) Filtres polariseurs et analyseurs

Leurs fonction consiste à filtrer la lumière incidente et ne laisser passer qu'une seule composante de cette lumière : celle qui correspond à l'axe optique du polaroid. La lumière émergente est ainsi polarisée rectilignement.

c) La lame quart d'onde

C'est un type de filtre qui, généralement intercale entre les polaroids, transforme une vibration rectiligne en une vibration circulaire et vis versa.

Ce changement dans le mode de vibration est assuré par une différence de marche introduite par la traversée de cette lame entre deux composantes perpendiculaires.

Elle est égale au quart d'onde de la vibration initiale.

II.8 Différent procédés de la photoélasticimétrie

II.8.1 Photoélasticimétrie par transmission

On réalise une reproduction plane de la forme à étudier découpée dans un matériau photoélastique d'épaisseur e . Ce modèle est chargé et observé par transparence entre deux filtres polarisants. Permet d'obtenir les contraintes dans n'importe quel endroit d'un modèle chargé ou d'un modèle à contraintes figées.

Montage photoélastique classique

Un montage photoélastique est composé de 5 parties : [4]

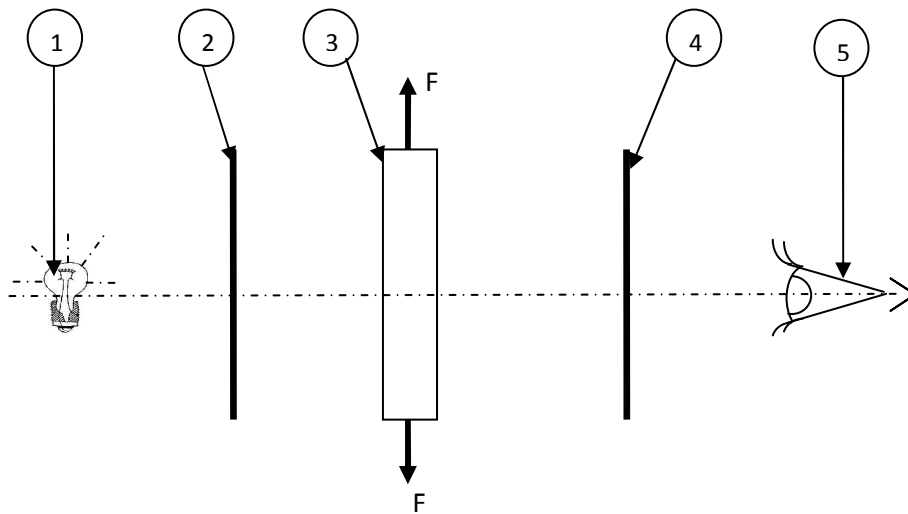


Figure II.4: Montage photoélastique classique

- 1 – une source de lumière monochromatique ou naturelle
- 2 – un polariseur
- 3 – Le modèle en matériau biréfringent soumis à des efforts la plaçant en contraintes planes.
- 4 – un analyseur
- 5 – une caméra pour la prise des vues.

II.8.2 Photoélasticimétrie par réflexion

La photoélasticité par réflexion utilise des revêtements minces collés sur des structures réelles, c'est la structure qui impose ses déformations au revêtement biréfringent, on mesure donc des déformations qui sont converties en contraintes.

II.8.2.1 Fonctionnement du polariscope à réflexion

Un revêtement photoélastique est collé sur la surface de la pièce avec une colle réfléchissante à base de poudre d'aluminium. La lumière incidente polarisée traverse deux fois le revêtement et génère des isoclines et des isochromes.

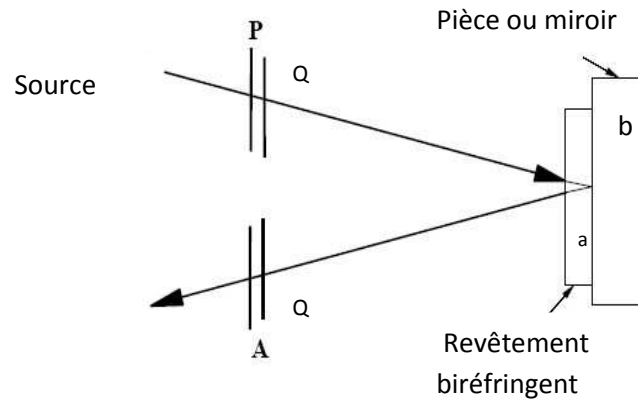


Figure II.5: polariscope à réflexion [1]

P : polariseur

A : analyseur

Q : lame quart d'onde

II.8.2.2 Avantage de la photoélasticimétrie par réflexion

Contrairement à la photoélasticimétrie 2D et 3D sur modèles transparents, la méthode des revêtements photoélastiques est encore très utilisée dans l'industrie car elle présente plusieurs avantages:

- C'est une méthode de champ qui se pratique sur les structures réelles.
- Sa mise en œuvre est relativement facile.
- Des progrès sont faits régulièrement dans le domaine des revêtements, des colles et des instruments.
- Depuis quelques années on assiste à l'introduction de l'assistance informatique, notamment pour l'analyse et l'interprétation des images.

II.8.2.3 Les matériaux des revêtements

- Les époxydes qui ont une bonne sensibilité et se galbent facilement.
- Les polycarbonates qui sont très sensibles mais qui ne peuvent être utilisés que sur des surfaces planes.
- Les polyuréthanes qui sont réservés au recouvrement des matériaux mous car ils ont un faible module d'élasticité.

II.9 Effet de la biréfringence sur la lumière

Sur le polariscope, la forme de lumière sortant du polariseur est $p = a \cos wt$. Portée par un axe Ox, La direction de polarisation fait un angle α avec l'une des directions des contraintes principales du modèle. [1]

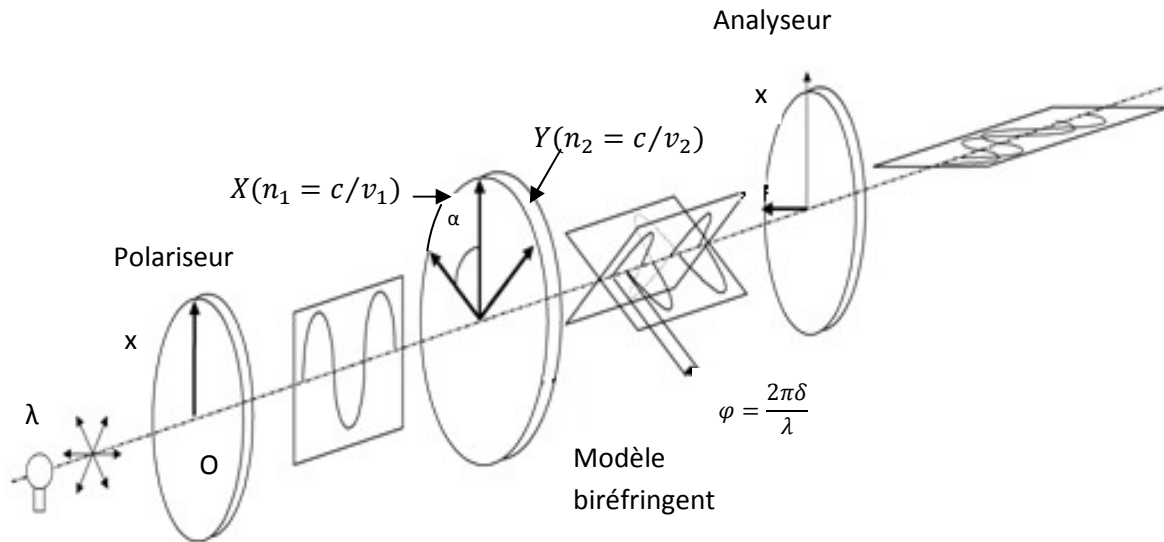


Figure II.6: Polariscopes rectiligne en champ obscur [1]

Après chargement de la pièce, à l'entrée du modèle biréfringent

$$\begin{cases} x = a \cos \alpha \cos wt \\ y = -a \sin \alpha \cos wt \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

En traversant le modèle, elle subit un retard $\varphi = (n_1 - n_2) e$

$$\begin{cases} x = a \cos \alpha \cos wt \\ y = -a \sin \alpha \cos(wt - \delta) \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

En sortant de l'analyseur on aura des ondes seulement suivant oy :

$$A = -a \sin(2\alpha) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(wt - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (\text{II.6})$$

L'amplitude de l'onde incidente est : $a \sin 2\alpha \sin \frac{\varphi}{2}$

L'intensité I de la lumière varie comme le carré de cette amplitude donné sous la forme :

$$I = a^2 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (\text{II.7})$$

L'intensité I est nulle (franges noires) pour :

- $\sin 2\alpha = 0$ d'où $\alpha = N\pi/2$: les directions principales des contraintes sont parallèles ou perpendiculaires à la direction du polariseur ; ce sont les lignes isoclines.

Ce point est noir car toutes les longueurs d'ondes sont arrêtées, cette propriété est indépendante de la longueur d'onde, de l'épaisseur et du caractère biréfringent du modèle. Elles varient donc avec la direction du polariseur et de l'analyseur (sauf en un point isotrope, où toutes les directions sont principales et où passent toutes les lignes noires).

- $\sin \varphi/2 = 0$ d'où le retard introduit par le matériau biréfringent est égale à $\varphi = 2N\pi$ la relation devient alors : $N = ec(\sigma_1 - \sigma_2)/\lambda$ ce sont les isochromes.

En un point une seule longueur d'onde est donc arrêtée. Ce point donc coloré. Une ligne de point de même couleur est une isochrome qui correspond à une différence de contraintes principales $\sigma_1 - \sigma_2 = \text{cste}$. Deux lignes successives de même couleur correspondent (en générale) à deux valeurs de N consécutives. Cette relation est indépendante de la direction du polariseur et de l'analyseur.

Plus la différence des contraintes principales est grande, plus les isochromes sont rapprochées les unes des autres. Il suffit de compter les isochromes en partant de l'état sans contrainte ($N = 0$) pour déduire l'importance de la contrainte. La précision du résultat obtenu peut alors être améliorée par l'emploi de matériaux à constante photoélastique élevée.

L'observation de ces isochromes est différente suivant que l'on opère en lumière blanche ou en lumière monochromatique. On a :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\delta}{ce} = \frac{\varphi\lambda}{2\pi ec} = \frac{2\pi N\lambda}{2\pi ec} = \frac{N\lambda}{ce} \quad (\text{II.8})$$

La frange ou l'isochrome d'ordre N, qui dépend de la longueur d'onde, est un lieu d'extinction des points vérifiant :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N\lambda}{ce} \quad (\text{II.9})$$

On désigne le rapport λ/c par la lettre f, dénommé constante de frange, pour le matériau du modèle utilisé correspondant à la longueur d'onde λ qui sera employée sur le banc photoélasticimétrique.

Pour les différentes configurations, voici un tableau résumant la valeur de l'intensité lumineuse

Type de polariscope	Champ clair	Champ sombre
rectiligne	$I(x, y) = I_0 - I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$	$I(x, y) = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$
circulaire	$I(x, y) = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$	$I(x, y) = I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

Tableau II.1 : L'intensité I pour les différentes configurations

II.10 La constante de frange

La constante de frange f est le rapport entre la différence des contraintes principales sur l'unité d'ordre en un point du modèle ayant comme épaisseur e .

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e} \Rightarrow f = \frac{e}{N} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\text{II.10})$$

II.11 Analyse des isoclines

Une ligne isocline est le lieu des points où la direction de l'une des contraintes principales est parallèle à la direction de polarisation.

Ces lignes apparaissent toujours noires lorsque le polariseur et l'analyseur sont croisés (champ sombre). Elle change de position et de forme quand l'ensemble polariseur analyseur tourne.

Après avoir analysé plusieurs directions, tous les 10 degrés par exemple, on obtient une cartographie de croix donnant les directions des contraintes principales en tout points.

II.11.1 Elimination des isoclines

Pour éliminer les isoclines, il suffit de placer entre polariseur et le modèle d'une part, et d'autre part entre le modèle et l'analyseur, une lame quart d'onde dont les axes sont à $\alpha = \pi/4$ de ceux du polariseur.

II.12 Analyse des isochromes

Une ligne isochrome apparaît comme le lieu des points d'égale valeur de la différence des contraintes principales, en effet :

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{N \lambda}{C e} \quad (\text{II.11})$$

N : ordre de frange d'isochromes

λ : longueur d'onde utilisée

C : constante photoélastique

e : épaisseur du modèle

Le réseau d'isochromes s'analyse en repérant les ordres des franges, c'est-à-dire en repérant la valeur de N (valeur entière).

Dans le cas d'un éclairage en lumière blanche, l'ordre zéro est toujours noir. La lumière blanche permet de:

- Mieux distinguer les isochromes (en couleurs) des isoclines (noires), sauf pour la frange zéro qui est noire.
- Connaître dans quel sens croît la contrainte.
- Reconnaître visuellement l'ordre des premières franges.
- Connaître la direction principale σ_1 .

Dans le cas d'un éclairage monochromatique, l'ordre zéro correspond à la première frange qui apparaît (absence de chargement).

Dans le cas d'un polariscope rectiligne, l'analyse des isochromes est rendue difficile du fait de la présence des lignes isoclines noires on utilise alors les lames quart d'onde pour supprimer les isoclines.

II.13 Expression analytique des isoclines et isochromes

Par définition un modèle photoélastique est en état de contraintes quasiplane. Si le tenseur des contraintes Σ est de la forme : [4]

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le plan (σ, τ) sa représentation est la suivante :

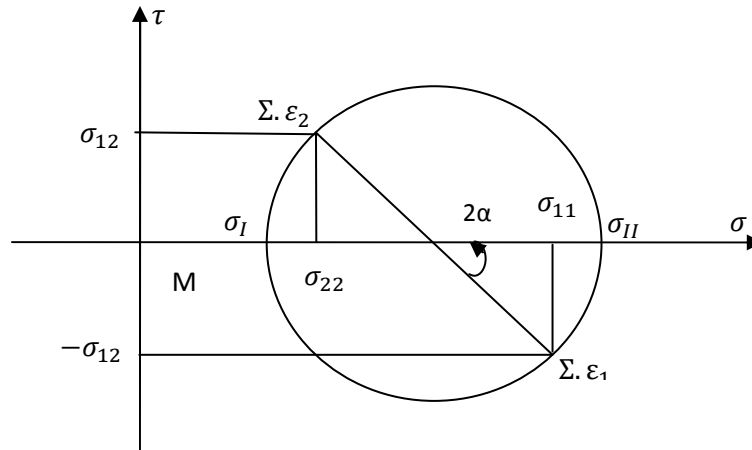


Figure II.7: Tenseur des contraintes en un point M dans un matériau photoélastique [4]

L'équation des isochromes est liée au diamètre du cercle ($\sigma_I - \sigma_{II}$) :

$$c\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = k\lambda \quad (\text{II.12})$$

L'équation des isoclines est le lieu des points où $\alpha = \text{cste}$:

$$\tan(2\alpha) = \frac{-2\sigma_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})} \quad (\text{II.13})$$

II.14 Les isostatiques

Ce sont des lignes de force tangentes aux directions principales composées de deux familles orthogonales: une tangente à σ_1 et l'autre à σ_2 . Elles sont tracées à partir des isoclines. Leurs courbures permettent de trouver le sens des variations des contraintes principales. Elles servent à obtenir, par intégration, les valeurs séparées des contraintes principales. Représentation visuelle de la propagation des contraintes dans une pièce.

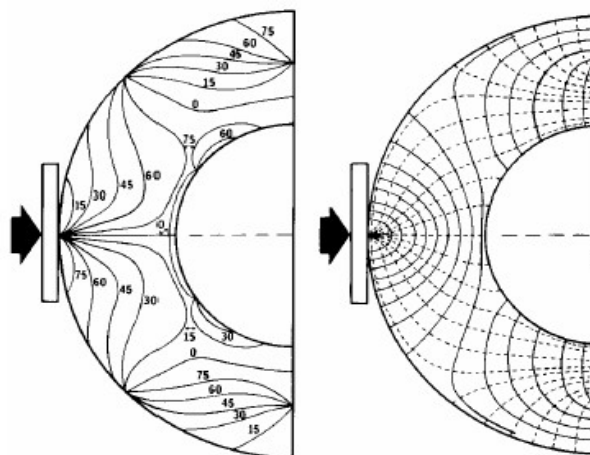


Figure II.8: tracé des isostatiques

II.15.1 Propriété des isostatiques

- Lorsqu'une isostatique présente une forte courbure, la contrainte principale qui lui est perpendiculaire varie rapidement.
- Lorsqu'une isostatique est rectiligne, la contrainte principale qui lui est perpendiculaire est stationnaire et est généralement soit maximale, soit minimale.
- Une isostatique droite est aussi une isocline.
- Les axes de symétrie sont des isostatiques.
- La variation des contraintes dépend de la courbure des isostatiques.

II.16 Les compensateurs

Le compensateur est un corps de biréfringence connue qui est placé sur le trajet de la lumière sortant du modèle. Il est ajusté de façon à introduire un niveau de biréfringence égal mais de signe contraire à celui qui se trouve dans le modèle de façon à obtenir la frange 0. Un exemple de compensateur est donné sur la figure (II.11).

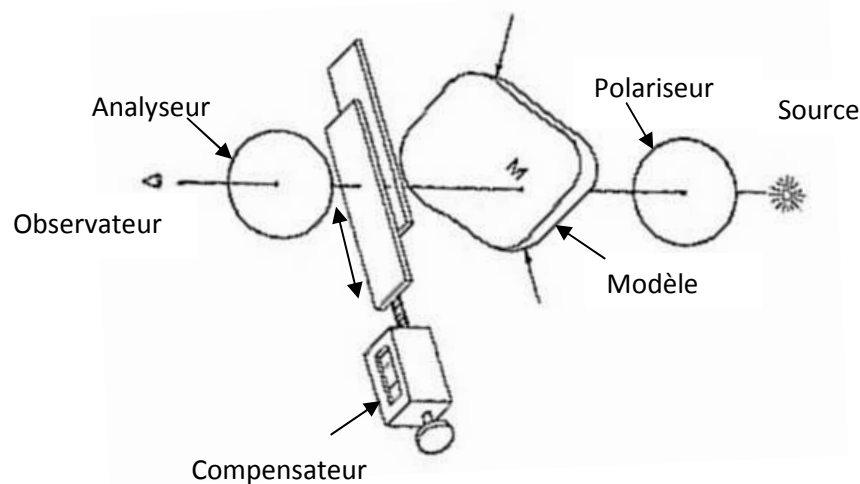


Figure II.9: Compensateur BRAVAIS

II.17 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de faire un bref aperçu sur certaines propriétés de la lumière, principalement le phénomène de la biréfringence avec son utilisation pour la détermination des contraintes dans les modèles.

Formulation du problème de contact mécanique Théorie de Hertz

III.1 Introduction

Lorsque deux surfaces sont mises en contact, des sollicitations mécaniques sont imposées au massif et peuvent donner lieu à des dégradations. Afin d'évaluer l'usure ou plus précisément la dégradation telles que la formation de débris, l'amorçage et la propagation de fissures, il est important d'évaluer le type et l'amplitude des sollicitations mécaniques imposées. La mécanique des contacts est la première tentative sérieuse pour faire converger les formalismes du frottement et de l'usure.

La mécanique des contacts débute en 1670 avec les travaux de Newton qui pressait des sphères de verre sur des plans métalliques. Ensuite la propagation a été constante tant sur le plan des modèles que sur celui des outils de calculs [HERTZ, 1896] ; [BOUSSINESQ, 1885] ; [CARTER, 1926] ; [KALKER, 1967] ; [JOHNSON, 1985].

Initialement, la formation des états de contact suivait une approche analytique exclusivement pour des sollicitations restant dans le domaine élastique et pour des géométries de contact relativement simples. Avec l'introduction du calcul par éléments finis il devient possible de résoudre nombre de problèmes aux géométries plus complexes, d'introduire différentes lois de frottement, et surtout de prendre en compte les phénomènes de plastification.

L'objectif de ce chapitre est la mise en évidence la distribution de champ de contraintes dans les différents contacts mécaniques (cylindre/plan et plan/plan) en présence d'un effort normal d'une part, et d'autre part en présence d'un effort normal et tangentiel.

III.2 Application d'un effort normal

III.2.1 Contact sphère sur sphère et sphère sur plan

La théorie de Hertz montre que lorsque deux solides de révolution sphérique sont en contact sous l'effet d'un effort normal, l'aire de contact est un cercle de rayon a (figure III.1). Les relations de Hertz permettent d'établir différentes relations en fonction de l'effort normal, des propriétés élastiques et de la géométrie de contact.

Considérons le contact sphère-plan à pression normale (figure III.1.a). L'indice 1 et les valeurs sans indice (lorsque ceci n'est pas précisé), sont associées au plan, alors que l'indice 2 correspond au matériau de la sphère. Les symboles E_1 , E_2 correspondent respectivement aux modules élastiques (de Young) du plan et de la sphère. Les coefficients de poisson du plan et de sphère sont désignés par ν_1 , ν_2 .

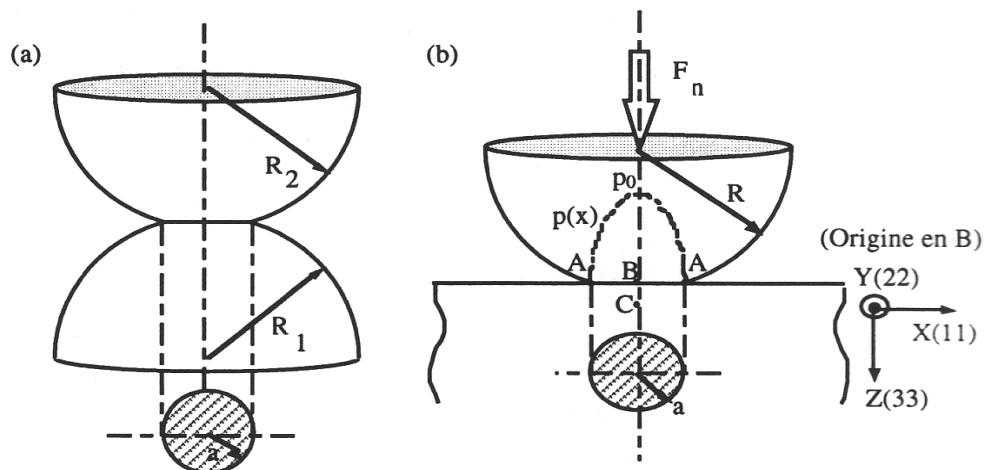


Figure III.1: a) Contact sphère-sphère b) Contact sphère-plan [5]

On détermine le rayon équivalent R dans le cas de contact sphère-sphère par la relation

suivante :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (\text{III.1})$$

Pour le contact sphère-plan, on a R_1 tend vers l'infini ($R_1 \rightarrow \infty$) et donc :

$$R = R_2 \quad (\text{III.2})$$

Le module élastique effectif E^* est donné par la relation suivante :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (\text{III.3})$$

Le rayon de contact a est donné par la relation suivante :

$$a = \left[\frac{3F_N R}{4E^*} \right]^{1/3} \quad (\text{III.4})$$

L'enfoncement δ_0 des surfaces égal à :

$$\delta_0 = \frac{a^2}{R} = \left[\frac{9F_N^2}{16RE^{*2}} \right]^{1/3} \quad (\text{III.5})$$

III.2.2 Contact cylindre sur cylindre et cylindre sur plan

III.2.2.1 Distribution des contraintes

La connaissance de la distribution et de l'évolution des contraintes dans les contacts mécaniques est très importante, du fait qu'au voisinage de la surface du contact, des endommagements importants sont observés en surface par usure ou en subsurface par fissure et par fatigue.

