

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté de Génie de la Construction

Départements De Génie Mécanique



Mémoire de fin d'études

*En vue de l'Obtention du Diplôme de Master
académique en génie mécanique
Option : construction mécanique*

Thème :

*Détermination du facteur de concentration de
contraintes et du facteur d'intensité de contraintes avec
la méthode photoélastique et la méthode des éléments
finis*

Proposé par

M^r Bilek Ali

Présenté par :

M^{elle} Cherfi Tassadit

Soutenue publiquement le 14/09/2013

Promotion : 2012/2013

Dédicaces

A tous ceux qui font de moi une personne meilleure chaque jour

Mes parents

Mes sœurs et mes frères

mes tantes : Malha, Fariza, Zakia et Houra

Mes oncles : Kaci et Rabah

Mes cousins, cousines et toute ma famille

Da ahmed et toute sa famille

A la mémoire de ma grand-mère

A mon meilleur ami Tahar

A tout mes amis et mes camarades de promo

A tous ceux qui me connaissent et m'apprécient, je leurs dédie ce modeste travail.



Remerciements

Je remercie le bon dieu de m'avoir montré le chemin de la science et m'avoir donné le courage de le suivre.

Je destine mes remerciements les plus vifs à Mr Bilek Ali pour avoir accepté de m'encadrer et superviser mon travail.

Que Mr Aberkane M, Mr Rabia MS et Mr Ziani H trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude pour l'intérêt et l'aide qu'ils ont apporté à ce projet.

Sans que j'oublie de remercier également mes amis Beldi M et Dahmani M pour le soutien qu'ils ont accordé à ce projet tout au long de sa réalisation.

Je me dois de remercier bien comme il le faut tous les enseignants qui ont contribué à ma formation et à l'enrichissement de mon enseignement.

Mes remerciements vont également à messieurs les membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner et de juger mon travail.

Enfin que tous ceux qui m'ont aidé de loin ou de près puissent trouver ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.



Sommaire

Introduction générale

Chapitre I : Généralités

Généralités sur l'élasticité linéaire

I.1	Introduction.....	1
I.2	Théorie de l'élasticité	2
I.3	Elasticité plane.....	2
I.4	Contrainte plane.....	3
I.5	Déformation plane.....	3
I.6	Formulation d'un problème d'élasticité.....	3
I.7	Equations d'équilibres.....	3
I.8	Equations de compatibilités.....	4
I.9	Relation déformations/déplacements.....	4
I.10	Relation déformations/contraintes.....	5
I.11	Fonction d'Airy.....	5
I.11.a)	Fonction d'Airy en coordonnées cartésiennes.....	6
I.11.b)	transformation de la fonction d'Airy en coordonnées polaires.....	8
I.11.c)	Fonction d'Airy en coordonnées polaires.....	9
I.11.d)	Fonction d'Airy en premier, 2 ^{ème} , 3 ^{ème} degré polynomial.....	10

I-2 Généralités sur la photoélasticimétrie

I.2.1	Introduction.....	11
I.2.2	La photoélasticité.....	11
I.2.3	Principe de la photoélasticimétrie	11
I.2.4	Le phénomène de biréfringence	11
I.2.4.a)	La biréfringence naturelle.....	12

I.2.4.b) La biréfringence accidentelle	12
I.2.5 L'onde lumineuse	13
I.2.6 Types de lumière.....	13
I.2.6.a) La lumière naturelle.....	13
I.2.6.b) Onde lumineuse plane.....	13
I.2.6.c) Lumière monochromatique.....	14
I.2.7 La polarisation de la lumière.....	14
I.2.8 l'onde lumineuse polarisée	14
I.2.9 Les polaroids	15
I.2.9.a) Le polariseur	15
I.2.9.b) L'analyseur.....	15
I.2.9.d) Lame quart d'onde	16
I.2.10 Principe de la réfraction.....	17
I.2.11 L'indice de réfraction.....	18
I.2.12 Lois de Maxwell	19
I.2.13 Effet de la biréfringence sur la lumière.....	21
I.2.14 La constante de frange	22
I.2.15 Observation des isoclines	24
I.2.16 Elimination des isoclines	24
I.2.17 Observation des isochromes	24
I.2.17 Exploitations du réseau d'isochromes	25
I.2.18 Les isostatiques.....	26
I.2.19 Propriété des isostatiques.....	27

I.3) Généralités sur la mécanique de la rupture

I.3.1 Introduction a la mécanique de la rupture.....	28
I.3.2 Développement de la mécanique de la rupture au cours des années.....	28
I.3.3 Rupture des matériaux.....	29
I.3.4 Rupture fragile.....	29
I.3.5 Rupture ductile.....	29
I.3.6 Mode de rupture	29
I-3-7 Condition de résistance à la rupture.....	30
I-3-8 Calcul du facteur d'intensité de contrainte pour une plaque fissurée.....	32

..

Chapitre II : Concentration de contraintes

Introduction	33
--------------------	----

II-1 Etude analytique

II.1.1 Coefficient théorique de concentration de contrainte de contrainte	
II.1.2 Définition	34
II.1.3 Concentration de contraintes dans le cas d'une flexion et torsion.....	37
II.1.4 Concentration de contrainte sur un arbre circulaire de diamètre variable soumis à la torsion.....	38
II.1.5 Facteur de concentration de contrainte sur une	
a-plaque trouée.....	40
b- section avec objet de raccordement.....	40
c-arbre épaulé.....	41
d-arbre comprenant une gorge.....	41
II.1.7 Solution analytique d'un problème de concentration (plaque trouée).....	42

II.2 Partie expérimentale

II.2.1 Expériences.....	45
-------------------------	----

II.2.2 Calcul du facteur de concentration de contraintes par la méthode

photoélastique pour :

- a. une plaque trouée.....50
- b. une plaque à double entaille aigues51
- c. une plaque à double entaille arrondies.....51

II-3 Etude numérique

II.3.1 Introduction.....	52
II.3.2 simulation CASTEM pour une plaque trouée sous traction uniaxile.....	53
II.3.3 simulation CASTEM pour une plaque comportant des entailles arrondies sous traction uniaxile	58
II.3.4 Simulation CASTEM pour une plaque DENT sous traction uniaxile.....	63
II.3.5 Simulation CASTEM; plaque fissurée sous traction uniaxile.....	66
Discussion des résultats.....	70

Chapitre III : Mécanique de la rupture

III.1 Méthode analytique

Calcul du facteur d'intensité de contrainte pour une plaque DENT soumise à une traction uniaxiale.....	71
---	----

III.2 Méthode expérimentale

Calcul du facteur d'intensité de contrainte pour une plaque DENT par la méthode photoélastique.....	72
--	----

III.3 Méthode numérique

Calcul du facteur d'intensité de contrainte pour une plaque DENT par le logiciel CASTEM.....	74
Discussion des résultats.....	77

Conclusion générale	78
----------------------------------	----

Annex :

Présentation du logiciel CASTEM.....	79
Programme conçus pour l'étude.....	81

Liste des figures

Figure I-1 : Transformation de la fonction d'Airy en coordonnées polaires.....	9
Figure I-2 : Propagation d'une onde à travers une matière biréfringente.....	13
Figure I-3 : lumière polarisée rectilignement suivant x.....	16
Figure I-4 : principales composants d'un polariscope.....	16
Figure I-5 : effet de lame quart d'onde sur la lumière.....	18
Figure I-6 : polariscope à réflexion.....	19
Figure I-7 : modèle sous contraintes planes.....	21
Figure I-8 : tracé des isostatique.....	28
Figure Fig I-9 : Mode de fissuration élémentaire.....	30
Figure II-1 : répartition de contraintes sur une plaque comportant un trou elliptique.....	36
Figure II-2 : répartition de contraintes sur une plaque comportant une fissure.....	36
Figure II-3 : répartition de contraintes sur une plaque trouée.....	38
Figure II-4 : répartition de contraintes dans le cas d'un arbre en flexion et une torsion.....	39
Figure II-5 : arbre comportant une gorge soumis a la torsion	39
Figure II-6 : facteur de concentration de contrainte pour la pièce 2.....	40
Figure II-7 : facteur de concentration de contrainte pour la pièce 2.....	41
Figure II-8 : facteur de concentration de contraintes pour la pièce 3.....	41
Figure II-9 : facteur théorique de concentration de contrainte pour un arbre épaulé en torsion...42	
Figure II-10 : facteur théorique de concentration de contrainte pour un arbre avec gorge soumis à la torsion.....	42
Figure II-11 : plaque trouée dans le système de coordonnées polaires.....	43

Fig II-12 : Polariscope.....	45
Figure II-13 : Plaque trouée sous traction uniaxiale.....	46
Figure II-14 : réseau d'isochromes donné par le polariscope pour une plaque trouée en lumière monochromatique.....	46
Figure II-15 : Plaque a double entailles sous traction uniaxiale.....	47
Figure II-16 : Réseau d'isochromes donné par le polariscope en lumière monochromatique.....	47
Figure II-17 : Réseau d'isoclines suivant les différentes configurations du polariscope..... (0°-10°-20°-30°-40°-50°-60°-70°-80°-90°)	48
Figure II-18 : Réseau d'isochromes donné pour une plaque a double entailles arrondies sous traction uniaxiale.....	49
Figure II-19 : Réseau d'isochromes donné par le polariscope en lumière monochromatique.....	49
Figure II-20 : Elément de maillage d'une plaque trouée.....	54
Figure II-19 : Elément de maillage d'une plaque trouée.....	54
Figure II-20 : Elément de maillage d'une plaque trouée après raffinage.....	54
Figure II-21 : Le réseau d'isochromes donné par CASTEM pour une plaque trouée.....	54
Figure II-22 : Le réseau d'isoclines donné par CASTEM pour une plaque trouée.....	55
Figure II-23 : Graphe d'évolution de contraintes suivant X.....	55
Figure II-24 : Graphe d'évolution de contraintes suivant Y1.....	56
Figure II-25 : Graphe d'évolution de contrainte suivant Y2 près de la zone trouée.....	57
Figure II-26 : Valeurs de contraintes relevées suivant l'axe X sur la zone près du trou.....	58

II-3-2) Simulation CASTEM ; plaque avec encoches arrondies soumise a une traction

Figure II-27 : Géométrie et maillage.....	59
Figure II-28 : Réseau d'isochromes donné par CASTEM pour une plaque avec entailles arrondies.....	59

Figure II-29: Le réseau d'isoclines donné par CASTEM pour une plaque avec entailles arrondies.....59

Figure II-30 : Graphe d'évolution de contrainte au niveau de l'encoche suivant X calculée à partir de CASTEM pour une plaque avec entailles arrondies.....60

Figure II-31 : Graphe d'évolution de contrainte au niveau de l'Entaille suivant Y calculée à partir de CASTEM pour une plaque avec entailles arrondies61

Figure II-32: Graphe d'évolution de contrainte au niveau de l'entaille suivant Y calculée à partir de CASTEM pour une plaque avec entailles arrondies62

Les résultats obtenus pour la simulation CASTEM; plaque DENT sous traction uniaxiale

Figure II-33 : Plaque DENT : géométrie et maillage.....64

Figure II-34: Réseau d'isochromes donné par CASTEM pour une plaque DENT.....64

Figure II-35 : Le réseau d'isoclines donné par CASTEM pour une plaque DENT sous
Traction uniaxiale64

Figure II-36 : Graphe d'évolution de contrainte au niveau de l'encoche suivant X calculée à partir de CASTEM pour une plaque dent.....65

Figure II-37 : Graphe d'évolution de contrainte au niveau des encoches suivant Y
donné à partir de CASTEM pour une plaque dent.....65

Figure II-38 : Graphe d'évolution des contraintes pour la plaque DENT et la plaque avec encoches arrondies.....66

II-3-4 Résultats obtenus pour la simulation CASTEM; plaque fissuré sous traction uniaxiale (mode d'ouverture).

Figure II-39 : géométrie et maillage.....67

Figure II-40: Cartographie de déformation d'une plaque fissurée sous traction uniaxiale67

Figure II-41 : Réseau d'isochromes donné par CASTEM pour une plaque fissurée sous traction uniaxiale.....	67
Figure II-42 : Le réseau d'isoclines donné par CASTEM pour une plaque fissurée sous traction uniaxiale.....	67
Figure II-43 : Graphe d'évolution de contrainte à la pointe de la fissure suivant X calculée à partir de CASTEM pour une plaque fissurée	68
Figure II-44 : Graphe d'évolution de contrainte à la pointe de la fissure suivant Y calculée par CASTEM pour une plaque fissurée.....	69
Figure II-45 : Graphe d'évolution des contraintes dans la zone de la fissure suivant X calculée à partir de Castem.....	69
Figure II-46 : Graphe d'évolution des contraintes dans la zone de la fissure suivant Y calculée à partir de Castem.....	70
Figure II-47 : Réseau d'isochromes numérique et expérimentale pour une plaque trouée.....	74
Figure II-48 : Réseau d'isochromes numérique et expérimentale pour une plaque à doubles entailles arrondies.....	75
Figure II-48 : Réseau d'isochromes numérique et expérimentale pour une Plaque à doubles entailles aiguës	76
Figure III-1 : Dépouillement des isochromes.....	80

Liste des tableaux

Tableau I-1: les constantes photoélastiques de quelques matériaux.....	22
Tableau I-2 : L'intensité I pour les différentes configurations du polariscope.....	25
Tableau II-1 : Calcul de la contrainte nominale suivant la nature de la sollicitation.....	35
Tableau II-2 : Variation du nombre de franges en fonction de la contrainte σ_M	50
Tableau II-3 : Récapitulatif des résultats retrouvés pour une plaque trouée (calcul du facteur de concentration de contraintes).....	72
Tableau II-4 : Récapitulatif des résultats retrouvés pour une plaque avec entailles arrondies (calcul du facteur de concentration de contraintes).....	72
Tableau II-5 : Récapitulatif des résultats retrouvés pour une plaque DENT (calcul du facteur de concentration de contraintes).....	72
Tableau III-1 : Résultats de l'expérience pour le calcul du FIC par la méthode photoélastique..	76
Tableau III-2 Récapitulatif des résultats retrouvés pour une plaque DENT (calcul du facteur d'intensité de contraintes).....	78

Introduction générale

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontré dans la conception d'un composant ou d'un organe mécanique. Ce phénomène d'augmentation locale des contraintes causé par des variations brusque de géométrie, est très dangereux s'il n'est pas pris en considération. La zone de concentration de contrainte est souvent le site d'amorçage de fissures et peut être aussi à l'origine de rupture brutale dans le cas d'un matériau fragile. C'est pour ça qu'il est important de se pencher sur ce problème afin de fiabiliser l'ensemble des structures mécaniques et d'éliminer tout risque d'effondrement. Ce travail comprend aussi l'étude d'un autre paramètre, le facteur d'intensité de contraintes.

Un des buts essentiels de ce travail est de montrer l'utilité de la méthode photoélastique dans la résolution des problèmes mécaniques de concentration de contraintes et d'intensité de contraintes. De développer des solutions numériques en utilisant la méthode des éléments finis. Les franges photoélastiques simulées et les franges photoélastiques expérimentales obtenues seront comparées pour validation, Elles seront aussi exploitées pour obtenir les valeurs des contraintes afin de déterminer les facteurs de concentration de contraintes ainsi que les facteurs d'intensité des contraintes en exploitant les boucles des franges isochromes.

Le travaille est réparti en trois parties, le premier chapitre est consacré a quelques rappels sur la théorie de l'élasticité, la présentation de la méthode photoélastique ainsi que quelques notions sur la mécanique de la rupture nécessaires pour la compréhension et l'exploitation des différents résultats obtenus.

Le deuxième chapitre est consacré aux problèmes de concentrations de contraintes. On utilisera trois méthodes (analytique, expérimentale et numérique) pour traiter différent cas rencontrés en construction (plaque trouée, plaque DENT). On clôture ce chapitre par une analyse des résultats obtenus, une comparaison des trois méthodes. Et quelques solutions sont proposées pour traiter ce problème.

Un autre paramètre intervient après l'amorçage de la fissure, c'est le facteur d'intensité de contraintes. Ce dernier chapitre comprend une étude analytique, expérimentale et numérique de ce facteur. Enfin, on conclut ce chapitre par une comparaison des résultats.

Enfin on termine par une conclusion générale.

I. Généralités sur l'élasticité linéaire

I.1 Introduction

La mécanique linéaire de la rupture (MLR) utilisée dans le cas de la plasticité confinée, est basée sur la théorie de l'élasticité linéaire. IRWIN a contribué à son développement en s'appuyant sur les fonctions des contraintes introduites par WESTERGAARD en 1939. Il donna en 1957 la répartition des contraintes au voisinage immédiat de la pointe d'une fissure dans un milieu homogène, isotrope et élastique [6].

I.2 Théorie de l'élasticité

L'application de la théorie de l'élasticité permet d'établir une information plus détaillée et plus précise sur l'état des contraintes et des déformations en un point quelconque sur un corps solide. Donc elle convient parfaitement pour l'étude de l'état des contraintes et des déformations au voisinage immédiat de petits trous, encoches et entailles.

I.3 Elasticité plane

Dans la théorie de l'élasticité, il existe une classe spéciale de problèmes dite des problèmes plans, dont la résolution est moins complexe que les problèmes généraux (tridimensionnels), puisque certaines simplifications peuvent être faites dans leurs traitements.

La géométrie de la pièce et la nature du chargement permettent à un problème d'être classé comme un problème bidimensionnel ou tridimensionnel.

Par définition, une pièce est plane si elle possède une épaisseur uniforme limitée par deux surfaces parallèles et sans aucune surface latérale ; en plus des restrictions qui concernent la géométrie de la pièce, nous ajoutons les restrictions qui concernent les charges qui sont imposées pour une pièce plane.

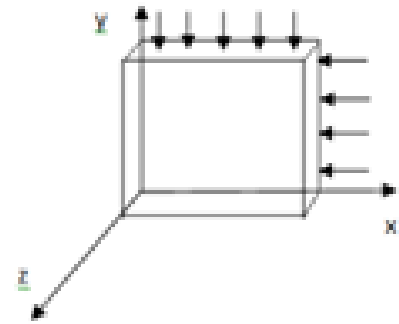
Les forces volumiques, si elles existent, ne peuvent pas varier à travers l'épaisseur de cette pièce, de plus ces forces doivent être nulles dans la direction z et aucune autre charge ne peut être appliquée sur les deux faces parallèles, c'est-à-dire uniquement sur la direction z (traction uniaxiale) [10].

Quand la géométrie de la pièce et les charges appliquées sont définies, les contraintes peuvent être déterminées. Reste à résoudre le problème en contrainte plane ou en déformation plane suivant le cas de figure qui s'impose.

I.4 Contraintes planes

L'hypothèse de la contrainte plane est admise dans le cas d'une pièce suffisamment mince et chargée dans son plan.

Exemple : plaque mince soumise à des charges latérales.

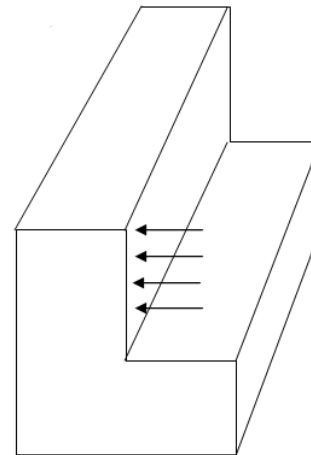


Dans ce cas, l'état de contrainte est σ_{xx} , σ_{xy} et σ_{yy}

σ_{zy} , σ_{xz} et σ_{zz} étant nulles.

I.5 Déformations planes

L'hypothèse de la déformation plane est admise dans le cas d'un corps (solide) ayant des dimensions importantes par rapport aux deux autres et soumise à un chargement latérale.



Exemple: mur de soutènement.

Le tenseur de déformation s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{u} + \text{grad } \vec{u}^t)$$

I.6 Formulation d'un problème d'élasticité :

La solution d'un problème selon la théorie d'élasticité consiste à déterminer les composantes des contraintes satisfaisantes aux équations d'équilibres, les composantes des déformations satisfaisantes des équations de compatibilités, et les composantes des déplacements satisfaisantes des conditions aux limites.

I.7 Les équations d'équilibre :

Dans la théorie de l'élasticité, on considère l'équilibre d'un élément infinitésimal qui est une des caractéristiques importantes de cette théorie. Ensuite, on tient compte de l'incrément de contrainte entre deux faces d'un élément distantes de d_x . L'approche par la théorie de

l'élasticité diffère de celle de la mécanique de la rupture du fait que cette dernière ne s'intéresse pas à l'incrément de contrainte entre deux faces adjacentes et voisines. On montre que l'équilibre d'un élément dans les directions X.Y.Z conduit aux équations suivantes

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + w_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + w_y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + w_z = 0 \quad (3)$$

w_x , w_y et w_z sont les forces par unité de volume pour un élément infinitésimal suivant les directions X.Y.Z.

I.8 Equations de compatibilité :

En élasticité, les déformations ne peuvent être définies d'une manière arbitraire, mais elles doivent satisfaire un groupe de six équations différentielles de compatibilité (4,....., 9). Quand les équations de compatibilité sont satisfaites, elles garantissent l'existence d'un champ de déformation continue, ces équations sont :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (6)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (7)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (8)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(- \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad (9)$$

I.9 Expression des déformations en fonction de déplacements :

Dans le système de coordonnées cartésiennes, le champ de déplacement suivant les directions X, Y et Z est donné par les vecteurs u , v et w par les équations (10), (11) et (12)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (12)$$

Dans le système de coordonnées polaires, les composantes radiales et tangentielles de déplacement sont représentées par les équations (13, 14 et 15)

$$\theta_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (13)$$

$$\theta_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (14)$$

$$\theta_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (15)$$

I.10 Relations entre les contraintes et les déformations :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \quad (16)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \quad (17)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \quad (18)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} \quad (19)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xz} \quad (20)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{yz} \quad (21)$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{E} (2 + 2\nu) \quad (22)$$

E : module de Young.

G : module de cisaillement.

ν : coefficient de poisson.

I.11 Fonction d'AIRY :

La satisfaction simultanée des conditions d'équilibres et des équations de compatibilités peuvent être simplifiées par l'introduction d'une fonction définie de manière à satisfaire automatiquement ces équations. Bien sur, il convient de vérifier ensuite les conditions aux limites.

Cela est possible grâce à des fonctions $\Phi(x,y)$ pour un cas à deux dimensions. Ce sont généralement des polynômes en fonction de x et y qui satisfont l'équation $\nabla^4\Phi = 0$. Ces fonctions sont appelées **fonction de la contrainte d'AIRY**. En l'honneur au mathématicien britannique *G.B. AIRY* qui l'a introduite en 1962[10].

I.11.a La fonction d'AIRY en coordonnées cartésiennes :

En élasticité tridimensionnelle les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\text{Div } \sigma + fi = 0 \quad (23)$$

$$\sigma_{ij,j} + fi = 0 \quad i,j=1 \text{ à } 3 \quad (24)$$

Dans le cas de la déformation plane, et si on néglige les forces de volume nous aurons

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0 \quad (27)$$

On introduit alors une fonction $\phi(x,y)$ telle que :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (28)$$

$$\sigma_{21} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad (29)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (30)$$

En vérifiant les équations d'équilibre dans le cas particulier des contraintes planes.

Le champ des contraintes est donné par les équations suivantes :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \omega_x \quad (31)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \omega_y \quad (32)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (33)$$

Elles sont vérifiées quand les forces ω_x et ω_y dérivent d'un potentiel w et s'écrivent selon les équations :

$$\omega_x = - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (34)$$

$$\omega_y = - \frac{\partial w}{\partial y} \quad (35)$$

Les équations d'équilibre étant vérifiées, nous établissons la relation d'AIRY en vérifiant la première équation de compatibilité

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (36)$$

Pour cela nous déterminons les valeurs de ε_x , ε_y et γ_{xy} en utilisant les relations entre les contraintes et les déformations

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \omega(1 + \nu) \right) \quad (37)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \omega(1 + \nu) \right) \quad (38)$$

$$\gamma_{xy} = - \frac{1}{G} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (39)$$

D'après la première équation de compatibilité, il résulte :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} - \nu \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} (1 - \nu) \right] \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \nu \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} (1 - \nu) \right] \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{G} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{1}{E} (2 - 2\nu) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (42)$$

Après addition :

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = -(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad (43)$$

- La quantité ∇^4 est appelé *opérateur harmonique*.
- La quantité ∇^2 est appelé *opérateur Laplace*.

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (44)$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad (45)$$

$$\nabla^4 \Phi = -(1 - \nu) \nabla^2 \omega \quad (46)$$

La contrainte fournie par l'équation bi harmonique précédente représente une bonne approximation du champ de contrainte, à condition que le corps soit très mince.

Dans le cas, où les forces de volumes sont nulles, l'équation bi harmonique se réduit à $\nabla^4 \Phi = 0$. Elle s'écrit aussi sous cette forme

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0. \quad (46-a)$$

I.11.b Transformation de l'équation $\nabla^4 \Phi = 0$ en coordonnées polaires [1]

D'après la figure **Fig I-1**

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

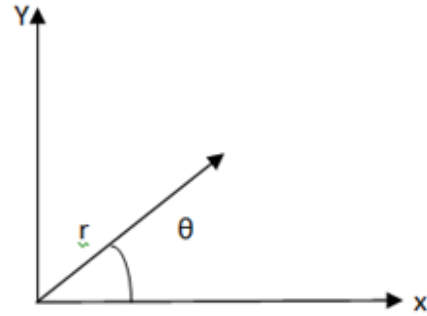


Fig I-1

D'où ;

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

Cherchons $\Phi = \Phi(r, \theta)$, il faut d'abord calculer

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \left(-\frac{y}{r} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} (\cos \theta) - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} (\cos \theta) - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \left(\frac{-\sin \theta}{r^2} \right) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \right] \cos \theta +$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} (-\sin \theta) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} (\cos \theta) - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \right] \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \quad (47)$$

De même on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \quad (48)$$

En additionnant les équations(47) et (48), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \quad (49)$$

L'équation bi-harmonique est maintenant en coordonnées polaires.

$$\nabla^4 \Phi = \nabla^2(\nabla^2 \Phi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) \quad (50)$$

I.11.c Fonction d'AIRY en coordonnées polaires :

Les équations d'équilibre sont :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \quad (51)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (52)$$

R : est la force radiale par unité de volume.

L'équation bi harmonique en coordonnées polaires :

$$\nabla^4 \Phi(r, \theta) = \nabla^2(\nabla^2 \Phi(r, \theta)) \quad (53)$$

$$\nabla^4 \Phi(r, \theta) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) \quad (54)$$

On vérifie que les contraintes sont sous la forme suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (55)$$

En coordonnées polaires, les équations de contraintes $\Phi(r, \theta)$ sont vérifiées si et seulement si la fonction d'Airy est bi harmonique ($\nabla^4 \Phi = 0$) [10]

I.11.d Fonction d'Airy en premier degré polynomial :

Elle s'écrit sous la forme :

$$\Phi = a_1 x + b_1 y \quad (56)$$

Bien qu'elle satisfasse l'équation $\nabla^4 \Phi = 0$, elle n'est pas utilisable pour résoudre le problème bidimensionnel d'élasticité. Ici on a $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ [10].

I.11.5 Fonction d'Airy en deuxième degré polynomial :

Elle s'écrit sous la forme :

$$\Phi = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 \quad (57)$$

D'après les équations 31,32 et 33 on a ;

$$\sigma_x = 2c_2$$

$$\sigma_y = 2a_2$$

$$\tau_{xy} = -b_2$$

Et l'équation (46-a) est satisfaite

D'après les résultats obtenus par l'équation (57), on peut conclure que la répartition des contraintes est uniforme dans toute la section de la pièce car elles sont indépendantes de X et Y [10].

I.11.6 Fonction d'Airy en troisième degré polynomial :

Elle s'écrit sous la forme :

$$\Phi_3 = a_3x^3 + b_3x^2y + c_3y^2x + d_3y^3 \quad (58)$$

En utilisant les équations 31,32 et 33 pour déterminer les contraintes on obtient :

$$\sigma_x = 2c_3x + 6d_3y$$

$$\sigma_y = 6a_3x + 2b_3y$$

$$\tau_{xy} = -2b_3x + 2c_3y$$

La condition établie à l'aide de l'équation (46-a) est vérifiée. Donc on peut conclure que l'utilisation de la fonction d'Airy Φ_3 donne une variation linéaire des contraintes dans toute la section.

