

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMÈRI, TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET DE L'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

# Mémoire de fin d'études

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat  
en Electronique

Option : Contrôle

*Thème:*

**Synchronisation impulsive de deux systèmes  
chaotiques de Colpitts**

**Proposé et dirigé par:**

Mr : HAMICHE HAMID

**Etudié et réalisé par:**

Mlle : ATMAN KAHINA

Mlle: KHETTAOUI FATMA

Année universitaire 2010/2011.

## Notations

$\mathbb{R}$  : Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^+$  : Ensembles des nombres positifs.

$\mathbb{R}^n$  : Espace vectorielles de dimension n.

$\mathbb{N}$  : Ensembles des nombres naturels.

$\mathbb{N}^*$  : Ensembles des entiers naturels non nuls.

$L_f \lambda(x) : \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x)$ : la dérivée de  $\lambda$  long de  $f$ .

$L_f^i h$  : ième dérivée du vecteur d'état.

$dL_f^i h$  : Le différentiel de  $L_f^i h$ .

$\dot{X}$  : Dérivée du vecteur d'état.

$\lambda_i$  : variation d'exposant de Lyapunov selon i .

$\hat{x}$  : Vecteur  $x$  estimé.

$\dot{\hat{x}}$  : Dérivée du vecteur  $x$  estimé.

### Matrices et normes

$M > 0$  : Matrice  $M$  symétrique définie positive.

$M < 0$  : Matrice  $M$  symétrique définie négative.

$I_S$  : Matrice identité de dimension  $S \times S$ .

$M^T$  : transposée de la matrice  $M$ .

$M^{-1}$  : Inverse de la matrice  $M$ .

$\lambda_{\min}(M)$  (Resp  $\lambda_{\max}(M)$ ) : valeur propre minimale (resp. maximale) de  $M$ .

$\|x\|$  : Norme euclidienne du vecteur  $x$ .

# Sommaire

Introduction générale.....	1
<b>Chapitre I : Généralités sur les systèmes chaotiques</b>	
I.1 Introduction.....	3
I.2 Système dynamique .....	3
I.3 Espace des phases .....	4
I.4 Notions de chaos .....	6
I.5 Définition d'un système chaotique et propriétés .....	6
a . Imprédictibilité et Sensibilité aux conditions initiales.....	7
b. Aspect aléatoire.....	9
c. Attracteur étrange.....	9
d . Exposants de Lyapunov positifs .....	12
e. Spectre de puissance et la fonction d'auto corrélation.....	15
I.6 Notion de bifurcation .....	15
I.7 Section de Poincaré.....	16
Conclusion.....	16
<b>Chapitre II : Méthodes de synchronisation</b>	
II.1. Introduction.....	17
II.2. Définition.....	17
II.3. Méthodes de synchronisation .....	18
II.3.1 Synchronisations identiques .....	18
II.3.2 Synchronisation par couplage .....	20
II.3.2.1 .Synchronisation par couplage bidirectionnel.....	20
II.3.2.2 .Synchronisation par couplage unidirectionnel.....	22
II.3.3. Synchronisation par la boucle fermée .....	25
II.3.4. Synchronisation à l'aide d'observateur .....	26
II.3.5. Synchronisation par l'inversion du système .....	26
II.3.6.synchronisation impulsive .....	27
II.4. Le chaos dans la transmission sécurisée.....	28

II.4.1. Le cryptage .....	28
II.4.1.1.Cryptage par addition .....	28
II.4.1.2 : Cryptage par inclusion .....	29
II.4.1.3.Cryptage par commutation .....	29
Conclusion.....	30

### **Chapitre III : synchronisation impulsive de deux oscillateurs Colpitts**

III.1. Introduction .....	31
III.2.Etude de l'émetteur .....	31
III.2.1. Choix de la topologie de l'émetteur chaotique .....	31
III.2.2. Etude théorique de l'oscillateur de Colpitts.....	33
III.2.2.1. Le critère d'oscillation de Barkhausen .....	33
III.2.2.2.Détermination des conditions d'oscillation .....	34
III.2.2.3 Détermination des équations d'état.....	35
III.2.2.4 Analyse des comportements chaotiques par simulation.	37
III.3.Réalisation et validation expérimentale .....	40
III.4. Etude du récepteur.....	43
III.4.1 Observabilité d'un système linéaire.....	44
III.4.2 Observabilité d'un système non linéaire.....	44
III.4.3. Approche de la synchronisation par observateur impulsif .....	45
III.4.3.1.Concepts de base sur la commande impulsive .....	45
III.4.3.2. Observateur impulsif.....	48
III.5. Résultats de simulation.....	50
III.5.1. Résultats de la synchronisation de deux colpitts .....	51
Conclusion.....	57
Conclusion générale .....	58

Annexes

Bibliographie

## Introduction générale

La recherche mathématique à propos du chaos remonte à 1890, époque à laquelle Henri Poincaré étudie la stabilité du système solaire. En 1970, David Ruelle et Floris Takens commencent à utiliser le concept du chaos pour décrire les phénomènes naturels. Depuis, le nombre de travaux relatifs aux chaos a littéralement explosé. Les scientifiques de toutes les disciplines prennent aujourd'hui conscience de la puissance des techniques développées durant cette période pour apprivoiser le chaos. Ils commencent à appliquer ces techniques à un nombre de plus en plus important de problèmes concernant la physique, la chimie, l'écologie et même l'économie. Mais, du désordre, la raison ne peut rien tirer.

Lorsque les mathématiciens se sont intéressés au chaos, c'était pour tenter d'y trouver de l'ordre, et ils y sont parvenus ! Créer de l'ordre, voilà bien une des activités principales des mathématiques.

La théorie du chaos est une discipline à part entière basée sur la théorie des systèmes dynamiques. Le chaos résulte d'une instabilité des trajectoires décrivant la dynamique du système considéré dans son espace des phases. Avant la découverte et l'appellation du chaos, celui-ci était inévitablement confus avec l'aspect aléatoire et le déterminisme. Le comportement chaotique est donc un type de mouvement imprévisible produit par des équations non linéaires déterministes (équations différentielles ou équations aux différences).

Les systèmes chaotiques sont caractérisés par un comportement imprévisible à long terme : ceci est dû à une extrême sensibilité aux conditions initiales, plus connue dans le langage courant sous l'appellation « effet papillon ». D'où la question suivante, longtemps restée sans objet : peut-on forcer deux systèmes chaotiques à suivre la même trajectoire ? La réponse est oui, même si cela pouvait sembler improbable avant 1990. En effet, même si un système chaotique génère un attracteur remarquable dans l'espace d'état, l'incertitude sur la position exacte du système, à un instant donné, sur l'attracteur, croît de façon exponentielle avec le temps. Ainsi une très petite incertitude sur les conditions initiales se propage et s'amplifie. Les exposants de Lyapunov, définis dans le premier chapitre I quantifient la vitesse à laquelle cette incertitude augmente. Malgré cette caractéristique qui pourrait sembler incompatible avec la définition même de synchronisation, Pecora et Carroll ont démontré dans leur article fondateur [18] que les systèmes chaotiques ont, sous certaines conditions, la propriété de se synchroniser. Par la suite, plusieurs méthodes de synchronisations ont été

découvertes. On peut citer : la méthode impulsive, la méthode par l'approche de système inverse, méthode par observateur, etc.

Depuis les résultats de Pecora et Carroll. L'idée de la transmission sécurisée par la synchronisation de systèmes chaotiques, qui consiste l'utilisation du phénomène du chaos pour transmettre messages sécurisés. Ceci en transmettant au récepteur un signal chaotique sommaire, produit par l'émetteur, ce signal en question contient comme information le message confidentiel. Enfin, ce message peut être recouvré en synchronisant le récepteur avec le signal envoyé par l'émetteur. Dans la théorie de l'observation, le récepteur est un observateur, qui est une copie du modèle dynamique de l'émetteur plus un terme de correction. De nombreux schémas de transmission ont été proposés par le passé : méthode par additions, par inclusion, par commutation.

Dans ce mémoire de fin d'études, notre objectif consiste à la synchronisation impulsive de deux systèmes chaotiques continus qui sont l'oscillateur Colpitts.

Le présent mémoire est structuré en trois chapitres.

- Le premier chapitre est une introduction à la théorie du chaos et les différents outils utilisés pour analyser de tels systèmes.
- Le deuxième chapitre introduit en premier point les différentes méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques : méthode de Pecora et Carroll (identique), synchronisation par couplage (unidirectionnel, bidirectionnel), par inversion du système, synchronisation à l'aide d'un observateur et la synchronisation impulsive. Le deuxième point montre l'utilité du chaos dans les systèmes de télécommunication, et présente les différentes techniques de cryptage/décryptage de l'information par le chaos.
- Le dernier chapitre consiste à l'étude de la synchronisation impulsive de deux systèmes chaotiques. Ici nous présentons quelques résultats de simulation réalisées sous Matlab afin d'illustrer les performances de la méthode proposée.

Enfin, nous terminons par une conclusion générale et quelques perspectives.



## I.1 INTRODUCTION

La théorie du chaos est une discipline à part entière basée sur la théorie des systèmes dynamiques.

Le chaos résulte d'une instabilité des trajectoires décrivant la dynamique du système considéré dans son espace de phases.

La théorie de chaos a été connue depuis 1960 par de nombreux scientifiques. Ainsi un système chaotique est un système complexe régi par une grande variété de facteurs (comme la météorologie), dépendant de plusieurs paramètres et dont la caractéristique fondamentale est son extrême sensibilité aux conditions initiales.

Ce chapitre est destiné à la présentation de quelques notions théoriques nécessaires à l'analyse de comportements non linéaires, en particulier le comportement chaotique, ses propriétés et ses caractéristiques.

## I.2 Système dynamique [1], [6],[10],[ 11]

### Définition 1

On appelle système dynamique en temps continu, tout système d'équation différentielle du premier ordre défini par :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} f(x, t, u) \quad (\text{I.1})$$

avec  $f$  un champ de vecteurs ;  $x \in u \subseteq \mathcal{R}^n$  est appelé vecteur d'état ,  $u \in v \subseteq \mathcal{R}^p$  vecteur des paramètres et  $t$  est la variable temporelle .

### Définition 2

Lorsque le champ de vecteur  $f$  ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système dynamique est autonome, dans le cas contraire il est non autonome.

### Définition 3

On dit qu'un système est déterministe si on connaissait l'état du système à chaque instant donnée, et si on est en mesure de prévoir son état à un instant ultérieur.

**Définition 4**

La notion de système dynamique présentée au paragraphe précédent peut être étendue aux systèmes en temps discret, on appelle système dynamique discret tout système d'équation algébrique récurrente définie par :

$$X_{k+1} = F(X_k, u) \quad (\text{I.2})$$

Où  $F$  la fonction matricielle de récurrence,  $X_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}^n$  le vecteur d'état à l'instant  $t_k$  et  $u \in V \subseteq \mathcal{R}^p$  le vecteur de paramètres et  $K \in \mathbb{N}$ .

**Définition 5 (Système autonome)**

Un système est dit autonome s'il est indépendant du temps initial, alors qu'un système non autonome ne l'est pas.

Dans un système autonome, tout instant peut être considéré comme temps initial, et tout état  $X(t)$  du système peut être considéré comme état initial.

**I.3 Espace des phases [1], [15]**

L'espace des phases  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  d'un système dynamique est un espace mathématique dont les axes de coordonnées représentent les variables d'état  $x_i$ ;  $i=1 \dots n$ , ces variables sont nécessaire pour spécifier entièrement l'état de ce système à chaque instant. L'évolution suivant  $t$  d'une trajectoire du système se traduit alors par un déplacement présentatif dans l'espace de phases. Le portrait de phases est une véritable signature de la dynamique d'un système.

- **Point d'équilibre**

**Définition 6**

Un point d'équilibre  $x^*$  est un point qui vérifie :

$$\diamond \text{ En temps continu : } f(x^*) = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$\diamond \text{ En temps discret : } f(x^*) = x^* \quad (\text{I.4})$$

Dans le cas des systèmes non linéaires, on peut avoir  $x^* \neq 0$  et il peut y avoir plusieurs points d'équilibres.

- **Stabilité du point d'équilibre (point fixe) [6], [11], [13]**

Par définition, la stabilité est le caractère de ce qui tend à demeurer dans le même état malgré de petites perturbations. Rapportée aux systèmes dynamiques, il s'agit de la solution du modèle mathématique du système, lorsque le système non linéaire est soumis à une légère perturbation, celui-ci est confronté à deux situations : soit il revient vers son état initial, que l'on suppose être ici un point fixe, soit il le quitte pour rejoindre un autre régime dynamique.

- **Solution périodique**

**Définition 7**

Soit  $x(t, x_0)$  la solution d'un système dynamique autonome ou non.  $x(t, x_0)$  est une solution périodique si et seulement si :

$$\forall \tau > 0, \forall t, x(\forall t + \tau, x_0) = x(t, x_0) \quad (\text{I.5})$$

La plus petite valeur de  $\tau$  si elle existe, est appelée période. On la note généralement  $T$ .

Un comportement périodique dans le temps est représenté par un cycle limite dans l'espace des phases. Connaissant l'état du système à un instant donné, on est en mesure de prévoir son état à un instant ultérieur.

- **Solution quasi périodique**

**Définition 8**

Soit  $x(t, x_0)$  une solution du système dynamique (I.1) et soit  $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$  un ensemble fini de réels linéairement indépendants.

On dit que  $x(t, x_0)$  est une solution quasi périodique de (I.1) si elle est périodique pour chacune des périodes  $T_i$  de  $T$ , la solution  $x(t, x_0)$  est également dite  $n$ -périodique.

Pour un régime quasi-périodique l'attracteur correspondant dans l'espace des phases est un tore  $T^n$ , l'état du système demeure calculable à partir d'une condition initiale.

- **Solution chaotique**

A ces trois attracteurs simples cités ci-dessous s'ajoute un attracteur dit étrange, à cause de sa forme géométrique bizarroïde, correspondant à la solution chaotique des systèmes dynamiques non linéaires. L'évolution de ces derniers semble aléatoire et imprévisible. La notion même de solution chaotique est difficile à formuler, c'est ce qui nous amène à aborder par la suite la notion de base de ces caractéristiques et propriétés comportementales ainsi que les mécanismes d'apparition du chaos.

#### **I.4 Notions de chaos [3], [7], [11]**

Un système non linéaire peut avoir un comportement en régime permanent plus complexe que les comportements habituels : oscillations périodiques, quasi-périodiques ,... etc. Dans ce cas, la sortie du système est extrêmement sensible aux conditions initiales, d'où la « non prévisibilité » de la sortie à long terme. On dit alors que le système a un comportement chaotique. Un comportement chaotique fait apparaître un aspect aléatoire malgré la nature déterministe du système.

#### **I.5 Définition d'un système chaotique et propriétés**

- **Définition 9 [12]**

Un système est dit chaotique si son comportement est irrégulier, désordonné tout en étant déterministe. En particulier, on dira qu'un système est chaotique (dans le temps) si son spectre de puissance comporte une partie continue, une bande large, indépendamment de la présence éventuelle de quelques raies.

- **Propriétés**

Un système dynamique chaotique à long terme peut être caractérisé par :

- ✓ Imprédictibilité et sensibilité aux conditions initiales
- ✓ Exposants de Lyapunov positifs
- ✓ Aspect aléatoire
- ✓ Attracteur étrange
- ✓ Fonction d'auto corrélation
- ✓ Spectre de puissance

### a . Imprédictibilité et Sensibilité aux conditions initiales [1]

Il est difficile de concilier l'idée d'un mouvement régi par des équations différentielles déterministes (I.1) et l'impossibilité de prévoir l'évolution d'un système chaotique. Ce paradoxe est levé par une propriété fondamentale des systèmes chaotiques, la sensibilité aux conditions initiales. Deux conditions initiales infiniment proches dans l'espace de phases peuvent donner lieu à des évolutions futures qui divergent après un temps fini. Cependant, chacune de ces évolutions est strictement gouvernée par les équations du mouvement.

Cette propriété mathématique des équations (I.1) interdit de prédire l'évolution future du système sans connaître les conditions initiales avec une précision infini. La sensibilité aux conditions initiales a aussi pour conséquence que l'évolution récente du système ne détermine en rien son évolution future. Cette absence de logique nous donne une impression de « chaos ».

#### ❖ Illustrations pour le mode de Lorenz [2]

Nous avons pris pour référence le modèle de Lorenz, sur lequel on a illustré l'approche chaotique et présenter certaines propriétés et caractéristiques. Pour les simulations, on a judicieusement choisi le Logiciel Matlab pour sa simplicité.

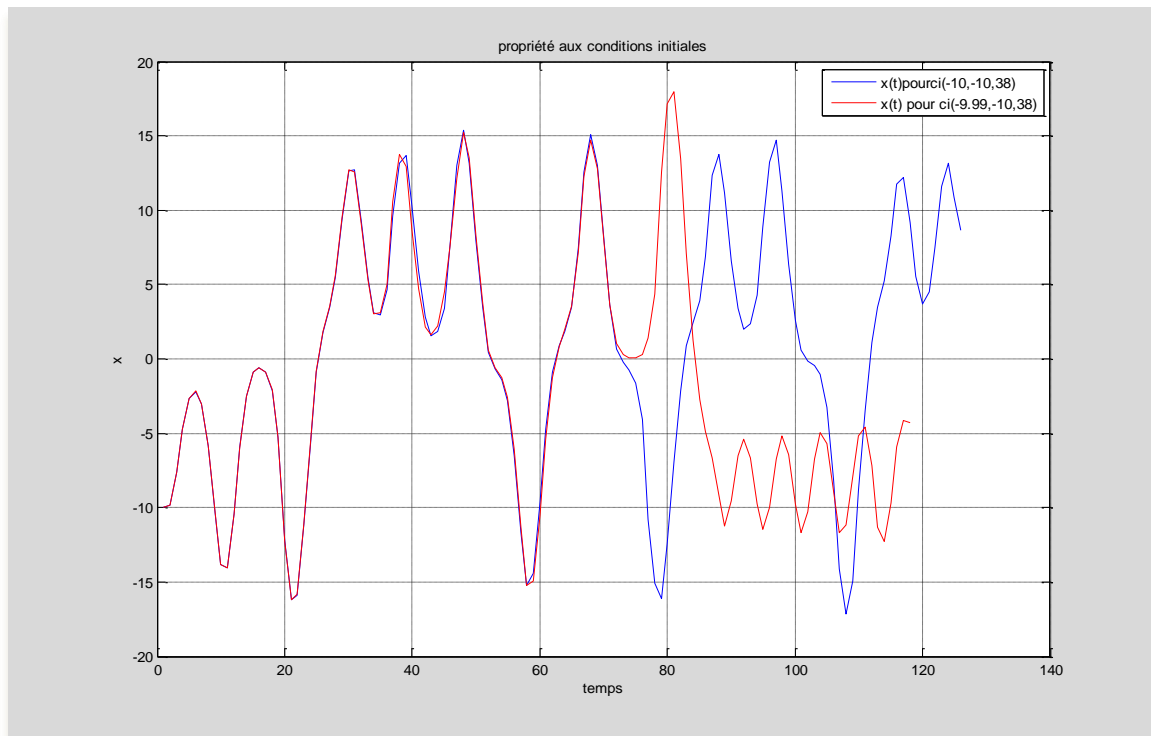
#### Le modèle de Lorenz [2]

La propriété de sensibilité aux conditions initiales a été découverte par Edward Lorenz lors de ses travaux en métrologie en 1963. C'est une explication scientifique de l'effet papillon (un battement d'ailes de papillon à un endroit du monde peut être la cause d'une tempête à un autre endroit), démontrant que, dans un système non linéaire, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles à long terme. Son modèle est décrit par les équations différentielles suivantes.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p_r(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = -y + rx - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases} \quad (1.6)$$

Avec  $(x, y, z)^T$  le vecteur d'état,  $p_r$ ,  $r$  et  $b$  sont des paramètres du système. Lors de la simulation sur Matlab, on a pris  $p_r = 10$  ;  $r=28$  ;  $b=8/3$ , des valeurs pour lesquelles le système présente un comportement chaotique.

Soit  $(x_{10}, y_{10}, z_{10}) = (-10, -10, 38)$  et  $(x_{20}, y_{20}, z_{20}) = (-9.99, -10, 38)$ .