On considère deux cylindres élastiques, d'axes parallèle de rayons R_1 et R_2 , de module d'élasticité E_1 et E_2 , de coefficient de Poisson ν_1 et ν_2 et de longueur infinie, chargé par une force W/L par unité de longueur perpendiculaire à leur plan tangent (Fig. III.2)

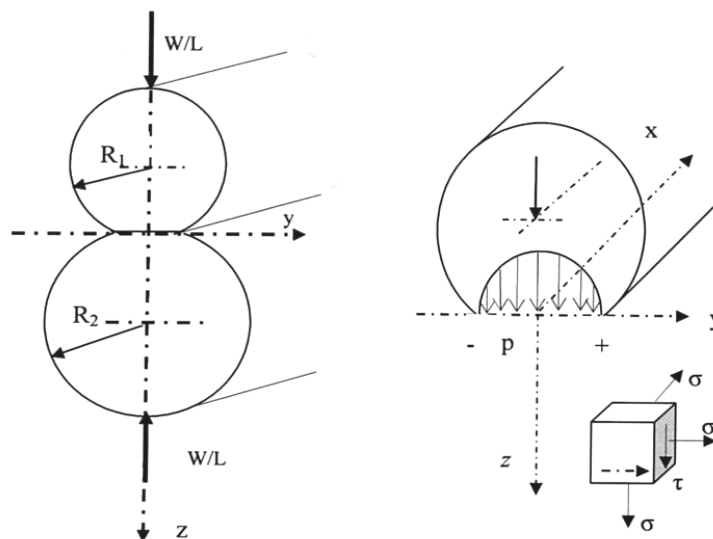


Figure III.2 : Contact entre deux cylindres le long de leurs génératrices et distribution de la pression dans la zone de contact

L'équation générale du problème s'écrit :

$$\left(\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2} \right) \int_{-b}^{+b} \frac{p(n)}{(y-n)} = B y^2 + \delta \quad (\text{III.6})$$

Avec la condition $L \int_{-b}^{+b} p(n) dn = W$ (III.7)

En posant :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; \quad (\text{III.8})$$

R_{eq} : Rayon de courbure équivalent

$$\frac{1}{E_{eq}} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}; \quad (\text{III.9})$$

E_{eq} : Module d'élasticité équivalent

Le problème du contact cylindre sur cylindre est équivalent au problème du contact cylindre sur plan en faisant tendre le rayon d'un cylindre vers l'infini.

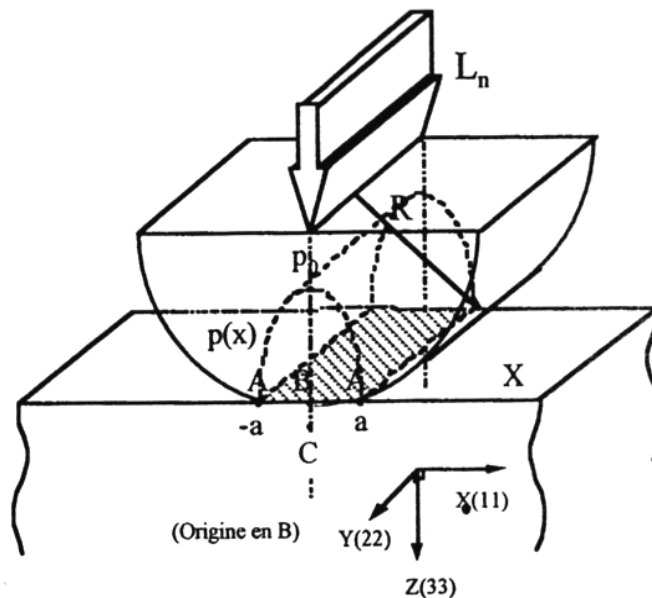


Figure III.3: Contrainte cylindre sur plan [5]

La théorie de Hertz pour les contacts élastiques avec les hypothèses ci-dessous énumérées donne les relations de calcul ci après pour le calcul de la pression, de la demi largeur de contact et des contraintes développées à l'intérieur des modèles en contact.

Les hypothèses posées par Hertz :

- Les surfaces sont continues et non conformes.
- Les allongements sont petits.
- Chacun des solides en contact peut être considéré comme un demi-espace élastique.
- Les surfaces sont sans frottement.

La répartition de pression sur l'aire de contact est alors donnée par la relation (III.10) :

$$p(y) = p_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} \quad (\text{III.10})$$

Où p_0 désigne la pression au centre du contact et b la demi-largeur de contact. Les valeurs de p_0 et b sont données par les relations suivantes où E_{eq} est le module d'élasticité équivalent et R_{eq} le rayon de courbure équivalent.

$$p_0 = \frac{2W}{\pi bL} \quad (\text{III.11})$$

$$b = 2 \sqrt{\frac{WR_{eq}}{\pi E_{eq}L}} \quad (\text{III.12})$$

Remarque : Pour le cas du contact cylindre sur plan, il suffit de considérer le diamètre de l'un des cylindres infini.

III.2.2.2 Champ de contraintes dues aux pressions Hertziennes

Dans le cas du cylindre sur plan, le champ de contraintes à l'intérieur du volume du parallélépipède dû aux pressions Hertziennes s'écrit alors :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{p}{\pi} z \left(\frac{b^2 + 2y^2 + 2z^2}{b} Q - \frac{2\pi}{b} - 3yR \right) \\ \sigma_z &= -\frac{p_0}{\pi} (bQ - yR) \\ \sigma_x &= \nu(\sigma_y - \sigma_z) \\ \tau_{yz} &= \frac{p_0}{\pi} z^2 R \\ \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{xz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.13})$$

Où il est posé :

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{\pi}{\omega \varepsilon} (1 - \varepsilon) \left[\varepsilon^2 + 2\varepsilon + \left(1 - \frac{4b^2}{\omega} \right)^{1/2} \right] \\ Q &= \frac{\pi}{\omega \varepsilon} (1 + \varepsilon) \left[\varepsilon^2 + 2\varepsilon + \left(1 - \frac{4b^2}{\omega} \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.14})$$

Avec :

$$\omega = (b + y)^2 + z^2$$

$$\varepsilon^2 = \frac{(b - y)^2 + z^2}{(b + y)^2 + z^2}$$

Sur l'axe oz, le champ des contraintes s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{p_0}{\pi} \left(\frac{b^2 + 2y^2 + 2z^2}{b} Q - \frac{2\pi}{b} \right) \\ \sigma_z &= -\frac{p_0}{\pi} z b Q \\ \sigma_x &= \nu(\sigma_y - \sigma_z) \\ \tau_{yz} &= \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.15})$$

Sur l'axe oz, les axes x, y et z sont des axes principaux. La différence des contraintes principales est maximale pour $z = h_c = 0,78b$ (point de hertz) et la valeur de la contrainte tangentielle est égale à $0,3P_0$.

III.2.3 distribution des contraintes dans le contact plan sur plan

III.2.3.1 Formulation du problème du contact plan sur plan

La formulation du problème de contact mécanique plan sur plan donné par la théorie de HERTZ, pour un chargement uniformément réparti, exercé par un poinçon de demi largeur a ,

de module de Young E_1 et de coefficient de poisson ν_1 , sur un plan semi infini, de module de Young E_2 et de coefficient de poisson ν_2 , est donnée par les expressions des contraintes dans le plan xoz .

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{p}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \sigma_{zz} &= -\frac{p}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \tau_{xz} &= \frac{p}{2\pi} [\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2] \\ \theta_1 &= \arctg\left(\frac{z}{x-a}\right), \quad \theta_2 = \arctg\left(\frac{z}{x+a}\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.16})$$

θ_1 et θ_2 sont les angles indiqués sur la figure III.4

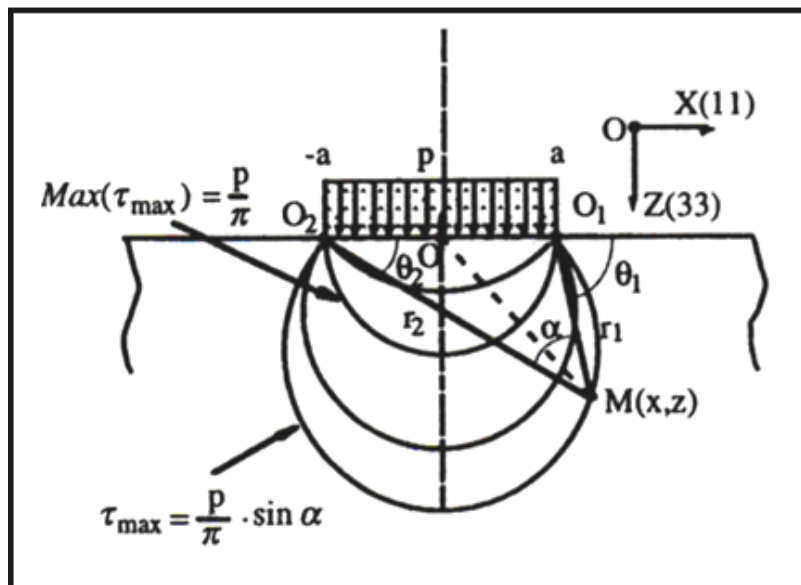


Figure III.4: Isovaleurs des contraintes principales et du cisaillement maximal [5]

Les contraintes principales sont données en fonction de l'angle α

$$\sigma_1, \sigma_2 = -\frac{p}{\pi} [\alpha \mp \sin \alpha] \quad (\text{III.17})$$

La somme des contraintes principales

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{2p}{\pi} \alpha \quad (\text{III.18})$$

Et leur différence

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2p}{\pi} \alpha \quad (\text{III.19})$$

Les isovaleurs des contraintes principales σ_1 et σ_2 et du cisaillement maximal τ_{\max} sont décrites par la famille de cercles passant les deux points du contact O_1 et O_2 (Figure 2) et le cisaillement maximal.

$$\tau_{\max} = \frac{p}{\pi} \sin \alpha \quad (\text{III.20})$$

La valeur maximale du cisaillement $\tau_{\max} = \frac{P}{\pi}$ est obtenue pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$

III.2.3.2 Représentation de la distribution des isostatiques

La figure (III.5) représente la distribution des isostatiques dans le plan. Tout point est soumis à deux contraintes principales perpendiculaires entre elles. La première contrainte est radiale représentée sur la figure IV.5 par des lignes continues, la deuxième est tangentielle représentée par des arcs de cercle en traits discontinues

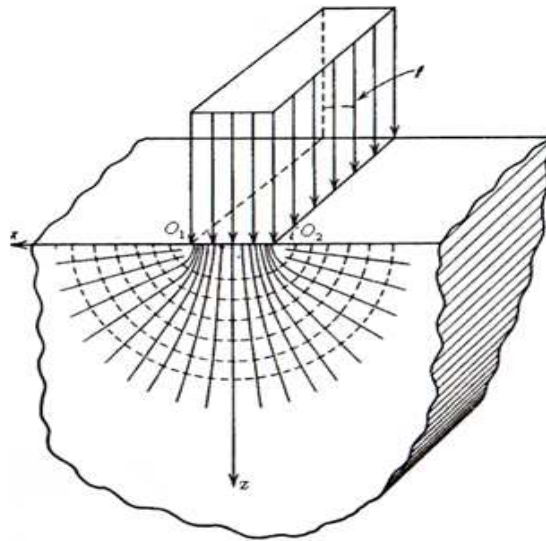


Figure III.5 : Isoclines et isostatiques dans un plan semi infini

III.3 Application d'un effort normal et tangential

Pour obtenir l'état global de chargement, en superposant aux composantes associées au chargement normal celles induites par le chargement tangential l'état de chargement final est donné par la relation suivante :

$$\Sigma = \Sigma^n + \Sigma^t \quad (\text{III.21})$$

Après l'application de l'effort tangentiel le champ de contraintes obtenu sera dévié figure (III.7).

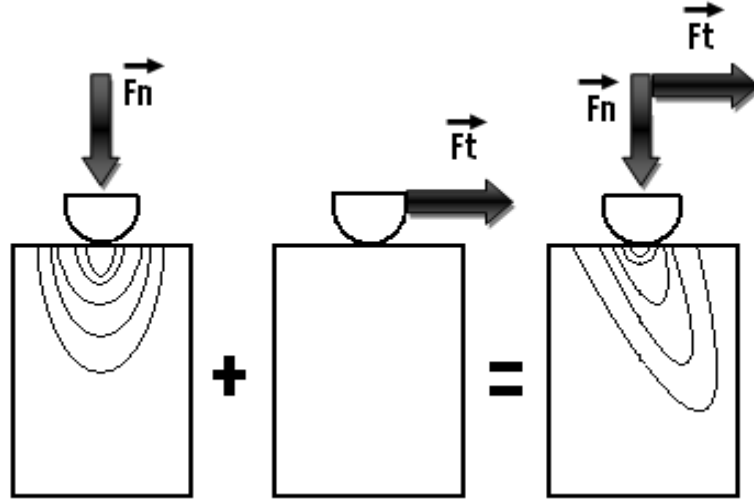


Figure III.6 : Etat de contrainte en présence d'un effort tangentiel

III.3.1 Contact cylindre –plan en présence d'un effort tangentiel

Dans le cas où le cylindre ou le plan présente des caractéristiques élastiques similaires, la largeur du contact cylindre-plan sous effort tangentiel est égale à $2a$, la distribution de pression et de cisaillement restant hertzienne (Fig.III.8).

La distribution de cisaillement est donnée par la formule suivante :

$$q(x) = \mp \mu P_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III.22})$$

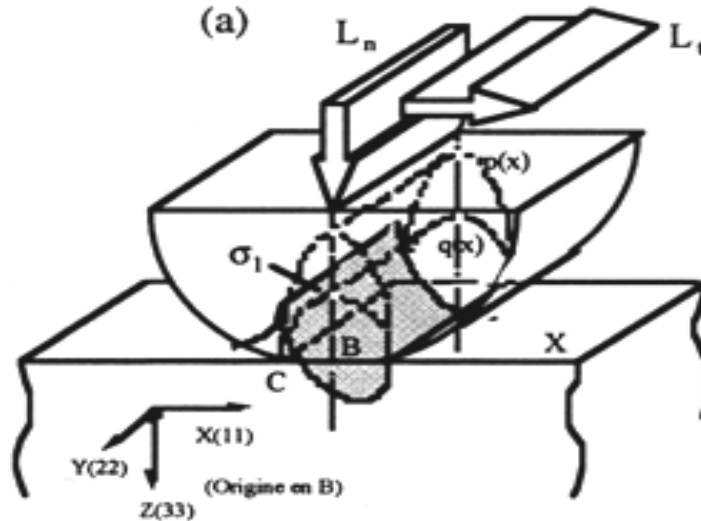


Figure.III.7 : Contact cylindre plan en présence d'un effort tangentiel [5]

L'état de chargement en surface le long de l'axe X dans l'aire de contact $x \in [-a, a]$ est :

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11} &= -P_0 \left\{ \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2} + 2\mu \frac{x}{a} \right\} \\
 \sigma_{22} &= -2\nu P_0 \left\{ \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2} + \mu \frac{x}{a} \right\} \\
 \sigma_{33} &= -P_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \\
 \sigma_{13} &= -\mu P_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{1/3-2}
 \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.23)}$$

Le cisaillement maximal suivant l'axe X est donné par :

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} [(\sigma - \sigma)^2 + 4\sigma_{13}^2]^{1/2} = \mu P_0 \quad \text{(III .24)}$$

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons cité les principales hypothèses associées au contact de Hertz et les conditions sur les surfaces en contact.

Présentation de logiciel CASTEM 2000

IV.1 Introduction

CASTEM 2000 est un code informatique pour l'analyse des structures par la méthode éléments finis. Ce code a été développé par le département mécanique et technologie (DMT) du commissariat française à l'énergie atomique (CEA).

Le développement de CASTEM 2000 entre dans le cadre d'une activité de recherche dans le domaine de la mécanique dont l'objectif est de devenir un instrument de haut niveau, pouvant servir de support pour la conception, le dimensionnement et l'analyse des structures et de composants, dans le domaine du nucléaire comme dans le secteur industriel classique. CASTEM 2000 intègre non seulement les processus de calculs proprement dits mais également les fonctions de construction du modèle (pré-processeur) et les fonctions de traitement des résultats (post-traitement).

IV.3 Domaine d'utilisation

CASTEM permet de traiter des problèmes d'élasticité linéaire dans les domaines statique et dynamique (extraction de valeurs propres), des problèmes thermiques, des problèmes statiques non linéaires, des problèmes dynamiques non linéaires (plasticité, chocs...), des problèmes couplés fluide-structure, etc...

IV.4 Mise en œuvre

IV.4.1 Les processus élémentaires

On distingue deux types de processus élémentaires : les OPERATEUR et les DIRECTIVE

- Les directives modifient un en plusieurs objets existant ou produisent une sortie sur une unité logique (écran, imprimante). Elles ne créent pas de nouveaux objets.
- Les operateurs ont un nom, ils créent un ou plusieurs objets dont les noms sont choisis par l'utilisateur. la seule condition de fonctionnement d'un opérateur dépend de l'existence de l'information au moment de sont utilisation. L'utilisation d'un opérateur

s'écrira : {nom du ((des) résultat(s)) = {nom de l'opérateur} {nom de(s) l'information (s) comme 'DROI' dont la syntaxe est : RESULTAT(S) = OPERATEUR OPERANDES;

- Les procédures qui sont des sous-programmes écrits en langage GIBIANE et qui s'utilisent comme les directives et les opérateurs (enrichissement des possibilités par création de MACRO) [6]

IV.4.2 Règles syntaxique du GIBIANE

Gibiane est le langage qui permet de communiquer avec le programme. La syntaxe est basée sur l'utilisation de directives, d'opérateurs et de procédures qui s'appliquent à des opérands. Dans le premier cas la syntaxe est : DIRECTIVE OPERANDES.

Dans le second cas, la syntaxe est : RESULTATS = OPERATEUR OPERANDES.

La procédure peut utiliser, suivant sa définition, l'une ou l'autre des syntaxes en respectant un certain nombre de règles syntaxiques dont les principales sont données ci-dessous.

- Les caractères espace, virgule, égal, % et deux-points sont des séparateurs.
- Les tabulations ne sont pas comprises par CASTEM. Ainsi, pour la mise en forme des fichiers d'instruction, il faut utiliser seulement des espaces.
- Le point-virgule termine une instruction. S'il est omis à la fin d'une ligne, CASTEM considère que la ligne suivante fait partie de l'instruction. Attention donc à ne pas l'oublier car c'est une cause fréquente d'erreur.
- Une instruction doit être écrite sur moins de 9 lignes, mais une même ligne peut contenir plusieurs instructions.
- Seuls les 72 premiers caractères d'une ligne sont pris en compte.
- L'interpréteur Gibiane ignore toute ligne dont le premier caractère est un astérisque, la ligne étant alors considérée comme un commentaire.
- Les opérateurs et les directives sont définis par leurs 4 premiers caractères, les caractères suivants n'étant pas pris en compte (par exemple TRACER est lu comme l'opérateur TRAC).

- L'instruction est interprétée de gauche à droite. Dès que le programme reconnaît un opérateur, il lui transmet le contrôle de l'exécution. CASTEM ne fait donc pas la priorité des opérations dans les calculs mathématiques.
- Une instruction peut contenir des parenthèses. Conformément aux règles de l'algèbre, les instructions contenues dans les parenthèses les plus internes sont exécutées avant celles contenues dans les parenthèses les plus externes.
- Le signe = permet de donner un nom au résultat d'une instruction.
- La longueur du nom attribué à un objet ne doit pas dépasser 8 caractères. Il est conseillé de terminer le nom d'un objet par un chiffre afin de s'assurer de ne pas utiliser le nom d'un opérateur déjà existant dans CASTEM.
- CASTEM ne fait pas la distinction entre majuscule et minuscule excepté pour les noms d'opérateurs utilisés entre guillemets simples. Ainsi les mots fin, FIN ou 'FIN' feront appel à l'opérateur FIN alors que 'fin' ne sera pas compris.

IV.4.3 Les erreurs les plus fréquentes dans gibiane/castem

Les erreurs les plus fréquents et en même temps les plus difficilement détectable dans Gibiane sont :

- Point virgule manquant à la fin d'une instruction
- Longueurs du nom d'un objet de plus 8 caractères
- Lignes d'instruction de plus de 72 caractères

Lorsque CASTEM 2000 rencontre une erreur dans la suite des instructions, il interrompt son exécution et affiche le message d'erreur relatif à l'erreur reconnue. Ce message peut se décomposer en trois parties :

- le nom de l'opérateur ou l'erreur est reconnue (première ligne du message).
- les objets manquants ou mal utilisés suivis de leur type et de leur nom (lignes intermédiaires).
- les données de la commande suivie de leur type (deux dernières lignes).

Ce sont généralement les deux dernières lignes du message d'erreur qui permettent à l'utilisateur de reconnaître la nature de son erreur.

IV.5 Les principes de développement de CASTEM 2000

CASTEM 2000 est avant tout un outil pour faire des calculs. Elle intègre tous les procédés utilisés dans le passé et doit être en mesure d'accueillir tous ceux dont on aura besoin dans l'avenir à traiter de nouveaux problèmes. Il permet à l'utilisateur de s'adapter selon ses calculs à problèmes "dont il faut résoudre. Elle fait connaître à l'utilisateur du problème découlant et les méthodes employées. [6]

IV.5.1 La simplicité

Il s'agit d'un principe de bon sens, mais dont l'application n'est pas si aisée. C'est le fondement de la démarche scientifique : il est facile de faire des choses compliquées à partir de choses simples. Par ailleurs, simple ne signifie pas simpliste.