2. Généralités sur la photoélasticimétrie

I.2.1 Introduction

L'expérience est le moyen le plus fiable pour vérifier la validité d'une théorie. En mécanique particulièrement, les ingénieurs ont mis au point toute une panoplie d'expériences pour valider les résultats démontrés théoriquement. Ils ont ingénieusement exploité tous les paramètres nécessaires afin d'aboutir à des résultats sûrs pour pouvoir affirmer, de manière irréprochable, la fiabilité des différentes constructions.

Afin d'assurer aux structures en service un fonctionnement normal et dans des conditions de sécurité optimale, nous devons nécessairement rechercher la répartition des contraintes sur ses structures et déterminer leur distribution, et ce dans le but de garantir un dimensionnement exemplaire et correcte.

Parmi les méthodes expérimentales courantes, la photoélasticimétrie tient une place importante dans ce domaine. C'est un outil parfait et largement utilisé pour sa simplicité et son efficacité.

I.2.2 La photoélasticité

On dit d'un matériau solide qu'il présente une propriété photoélastique lorsqu'il devient biréfringent sous l'effet d'une contrainte extérieure. Pour déterminer les contraintes appliquées sur ce genre de matériau, on utilise la photoélasticimétrie.

I.2.3 Principe de la photoélasticimétrie

La photoélasticimétrie est une méthode optique d'analyse des contraintes qui exploite la nature biréfringente de certains matériaux transparents. Elle est basée sur la variation du tenseur des indices de matériaux transparents sous sollicitations et permet de visualiser la répartition des contraintes de la pièce et de déceler ainsi les régions où les contraintes sont très élevées (concentration de contraintes), ou faibles (important dans les cas où l'économie de matériau est à considérer).

I.2.4 Le phénomène de biréfringence

Dans le cas d'une onde électromagnétique, l'onde transversale se propage à travers un milieu anisotrope et la vitesse de propagation de celle-ci peut dépendre à la fois de la direction de polarisation et de la direction de propagation, ainsi elle se divise en deux ondes polarisées à angle droit l'une de l'autre et se propagent à des vitesses différentes. Cette situation donne naissance au phénomène de la double réfraction appelé aussi « biréfringence ».

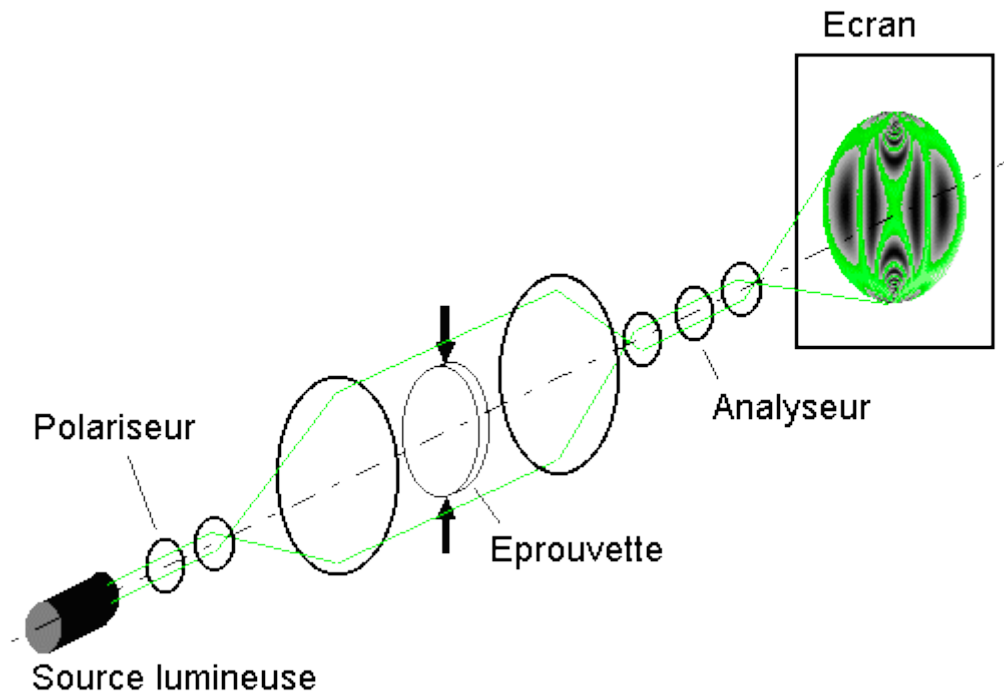


Fig I-2 : Propagation d'une onde à travers une matière biréfringente

On distingue deux sortes de biréfringence :

a- La biréfringence naturelle

La majorité des corps transparents présentent cette sorte de biréfringence sans toutefois qu'ils soient sollicités par des forces extérieures. Le phénomène de biréfringence se caractérise par un retard optique (δ) entre les deux composantes à la sortie du corps. Ceci est dû à la structure anisotrope de la matière.

b- La biréfringence accidentelle :

Les milieux dans lesquels il n'y a aucune direction privilégiée (matière à l'état gazeux, liquide et amorphe) ne sont pas biréfringents, mais peuvent le devenir sous l'action d'une cause extérieure qui crée une direction privilégiée : c'est la biréfringence provoquée (ou induite). Le milieu devient uniaxe (axe parallèle à la direction de l'action extérieure). Une anisotropie optique est provoquée lorsqu'on soumet de nombreux matériaux plastiques à des contraintes, c'est ce qu'on appelle la biréfringence accidentelle. Les axes principaux de l'état de contrainte coïncident avec les axes optiques principaux. Les indices de réfraction principaux sont en relation linéaire avec les contraintes principales.

$$\left. \begin{array}{l} n_1 = n_1(\sigma_1, \sigma_2) \\ n_2 = n_2(\sigma_2, \sigma_1) \end{array} \right\} \Rightarrow n_1 - n_2 = k(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (59)$$

Ces deux composantes vont vibrer selon des plans orthogonaux qui sont parallèles aux directions principales des contraintes (1 et 2), elles ont la même fréquence mais elles sont déphasées l'une par rapport à l'autre. Le retard optique δ entre ces deux composantes sera proportionnel à la différence des indices principaux donc à la différence entre les contraintes principales et à l'épaisseur " d " du matériau.

$$\delta = c \cdot d (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (60)$$

Dans la présente étude on utilisera un polariscope. C'est un banc d'essai de photoélasticimétrie composé d'un polariseur qui transforme la lumière naturelle en lumière polarisée rectilignement, d'analyseur qui a pour rôle de détecter la lumière polarisée et d'un dispositif d'application de charge (en traction ou en flexion).

Quelques généralités sur la lumière :

I.2.5 L'onde lumineuse

D'après Maxwell, l'onde lumineuse est une onde électromagnétique et se compose d'un champ électrique $E = E_0 \cos(\omega t)$ et d'un champ magnétique $H = H_0 \cos(\omega t)$ perpendiculaire l'un par rapport à l'autre, et continus dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation qui est appelé plan d'onde. L'état de polarisation de l'onde est caractérisé par le vecteur du champ électrique \vec{E} [5].

I.2.6 Types de lumière

I.2.6.a La lumière naturelle

Son vecteur d'induction magnétique \vec{B} a une direction, un module et une pulsation aléatoire. Elle se compose des longueurs d'onde qui s'étendent de $0,4\mu\text{m}$ à $0,8\mu\text{m}$.

I.2.6.b Onde lumineuse plane

Les ondes lumineuses planes sont des ondes transversales. Elles transportent une vibration \mathbf{B} (le vecteur induction magnétique) perpendiculaire à sa direction de propagation \vec{n} . Une onde lumineuse est qualifiée de plane lorsque la surface de l'onde est perpendiculaire à \vec{n} ; on parle alors de plan d'onde. Ceci s'obtient pratiquement si l'on se place suffisamment loin du point d'émission [5].

I.2.6.c Lumière monochromatique

C'est une lumière à une couleur donnée. Elle est définie par une longueur d'onde λ constante [5].

I.2.7 La polarisation de la lumière

C'est une propriété d'une onde lumineuse qui décrit le comportement des vecteurs électrique et magnétique au cours de sa propagation (une onde lumineuse étant une onde électromagnétique). Plus précisément, la polarisation d'une onde lumineuse indique les directions que prend, au cours de l'évolution temporelle ou le long d'un rayon lumineux donné, le vecteur champ électrique (ou le vecteur champ magnétique) dans le plan orthogonal au vecteur d'onde. Une onde est dite non polarisée si E a une direction qui varie aléatoirement dans le plan d'onde(P) ; c'est le cas de la lumière naturelle [5].

I.2.8 l'onde lumineuse polarisée

L'onde lumineuse est dite polarisée si elle vibre suivant un mode particulier, plusieurs cas de figures sont à distinguer ici :

-Une onde est polarisée rectilignement si \vec{E} a une direction bien définie dans l'espace et l'extrémité du vecteur \vec{E} forme un segment de droite dans le plan d'onde (P).

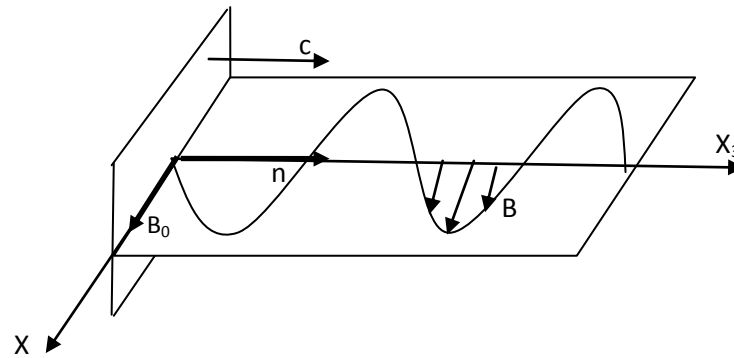


Fig I-3: lumière polarisée rectilignement suivant x_1 [5]

-La lumière polarisée elliptiquement : est le cas d'une onde dont l'extrémité de son vecteur champ électrique E décrit au cours du temps, une ellipse sur le plan d'onde.

-La lumière polarisée circulairement : est un cas particulier d'une onde polarisée elliptiquement, (quand $a=b$), on obtient un cercle ; a et b représentent respectivement le grand foyer et le petit foyer de l'ellipse et pour obtenir une polarisation circulaire d'une onde lumineuse, on utilise un polariseur classique et une lame quart d'onde. Ce type de polariscope élimine les isoclines et ne laisse voir que les isochromes (très pratique pour mesurer les contraintes).

Composants du polariscope

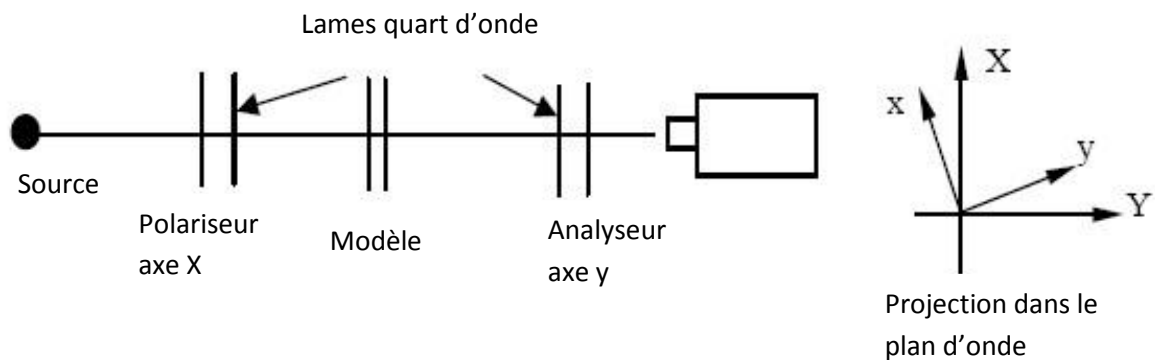


Fig I-4 : principales composants d'un polariscope

I-2-9 Les polaroids

I.2.9.a Le polariseur

Un polariseur est un outil optique qui convertit la polarisation d'une onde lumineuse en une autre forme de polarisation : la plupart des polariseurs permettent d'obtenir une lumière polarisée rectilignement suivant une certaine direction. Dans ce cas, cette direction est appelée l'axe du polariseur.

Les polariseurs sont utilisés en photoélasticimétrie mais également en photographie.

Il existe deux catégories de polariseurs :

- les polariseurs par absorption, qui absorbent les polarisations non désirées,
- les polariseurs par séparation de faisceau, qui séparent le faisceau lumineux en deux faisceaux de polarisations différentes [5].

I.2.9.b L'analyseur

Est également un filtre polarisant qui reçoit la lumière polarisée, et permet de déterminer le plan de polarisation par extinction du faisceau sortant. Tout polariseur peut servir d'analyseur et vice-versa. Les deux modèles sont équivalents dans le cas de la réfraction, cependant on préférera le premier pour expliquer le phénomène, et le second pour le quantifier.

Remarque :

Deux polaroids successifs à axes parallèles laissent passer la lumière, par contre deux polaroids croisés, c'est-à-dire à axes perpendiculaires ne laissent passer aucune lumière car le faisceau polarisé a une composante nulle suivant l'axe du second polaroid.

I.2.9.d lame quart d'onde :

Au cours des expériences, on a utilisé une lame biréfringente particulière pour laquelle le déphasage est $\Phi = \pi/2$. C'est une lame quart d'onde.

$$\Phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \text{ avec } \delta = \frac{\pi}{4} \quad (61)$$

δ est la différence de marche entre les deux composantes X et Y de E et vaut un quart de la longueur d'onde autrement dit elle agit comme un retardateur qui est intercalé entre les polaroids et le modèle biréfringent, il permet de transformer une vibration rectiligne en vibration circulaire et vice-versa [5].

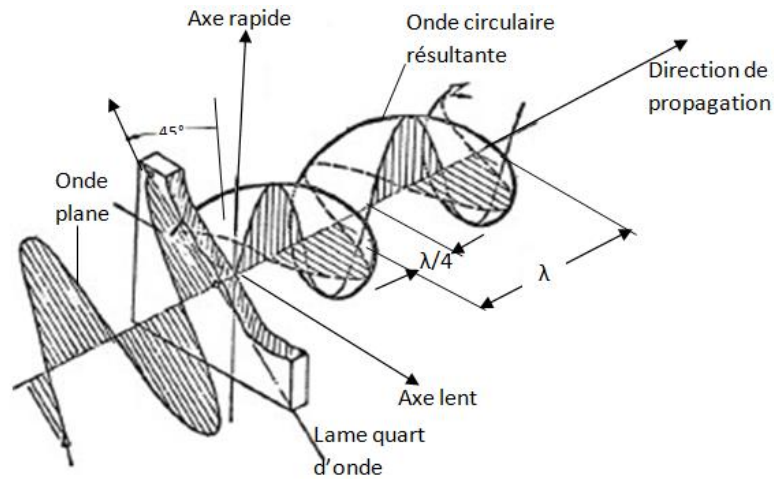


Fig I-5: effet de lame quart d'onde sur la lumière

Remarque

L'ensemble formé par un polariseur suivi d'une lame quart d'onde dont les axes sont à 45° de l'axe du polariseur est un polariseur circulaire.

Il existe plusieurs types de polariscope :

- **polariscope à réflexion** : Un revêtement photoélastique est collé sur la surface de la pièce avec une colle réfléchissante à base de poudre d'aluminium. La lumière incidente polarisée traverse deux fois le revêtement et génère des isoclines et des isochromes [5].

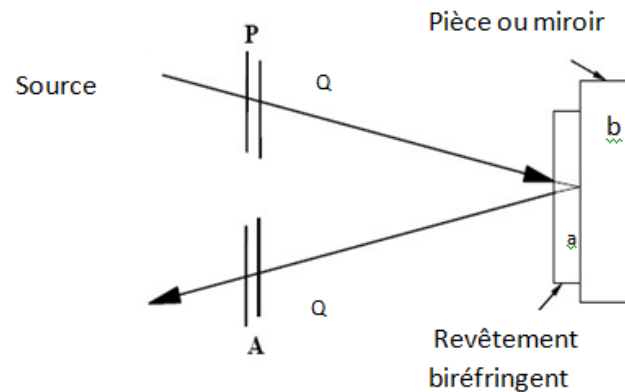


Figure I-6: polariscope à réflexion

P : polariseur

A : analyseur

Q : lame quart d'onde

La méthode des revêtements photoélastiques est encore très utilisée dans l'industrie car elle présente plusieurs avantages:

- C'est une méthode de champ qui se pratique sur des structures réelles.
- Sa mise en œuvre est relativement facile.
- Des progrès sont faits régulièrement dans le domaine des revêtements, des colles et des instruments.

➤ **Polariscope à transmission :**

On réalise une reproduction plane de la forme à étudier découpée dans un matériau photoélastique d'épaisseur e . Ce modèle est chargé et observé par transparence entre deux filtres polarisants, il permet d'obtenir les contraintes à n'importe quel endroit d'un modèle chargé ou d'un modèle à contraintes figées.

I.2.10 Principe de la réfraction

En physique des ondes, notamment en optique et acoustique ; le phénomène de réfraction est la déviation d'une onde lorsque la vitesse de celle-ci change entre deux milieux. La vitesse de propagation est en fonction du milieu dans lequel se répand l'onde. En changeant de milieu (cela se produit à l'interface entre deux milieux, ou lors d'un changement d'impédance du milieu) la vitesse change et la lumière se réfracte.

La propriété qui caractérise les différents milieux transparents est la « réfringence », qui se traduit par une valeur numérique qui est : « l'indice de réfraction ».

2.11 L'indice de réfraction

C'est le Rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide c à la vitesse de la lumière dans le milieu transparent.

$$n^r = c_0/v_1 \quad (62)$$

Ou C_0 : est la vitesse de la lumière dans le vide

V_1 : vitesse de la lumière dans le milieu considéré

On peut représenter une telle onde par deux approches :

- par son front d'onde : c'est la ligne qui décrit une vague dans l'eau (optique ondulatoire et sismologie).
- par un rayon : c'est la direction de propagation de l'onde, perpendiculaire au front d'onde (optique géométrique).

L'indice de réfraction définit si le milieu est optiquement isotrope ou anisotrope et par définition

a. Un milieu optiquement isotrope

Est un milieu qui assure une vitesse constante de propagation à l'onde polarisée rectilignement et ce dans toutes les directions, quelle que soit la direction de polarisation.

b. Milieu optiquement anisotrope

Pour un milieu anisotrope optiquement, la célérité d'une onde polarisée rectilignement dépend de la direction de propagation et de la direction de la vibration dans ce plan d'onde.

I.2.12 Lois de Maxwell

Maxwell a déterminé les lois liant les indices principaux aux contraintes principales :

$$\begin{cases} n_1^r = n_0^r + c_1\sigma_1 + c_2(\sigma_2 + \sigma_3) \\ n_2^r = n_0^r + c_1\sigma_2 + c_2(\sigma_3 + \sigma_1) \\ n_3^r = n_0^r + c_1\sigma_3 + c_2(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \quad (63)$$

n_1^r, n_2^r, n_3^r : sont les indices de réfraction principaux.

n_0^r est l'indice de réfraction à l'état non contraint

c_1, c_2 sont des constantes photoélastiques

Dans le cas problème plan ; on considère un modèle en matériau isotrope sous un état de contraintes planes soumis aux contraintes principales σ_1 et σ_2 représentées sur la figure

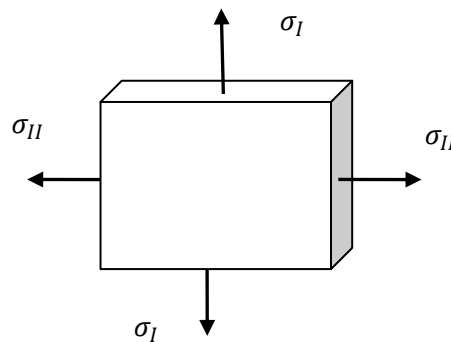


Figure I-7: modèle sous contraintes planes

Soit A un point du modèle à analyser, les directions privilégiées de la biréfringence accidentelle coïncide en A avec les directions des contraintes principales. Le modèle est donc traversé en A par deux vibrations V_1 et V_2 ; et la vibration V_1 parallèle σ_1 correspond à une vitesse v_1 et un indice de réfraction $n^r = c_0/v_1$ et V_2 correspond une vitesse v_2 et un indice de réfraction $n^r = c_0/v_2$

Neumann élabore des relations entre les indices de réfractons et la valeur des déformations ; Maxwell exprime ces relations en se référant aux contraintes.

La loi de Maxwell énonce :

$$\begin{cases} n_1 = n_0 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 \\ n_2 = n_0 + c_1\sigma_2 + c_2\sigma_1 \end{cases} \quad (64)$$

$$\text{D'où} \quad n_1 - n_2 = c(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (65)$$

$C = C_1 - C_2$: est appelée la constante photoélastique du matériau et s'exprime en Brewster = 10^{-12} Pa^{-1}

n_0 : Indice de réfraction dans l'état non contraint

On déduit donc, que la biréfringence d'un modèle en état de contrainte plane est proportionnelle à la différence des contraintes principales ($\sigma_1 - \sigma_2$).

Par convention on prend $\sigma_1 > \sigma_2$ donc $n_1^r - n_2^r > 0$ d'où $v_1 < v_2$

On dit que la direction de la contrainte principale σ_1 coïncide avec l'axe de la biréfringence.

En élasticité, on peut relier le tenseur des indices au tenseur des contraintes et obtenir l'orientation (paramètre isocline) et la différence (paramètre isochrome) des contraintes principales.

Si un milieu est anisotrope optiquement et biréfringent, le déphasage résultant φ , des composantes \mathbf{B}_I et \mathbf{B}_{II} de l'onde \mathbf{B} polarisé rectilignement qui le traverse, est de :

$$\varphi = \frac{2\pi e}{\lambda} c(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (66)$$

φ dépend de la différence de sensibilité des contraintes principales au point X_3 observé.

Le tableau suivant donne la constante photoélastique de quelques matériaux : [8]

Matériau	C en Brewster
Verre photoélastique	2
Plexiglas	4
Araldite (résine époxy)	55
Cr39	35
Psm1 (polyester)	82
Hysol (polyuréthane)	3200

Tableau I-1: les constantes photoélastiques de quelques matériaux

On Rappelle que : $1 \text{ Bw} = 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N} = 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$

I.2.13 Effet de la biréfringence sur la lumière

Sur le polarisateur, la forme de lumière sortante du polariseur est de la forme $p = a \cos \omega t$. Portée pas un axe Ox, La direction de polarisation fait un angle α avec l'une des directions des contraintes principales du modèle.

La vitesse de propagation de la lumière est différente sur les plans principaux OX et OY à cause de l'anisotropie optique du modèle biréfringent donc le temps mis par le faisceau lumineux pour traverser le corps photoélastique est donné par les relations suivantes respectivement sur le plan OX et OY :

$$t_x = \frac{e}{V_x} \quad \text{et} \quad t_y = \frac{e}{V_y} \quad (67)$$

Par conséquent, les vibrations lumineuses sortantes sont données par :

$$X = a \cos \alpha \cdot \sin \omega(t - t_x) \quad (68)$$

$$Y = a \sin \alpha \cdot \sin \omega(t - t_y) \quad (69)$$

Ces vibrations auront donc un retard de $\varphi = \omega(t_x - t_y)$ à la sortie du modèle.

Etant donné que l'analyseur et le polariseur sont croisés, seules les composantes horizontales de ces vibrations arrivent à traverser et sont de forme :

$$A = -a \sin(2\alpha) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (70)$$

L'amplitude de l'onde incidente est $\sin 2\alpha \sin \frac{\delta}{2}$

L'intensité I de la lumière varie comme le carré de cette amplitude soit :

$$I = a^2 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (71)$$

L'intensité I est nulle (franges noires) pour :

- $\sin 2\alpha = 0$ d'où $\alpha = \frac{N\pi}{2}$ (N étant un entier). Les directions principales des contraintes sont parallèles ou perpendiculaires à la direction du polariseur ; ce sont les lignes isoclines.

Ce point est noir car toutes les longueurs d'ondes sont arrêtées, cette propriété est indépendante de la longueur d'onde, de l'épaisseur et du caractère biréfringent du modèle. Elles varient donc avec la direction du polariseur et de l'analyseur (sauf en un point isotrope, ou toutes les directions sont principales et ou passent toutes les lignes noires).

- $\sin \varphi/2 = 0$ d'où le retard introduit par le matériau biréfringent est égale à $\varphi = 2N\pi$ (N étant un entier), la relation devient alors : $N = ec (\sigma_1 - \sigma_2)/\lambda$ ce sont les isochromes.

Un ensemble de point de même couleur est une isochrome qui correspond à une différence de contraintes principales $\sigma_1 - \sigma_2 = \text{cste}$. Deux lignes successives de même couleur correspondent (en générale) à deux valeurs de N consécutives. Cette relation est indépendante de la direction du polariseur et de l'analyseur.

Plus la différence de contraintes principale est grande, plus les isochromes surviennent d'une manière rapprochées les unes des autres. Il suffit de compter les isochromes en partant de l'état sans contrainte ($N = 0$) pour déduire l'importance de la contrainte. La précision du résultat obtenu peut alors être améliorée par l'emploi de matériaux à constante photoélastique élevée.

L'observation des isochromes est différente suivant que l'on opère en lumière blanche ou en lumière monochromatique. On a:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\delta}{c \times e} = \frac{N\lambda}{c \times e} = \frac{Nf}{e} \quad (72)$$

La frange ou l'isochrome d'ordre N, qui dépend de la longueur d'onde, est un lieu d'extinction des points vérifiant :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N\lambda}{ce} \quad (73)$$

On désigne le rapport λ/c par la lettre f , dénommé constante de frange, pour le matériau du modèle utilisé correspondant à la longueur d'onde λ qui sera employée sur le banc photoélasticimétrique.

Voici un récapitulatif montrant la valeur de l'intensité lumineuse pour les différentes configurations du polariscope:

Type de polariscope	Champ clair	Champ sombre
rectiligne	$I(x, y) = I_0 - I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$	$I(x, y) = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$
circulaire	$I(x, y) = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$	$I(x, y) = I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

Tableau I-2 : l'intensité I pour les différentes configurations du polariscope

I.2.14 La constante de frange « f »

D'après l'équation de Maxwell :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N.f}{e} \Rightarrow f = \frac{e}{N} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (74)$$

I.2.14.a Définition

La constante de frange f est le rapport entre la différence des contraintes principales sur l'unité d'ordre de frange en un point du modèle ayant comme épaisseur e

Remarque : En champ obscur, les bandes noires correspondent aux ordres de frange entiers. En champ clair, les bandes noires quant à elles correspondent à des demi-ordres c'est-à-dire ($1/2, 3/2, \dots$).

I.2.15 Observation des isoclines

Une ligne isocline est le lieu des points où la direction de l'une des contraintes principales est parallèle à la direction de polarisation. Elles apparaissent en noir et lorsqu'on tourne simultanément le polariseur et l'analyseur, les isoclines se déplacent alors vers les points du modèle où les contraintes principales sont parallèles aux nouveaux axes bien sûr ces lignes apparaissent toujours lorsque le polariseur et l'analyseur sont croisés (champ sombre).

Après avoir analysé plusieurs directions, tous les 10 degrés par exemple, on obtient une cartographie de croix donnant les directions des contraintes principales en tous points.

Remarque :

Chaque nouvelle position des polaroids donne une nouvelle position des isoclines.

Les isoclines ne se coupent jamais (sauf dans les points isotropes ou les contraintes principales sont les même dans toutes les directions).

Un contour libre est une ligne isocline.

I.2.16 Elimination des isoclines :

En lumière plane, les deux types de franges (isoclines et isochromes) apparaissent de manière indissociable et ceci peut fausser l'étude, ce qui nous oblige à supprimer les franges isoclines par l'utilisation d'une onde circulaire qui procède à l'élimination des isoclines ainsi la répartition de contraintes dans le modèle est obtenue.

Pour se faire, il suffit de placer entre polariseur et le modèle d'une part, et d'autre part entre le modèle et l'analyseur, « **une lame quart d'onde** » dont les axes sont à $\alpha = \pi/4$ de ceux de polariseur.