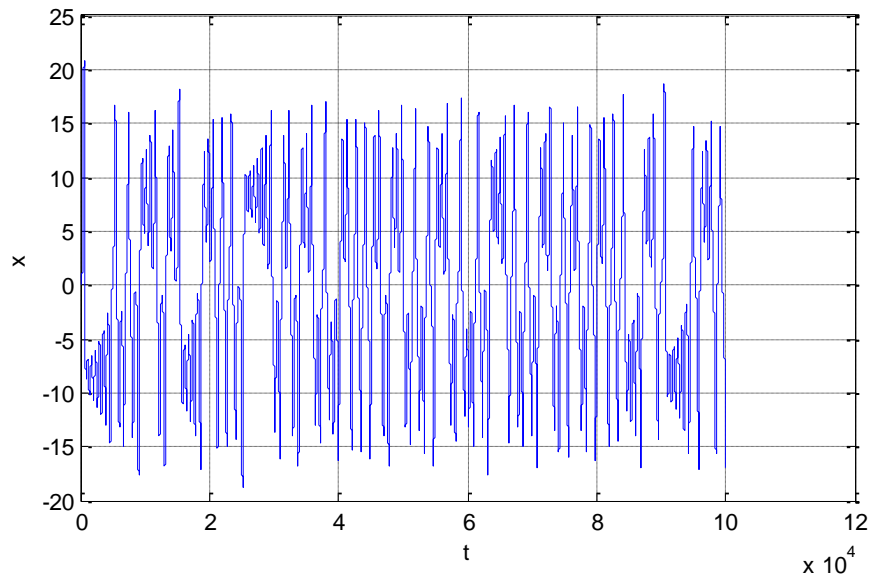
**Figure(I.1) : Illustration de la propriété de sensibilité aux conditions initiales.**

La figure (I.1) montre qu'un petit écart entre deux conditions initiales conduit à une divergence rapide des trajectoires au cours du temps. C'est dans ce contexte qu'on définit les exposants de Lyapunov.

### b. Aspect aléatoire [1]

Cependant, une autre caractéristique des systèmes chaotique peut être observée sur la courbe précédente. En effet, un système chaotique évolue d'une manière qui semble aléatoire.

La figure suivante permet de comparer une évolution simple, périodique et donc prédictible d'un système classique avec une évolution plus complexe, non périodique et non prédictible d'un système chaotique.



**Figure (I.2) :** illustration de l'aspect aléatoire.

### c. Attracteur étrange [2]

Le terme attracteur étrange a été utilisé pour la première fois par David Ruelle et Floris Takens en 1971, afin de décrire l'attracteur obtenu par une série de bifurcations d'un système modélisateur du courant d'un liquide. En fait, avant l'article de Ruelle et Takens, des attracteurs avaient déjà fait l'objet de publications mais ils sont restés ignorés. Cette appellation d'attracteurs étranges fait appel à leurs propriétés peu communes, qui sont leurs dimensions fractales. En effet, la structure géométrique des

trajectoires générées par un système chaotique est extrêmement complexe à cause des étirements, repliements et contractions s'opérant dans une région bornée de l'espace d'état. La section de Poincaré d'une trajectoire chaotique est constituée d'une infinité de couches fines, ce qui suppose que les trajectoires tendent à remplir un espace de dimensions non entières, c'est-à-dire fractales.

La dimension d'un ensemble est le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour décrire un point dans l'ensemble. Par exemple, un point dans un plan cartésien est défini par deux paramètres, qui sont ses coordonnées. La dimension du plan est donc égale à deux (2).

Alors l'attracteur étrange est caractérisé par :

- Sa dimension fractale
- Son bassin d'attraction
- **La dimension fractale [10]**

Soit un ensemble de points situés dans un espace à  $p$  dimensions. Cherchons à recouvrir cet ensemble par des cubes de côté  $\varepsilon$ . Soit  $N(\varepsilon)$  le nombre minimal de cubes nécessaires à cette opération.

Par définition, la dimension fractale  $D$  est alors obtenue en calculant la limite:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (I.9)$$

$D$  est la dimension fractale quand l'arête  $\varepsilon$  des hyper cubes tend vers 0.

Si l'ensemble est celui des points d'un segment de longueur  $L$ .

$$N(\varepsilon) = S\varepsilon^{-1}$$

D'où :  $D=1$ .

Alors que pour l'ensemble des points d'une surface d'aire  $S$  :

$$N(\varepsilon) = S\varepsilon^{-2}$$

D'où :  $D=2$

Par conséquent : le point fixe à une dimension nulle, une oscillation périodique stable est de dimension un (1), un attracteur de période deux (2) a une dimension deux (2).

C'est parce que la structure de ces attracteurs est très régulière que leurs dimensions soient entières. Par contre la dimension d'un attracteur étrange est non entière, par exemple la dimension de l'attracteur de Lorenz est de 2.06.

- **Le bassin d'attraction [13]**

Le bassin d'attraction est l'ensemble des points de l'espace des phases qui sont sous l'effet de l'attracteur, c'est-à-dire que toutes les trajectoires qui commencent à ces points tendent vers l'attracteur après un temps fini.

Pour un système défini par des équations différentielles, le bassin d'attraction est reformulé pour une solution asymptotiquement stable  $x^*(t)$ , c'est-à-dire l'ensemble des points initiaux  $x_0$  pour lesquels les solutions  $x(x_0, t)$  satisferont :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(x_0, t) - x^*(t)\| = 0 \quad (\text{I.10})$$

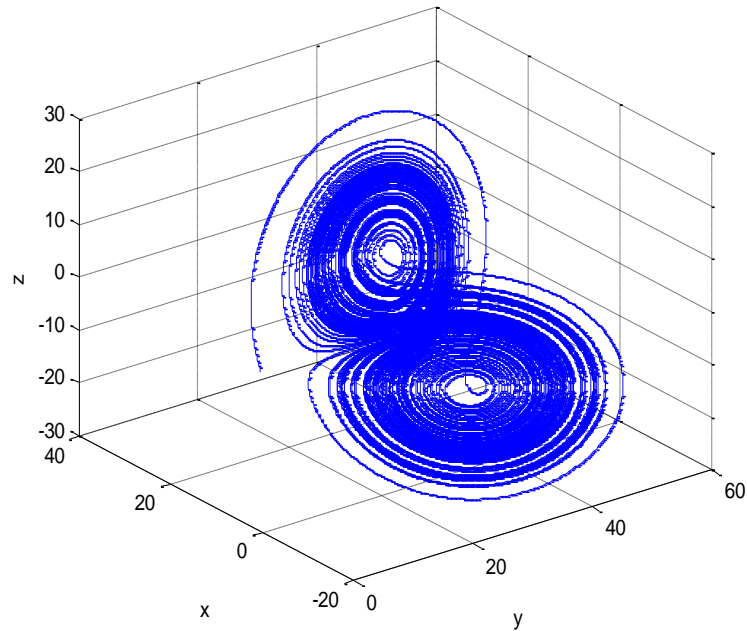
Est le bassin d'attraction de la solution  $x_0(t)$ .

### **Exemple d'attracteur étrange : attracteur de Lorenz [1,13]**

L'attracteur de Lorenz fut introduit par Edward Lorenz en 1963. Il s'agit d'un système dynamique non linéaire de dimension 3, obtenu par des équations de transfert de la chaleur dans un liquide. Le système de Lorenz est défini par les équations de système (I.6).

Le système de Lorenz montre un comportement chaotique et génère un attracteur étrange pour  $a=10$ ,  $b=28$ ,  $C=8/3$ . La dimension de Hausdorff de l'attracteur de Lorenz est estimée entre 2 et 3. La figure (I.3) montre l'attracteur de Lorenz en partant des conditions initiales  $x_0 = y_0 = z_0 = 0.01$  et le pas de la simulation choisi de 0.01. Si l'on regarde l'attracteur de plus près, nous constatons que la trajectoire mêle deux comportements différents : le premier est un comportement apparemment régulier, c'est-à-dire que dans plusieurs régions de l'espace d'état, elle forme des boucles semblables à celles des trajectoires périodiques ; le deuxième comportement semble aléatoire, c'est à

dire que le nombre de boucles décrites dans une région avant de rejoindre brusquement une autre région est imprévisible. Aussi, les instants auxquels ces changements de régions apparaissent sont imprévisibles.



**Figure (I.3)** : illustration de l'attracteur de Lorenz.

#### **d . Exposants de Lyapunov positifs [9], [13]**

En régime chaotique, la distance entre deux trajectoires initialement proches tend à augmenter à une vitesse exponentielle, puis à se stabiliser lorsque la distance atteint une valeur limite de l'ordre du diamètre de l'attracteur. Étant donné la précision sur les mesures, le temps que mettent deux conditions initiales dont la distance à l'origine est de l'ordre de cette précision constitue l'horizon prédictif du système les exposants dites de Lyapunov permettent de mesurer ce taux de divergence.

La mesure du plus grand exposant de Lyapunov nécessite l'itération de la dynamique du modèle pour deux conditions initiales très proches, et de mesurer au bout

d'un temps fini la distance entre ces deux trajectoires. Pour que ce calcul soit valable, il faut bien sur que ces deux conditions initiales soient situées à proximité de l'attracteur.

Les exposants de Lyapunov permettent de caractériser le chaos temporel et plus particulièrement la sensibilité aux conditions initiales que peut présenter un attracteur étrange .Autrement dit, nous allons exposer comment le taux de divergence entre l'évolution des trajectoires issues des conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange ; on peut interpréter ceci en temps d'information au sens de Shannon : sur un attracteur chaotique, on parle de création d'information en ce sens que deux états initiaux proches, indiscernables par un appareil de mesure de précision finie, vont. Évoluer au cours du temps vers deux états discernables.

On considère un système dynamique non linéaire de l'équation (I.1) et soit  $X_0$  et  $Y_0$  deux conditions initiales pour ce système. On note  $X$  et  $Y$  les fonctions de temps telles que  $X(t)$  et  $Y(t)$  représentent respectivement l'état du système à l'instant  $t$  et telles que  $x(0) = x_0$   $y(0) = y_0$

On note la distance Euclidienne définie comme suit :

$$d: R^n \times R^n \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - Y_i)^2} \quad (\text{I.7})$$

S'il existe à un instant  $t$ , une constante réelle  $\lambda$  et une constante  $a$  tels que, si  $I=[0, t_1]$

$$\forall t \in I \quad d(X(t), Y(t)) \simeq e^{\lambda t + a} \quad (\text{I.8})$$

Alors,  $\lambda$  est appelé exposant de Lyapunov.

## Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov [9]

Un exposant de Lyapunov positif indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. Il s'agit donc bien là d'une caractérisation d'un attracteur étrange. Pour une application bidimensionnelle, on peut dès lors résumer la correspondance entre le type de l'attracteur et le signe des exposants de Lyapunov (ici ils sont deux) dans le tableau suivant :

Type d'attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
Point fixe	(-, -)
Cycle limite périodique	(0, -)
Cycle limite quasi-périodique	(0, 0)
Attracteur étrange	(+, 0)

Le tableau ci-dessus désigne les exposants de Lyapunov des différents types d'attracteur dans un espace bidimensionnel.

### ❖ Comportement du système en fonction des exposants de Lyapunov [13]

En étudiant les exposants de Lyapunov d'un système non linéaire, on peut définir le type d'attracteur (comportement asymptotique) généré par le système (sous l'hypothèse que les trajectoires évoluent dans une région bornée) :

- $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$  : des exposants de Lyapunov négatifs montrent l'existence d'un point fixe,
- $\lambda_1 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 < 0$  : l'attracteur est une orbite fermée.
- $\lambda_1 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 < 0$  : l'attracteur est quasi-périodique (deux fréquences).
- $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} < 0$  : l'attracteur est quasi-périodique (K fréquences)
- $\lambda_1 > 0, \sum_i \lambda_i < 0$  : l'attracteur est chaotique.
- $\lambda_i > \dots > \lambda_i > 0, \sum_i \lambda_i < 0$  : l'attracteur est hyperchaotique.

### e. Spectre de puissance et la fonction d'auto corrélation

Un autre outil de caractérisation très classique en traitement de signal, qui peut être utilisé pour analyser un signal chaotique, concerne l'analyse spectrale. Cette méthode est utile pour caractériser tous les types de signaux qu'ils soient d'origine linéaire ou non linéaire, de types périodiques, quasi-périodiques, pseudo-aléatoires ou encore complètement aléatoires (bruit blanc par exemple). On définit ainsi le spectre de puissance d'un signal  $x(t)$  comme le carré de son amplitude de Fourier par unité de temps. L'allure de ce spectre renseigne sur le type de fonctionnement du système étudié.

En régime chaotique, le spectre de puissance de l'une des variables du système dynamique comporte une partie continue, traduisant une évolution désordonnée. Mais, ce type de spectre est difficilement différenciable de celui d'un bruit blanc. Cette méthode n'est donc pas suffisante pour identifier un régime chaotique.

Pour estimer ce taux de désordre, il est utile d'introduire la fonction d'auto-corrélation.

$$C(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} x(t) x(t + \tau) dt \quad (\text{I.10})$$

Cette fonction mesure la ressemblance de la variable  $x$ , à l'instant  $t$ , avec lui-même quand le temps s'écoule.

Lorsque le régime est chaotique,  $c(\tau)$  tend vers zéro quand  $\tau$  augmente. La fonction d'auto-corrélation temporelle a donc une portée finie ; la similitude du signal avec lui-même diminue et disparaît même totalement à des instants suffisamment éloignés.

## I.6 Notion de bifurcation [8]

Une dynamique non linéaire est capable d'engendrer différents types de solutions en fonction de la valeur des paramètres, et/ou de celles des conditions initiales. Lorsqu'on fait varier continuellement un paramètre il est possible d'observer une transition entre deux types de solutions en une valeur bien précise du paramètre. Cette valeur caractérise un point de bifurcation correspond à un changement qualitatif du type de solution observée.

## I.7 Section de Poincaré [1], [13]

En mathématiques, dans la théorie des systèmes dynamiques, la section de Poincaré est l'intersection d'une trajectoire (périodique, quasi-périodique ou chaotique) dans un espace d'au moins trois dimensions, avec un hyperplan d'une dimension inférieure. Ainsi, nous observons le retour de la trajectoire vers l'hyperplan qui commence à un certain point de celle-ci. L'ensemble des points marqués par la trajectoire sur l'hyperplan est appelé plan de Poincaré.

### Conclusion

Le chaos est obtenu à partir des systèmes non linéaires; il correspond à un comportement borné de ces systèmes, ce qui le fait apparaître comme du bruit pseudo aléatoire. Il peut donc être utilisé pour masquer ou mélanger les informations dans une transmission sécurisée.

Le prochain chapitre est consacré à la présentation des méthodes de synchronisations utilisées dans les transmissions sécurisées par le chaos.

## II.1. Introduction

Pendant longtemps, le chaos a été considéré comme indésirable par la communauté scientifique. Cependant, dans les années 90, des scientifiques ont réalisé que le chaos pouvait être contrôlé et ont commencé à chercher ses applications possibles.

Les signaux issus des systèmes chaotiques sont imprédictibles à long terme, peuvent présenter des propriétés proches de l'aléatoire (auto corrélation réduite), bien qu'issus de systèmes déterministes, ces caractéristiques sont liées aux propriétés requises par les schémas de chiffrement. Cependant les scientifiques ont réalisé que les systèmes chaotiques pouvaient être utilisés dans le domaine des télécommunications ce qui pose directement le problème de synchronisation du récepteur dans le but de dupliquer le signal chaotique employé à l'émetteur. Dans la section précédente nous avons montré la sensibilité très importante aux conditions initiales des systèmes chaotiques, et à première vue la synchronisation chaotique paraît difficile à réaliser. A la différence de la synchronisation classique employée dans les systèmes de télécommunication où l'on cherche à reproduire juste une période d'oscillation, la synchronisation chaotique présente plus de contraintes.

En 1990, Pecora et Carroll ont montré que les systèmes chaotiques peuvent être synchronisés. Une des applications du chaos qui a alors intéressé les chercheurs est l'utilisation de systèmes chaotiques à des fins de chiffrement.

Dans ce chapitre nous présenterons les principales méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques.

## II.2. Définition [14]

La synchronisation est un phénomène qui caractérise de nombreux systèmes non linéaires. La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système. Rappelons qu'un système chaotique est un système déterministe extrêmement sensible aux conditions initiales. Par conséquent, typiquement, deux trajectoires issues de deux conditions initiales arbitrairement proches l'une de l'autre divergent exponentiellement avec le temps. Il s'ensuit que deux systèmes chaotiques ne peuvent se synchroniser (sauf si les conditions initiales sont exactement les mêmes, ce qui est physiquement et numériquement impossible). A première vue, parler de synchronisation pour les systèmes chaotiques semble donc être surprenant, donc on peut dire que le chaos est incontrôlable. Cependant, des recherches récentes ont montré qu'il est possible de synchroniser les sorties d'un circuit électrique, et coder le message afin de sécuriser les communications.

D'une façon générale, la synchronisation peut être décrite par la définition suivante :

Considérons les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, u) \\ \dot{\hat{x}} = f_2(\hat{x}, u) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Avec  $x \in \mathbb{R}^n, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ , dans lesquels  $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des champs de vecteurs non linéaires, les deux systèmes sont dit synchronisés si :

$$e = \hat{x}(t) - x(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

Où  $e$  représente l'erreur de synchronisation.

### II.3. Méthodes de synchronisation

Il existe plusieurs méthodes de synchronisation, dans ce que suit, nous allons présenter quelques principales méthodes.

#### II.3.1 Synchronisations identiques [6], [19]

Pour illustrer la méthode de synchronisation par couplage entre deux systèmes chaotiques on a choisi de présenter la synchronisation identique proposée par Pecora et Carroll. Celle-ci a l'avantage de représenter une solution simple et performante de synchronisation dont l'objectif est que l'esclave reproduise le plus fidèlement possible l'état du maître, après un régime transitoire.

Considérons un système dynamique autonome, en temps continu, de dimension  $n$ , représenté par la relation suivante :

$$\dot{x}(t) = F(x(t)). \quad (\text{II.2})$$

$$\text{Où } x = [x_1, \dots, x_n]^T.$$

Par la suite, on divise le système initial en deux sous-systèmes  $\{S_1, S_2\}$  :

$$\begin{cases} S_1: \dot{x}^{\{1\}} = F^{\{1\}}(x^{\{1\}}, x^{\{2\}}) \\ S_2: \dot{x}^{\{2\}} = F^{\{2\}}(x^{\{1\}}, x^{\{2\}}) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Avec les états et les dynamiques définis conformément aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 x &= [x^{\{1\}}, x^{\{2\}}]^T. \\
 x^{\{1\}} &= [x_1, \dots, x_m]^T. \\
 x^{\{2\}} &= [x_{m+1}, \dots, x_n]^T.
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

$$F(x) = [F^{\{1\}}(x); F^{\{2\}}(x)] \tag{II.5}$$

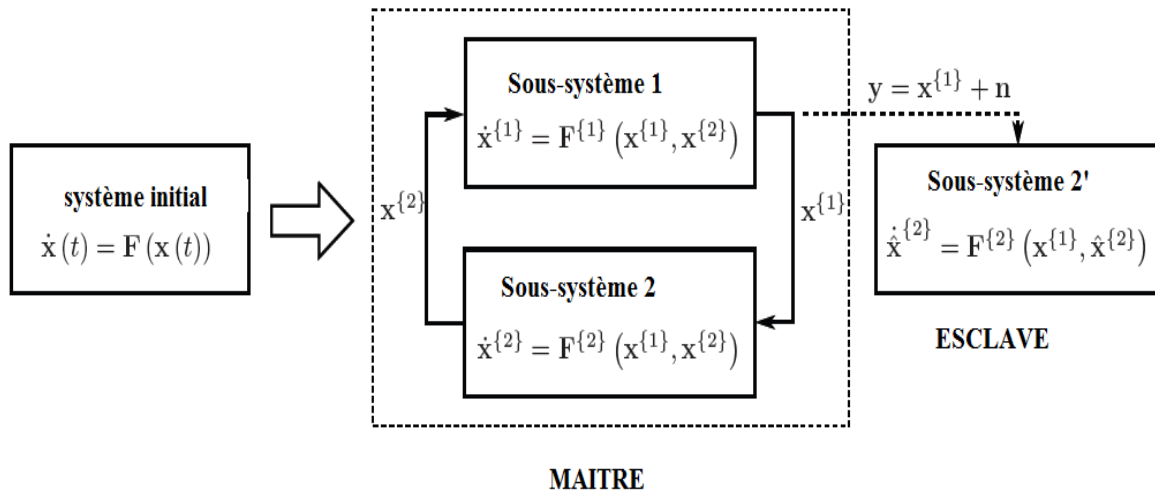
Bien sûr, cette opération peut être réalisée de manière arbitraire avec une réorganisation des variables d'état dans un ordre quelconque. On considère maintenant un deuxième sous-système  $S'_2$  caractérisé par une dynamique identique  $F^{\{2\}}$ , et un vecteur d'état  $\hat{x}^{\{2\}}$ :

$$S'_2: \hat{x}^{\{2\}} = F^{\{2\}}(x^{\{1\}}, \hat{x}^{\{2\}}) \tag{II.6}$$

On peut dire que ce sous-système duplique  $S'_2$  est un candidat susceptible de se synchroniser avec la dynamique complète initiale. Pecora et Carroll ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que cette proposition soit vraie est que le sous-système  $S'_2$  soit stable ; hypothèse qui est équivalente avec la condition que l'ensemble des valeurs de Lyapunov du sous-système  $S'_2$  soient négatifs. Une synchronisation parfaite peut alors être accomplie ; les trajectoires étant asymptotiquement convergentes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}^{\{2\}}(t) - x(t)^{\{2\}}| = 0 \tag{II.7}$$

Dans la figure (II.1), on représente graphiquement le processus de décomposition en sous-systèmes, cette fois avec la notation  $y = x^{\{1\}} + n$  de la variable d'état qui commande le système  $S'_2$ , où  $n$  est un éventuel bruit additif associé au canal de communication.