IV.5.2 L'orthogonalité des processus

Cette règle est basée sur deux idées :

- Les processus sont indépendants entre eux : on peut changer ou modifier un processus sans toucher aux autres.
- Tous les processus peuvent se combiner, c'est ce qui fait la puissance du code.

Il en résulte que l'on peut tester le fonctionnement des processus de manière indépendante. [6]

IV.5.3 La visibilité et la localité des processus

La visibilité vise à supprimer l'existence de données cachées, en imposant que toutes les données soient indiquées au processus de manière visible, là où elles sont utilisées. La localité permet principalement de détecter les erreurs de données à l'endroit où elles sont définies et non pas beaucoup plus loin dans le calcul, ce qui rendrait leur diagnostic malaisé.

Cette double règle a un corollaire immédiat : l'information créée par le processus doit aussi être visible.

IV.5.4 La régularité des processus

Il s'agit d'une part de la régularité dans l'utilisation des processus et d'autre part de la régularité dans les possibilités d'un processus.

- Régularité dans l'utilisation des processus : il n'existe pas d'exception dans la syntaxe des données. Ceci permet d'avoir des syntaxes identiques pour des processus différents ayant besoin des mêmes données.
- Régularité dans les possibilités d'un processus : il n'existe pas d'exception dans les opérations possibles du processus.

IV.5.5 La documentation des processus

La documentation d'un processus fait partie du processus et elle doit être développée simultanément au processus. C'est elle qui permet à l'utilisateur de connaître la fonction du processus et son utilisation.

IV.6 Système d'unité

CASTEM ne dispose d'aucun système particulier d'unités de mesure. C'est à l'utilisateur de fournir les données dans un système cohérent. Une fois que les unités de mesure utilisées dans les données sont définies, tous les résultats seront exprimés dans ces mêmes unités.

Il existe cependant une exception à cette règle concernant la mesure des angles qui doivent toujours être exprimés en degrés.

Le tableau suivant présente trois exemples de systèmes cohérents :

Longueur	Force	Contrainte
m	N	Pa
m	MN	MPa
mm	N	MPa

Tableau IV.1 : Système d'unité

IV.7 Types d'objets et principaux opérateurs

Les objets disponibles dans CASTEM 2000 sont classés selon le type d'informations qu'ils renferment et selon la signification que prennent ces informations dans l'analyse. On note également que le type de chaque objet peut être obtenu en listant son contenu à l'aide de l'opérateur LIST.

Nous allons cependant revenir sur quelques objets souvent utilisés dans CASTEM.

IV.7.1 Objet de type Champ par point :

Dans un objet de type champ par point (CHPOINT), on associe à chaque point une ou plusieurs composantes qui sont repérées par leur nom. Les noms des composantes sont :

- soit choisis par l'utilisateur
- soit déterminés par les opérateurs qui créent les objets.

Le champ peut être indéterminé, diffus (quand il représente une grandeur continue comme un champ de déplacement) ou discret (quand il représente une valeur discrète comme une force nodale).

Les points concernés par le CHPOINT sont référencés dans un objet maillage qui contient des éléments à 1 nœud.

IV.7.2 Objet de type Champ par élément

Ce sont des objets contenant des données définies dans les éléments, par exemple :

- des caractéristiques des matériaux
- des caractéristiques géométriques (épaisseurs, section...).
- des contraintes....

Le champ est connu par ses valeurs définies soient :

- au centre de gravité de l'élément
- aux nœuds de l'élément
- aux points d'intégration de l'élément.

Remarquons que l'on peut construire un champ par point à partir d'un champ par élément. Pour cela, on calcule la moyenne aux nœuds des éléments adjacents.

IV.7.3 Objet de type Liste

On peut définir un objet de type liste de réels (LISTREEL) par le biais de l'opérateur PROG. Ex : LISTE1 = 'PROG' 0. 0.5 1. 1.5 2.0 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 ;

On peut utiliser la notion de pas, de nombre de pas et de nombre de valeurs à répéter pour alléger les écritures. Ainsi LISTE1 pouvait également s'écrire : LISTE1 = 'PROG' 0. PAS 0.5 NPAS 5 4*2.5 ; On peut, de la même manière, créer des listes d'entiers (LISTENTI) avec l'opérateur LECT.

IV.7.4 Objet de type Evolution

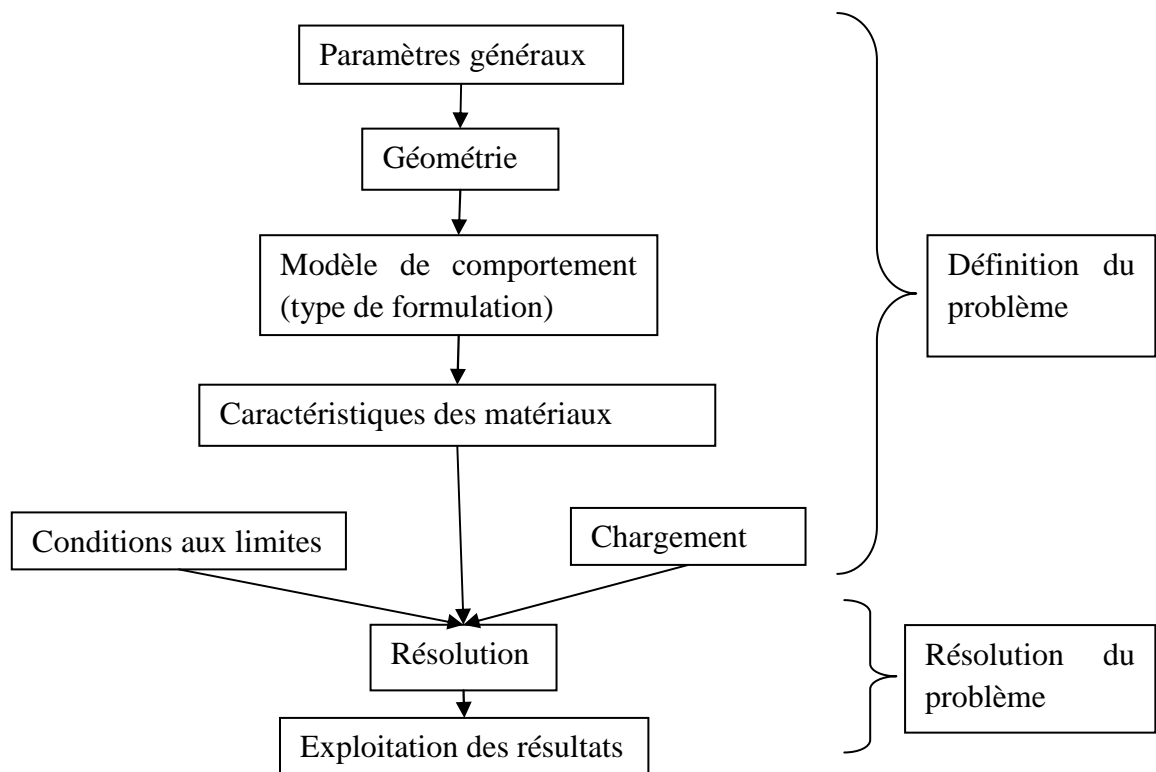
A partir de plusieurs listes on peut définir l'évolution d'une ou plusieurs grandeurs en fonction d'un paramètre. L'opérateur utilisé est EVOL(UTION) avec l'option MANU et l'objet créé est de type évolution. Ex : LISTEX = 'PROG' 0. PAS 1 9 ;

EVOL1 = 'EVOL' 'MANU' 'TEMPS' LISTEX 'FORCE' LISTE1 ; L'opérateur EVOL supporte une autre option couramment utilisée :

- CHPO : qui permet de définir l'évolution d'une composante d'un champ par point (déplacement, force...) le long d'une ligne de nœuds.

IV.8 Procédure de résolution d'un problème avec CASTEM

Tout problème (mécanique, thermique, chimique,...) résolu avec CASTEM doit être construit de la manière suivante :



IV.8.1 Paramètres généraux

Il s'agit de définir les options générales du calcul. On précise notamment ici la

dimension du problème (1D, 2D, 3D), le type d'éléments utilisés, les hypothèses de calcul (par exemple "contraintes planes").

IV.8.2 Géométrie

La géométrie des différents éléments que l'on souhaite calculer se définit toujours selon la démarche suivante :

- construction des points,
- construction des lignes à partir des points,
- construction des surfaces à partir des lignes,
- construction des volumes à partir des surfaces.

IV.8.3 Modèle de comportement

Le code CASTEM permet de gérer des problèmes très variés (mécanique, fluide, thermique, ...). Il faut donc préciser avant tout calcul le modèle de comportement associé aux différentes géométries définies. Les différentes formulations intégrées dans CASTEL sont :- mécanique- liquide- thermique- convection- poreux- darcy- frottement- rayonnement- liquide mécanique.

A chacune de ces formulations est associée une (ou plusieurs) loi de comportement. Par exemple pour la formulation MECANIQUE on trouve des lois de comportement élastique, plastique, ...

IV.8.4 Caractéristiques des matériaux

Le modèle de comportement choisi nous indique alors les différentes caractéristiques physiques ou mécaniques à préciser. Par exemple pour un modèle MECANIQUE ELASTIQUE on devra fournir le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.

IV.8.5 Conditions aux limites et chargement

La définition des conditions aux limites et des chargements imposés à l'élément étudié est essentielle à la résolution de tout problème élément fini.

Par exemple, pour un problème mécanique, les conditions aux limites pourront être des déplacements bloqués et les chargements des forces imposées (poids propre, force ponctuelle). Pour un problème thermique, les conditions aux limites pourraient des

températures imposées et les chargements des sources de chaleur.

IV.8.6 Résolution

La résolution est dans la majorité des cas gérée par des opérateurs de CASTEM. Elle peut être linéaire (élasticité, thermique stationnaire,...) ou non linéaire (plasticité, viscoélasticité, thermique transitoire, ...). Dans ce dernier cas, la résolution est approchée à l'aide de méthodes numériques (résolution explicite, implicite, semi-implicite, ...).

IV.8.7 Post-traitement

La résolution des problèmes thermiques donne accès à la température aux nœuds de la géométrie. La résolution des problèmes mécaniques donne quant à elle la valeur du déplacement aux nœuds de la géométrie. Il convient alors d'exploiter ce déplacement pour déduire les autres résultats attendus (déformations, contraintes, ...).

IV.9 Le maillage

Le maillage est la décomposition en parties élémentaires de la pièce. Les déformations et les contraintes sont appliquées aux nœuds, une certaine densité de nœuds est donc nécessaire pour décrire au mieux le comportement du modèle. On est cependant limité par les performances de l'ordinateur lorsque cette densité est trop élevée, une forte densité de nœuds dans les zones peu ou pas contraintes est inutile et n'améliore pas la qualité de l'image. Il s'agit d'adapter cette densité aux conditions aux limites de chargement. Il est préalable d'avoir une densité de nœuds plus élevée aux endroits les plus sollicités.

IV.9.1 Objet du maillage

L'objet du maillage est de discrétiser géométriquement le domaine d'analyse de manière à pouvoir ultérieurement associer une formulation éléments finis au support géométrique.

Concrètement cette discrétisation s'effectue par la création d'objets de type maillage (points, lignes, surfaces, volumes) à l'aide des opérateurs géométriques.

La technique à suivre est presque toujours la même :

- construction des points
- construction des lignes à partir des points
- construction des surfaces à partir des lignes

- construction des volumes à partir des surfaces.

Les objets de type MAILLAGE constituent le support géométrique des éléments finis qui seront définis ultérieurement. Le type des supports géométriques doit donc être en accord avec les éléments finis qui seront utilisés : par exemple, si les éléments sont de type poutre, barre ou coque axisymétrique, les supports géométriques correspondants devront être des SEG2 (segments à 2 nœuds).

IV.10 Représentation de quelques directives

IV.10.1 La directive OPTI(ON)

Permet de déclarer les principaux paramètres du programme, par exemple la dimension de l'espace, le type d'éléments géométriques utilisé....

IV.10.2 La directive TRAC(ER)

Trace un objet de type maillage (ici la surface de base). L'option QUAL(IFICATION) permet d'afficher les noms des objets visualisés à l'écran.

IV.10.3 La directive MESS(AGE)

Permet d'afficher un message sur l'unité de sortie.

IV.10.4 La directive DENS(ITE)

Dans une opération de maillage, la directive DENSITE sert à définir la taille locale de la maille s'appuyant sur les points à construire. Elle est paramétrée puis affectée au voisinage d'un point nommé et peut donc prendre une valeur différente en chacun des points. Au cours d'une opération de création de mailles entre deux points le programme s'arrangera pour que la taille en ces points soit la densité associée et pour qu'une progression géométrique des tailles soit réalisée. Dans la saisi d'un programme, la densité peut être répété en prenant d'autres valeurs sans que celles des points définis antérieurement soient modifiées. la valeur lue est exprimée dans la même unité que les coordonnées des points.

IV.11 Représentation de quelques opérateurs

IV.11.1 L'opérateur DROI(TE)

L'opérateur DROI(TE) permet de construire une ligne droite à partir de ses deux points extrêmes et de la règle permettant de calculer les coordonnées des points internes. Ces lignes créées sont orientées et automatiquement subdivisées en un certain nombre de segments que l'on pourra spécifier.

Les opérateurs CERC, CER3, PARA, CUBP, CUBT, COURBE, QUELCONQUE et INTERSECTION permettent également de tracer des courbes telles que des arcs de cercle, de paraboles, des lignes brisées... On se reportera à la notice d'utilisation de CASTEM 2000 pour plus de précision.

IV.11.2 L'opérateur DALL(ER)

Permet de construire une surface délimitée par 4 côtés ayant deux à deux le même nombre de points et formant une ligne fermée. Il a été étendu à des cas où les cotés se faisant face n'ont pas le même nombre de points. Le résultat obtenu n'est alors pas toujours satisfaisant, il faut alors utiliser l'opérateur SURFACE. On peut aussi définir une surface entre deux segments avec l'opérateur REGL(ER), ou à partir de la translation ou de la rotation d'une ligne quelconque avec les opérateurs TRAN et ROTA.

IV.11.3 L'opérateur VOLU(ME)

Permet de construire des volumes. Ceci peut se faire :

- Par translation de surface suivant un vecteur avec l'option TRAN comme dans notre exemple.
- par translation parallèlement à une génératrice avec l'option GENE. Exemple : `VOL2 = SURF1 VOLU 10 GENE LIG1 ;`
- Par rotation de surface entre deux vecteurs. Exemple : `VOL3 = SURF1 VOLU 10 ROTA SURF2 ;`
- en construisant un maillage automatique à partir de la donnée de l'enveloppe du volume. Exemple : `VOLE = SURFENV VOLU ;`

Le nombre 10 signale que l'on met 10 éléments dans la direction donnée. Le second et seul autre opérateur permettant de créer des volumes est l'opérateur PAVE(R) qui maille

l'intérieur d'une surface parallélépipédique. Mais uniquement dans ce cas où les six faces ont été générées par DALL(ER).

IV.11.4 L'opérateur MODE(LE)

Sert à définir un type de comportement et une formulation E.F. qui seront affectés à un objet de type maillage.

IV.11.5 L'opérateur EXTR(AIRE)

Permet d'extraire une composante d'un ensemble de valeurs.

IV.11.6 L'opérateur DEFO(RME)

Construit la déformée d'une structure à partir de la géométrie initiale et d'un champ de déplacement. On peut également préciser un certain nombre d'options comme la couleur (ici BLAN(C) et ROUG(E)), ou le facteur d'amplification pour rendre les phénomènes plus visibles. Ici on utilise un facteur multiplicatif de 0 sur DEF0. Ceci permet de visualiser la structure non déformée en même temps que la déformée finale DEF1.

IV.11.7 L'opérateur PRES(SION)

Permet de construire un chargement représentatif d'une pression. Il peut être suivi de l'option COQU quand il s'applique à des éléments coques ou MASS(IF) quand il s'applique à des éléments massiques. Il est également nécessaire de préciser le modèle sur lequel on applique la pression, la valeur de cette pression dans l'unité adéquate.

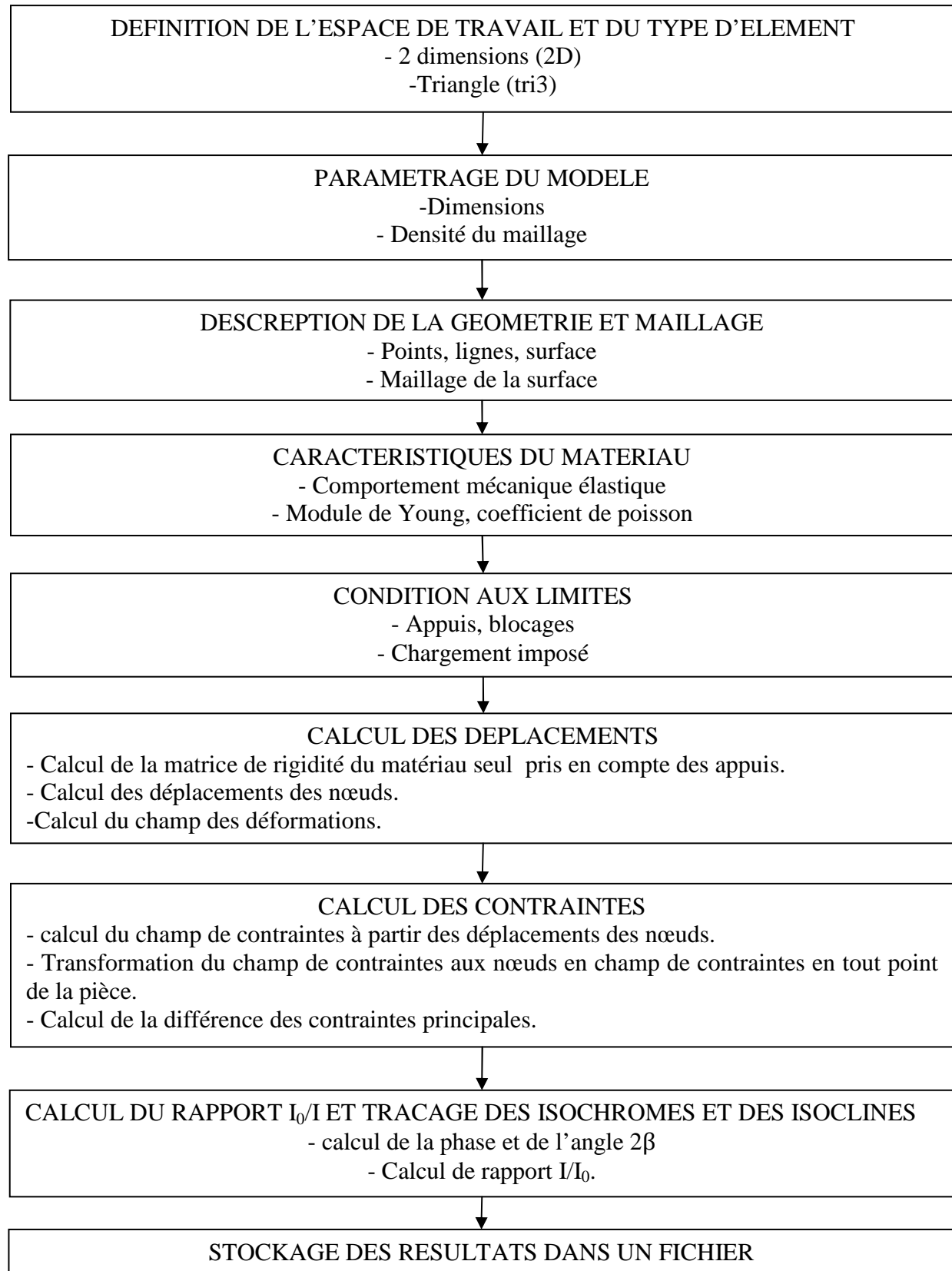
IV.11.8 L'opérateur VECT(EUR)

Nous permet de construire un objet contenant les forces sous forme de vecteur dont on précise la taille, les directions d'étude et la couleur.

IV.11.10 L'opérateur BSIG

Calcule le champ de forces nodales résultant de l'intégration d'un champ de contraintes. On constitue ainsi un champ de forces thermiques.

IV.12 Architecture générale des programmes que nous avons établi



IV.13 Conclusion

CASTEM présente un système complet, intégrant les fonctions de calcul et des fonctions de construction du modèle et de traitement des résultats, son développement entre dans le cadre d'activité de recherche dans le domaine de la mécanique. Il peut nous servir de support pour la conception, le dimensionnement et l'analyse de structures et de composants que nous allons appliquer dans la partie numérique.

Partie pratique et partie numérique

V.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier le contact plan / plan en présence d'un effort tangentiel par l'application des deux méthodes, expérimentale et numérique pour la détermination des champs de contraintes au niveau du plan.

La comparaison des résultats se fera d'une part, par la superposition des courbes de la variation des contraintes et d'autre part par les réseaux d'isochromes et des isoclines obtenues expérimentalement et numériquement.

V.2 Partie pratique

V.2.1 Modèle utilisé

Dans cette étude on utilisera deux pièces, la première est en époxy déformable (figure. V.1) symbolisant le premier plan, de 56mm de longueur de 56mm de hauteur de 12mm d'épaisseur de module de Young $E=15\text{MPa}$, de coefficient de poisson $\nu=0.45$ et de constante de frange $f=0.17\text{ N.mm/ordre}$.

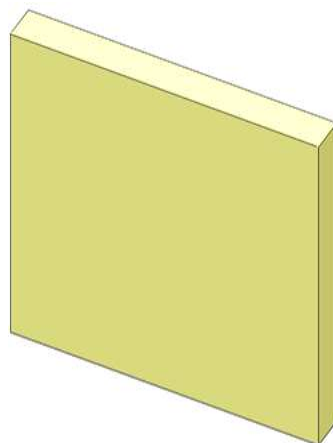


Figure. V.1 Représentation du modèle utilisé

La deuxième pièce est un parallélépipède en aluminium de 12mm de largeur et de 10mm de hauteur de 33mm de longueur figure V.2.

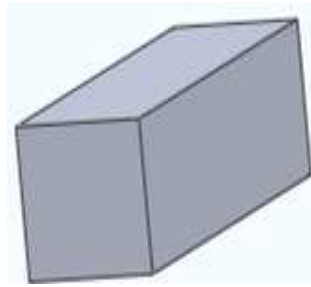


Figure V.2 : Parallélépipède en aluminium

Les deux pièces en contact sont représentées dans la figure V.3.