I.2.17 Observation des isochromes :

Une ligne isochrome apparaît comme le lieu des points d'égale valeur de la différence des contraintes principales, en effet :

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{N\lambda}{C e} \quad (75)$$

N : ordre de frange d'isochromes

λ : longueur d'onde utilisée

C : constante photoélastique

e : épaisseur du modèle

Le réseau d'isochromes s'analyse en comptant les franges, c'est-à-dire en repérant la valeur de N (valeur entière).

La lumière monochromatique permet de:

- Mieux distinguer les isochromes (en couleurs) des isoclines (noires), sauf pour la frange d'ordre zéro qui est noire
- Connaître dans quel sens croît la contrainte.
- Reconnaître visuellement l'ordre des premières franges.
- Connaître les directions principales.

Dans le cas, d'utilisation d'une lumière monochromatique, l'ordre zéro correspond à la première frange qui apparaît (absence de chargement). En principe on peut obtenir un nombre infini de franges, mais elles sont toutes noires.

Dans le cas d'un polariscope rectiligne, l'analyse des isochromes est rendue difficile du fait de la présence des lignes isoclines noires.

La détermination de l'ordre de frange N en lumière polychromatique est difficile, pour cela il est préférable de travailler avec la lumière monochromatique car dans ce cas les isochromes apparaissent en noires et c'est plus facile de les compter ainsi.

I.2.17 Exploitations du réseau d'isochromes :

La connaissance de la différence de contrainte $(\sigma_1 - \sigma_2)$ en tout point du modèle nous permet de calculer aisément la contrainte tangentielle τ_m à partir de la relation

$$\tau_m = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \quad (76)$$

Cette relation est déduite du cercle de Mohr, ainsi on obtient la distribution complète du cisaillement maximum dans tous les points du modèle.

D'autre part la loi de Maxwell ainsi formulée : $(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{Nf}{e}$

On aura :

$$\tau_m = \frac{Nf}{2.e} \quad (77)$$

On remarque que les contraintes tangentielles sont proportionnelles à l'ordre de frange N puisque la constante de frange « f » et l'épaisseur « e » du modèle sont constant donc la

contrainte de cisaillement maximale correspond à l'ordre de frange N maximum des isochromes

I.2.18 Les isostatiques

Ce sont des lignes de force tangentes aux directions principales composées de deux familles orthogonales: une tangente à σ_1 et l'autre à σ_2 et sont tracées à partir des isoclines. Leurs courbures permettent de trouver le sens des variations des contraintes principales. Elles servent à obtenir, par intégration, les valeurs séparées des contraintes principales. [8]

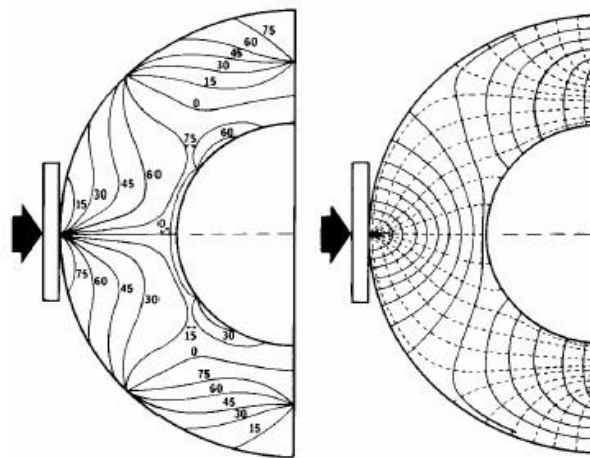


Figure I-8: tracé des isostatiques

I.2.19 Propriété des isostatiques

- Lorsqu'une isostatique présente une forte courbure, la contrainte principale qui lui est perpendiculaire varie rapidement
- Lorsqu'une isostatique est rectiligne, la contrainte principale qui lui est perpendiculaire est stationnaire et est généralement soit maximale, soit minimale
- Une isostatique droite est aussi une isocline
- Les axes de symétrie sont des isostatiques
- La variation des contraintes dépend de la courbure des isostatiques.

3 Généralités sur la mécanique de la rupture

3.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, de nombreux drames sont survenus partout dans le monde engendrant des conséquences tragiques dues vraisemblablement à l'effondrement brutal et soudain des structures mécaniques. Des catastrophes dangereusement sévères et impossibles à prendre en charge se produisent de manière fréquente et inquiétante, l'exemple le plus dangereux est l'explosion du réacteur nucléaire « Fukuchima » au Japon suite à une fissure qui s'est propagée lors d'un dysfonctionnement du réacteur. D'autres problèmes plus au moins graves subsistent, et la recherche de leurs origines est devenue plus qu'indispensable.

Ces accidents sont tous dû à la non continuité de la matière, appelée fissure, c'est un embarras purement mécanique, et la technologie a développé un domaine pour solutionner le problème, c'est ainsi que née **la mécanique de la rupture**.

La mécanique de la rupture est une science visant à développer un critère de ruine qui prend en considération les fissures existantes au sein des matériaux, le principe consiste à établir une relation entre les contraintes appliquées et la dimension de la fissure, le paramètre reliant ses deux variables est dit « **facteur d'intensité de contrainte KI** » (**FIC**). Ce chapitre se portera sur la détermination de cet élément en utilisant différentes méthodes aussi bien expérimentales « **la photoélasticimétrie** » que numériques « **la méthode des éléments finis** ». Nous présentons dans ce qui suit quelques notions de base de la mécanique de la rupture.

I.3.2 Développement de la mécanique de la rupture au cours des années :

Quelques dates essentielles en mécanique de la rupture :

1920 : Griffith rupture d'un milieu élastique-fragile, bilan énergétique

1956 : Irwin singularité du champ de contraintes en pointe de fissure

1968 : intégrale de **Rice-Cherepanov**

Année 70 : développement des méthodes numériques, éléments finis

années 70, fissuration en fatigue, chargements complexes

années 80, aspects 3D, approche locale de la fissuration

I.3.3 Rupture des matériaux

La rupture d'un matériau se produit en deux étapes :

- Naissance d'une fissure
- Propagation de la fissure

Une rupture peut être ductile ou fragile

I.3.4.a Rupture fragile

Dans un matériau fragile, la fissure une fois apparue devient instable et se propage très vite si la contrainte appliquée dépasse une certaine valeur critique. La fissure est suivie d'une zone étroite de déformation plastique.

I.3.4.b Rupture ductile

Contrairement à la rupture fragile, la rupture ductile est caractérisée par une faible vitesse de propagation de la fissure et ceci est due à l'apparition d'une zone plastique importante au bord de celle-ci.

I.3.5 Mode de rupture

Suivant le déplacement des lèvres de la fissure, la mécanique prévoit trois modes de fissurations élémentaires.

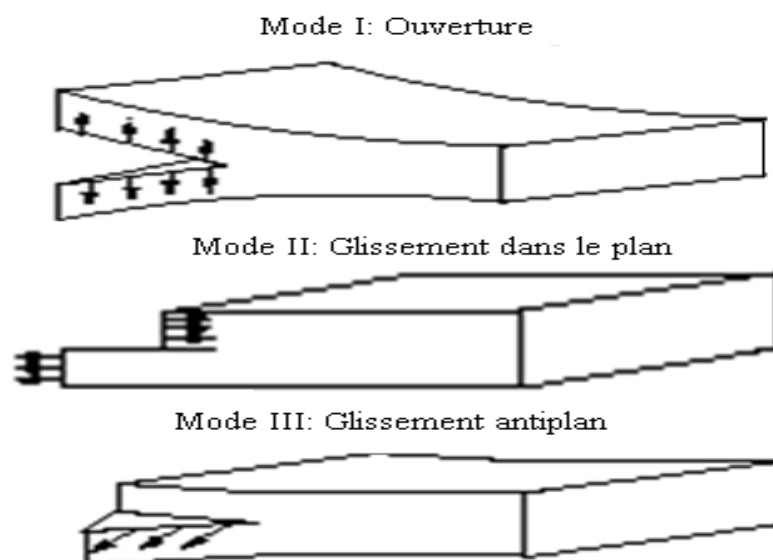


Fig I-9 : Mode de fissuration élémentaire

La contrainte au voisinage du front de fissure, soumise à une contrainte d'ouverture (mode I), s'exprime par la fonction d'Airy, la résolution de ce problème aboutit aux expressions de champ de contraintes exprimé par les relations suivantes

Mode I

- Les contraintes :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

Dans les expressions précédentes l'apparition du facteur **KI** est remarquable. Ce paramètre définit la sévérité de la situation, il tient compte à la fois de la géométrie de la fissure et de la nature des sollicitations, il implique l'existence d'une valeur critique à partir de laquelle la fissure se propage et de là la pièce sollicitée rompt automatiquement.

Remarque

Au voisinage immédiat du front de fissure ($r=0$), les contraintes prennent des valeurs infinies, que la mécanique des milieux continus n'admet pas et pratiquement de telles contraintes n'ont pas de signification si ce n'est une caractéristique attribuée à la singularité de la fissure qui développe une zone de déformation plastique.

Le critère précédemment prononcé n'est valable que si le matériau est isotrope ayant un comportement élastique parfaitement plastique. Par ailleurs, la concentration de contraintes en fond d'entaille crée une plastification local, donc l'entaille doit rester petite par rapport à la longueur de la fissure et à la dimension de la structure de façon à ne pas perturber la distribution élastique des contraintes.

I.3.6 Condition de résistance à la rupture

Une structure est considérée comme sûre si l'égalité suivante est vérifiée

$$KI < KI_c$$

K_{Ic} est indépendant de la géométrie de la pièce fissurée et des conditions de chargement, c'est une caractéristique intrinsèque aux matériaux.

Les essais mécaniques que l'on appelle essais de résiliences donnent la ténacité des matériaux.

I.3.7 Relation Entre La Résilience Et La Ténacité :

Les essais de MDR (K_{IC} et J_{IC}) sont lents et coûteux, à l'opposé des essais de résilience qui sont peu onéreux. Plusieurs études ont été menées dans le but de déterminer la relation entre K_{IC} et K_V . La plupart des relations proposées ne sont valables que dans des domaines restreints de température et pour des matériaux particuliers.

I.3.7.a Niveau Ductile

La méthode BOLFE- BARSOM se propose de déterminer une relation entre K_{IC} et K_V . Cette relation est la suivante :

$$\left(\frac{K_{IC}}{\sigma_e}\right)^2 = 0.646 \frac{K_V}{\sigma_e} - 6.35 \times 10^{-3}$$

K_{IC} : MPa \sqrt{m}

σ_e : MPa

K_V : Joule

En remarquant à travers cette relation que la relation entre K_{IC}^2 et K_V est linéaire.

I.3.7.b Niveau Fragile

Dans ce cas, SAILORS et CORTEN proposent la relation suivante :

$$K_{IC}^2 = \alpha E (K_V)$$

Le coefficient α varie entre $0.66 \cdot 10^{-3} < \alpha < 10^{-3}$ selon la nature du métal étudié

$\alpha = 0,65 \cdot 10^{-3}$ pour les aciers de construction.

Cette relation fournit la valeur dynamique de K_{IC} , les courbes statique et dynamique de K_{IC} sont décalées, BOLFE et BARSOM expriment ce décalage par les relations :

$$\Delta T = 95 - 0.1\sigma_e \quad 250 \leq \sigma_e \leq 950$$

$$\Delta T = 0 \quad \sigma_e > 950$$

La vérification de l'inégalité $KI < KI_c$ assure aux structures un fonctionnement optimum dans des conditions de sécurité garantit et pour ce faire.

- Choisir un matériau ayant une grande ténacité (KI_c)
- Réduction du niveau de sollicitations, soit par diminution des charges appliquées, soit en évitant de forte concentration de contraintes dans les régions à risque de fissuration en agissant sur les détails géométriques.

Pour un problème classique de Griffith, nous avons :

$$KI = \sigma\sqrt{\pi a}$$

Rappelons qu'un problème de Griffith est une plaque de dimensions infinies soumise à une traction uniaxiale, mais dans notre cas et pour les besoins de l'expérience, la plaque est de largeur finie et elle est munie d'une fissure de longueur $2a$. Donc la formule précédente devient :

$$KI = \sigma\sqrt{\pi a}f\left(\frac{a}{b}\right)$$

σ C'est la contrainte appliquée.

a C'est la demi-longueur de la fissure

$f\left(\frac{a}{b}\right)$ est le facteur de correction sans dimension définissant la géométrie du solide et de la fissure.

D'autres méthodes pour mesurer le FIC :

- La méthode énergétique.
- L'intégrale J de Rice.
- l'écartement a fond de fissure : (*Crack tip opening displacement CTOD*)

On utilise pour le calcul du FIC le critère de contrainte.

I.3.8 Méthode de calcul du facteur d'intensité de contrainte pour une plaque fissurée :

Le facteur d'intensité de contrainte se calcul

a partie de la relation ci-dessous

$$KI = \sigma \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{b}\right)$$

Pour une plaque fissurée de largeur finie, $f\left(\frac{a}{b}\right)$

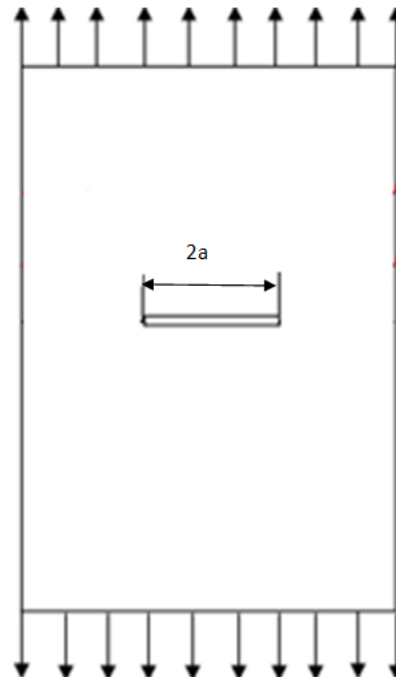
est donné par :

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1 - 0,5 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 0,044 \left(\frac{a}{b}\right)^3}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}}}$$

σ C'est la contrainte appliquée.

a C'est la longueur de la fissure

$f\left(\frac{a}{b}\right)$ est le facteur de correction sans dimension définissant la géométrie du solide et de la fissure.



II.1 Introduction

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontré dans la conception mécanique. C'est un phénomène d'augmentation locale des contraintes dans une zone comportant des variations géométriques. Il apparaît dans une discontinuité de la pièce ou d'une structure avec la présence d'un trou ou d'une entaille après usinage par exemple.

Une analyse systématique pour les principales géométries et sollicitations mécaniques, rencontrées dans la conception, a été établie et des abaques ont été tracés pour simplifier la tâche des ingénieurs. En parallèle, les techniques expérimentales comme l'extensiométrie et la photoélasticimétrie ont beaucoup progressées et un grand nombre de problèmes sont traités par la photoélasticimétrie 3D dans des temps record. Sans parler des méthodes numériques qui ont pris des ampleurs considérables grâce à leurs rapidités et leurs précisions [2].

II.2 Historique

Le phénomène de concentration de contrainte a été d'abord traité par G.Kirsh, en 1898 pour un problème de concentration de contraintes autour d'un trou. Ensuite, des solutions analytiques et des formules empiriques ont été progressivement trouvées par différents chercheurs pour des géométries de pièces de plus en plus complexes. Inglis a aussi évoqué ce problème en 1913, mais c'est H. Neuber et R.E. Peterson qui ont plus contribué à la connaissance dans ce domaine [2].

II.3 Coefficient théorique de concentration de contrainte K_t :

L'indice « t » est employé pour indiquer que ce coefficient est théorique et que son calcul repose sur les hypothèses de la théorie de l'élasticité.

La première expression mathématique a été donnée par Paterson à la suite des travaux de Nember, pour le cas des pièces simples. Ainsi, dans le cas d'une traction simple il propose

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (1)$$

a étant la demi-longueur de l'entaille et ρ le rayon de courbure de l'entaille.

Dans le cas d'un trou elliptique percé dans une plaque, la contrainte maximum qui se trouve aux extrémités à l'axe horizontal du trou est donnée par l'équation [2].

$$\sigma_{max} = \sigma (1 + 2 \sqrt{a/\rho}) \tag{2}$$

Où σ désigne la contrainte de traction appliquée aux extrémités de la plaque. Dans le cas d'un trou on a ; $a = \rho$

D'où : $K_t = 3$

II.4 Définition :

Le facteur de concentration de contrainte est défini comme étant le rapport de la contrainte maximale réelle sur la contrainte nominale.

$$K_t = \sigma_{Max} / \sigma_{nom}$$

On désignera les contraintes obtenues à l'aide des résultats analytiques par

– σ_{nom} Pour la contrainte nominale

– σ_{max} Pour la contrainte maximale

Tableau II-1 : contraintes nominales suivant la nature de la sollicitation		
Traction/compression	Flexion	Torsion
$\sigma_{nom} = \frac{F}{S}$	$\sigma_{nom} = \frac{M}{I/V}$	$\sigma_{nom} = \frac{M_t}{I_0/V}$
F : effort de traction ou de compression. S : section de l'éprouvette	M : moment de flexion I : moment d'inertie par rapport à l'axe neutre	M_t : moment de torsion I_0 : moment d'inertie polaire V : distance de la fibre considérée à l'axe neutre

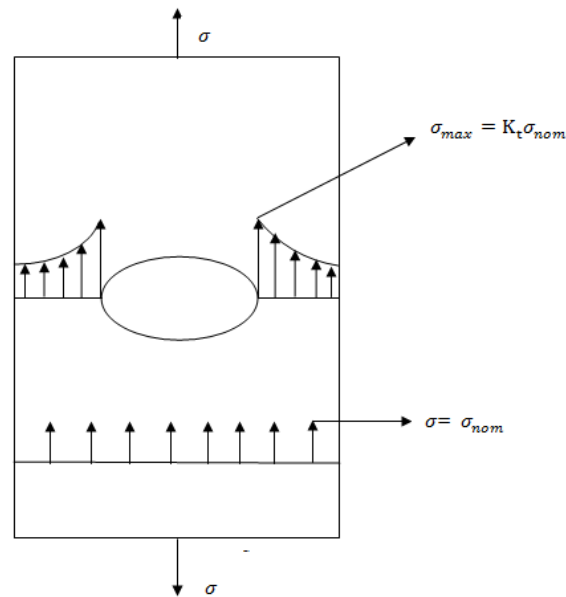


Fig II-1 : Répartition de contraintes sur une plaque comportant un trou elliptique

La contrainte maximum augmente avec le rapport $\frac{a}{\rho}$, de sorte qu'un trou très étroit perpendiculaire à la direction de traction provoque une très forte concentration de contraintes ; ceci explique que les fissures perpendiculaires à la direction des efforts ont tendance à s'étendre [10].

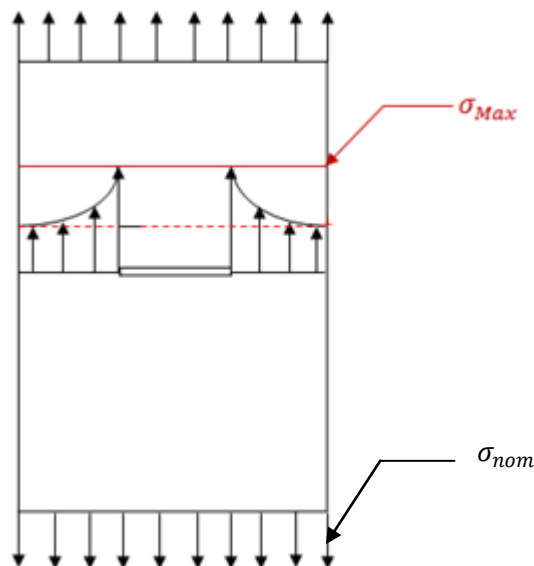


Fig II-2 : Répartition de contraintes sur une plaque comportant une fissure

On peut percer des trous aux extrémités de la fissure en vue d'éliminer les angles aigus qui donnent lieu à des concentrations intenses de contraintes.

Bien sûr, dans ce cas il est important de ne pas confondre le coefficient de concentration de contraintes k_t qui ne donne qu'une information locale à la pointe même de la fissure et le facteur d'intensité de contrainte KI qui décrit la singularité spatiale du champ de contrainte. Si k_t est sans dimension KI est le produit d'une contrainte par la racine carré d'une longueur et se mesure en $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$.

Le passage à la limite permettant de définir une fissure comme la limite d'un trou elliptique complètement aplati conduit naturellement à une relation entre les deux grandeurs, la grandeur intervenant dans KI étant reliées à la taille du défaut c par la relation d'Irwin :

$$KI = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_m \sqrt{\rho} \quad (3)$$

σ_m étant la contrainte en tête de la fissure elliptique et ρ son rayon de courbure.

Pour une fissure elliptique aplatie de longueur $2c$ dans une plaque infinie (en pratique des dimensions grandes devant (c) soumise à une traction σ , $\sigma_m = k_t \sigma$, avec $k_t = \sqrt{\frac{c}{\rho}}$, le passage à la limite conduit à

$$KI = \sigma \sqrt{\pi c} \quad (4)$$

On constate que la section de la pièce n'est donc pas le seul paramètre de calcul ; il faut aussi tenir compte d'autres paramètres, comme la géométrie de la pièce et surtout la nature de la sollicitation [4].

En réalité la contrainte au bord du trou est plusieurs fois plus grande que P/S et diminue très rapidement lorsqu'on s'éloigne du trou. En fait, à une distance de l'ordre du diamètre, elle est même inférieure à P/S , et cela parce que l'équilibre des forces impose que

$$\int_{S_1} \delta \cdot dS = P \quad (5)$$

Autrement dit, l'intégrale de la contrainte normale sur toute la section doit équilibrer la charge appliquée P , et la valeur moyenne de la contrainte multipliée par la section S_2 doit donner P .

En conséquence si la contrainte au bord du trou est plus grande que P/S_2 , elle doit être inférieure à cette valeur autre part [10].

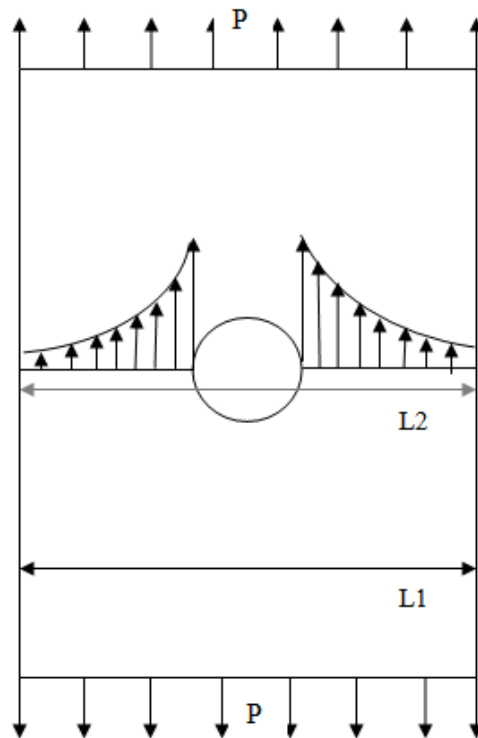


Fig II-3 : Répartition de contraintes sur une plaque trouée

II.5 Concentration de contraintes dans le cas d'une flexion et d'une torsion :

Dans le cas d'une plaque de grande largeur comportant des entailles hyperboliques soumise à l'action d'un couple agissant dans son plan moyen, les contraintes sont importantes aux entailles, le facteur de concentration de contraintes peut être calculé par la formule approchée suivante :

$$K_t = \left(0.335 \frac{d}{r} + 0.85\right)^2 + 0.08 \quad (6)$$

Ou d : désigne la largeur de la section minimum

r : désigne le rayon de courbure en fond d'entaille [10].

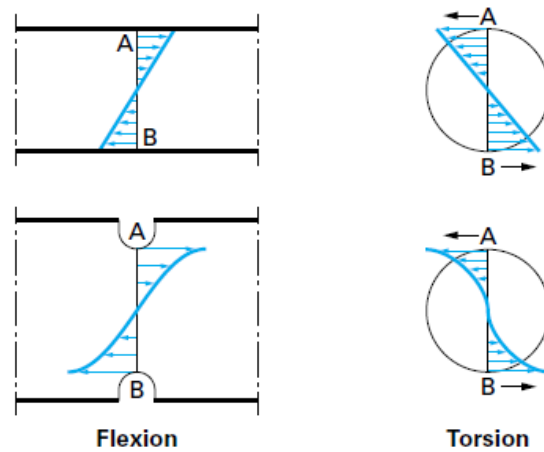


Fig II-4 : Répartition de contraintes dans le cas d'un arbre sollicité en flexion et une torsion

II.6 Concentration de contrainte sur un arbre circulaire de diamètre variable soumis à la torsion

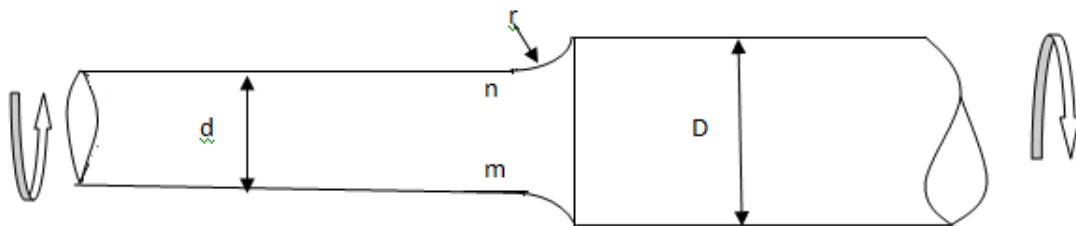


Fig II-5 : arbre comportant une gorge soumis à la torsion

Il existe une concentration intense des contraintes aux points m-n ou commencent les congés.

Le calcul théorique de la contrainte maximum au congé est très complexe, donc la méthode expérimentale ou la méthode numérique restent le seul recours pour résoudre ce type de problème. Ces méthodes donnent directement les valeurs de la contrainte maximum en fonction $\frac{d}{D}$ [10].

A l'exclusion de toute autre propriétés de la matière, le facteur de concentration de contraintes ne dépend que de la nature de la charge appliquée donc quelque soit le matériau qui constitue la pièce, le facteur de concentration de contrainte ne change pas. Par contre il faut que les contraintes y soient inférieures à la limite élastique pour éviter la rupture. Cela dit, il diffère suivant que la pièce est soumise à la traction, la flexion ou la torsion. Dans le cas des poutres, le calcul RDM ne donne plus des résultats corrects dans la zone où les contraintes sont concentrées, mais les calculs restent valables tant que l'on s'éloigne suffisamment de variations géométriques (trou, variation brutale de la section, entaille).

Ainsi on va chercher à utiliser les calculs RDM pour calculer les contraintes comme si il n'y avait pas d'accident géométrique. On corrigera ensuite ses contraintes localement en utilisant des coefficients déterminés expérimentalement ou numériquement [14].

Il n'existe que très peu de cas pour lesquels le problème de concentration de contrainte peut être résolu théoriquement. Dans la plus part des cas, les renseignements concernant les contraintes maximales aux points où la section varie brusquement, sont obtenus expérimentalement et sont donnés par des abaques très pratiques. La plupart des résultats concernant les valeurs du facteur de concentration de contrainte sont obtenus expérimentalement par la méthode photoélastique [3].

II.7 Pièce 1 : persage sur la ligne moyenne

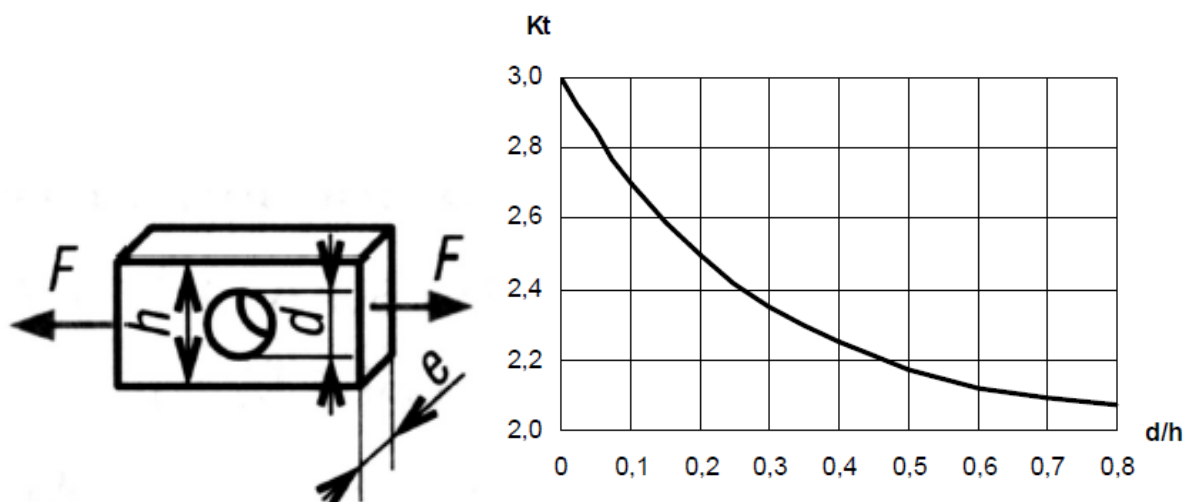


Fig II-6 : Facteur de concentration de contrainte pour la pièce 2.