**Figure (II-1) :** Synchronisation identique.

### II.3.2 Synchronisation par couplage [13]

Les méthodes traditionnelles de synchronisation chaotique sont en général basées sur l'utilisation de circuits identiques. Supposons deux circuits chaotiques identiques oscillant de façons totalement indépendantes. Si par un moyen quelconque, on leur permet d'échanger l'énergie, action que l'on nomme couplage, les deux systèmes finiront par céder la place à un comportement commun, ils se synchronisent.

Il est possible de coupler les systèmes chaotiques dans un sens (couplage unidirectionnelle) ou dans deux sens (couplage bidirectionnelle). Dans le cas d'un couplage unidirectionnel, l'énergie est transférée d'un système à un autre à l'aide d'un élément de couplage fonctionnant dans un seul sens comme le cas d'un suiveur. Par contre dans le couplage bidirectionnel l'élément de couplage permet l'échange de l'énergie dans les deux sens, ceci par une résistance.

#### II.3 .2.1 .Synchronisation par couplage bidirectionnel [13]

Pour expliquer la synchronisation bidirectionnelle (mutuelle) de deux systèmes chaotiques, on considère les deux systèmes donnés ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \lambda(y - x) \\ \dot{y} = g(y) + \mu(x - y) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

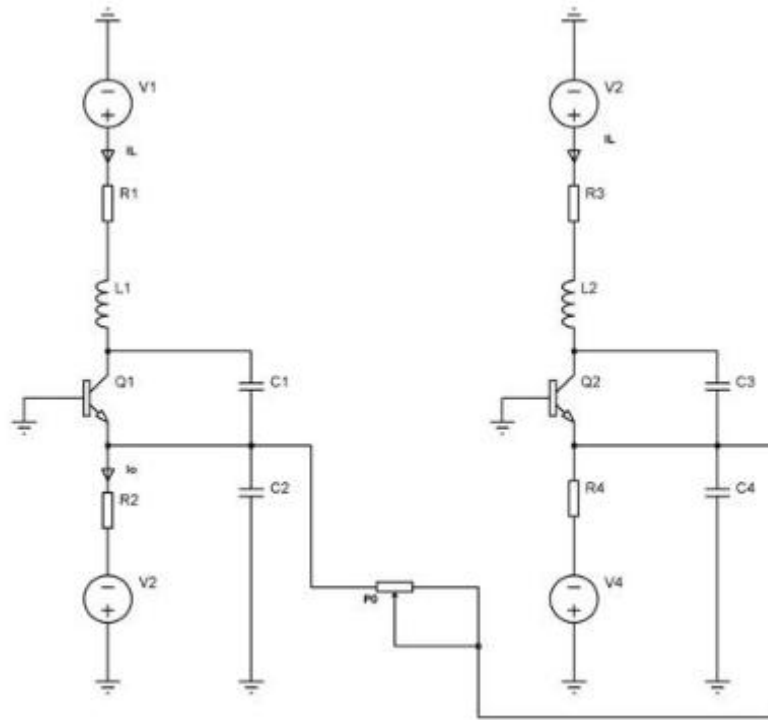
Où,  $y \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda, \mu$  sont des matrices diagonales  $\eta \times \eta$  ;  $\lambda = \text{diag}[\lambda_i]$  ,  $\mu = \text{diag}[\mu_i]$  ,  $i = 1, \dots, n$  , on suppose  $f(0) = g(0) = 0$ . Du point de vue de l'ingénierie électronique, ce type de synchronisation définit l'évolution temporelle de deux circuits électroniques couplés à l'aide d'une résistance. Le problème de synchronisation consiste alors à trouver  $\lambda$  et  $\mu$  de telle manière que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = 0$$

Afin de constater expérimentalement le couplage bidirectionnel de systèmes chaotiques, ils ont couplé deux montages identiques de l'oscillateur de Colpitts, comme montré dans la figure (II.2) Pour cela, nous avons d'abord ajusté les tensions d'alimentation de chaque montage afin d'obtenir deux comportements différents, ceci pour être sûr que les deux circuits fonctionnent indépendamment. Ils ont ensuite couplé les points  $V_{c2}$  (émetteurs des transistors) à l'aide d'un potentiomètre (résistance variable). L'utilisation du potentiomètre permet l'échange de l'énergie dans les deux sens, et donc un couplage bidirectionnel. Ils ont fait varier le potentiomètre et nous avons relevé les différentes valeurs de la résistance de couplage pour lesquelles différents comportements apparaissent. Pour le premier oscillateur, ils ont choisi  $V_1 = 14.5V$ ,  $V_2 = 18.1V$  et pour le second oscillateur ils ont fixé  $V_1 = 15.2V$ ,  $V_2 = 15.2V$ . Le premier oscillateur oscille alors en régime multi périodes alors que le deuxième montre un comportement chaotique.

Ensuite, ils ont couplé les deux oscillateurs à l'aide du potentiomètre ajusté à sa valeur maximale, ici  $R = 566k\Omega$ . Ils constatent qu'il n'y a aucun changement dans le comportement des oscillateurs, ce qui signifie que la valeur de la résistance de couplage est trop élevée et par conséquent l'échange de l'énergie est trop faible pour produire une synchronisation. En diminuant la valeur de  $R$  nous observons des changements de comportement pour chaque oscillateur. Ainsi pour  $R = 36\Omega$  un comportement commun apparaît et les deux oscillateurs se synchronisent parfaitement. En conservant cette valeur de résistance de couplage, nous faisons varier une des deux tensions de polarisation du deuxième oscillateur ce qui, si l'oscillateur n'était pas couplé, lui ferait changer de régime. Il n'en est rien : seule amplitude du second oscillateur change, la forme des signaux reste identique et les deux oscillateurs restent couplés.

Les résultats obtenus montrent que pour une synchronisation bidirectionnelle, la résistance de couplage doit être très faible pour que l'échange de l'énergie ait lieu dans les deux sens. Lorsque les oscillateurs sont synchronisés, la dimension du système global, constitué de deux oscillateurs couplés, passe de 6 à 3.



**Figure (II-2)** : Couplage bidirectionnel de deux oscillateurs de Colpitts.

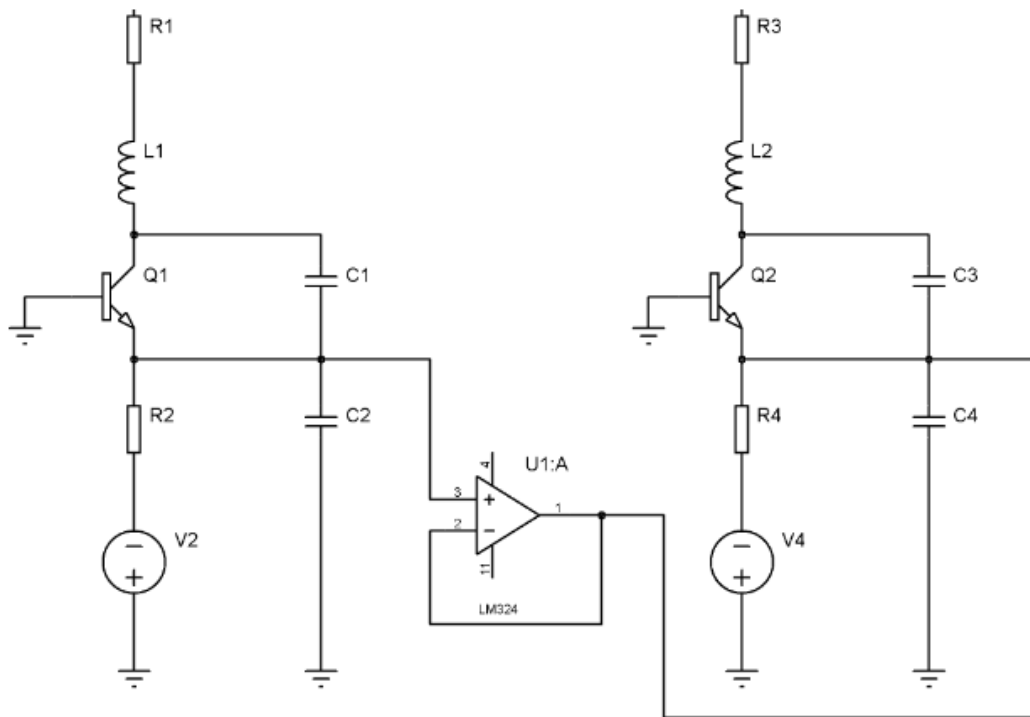
### II.3.2.2 .Synchronisation par couplage unidirectionnel

La synchronisation unidirectionnelle des systèmes chaotiques est basée sur l'injection d'une partie du signal d'erreur dans le système esclave (celui qui doit se synchroniser avec l'autre). Mathématiquement parlant, on peut considérer les deux systèmes donnés ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x) \\ \dot{y} = f_2(y) - \Delta(x - y) \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Où :  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Delta = \text{diag}[\delta_1, \dots, \delta_n]^T$ . Le problème de synchronisation consiste alors à trouver  $\Delta$  tel que  $y(t) \rightarrow x(t)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

L'exemple donné ci-après illustre de façon simple la différence entre la synchronisation par couplage unidirectionnel et bidirectionnel :



**Figure (II.3) :** Couplage unidirectionnel de deux oscillateurs de Colpitts.

### Exemple

Soient deux systèmes chaotiques **identiques**  $a$  et  $b$  de dimension 3, décrits respectivement par :

$$\dot{x}_a = f(x_a) \quad \text{et} \quad \dot{x}_b = f(x_b)$$

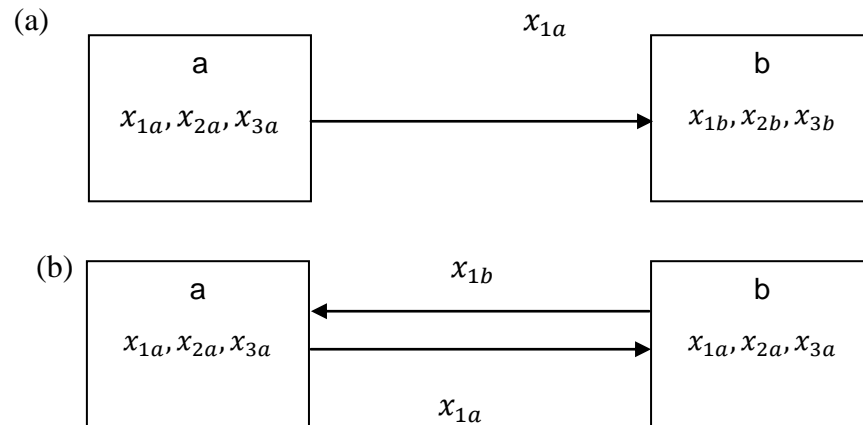
Le schéma de couplage des deux systèmes est montré dans les figures (II.4). (a) (couplage unidirectionnel) et (II.4). (b) (couplage bidirectionnel). Le couplage de ces systèmes peut être exprimé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1a} = f_1(x_a) + k_{a1}(x_{1b} - x_{1a}) \\ \dot{x}_{2a} = f_2(x_a) + k_{a2}(x_{1b} - x_{1a}) \\ \dot{x}_{3a} = f_3(x_a) + k_{a3}(x_{1b} - x_{1a}) \end{cases} \quad (\text{II. 10})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{1b} = f_1(x_b) + k_{b1}(x_{1a} - x_{1b}) \\ \dot{x}_{2b} = f_2(x_b) + k_{b2}(x_{1a} - x_{1b}) \\ \dot{x}_{3b} = f_3(x_b) + k_{b3}(x_{1a} - x_{1b}) \end{cases} \quad (\text{II. 11})$$

Où  $k_{ai}, k_{bj}$  sont appelés « constantes de couplage ». Si les coefficients  $k_{ai} = 0$  ;  $i = 1, 2, 3$ , il existe alors un couplage unidirectionnel du système (a) au système (b), car l'état de (a) influence le système (b) tandis que le système (b) n'a aucune influence sur le système (a). Le système (a) est alors le maître (ou l'émetteur) et le système (b) est l'esclave (ou l'émetteur).

Si  $k_{ai} \neq 0$  et  $k_{bj} \neq 0$  pour au moins une valeur de  $i = 1, 2, 3$ , et au moins une valeur de  $j = 1, 2, 3$ , alors un couplage bidirectionnel est établi entre les deux systèmes, c'est-à-dire que chaque système est influencé par l'autre.



**Figure (II.4)** Schémas de couplage : (a) unidirectionnel, (b) bidirectionnel

Lorsque la synchronisation des deux systèmes est atteinte, les termes de couplage contenant les coefficients  $k$  deviennent nuls. Cela veut dire que  $x_a = x_b$  et qu'un comportement commun est obtenu pour les deux systèmes. En effet la dimension du système est réduite de 6 à 3.

Dans le cas de la figure (II.4), qui est un couplage unidirectionnel, si on met un suiveur de tension en série et avant le potentiomètre, le couplage devient alors unidirectionnel.

Dans le contexte du système de l'exemple, on considère le vecteur de dimension 6 :

$$z(t) = \begin{pmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \end{pmatrix}$$

On suppose que les deux systèmes sont synchronisés, c'est-à-dire  $x_a(t) = x_b(t)$ . Imaginons maintenant que  $z$  soit légèrement perturbé, si la synchronisation des deux systèmes chaotiques est stable, alors  $z$  revient à sa position initiale et les deux systèmes restent synchronisés. Pour étudier ce problème, on considère  $x_a - x_b = \Delta$  et on soustrait les équations

du système b de celles du système a. Ensuite, on linéarise le système obtenu par rapport à la perturbation  $\Delta$ . On obtient alors :

$$\dot{\Delta} = Df(x)\Delta - k\Delta_1 \quad (\text{II.12})$$

Dans lequel  $Df(x)$  est la matrice Jacobienne de  $f(x)$ ,  $x(t) = x_a(t) = x_b(t)$  représente la situation de synchronisation chaotique vérifiant

$$\dot{x} = f(x) \text{ et } K = [k_{a1} + k_{b1}, k_{a2} + k_{b2}, k_{a3} + k_{b3}]^T.$$

Si pour  $|x_a(0) - x_b(0)| < \varepsilon$  (avec  $\varepsilon > 0$  et petit), nous obtenons  $|x_a(t) - x_b(t)| \rightarrow 0$  pour  $t > 0$ , on dit alors que la synchronisation est stable. La synchronisation chaotique sera globalement stable si pour toute trajectoire  $x(t)$  sur l'attracteur chaotique du système synchronisé  $\dot{x} = f(x)$  (comportement commun), les exposants de Lyapunov sont négatifs lorsque le système est soumis à une légère perturbation  $\Delta_0$ .

### II.3.3. Synchronisation par la boucle fermée [15]

Une autre technologie de la synchronisation est basée sur la boucle fermée qui peut être illustrée en figure (II-5) où nous employons l'erreur entre l'émetteur et le récepteur pour corriger le comportement du récepteur afin de réaliser la synchronisation.

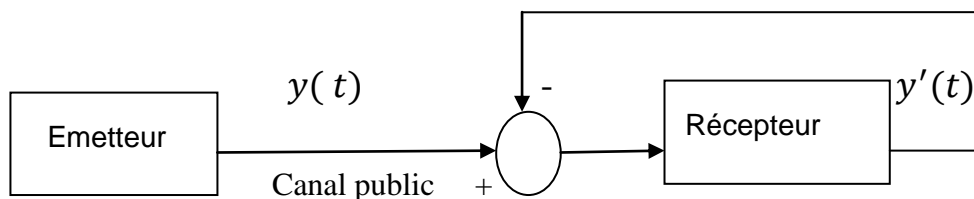
Supposons que l'émetteur s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Et que le récepteur peut être décrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = h(\hat{x}) \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Où  $g$  est une fonction de l'erreur entre  $y$  et  $\hat{y}$  et que cette fonction est choisie afin de garantir la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur. En fait, ce genre de récepteur peut être considéré comme la conception d'un observateur.



**Figure (II-5) :** Synchronisation par un contrôle en boucle fermée.

**II.3.4. Synchronisation à l'aide d'observateur [15]**

La synchronisation peut également être réalisée en employant un observateur, cette méthode est typique, afin d'estimer les états inconnus d'un système dynamique qui ne peuvent pas être mesurés directement.

Considérons l'émetteur comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) = Ax + f(x) \\ y = h(x) = Cx \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Et un d'observateurs possibles peut être conçu de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) = A\hat{x} + f(x) + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = h(\hat{x}) = C\hat{x} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

En définissant  $e = x - \hat{x}$

Nous pouvons obtenir

$$\dot{e} = (A - KC)e + f(x) - f(\hat{x}) \quad (\text{II.17})$$

Dans ce cas, le problème de la synchronisation devient celui de la stabilité au voisinage du point fixe (0) du système (II.17). Si la fonction  $f(x)$  vérifie la condition Lipchitz (voir annexe), et si nous pouvons trouver un gain approprié :  $K$  afin de garantir la stabilité du système (II.17), alors la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur peut être réalisée. Cette approche peut également être considérée comme un type de synchronisation par la boucle fermée puisque le récepteur est conduit également par l'erreur des signaux de sortie de l'émetteur et du récepteur.

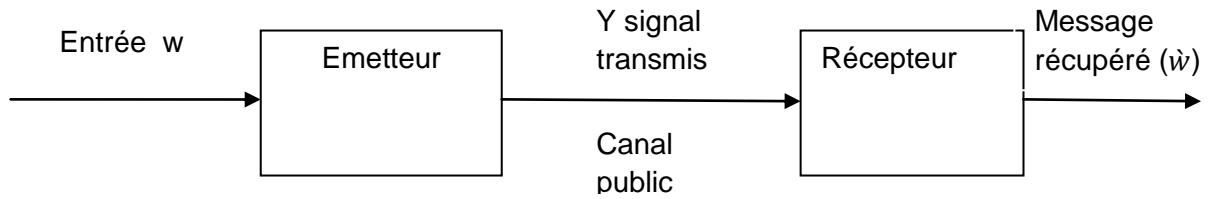
Il existe plusieurs peuvent être utilisés pour la synchronisation, on peut citer :

- Observateur à mode glissants
- Observateur à grand gain
- Observateur adaptatif
- Observateur numérique, etc.

**II.3.5. Synchronisation par l'inversion du système [16]**

Jusqu'à présent, toutes les approches mentionnées sont dans le but de synchroniser seulement les états du système, et ne concernent pas la synchronisation (ou plus exactement l'estimation) des entrées inconnues du système. Cependant, la possibilité d'estimer les entrées

inconnues est évidemment essentielle à la transmission chaotique de données puisque l'entrée inconnue est généralement un message confidentiel.