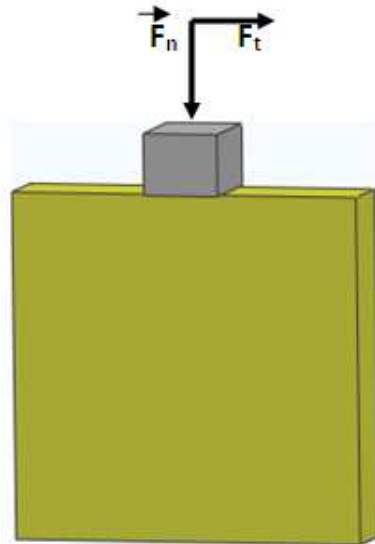


Figure V.3: Représentation du contact entre les deux

V.2.2 Dispositif de chargement

Le dispositif de chargement (figure V.4) permet d'appliquer simultanément un effort normal et un effort tangentiel. Le dispositif est ensuite placé sur un polariscope pour l'analyse des franges photoélastiques développées dans le plan, particulièrement au voisinage des zones de contacts.

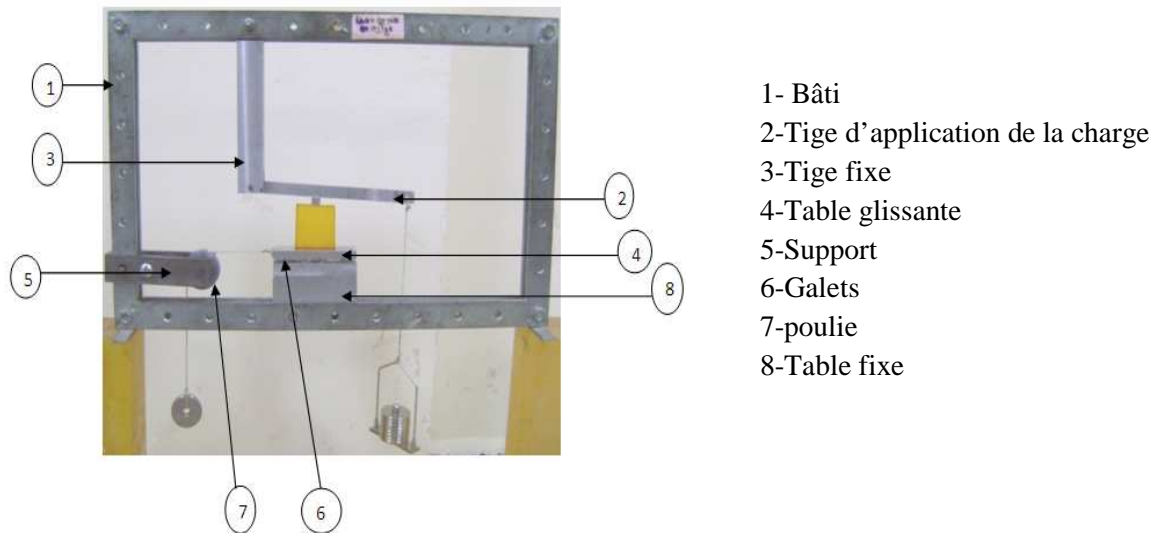


Figure V.4: dispositif de chargement

Les différentes pièces du dispositif sont représentées en perspective dans la figure V.5.

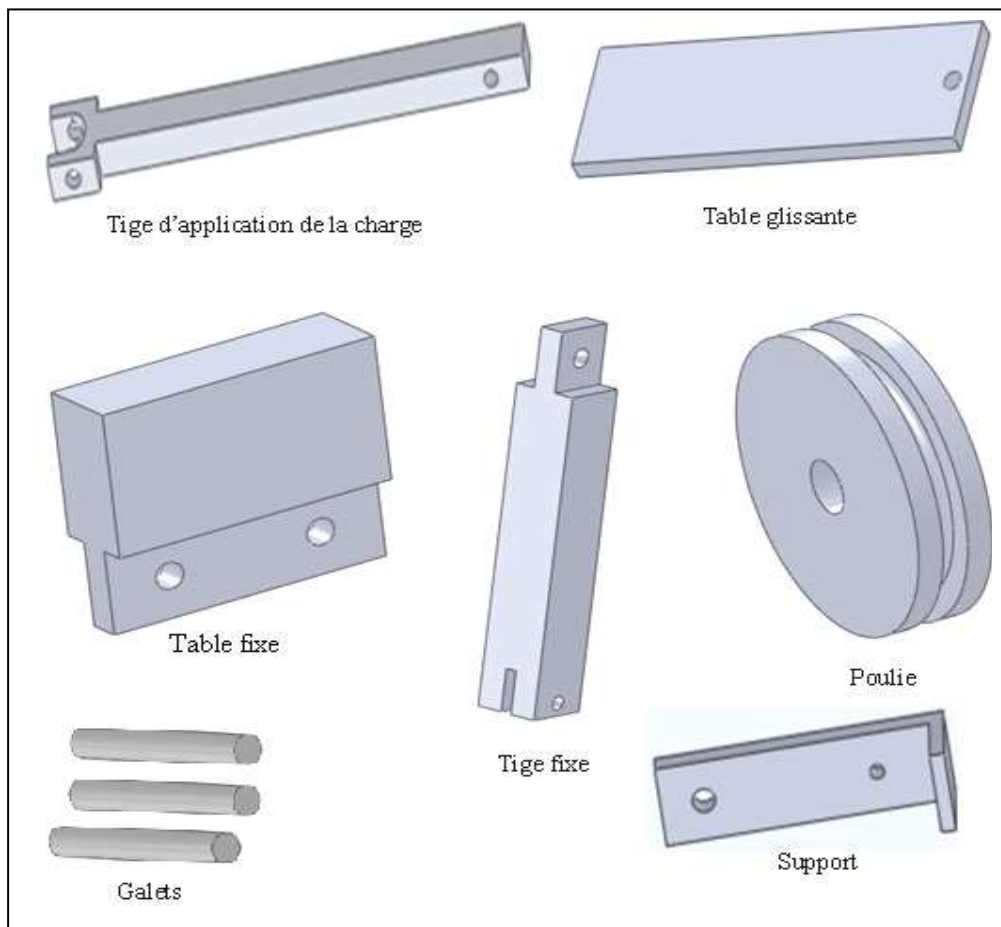


Figure V.5 : Représentation des différentes pièces

V.2.3 Application de la charge

V.2.3.1 Effort normal

L'effort normal est appliqué grâce à la tige d'application de la charge, dans notre cas, on peut modéliser cette tige comme le montre la figure V.6. Le poids de la tige est concentré au centre de gravité et la charge est appliquée au point C.

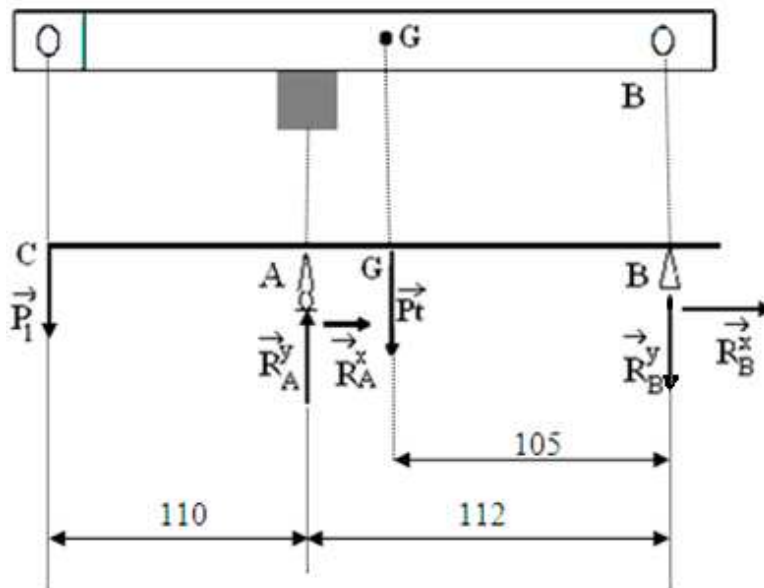


Figure V.6 : Représentation de la tige d'application de la charge

▪ Caractéristique de la tige d'application de la charge

Masse = 130 grammes

Volume = 47210 millimètres cubes

Centre de gravité: (millimètres)

$$X = -123.17 \text{ mm}$$

▪ Calcul des réactions d'appuis

$$\sum F_{ext/x} = 0$$

$$R_A^x + R_B^x = 0 \Rightarrow R_A^x = -R_B^x = 0$$

$$\sum MF_{ext/B} = 0$$

$$-P_1 \times 222 + R_A^y \times 112 - Pt \times 105 = 0$$

$$R_A^y = \frac{P_1 \times 222 + Pt \times 105}{112}$$

$$R_A^y = 13,26N$$

$$P_p = 0,012 \times 9.81 = 0,12N$$

Avec :

P1 : charge appliquée

Pt : poids de la tige

P_p : Poids du parallélépipède en aluminium

L'effort normal appliqué est égal :

$$F_N = 13,26 + 0,12 = 13,38$$

$$F_N = 13,38N$$

V.2.3.2 Effort tangentiel

L'effort tangentiel est appliqué à l'aide d'une table glissante et une poulie, la valeur de cet effort est égale à : $F_T = 2,78N$

V.2.4 Analyse expérimentale des contraintes

V.2.4.1 Application d'un effort normal

La manipulation consiste à étudier le contact plan sur plan en utilisant un dispositif de chargement conçu à cette fin et illustré sur la figure (V.4).

On commencera d'abord par l'étude du contact plan sur plan en appliquant uniquement l'effort normal. Dans la deuxième expérience on appliquera simultanément un effort normal et un effort tangentiel. Ceci dans le but de voir l'effet sur la distribution des champs des contraintes.

Entre l'analyseur et le polariseur du polariscope est déposé le modèle et après chargement et sous différentes lumières on observe le champ d'isochromes. Sous une lumière polychromatique en champ clair et en champ sombre on observe les franges colorées et sous une lumière monochromatique elles apparaissent en noir et blanc.

V.2.4.1.1 Différence de contraintes principales suivant l'axe de symétrie vertical

Pour la détermination de la variation de la différence des contraintes principales, on doit d'abord visualiser le réseau d'isochromes sur le polariscope, ici en lumière monochromatique en champs sombre et en champ clair, puis repérer chaque frange avec son ordre correspondant et en appliquant les lois de Maxwell on détermine ces contraintes.

V.2.4.1.2 Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ clair

On définit le segment [A B] au niveau du plan de symétrie du modèle donné avec les isochromes visualisé où A désigne le milieu de la zone de contact et B un point du bord comprimé. La Différence des contraintes suivant le segment [A B] est donnée par la relation de Maxwell :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e}$$

N : Ordre de frange

F : constante de frange

e : épaisseur du modèle

A l'intersection du segment [A B] avec les franges isochromes on relève les ordres des franges et les distances correspondantes par rapport au point de contact A.

Sachant qu'on a utilisé un champ clair dans le premier relevé des isochromes, la première frange, en partant du bord libre supérieur correspond à une valeur d'ordre de 0,5. Les autres franges sont ensuite repérées sur toute la surface du modèle (figure V.7).

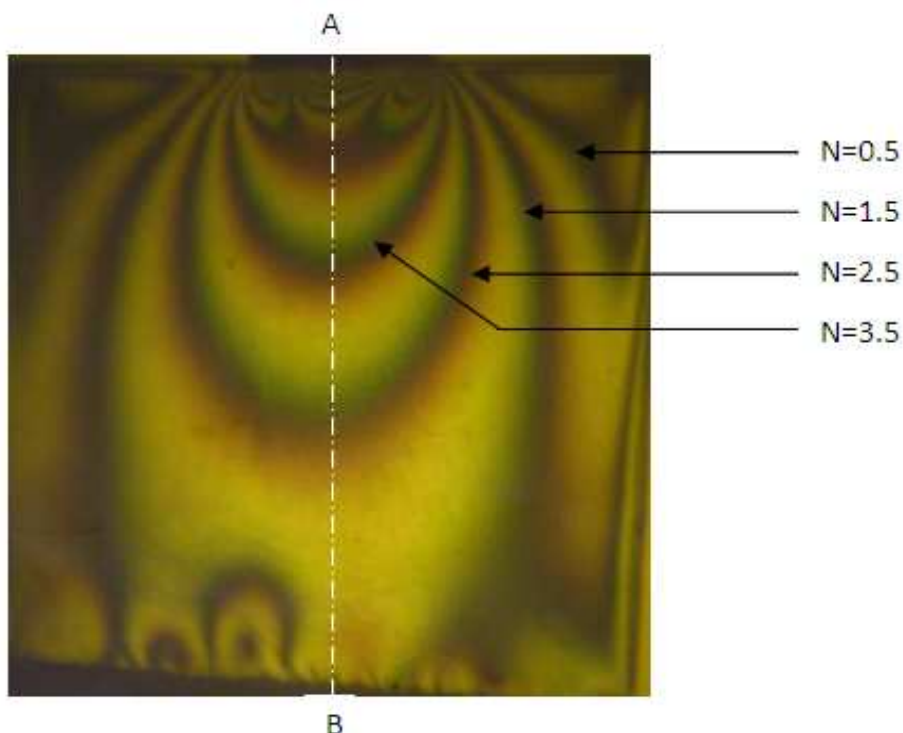


Figure V.7 : Réseau d'isochromes sur le modèle en champ clair

V.2.4.1.3 Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ sombre

Pour le deuxième relevé d'isochromes en champ sombre, la première frange, en partant du bord libre supérieur correspond à une valeur d'ordre de frange $N=1$. Les autres franges sont ensuite repérées sur toute la surface du modèle figure V.8. Ces valeurs sont portées sur un tableau à partir duquel on trace le graphe de l'évolution de la différence des contraintes principales.

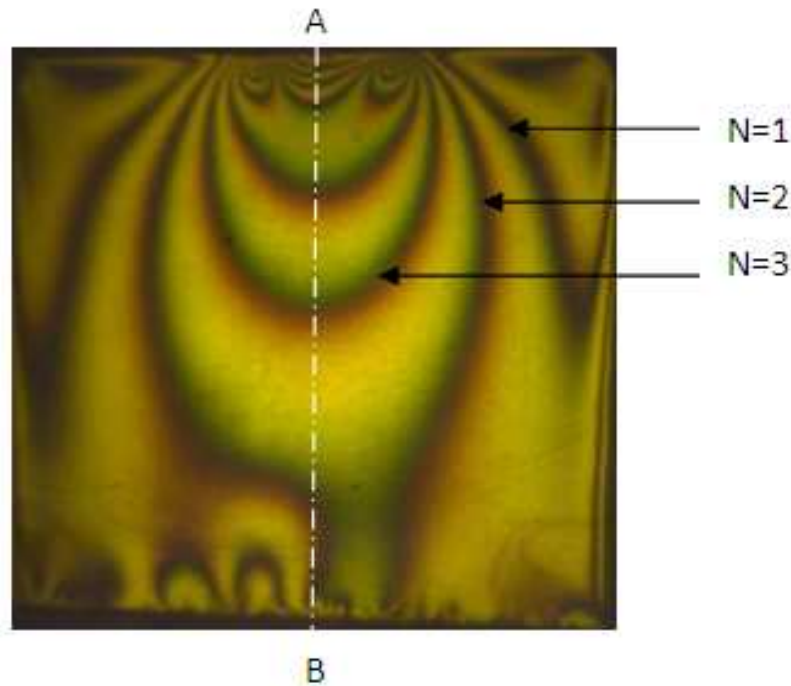


Figure V.8: Réseau d'isochromes sur le modèle en champ sombre

V.2.4.1.4 Détermination de la différence de contraintes principales sur l'axe de symétrie vertical

Les résultats obtenus sont donnés sur le tableau suivant :

N : Ordre de frange	Distance sur l'image (mm)	Distance réel (mm)	Différence de Contrainte (MPa)
2	60	40,21	0,028
2.5	44	29,42	0,035
3	33	20,32	0,043
3,5	24.5	14,05	0,05

Tableau V. 1 : Valeurs de la différence de contraintes relevées expérimentalement

La variation de la différence des contraintes principales est donnée par la courbe de la figure V.9. On remarque que la différence de contraintes principales décroît en s'éloignant de la zone de contact correspondant bien à l'analyse de Hertz.

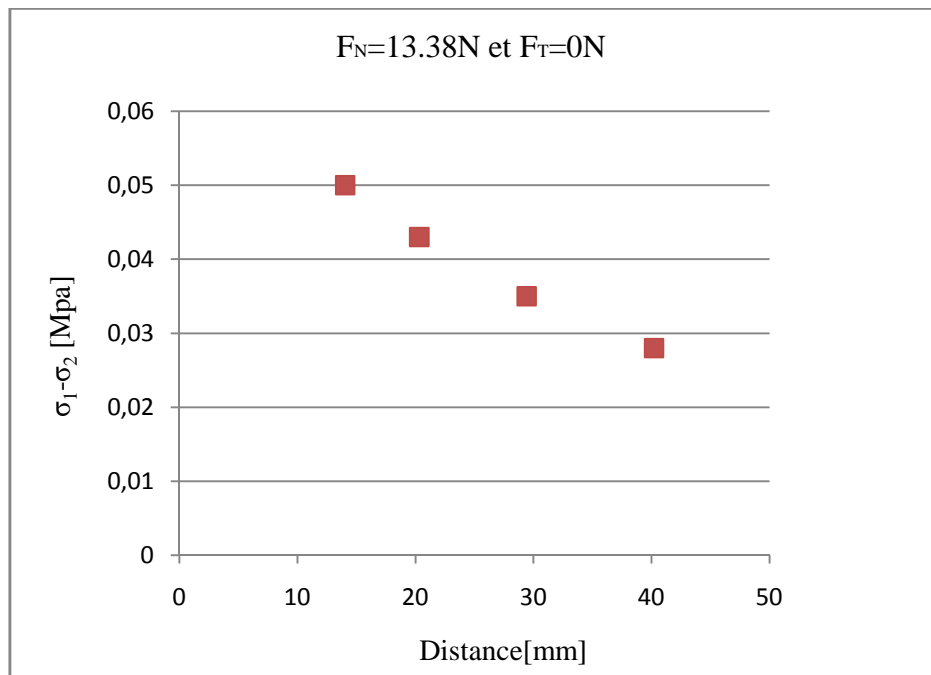


Figure V.9 : Différence des contraintes principales suivant l'axe de symétrie vertical pour le contact plan/ plan obtenues expérimentalement

On note aussi qu'au niveau de la zone de contact jusqu'à la distance de 12 mm la méthode expérimentale ne donne pas de renseignement sur la répartition des charges car les franges sont difficiles à exploiter une analyse avec une lumière à vapeur de mercure aurait certainement donné de meilleurs résultats avec la lumière cohérente.

V.2.4.1.5 Visualisation des franges isoclines

En faisant tourner les deux polaroïds simultanément on visualise les isoclines (figure V.10) qui apparaissent une à une suivant l'angle de rotation. On remarque toujours qu'en faisant tourner les deux polaroïds les franges isoclines apparaissent en zones sombres très visibles sur les images. Elles changent de position suivant l'angle de rotation. On rappelle que les isoclines ne dépendent pas de l'intensité du chargement.

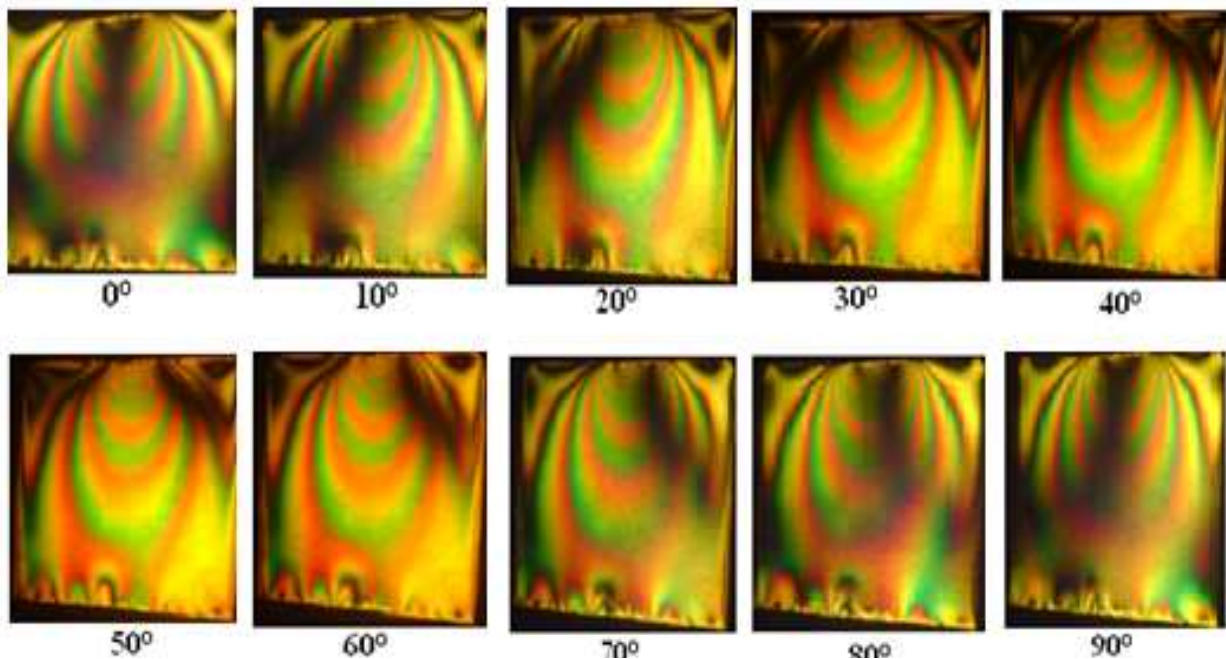


Figure V.10: Relevé des isoclines par rotation des polaroids par pas de 10 degrés

V.2.4.1.6 Exploitation des isoclines

L'exploitation des isoclines permet de déterminer les directions principales des contraintes. On peut tracer les trajectoires des contraintes principales appelées aussi isostatiques à partir de la connaissance des isoclines. La figure V.11 représente le tracé de chaque isocline correspondant à l'angle de rotation des deux polaroids, qui dans ce cas correspond à un pas de 10 degrés.