II.8 Pièce 2 : Diminution de la section avec arc de raccordement dans le cas d'une traction :

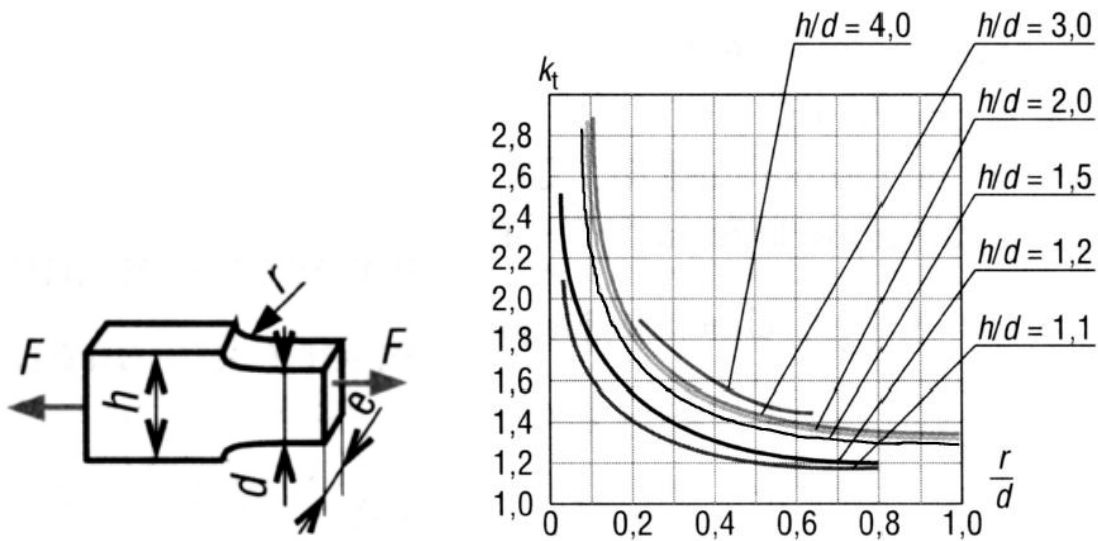


Fig II-7: Facteur de concentration de contrainte pour la pièce 2.

II.9 Pièce 3 : Encoches symétrique avec objet de raccordement

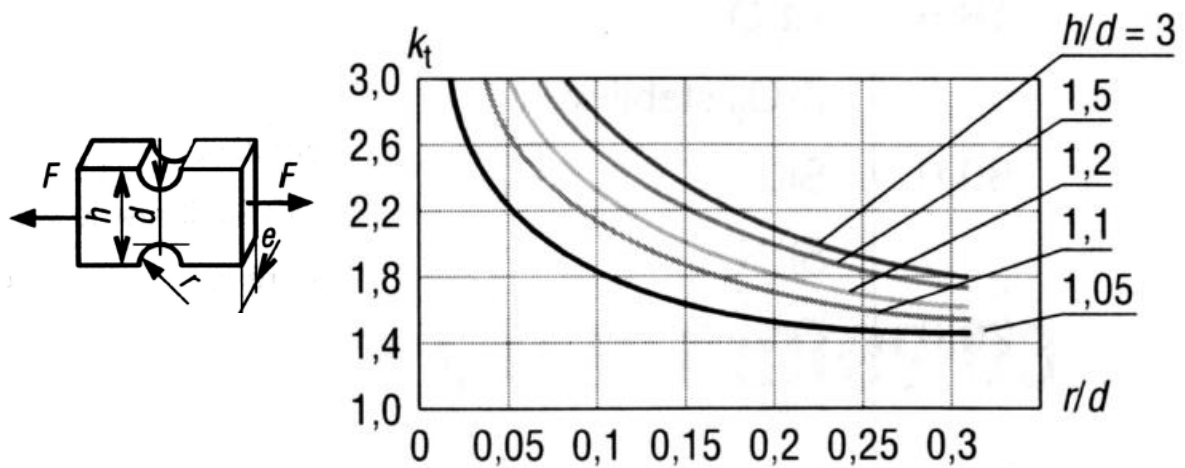


Fig II-8: Facteur de concentration de contraintes pour la pièce 3.

II.10 Concentration de contraintes sur un arbre épaulé soumis à la torsion

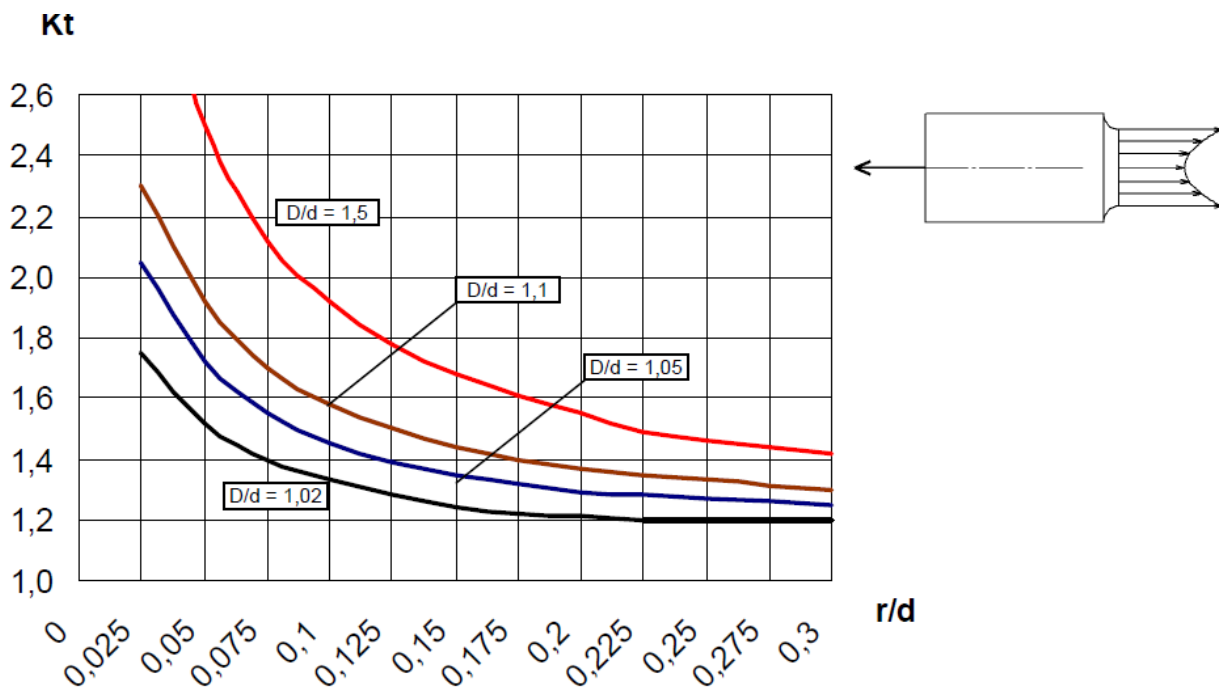


Fig II-9 : Facteur théorique de concentration de contraintes d'un arbre épaulé en torsion

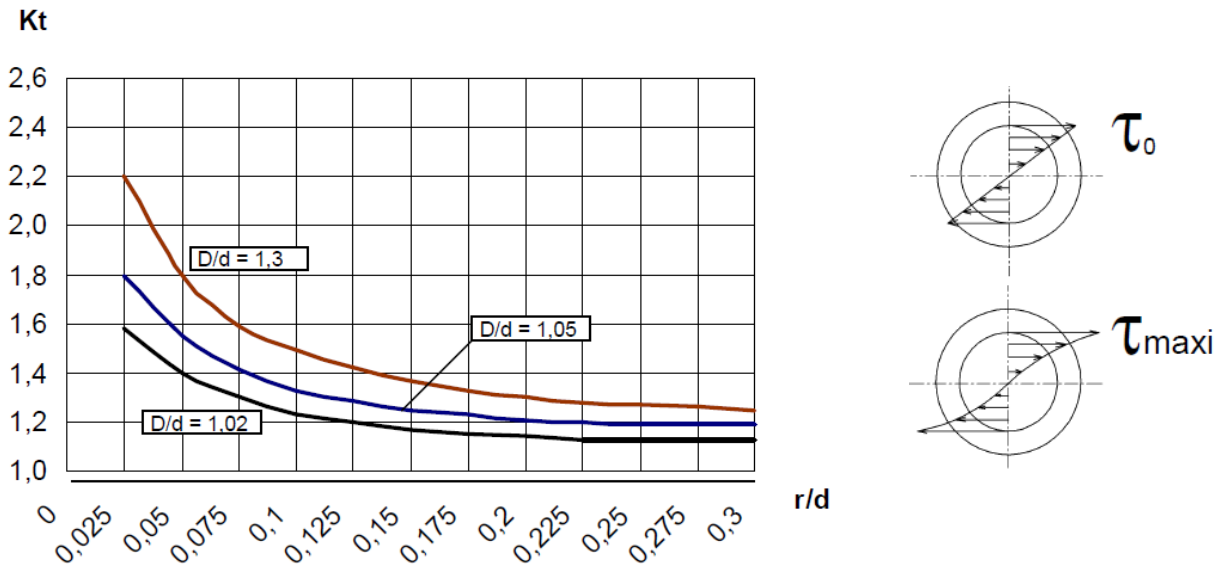


Fig II-10 : Facteur théorique de concentration de contrainte pour un arbre avec gorge soumis à la torsion

Pour montrer la difficulté, parfois même l'impossibilité d'une étude théorique de tels problèmes, on considère le cas le plus simple qui est celui d'une plaque avec un trou circulaire.

II.11.1 Etude analytique

La distribution des contraintes dans une plaque infinie avec un trou circulaire soumise à une charge uniaxiale

On considère une plaque de longueur et de largeur infinie avec un trou circulaire représenté par la figure suivante, cette plaque est soumise à une charge uniforme δ_0 dans une direction Y a $r = \infty$ [1].

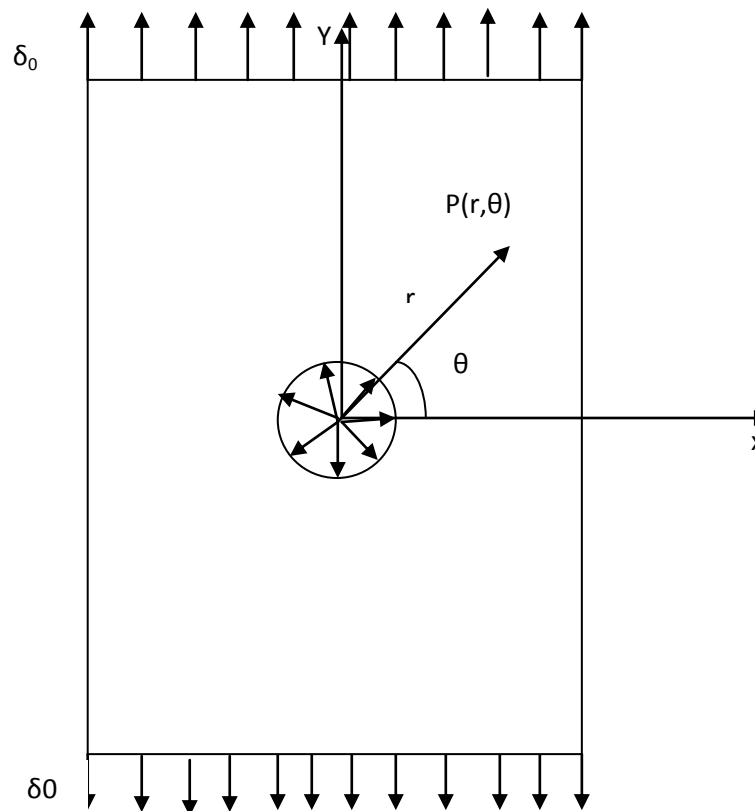


Fig II-11 : Plaque trouée dans le système de coordonnées polaires

La figure précédente représente une plaque trouée dans le système de coordonnées polaire dont l'origine est au centre du petit trou de rayon a .

La distribution des contraintes à la périphérie du cercle le long de l'axe X et Y peut être déterminé, en utilisant la fonction d'Airy.

Essayons la fonction de contrainte d'Airy de la forme : [1]

$$\Phi = \frac{T}{4} \left(r^2 - 2a^2 \ln r - \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \quad (7)$$

On vérifie facilement que cette fonction satisfait réellement l'équation :

$$\nabla^4 \Phi = \nabla^2 (\nabla^2 \Phi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (8)$$

Elle peut donc servir comme fonction de contrainte à condition de satisfaire les conditions aux limites du problème. Il va sans dire que les conditions d'équilibre sont automatiquement satisfaites par les contraintes impliquées par l'équation (7), puisque l'équation bi-harmonique est satisfaite par Φ .

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{T}{2} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} - \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \quad (9)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{T}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} + \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \quad (10)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = \frac{T}{2} \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \quad (11)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites nous devons évaluer les contraintes à la fois en bordure du trou et en un emplacement éloigné de trou. Au trou ($r=a$), les équations 9 et 10 montrent que σ_r et $\tau_{r\theta}$ disparaissent comme il se doit, puisque la frontière du trou ne supporte aucune charge en surface. En un point éloigné du trou, c'est-à-dire pour $r \rightarrow \infty$ les équations ci-dessous donnent l'état de contrainte suivant :

$$\sigma_r = \frac{T}{2} (1 - \cos 2\theta) \quad (12)$$

$$\sigma_\theta = \frac{T}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad (13)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{T}{2} \sin 2\theta \quad (14)$$

On voit bien que les équations correspondent à un cas de tension uniaxiale et il est clair que ceci devrait être le cas en tout point situé à une grande distance.

La caractéristique la plus intéressante de ce problème réside dans l'évaluation de la contrainte circonférentielle pour $\theta=0$ et $\theta=\pi$, à savoir pour un élément du bord du trou. La contrainte circonférentielle est donnée par :

$$[\sigma]_{\theta=0,\pi} = \frac{T}{2} [1 + 1 + (1 + 3)(1)] = 3T \quad (15)$$

Donc un petit trou dans une plaque en tension uniaxiale donne naissance à une contrainte normale maximale triple de celle qui existe en absence du trou, ceci constitue un bon exemple de concentration de contrainte qui peut se produire dans un corps élastique en présence de trous, de coupures, d'entailles ou d'autres imperfections [1].

Remarque

Bien que la solution de ce problème soit facile, elle découle d'équations mathématiques très complexes, encore nous ne sommes que sur un problème bidimensionnel. Il existe de nombreux problèmes pour lesquels la solution théorique qui détermine l'état de contrainte et de déformation n'est pas connue vu la complexité de leurs formes géométriques ou/et de la nature du chargement parmi ces problèmes ceux de la concentration sont des plus importants du fait que la théorie de l'élasticité n'est utilisable que pour les cas simples tels, ceux du trou circulaire ou elliptique. Pour la résolution de tels problèmes, on fait appel aux méthodes expérimentales.

II.11.2 Partie expérimentale

Le même problème est traité par la photoélasticimétrie. Les expériences sont réalisées au laboratoire d'RDM de la faculté de génie mécanique de l'université de TIZI OUZOU.



Fig II-12 : Polariscope

Les expériences réalisées sont représentées par les figures suivantes :

II.11.2.a Plaque trouée sous traction uniaxiale:

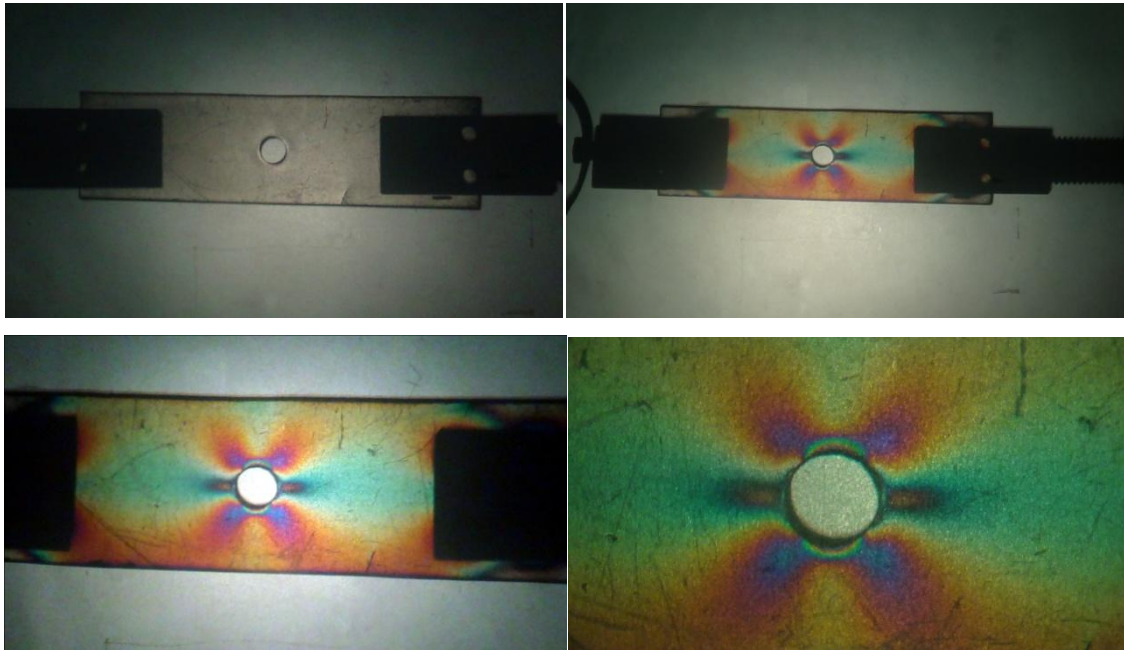


Fig II-13 : Plaque trouée sous traction uniaxiale

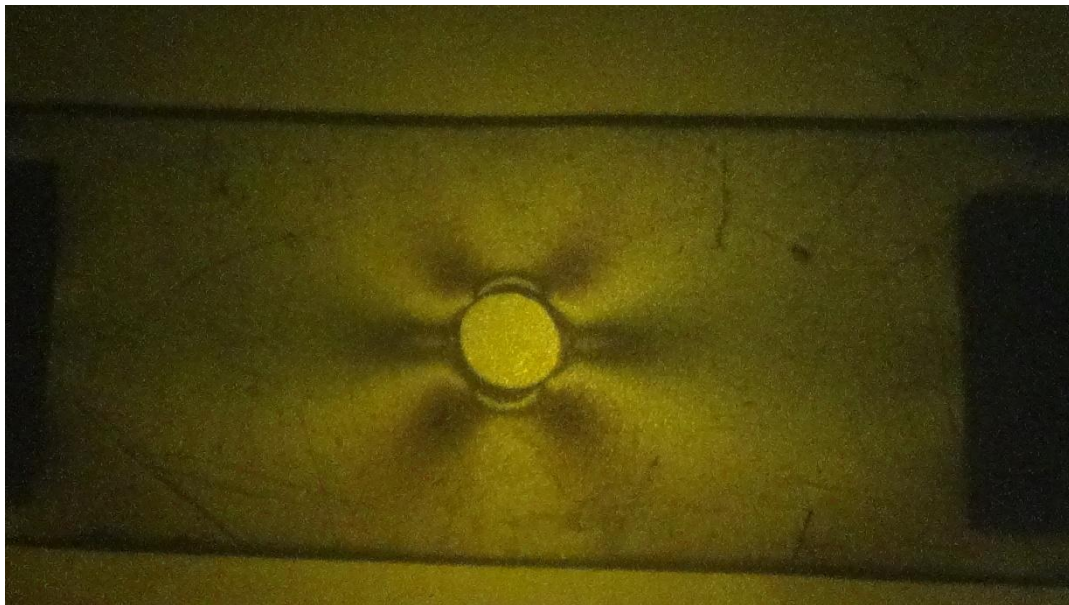
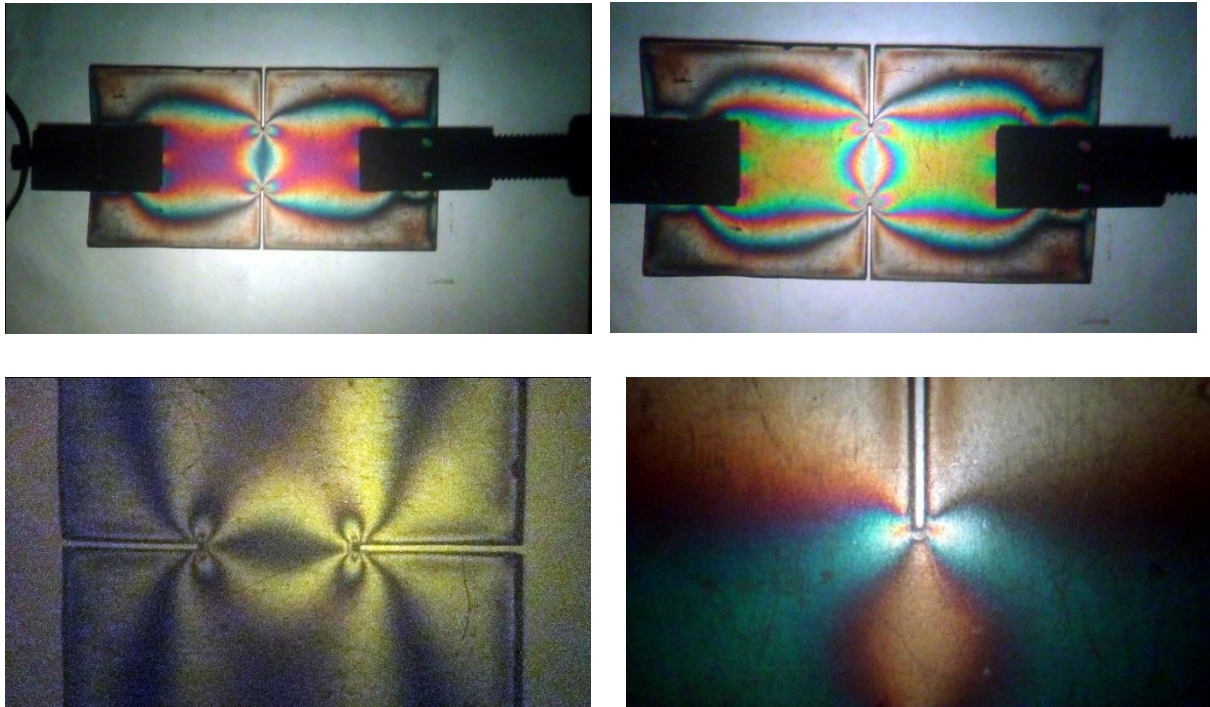
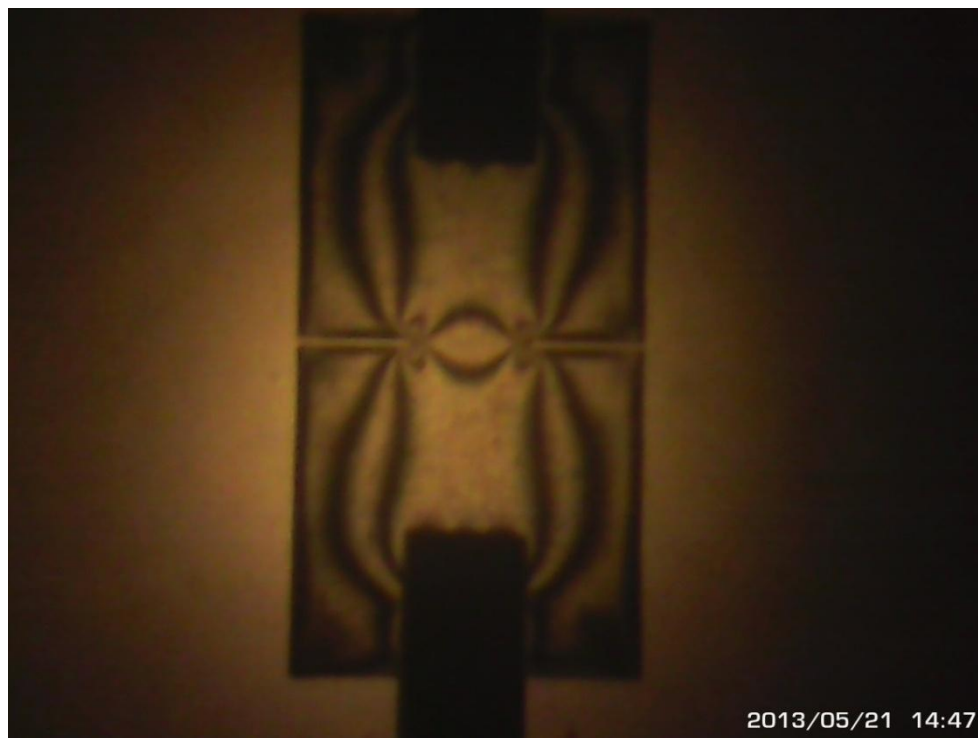


Fig II-14 : Réseau d'isochromes donné par le polariscope pour une plaque trouée en lumière monochromatique

II.11.2.b Plaque à double entailles (Double Edges Notched tension) DENT sous traction uniaxiale**Fig II-15** : Plaque à double entailles sous traction uniaxiale**Fig II-16** : Réseau d'isochromes donné par le polariscope en lumière monochromatique

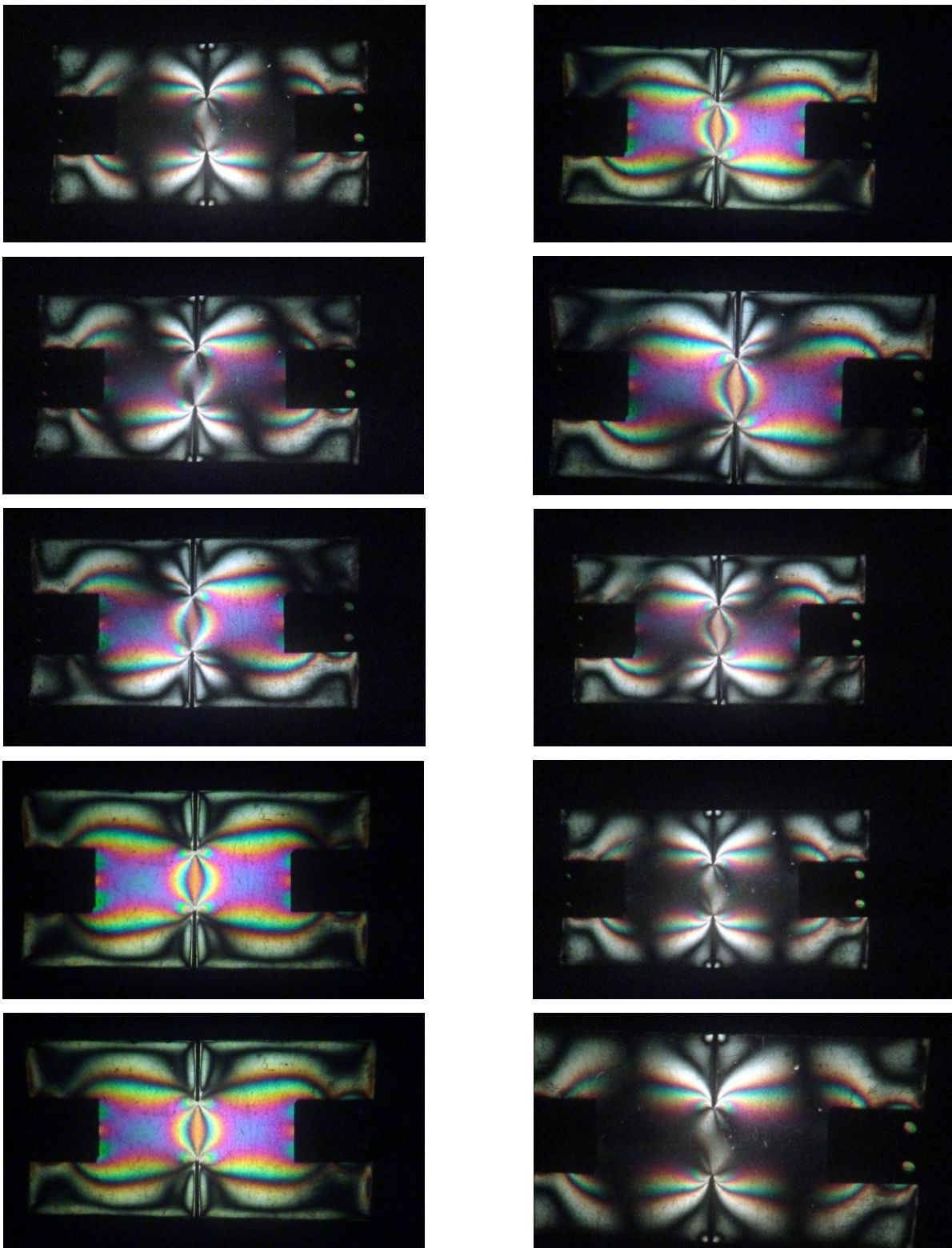


Fig II-17 : Réseau d'isoclines suivant les différentes configurations du polariscope
(0°-10°-20°-30°-40°-50°-60°-70°-80°-90°)