**Figure (II-6) :** Synchronisation par l'inversion du système.

Une autre méthode proposée est basée sur la solubilité du problème d'inversion à gauche afin d'achever les synchronisations des états et entrées inconnues du système. Celle-ci peut être décrite en figure (II .6) ou l'émetteur peut être écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Où  $x \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des états du système,  $U \in \mathcal{R}^m$  est le vecteur des entrées inconnues,  $f, : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n, g: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times m}, h: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^p$  sont des vecteurs des fonctions analytiques.

Pour le récepteur, le vecteur d'entrée est le vecteur de sortie de l'émetteur.

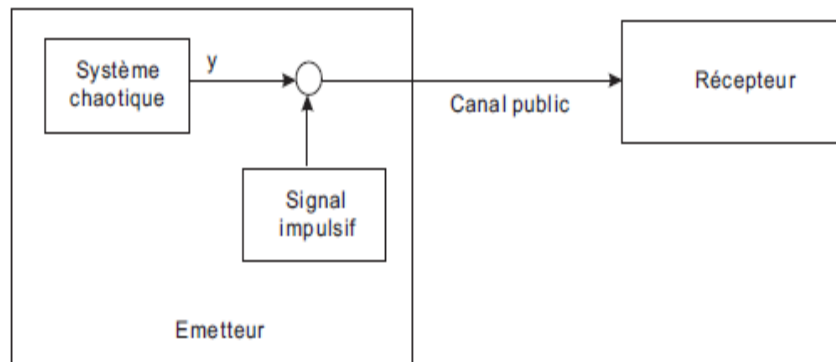
Nous essayons de concevoir un récepteur tel que son vecteur de sortie converge au moins asymptotiquement vers le vecteur d'entrée de l'émetteur. Ce problème s'appelle l'inversion à gauche du système.

### II.3.6.synchronisation impulsive [15]

Dans un schéma de transmission usuel, un des états du système dynamique est transmis afin de réaliser la synchronisation par le récepteur. Dans le but de réduire la redondance du signal transmis. Pour cela le signal de transmission est divisé en petits intervalles (impulsions). La synchronisation impulsive est analogue à la synchronisation échantillonnée.

Dans cette approche, en raison de l'introduction d'un opérateur de Dirac, le problème de synchronisation entre l'émetteur et le récepteur devient celui de stabilise système impulsionnel.

Il est à noter que cette méthode sera détaillée et utilisée au chapitre suivant.



**Figure (II.7) :** Synchronisation impulsive

## II.4. Le chaos dans la transmission sécurisée [18]

La plupart des approches de synchronisation discutées précédemment peuvent être directement appliquées dans la transmission de données, ainsi ici nous rappellerons les schémas principaux : cryptage additif, cryptage par inclusion et la méthode de CSK.

### II.4.1. Le cryptage

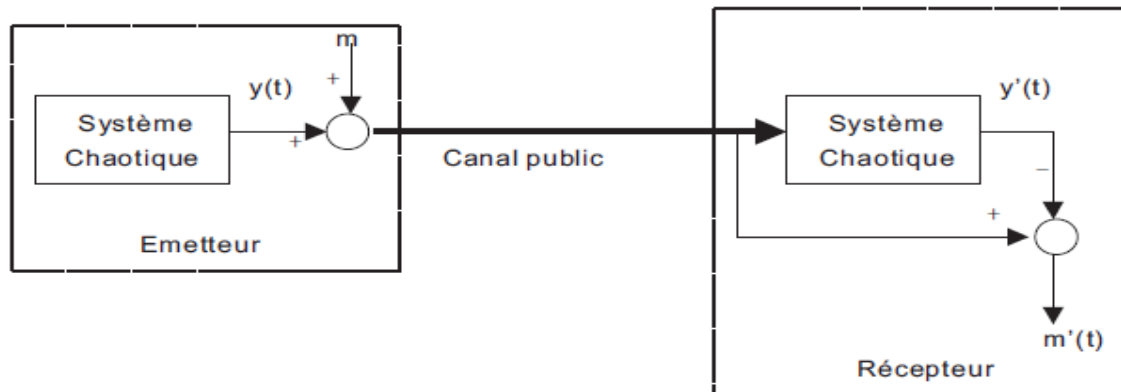
Le cryptage proprement dit, ou comment mélanger et séparer les données du signal chaotique, est l'étape finale pour construire le système de communication chaotique. Un signal chaotique porteur d'informations représente une généralisation de systèmes conventionnels de modulation. Ainsi, un message source à faible amplitude est masqué par un signal chaotique plus large.

Cependant, contrairement aux porteuses sinusoïdales conventionnelles, et à cause de l'absence de notions précises d'amplitude, de phase et de fréquence; le signal chaotique est mélangé avec le message source de différentes façons. Principalement il existe trois méthodes de cryptage : cryptage par addition, par inclusion et par commutation.

#### II.4.1.1. Cryptage par addition:[14], [18]

Dans le cryptage additif le message est tout simplement additionné au signal chaotique, et le signal résultant est envoyé au récepteur pour la synchronisation. En conséquence, après

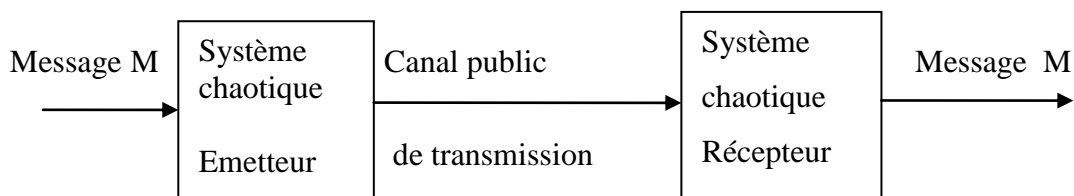
la synchronisation, le message confidentiel peut être récupéré par une simple opération de soustraction entre la sortie du récepteur et le signal émis sur le canal public



**Figure(II.7)** : Cryptage par la méthode additive

#### II.4.1.2 : Cryptage par inclusion [18], [15]

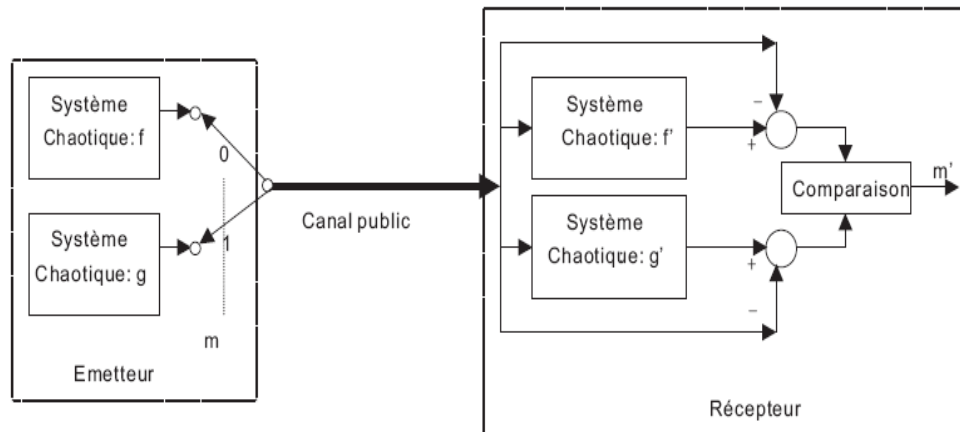
Dans le cryptage par inclusion, le message source est inclus dans la structure du système chaotique du côté de l'émission. Dans ce cas, un observateur doit être utilisé à la réception pour récupérer le message original. Cette méthode nécessite un seul canal de transmission.



**Figure (II.8)** : cryptage par la méthode d'inclusion.

#### II.4.1.3. Cryptage par commutation [15], [18]

Cette méthode (appelée aussi chaos Shift Keying, CSK) est utilisée pour transmettre un message binaire. Elle est représentée par la figure (II.9) où les symboles du message binaire à transmettre sont utilisés pour la commutation entre deux systèmes chaotiques différents. À la réception le démodulateur qui est en fait un observateur d'états discrets (observateur hybride) est utilisé pour reconstruire le message original. Un tel observateur peut être représenté par la figure (II.9)



**Figure (II.9) :** Cryptage par commutation.

### Conclusion :

Ce chapitre a permis de faire le lien entre les systèmes dynamiques chaotiques et les systèmes de communication. Le concept de synchronisation du chaos de Pecora et Carroll a ouvert la voie à l'utilisation du chaos dans les télécommunications. Ces derniers ont montré que deux systèmes chaotiques identiques peuvent se synchroniser s'ils sont couplés sous certaines conditions.

Dans le chapitre qui suit, nous allons appliquer la méthode de synchronisation impulsive discutée précédemment sur deux circuits chaotiques de colpitts.

### **III.1. Introduction**

Les crypto systèmes (ou systèmes de transmission sécurisée d'information) chaotiques exploitent les propriétés fondamentales des systèmes chaotiques et leur capacité de synchronisation. L'aspect aléatoire des signaux chaotiques est mis à profit pour noyer l'information à transmettre. Par un processus de synchronisation avec la dynamique de l'émetteur, le récepteur est capable d'estimer l'état de l'émetteur.

L'étape de synchronisation est fondamentale dans la transmission chaotique: elle permet au récepteur d'estimer les signaux utiles pour la restauration du message.

Ce chapitre est consacré à la synchronisation de deux systèmes chaotiques de Colpitts (émetteur et récepteur). Pour cela nous avons choisi la méthode de synchronisation impulsive citée au chapitre (II).

Cette méthode de synchronisation a montré une grande efficacité dans les applications de communications utilisant le chaos, car elle maintient la synchronisation par des impulsions de petite taille. Dans la synchronisation impulsive, la transmission se fait à des instants discrets. Cela permettra d'économiser la capacité du canal de communication pour la transmission des messages.

Ce chapitre est organisé comme suit: La section deux est consacrée à la présentation de l'émetteur qui est dans notre cas, un simple oscillateur Colpitts. Dans la section trois, nous présentons quelques rappels sur l'observabilité des systèmes linéaire et non linéaire et quelques notions sur l'observateur impulsive. Ensuite dans la section quatre, des résultats de simulation sont présentés afin d'illustrer les performances de la méthode proposée.

### **III.2. Etude de l'émetteur**

#### **III.2.1. Choix de la topologie de l'émetteur chaotique [13]**

L'objectif de ce travail est de générer des signaux chaotiques à partir de l'oscillateur Colpitts en technologie bipolaire.

Ce choix peut être expliqué par les points suivants :

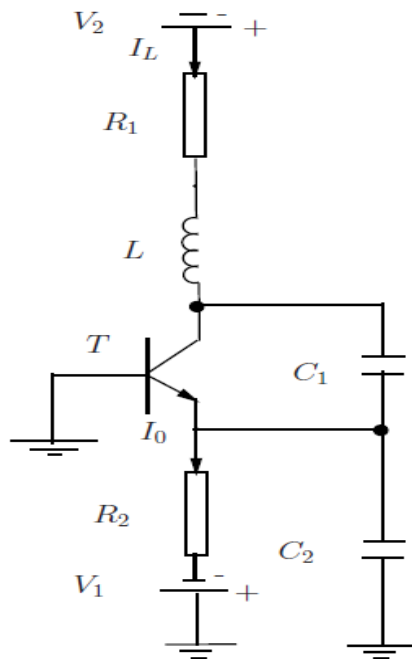
- La simplicité de la structure de l'oscillateur Colpitts qui utilise un seul transistor et permet de générer des comportements chaotiques, en modifiant

seulement les conditions de fonctionnement de transistor. Les autres paramètres électriques de l'oscillateur sont fixés à des valeurs appropriées.

- la possibilité de faire évoluer la fréquence fondamentale de l'oscillateur vers les fréquences élevées
- la structure de l'oscillateur Colpitts possède une non linéarité due à la caractéristique exponentielle de transistor.
- L'utilisation de l'oscillateur Colpitts dans des systèmes de communications chaotiques a été démontrée pour la transmission de signaux binaire et continus.

La figure (III.1) montre le montage en basses fréquences de Colpitts.

C'est une structure en base commune qui permet d'obtenir un gain plus élevé tout en autorisant une bande passante plus large. Le transistor utilisé est un transistor bipolaire classique (BJT). Le circuit résonant LC est connecté entre le collecteur et la base du transistor et une fraction de la tension du circuit LC est retournée à l'émetteur. Les tensions d'alimentation  $V_1$  et  $V_2$  permettent de fixer le point de fonctionnement du transistor. Le choix des valeurs du circuit résonant détermine la fréquence fondamentale de l'oscillateur.



**Figure(III.1) : Oscillateur de Colpitts.**

### III.2.2. Etude théorique de l'oscillateur de Colpitts

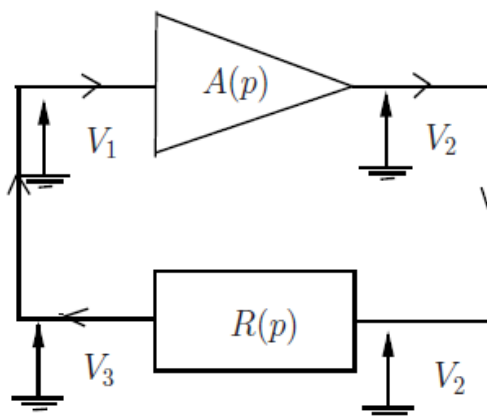
Tout système oscillant est composé d'un élément passif qui dissipe de l'énergie (le résonateur) et d'un élément actif qui apporte de l'énergie (l'amplificateur). Dans le cas d'un oscillateur électronique son résonateur est en général un filtre, tandis que l'élément actif est souvent un amplificateur opérationnel ou bien un transistor.

#### III.2.2.1. Le critère d'oscillation de Barkhausen : [2]

La figure (III.2) montre la représentation la plus élémentaire d'un oscillateur électronique, l'élément  $A$  est un amplificateur et l'élément  $R$  est un filtre.

Que les différentes grandeurs du montage soient sinusoïdales c'est-à-dire :

$$V_2 = |A|e^{j\theta_A}V_1 \quad , \quad V_3 = |R|e^{j\theta_R}V_2 \quad \text{donc : } V_3 = |A| \cdot |R|e^{j(\theta_A + \theta_R)}.$$



**Figure(III.2) :** structure d'un oscillateur.

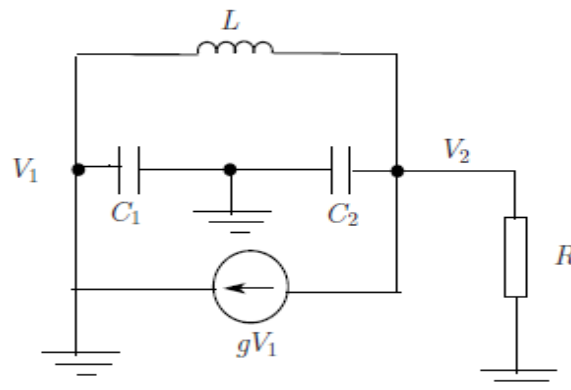
Le critère de Barkhausen impose que  $V_3$  soit l'unité, ce qui nécessite deux conditions:

$$\begin{cases} |A||R| = 1 \\ \theta_A + \theta_R = 0 + 2K\pi K\epsilon Z \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Cependant, dans la pratique, les oscillations prennent naissance à partir de fluctuations qui sont amplifiées, ce qui nécessite un gain plus grand que l'unité. Mais les oscillations ne peuvent croître indéfiniment, elles s'arrêtent sur une non-linéarité de l'amplificateur. Cela signifie que dans un oscillateur, l'amplificateur possède toujours une caractéristique non linéaire. Une conséquence directe est que tout oscillateur électronique est potentiellement chaotique, en effet, tout système chaotique est nécessairement non linéaire [2].

### III.2.2.2. Détermination des conditions d'oscillation [13]

Considérons la figure (III.3) pour étudier le fonctionnement de l'oscillateur de Colpitts. La caractéristique de la résistance non linéaire qui peut être celle d'un amplificateur à base de transistors bipolaires ou de transistors à effet de champs est définie par  $i_2 = gV_1$ .



**Figure(III.3)** : Schéma de principe de l'oscillateur Colpitts.

Aux deux extrémités de l'inductance L, nous écrivons les équations du courant en utilisant la loi de Kirchhoff :

$$\begin{cases} -gV_1 - \frac{V_2}{R} - jC_2\omega V_2 + \frac{V_1 - V_2}{jl\omega} = 0 \\ \frac{V_2 - V_1}{jl\omega} - jC_1\omega V_1 + gV_1 = 0 \end{cases}$$

En résolvant la deuxième équation, on obtient:

$$\left[-g + \frac{1}{jl\omega}\right] \frac{1}{jl\omega} - \left[jC_1\omega + \frac{1}{jl\omega}\right] \left[\frac{1}{R} + jC_2\omega + \frac{1}{jl\omega}\right] = 0 \quad (\text{III.2})$$

En annulant la partie imaginaire de (III.2), on obtient :

$$C_1C_2RL\omega^2 - (C_1 + C_2)R\omega = 0$$

Donc, la pulsation d'oscillation est calculée par :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}} \quad (\text{III.3})$$

Qui est la pulsation d'accord de l'inductance accordée par les deux condensateurs en série. En annulant la partie réelle de (III.2), on obtient la relation suivante :

$$-Rg + LC_1\omega^2 - 1 = 0 \Rightarrow R = \frac{LC_1\omega^2 - 1}{g} \quad (\text{III.4})$$

Qui représente la condition d'oscillation de l'oscillateur de Colpitts. En effet l'oscillation démarre lorsque la valeur de R est supérieure à la valeur obtenue par (III.4). Si l'on remplace  $\omega$  dans (III.4), on trouve la condition d'oscillation comme suit :

$$gR > \frac{C_1}{C_2} \quad (\text{III.5})$$

### III.2.2.3 Détermination des équations d'état [13]

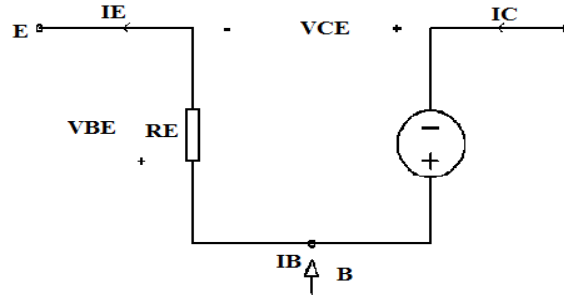
Pour décrire le modèle mathématique de l'oscillateur de Colpitts, nous écrivons ses équations d'état en considérant les variables d'état  $V_{C1}$ ,  $V_{C2}$  et  $I_L$ , comme montré dans la figure (III.1). Les équations d'état sont alors données par :

$$\begin{cases} \frac{dV_{C1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} f(-V_{C2}) + \frac{1}{C_1} I_L \\ \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2} I_L - \frac{1}{C_2} I_0 \\ \frac{dI_L}{dt} = -\frac{1}{L_1} V_{C1} - \frac{1}{L_1} V_{C2} - \frac{R_1}{L_1} I_L + \frac{V_2}{L_1} \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Où  $f(-V_{C2})$  est la caractéristique courant-tension du transistor. Cette fonction est en effet le courant de l'émetteur qui peut être exprimé par :

$$I_E = f(V_{BE}) = f(-V_{C2}) \simeq I_S \left[ \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right) \right] \simeq \left[ \exp\left(\frac{-V_{C2}}{V_T}\right) \right] \quad (\text{III.7})$$

Où  $I_S$  est le courant de saturation inverse de la jonction base-émetteur (BE) du transistor et  $V_T \simeq 27mV$ . Le modèle non linéaire du transistor bipolaire donnée [13] est montré dans la figure (III.4). Dans cette figure, la caractéristique courant-tension ( $I_E$ ,  $V_{BE}$ ) est montrée par la résistance non linéaire  $R_E$ . Cette résistance est l'élément générateur d'oscillations chaotiques.