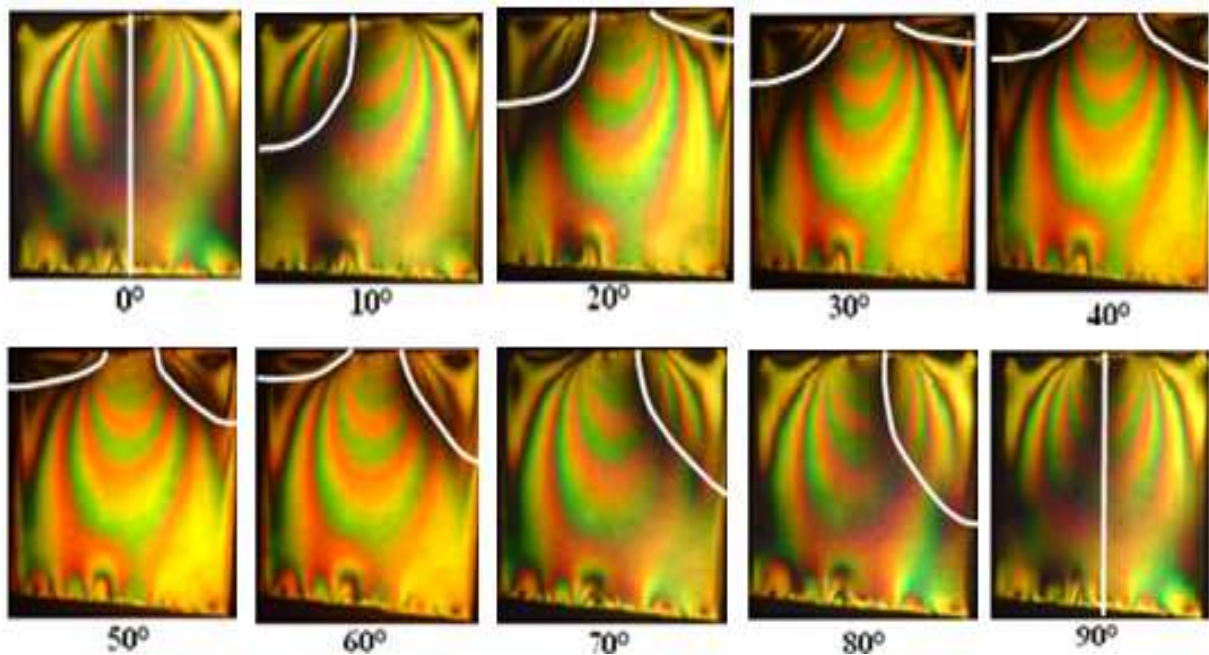


Figure V.11: Localisation des isoclines correspondant aux directions principales

En rassemblant toutes ces isostatiques sur la même figure puis on trace les isostatiques.

La figure V.12 représente les points par lesquels passeront les isostatiques à partir des isoclines. Les points intermédiaires s'obtiennent par interpolation graphique.

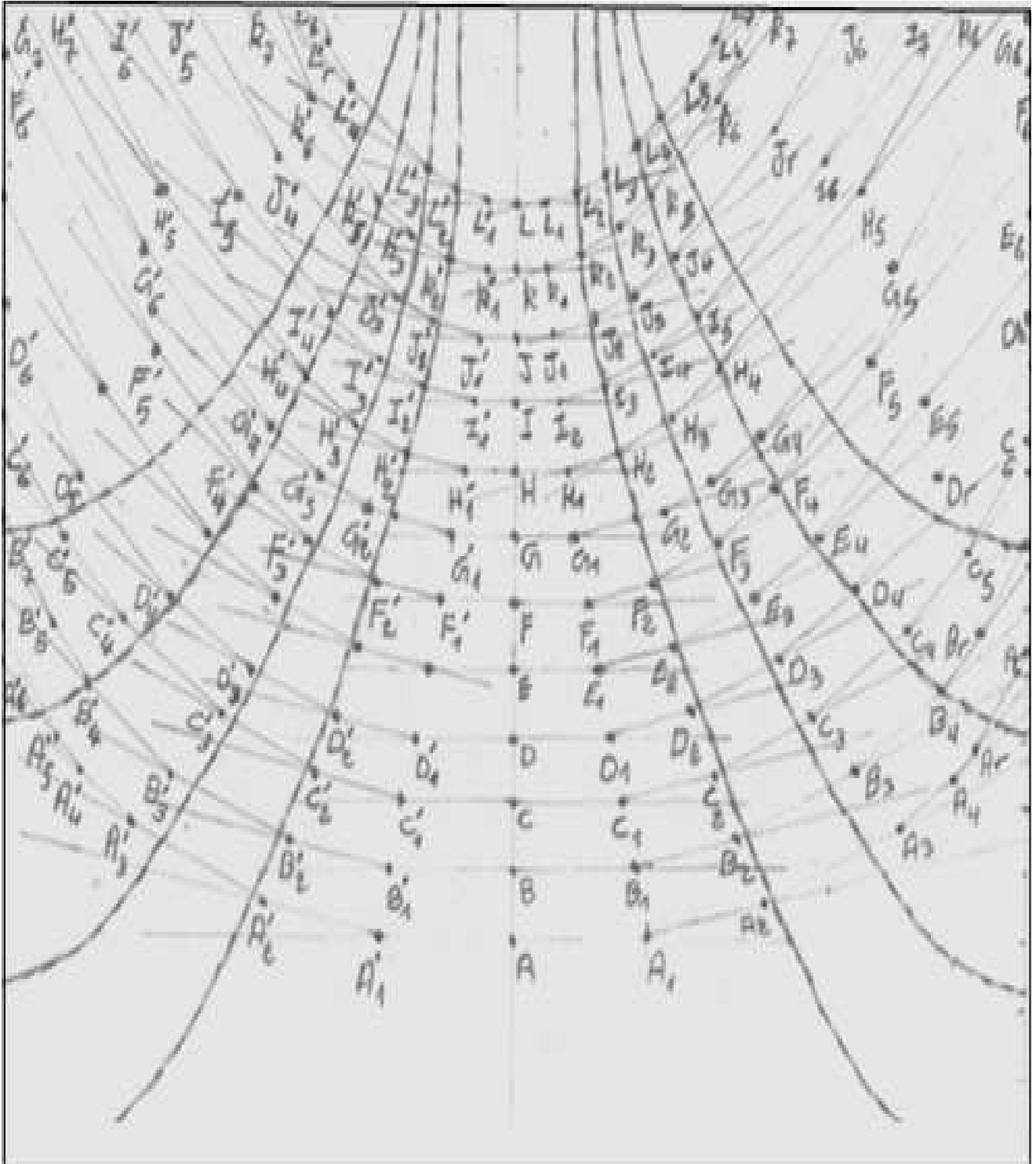


Figure V.12: Tracé des Isoclines et des isostatiques pour le contact plan sur plan

La figure V.13 représente les isoclines et les isostatiques pour le contact plan / plan en présence d'un effort normal.

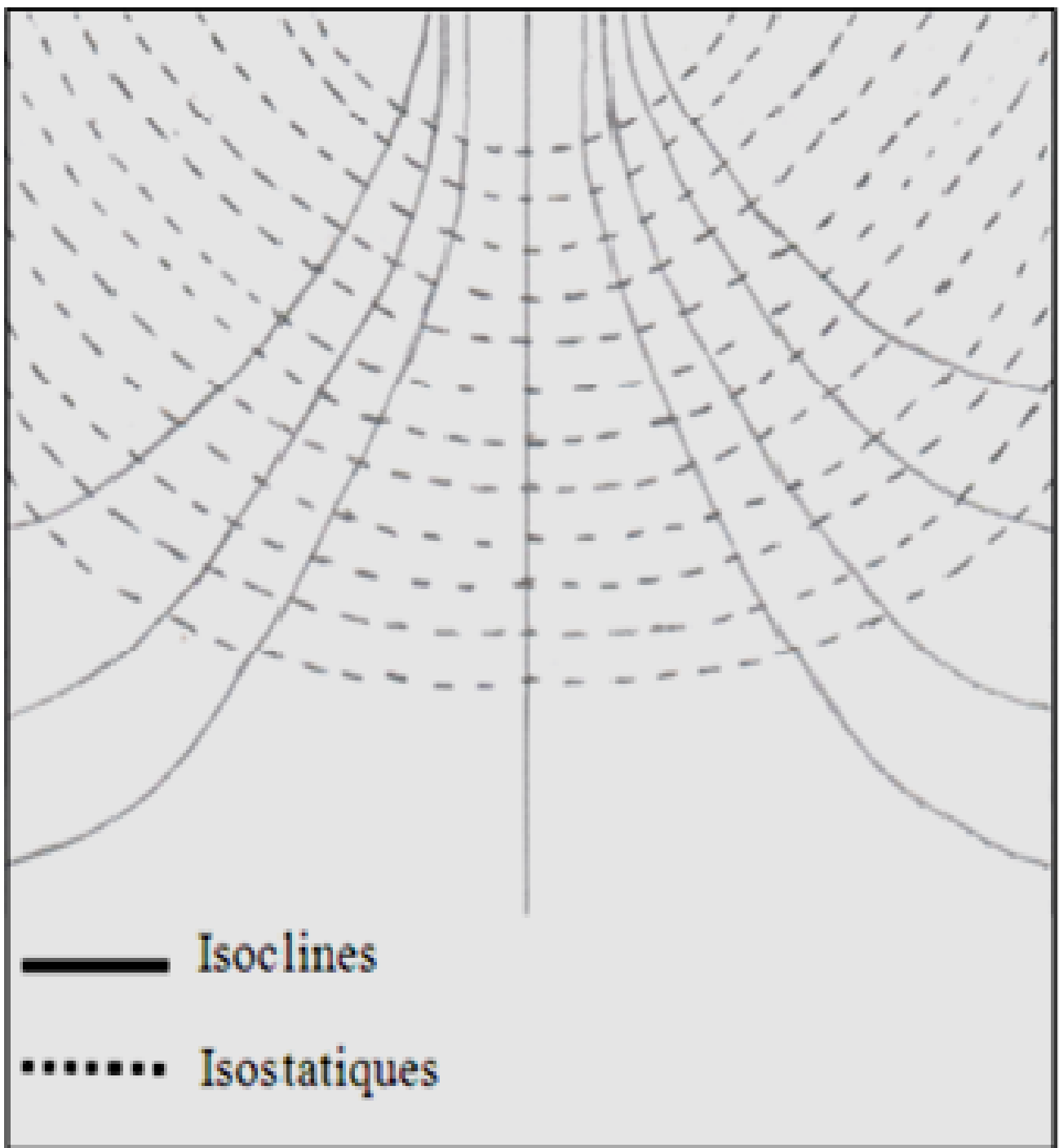


Figure V.13 : Isoclines et isostatiques pour le contact plan / plan

V.2.4.2 Application d'un effort tangentiel

On refait les mêmes procédures pour l'effort tangentiel pour voir l'effet de ce dernier sur les réseaux d'isochromes et d'isoclines.

V.2.4.2.1 Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ sombre

Pour déterminer la différence de contraintes principales, on doit d'abord visualiser le réseau d'isochromes sur le polariscope à transmission en lumière monochromatique en champ obscur, puis repérer chaque frange avec son ordre correspondant et en utilisant les lois de Maxwell pour la détermination de ces contraintes.

La figure V.14 représente le réseau d'isochromes en champ obscur, sachant que l'ordre de la première frange $N=1$ en champ obscur.

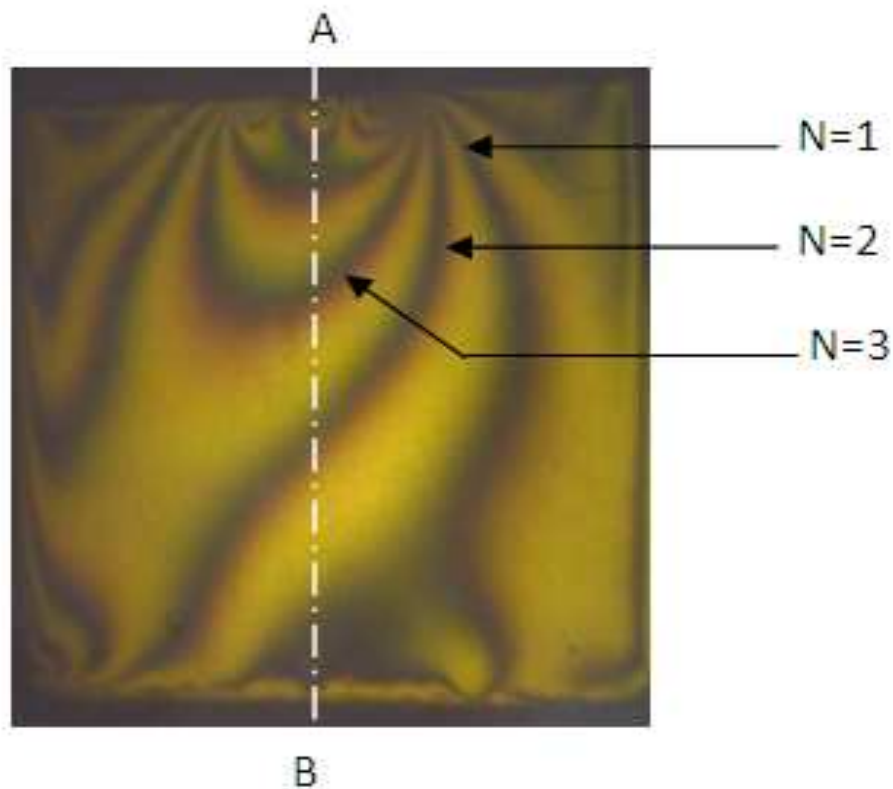


Figure V.14: Réseau d'isochromes sur le modèle en champ sombre en présence d'un effort tangentiel

V.2.4.2.2 Visualisation du réseau d'isochromes sur le modèle en champ clair

Pour le deuxième relevé d'isochromes toujours en présence d'un effort tangentiel, l'ordre de la première frange $N=0,5$. Les autres franges peuvent être repérées sur toute la surface du modèle (figure V.15).

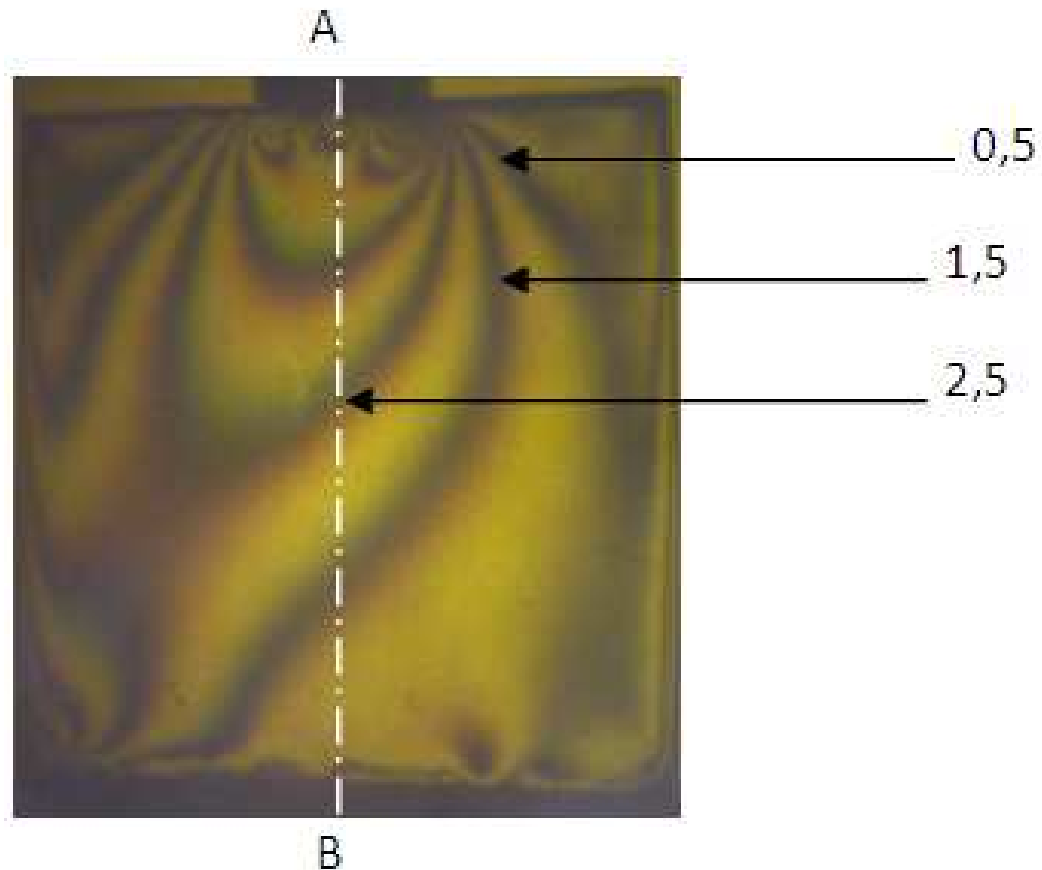


Figure V.15: Réseau d'isochromes sur le modèle en champ clair en présence d'un effort tangentiel

V.2.4.2.3 Détermination de la différence de contraintes principales suivant l'axe vertical

La différence de contraintes et les ordres des franges obtenues en champ clair et obscur sont représentés dans le tableau V.2.

N : Ordre de frange	Distance sur l'image (mm)	Distance réel (mm)	Différence des Contraintes (MPa)
1,5	47,5	40,47	0,021
2	38	34,56	0,028
2,5	28,521	26,28	0,035
3	15.5	19,33	0,043
3,5	10	13,57	0,05

Tableau V. 2 : Valeurs de la différence des contraintes relevées expérimentalement en présence d'un effort tangentiel

La variation de la différence des contraintes principales est donnée par la courbe de la figure(V.16).

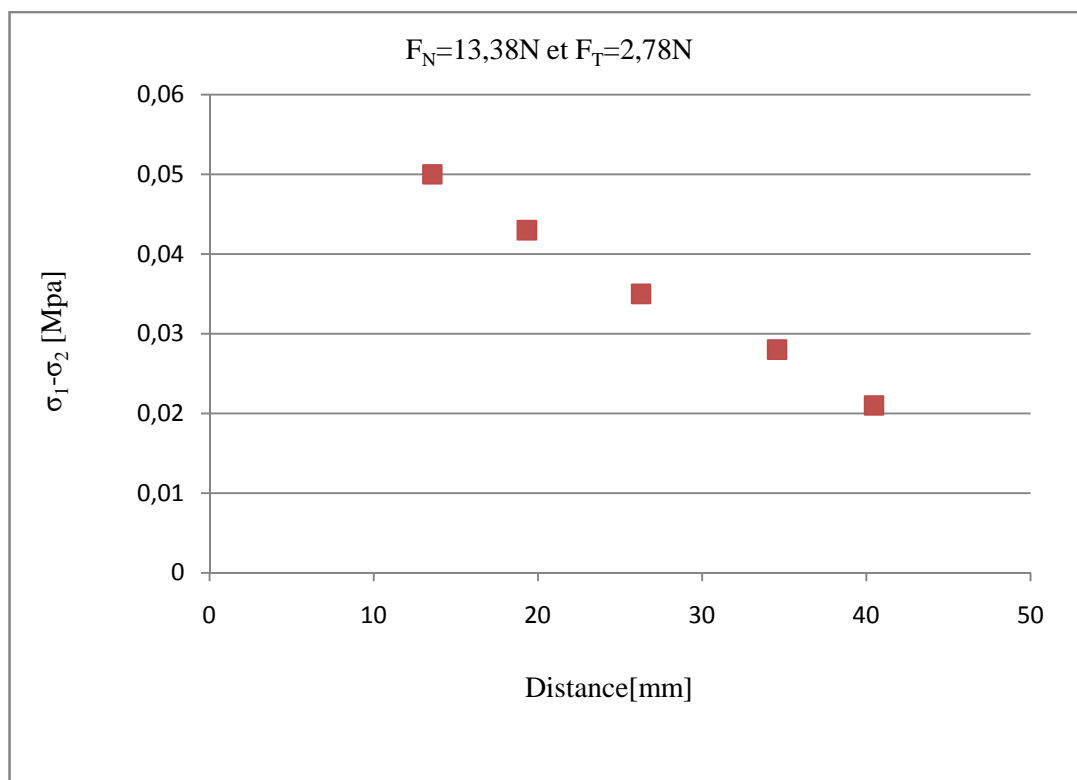


Figure V.16 : Différence des contraintes principales suivant l'axe vertical pour le contact plan / plan obtenues expérimentalement en présence d'un effort tangentiel

V.2.4.2.4 Isoclines obtenues expérimentalement en présence d'un effort tangentiel

La figure V.17 représente l'isocline à 0° en champ obscur et en lumière monochromatique.

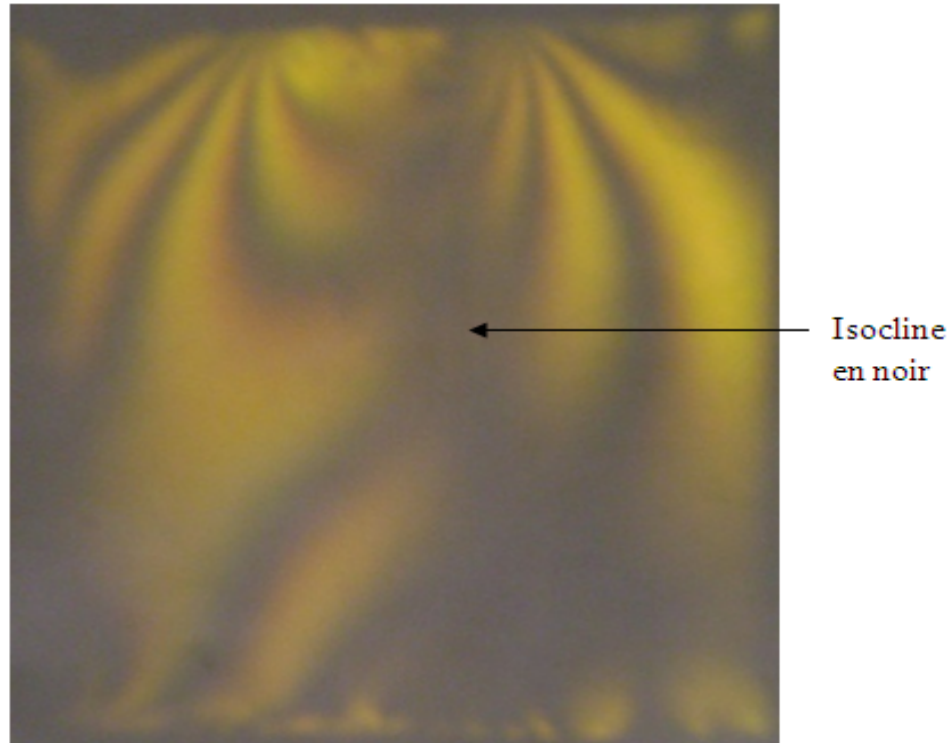


Figure V.17: Isocline à 0° en présence d'un effort tangentiel

V.3 Etude numérique

L'étude numérique est faite avec le logiciel CASTEM 2000. Ce logiciel nous permet d'obtenir le champ des contraintes développées à l'intérieur du modèle.