II.11.2.c Plaque à double entailles arrondies sous traction uniaxiale

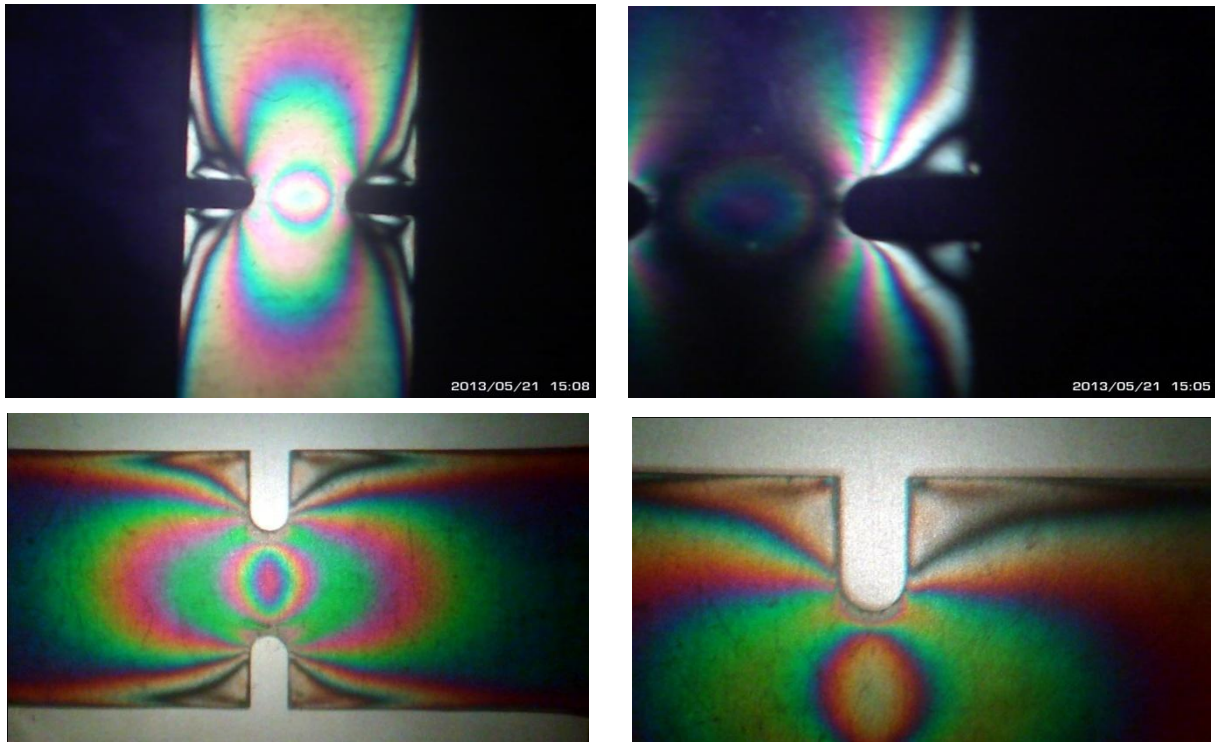


Fig II-18 : réseau d'isochromes donné pour une plaque à double entailles arrondies sous traction uniaxiale

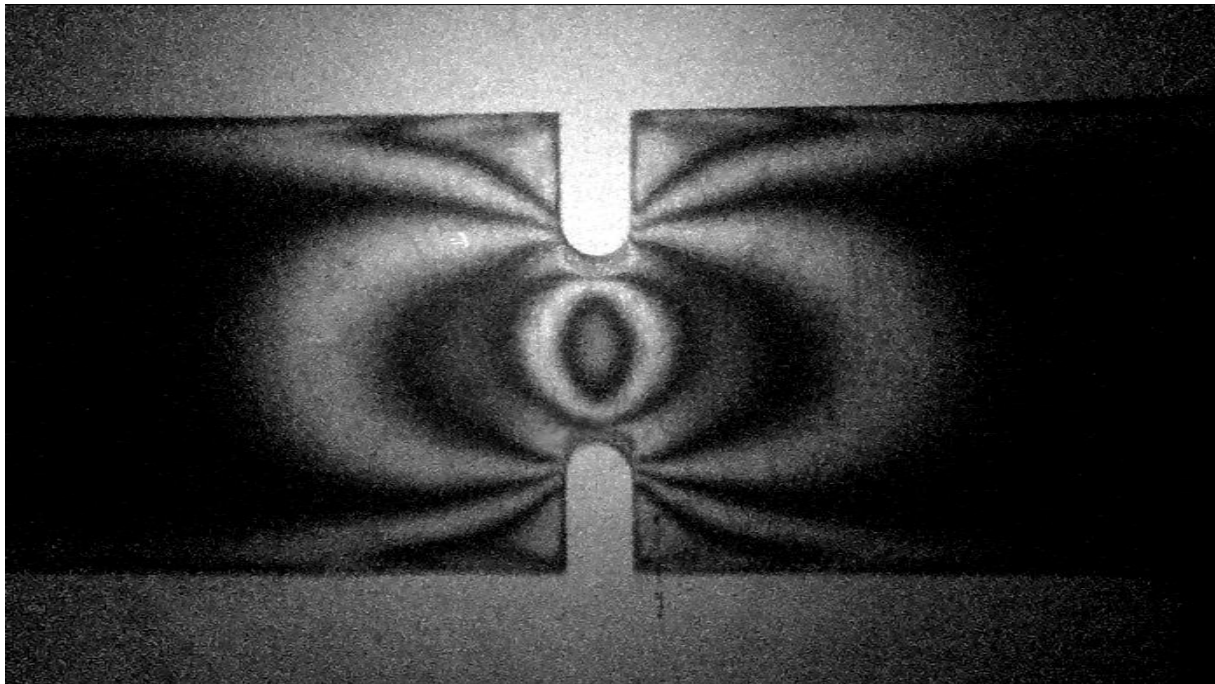
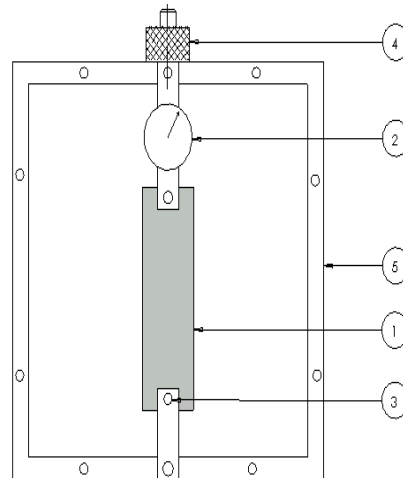


Fig II-19 : Réseau d'isochromes donné par le polariscope en lumière monochromatique

II.11.3 Calcul du facteur de concentration de contraintes par la méthode photoélastique

Dispositif de chargement

- 1. éprouvette
- 2. dynamomètre
- 3. goupille
- 4. écrou moleté
- 5. cadre de chargement

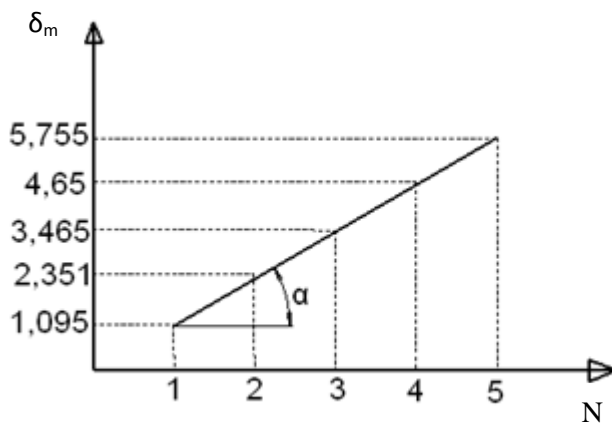


Calcul de la constante de frange, la méthode est la suivante :

Pour différent chargement on a relevé les franges suivantes:

σ_M	1.095	2.351	3.465	4.65	5.755
L'ordre N	1	2	3	4	5

Tableau II-2 : Variation du nombre de franges en fonction de la contrainte σ_M



On a: $\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \frac{Nf}{e}$

$\sigma_{\min}=0$ (pas de contraintes sur un bord libre) $\implies \sigma_M = \frac{Nf}{e}$

Avec : $\sigma M = F/S = F_{moy}/e \cdot h$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta_m}{N} = \frac{f}{e} \implies f = e \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = (4,65 - 2,351)/(4 - 2) = 1,149$$

$$f = e \cdot \operatorname{tg}\alpha = 10 \times 1,149$$

Donc $f = 11,5 \text{ N/mm}^2/\text{frange}$.

II.11.3.a Pour une plaque trouée :

La numérotation des franges isochromes s'effectue comme suit

Calcul de σ_{nom} :

$$F = \text{Lecture} \times K = 85 \times 3,563 \text{ N}$$

K : facteur d'état du dynamomètre utilisé lors de l'expérience.

$$\sigma_{nom} = \frac{F}{S} = \frac{302,85}{40 \times 10} = 0,757 \text{ N/mm}^2$$

Calcul de σ_{max} :

On distingue difficilement deux franges :

$$\sigma_{max} = \frac{Nf}{e} = \frac{1,5 \times 11,5}{10} = 1,725 \text{ N/mm}^2$$

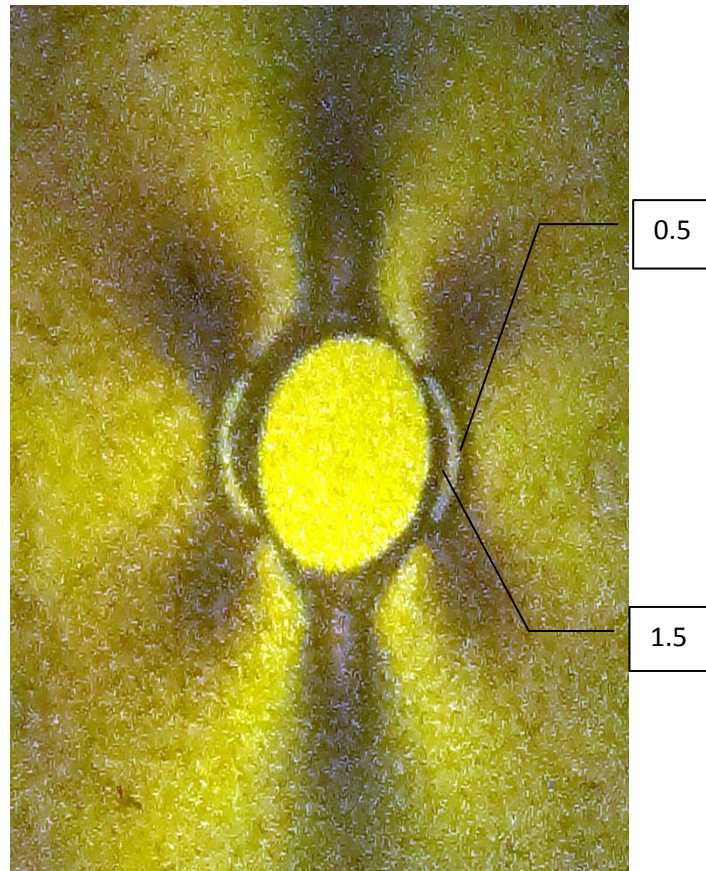
Le coefficient de concentration de contraintes :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} = \frac{1,725}{0,757} = 2,27$$

Donc pour cette plaque $K_t = 2,27$

Remarque

Le rapport du rayon du trou par la largeur de la plaque décide de la valeur du facteur de concentration de contraintes.



II.11.3.b Calcul du facteur de concentration de contraintes par la méthode photoélastique

Pour la plaque ci-contre, la numérotation des franges isochrome s'effectue de la sorte

Calcul de σ_{nom} :

$$F = \text{Lecture} \times K = 213 \times 3.563\text{N}$$

K : facteur d'état du dynamomètre utilisé lors de l'expérience.

$$\sigma_{nom} = \frac{F}{S} = \frac{758.92}{40 \times 10} = 1.897\text{N/mm}^2$$

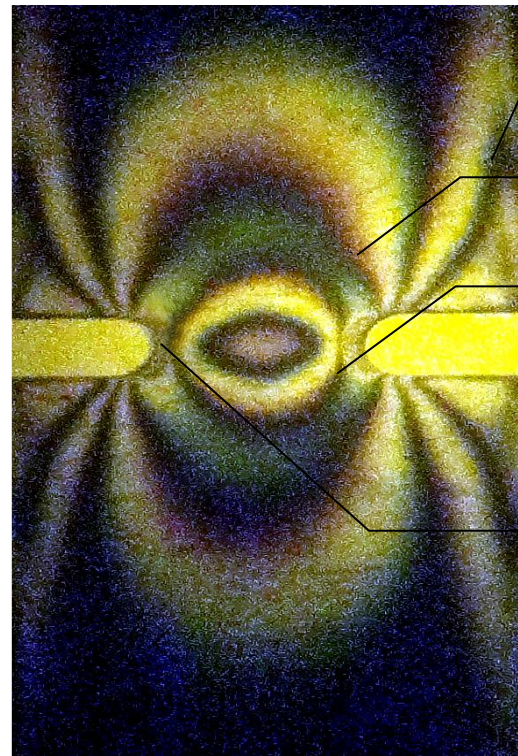
Calcul de σ_{max} :

$$\sigma_{max} = \frac{Nf}{e} = \frac{4.5 \times 11.5}{10} = 5,175\text{N/mm}^2$$

Le coefficient de concentration de contraintes :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} = \frac{5,175}{1.897} = 2,72$$

$$\mathbf{K_t = 2,72}$$



1.5

0.5

2.5

3.5

4.5

II.11.3.c Pour une plaque DENT :

Pour la plaque DENT, la numérotation d'isochrome s'effectue toujours de la sorte

Calcul de σ_{nom} :

$$F = \text{Lecture} \times K = 168 \times 3.563N$$

K : facteur d'état du dynamomètre utilisé lors de l'expérience.

$$\sigma_{nom} = \frac{F}{S} = \frac{598.58}{60 \times 10} = 0.998N/mm^2$$

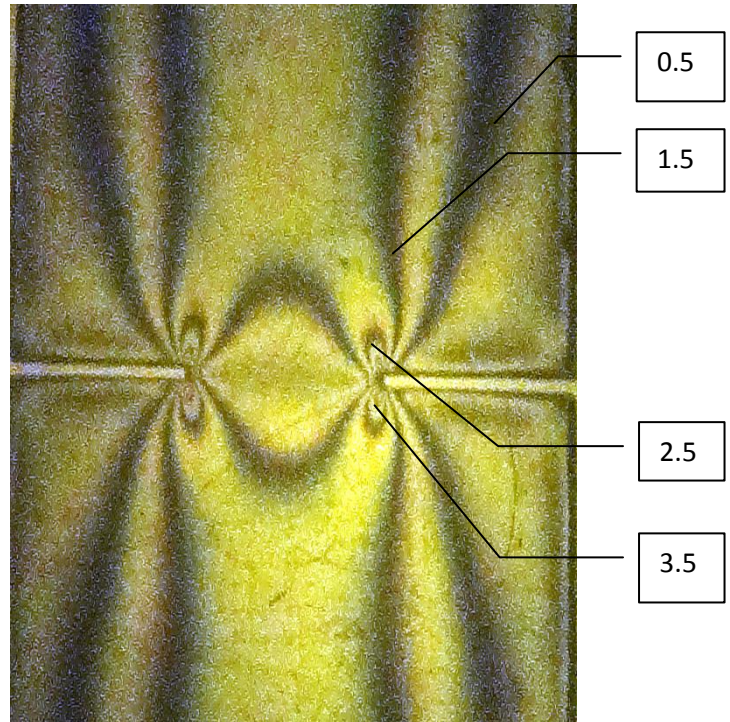
Calcul de σ_{max} :

$$\sigma_{max} = \frac{Nf}{e} = \frac{3.5 \times 11.5}{10} = 4.025N/mm^2$$

Le coefficient de concentration de contraintes :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} = \frac{4.025}{0.998} = 4.03$$

$$K_t = 4.03$$



Remarque

Comme on peut le constater, le facteur de concentration de contraintes est important sur la plaque DENT qui comprend des entailles aiguës que sur une plaque qui présente des entailles arrondies.

II.12 Partie numérique

II.12.1 Les résultats obtenus pour la simulation CASTEM ; plaque trouée sous traction uniaxiale

II.12.1.a Géométrie et maillage

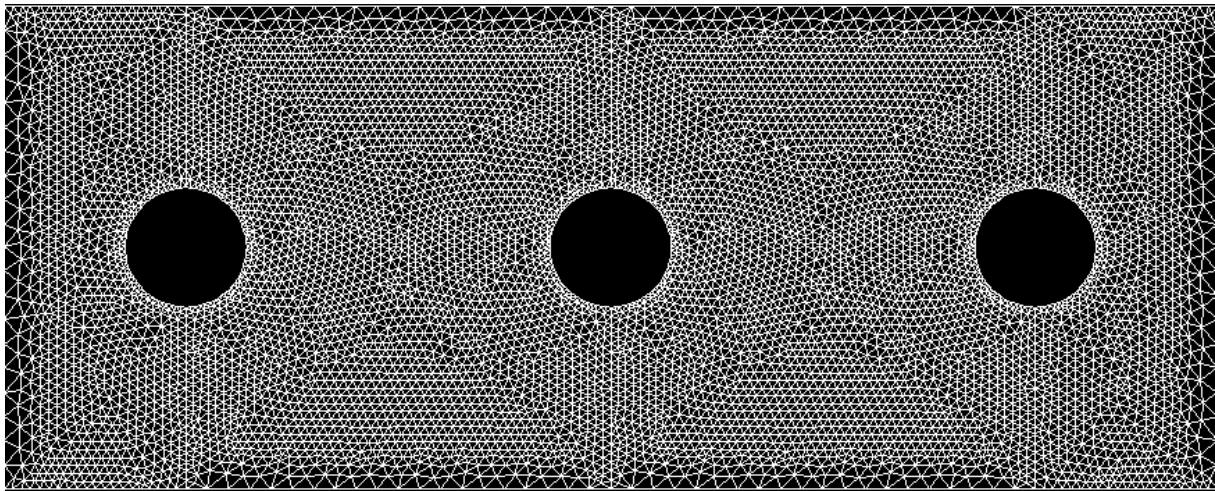


Fig II-20 : Elément de maillage d'une plaque trouée

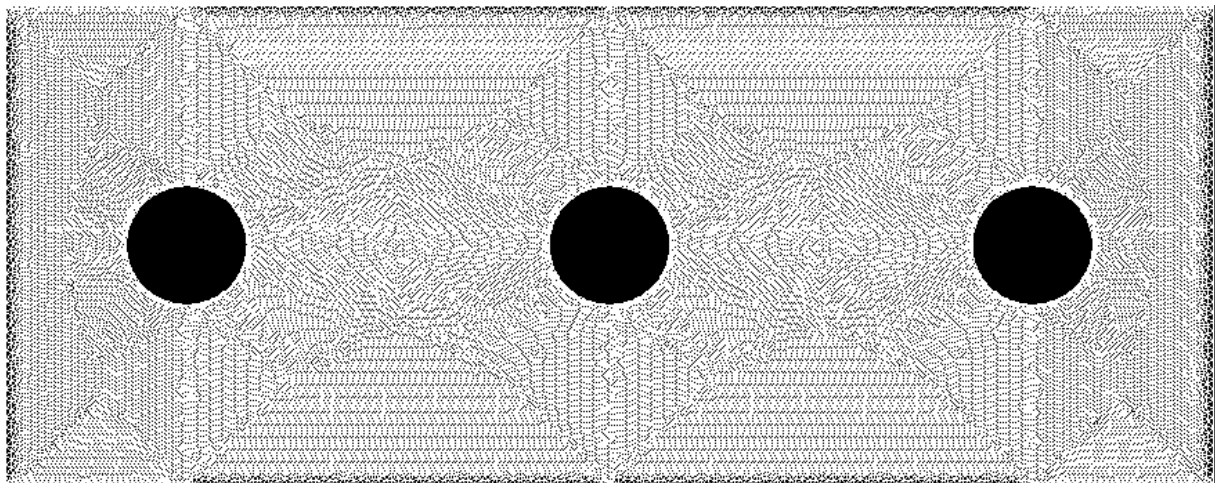


Fig II-20 : Elément de maillage d'une plaque trouée après raffinage

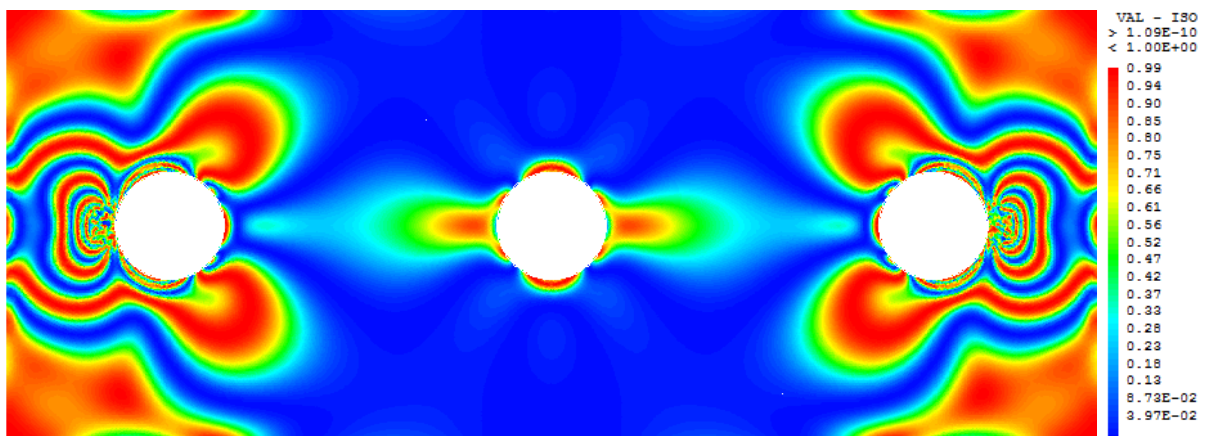


Fig II-21: Le réseau d'isochromes donné par CASTEM pour une plaque trouée

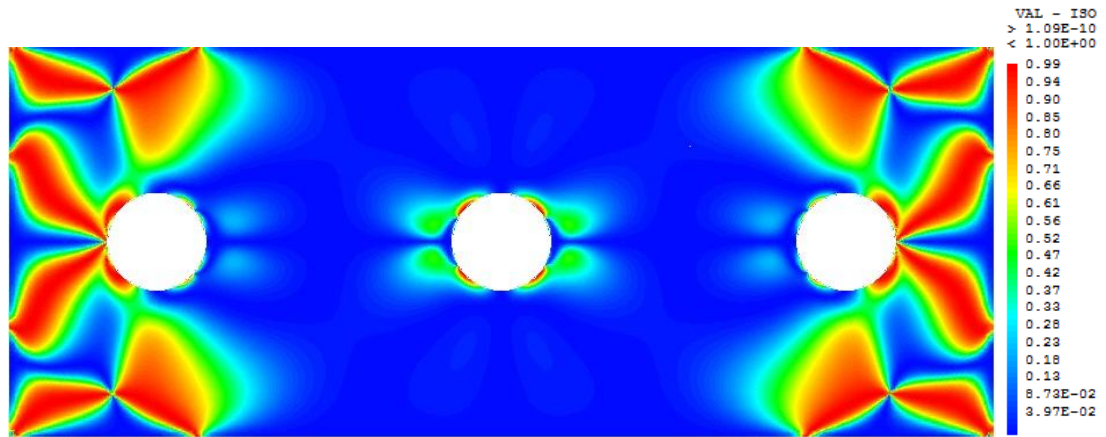


Fig II-22: Le réseau d'isoclines donné par CASTEM pour une plaque trouée

II.12.1.b Evolution de contrainte suivant X calculée à partir de CASTEM pour une plaque trouée

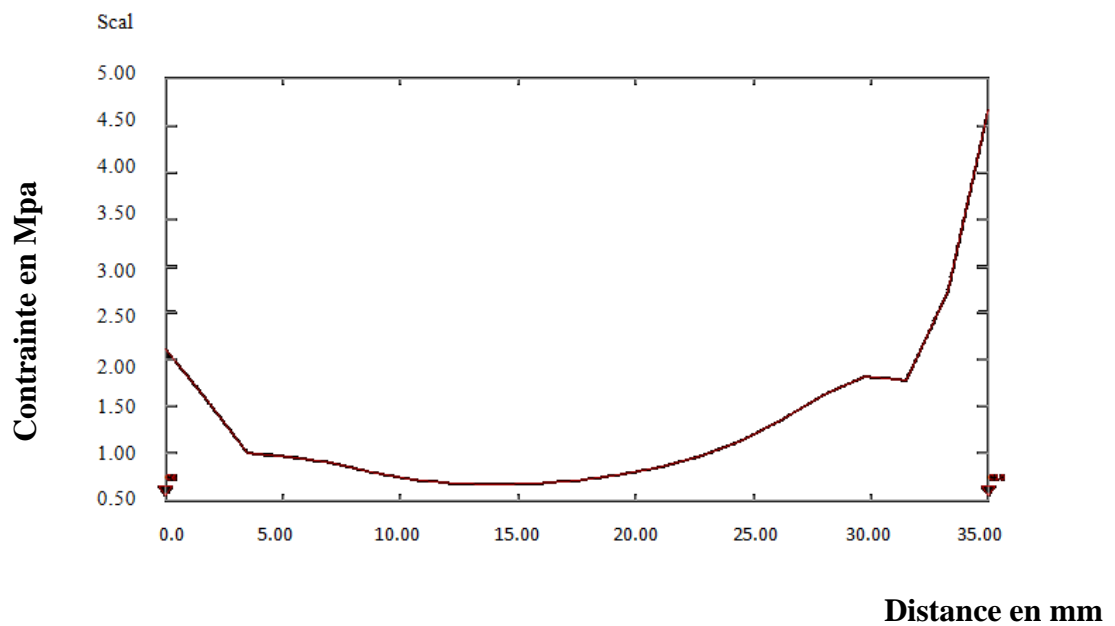
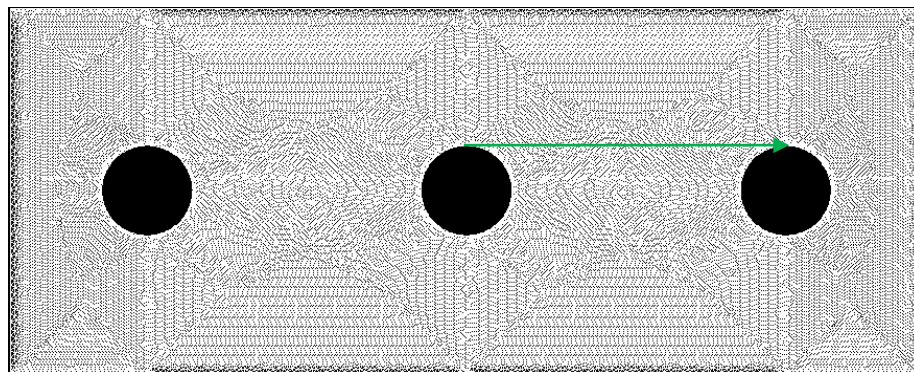