**Figure(III.4) :** Modèle non linéaire simple du transistor bipolaire.

Dans [13], ils ont donné la normalisation du modèle mathématique de l'oscillateur de Colpitts. Pour cela, les tensions, le courant et le temps sont respectivement normalisés par rapport à  $V_{ref} = V_T$ ,  $I_{ref} = I_0$ ,  $t_{ref} = \frac{1}{\omega_0^2}$ . Le point d'opération du système (III.6) est donné par [13] :

$$O: \begin{cases} V_{C10} = V_{cc} - \alpha R I_0 + V_T \ln\left(\alpha \frac{I_0}{I_S}\right) \\ V_{C20} = -V_T \ln\left(\alpha \frac{I_0}{I_S}\right) \\ I_{L0} = \alpha I_{L0} \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Si on pose  $\alpha=1$ , c'est-à-dire on négligé le courant de la base de transistor. Les trois variables d'état sans dimensions ( $x_1, x_2, x_3$ ), s'écrivent alors :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{V_T} [V_{c1}(w_0 t) - v_{c10}] \\ x_2 = \frac{1}{V_T} [V_{c2}(w_0 t) - V_{c20}] \\ x_3 = \frac{1}{I_0} [I_L(w_0 t) - I_{L0}] \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

D'après le (III.6) et (III.9) le système normalise ci-dessous est obtenu :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{g^*}{Q(1-k)} [-n(x_2) + x_3] \\ \dot{x}_2 = \frac{g^*}{Qk} x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{-Qk(1-k)}{g^*} [x_1 + x_2] - \frac{1}{Q} x_3 \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Avec  $n(x_2) = \exp(-x_2) - 1$  et  $k = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ . Le paramètre  $g^*$  est le gain de la boucle de réaction de l'oscillateur lorsque le critère de Barkhausen est satisfait. Il y a alors des oscillations sinusoïdales lorsque  $g^* = 1$ . Le point d'équilibre situé à l'origine se transforme en un cycle limite.

$$g^* = \frac{(R_1 + r_L)Q^2}{4V_T} I_0 \quad (\text{III.11})$$

Où  $r_L$  est l'impédance de l'inductance  $L_1$ . Dans nos simulations, nous avons considéré que cette impédance est contenue dans la résistance  $R_1$ .

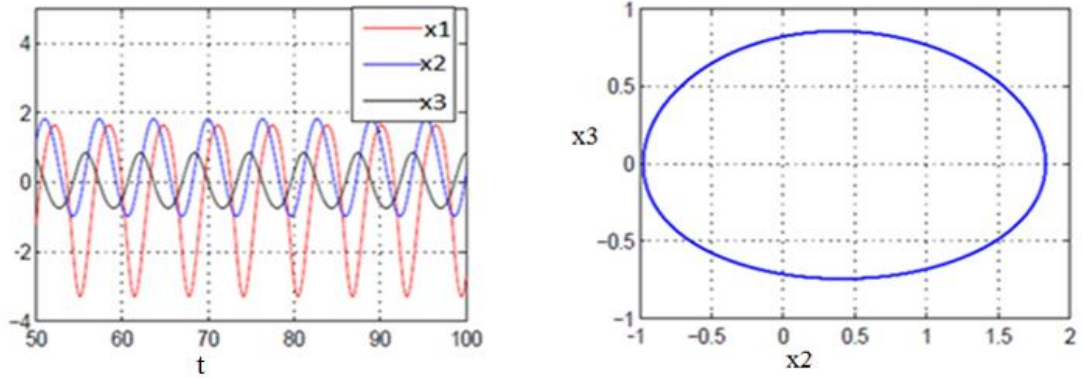
### III.2.2.4 Analyse des comportements chaotiques par simulation

En faisant varier les paramètres  $g^*$  et  $Q$  du système (III.10), nous obtenons différents types d'oscillations. Ces comportements montrent la bifurcation des oscillations périodiques, par rapport à l'oscillation sinusoïdale (cycle limite).

Afin d'obtenir par simulation différents comportements pour l'oscillateur de Colpitts, nous fixons  $L_1 = 1mH$ ,  $C_1 = C_2 = 470 nF$ . La fréquence d'oscillation est alors  $f_0 = 10.38Khz$  et  $Q=1.38$ . Ainsi, nous faisant varier le paramètre  $g^*$ , qui lui-même dépend de  $I_0$  d'après (III.11), soit le terme non linéaire du système d'équations

(III.6). Pour démarrer l'oscillation, nous avons fixé la valeur de  $g^*$  légèrement supérieure à un, d'après la condition de Barkhausen.

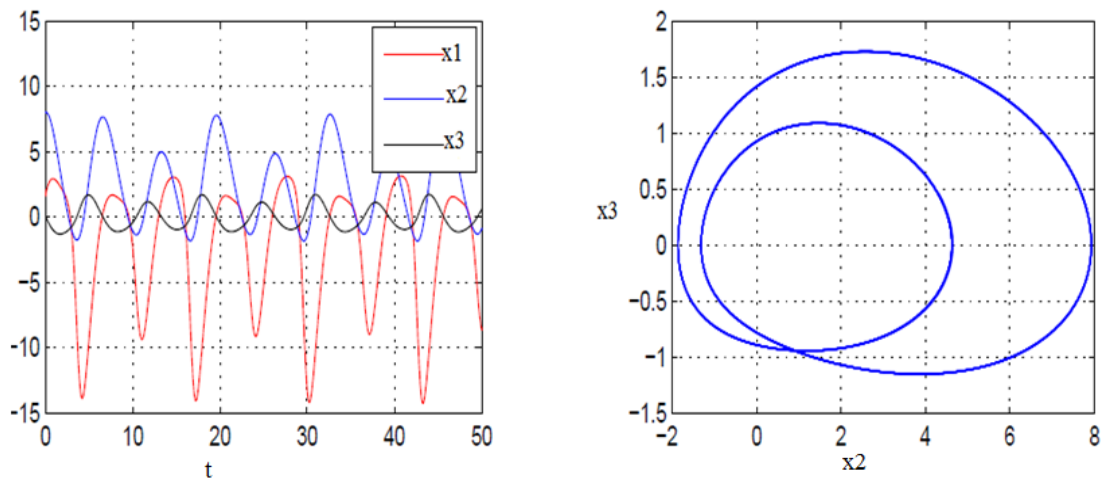
Les résultats obtenus par la variation de  $g^*$  sont montrés dans les figures (III.5). Un comportement chaotique apparait lorsque  $g^*=4.46$ . Pour cette valeur de  $g^*$  nous avons les exposant de Lyapunov suivant:  $\lambda_1 = 0.10$ ,  $\lambda_2 = -0.001$  et  $\lambda_3 = -0.82$ .



Réponse temporelle

Plan de phase

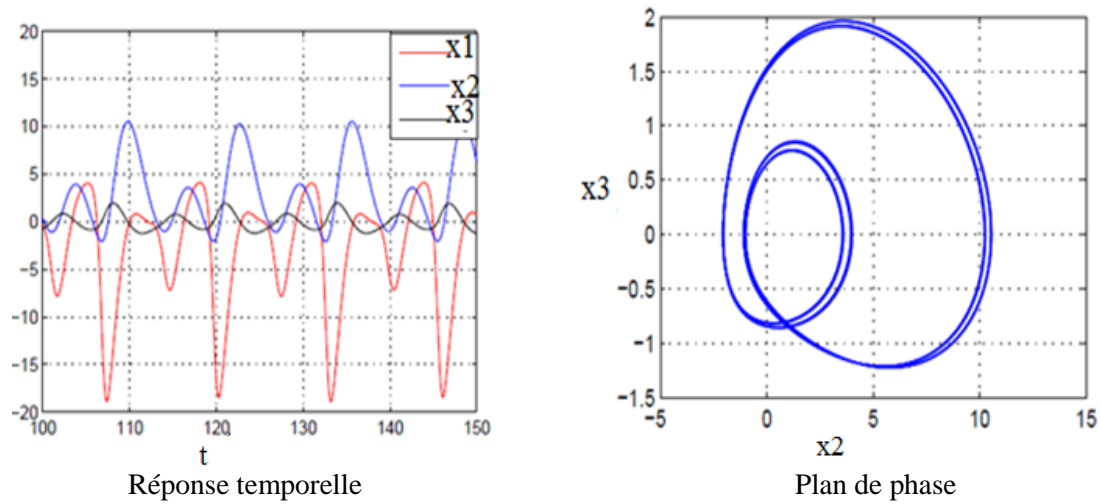
**Figure (III.5) :** Oscillateur Colpitts  $g^*=1.0029$



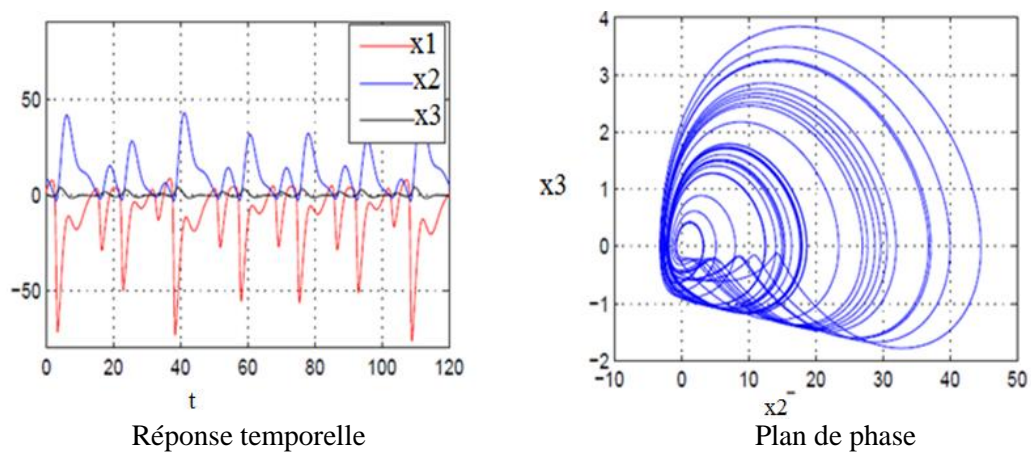
Réponse temporelle

Plan de phase

**Figure (III.6) :** Oscillateur Colpitts pour  $g^*=2.13$



**Figure (III.7):** Oscillateur Colpitts pour  $g^* = 2.4$

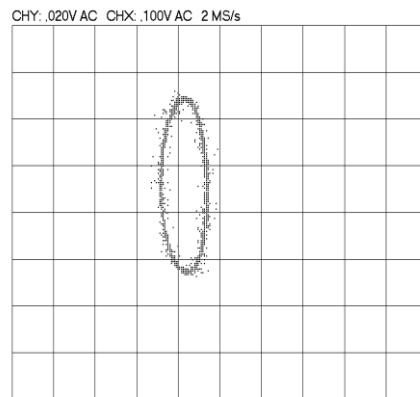
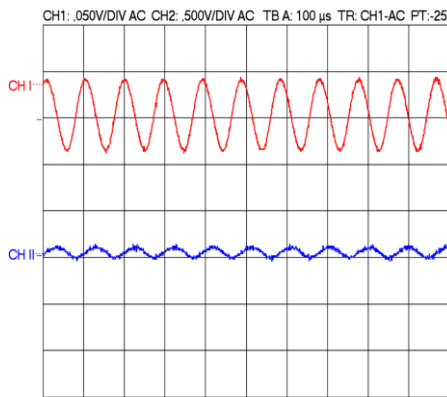


**Figure(III.8) :** Oscillateur Colpitts pour  $g^* = 4.46$

### III.3.Réalisation et validation expérimentale

Nous avons réalisé l'oscillateur Colpitts montré dans la figure (III.1) et relevé les signaux générés par cet oscillateur en différents régimes. Les mesures temporelles des signaux de sortie  $V_{c2}$  et  $I_L$  sont visualisées sur les deux voies d'un oscilloscope via une sonde de tensions basses fréquence. Les figures ci-dessous montrent les différents comportements de l'oscillateur de Colpitts obtenus pour une tension  $V_2$

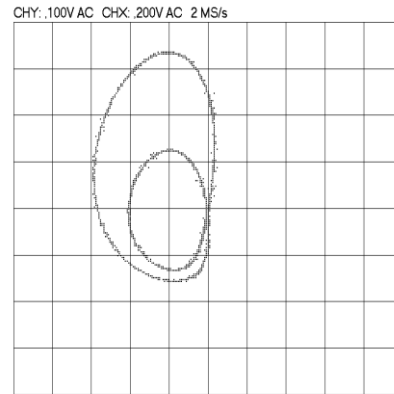
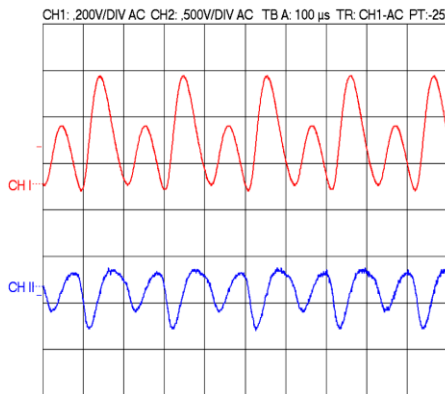
fixée à 18V et pour les différentes valeurs de la tension  $V_1$  qui gouverne la tension base-émetteur  $V_{BE}$  du transistor.



Réponses temporelles de  $x_2$  et  $x_3$

Plan de phases  $x_2-x_3$

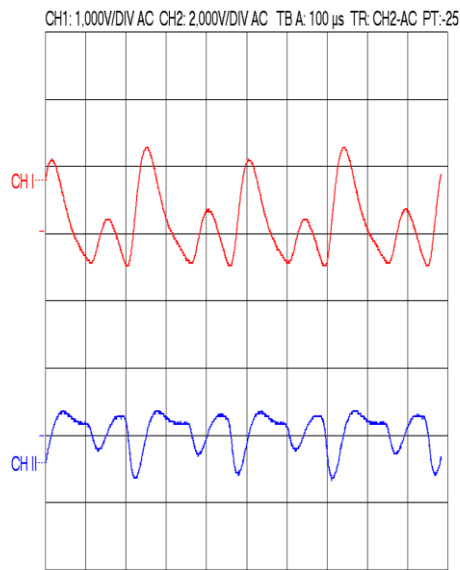
**Figures ( III.9 ) :** Oscillateur de Colpitts pour  $V_1=2.5V$ .



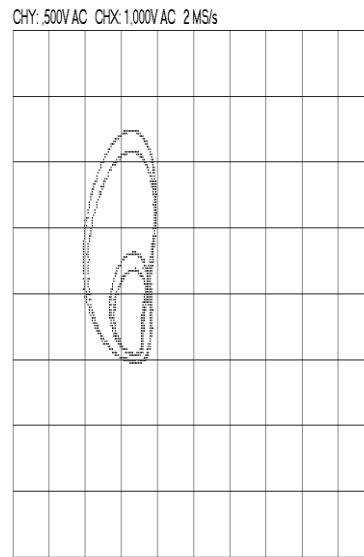
Réponses temporelles de  $x_2$  et  $x_3$

Plan de phases  $x_2 - x_3$

**Figures ( III. 10 ) :** Oscillateur de Colpitts Pour  $V_1=5.6V$

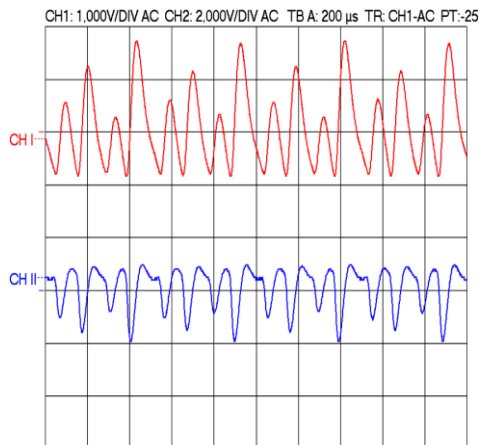


Réponses temporelles de  $x_2$  et  $x_3$

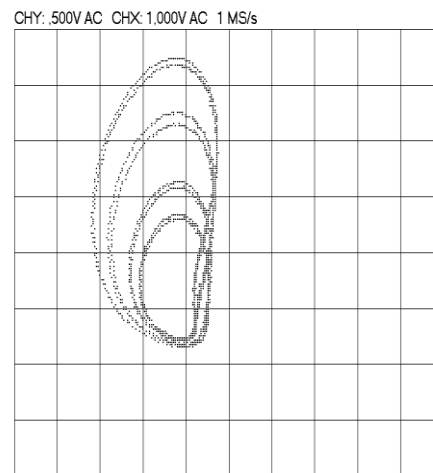


Plan de phases  $x_2 - x_3$

**FIGURE(III.11) :** Oscillateur de Colpitts pour  $V_1=12.4V$

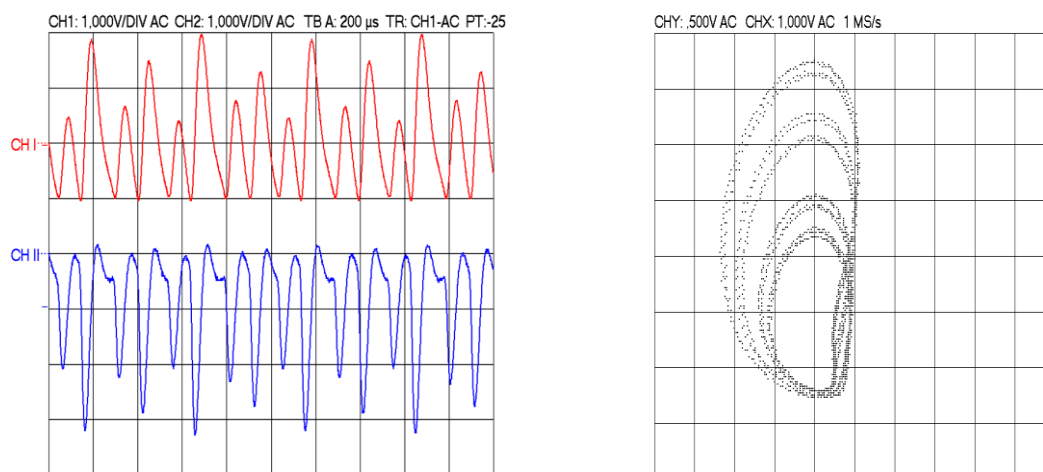


Réponses temporelles de  $x_2$  et  $x_3$



Plan de phases  $x_2 - x_3$

**Figure(III.12) :** pour  $V_1=17.7V$



Réponses temporelles de  $x_2$  et  $x_3$

Plan de phases  $x_2-x_3$

Figure (III.13): Oscillateur de Colpitts pour  $V_1=21.3V$

### Résultat obtenus :

-La figure (III.9) montre que les oscillations sinusoïdales débutent à la tension  $V_1=2.5V$  correspondant à la valeur du courant  $I_0$  égale à  $1.5mA$  calculée pour

$V_{BE}=0.6V$  à partir de l'expression  $I_0 = \frac{V_1 - V_{BE}}{R_2}$ , avec  $R_2 = 1K\Omega$ . Ce qui correspond dans le plan de phase à un cycle limite.

-La figure (III.10) montre une cascade de doublement de périodes qui commence à  $5.6V$  qui correspondent à deux cycles limites dans le plan de phase.

-La figure (III.11) montre toujours un régime périodique à quatre périodes pour une tension de  $12.4V$ , correspondent à quatre cycles limites dans le plan de phase.

-La figure (III.12) montre un régime périodique à huit périodes pour une valeur de tension de  $17.7V$ , correspondent à huit cycles limites dans le plan de phase.

-La figure (III-13) montre l'évolution de l'oscillateur vers le chaos, correspondant à un attracteur étrange dans le plan de phase. Pour une tension  $21.3V$

D'après toutes ces figures, nous constatons bien qu'il y a une cohérence entre les résultats obtenus en simulation et ceux obtenus en expérimentation.

### **III.4. Etude du récepteur [20]**

L'utilisation d'observateurs est proposée pour estimer les états inconnus d'un système qui ne sont pas mesurables directement. Un système dynamique est dit observable si on peut récupérer toutes ses grandeurs par une combinaison de mesures et de leurs dérivées. En 1997, Nijmeijer et Mareels ont montré que la synchronisation unidirectionnelle de deux systèmes chaotiques peut être considérée comme un problème d'observateur non linéaire et par conséquent les théories d'automatique peuvent être utilisées afin d'analyser ce phénomène.