Dans les calculs par éléments finis nous avons considéré le comportement du modèle isotrope et élastique.

V.3.1 Application d'un effort normal

Le maillage a été raffiné au voisinage du contact pour avoir une bonne approximation. La figure V.18 représente le modèle élément finis et la surface totale maillée.

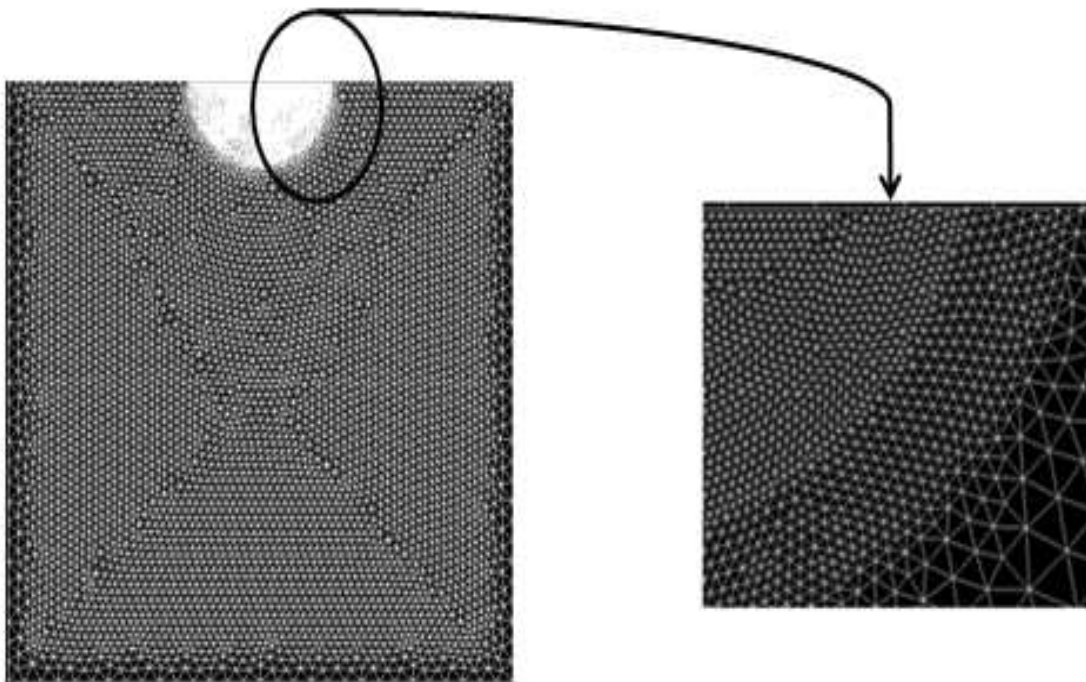


Figure V.18 :a) modèle éléments finis et la surface totale maillée

b) Affinage de maillage au voisinage de la zone de contact

Dans l'étude numérique le chargement est appliqué par les conditions aux limites qui sont simplement le déplacement imposé.

Dans le cas du contact plan sur plan nous avons déplacé verticalement le segment qui est en contact avec le deuxième plan (le deuxième plan représente la pièce en aluminium dans l'étude expérimentale).

Une boucle dans le programme écrit sous Castem permet de récupérer la valeur de la charge appliquée correspondant à un déplacement imposé.

L'opérateur DEFOR(ME) construit la déformée à partir de la géométrie initiale et du champ de déplacement.

La figure V.19 représente la déformée où le maillage initial est donné en couleur blanche et la déformée en couleur rouge.

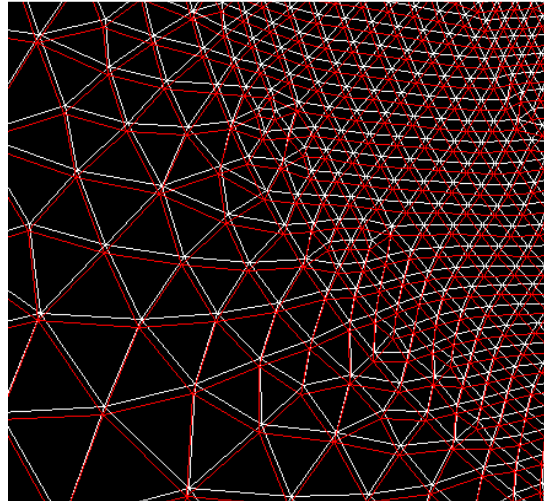


Figure V.19 Représentation de la déformée

V.3.1.1 Les isochromes obtenues numériquement

Le réseau d'isochromes obtenues pour $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$ où φ représente la phase, ces isochromes sont tracées avec une échelle de couleur dont la couleur bleue correspond à franges noires relevées sur le polariscope en champ obscur et la couleur rouge aux franges claires.

Pour obtenir une bonne comparaison entre les isochromes calculées numériquement (figure V.20) et celles obtenues expérimentalement, il faut traiter les images obtenues numériquement avec le logiciel SURFER, ce logiciel traite les images avec une échelle de couleur pour les transformer en noir et blanc (figure V.21).

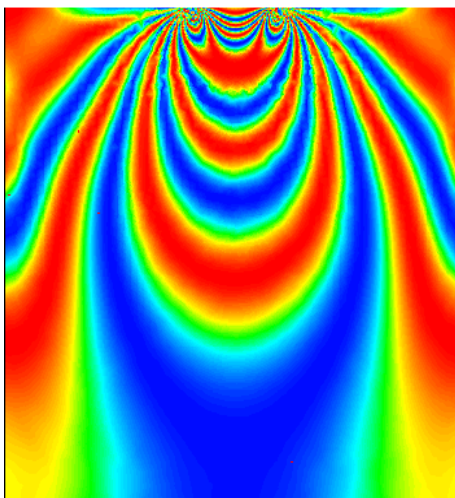


Figure V.20 : Isochromes obtenues Numériquement avec CASTEM

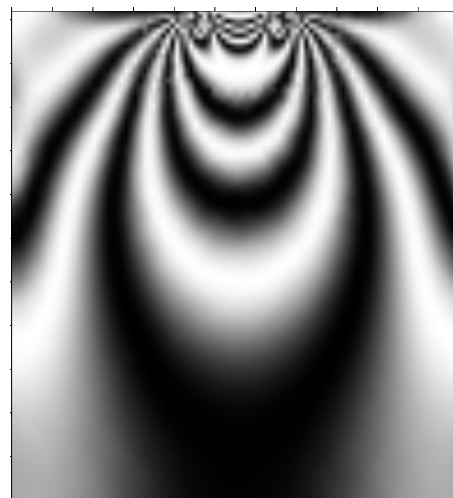


Figure V.21 : Isochromes obtenues avec CASTEM et traitées avec SURFER

V.3.1.2 Les isoclines obtenues numériquement

Le programme nous donne la valeur de $\sin^2(2\alpha)$ en chaque point du modèle ce qui permet de tracer les isoclines qui correspondent à $\sin^2 2\alpha = 0$, les isoclines obtenues numériquement avec rotation d'un pas de 10 degrés sont représentées dans la figure V.22.

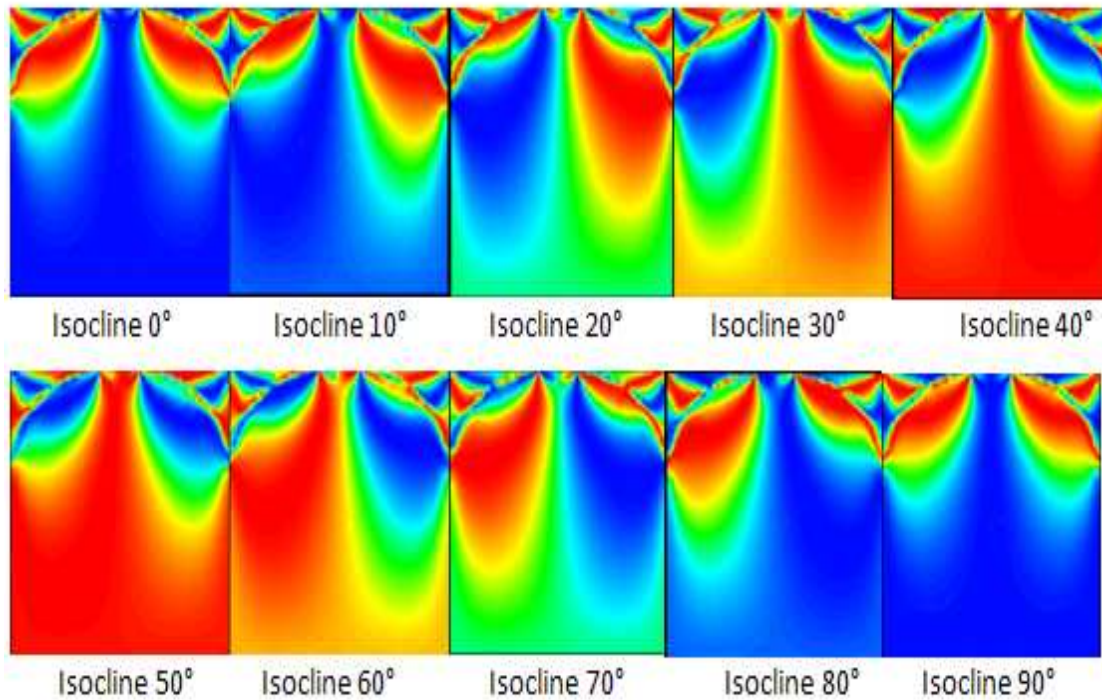


Figure V.22: Isoclines obtenues numériquement avec CASTEM avec un pas de 10 degrés

Les isoclines obtenues numériquement sont traitées avec le logiciel SURFER (figure V.23) afin d'être comparées avec les isoclines correspondantes à chaque angle de rotation des polaroids obtenues expérimentalement.

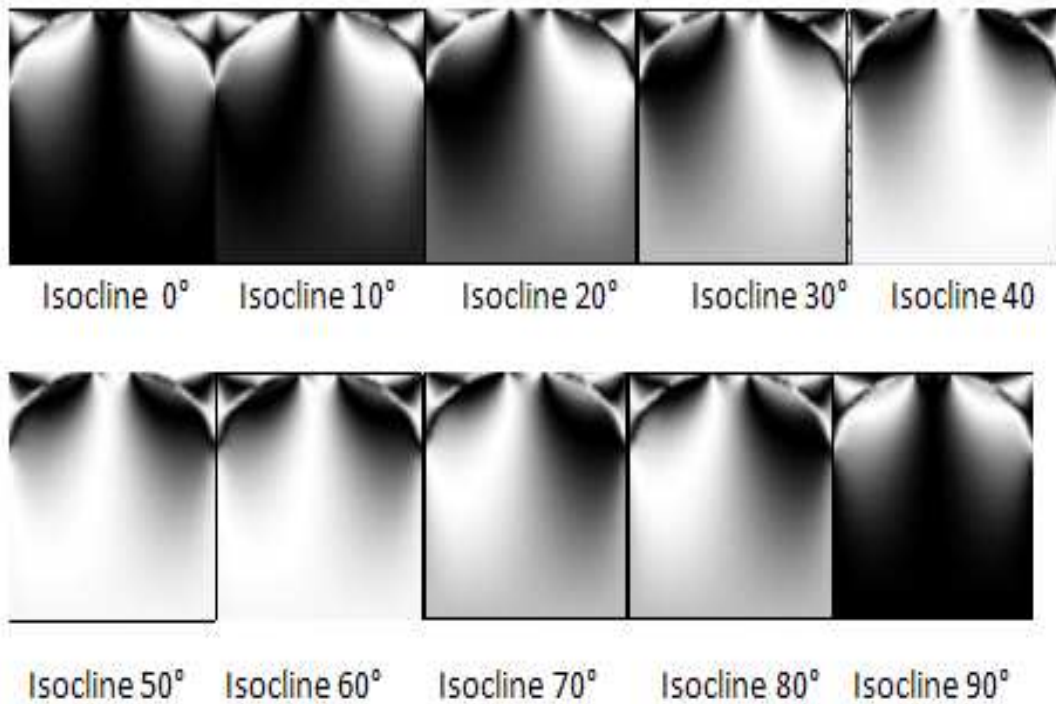


Figure V.23 : Isoclines obtenues numériquement et traitées avec SURFER

V.3.1.3 Extraction de l'effort normal appliqué

Avec le logiciel CASTEM nous avons choisi d'utiliser un déplacement imposé (DEPI) qui permet de déplacer verticalement le segment qui est en contact avec le deuxième plan. Il permet aussi d'extraire les efforts appliqués. Dans ce cas, la valeur de l'effort correspondant au déplacement imposé est relevée sur la base inférieure du plan comme le montre la figure V.24.

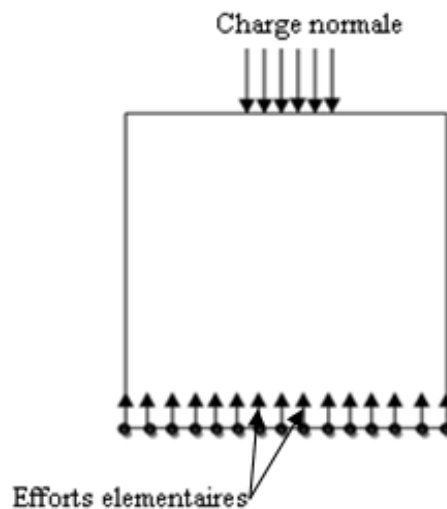


Figure V.24: Efforts élémentaires engendrés par le chargement normal

Le logiciel donne le nombre de nœuds sur la base inférieure du plan, et fait une sommation des efforts appliqués sur les nœuds. L'effort total au dernier nœud est :

$$F = \sum_{i=1}^{i=31} \text{effort appliqué au nœud } Ni$$

Au premier nœud ($i = 1$) ; il récupère la valeur de l'effort, au second nœud ($i = 2$), il récupère la valeur de l'effort et lui additionne la valeur de l'effort au nœud précédent. Il répète cette opération jusqu'au dernier nœud où il affiche la valeur de l'effort total appliqué.

Dans ce cas au nœud 31 qui représente le point extrême inférieur illustré sur le tableau V.3 l'effort est $1,11 \cdot 12 = 13.32\text{N}$. Cette valeur correspond approximativement à la charge appliquée pour l'étude expérimentale qui est de 13.38N .

Indice	Type	Valeur	Objet	Type	Valeur
1	ENTIER		FLOTTANT		.11128842E+01
2	ENTIER		FLOTTANT		.19867720E+00
3	ENTIER		FLOTTANT		.27305549E+00
4	ENTIER		FLOTTANT		.33739001E+00
5	ENTIER		FLOTTANT		.39657403E+00
6	ENTIER		FLOTTANT		.45130613E+00
7	ENTIER		FLOTTANT		.50202506E+00
8	ENTIER		FLOTTANT		.55197972E+00
9	ENTIER		FLOTTANT		.59867370E+00
10	ENTIER		FLOTTANT		.64367620E+00
11	ENTIER		FLOTTANT		.68606396E+00
12	ENTIER		FLOTTANT		.72820199E+00
13	ENTIER		FLOTTANT		.76700000E+00
14	ENTIER		FLOTTANT		.80587643E+00
15	ENTIER		FLOTTANT		.84200035E+00
16	ENTIER		FLOTTANT		.87630260E+00
17	ENTIER		FLOTTANT		.90869237E+00
18	ENTIER		FLOTTANT		.93904746E+00
19	ENTIER		FLOTTANT		.96705693E+00
20	ENTIER		FLOTTANT		.99291223E+00
21	ENTIER		FLOTTANT		.10162400E+01
22	ENTIER		FLOTTANT		.10370141E+01
23	ENTIER		FLOTTANT		.10551541E+01
24	ENTIER		FLOTTANT		.10705674E+01
25	ENTIER		FLOTTANT		.10831043E+01
26	ENTIER		FLOTTANT		.10928733E+01
27	ENTIER		FLOTTANT		.10998040E+01
28	ENTIER		FLOTTANT		.11042516E+01
29	ENTIER		FLOTTANT		.11064006E+01
30	ENTIER		FLOTTANT		.11081543E+01
31	ENTIER		FLOTTANT		.11128842E+01

Tableau V.3: Extraction de l'effort normal correspondant au déplacement imposé

V.3.1.4 Extraction des valeurs de différence de contraintes suivant l'axe de symétrie vertical

Les valeurs de la différence de contraintes suivant l'axe de symétrie vertical sont récupérées à l'aide d'une boucle conçue pour cet effet, il suffit de déclarer une droite appartenant au modèle puis demander au logiciel(CASTEM) de donner les valeurs de la différence de contraintes le long de cette droite.

Les valeurs de la différence des contraintes principales extraites sont données dans le tableau suivant :

Distance en [mm]	Différence de contraintes en [Mpa]	Distance en [mm]	Différence de contraintes en [Mpa]	Distance en [mm]	Différence de contraintes en [Mpa]
0	0,01141	19,2	0,03872	38,4	0,02442
0,8	0,01508	20	0,0376	39,2	0,02409
1,6	0,02274	20,8	0,03653	40	0,02377
2,4	0,03194	21,6	0,03583	40,8	0,02347
3,2	0,04046	22,4	0,03507	41,6	0,02319
4	0,04729	23,2	0,0343	42,4	0,02293
4,8	0,05201	24	0,03361	43,2	0,02268
5,6	0,05481	24,8	0,03297	44	0,02245
6,4	0,05613	25,6	0,03229	44,8	0,02223
7,2	0,05643	26,4	0,03161	45,6	0,02203
8	0,05593	27,2	0,03091	46,4	0,02185
8,8	0,05501	28	0,0303	47,2	0,02168
9,6	0,05384	28,8	0,02977	48	0,02152
10,4	0,05252	29,6	0,02928	48,8	0,02138
11,2	0,05127	30,4	0,02872	49,6	0,02126
12	0,04957	31,2	0,02819	50,4	0,02116
12,8	0,04812	32	0,0277	51,2	0,02107
13,6	0,04683	32,8	0,02724	52	0,02099
14,4	0,04544	33,6	0,02678	52,8	0,02092
15,2	0,04414	34,4	0,02635	53,6	0,02086
16	0,04282	35,2	0,02594	54,4	0,02081
16,8	0,04152	36	0,02554	55,2	0,02081
17,6	0,04053	36,8	0,02515	56	0,0208
18,4	0,03965	37,6	0,02478		

Tableau V. 4 : Valeurs de la différence des contraintes relevées numériquement

La variation de la différence des contraintes principales obtenues numériquement est donnée par la courbe de la figure V.25.

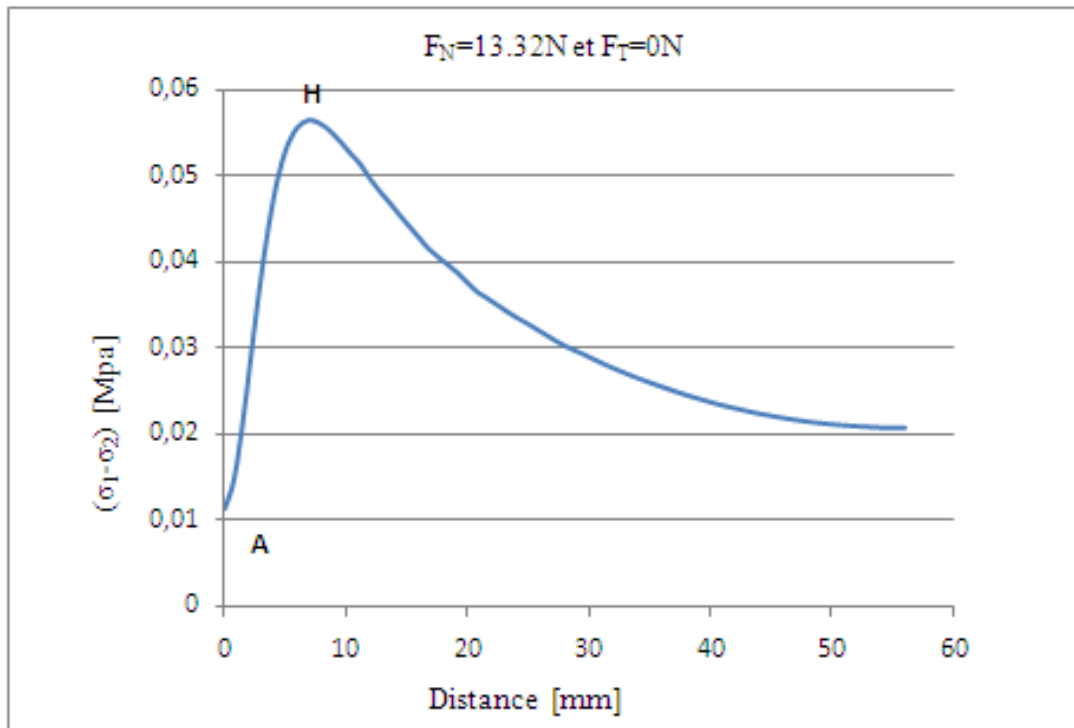


Figure V.25 : Différence des contraintes principales suivant l'axe de symétrie vertical obtenue numériquement

V.3.2 Application d'un effort tangentiel

Pour l'application de l'effort tangentiel nous avons utilisé le même programme (programme utilisé pour l'effort normal) et on a imposé un deuxième déplacement horizontal au segment qui est au contact avec le deuxième plan. L'état de chargement dans ce cas est la somme de deux chargements (chargement normal et le chargement tangentiel).

V.3.2.1 Les isochromes obtenues numériquement en présence d'un effort tangentiel

En présence d'un effort tangentiel le réseau d'isochromes s'obtient toujours pour $\phi = \phi_0 + \alpha x$, où ϕ_0 représente la phase.

La figure V.26 représente le réseau d'isochromes obtenues numériquement en présence d'un effort tangentiel, pour faire une bonne comparaison entre les isochromes calculées

numériquement et celles obtenues expérimentalement, il faut traiter les images obtenues numériquement avec le logiciel SURFER.

Les isochromes obtenues numériquement et traitées avec SURFER sont représentées dans la figure V.27.