Fig II-23: Graphe d'évolution de contraintes suivant X (la ligne verte)

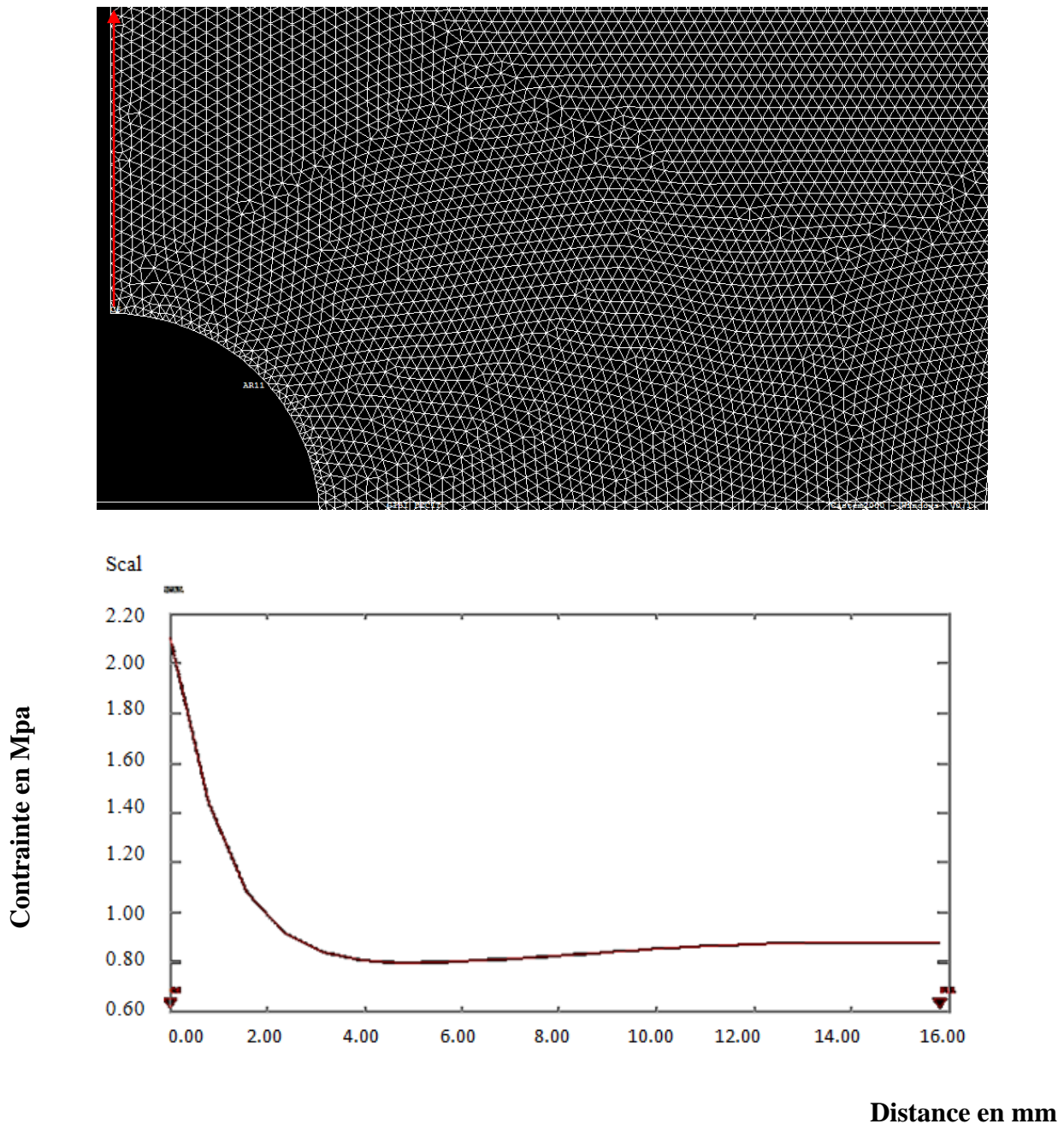


Fig II-24: Graphe d'évolution de contrainte suivant Y (l'abscisse rouge) près de la zone trouée tracé par CASTEM

Interprétation du graphe

Dans le graphe II-23, on distingue trois zones, l'explication est la suivante, dans un premier lieu, des contraintes importantes caractérisent la zone près du trou à cause du phénomène de concentration de contraintes, ensuite elles reprennent leur valeur nominale quand la section devient constante puis remontent à cause des concentrations infligées par le trou conçue pour le chargement.

La figure II-24 montre qu'au voisinage du trou et suivant l'axe Y, la contrainte est remarquablement supérieure à la contrainte nominale. Et ceci est dû bien sûr au phénomène de concentration de contraintes. Le facteur de concentration de contrainte sera calculé plus tard.

II.12.1.c Evolution de contrainte suivant Y calculée à partir de CASTEM pour une plaque trouée

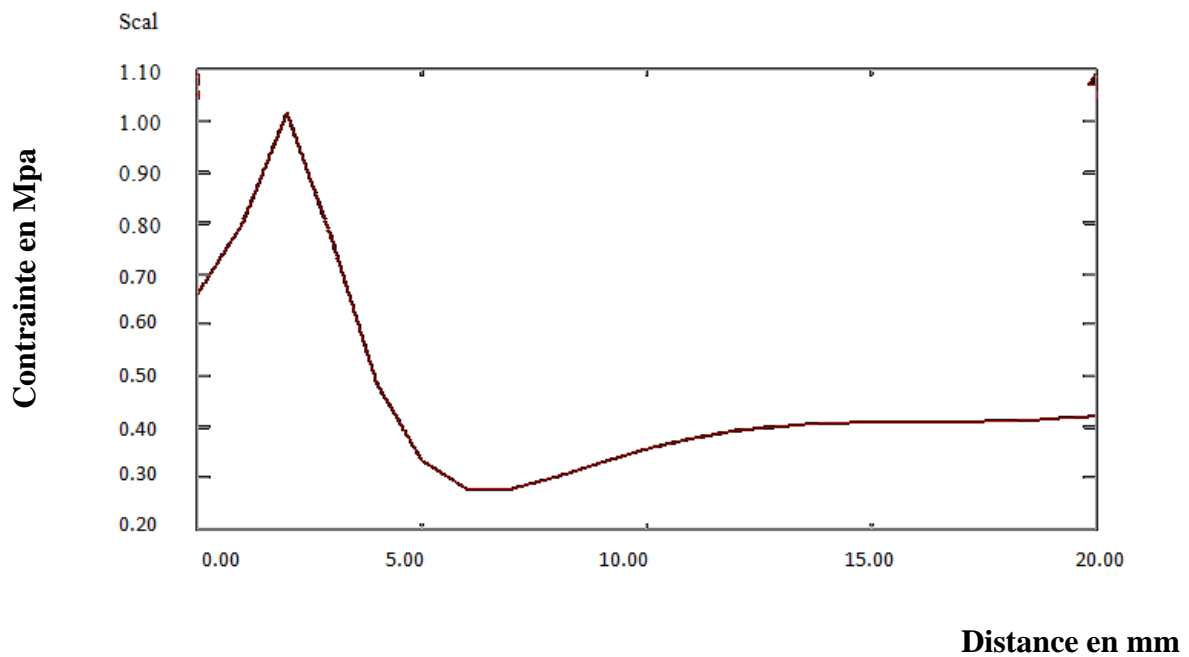
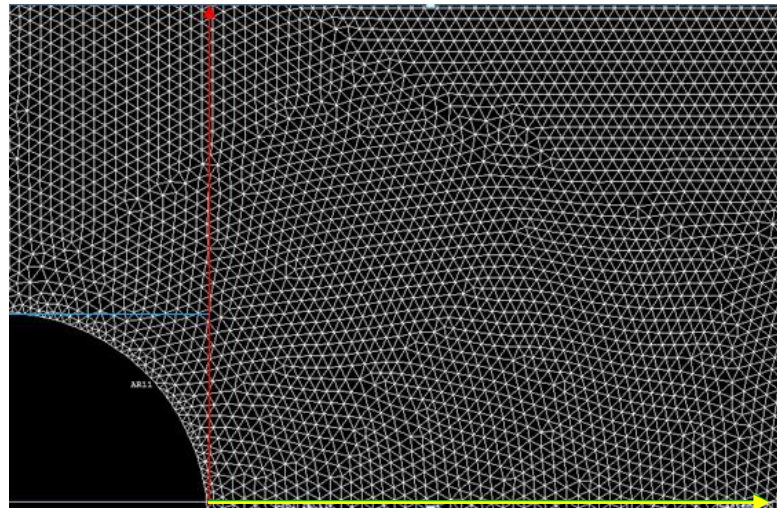


Fig II-25 : Graphe d'évolution de contraintes suivant (l'abscisse jaune) sur X

Interprétation du graphe

Trois zones se distinguent du graphe II-25, on note une augmentation de contrainte sur la zone délimitée par la ligne bleu, cette zone présente des contraintes importantes à cause du phénomène de concentration de contraintes mais dès que la section se rétablie, la contrainte reprend sa valeur nominale.

II.12.1.d Facteur de concentration de contrainte à partir de CASTEM

```

castem11 C:\Users\micromedia\Desktop\prog castem\plaque troué.txt
Sous évolution numéro 1 de couleur ROUG
TRACE DE LA COMPOSANTE SCAL DU CHAMP-POINT COMPTOM LE LONG DE LX
Variable en abscisse ABS
Variable en ordonnée < REEL > SCAL
Nombre de points : 11
 1  0.00000E+00  6.41240E-01
 2  3.44740E-01  4.64417E-01
 3  6.89479E-01  3.31418E-01
 4  1.03422E+00  2.43440E-01
 5  1.37896E+00  1.96799E-01
 6  1.72370E+00  1.74181E-01
 7  2.06844E+00  1.68750E-01
 8  2.41318E+00  1.70842E-01
 9  2.75792E+00  1.82834E-01
10  3.10266E+00  1.95137E-01
11  3.44740E+00  2.18124E-01
Sous évolution numéro 2 de couleur ROUG
POINTS NOMMES APPARTENANT A LA LIGNE
Variable en abscisse ABS
Variable en ordonnée < MARQ > SCAL
Nombre de points : 2
 1  0.00000E+00  C7
 2  3.44740E+00  P29
    
```

Fig II-26 : Valeurs de contraintes relevées suivant l’axe X sur la zone près du trou

II.12.1.e Calcul du facteur de concentration de contrainte par Castem :

```

castem11 C:\Users\micromedia\Desktop\prog castem\plaque troué.txt
Sous évolution numéro 2 de couleur ROUG
POINTS NOMMES APPARTENANT A LA LIGNE
Variable en abscisse ABS
Variable en ordonnée < MARQ > SCAL
Nombre de points : 2
 1  0.00000E+00  C7
 2  3.44740E+00  P29
*****
* calcul du facteur de concentration de contrainte Kt
*
* suivant la table des contraintes donnée par castem
*
* SMAX=6.412E-1;
* SNOM=2.37E-1;
* kt=SMAX/SNOM;
* LIST kt;
*
* Réel valant: 2.7055
*
* Evolutions des contraintes Sx Sy suivant Y
*
*
* SMAX=DIFCONTR;
* P11=55.40.;
* LK=C7 DROI 20 P11;
    
```

Comme c’est affiché sur la fenêtre des résultats de Castem : $K_t = 2.705$

Calcul de l’écart entre la valeur expérimentale et le résultat retrouvé par la méthode des éléments finis

$$E = \frac{K_{t\ MEF} - K_{t\ exp}}{K_{t\ MEF}} = \frac{|2.70 - 2.27|}{2.70} \times 100 = 15.92\%$$

L'écart entre K_t expérimentale et le résultat retrouvé par la méthode des éléments finis pour une plaque trouée est de 15.92% .

II.12.2 Simulation CASTEM ; plaque avec encoches arrondies soumise à une traction

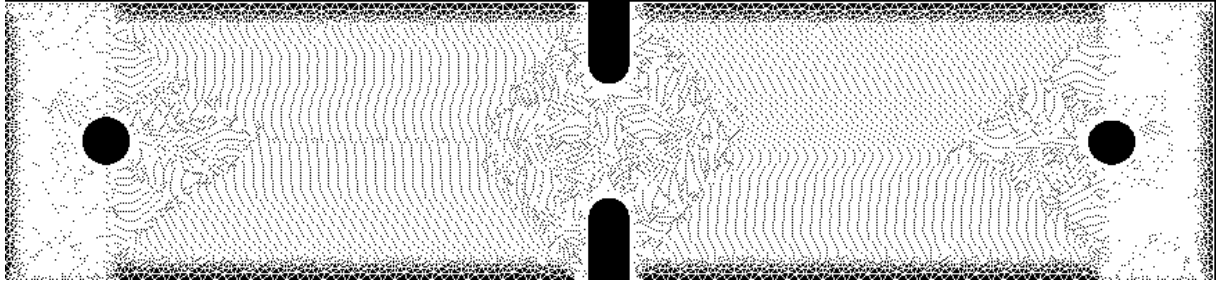


Fig II-27: Géométrie et maillage

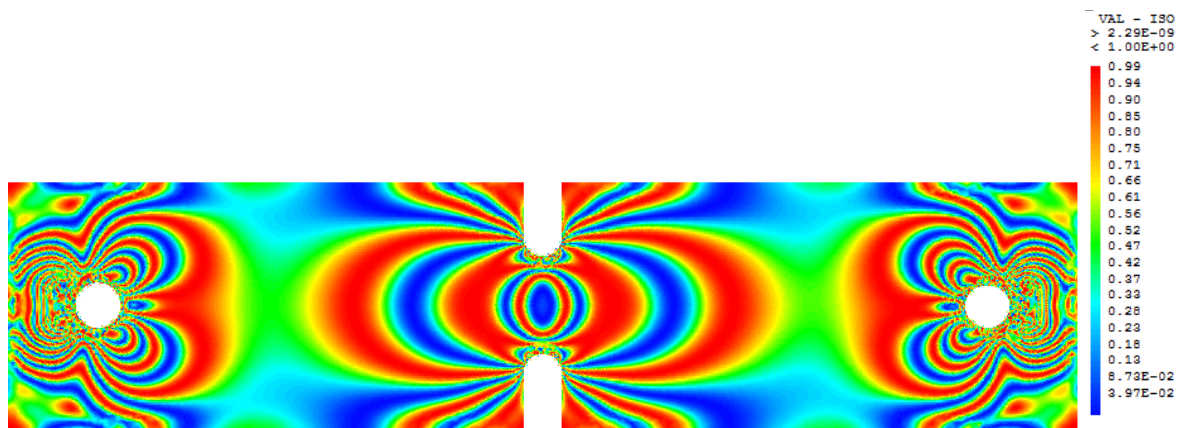


Fig II-28 : Réseau d'isochromes donné par CASTEM pour une plaque avec entailles arrondies

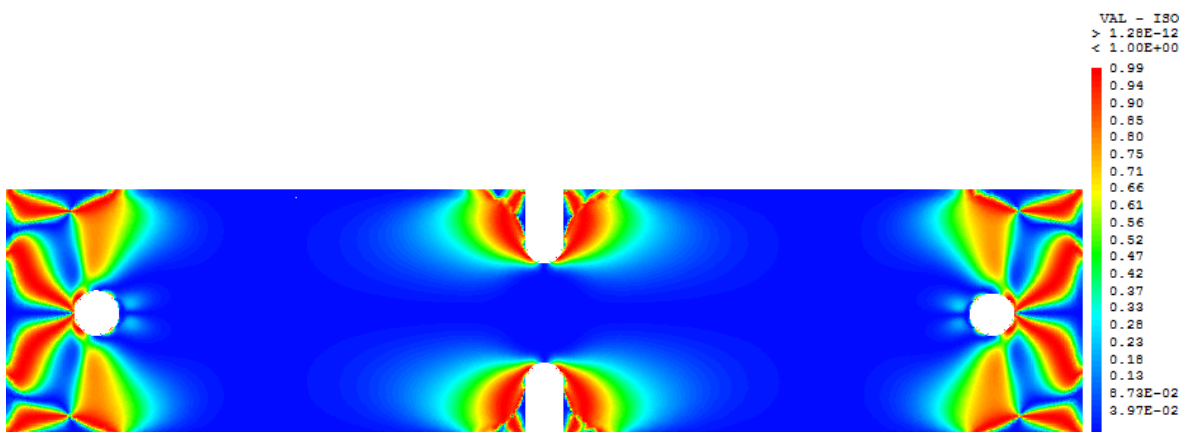


Fig II-29 : Le réseau d'isoclines donné par CASTEM pour une plaque avec entailles arrondies

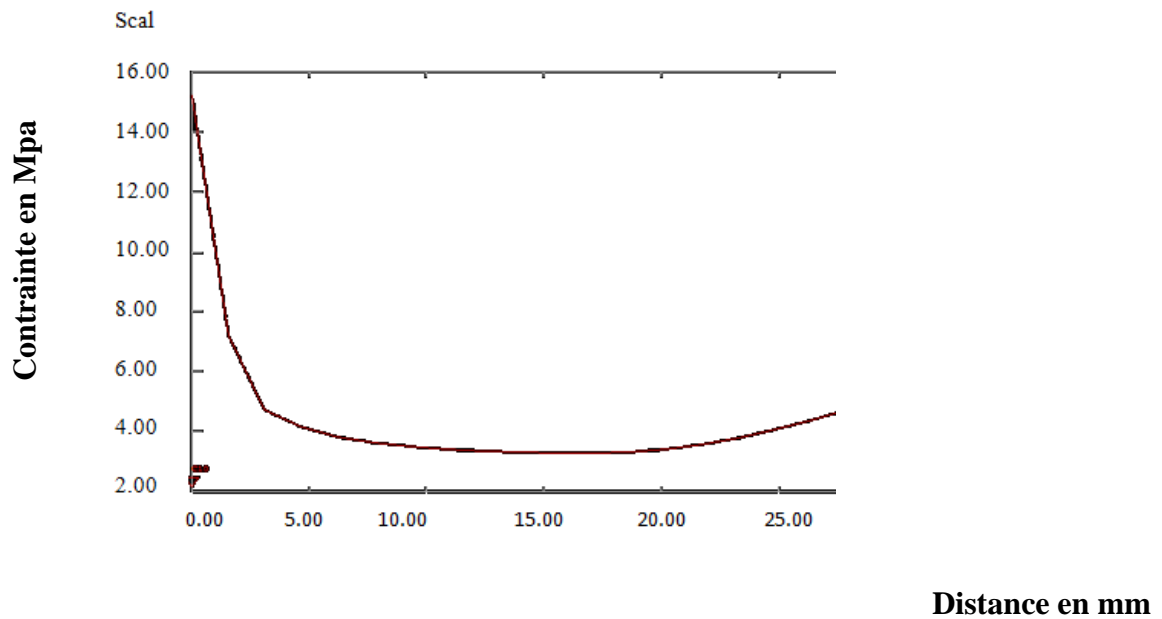


Fig II-30 : Graphe d'évolution de contrainte au niveau de l'encoche suivant X calculée à partir de CASTEM pour une plaque avec entailles arrondies

Interprétation du graphe

Le graphe indique une importante contrainte au niveau de l'entaille qui est causée par le phénomène de concentration de contraintes. Mais de plus en plus on s'éloigne de celle-ci (l'entaille), les contraintes diminuent.

L'évolution des contraintes suivant l'axe Y au niveau des encoches (la zone présentée par la flèche rouge) est donnée par le graphe au-dessous (**Fig 11-31**).

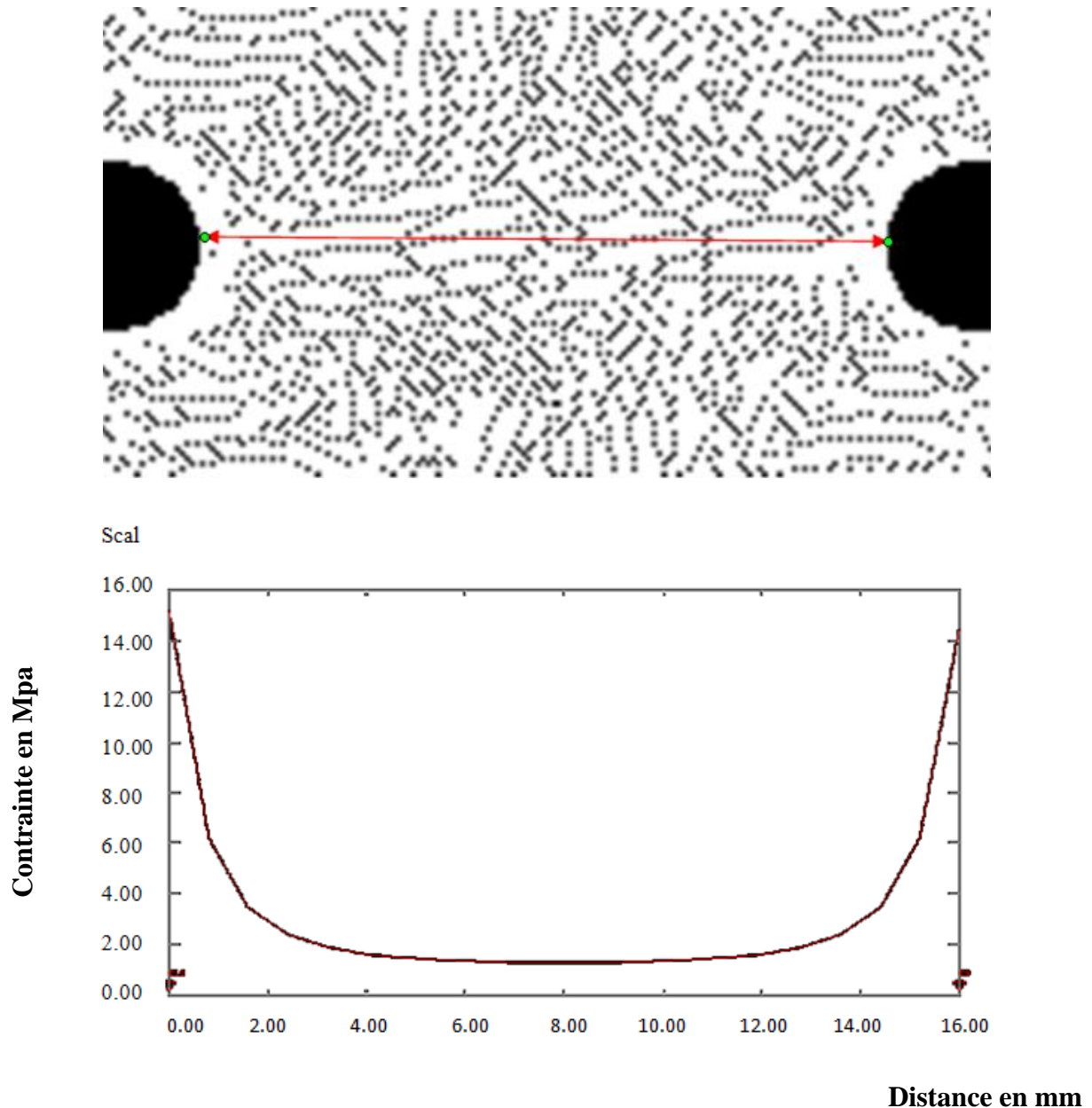


Fig II-31 : Graphe d'évolution de contrainte au niveau de l'Entaille suivant Y calculée à partir de CASTEM pour une plaque avec entailles arrondies

Interprétation du graphe

Ce graphe indique des contraintes importantes au niveau des entailles qui sont causées par le phénomène de concentration, mais elles reprennent leur valeur normale lorsque la section devient constante.

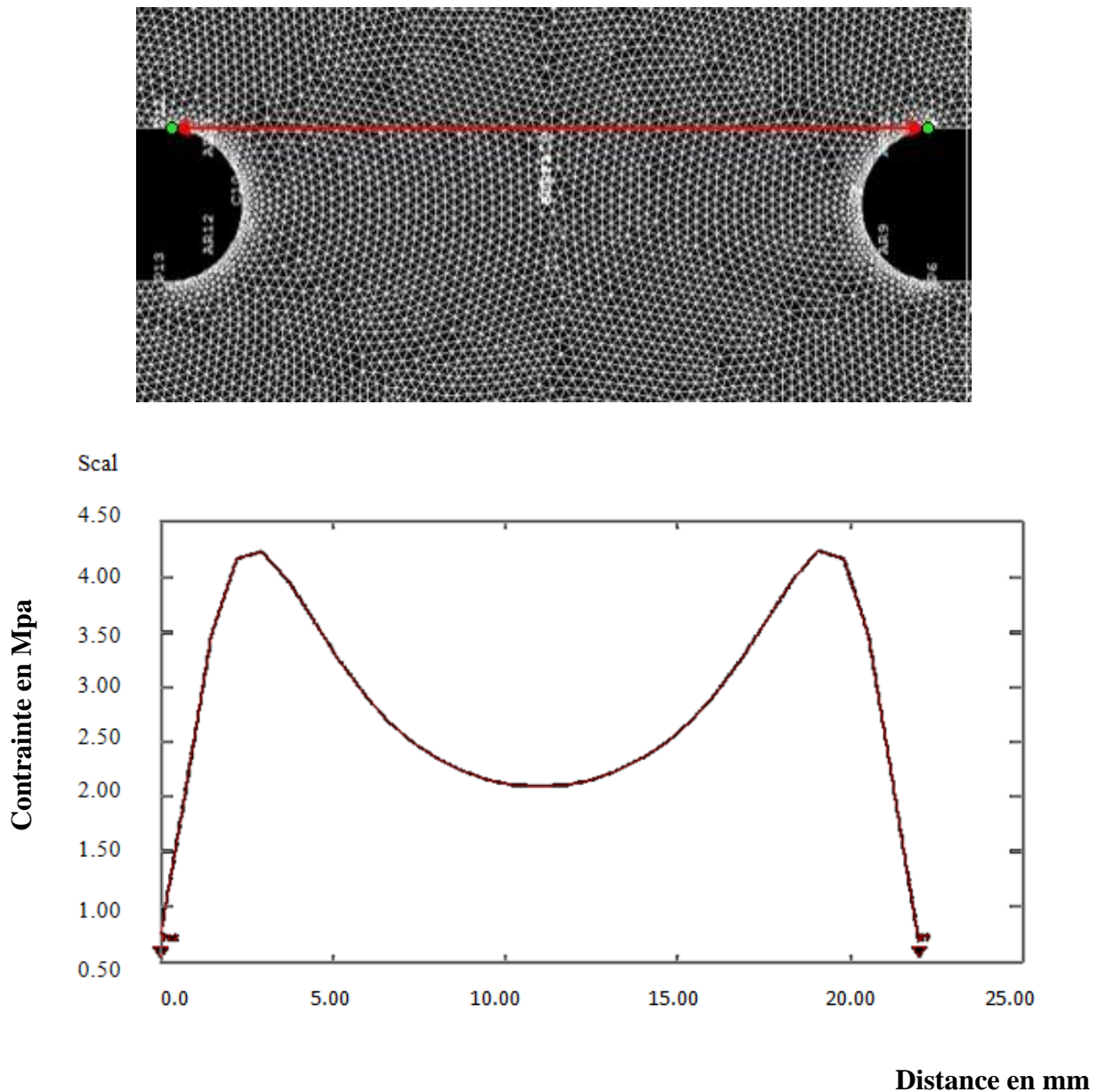


Fig II-32 : Graphe d'évolution de contrainte au niveau de l'entaille suivant Y calculée à partir de CASTEM pour une plaque avec entailles arrondies

Interprétation des graphes

Le graphe **II-31** représente une évolution des contraintes qu'on peut diviser en trois parties, la première entaille: la variation de section entraîne un pic qui illustre la concentration de contrainte relevée sur cette zone, puis elle diminue lorsque la section devient ininterrompue, ensuite le même pic se reproduit au niveau de la deuxième entaille, et c'est le phénomène de concentration de contraintes qui est à l'origine de cette variation.