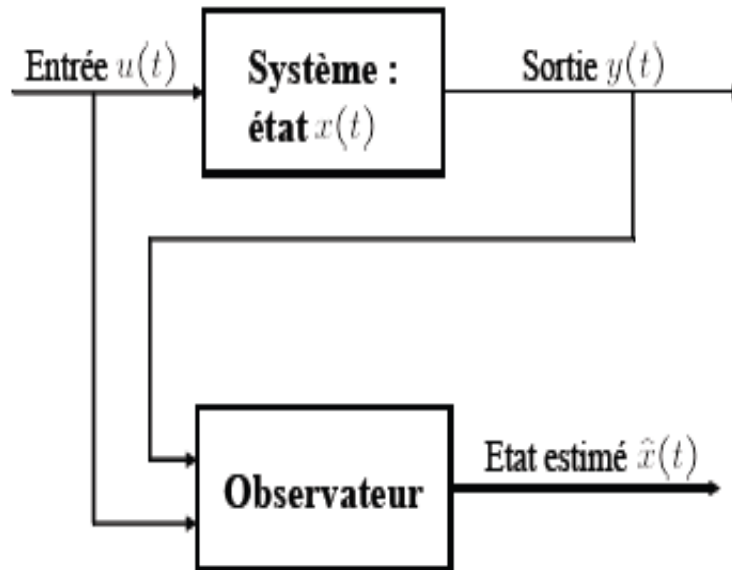
Pour cela, plusieurs observateurs non linéaires ont été proposés :

- L'observateur de Kalman qui est un observateur pour les systèmes linéaires et existe une version déterministe ou stochastique. Dans les systèmes non linéaire on utilise la version dite observateur de Kalman étendu.
- Les observateurs reposant sur une approche analytique.
- Les observateurs grands gains.
- Les observateurs à modes glissants.
- Les observateurs adaptatifs pour les systèmes linéaires et pour les systèmes non linéaires.
- Les observateurs numériques.
- Les observateurs algébriques.

Dans ce qui suit, quelques méthodes sur l'observabilité des systèmes linéaire et non linéaire sont données.

Un observateur est un système dynamique qui permet la reconstruction (asymptotique ou exponentielle) de l'état d'un système, à partir de ses entrées, de ses sorties, et de la connaissance de son modèle dynamique, qui sont les seules informations disponibles.

Ce principe est illustré par la figure (III.14).



Figure(III.14) : principe de l'observateur

### III.4.1 Observabilité d'un système linéaire

Le système linéaire défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax \\ y(t) = Cx \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Où  $x \in R^n$  et  $y \in R^p$  et  $A, C$  sont des matrices de dimension appropriées. Le système est observable, c'est-à-dire qu'on peut retrouver les états d'origine du système à partir de ses sorties, lorsque :

$$\text{rang}(O) = \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ AC \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

### III.4.2 Observabilité d'un système non linéaire [13],[20]

Considérons le système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

Avec  $t \geq 0$

$x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie, Les fonctions  $f, h$  sont des vecteurs de fonctions analytiques.

• **Condition du rang d'observabilité**

Pour donner la condition du rang d'observabilité il faut d'abord définir la dérivée de Lie, qui est une notion largement utilisée dans l'étude d'observabilité des systèmes non linéaires.

**Définition (dérivée de Lie)**

Considérons  $h$  une fonction  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . On définit la dérivée de Lie de  $h$  dans la direction de  $f$ , notée  $L_f h$ , la dérivée de  $h$  le long de la courbe intégrale de  $f$  en  $t = 0$  :

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \tag{III.16}$$

Par définition on écrit :  $L_f^0 h = h$  et  $L_f^k h = L_f(L_f^{k-1} h), \forall k \geq 1$ .

Le système (III.15) satisfait la condition du rang d'observabilité si :

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \\ \vdots \\ dL_f^{n-1}(h) \\ \vdots \\ dL_f^\infty h \end{pmatrix} = n \tag{III.17}$$

Si la condition du rang d'observabilité est vérifiée en  $x, \forall x \in U, U$  étant un voisinage de  $x^0$ , le système (III.15) est localement faiblement observable en  $x^0$ .

Pour l'application non linéaire, nous définissons la condition du rang d'observabilité 'pratique' comme suit :

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h \end{pmatrix} = n \tag{III.18}$$

**III.4.3. Approche de la synchronisation par observateur impulsif [17]**

**III.4.3.1. Concepts de base sur la commande impulsive**

Soit le système non linéaire ci après :

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{III.19}$$

Où  $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue,  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état.

Considérons les sauts dans les variables d'états à des instants discrets  $t = \tau_i$

Où  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \tau_{i+1} < \dots$ ,

$$\tau_i \rightarrow \infty \text{ quand } i \rightarrow \infty$$

On suppose que les impulsions séparées par un intervalle  $T$ . Ce traduit par

$$\tau_{i+1} - \tau_i = T$$

D'où 
$$U(i, x) = \Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i^+) - x(\tau_i^-) \quad (\text{III. 20})$$

D'après cette relation on définit le système impulsif comme suit

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), t \neq \tau \\ \Delta x = U(i, x), t = \tau_i \\ x(t_0^+) = x_0, t_0 \geq 0, i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

Cette équation est appelée équation différentielle impulsive. En ce qui concerne l'étude de la stabilité d'équations différentielles impulsive (III.21), Nous appliquons les définitions et les théorèmes qui suivent

**Définition 1**

Soit  $V: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tel que  $V$  appartient à la classe  $V^0$  si

- $V$  est continu dans  $(\tau_{i-1}, \tau_i] \times \mathbb{R}^n$  et pour chaque valeur de  $x$  tel que  $x \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots$

On a

$$\lim_{(t,y) \rightarrow (\tau_i^+, x)} V(t, y) = V(\tau_i^+, x) \quad (\text{III. 22})$$

Existe

- $V$  est localement lipchitzienne en  $x$ .

**Définition 2**

Pour  $(t, x) \in (\tau_{i-1}, \tau_i] \times \mathbb{R}^n$ , On définit

$$D^+V(t, x) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \sup 1/h \{V[t + h, x + hf(t, x)] - V(t, x)\} \quad (\text{III.23})$$

**Définition 3**(Système de comparaison)

soit  $V \in V_0$  et supposons que

$$\begin{cases} D^+V(t, x) \leq g[t, V(t, x)], t \neq \tau_i \\ V[t, x + V(i, x)] \leq \psi_i[V(t, x)], t = \tau_i \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Ou  $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et  $\Psi_i: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est non décroissante, Alors nous définissons le système de comparaison ci après :

$$\begin{cases} \dot{\omega} = g(t, \omega), t \neq \tau_i \\ \omega(\tau_i^+) = \Psi_i[\omega(\tau_i)] \\ \omega(t_0^+) = \omega_0 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

**Définition 4**

Le terme  $S_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\| < \rho\}$  (III.26)

Ou  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$

**Définition 5**

Une fonction  $\alpha$  est dite appartenir à la classe K si

$\alpha \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+], \alpha(0) = 0$  et  $\alpha(x)$  est strictement croissante en  $x$ .

**Hypothèse**

$$f(t, 0) = 0, U(i, 0) = 0 \text{ et } g(t, 0) = 0, \forall i.$$

Avec cette hypothèse, les solutions de système (III.21) et (III.26) sont identiques  $\forall t$ , sauf à l'ensemble des valeurs discrètes  $\tau_i$ .

**Théorème 1**

Supposons que les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $V: \mathbb{R}^+ S_\rho \rightarrow \mathbb{R}^+, \rho > 0, V \in V_0, D^+V(t, x) \leq g[t, V(t, x)], t \neq \tau_i$
2. Il existe  $\rho > 0$  tel que  $x \in S_\rho \Rightarrow x + U(i, x) \in S_{\rho_0} \forall i$  et  $V[t, x + U(i, x)] \leq \psi_i[V(t, x)] t = \tau_i, x \in S_{\rho_0}$ .
3.  $\beta(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha(\|x\|)$  sur  $\mathbb{R}^+ \mathbb{R}_{S_\rho}$  ou  $\alpha(\cdot), \beta(\cdot) \in K$

Alors les propriétés de stabilité de la solution du système de comparaison(24) impliquent les propriétés du système(25).

**Théorème 2**

Soit  $g(t, \omega) = \lambda(t)\omega, \lambda \in C^1[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+], \psi_i(\omega) = d_i(\omega), d_i \geq 0 \forall i$ , donc l'origine du Système (III.21) est asymptotiquement stable si les conditions qui suit sont satisfaites :

$$\lambda(\tau_i + 1) + \ln(\gamma d_i) \leq \lambda(\tau_i), \forall i \text{ et } \gamma > 1 \text{ et } \lambda(t) \geq 0. \quad (\text{III.27})$$

La partie ci-dessous est consacrée à la conception d'un observateur impulsif classique pour récupérer les états du système (III.15). Pour ce faire, nous utilisons les travaux de Yang et al [17].

### III.4.3.2. Observateur impulsif [17]

Nous considérons le sous système ci-après en tenant compte des hypothèses données par le théorème 1 et en considérant uniquement la seule sortie mesurable  $z_2$ .

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = a_1(-\exp(-\hat{z}_2) + 1 + \hat{z}_3) \\ \dot{\hat{z}}_2 = a_2\hat{z}_3 \\ \dot{\hat{z}}_3 = -a_3(\hat{z}_1 + \hat{z}_2) - a_4\hat{z}_3 \\ \hat{z}_2(t_i^+) = z_2(\tau_i) \end{cases} \quad (III.28)$$

Nous définissons les erreurs d'observation :

$$e_1 = z_1 - \hat{z}_1, e_2 = z_2 - \hat{z}_2, e_3 = z_3 - \hat{z}_3 \quad (III.29)$$

A partir de (III.28) et (III.29), les erreurs dynamiques de (III.29) sont :

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_1 = a_1(-\exp(-\hat{e}_2) + 1 + \hat{e}_3) \\ \dot{\hat{e}}_2 = a_2\hat{e}_3 \\ \dot{\hat{e}}_3 = -a_3(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) - a_4\hat{e}_3 \\ \hat{e}_2(t_i^+) = z_2(\tau_i) \end{cases} \quad (III.30)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieurs dans la série de Taylor de l'expression  $\exp(e_2)$  le système (III.30) devient:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a_1(\exp(-z_2) e_2 + e_3) \\ \dot{e}_2 = a_2 e_3 \\ \dot{e}_3 = -a_3(e_1 + e_2) - a_4 e_3 \\ e_2(\tau_i) = 0 \end{cases} \quad (III.31)$$

Qui peut être réécrit sous la forme compacte :

$$\dot{E} = \hat{A}(t)E \quad (III.32)$$

Où

$$\hat{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \exp(-z_2(t)) & a_1 \\ 0 & 0 & A_2 \\ -a_3 & -a_3 & -a_4 \end{pmatrix} \quad (III.33)$$

$$\text{Avec} \quad E = (e_1 \quad e_2 \quad e_3)^T$$

Pour avoir une approximation du système discret (3.16) homogène ainsi que dans le but de déterminer la limite de  $T$  pour lequel l'observateur est valide, il est nécessaire de considérer l'approximation de  $z_2(t)$  donné par :

$$z_2(t) = z_2(0) + \dot{z}_2(t)t + O(t^2) \quad (\text{III.34})$$

Considérons la série de Taylor de premier ordre de  $\exp(-z_2(t))$ . Alors l'approximation homogène de  $\exp(z_2(t))$  est donné par :

$$\exp(-z_2(t)) = \exp(-z_2(0)) - \exp(-z_2(0)) \dot{z}_2(t)t + O(t^2) \quad (\text{III.35})$$

Par conséquent, la solution de  $\int_0^T \exp(-z_2(t)) dt$  devient :

$$\int_0^T \exp(-z_2(t)) dt = \exp(-z_2(0)) T - \dot{z}_2(0) \exp(-z_2(0)) \frac{T^2}{2} + O(T^3) \quad (\text{III.36})$$

Il est bien connu que la solution (3.17) est donnée par :

$$E(t) = E(0) \exp\left(\int_0^t \exp(A(t)) dt\right) \quad (\text{III.37})$$

De (III.33), (III.35), (III. 36) on obtient

$$E(k+1) = \exp(\tilde{A})E(k) \quad (\text{III.38})$$

Avec

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_1[\exp(-z_2(0))T - \dot{z}_2(0)\exp(-z_2(0))\frac{T^2}{2}] & a_1T \\ 0 & 0 & -a_2T \\ -a_3T & -a_3T & -a_2T \end{pmatrix} \quad (\text{III.39})$$

Afin de garantir la convergence du système (III.38), une condition suffisante est établie par le Théorème qui suit :

#### Théorème 4

Le système (III.38) est asymptotiquement stable si pour toute matrice  $Q = Q^T > 0$ , il existe une matrice unique  $P = P^T > 0$  telle que l'égalité suivante :

$$M \exp(\tilde{A}) M^T P M \exp(\tilde{A}) M^T - P = -Q \quad (\text{III.40})$$

est satisfaite.

Où  $P$  est une matrice de dimension  $2 \times 2$  et  $M$  une matrice de dimension  $2 \times 3$  égale à :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etant donné que  $e_2(k)$  est initialement à chaque instant  $t=\tau_i$ , seul la dynamique des erreurs  $e_1(k+1)$  et  $e_3(k+1)$  sera étudié. A cet effet, l'ajout de la matrice  $M$  permet de construire  $e_1(k+1)$  et  $e_3(k+1)$ .

**Preuve**

Pour  $t = \tau_i$ , On considère la fonction de Lyapunov candidate en temps discret  $k$  :

$$V(k) = E(k)^T M^T P M E(k)$$

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$$

Il en résulte

$$\Delta V(k) = E(k+1) M^T P M E(k+1) - E(k)^T M^T P M E(k)$$

$$\Delta V(k) = E(k)^T M^T [M \exp(\hat{A}) M^T - P] M E(k)$$

$$= E(k)^T M^T (-Q) M E(k) \blacksquare$$

Maintenant nous utilisons les résultats du théorème 4 pour déterminer la période des impulsions  $T$  permettant d'assurer la stabilité asymptotique du système (III.38). La détermination de cet intervalle de manière analytique étant difficile, le calcul se fera numériquement en faisant plusieurs tests. Le premier test consiste à prendre une valeur de  $T$  faible de l'ordre de 0.001S, ensuite de faire augmenter cette valeur graduellement jusqu'à la perte de la stabilité asymptotique du système (III.38).

Alors, nous trouvons que le système (III.41) est asymptotiquement stable que si (III.41) est satisfaite.

$$0 \leq T \leq 0.4 \text{ Normalisé} \tag{III.41}$$

**III.5. Résultats de simulation**

Pour la présentation des résultats de simulation de la synchronisation des deux sous-systèmes en temps continu, Nous avons choisi comme logiciel de simulation Matlab 7.5 sous l'environnement Windows XP. Dans toutes les simulations nous avons considéré un canal idéal.

La simulation a été effectuée pour deux cas :

**T** Satisfait l'inégalité (III.41) :  $T = 0.4$  Normalisé

**T** Ne satisfait pas l'inégalité (III.41) :  $T = 0.5$  Normalisé

### III.5.1. Résultats de la synchronisation de deux colpitts

- Pour  $T = 0.4$  Normalisé.

$\hat{z}_1 = 1.8$  et  $\hat{z}_3 = 0$ , la condition initiale de  $\hat{z}_2$  est donnée par la sortie  $y_1$  du système (III.38). Les conditions initiales du système (III.10) sont :

$z_1(0) = 1.6; z_2(0) = 8; z_3 = 0.1$ . Les états des sous systèmes (III.30), (III.10) en temps continu sont échantillonnés avec un pas  $T_1 = 0.04S$ .

Les figures suivantes montrent que les états initiales du notre système sont bien estimés, pour  $z\hat{z}_1, z_2z_2, z_3\hat{z}_3$ .

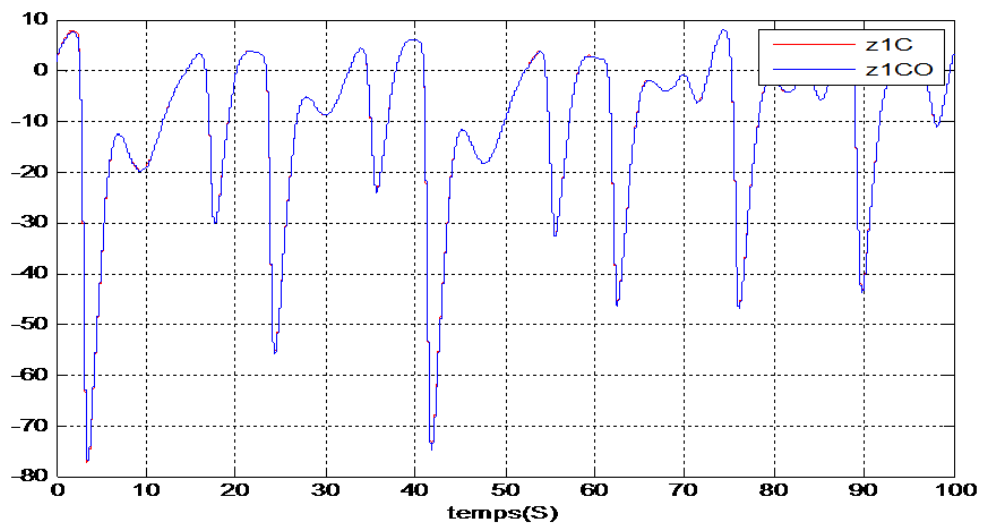
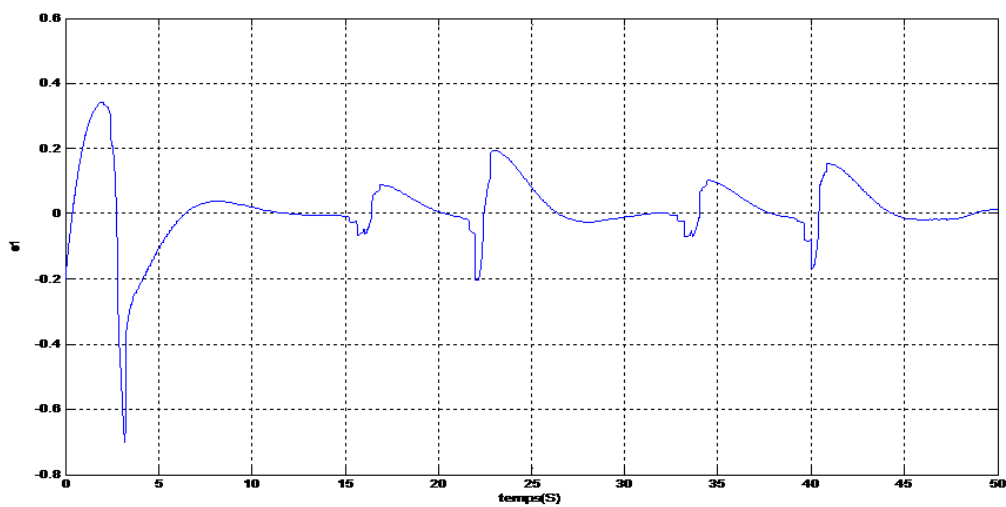