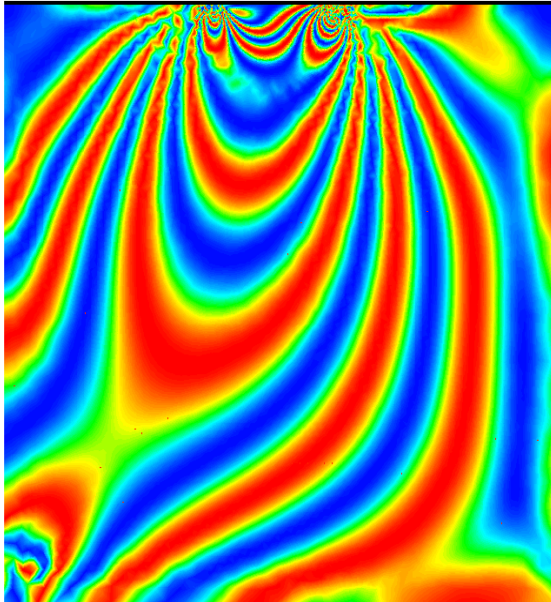


Figure V.26: Isochromes obtenues numériquement avec CASTEM



Figure V.27 : Isochromes obtenues numériquement et traitées avec SURFER

V.3.2.2 Les isoclines obtenues numériquement en présence d'un effort tangentiel

Les isoclines obtenues numériquement en présence d'un effort tangentiel sont tracées pour $\sin^2 2\alpha = 0$. La figure V.28 représente les différentes franges isoclines avec un pas de 10 degrés. La figure V.29 représente le traitement de ces isoclines par SURFER.

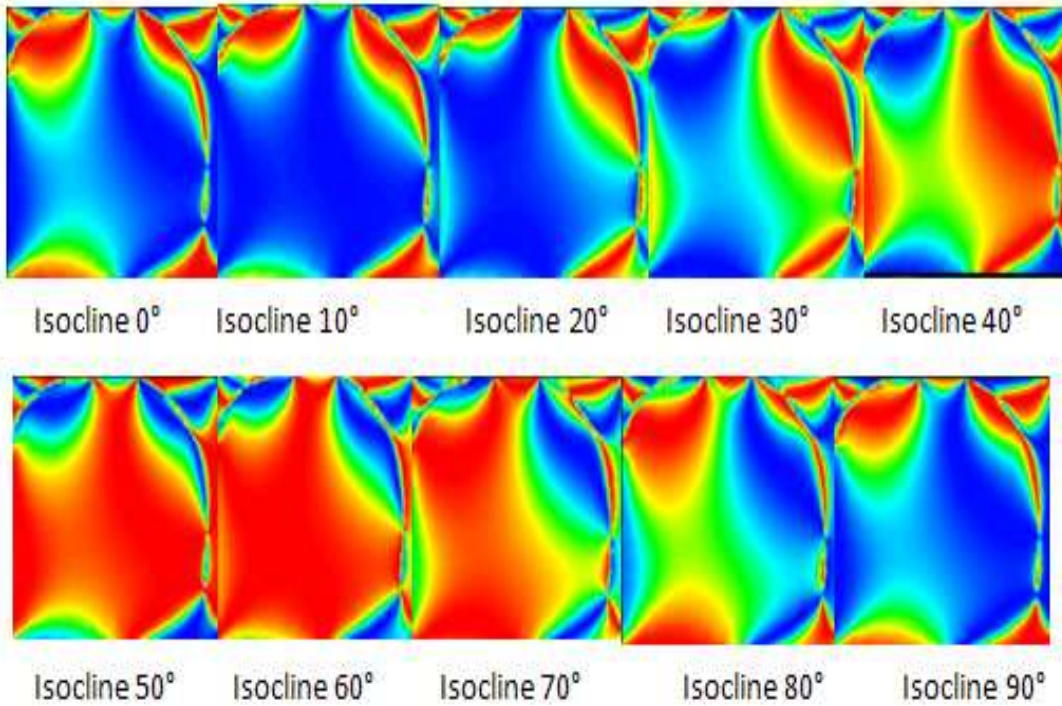


Figure V.28: Isoclines obtenues numériquement avec CASTEM avec un pas de 10 degré en présence d'un effort tangentiel

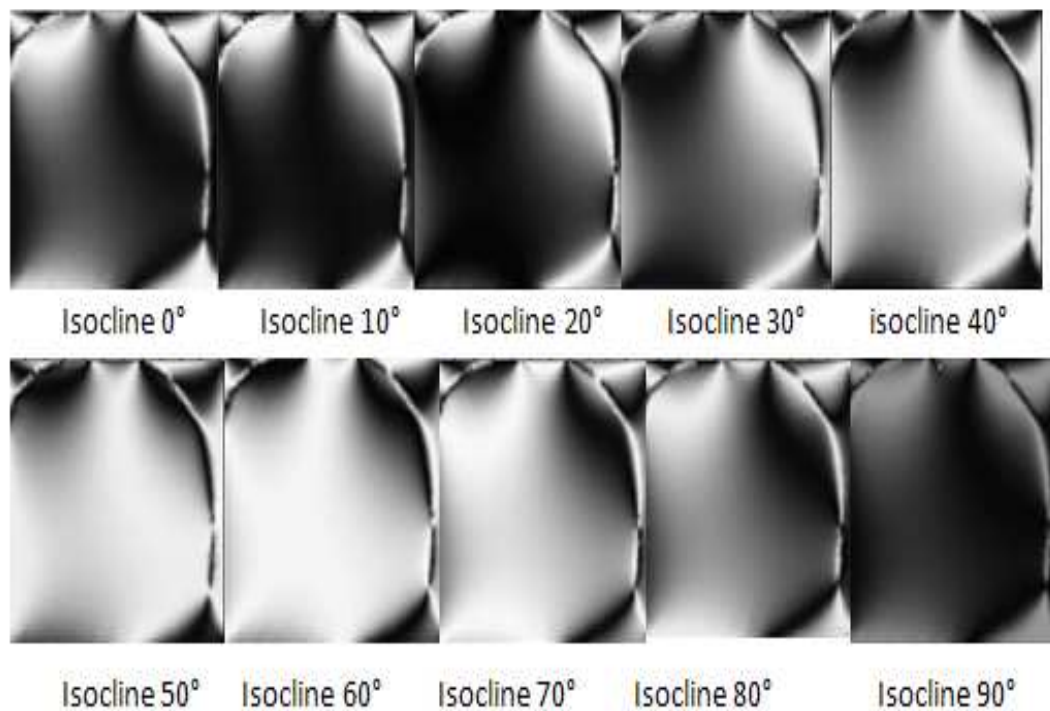


Figure V.29: Isoclines obtenues numériquement et traitées avec SURFER avec un pas de 10 degrés en présence d'un effort tangentiel

V.3.2.3 Extraction de l'effort tangentiel appliqué

Pour le chargement tangentiel nous avons choisi d'utiliser un déplacement imposé (DEPI) qui permet de déplacer horizontalement le segment qui est en contact avec le deuxième plan. Il permet aussi de d'extraire les efforts appliqués. Dans ce cas, la valeur de l'effort correspondant au déplacement imposé est relevée sur la base inferieur du plan comme l'indique la figure V. 30.

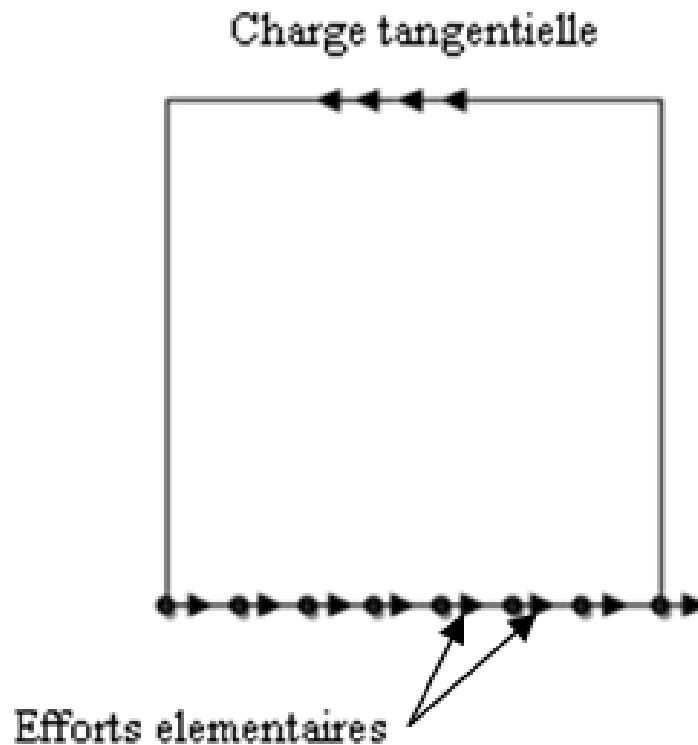


Figure V.30: Efforts élémentaires engendrés par le chargement tangentiel

Le logiciel donne le nombre de nœuds sur la base inferieure du plan, et fait une sommation des efforts appliqués sur les nœuds. L'effort total au dernier nœud est :

$F = \sum_{i=1}^{i=31} \text{effort appliqué au noeud } Ni$ Au nœud 31 qui représente le point extrême inferieur illustré sur le tableau V.4 l'effort est $0,23 \cdot 12 = 2.76$ N, cette valeur correspond approximativement à la charge tangentielle appliquée dans l'étude expérimentale qui est de 2.78 N.

Indice		Objet	
Type	Valeur	Type	Valeur
ENTIER	1	FLOTTANT	.23231557E+00
ENTIER	2	FLOTTANT	.10606160E+00
ENTIER	3	FLOTTANT	.12776332E+00
ENTIER	4	FLOTTANT	.45107822E+00
ENTIER	5	FLOTTANT	.17168861E+00
ENTIER	6	FLOTTANT	.19155718E+00
ENTIER	7	FLOTTANT	.20871484E+00
ENTIER	8	FLOTTANT	.22485984E+00
ENTIER	9	FLOTTANT	.23838526E+00
ENTIER	10	FLOTTANT	.25083999E+00
ENTIER	11	FLOTTANT	.26099887E+00
ENTIER	12	FLOTTANT	.26988963E+00
ENTIER	13	FLOTTANT	.27781415E+00
ENTIER	14	FLOTTANT	.28339675E+00
ENTIER	15	FLOTTANT	.28828156E+00
ENTIER	16	FLOTTANT	.29147515E+00
ENTIER	17	FLOTTANT	.29381557E+00
ENTIER	18	FLOTTANT	.29388140E+00
ENTIER	19	FLOTTANT	.29271927E+00
ENTIER	20	FLOTTANT	.29078114E+00
ENTIER	21	FLOTTANT	.28749898E+00
ENTIER	22	FLOTTANT	.28328738E+00
ENTIER	23	FLOTTANT	.27808122E+00
ENTIER	24	FLOTTANT	.27248717E+00
ENTIER	25	FLOTTANT	.26575595E+00
ENTIER	26	FLOTTANT	.25913388E+00
ENTIER	27	FLOTTANT	.25236681E+00
ENTIER	28	FLOTTANT	.24567832E+00
ENTIER	29	FLOTTANT	.23949316E+00
ENTIER	30	FLOTTANT	.23548176E+00
ENTIER	31	FLOTTANT	.23231557E+00

Tableau V.5: Extraction de l'effort tangentiel correspondant au déplacement imposé

V.3.2.4 Extraction des valeurs de différence des contraintes suivant l'axe vertical

Les valeurs de la différence des contraintes extraites en présence d'un effort tangentiel sont données dans le tableau suivant :

Distance en [mm]	Différence de contraintes en [Mpa]	Distance en [mm]	Différence de contraintes en [Mpa]	Distance en [mm]	Différence de contraintes en [Mpa]
0	0,02874	19,6	0,04472	38,267	0,02793
0,93333	0,0318	20,533	0,04353	39,2	0,02707
1,8667	0,03623	21,467	0,04252	40,133	0,02618
2,8	0,04163	22,4	0,0417	41,067	0,02525
3,7333	0,04716	23,333	0,04091	42	0,0243
4,6667	0,05196	24,267	0,03992	42,933	0,0233
5,6	0,0554	25,2	0,03903	43,867	0,02226
6,5333	0,05745	26,133	0,03828	44,8	0,02118
7,4667	0,05846	27,067	0,03745	45,733	0,02006
8,4	0,0584	28	0,03662	46,667	0,01891
9,3333	0,05745	28,933	0,03585	47,6	0,01771
10,267	0,05693	29,867	0,03509	48,533	0,01646
11,2	0,05578	30,8	0,03438	49,467	0,01517
12,133	0,05457	31,733	0,03366	50,4	0,01382
13,067	0,05343	32,667	0,03286	51,333	0,01239
14	0,05198	33,6	0,03206	52,267	0,0109
14,933	0,05058	34,533	0,03126	53,2	0,00946
15,867	0,04929	35,467	0,03044	54,133	0,00806
16,8	0,04812	36,4	0,02962	55,067	0,00692
17,733	0,04695	37,333	0,02878	56	0,00599
18,667	0,04581				

Tableau V. 6 : Valeurs de la différence de contraintes relevées numériquement en présence d'un effort tangentiel

La variation de la différence des contraintes principales obtenues numériquement en présence d'un effort tangentiel est donnée par la courbe de la figure V.31.

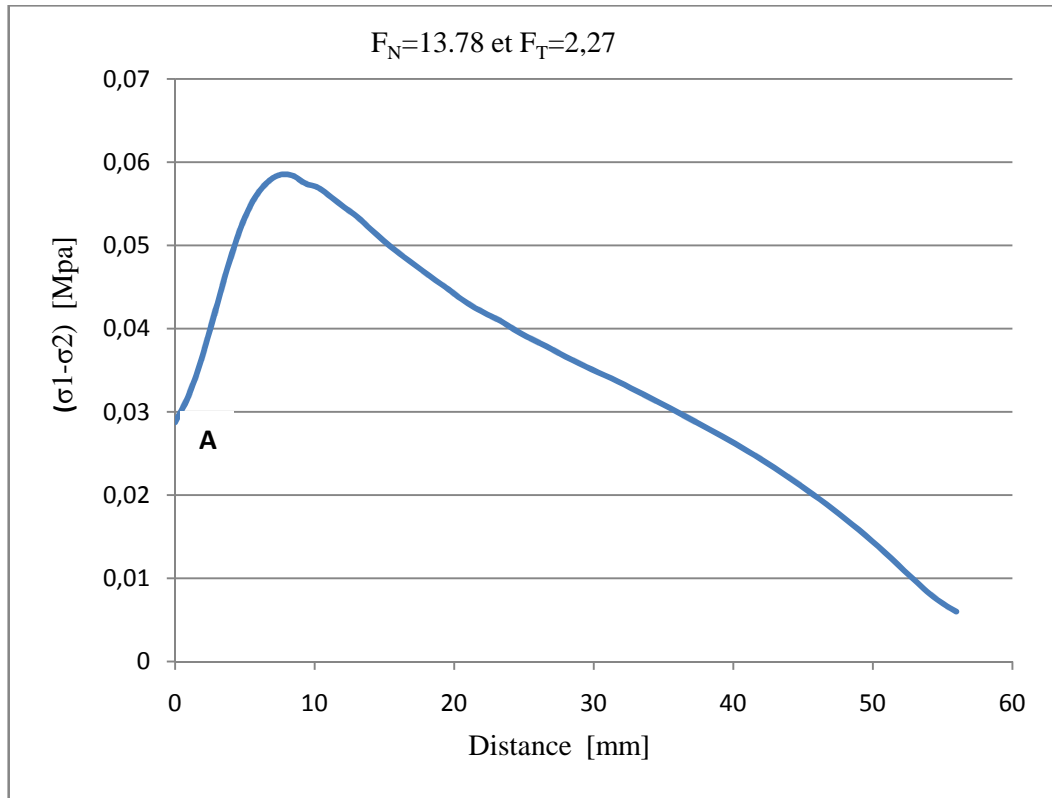


Figure V.31 : Différence des contraintes principales suivant l'axe vertical en présence d'un effort tangentiel obtenue numériquement

V.4 Comparaison des résultats

V.4.1 Comparaison des résultats obtenus en présence d'un effort normal

V.4.1.1 Superposition et comparaison des images isochromes

La figure V.32 représente la superposition des isochromes relevées expérimentalement en champ obscur et en lumière monochromatique et des isochromes calculées avec CASTEM et traitées avec SURFER.

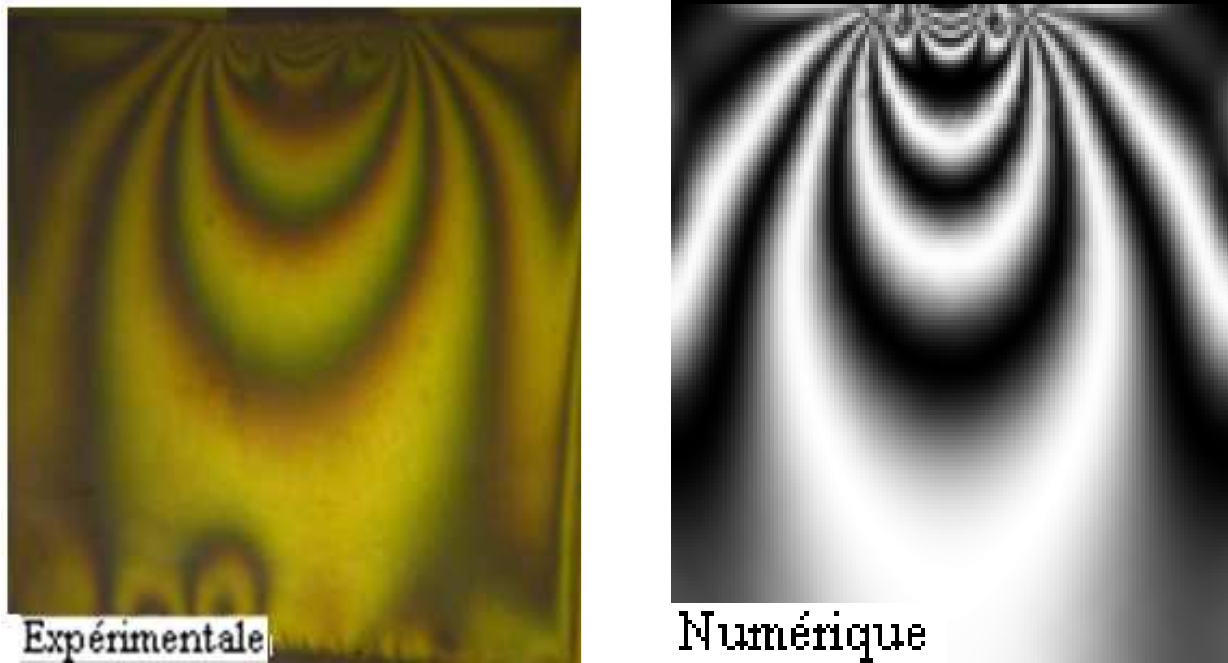


Figure V.32 : Superposition des isochromes relevées expérimentalement et des isochromes calculées avec CASTEM et traitées avec SURFER

Nous remarquons que l'image obtenue expérimentalement par photoélasticimétrie est comparable avec l'image calculée avec CASTEM et traitée avec SURFER.

V.4.1.2 Comparaison des images isoclines

La figure V.33 représente la superposition des isoclines obtenues numériquement et traitées avec le logiciel SURFER (les images en noir et blanc) avec les isoclines correspondantes obtenues expérimentalement (les images en couleur).

Pour les images calculées numériquement la partie sombre de chaque image correspond à l'isocline, zone où l'une des directions principales est parallèle à l'un des axes des polaroids.

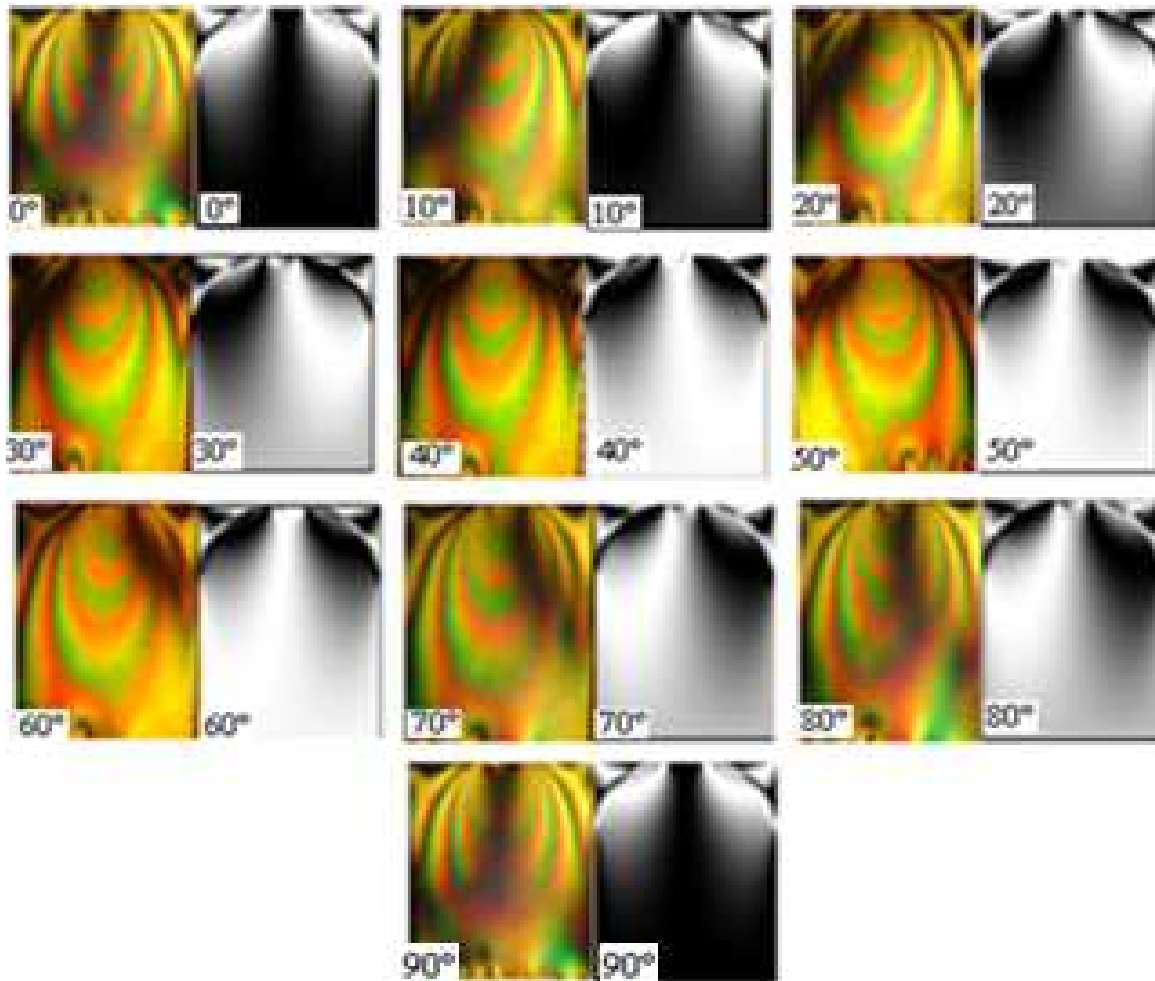


Figure V.33: Superposition de l'isocline obtenue numériquement et traitée avec Surfer avec sa correspondante obtenue expérimentalement

On remarque que les isoclines obtenues numériquement et celles obtenues expérimentalement sont semblables et il y a une bonne concordance entre elles.