II.12.2.d Calcul du facteur de concentration de contrainte par Castem :

```

castem11 CAUsers\micromedia\Desktop\prog castem\PLAQUE DENT U.bt
7 2.21269E+01 2.78416E+00
8 2.58147E+01 2.57045E+00
9 2.95025E+01 2.38051E+00
10 3.31904E+01 2.22555E+00
11 3.68782E+01 2.11059E+00
Sous évolution numéro 2 de couleur ROUG
POINTS NOMMES APPARTENANT A LA LIGNE
Variable en abscisse ABS
Variable en ordonnée < MARQ > SCAL
Nombre de points : 2
1 0.00000E+00 C10
2 3.68782E+01 P
*
*
*
*calcul du facteur de concentration de contrainte Kt
*
*suivant la table des contraintes donnée par castem
*
* SMAX=4.23;
* SNOM=1.897;
* kt=SMAX/SNOM;
* LIST Kt:
Rue1 valant 2.2298
*

```

La fenêtre des résultats Castem affiche $K_t = 2.23$

Calcul de l'écart entre la valeur expérimentale et le résultat retrouvé par la méthode des éléments finis

$$E = \frac{K_{t\ MEF} - K_{t\ exp}}{K_{t\ MEF}} = \frac{|2.23 - 2.41|}{2.23} \times 100 = 8.07\%$$

L'écart entre K_t expérimentale et le résultat retrouvé par la méthode des éléments finis pour une plaque a entailles arrondies est de 8.07%.

II-3-3 Les résultats obtenus pour la simulation CASTEM; plaque DENT sous traction uniaxiale

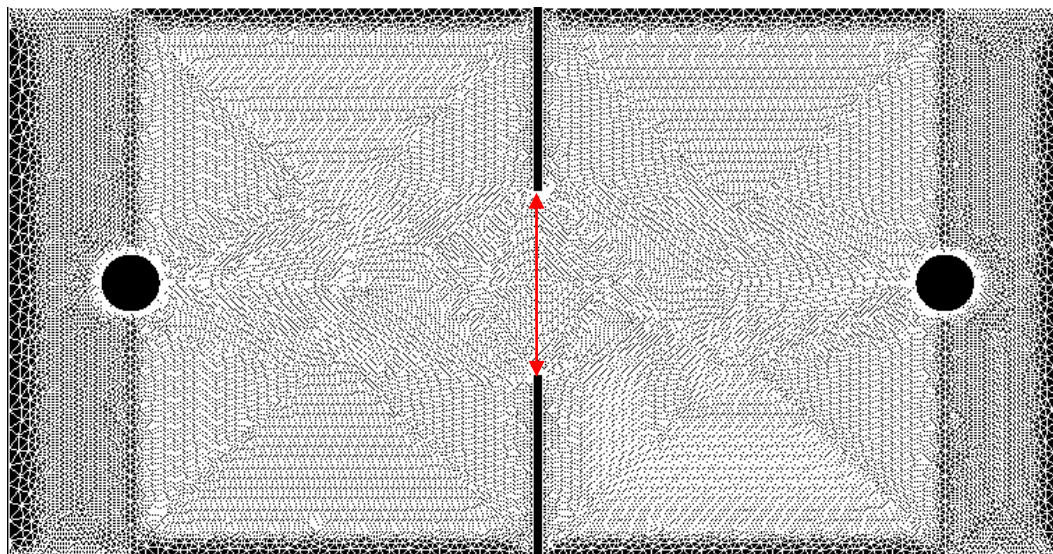


Fig II-33 : Plaque DENT : géométrie et maillage

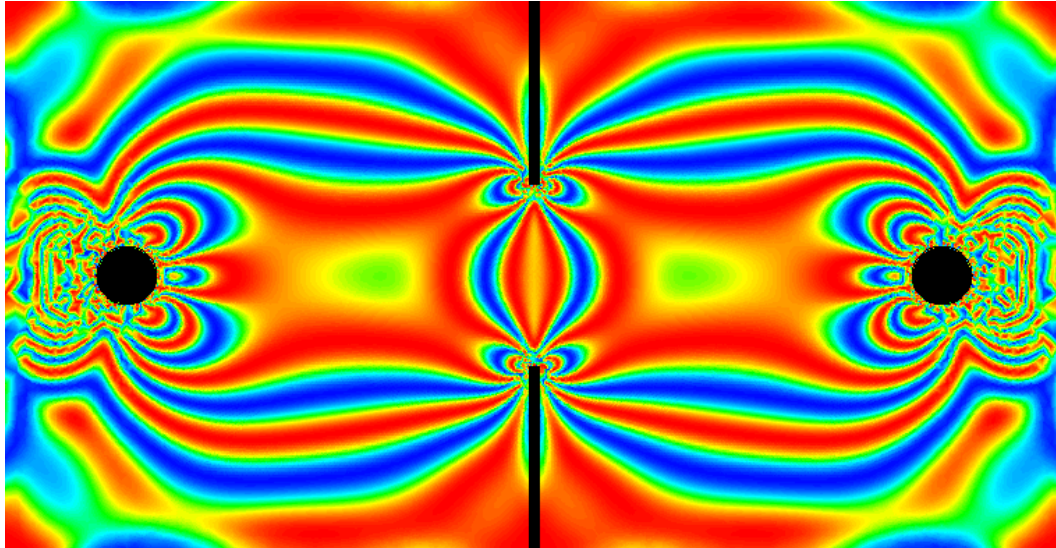


Fig II-34: Réseau d'isochromes donné par CASTEM pour une plaque DENT

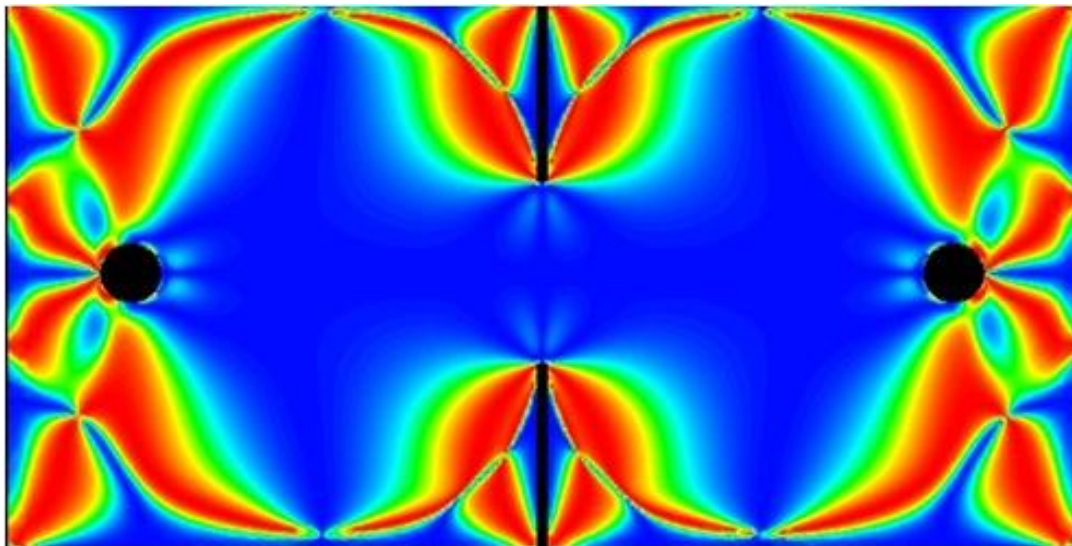


Fig II-35: Le réseau d'isoclines donné par CASTEM pour une plaque DENT sous traction

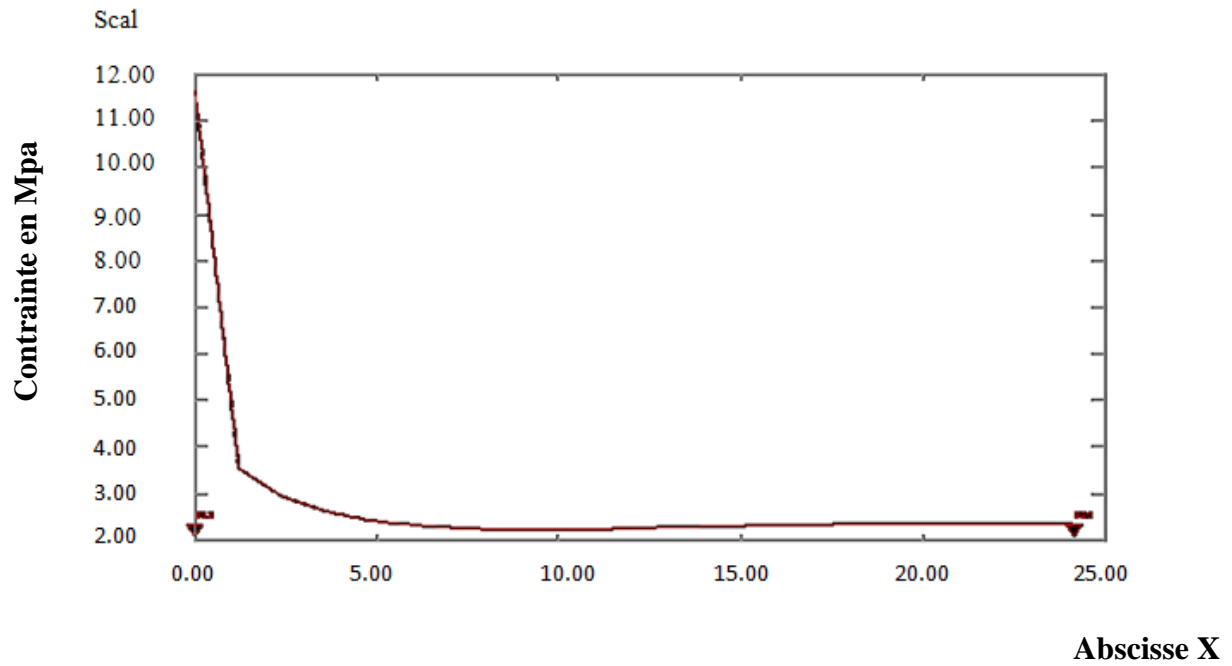


Fig II-36 : Graphe d'évolution de contrainte au niveau de l'encoche suivant X calculée à partir de CASTEM pour une plaque DENT

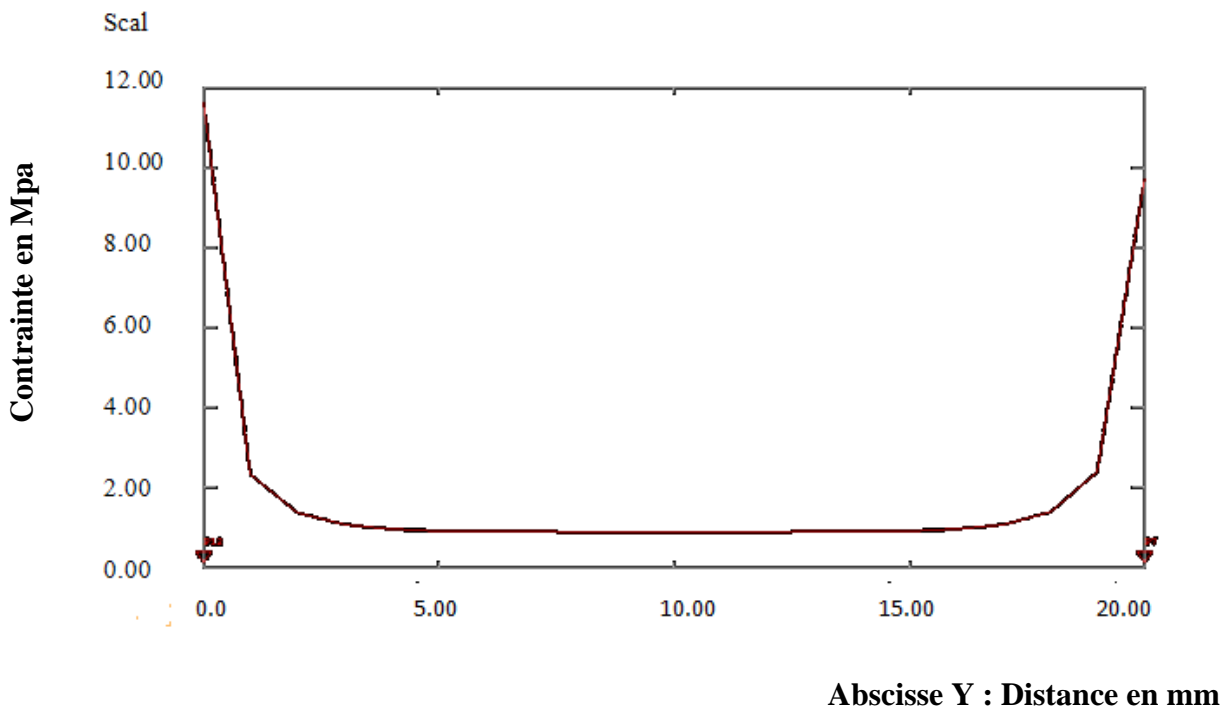


Fig II-37 : Graphe d'évolution de contrainte au niveau des encoches suivant Y calculée à partir de CASTEM pour une plaque DENT

Interprétation des graphes

La Figure II-36 représente l'évolution des contraintes au niveau de l'encoche suivant X, le graphe est fractionné en deux parties, la zone entaillée qui présente une concentration importante de contraintes due à l'irrégularité de la section (entailles aigues), ensuite les contraintes recouvrent des valeurs relativement inférieures la section devient constante.

La Figure II-37 représente l'évolution des contraintes suivant Y dans la partie entaillée, comme on peut le constater, les contraintes atteignent des valeurs maximums au niveau des encoches et leurs formes aigues n'ont fait qu'accroître le phénomène de concentration de contraintes.

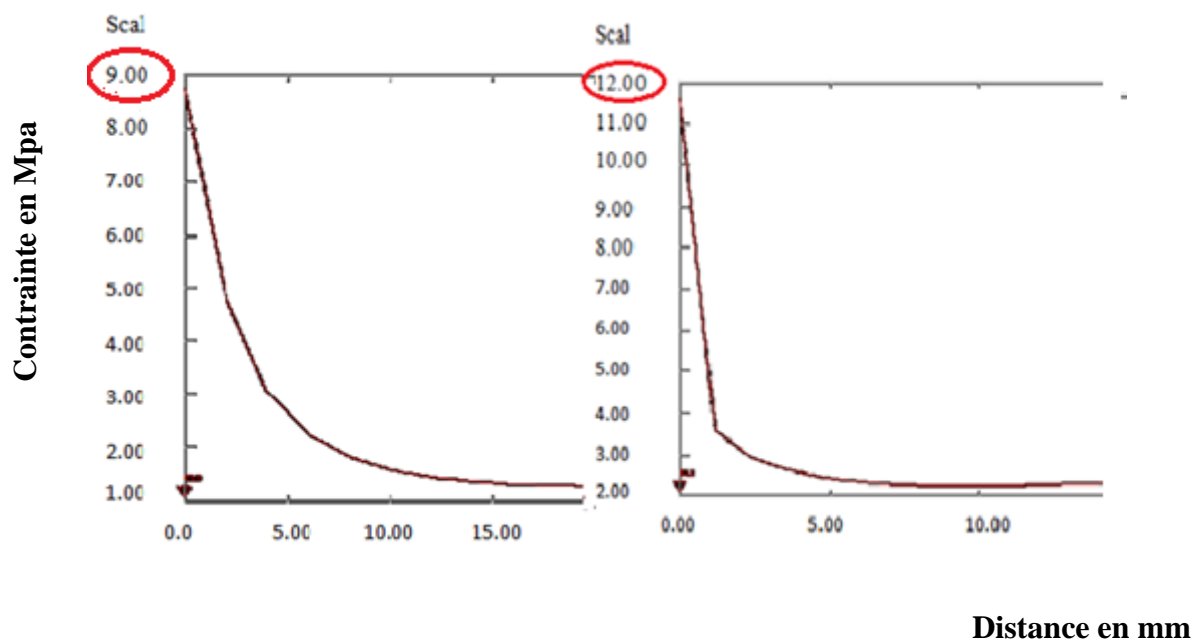


Fig II-38 : Graphe d'évolution des contraintes pour la plaque DENT et la plaque avec encoches arrondies.

La figure à gauche représente l'évolution des contraintes pour une plaque à double entailles arrondies, à droite, l'évolution de contrainte pour une plaque DENT, comme on peut le constater sur les figures, les contraintes sont beaucoup plus importantes sur la plaque qui comporte des entailles aigues que sur celle qui comprend des entailles arrondies, c'est le même résultat trouvé par la méthode expérimentale.

II-12-3.d Facteur de concentration de contrainte calculé par Castem

```

castem11 C:\Users\micromedia\Desktop\prog castem\plaqua dent.txt
1 0.00000E+00 P12
2 2.00000E+01 P7
*
*
* *****
* *calcul du facteur de concentration de contrainte Kt
* *****
* *suivant la table des contraintes donnée par castem
*
* SMAX=11.63;
* SNOM=3.18;
* kt=SMAX/SNOM;
* LIST Kt;
RÙel valant 3.6572
*
* *suivant X ET Y
*
* SMAX=DIFCONTR;
* P= 19.40.;
* LT=P3 DROI 5 P;
* COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LT;
* EUOL3=EUOL ROUGE 'CHPO' LT COMPTOM;
* DESS EUOL3;

```

La fenêtre des résultats Castem affiche $K_t = 3.66$

Calcul de l'écart entre la valeur expérimentale et le résultat retrouvé par la méthode des éléments finis

$$E = \frac{K_{t \text{ exp}} - K_{t \text{ MEF}}}{K_{t \text{ exp}}} = \frac{|4.03 - 3.66|}{4.03} \times 100 = 9.18\%$$

L'écart entre K_t expérimentale et le résultat retrouvé par la méthode des éléments finis pour une plaque a entailles DENT (double edge noched tension) est de 9.18%.

II.12.4 Résultats obtenus pour la simulation CASTEM; plaque fissuré sous traction uniaxiale (mode d'ouverture).

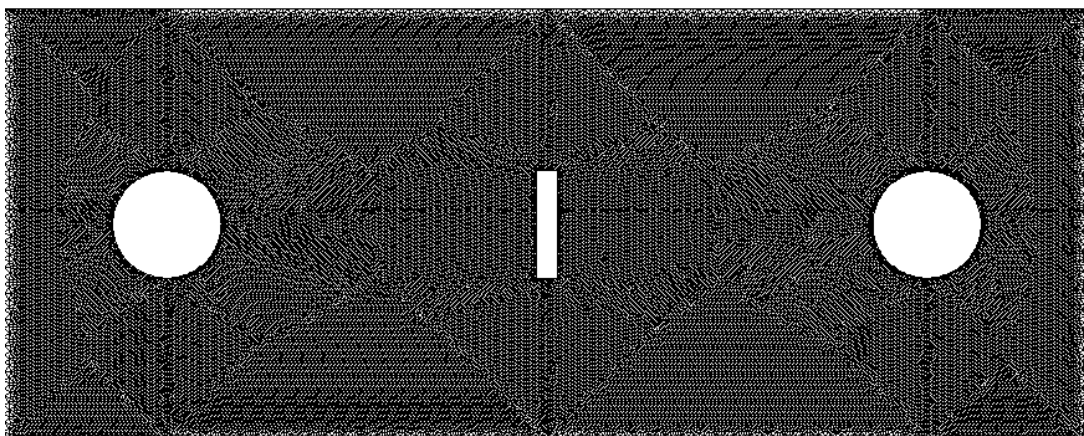


Fig II-39 : Géométrie et maillage

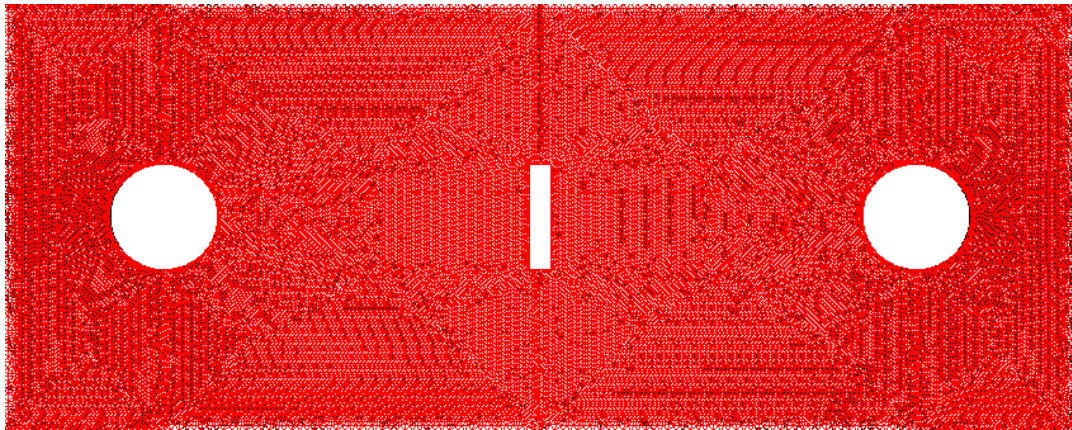


Fig II-40: Cartographie de déformation d'une plaque fissurée sous traction uniaxiale

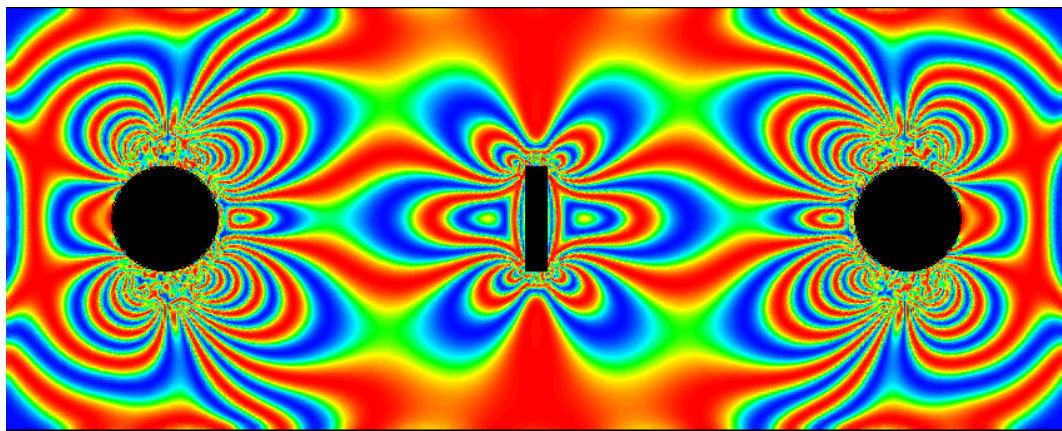


Fig II-41 : Réseau d'isochromes donné par CASTEM pour une plaque fissurée sous traction uniaxiale

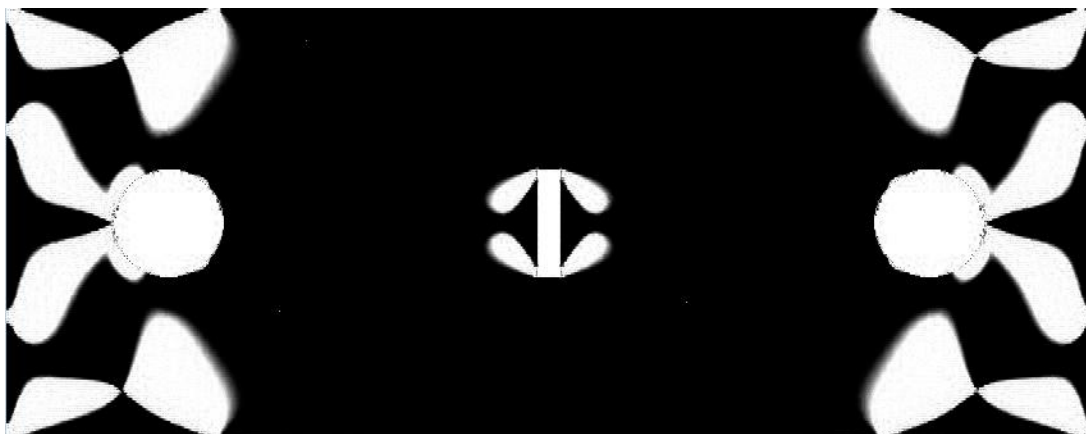


Fig II-42 : Le réseau d'isoclines donné par CASTEM pour une plaque fissurée sous traction uniaxiale

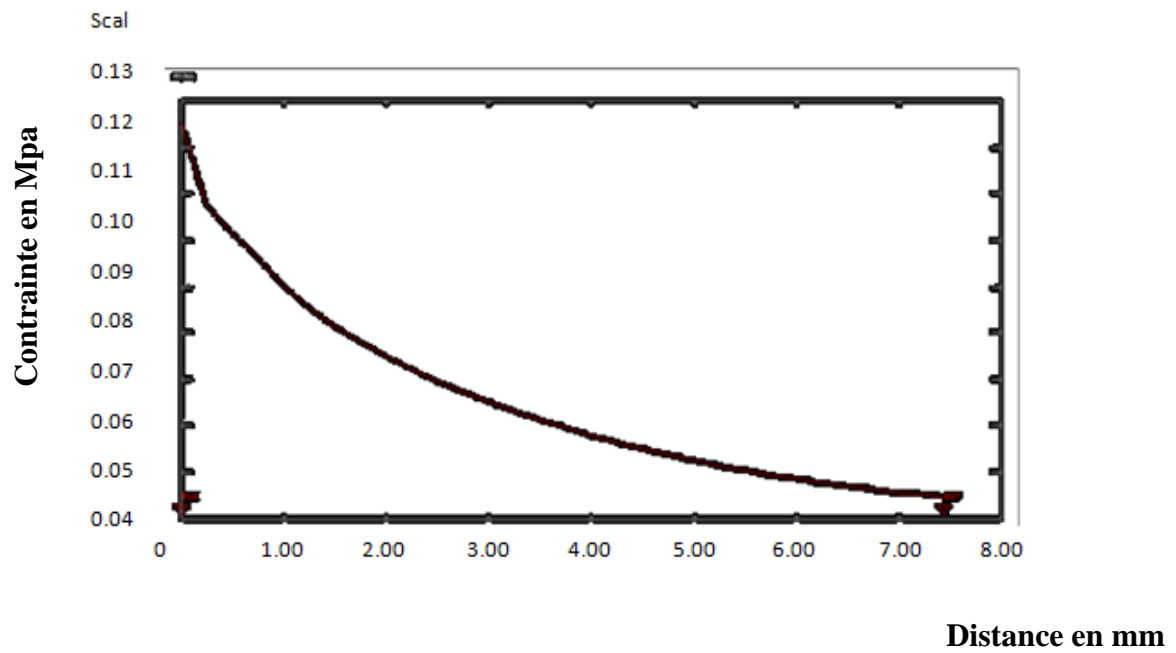


Fig II-43 : Graphe d'évolution de contrainte à la pointe de la fissure suivant X calculée à partir de CASTEM pour une plaque fissurée

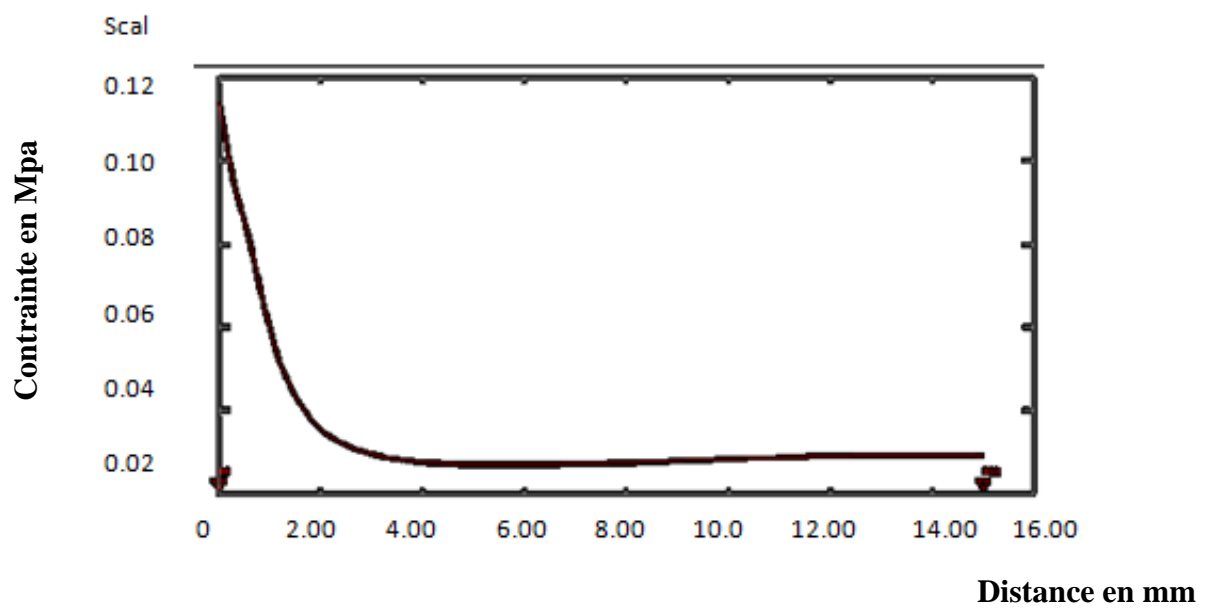


Fig II-44: Graphe d'évolution de contrainte à la pointe de la fissure suivant Y calculée par CASTEM pour une plaque fissurée