Figure (III.15) : Les états  $Z_1$  et  $\hat{Z}_1$



Figure(III.16) : Erreur de synchronisation de l'état  $z_1$

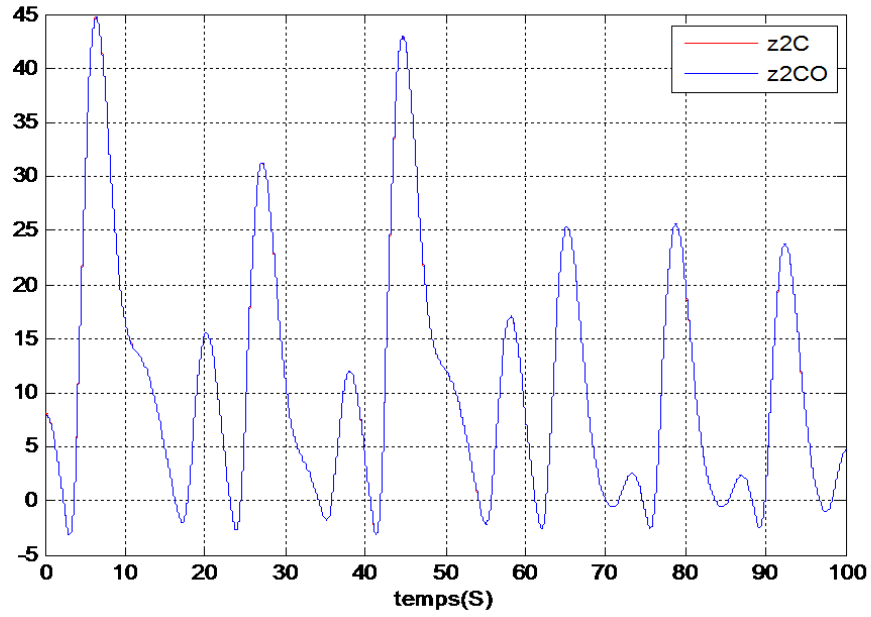
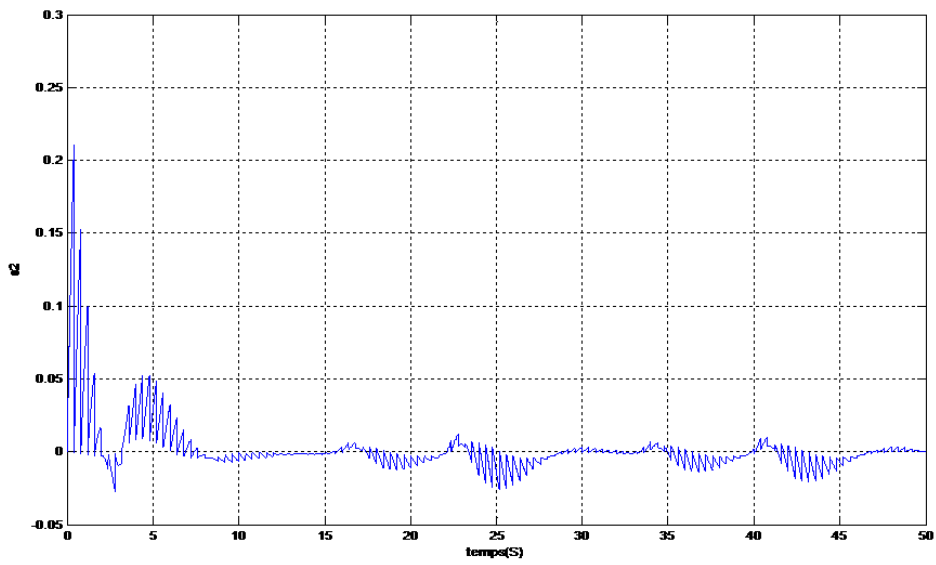
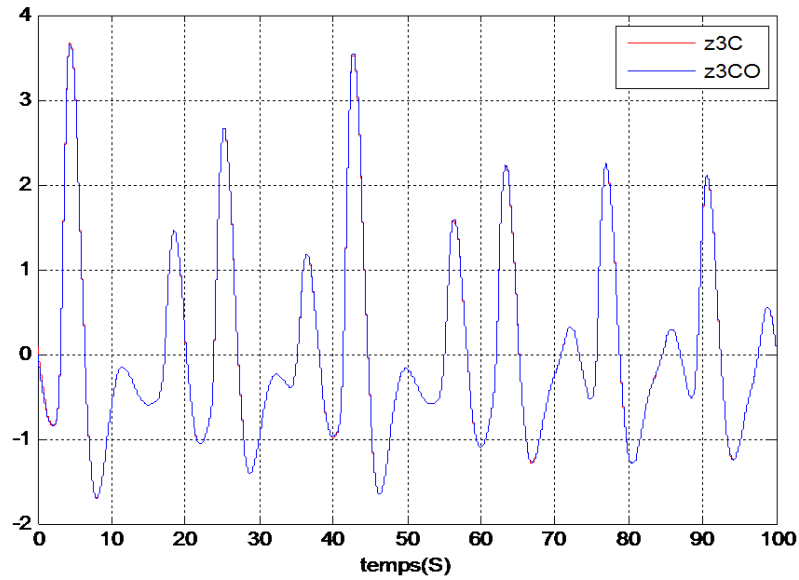


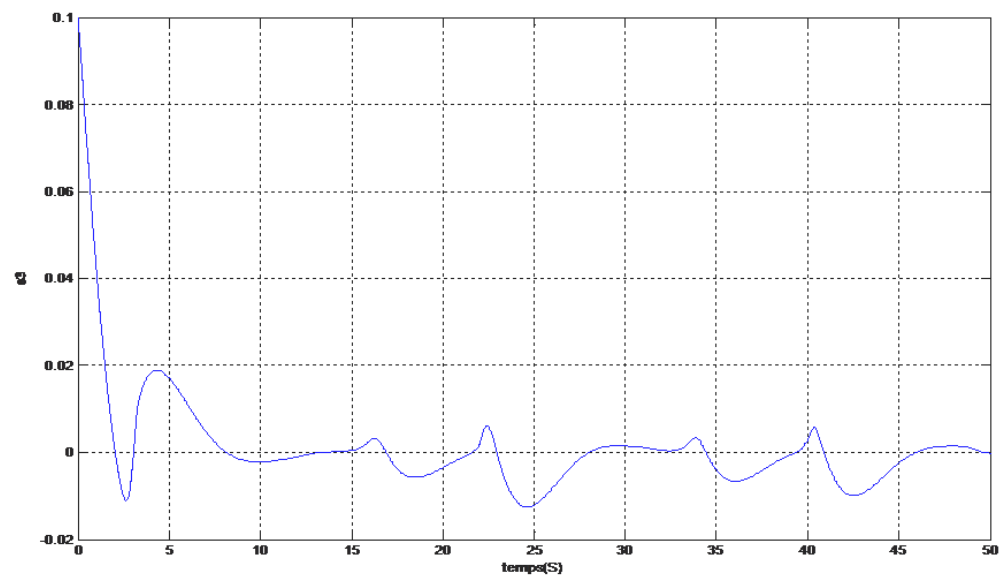
Figure (III.17) : Les états  $Z_2$  et  $\hat{Z}_2$



Figure(III.18) : Erreur de synchronisation de l'état  $z_2$



**Figure (III.19) :** Les états  $Z_3$  et  $\hat{Z}_3$

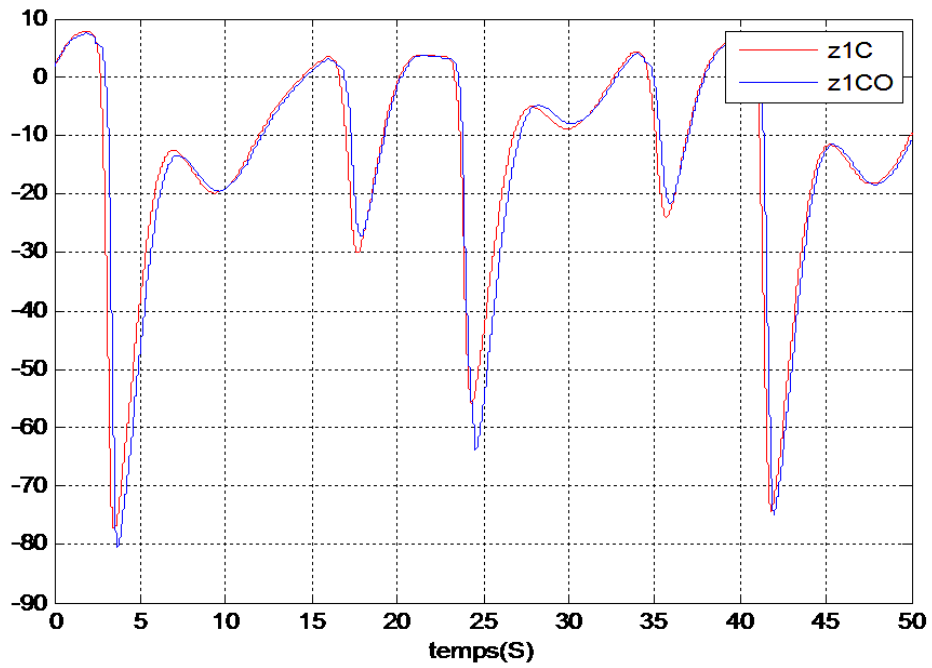


**Figure(III.20) :** Erreur de synchronisation de l'état  $z_3$

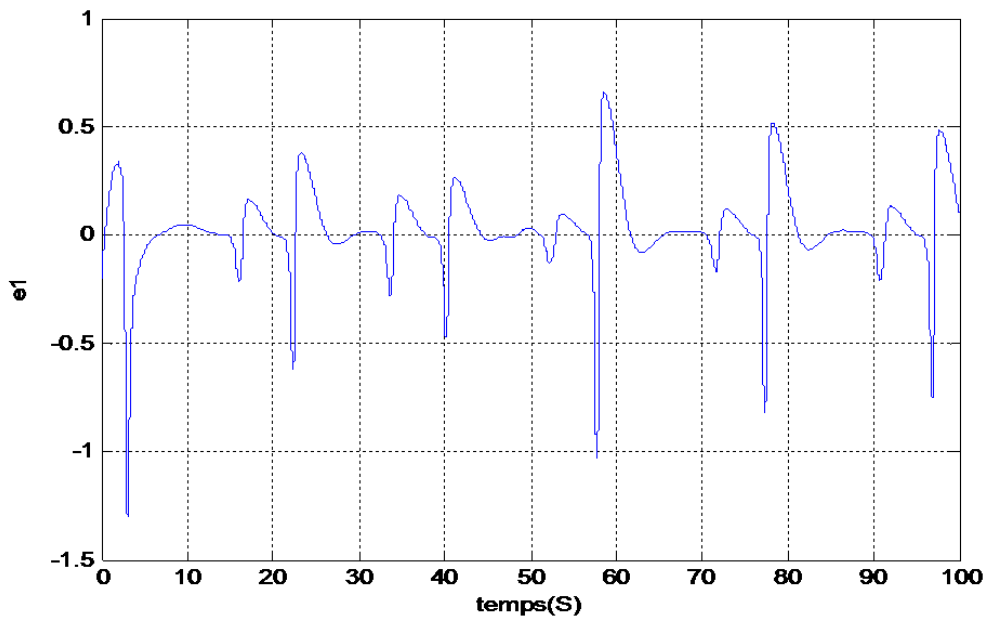
- Pour  $T = 0.5$  Normalisé.

Lors de la simulation nous avons gardé les mêmes conditions pour les états du système (III.38), (III.10) pour un pas d'échantillonnage :  $T = 0.5$  S.

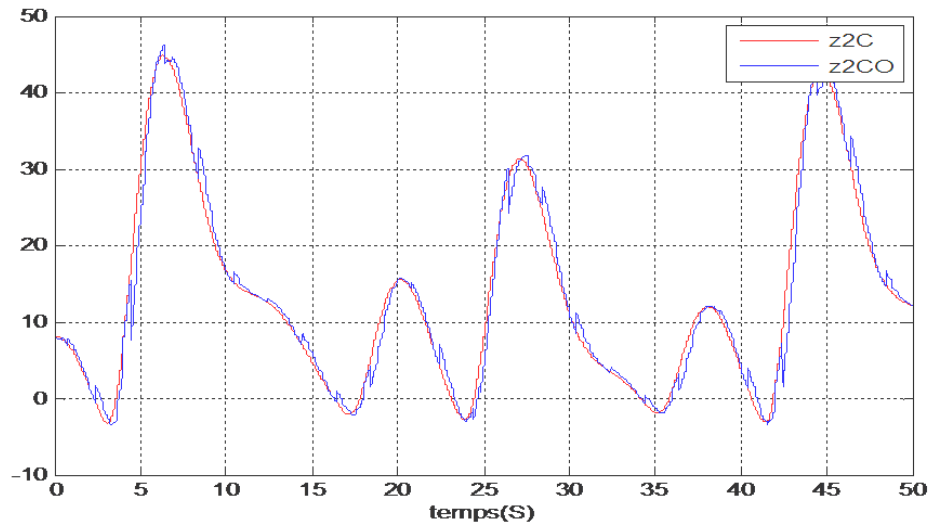
Les résultats sont montrés dans les figures suivantes :



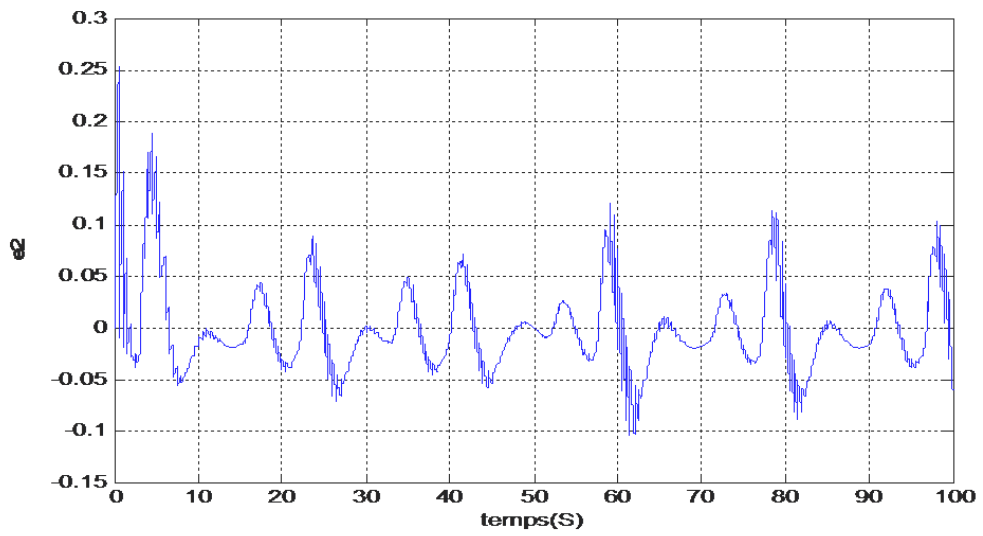
Figure(III.21) :Les états  $z_1$  et  $\hat{z}_1$ .



Figure(III.22) : Erreur de synchronisation de l'état  $z_1$



Figur(III.21) :Les états  $z_2$  et  $\hat{z}_2$ .



Figure(III.22) : Erruere de synchronisation de l'état  $z_3$

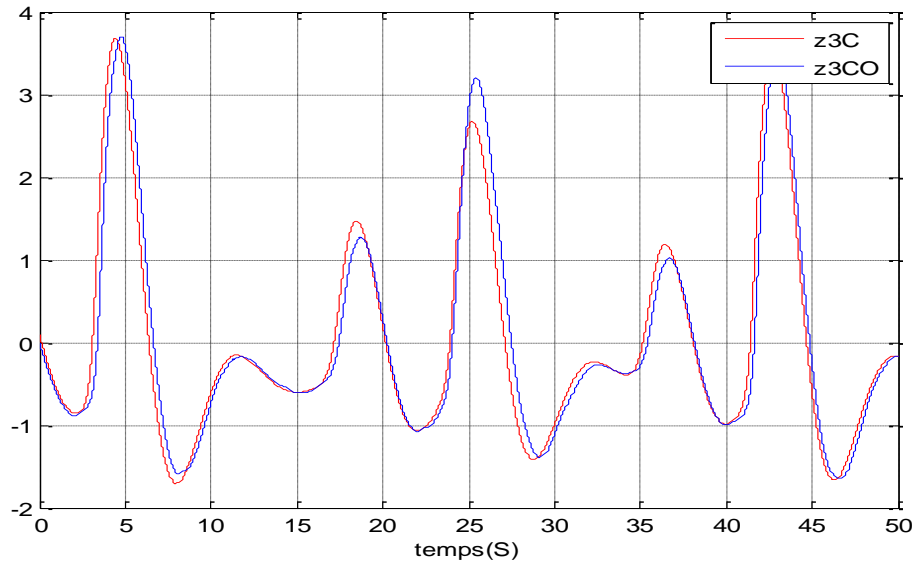
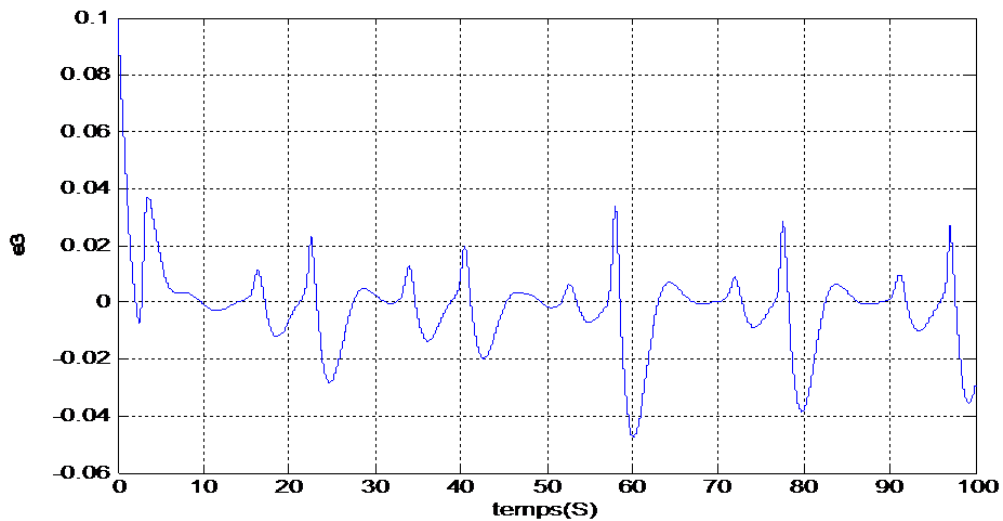


Figure (III.23) : Les états  $z_3$  et  $\hat{z}_3$ .



Figure(III.24) : Erreur de synchronisation de l'état  $z_3$

D'après les figures ci-dessus nous constatons que les deux colpitts sont désynchronisés. Ces résultats sont dûs au mauvais choix de la période  $T$  car elle ne vérifie pas l'inégalité(III.41).

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait l'étude d'un système de transmission sécurisée. Ce dernier est constitué :

-D'un émetteur chaotique dans lequel nous avons expliqué le choix et le principe de son fonctionnement. Les résultats de cette étude ont été mise en évidence à l'aide d'une simulation sous logiciel Matlab.

-D'un récepteur (observateur impulsif) qui a pour rôle la récupération de tous les états de l'émetteur en temps continu. Il à été choisi pour ces avantages tel que la sécurisation des systèmes de communication chaotiques, la non redondance de l'information de la synchronisation.

Les résultats de simulation obtenus, montrent bien que les deux systèmes (émetteur-recepteur) sont synchronisés que si la période  $T$  satisfait la condition (III.41). Cette condition à été justifiée lors de la conception de l'observateur.

## Conclusion générale

Ce mémoire, constitué de trois chapitres, propose dans un premier temps un aperçu sur la théorie des systèmes dynamiques qui est la base de l'étude des systèmes en régime chaotique. Nous avons présenté les caractéristiques d'un système chaotiques, en particulier, un outil de quantification du chaos qui sont les exposants de Lyapunov ainsi que les différentes méthodes qui mènent un système à un régime chaotique en partant d'un régime stationnaire, périodique ou quasi périodique.

Le deuxième chapitre présente les méthodes de synchronisation du chaos. Nous avons présenté en premier point la méthode développée par Pecora et Carroll (maître-esclave). Par la suite, nous avons cité quelques méthodes qui actuellement utilisées actuellement. La démonstration de la synchronisation du chaos a ouvert la voie à son utilisation dans les télécommunications. Dans la suite de ce chapitre nous avons exposé quelques techniques de cryptage chaotique.

Le troisième chapitre, a été consacré à la synchronisation impulsive de deux oscillateurs Colpitts. Dans la première partie, nous avons présenté l'émetteur qui est l'oscillateur de Colpitts. Cette étude a été illustrée par des résultats de simulation réalisée sous Matlab. Ainsi quelques résultats expérimentaux obtenus sur la réalisation du Colpitts.

Dans la deuxième partie, nous avons présenté le récepteur (observateur) qui est de type impulsif, il consiste à récupérer tous les états de l'émetteur. Le choix de cet observateur à été motivé par les avantages suivant :

- La non redondance de l'information de la synchronisation.
- Sécurisation des systèmes de communications chaotiques.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons présenté les résultats de simulation réalisés sous logiciel Matlab. A travers ces résultats, nous avons montré que les deux systèmes (émetteur-récepteur) ne se synchronisent que si la période d'échantillonnage  $T$  satisfait l'inégalité (III.50) expliqué à la fin de ce chapitre.