V.4.1.3 Superposition des courbes

La figure (V.34) représente la superposition des courbes expérimentale et numérique de la variation de la différence de contraintes principales suivant l'axe de symétrie vertical pour un chargement de 13,27 Newton dans un contact plan rigide en aluminium sur plan en époxy déformable du faible module de YOUNG. On remarque que les courbes se superposent et qu'il y a une bonne concordance des résultats.

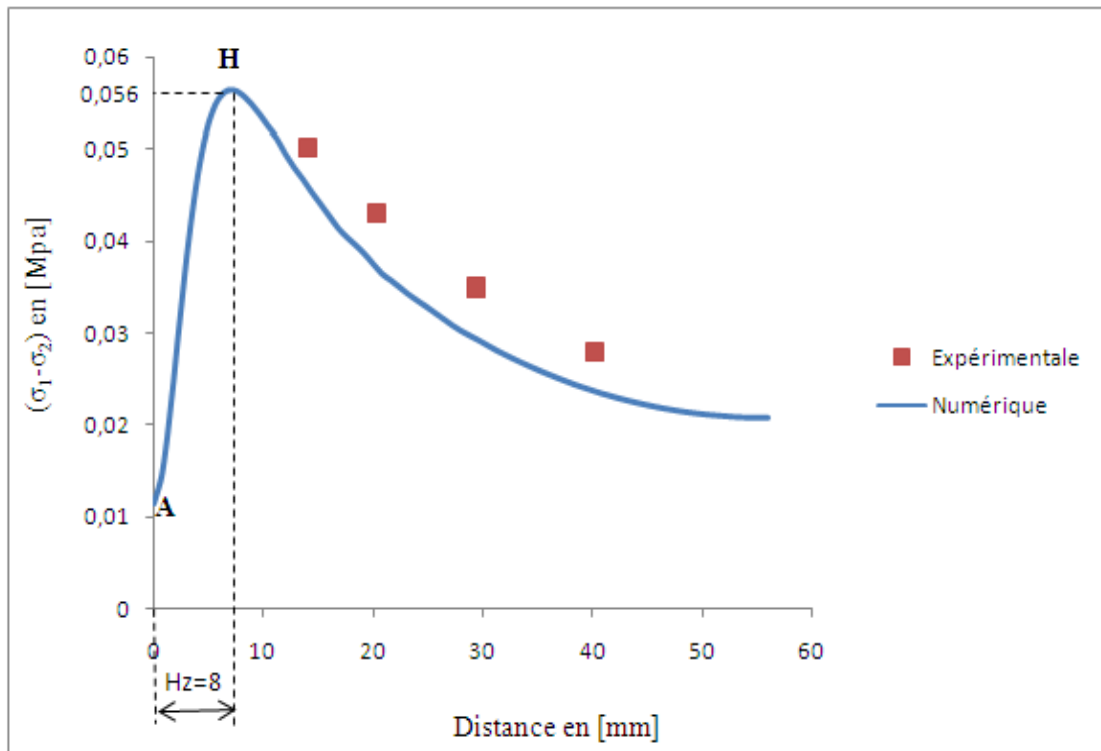


Figure V.34: Superposition des courbes numérique et expérimentale

V.4.2 Comparaison des résultats obtenus en présence d'un effort tangentiel

V.4.2.1 Superposition et comparaison des images isochromes

La figure V.35 représente la superposition des isochromes relevées expérimentalement en champ obscur et en lumière monochromatique et des isochromes calculées avec CASTEM et traitées avec SURFER.

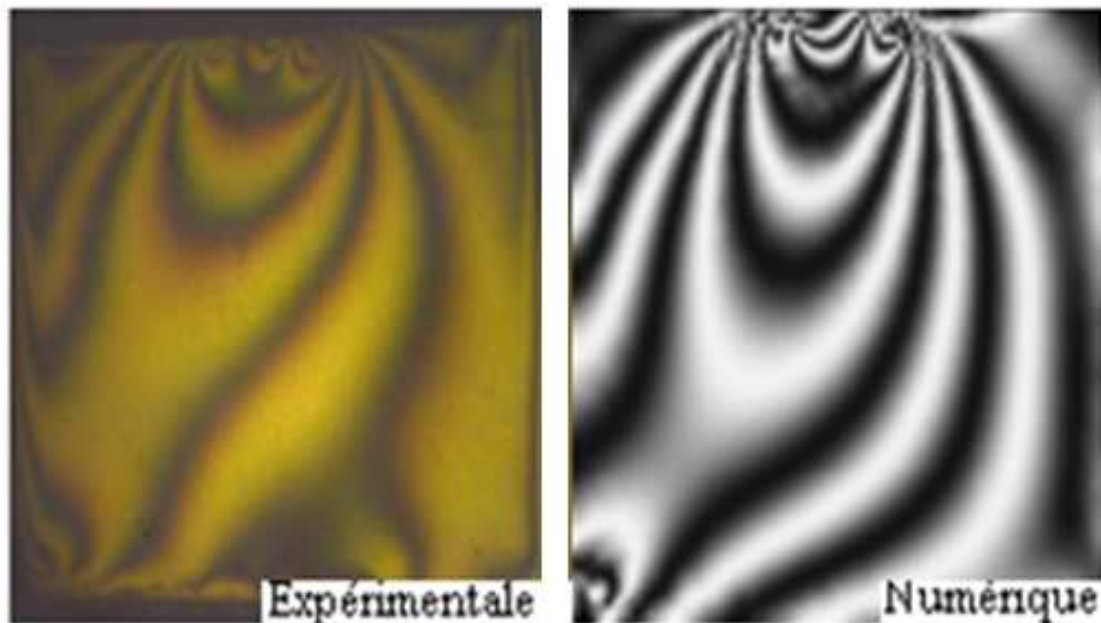


Figure V.35 : Superposition des isochromes relevées expérimentalement et des isochromes calculées avec CASTEM et traitées avec SURFER en présence d'un effort tangentiel

En présence d'un effort tangentiel, nous remarquons que l'image obtenue expérimentalement se superpose largement avec l'image obtenue numériquement.

V.4.2.2 Superposition et comparaison des images isoclines

La superposition de l'isocline relevée expérimentalement à 0° en champ obscur et en lumière monochromatique et celle correspondante calculée avec CASTEM et traitée avec SURFER est donnée dans la figure V.36.

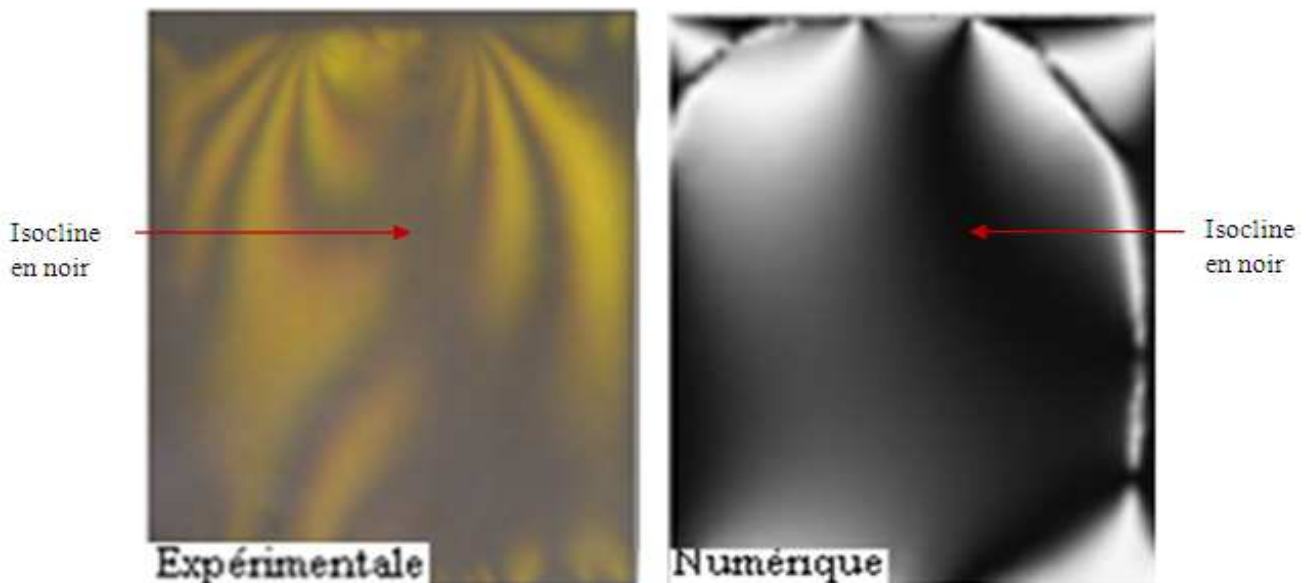


Figure V.36: Superposition des isoclines obtenues expérimentalement et numériquement à 0°

Nous remarquons que l'isocline obtenue expérimentalement à 0° est comparable à celle obtenue numériquement à 0° .

V.4.2.3 Superposition des courbes en présence d'un effort tangentiel

La figure (V.37) représente la superposition des courbes expérimentale et numérique de la variation de la différence de contraintes principales en présence d'un effort tangentiel suivant l'axe vertical pour un chargement normal de 13,32 Newton et tangentiel de 2,76 Newton dans un contact plan rigide en aluminium sur plan en époxy déformable du faible module de YOUNG. On remarque que les courbes se superposent et qu'il y'a une bonne concordance des résultats.

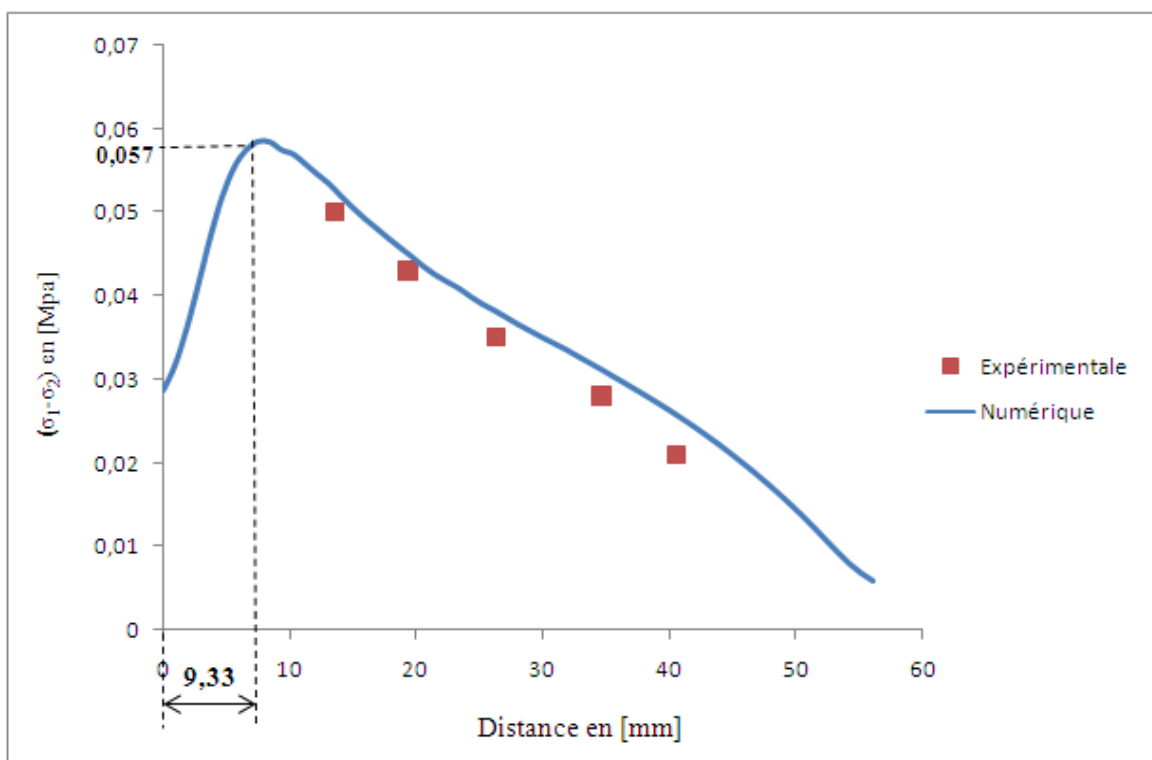


Figure V.37 : Superposition des courbes numérique et expérimentale en présence d'un effort tangentiel

V.5 Discussion des résultats

V.5.1 Discussion des résultats obtenus en présence d'un effort normal

La figure V.33 représente la superposition des courbes de la variation de la différence des contraintes principales le long de l'axe de symétrie vertical obtenues expérimentalement et numériquement, nous remarquons que les courbes se superposent et ont la même allure et il existe une bonne concordance des résultats. Sauf dans certaines zones, particulièrement au

voisinage de la zone de contact où il est difficile de repérer les ordres de franges en photoélasticimétrie ce qui explique la non détermination de la différence de contraintes principales au niveau de point A sur la courbe expérimentale.

Nous constatons aussi que la valeur de la différence des contraintes est maximale au point H, qu'on appelle point de Hertz et décroît vers zéro en se rapprochant du bord inférieur. Comme on peut remarquer aussi dans la courbe obtenue numériquement que la différence de contraintes principales au point A (au milieu de la zone de contact) est égale à 0,011MPa, puis elle croît pour atteindre une valeur de 0,056MPa à une distance de 8mm au point de Hertz.

V.5.2 Discussion des résultats obtenus en présence d'un effort tangentiel

La figure V.36 représente la superposition des courbes de la variation de la différence de contraintes principales le long de l'axe vertical obtenues expérimentalement et numériquement en présence d'un effort tangentiel, nous remarquons que les courbes se superposent et ont la même allure et il existe une bonne concordance des résultats.

Nous remarquons qu'il y'a un changement dans la valeur de la différence de contraintes principales au point A après l'application de l'effort tangentiel, la valeur de la différence des contraintes principales est égale à 0,011MPa, après l'application de l'effort tangentiel cette valeur est devenue 0,029MPa et pour la différence de contraintes au point H (point de Hertz), avant l'application de l'effort tangentiel la valeur de la différence de contraintes est égale à 0,056Mpa à une distance de 8mm, après l'application de l'effort tangentiel cette valeur est devenue 0.057MPa à une distance de 9,33mm. On remarque que la différence de contraintes principales n'a pas changé beaucoup mais le point H s'éloigne avec le chargement tangentiel.

Le résultat majeur qu'on a constaté dans cette étude est la déviation des franges soit dans l'étude expérimentale avec photoélasticimétrie ou bien dans l'étude numérique avec CASTEM, les figures (V.38) et (V.39) mettent en évidence la déviation des franges dans l'étude expérimentale et numérique.

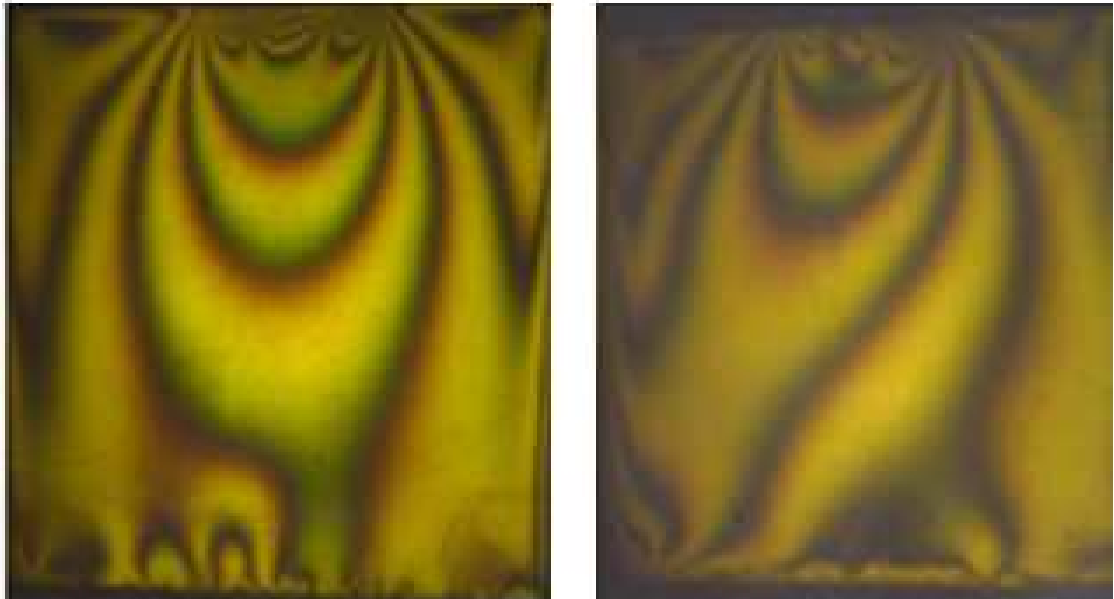


Figure V.38 : déviation des franges obtenues expérimentalement

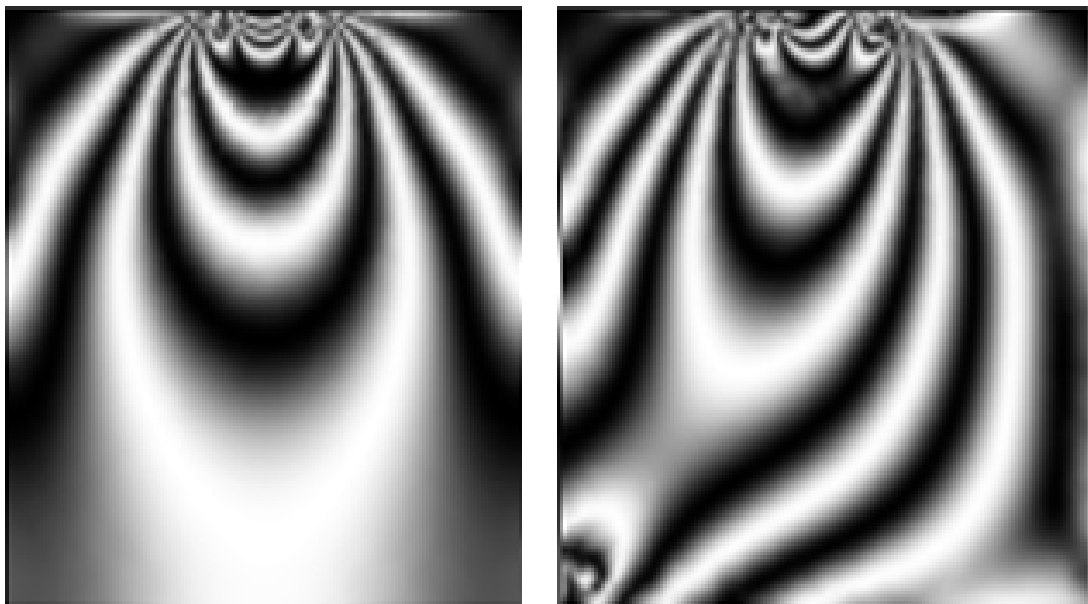


Figure V.39 : déviation des franges obtenues numériquement

V.6 Conclusion

La comparaison a montré que les résultats expérimentaux coïncident globalement avec les résultats numériques même si pour l'une ou l'autre des méthodes on doit constater des incertitudes de précision et des erreurs expérimentales. La superposition des résultats obtenus pour les deux méthodes nous a permis de constater que l'évolution de la différence des contraintes principales est relativement la même.

Conclusion générale

Le but de ce travail a été l'étude expérimentale et numérique des champs de contraintes développés dans d'un contact plan rigide en aluminium sur un plan déformable en époxy en présence d'un effort tangentiel.

Dans cette étude nous avons utilisé deux méthodes Pour le calcul de champ de contraintes dans le contact plan sur plan. La première méthode c'est la photoélasticimétrie qui est méthode non destructive d'analyse des champs de contraintes dans des modèles biréfringents. Les contraintes ont été déterminées à l'aide des réseaux de franges isochromes, l'évolution de la courbe de la différence de contraintes principales a été obtenue le long de l'axe vertical.

Concernant la méthode numérique, le calcul a été fait à l'aide du logiciel CASTEM 2000. Le programme écrit nous a permis de déterminer les réseaux des franges isochromes et isoclines et aussi de tracer l'évolution de la différence de contraintes principales le long de l'axe vertical pour permettre une comparaison avec les résultats expérimentaux.

La comparaison des isochromes obtenues montre qu'il y'a une bonne concordance des résultats expérimentaux et numériques. La superposition des courbes expérimentales et numériques montre qu'il existe une bonne concordance des résultats, sauf dans certaines zones, particulièrement au voisinage de la zone de contact où il est difficile de relever les ordres de franges dans l'étude expérimentale.

Les calculs numériques, pour le chargement normal imposé, montrent que la différence de contraintes principales croit d'une valeur relativement faible de 0,011MPa au voisinage de la zone du contact pour atteindre une valeur maximale de 0,056 MPa puis décroît pour atteindre une valeur de 0,021MPa au bord inférieur du plan. Après le chargement tangentiel la valeur de la différence de contraintes principales croit d'une valeur de 0,029 MPa au voisinage de la zone de contact pour atteindre une valeur maximale de 0,057 MPa pour décroître et atteindre une valeur de 0,006 MPa au bord inférieur du plan.

Les franges isochromes relevées expérimentalement et celles calculées numériquement avec le logiciel CASTEM et traitées avec le logiciel SURFER mettent en évidence les concentrations des contraintes aux bords du contact.

Dans cette étude nous avons remarqué qu'il y a une symétrie dans les franges obtenues quand on applique uniquement l'effort normal, mais après l'application de l'effort tangentiel les franges sont déviées.

Références bibliographiques

- [1] : Fabrice BREMAND « Photoélasticimétrie plane ». (Laboratoire de mécanique des solides Saint-Etienne Juillet 2004).
- [2] : Jean-Charles Craveur « Modélisation des structures-calcul par éléments finis ». (2^e édition DUNOD 2001).
- [3] : Jean Coirrier « Mécanique des milieux continus-Cours et exercices corrigés ». (2^e édition DUNOD 2001).
- [4] : Denis DARTUS. « Elasticité linéaire ». (Edition CEPADUES janvier 2001).
- [5] : Gerald Zambelli et Leo Vincent « Matériaux et contact – une approche tribologique ». (Presse polytechnique et universitaire ROMANDE 1998 »
- [6] : E. Le Fichoux. ENSTA-LME « Présentation et utilisation de CASTEM 2000 »1998.