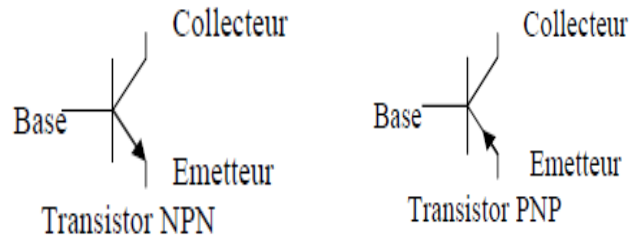
En perspective, notre travail peut être complété par :

- L'augmentation de la fréquence d'oscillation du Colpitts.
- Prise en compte des bruits de canal dans les simulations.
- Ajout d'un bloc de modulation et de démodulation pour la transmission d'un message.
- Réalisation pratique du système de transmission sécurisé.

## Annexe A

### Notation sur le transistor bipolaire

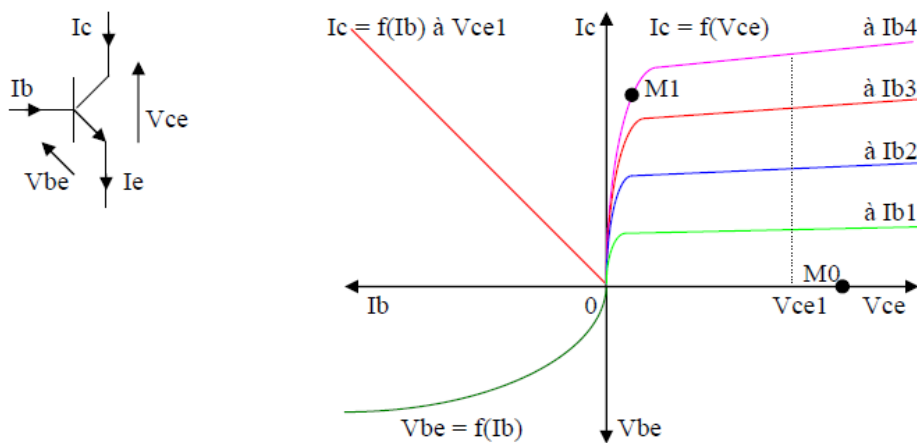
#### Symbole



**Figure(A.1) :** Types de transistor

### Caractéristique électriques d'un transistor bipolaire

Les caractéristiques électriques du transistor bipolaire sont unidirectionnelles. On peut donc les résumer sur un seul plan



**Figure(A.2) :** Le point de fonctionnement de transistor

**Observations :**

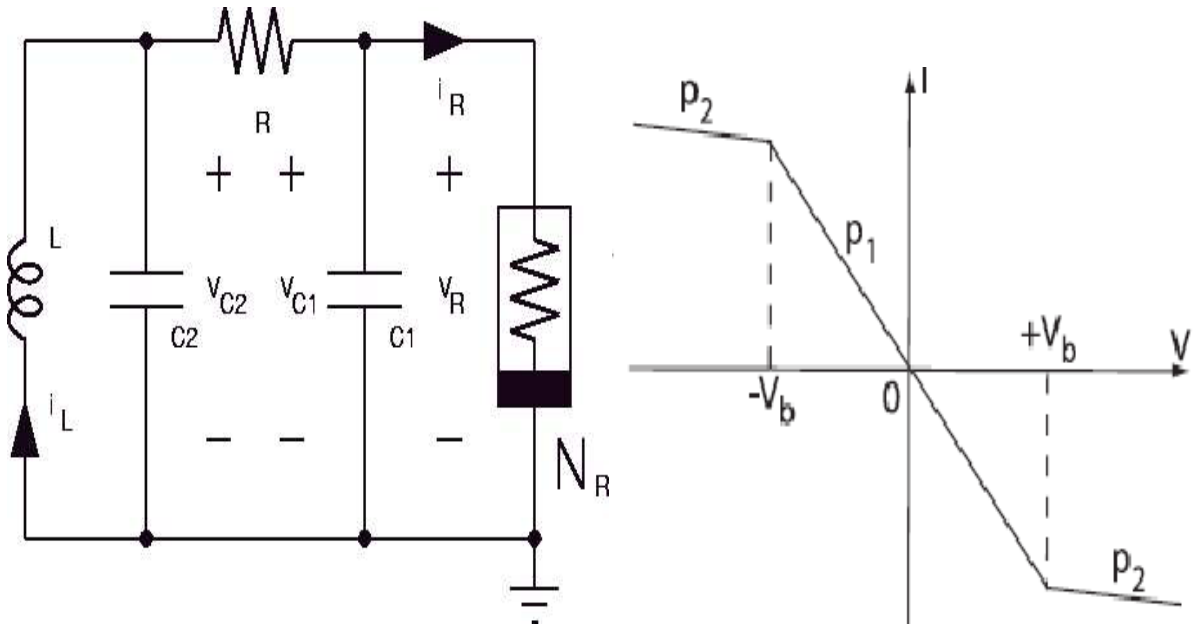
- La fonction  $I_C = f(V_{ce})$  est maîtrisée par la valeur du courant de base. Celle-ci comporte essentiellement deux domaines ; la partie où  $I_c$  est peu variable pour une valeur de  $I_b$  c'est le régime linéaire, la partie courbée où le transistor est en régime saturé.
- La fonction  $V_{be} = f(I_b)$  est celle d'une jonction PN entre la base et l'émetteur.
- La fonction  $I_c = f(I_b)$  caractérise « l'effet transistor » en régime linéaire. C'est une droite de pente  $\beta$  (ordre de grandeur de  $\beta \approx 100$ ).
- En régime linéaire  $I_c \approx \beta \cdot I_b$  et en régime saturé  $I_c < \beta \cdot I_b$ .
- En régime saturé  $V_{ce} < 1 \text{ Volt}$ .
- Au point M0 le transistor est bloqué. Entre son collecteur et son émetteur le transistor est équivalent à un interrupteur ouvert.
- Au point M1 le transistor est saturé. Entre son collecteur et son émetteur le transistor est équivalent à un interrupteur fermé.
- Par la variation spontanée du courant  $I_b$  de 0 à  $I_{b4}$  ou inversement on peut passer de M0 à M1 ou inversement. Dans ce type de fonctionnement tout ou rien on dit que le transistor fonctionne en commutation.
- En faisant varier  $I_b$  tout en conservant le transistor en régime linéaire on peut utiliser le transistor en amplificateur de courant.

**Circuit du Chua**

Le circuit de Chua a été inventé par Chua en 1983. Son but est d'exhiber du chaos dans un montage électronique.

**Le montage électronique et sa modélisation mathématique :**

Le circuit du Chua est constitué d'une résistance R, trois éléments capables de stocker de l'énergie : une inductance L, deux capacités C1 et C2 et une résistance non linéaire RN appelée diode du Chua alimentée par une tension continue.



**Figure(A.3) :** Le circuit du Chua. **Figure(A.4) :** La non linéarité à résistance négative

Le composant de droite est une diode de Chua qui a une réponse non-linéaire du type

$I = f(U)$ . Cette diode est en fait un montage de résistances et de deux amplificateurs opérationnels. La fonction  $f$  est affine par morceaux et cette non-linéarité provient de la saturation des amplificateurs pour des tensions trop grandes. On rappelle que les comportements électroniques d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine sont respectivement

$U = RI$ ,  $I = C \frac{du}{dt}$  et  $U = L \frac{di}{dt}$ . On trouve donc

$$\begin{cases} C_1 = \frac{dv_1}{dt} = R^{-1}(V_{c2} - V_{c1}) \\ C_2 = \frac{dv_2}{dt} = R^{-1}(V_{c1} - V_{c2}) + I_L \\ C_2 = \frac{di_L}{dt} = V_{c2} \end{cases}$$

La non linéarité est  $f(C_1)$  est la description mathématique du comportement de la résistance négative introduit par le circuit du Chua (diode de Chua).

$$f(C_1) = P_2 V_{C_2} + \frac{1}{2} (P_2 - P_1) [|V_{C_1} + V_b| - |V_{C_1} - V_b|]$$

$P_1$  et  $P_2$  sont les pentes de la non linéarité (figure. A4)

Le signal chaotique généré par l'oscillateur peut être mathématiquement interpréter et prouve ainsi le déterminisme de l'ensemble des variations des courants et tensions présent dans le circuit électronique.

## Annexe B

### Définitions et rappels

#### Formule de Taylor

Si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  alors

$$\int_a^b \dot{f}(t) dt = f(t) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

$$f(b) = f(a) + \int_a^b \dot{f}(t) dt$$

#### Théorème de Taylor

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$  Une application de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$

$a, b \in I$  Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

#### Calcul des valeurs propres

Soit le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  c.-à-d.

$$P_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

Alors pour déterminer les valeurs de  $\lambda$  il faut résoudre l'équation suivante

$$\det[\lambda I - A] = 0$$

#### Définition 1 (Matrice Jacobienne)

Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . On écrit  $f$  sous la forme :

$$f = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, x_2, \dots, x_n))^T$$

Pour un système autonome  $\dot{x} = f(x)$  La matrice Jacobienne A en un point d'équilibre  $x_e$  est calculée de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_e) \\ \vdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_e) & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_e) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_e) \end{pmatrix}$$

**Définition 2(condition de Lipschitz)**

Le système  $\dot{x} = f(t, x)$  avec  $x(t_0) = x_0$  satisfait la condition Lipschitz si :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

Pour tout (t, x) et (t, y) dans un voisinage de  $(t_0, x_0)$

**Théorème (Linéarisation du système)**

Pour x petit, le comportement du système  $\dot{x} = f(x)$  au voisinage du point d'équilibre est celui du système linéarisé :

$$\dot{x} = A(t)x(t)$$

Ou :

$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$  est la matrice jacobinne du système au point d'équilibre  $x^*$ .

**Définition 1 (Indiscernabilité)**

Une paire de points initiaux  $x^0$  et  $x^1$  est dite U-indiscernables si les deux solutions  $x^0(t)$  et  $x^1(t)$  de  $\dot{x} = f(x)$  vérifient  $x^i(0) = x^i, x^i(t) \in U$ , et  $\forall t \in [0, T]$  :

$$h(x^0(t)) = h(x^1(t)) \quad \text{(III.16)}$$

Sorties correspondantes  $y^0$  et  $y^1$  sont identiques. Tous les points  $x^1 \in U$  qui sont U- Autrement dit, les deux états initiaux  $x^0$  et  $x^1$  sont u-indiscernables si les deux indiscernables de  $x^0$  sont montrés par  $I(x^0, U)$ .

**Définition 2 (observabilité)**

Le système (III.15) est observable en  $x^0 \in M$  si  $I(x^0, M) = x^0$ .

Cette définition est très globale, et par fois très générale pour une utilisation pratique, surtout quand on est intéressé à distinguer des états dans un voisinage, Cela nous ramène à utiliser les définitions suivantes :

**Définition 3 (Observabilité locale)**

Le système (III.15) est localement observable en  $x_0$  si pour tout voisinage ouvert et suffisamment petit  $U$  de  $x^0$ ,  $I(x^0, U) = x_0$ .

On peut poser  $U = M$ . Les deux définitions donner ci-dessus montrent qu'un point  $x^0 \in M$  peut être discerné de tout autre point dans  $M$ .

**Définition 4 (Observabilité faible)**

Le système (III.15) est faiblement observable en s'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x^0$  tel que  $I(x^0, M) \cap V = x^0$ .

Dans un système faiblement observable, tout point  $x^0$  peut être distingué de ses points voisins mais encore une fois cela prend un intervalle de temps important.

**Définition 5 (Observabilité faible locale)**

Le système (III.15) est localement faiblement observable en s'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x^0$  tel que pour tout voisinage ouvert  $U$  de  $x^0$  contenu dans  $V$ ,

$$I(x_0, U) \cap V = x^0.$$

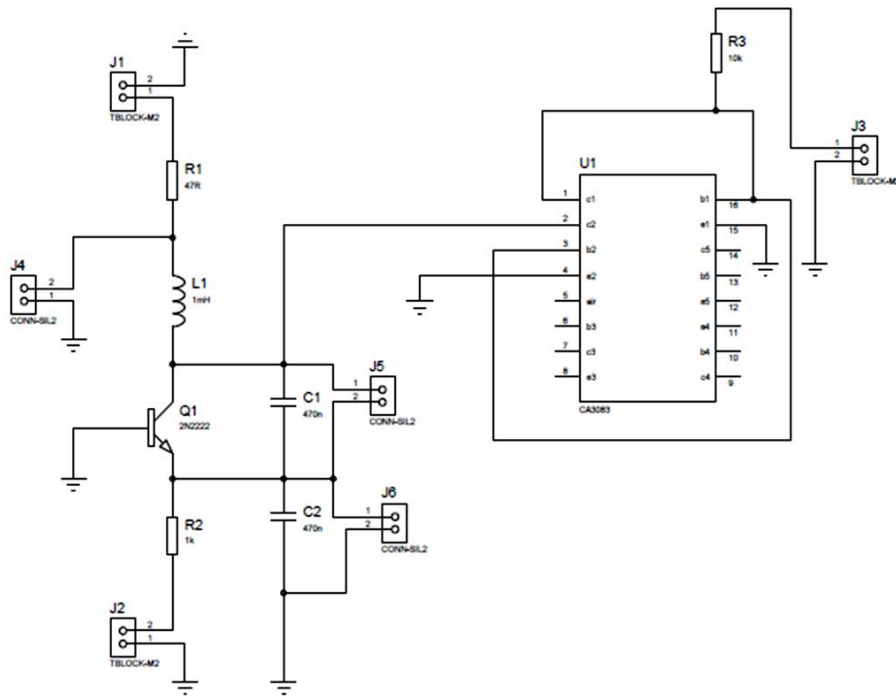
Autrement dit, le système est localement faiblement observable si l'on ne peut distinguer instantanément chaque point de ses voisins.

## Annexe C

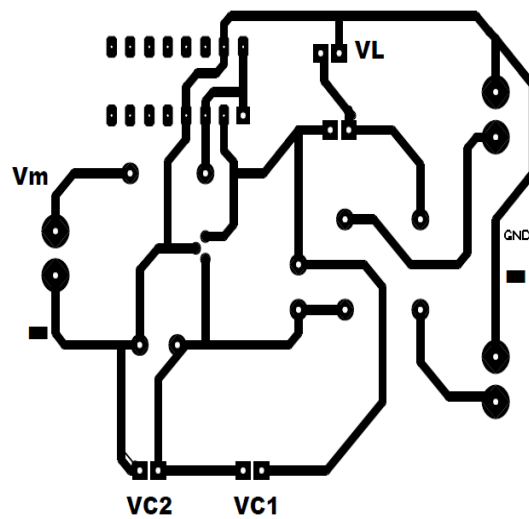
### Circuit expérimental

#### Circuit de l'émetteur

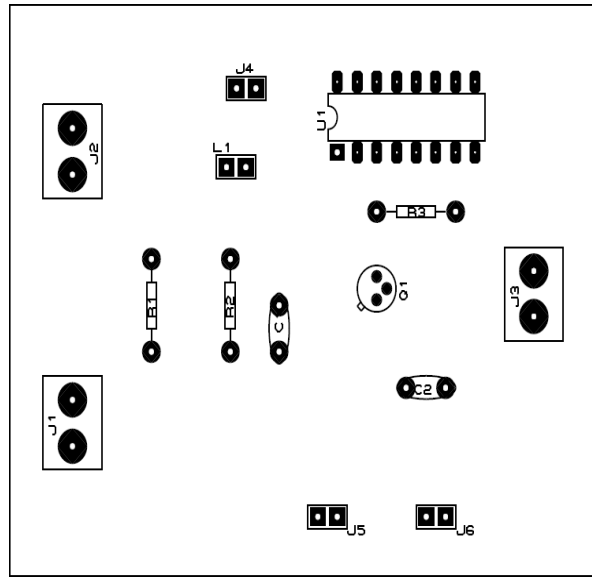
Le circuit de la figure (C.1) est réalisé en technologie hybride sur substrat en époxy d'épaisseur 1.6mm. Les couches métalliques sont en cuivre d'épaisseur  $35\mu m$ . Le transistor bipolaire  $Q_1$  est le 2N2222. La fréquence de transition  $f_T$  de ce transistor qui est de 100MHz est largement suffisante pour l'étude de la faisabilité en basse fréquences (quelques dizaines de KHz) d'un circuit d'émission pour la transmission sécurisé par le chaos. Les figures (C.2),(C.3) présentent les deux faces du circuit réalisé : une face pour les pistes et les composants (top layer) et une face pour les soudures et le plan de masse (bottom layer). Des connecteurs sont prévus pour appliquer le signal du message  $V_m$  et pour observer les signaux de sorties  $V_{c1}, V_{c2}$  et  $I_L$ . Le connecteur d'entrée est représenté dans la figure (C.2) par le point  $V_{in1}$  et les connecteurs de sortie  $X_1, X_2$  et  $X_3$  correspondant respectivement aux signaux de sortie  $V_{c1}, V_{c2}$  et  $I_L$ . Des précautions ont été prises au niveau de la réalisation du dessin de masque du circuit pour réduire les couplages parasites basse fréquences en particulier les couplages capacitifs. A titre d'exemple la figure (C.3) montre un plan de masse, réalisé autour des pistes et des emplacements des connecteurs, qui permet de diminuer les effets liés aux capacités de couplage entre pistes.



**Figure (C.1):** Circuit électronique d'un oscillateur colpitts



**Figure ( C.2):** Top layer (cuivre+composant)



**Figure (C.3):** Implantation des composants

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] : J.Vonvez. « Une introduction expérimentale au chaos déterministe » travail de licence .Année 2000.
- [2] :P. Etchecopar « Quelques élément cégep de Rimouski sur la théorie du chaos».Année 1990.
- [3] :V. Croquette « Système non linéaires et introduction au chaos ».Année2009
- [4] :D. Gue gan « notions de chaos approche dynamique et problèmes d'identification », Institut National de recherche en informatique et en automatique, année 1992.
- [5] :A. Ali-Acha, N.Hadj-Said, A. Mihamed, et A.Belghoraf. « Chaos crypto système base sur l'attracteur de Clifford », année 2009.
- [6] :MB. Luca. « Application du chaos et des estimateurs d'états pour la transmission sécurisée de l'information », Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale. Année 2006 .
- [7] : O. Jérémy. « Le chaos dans les systèmes dynamiques », année 2007.
- [8] :A. Pallavisini. « Système d'interférences radiofréquences aux transmissions Hertziennes », Thèse de doctorat de l'université de Franche-Comté, année 2007.

[9] : Z. El hadj. « Etude de quelques types de systèmes chaotiques : Généralisation d'un modèle issu du modèle de Chen », Thèse de doctorat, année 2006.

[10] :P. Manivelle. « Dynamique non linéaire et chaos », séminaire E2PH, année 2005.

[11] :F. Fanstett. « Les systèmes dynamiques chaotiques pour le chiffrement : synthèse et cryptanalyse », Thèse de doctorat de l'université Henri Poincaré-Nancy 1, année 2006.

[12] :F. Marie-Noëlle. « Etude de la nature chaotique du comportement ventilatoire », Thèse de doctorat de l'université Paris VI, année 2006.

[13] :M.Hernault-Zanganeh. « Faisabilité d'un système d'émission-réception analogique pour les communications sécurisées par le chaos », thèse de doctorat, université paris 6, année2007.

[14]:S.Deriviere et M, Alaoui, « Estimation of attractors synchronization of generalized Lorenz systems « Edition Elsvier, DCDIS vol B,10 NO.6, pp .833-852, année 2003.

[15] :G. Zhang « Formules normale d'observabilité paramétrées par sortie : application au cryptage par synchronisation de systèmes chaotiques », thèse de doctorat de L'université de Cergy-pontoise, année 2006.

[16] :E.Cherrier « Estimation de l'état et des entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires », Thèse doctorat, institue polytechnique Lorraine, année 2006.

[17]: T. yang « Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems: Theory and Application to Secure communication”, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, vol. 44, N°10, pp. 976–978, 1997.

[18]:A.Layec, « Développement de model du chaos pour la simulation des systèmes de communication. Application aux communication chaotique ».Thèse de doctorat, ununiversité de Limoges, année 2006

[19]:L.M. Pecora, T. L. Caroll, « Synchronization in chaotic systems », Edition Elsevier, Phys. Rev. Lett, 64, 821, année1990.

[20] : E. Cherrier, « Estimation de l'état et des entrées inconnues pour une classe de système non linéaires », thèse de doctorat, institue polytechnique de Lorraine, année 2006.