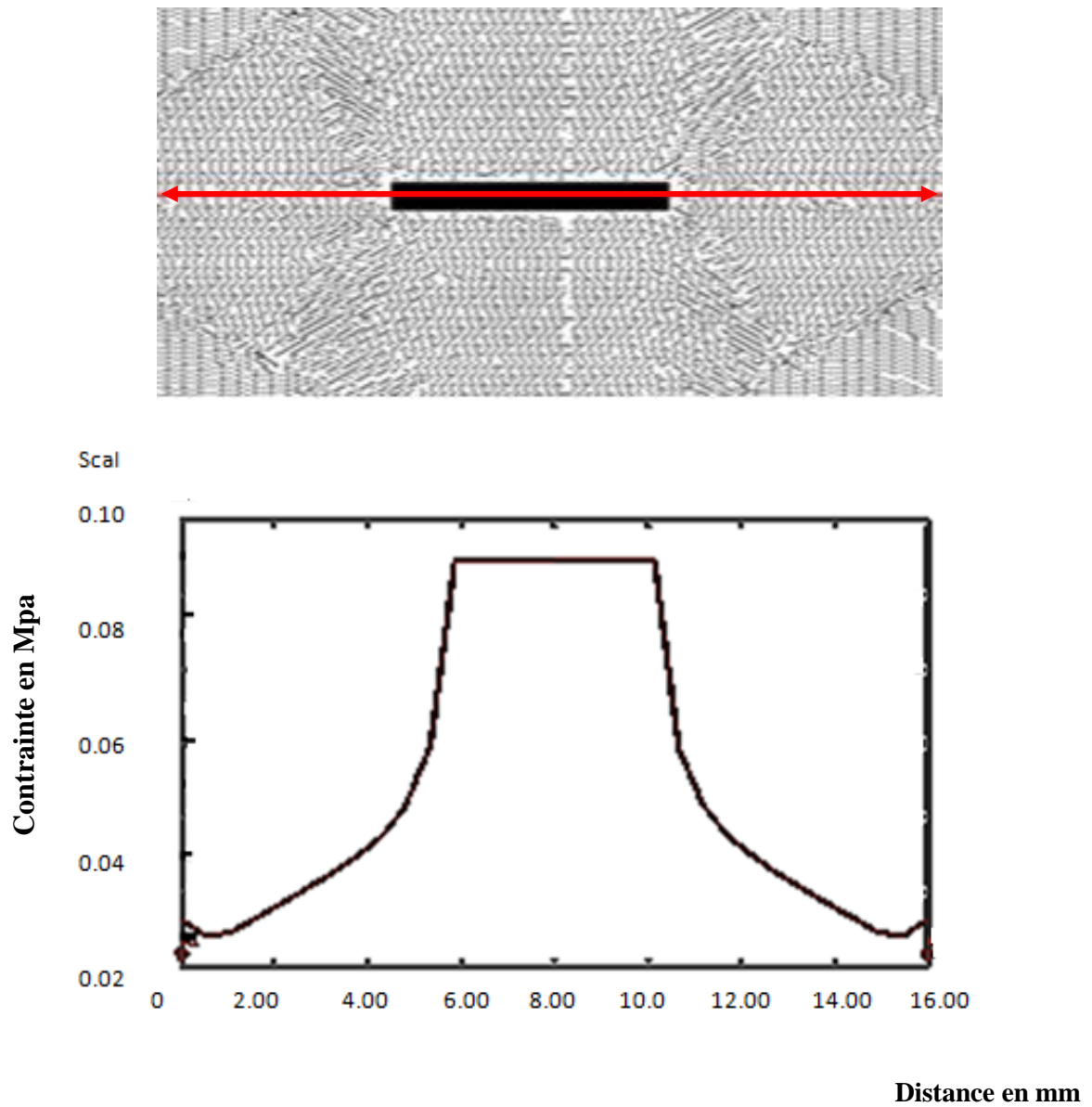


Fig II-45 : Graphe d'évolution des contraintes dans la zone de la fissure suivant X calculée à partir de Castem

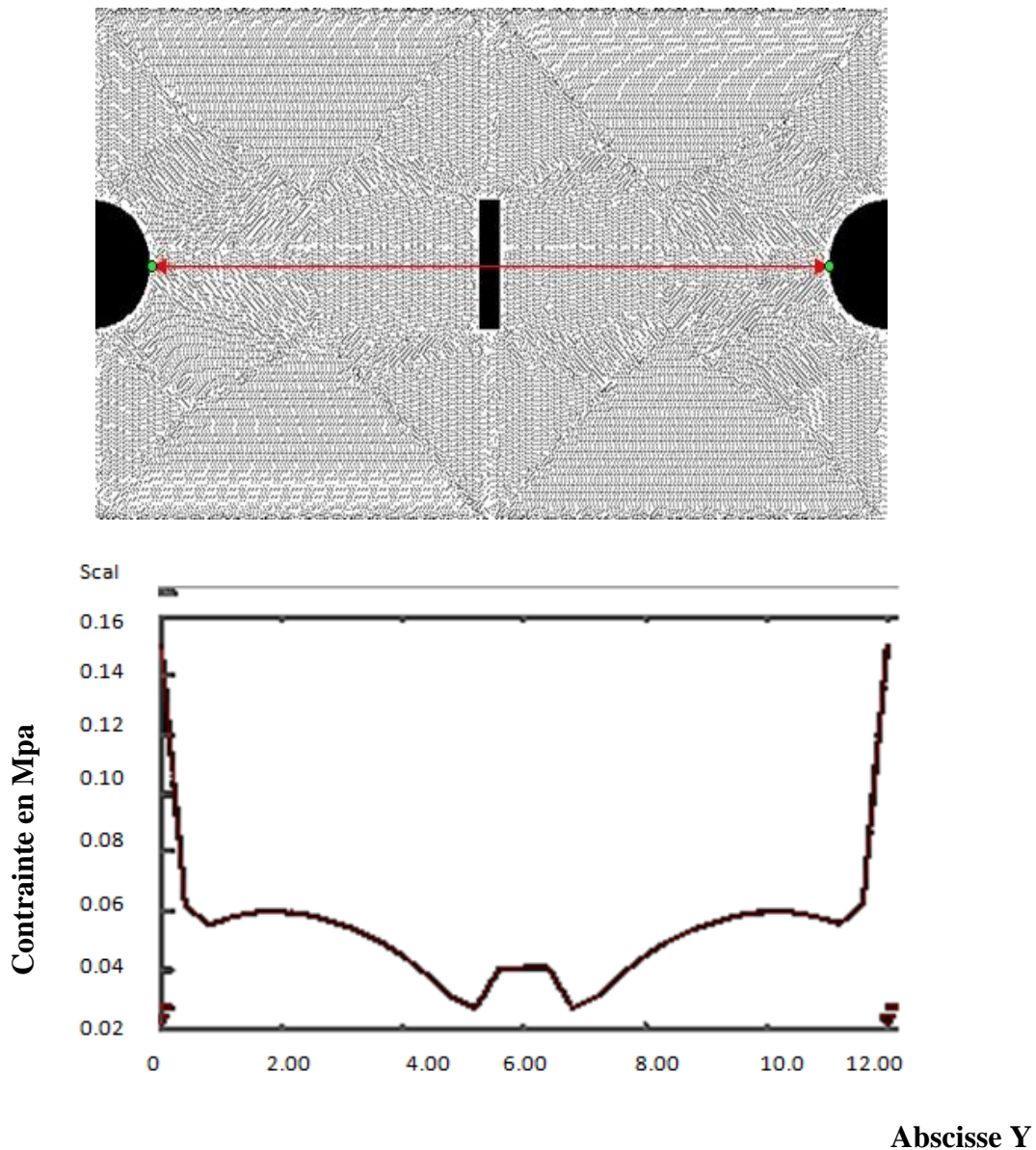


Fig II-46 : Graphe d'évolution des contraintes dans la zone de la fissure suivant Y calculée à partir de Castem

Interprétation des graphes

Les figures II-43-44 d'évolutions montrent toutes une concentration de contraintes causée par la fissure et ce, dans toutes les directions, en s'éloignant de la fissure, les contraintes reprennent des valeurs remarquablement inférieures à celles relevées sur la zone fissurée, quant à la figure II-45-46, elles représentent la répartition des contraintes sur toute la plaque fissurée, suivant les directions Y et X.

II.12.4.d Le facteur de concentration de contrainte calculé par Castem pour ce cas de figure

```
castem11 C:\Users\micromedia\Desktop\Mémoire de fin détude\prog castem\PLAQUE FISSURE.bt
21 3.60000E+01 5.76163E-02
22 3.73333E+01 5.84371E-02
23 3.86667E+01 5.87648E-02
24 4.00000E+01 5.92988E-02
Sous évolution numéro 2 de couleur ROUG
POINTS NOMMES APPARTENANT A LA LIGNE
Variable en abscisse ABS
Variable en ordonnée ( MARQ ) SCAL
Nombre de points : 2
1 0.00000E+00 P5
2 4.00000E+01 P10
*****
* calcul du facteur de concentration de contrainte Kt
*****
* suivant la table des contraintes donnée par castem
*
* SMAX=9.328E-2;
* SNOM=2.378E-2;
* kt=SMAX/SNOM;
* LIST Kt;
Règl valant: 3.9226
*****
```

La fenêtre des résultats Castem affiche $K_t = 3.92$ pour ce cas de figure.

II.13 Résultats et discussion

II.13.a Pour une plaque trouée

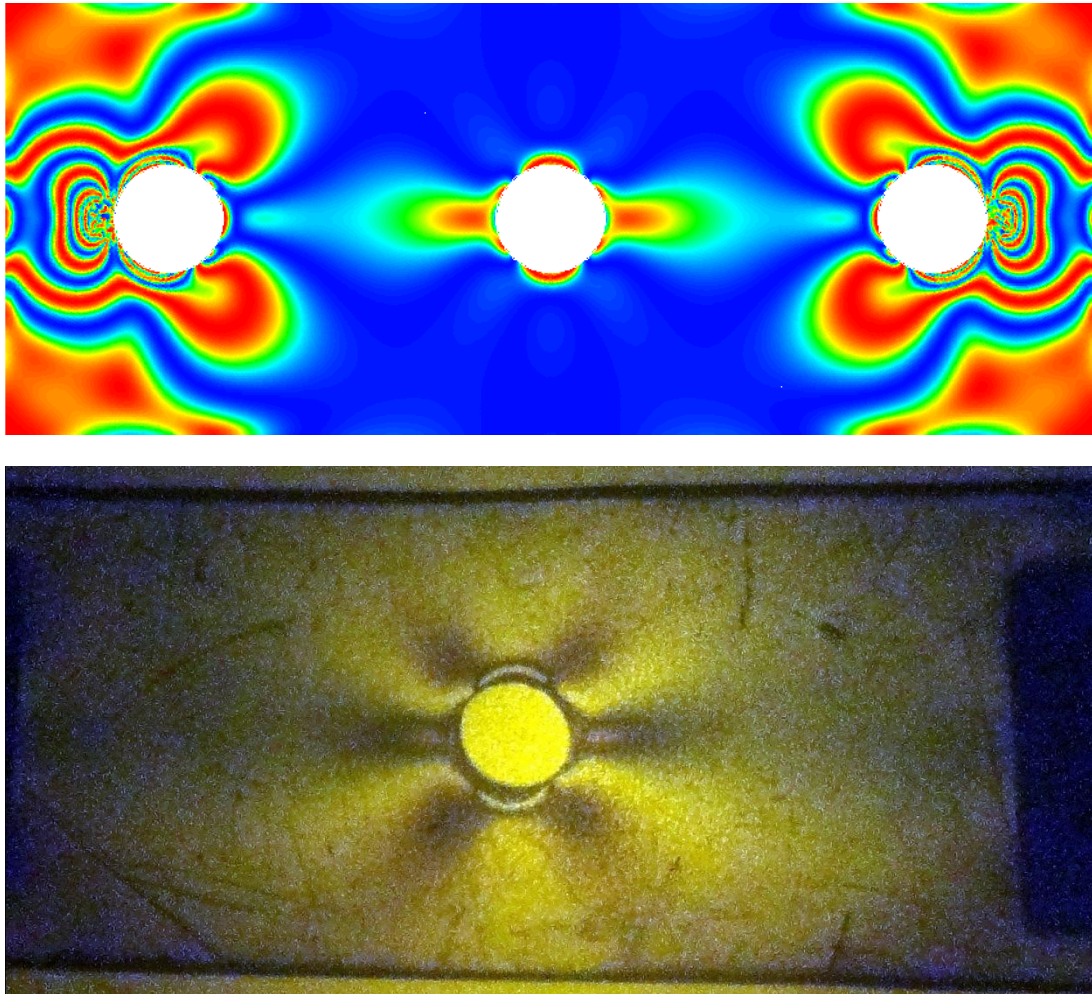


Fig II-47 : Réseau d'isochromes numérique(en haut) et expérimentale(en bas)

Facteur de concentration de contrainte k_t			Ecart en %
Valeur théorique	Valeur expérimentale	Valeur trouvée par la MEF	$\frac{K_{t\ MEF} - K_{t\ exp}}{K_{t\ MEF}}$
$k_t = 3$	$k_t = 2.27$	$k_t = 2.70$	15.92%

Tableau II-3 récapitulatif des résultats retrouvés pour une plaque trouée

II.13.b Plaque avec entailles arrondies

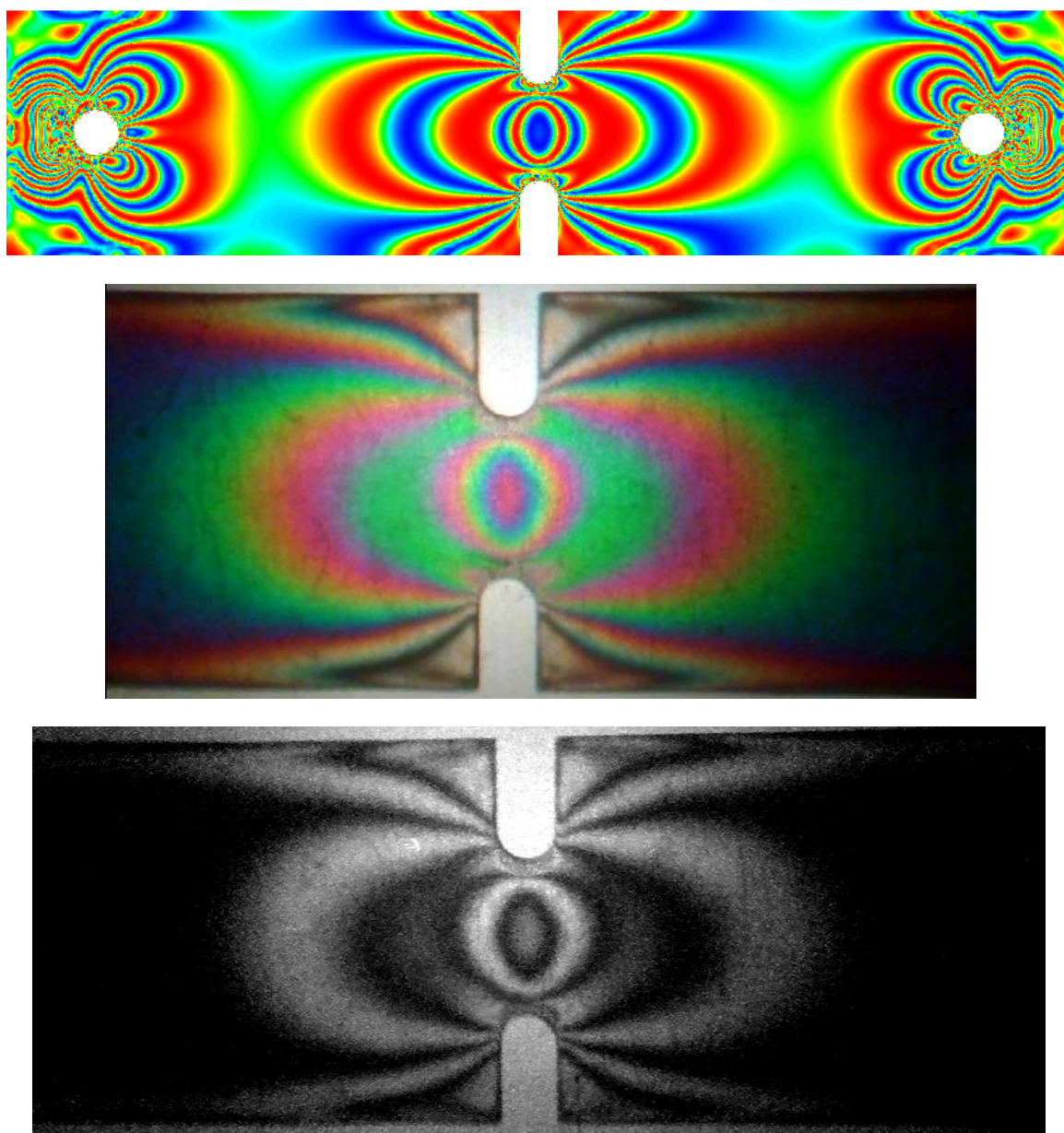


Fig II-48 : Réseau d'isochromes numérique(en haut) et expérimentale(en bas)

Facteur de concentration de contrainte k_t		Ecart en %
Valeur expérimentale	Valeur trouvée par la MEF	$\frac{K_{t\ MEF} - K_{t\ exp}}{K_{t\ MEF}}$
$k_t = 2.41$	$k_t = 2.23$	8.07%

Tableau II-4 récapitulatif des résultats retrouvés pour une plaque avec entailles arrondies

II.13.c Pour une plaque DENT

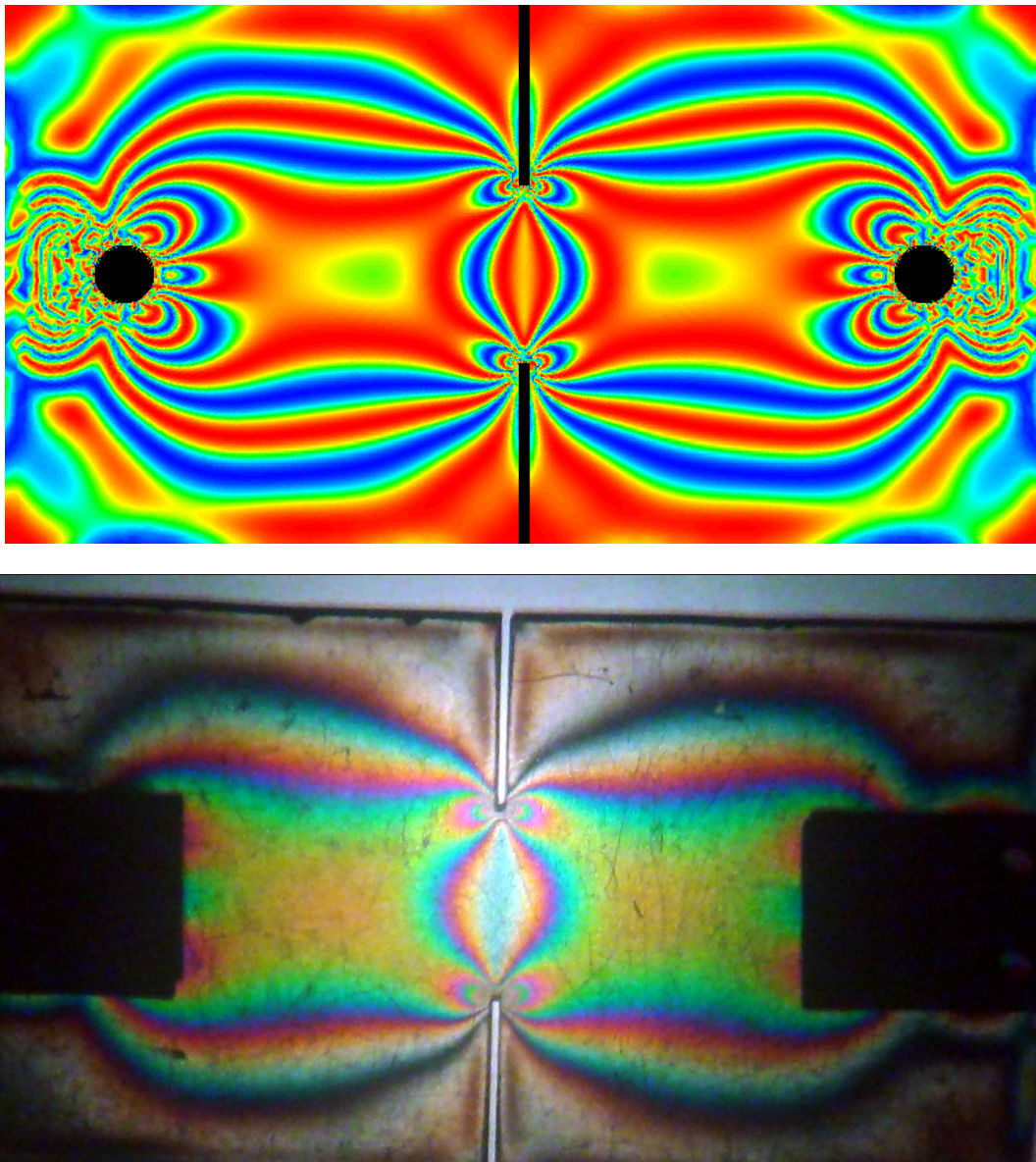


Fig II-48 : Réseau d'isochromes numérique(en haut) et expérimentale(en bas)

Facteur de concentration de contrainte k_t		Ecart en %
Valeur expérimentale	Valeur trouvée par la MEF	$\frac{K_{t\ MEF} - K_{t\ exp}}{K_{t\ MEF}}$
$k_t = 4.03$	$k_t = 3.66$	9.18%

Tableau II-5 récapitulatif des résultats retrouvés pour une plaque DENT

Comme on peut le constater, l'écart entre les résultats dépasse les 10%, on peut trouver des différences très importantes d'un auteur à un autre pour un même cas étudié et avec la même technique, ce qui nous mène à conclure que le facteur de concentration de contrainte est un outil peu précis, et certains chercheurs prévoient des erreurs qui dépassent les 20% [13] donc si l'on veut des résultats concluants, la méthode de mesure directe par la photoélasticimétrie ou l'extensiométrie par jauge de contrainte restent le moyen expérimental le plus fiable, il va de soi qu'une étude numérique ajoute plus de précision à ces résultats.

En plus, compte tenu des difficultés de mesure, ou de calcul des contraintes au niveau des entailles aiguës, les coefficients de concentration de contraintes supérieurs à 6 n'ont pas grande signification et la conception de la pièce est à revoir [2].

II.14 Solution préconisée pour les problèmes de concentration de contraintes

Les concentrateurs de contraintes, (les trous, les entailles, les encoches, les rainures) constituent une des causes favorisant l'amorçage de fissures donc il est conseillé de les éviter au maximum, mais si il est nécessaire de les réaliser, il faut opter pour des formes arrondies qui garantissent moins de concentration de contraintes que les formes aiguës, sans oublier d'en prendre compte lors du calcul de dimensionnement.

La technique d'arrêt de fissure au moyen d'un trou peut être employée en phase provisoire ou définitive en accompagnement d'un renforcement par placage par exemple, pour être efficace, le trou doit être réalisé en pointe de fissure, ce qui nécessite généralement une localisation par ressuage ; le trou ne doit pas être rebouché même si les lèvres de la fissure sont soudées.

III.1 Etude théorique

III.1.1 Calcul du facteur d'intensité de contrainte pour une plaque DENT :

Le facteur d'intensité de contrainte se calcul a partie de la relation ci-dessous

$$KI = \sigma\sqrt{\pi a}f\left(\frac{a}{b}\right)$$

Pour une plaque à double entailles débouchantes à largeur finie $f\left(\frac{a}{b}\right)$ est donné par :

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1.122 - 0.561\frac{a}{b} - 0.205\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0.471\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 0.190\left(\frac{a}{b}\right)^4}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)}}$$

III.1.2 Application numérique

$$F = 168N \times 3.563 = 598.58N$$

$$a = 10\text{mm}$$

$$b = 20\text{mm}$$

$$e = 10\text{mm}$$

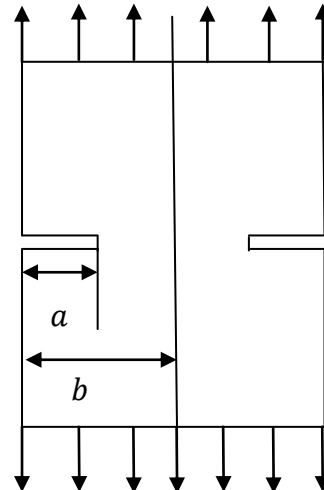
La contrainte est égale à

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{598.58}{40 \times 10} = 1.496\text{N/mm}^2$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = 1.18$$

En conséquence

$$KI = 9.93\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$$



III.2 Méthode expérimentale

III.2.1 Calcul du facteur d'intensité de contrainte par la méthode photoélastique pour la plaque DENT :

Comme on peut le voir sur la figure précédente, il y'a un entassement de franges à la pointe de la fissure ce qui signifie que de très importantes contraintes subsistent en cette zone,

Bien sûr dans ce cas il est important de ne pas confondre le coefficient de concentration de contraintes k_t qui ne donne qu'une information locale à la pointe même de la fissure et le facteur d'intensité de contrainte KI qui décrit la singularité spatiale du champ de contrainte. La mesure de KI par la méthode photoélastique se fait à partir des isochromes selon la procédure d'Irwin : [4]

$$\tau_m = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{KI}{\sqrt{2\pi r}} \sin\theta + \sigma_{\theta x} \sin \frac{3\theta}{2} \right)^2 + \left(\sigma_{\theta x} \cos \frac{3\theta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Où $\sigma_{\theta x}$ est la contrainte à la pseudo frontière à la distance X, elle peut être calculée sachant que :

$$\frac{\partial \tau_m}{\partial \theta_m} = 0 \text{ au bout de chaque boucle d'isochrome. [11]}$$

Pour réduire la sensibilité de cette approche à l'angle θ_m , dans laquelle $\frac{\partial \tau_m}{\partial \theta_m} = 0$, Bradeley [12] suggère d'adopter

$$\sigma_m = \frac{KI}{\sqrt{\pi r}} \quad (4)$$

D'où pour tirer KI on a :

L'équation de la contrainte tangentielle s'écrit comme suit

$$\tau_m = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{KI}{\sqrt{2\pi r}} \sin\theta + \frac{KI}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{3\theta}{2} \right)^2 + \left(\frac{KI}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{3\theta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Après développement

$$\tau_m = \frac{KI}{\sqrt{8\pi r}} \left(\sin^2\theta + 2\sqrt{\frac{2r}{a}} \sin\theta \sin \frac{3\theta}{a} + \frac{2r}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

a est la longueur de la fissure.

Pratiquement on relève les contraintes de cisaillement maximales τ_{1m}, τ_{2m} sur deux boucles d'isochromes aux points (r_1, θ_m) et (r_2, θ_m) puis on calcule KI par la formule suivante :

$$KI = \frac{\sqrt{2\pi r_1 r_2}}{f_2 \sqrt{r_1} - f_1 \sqrt{r_2}} (\tau_{2m} - \tau_{1m}) \quad (7)$$

Avec

$$f_i = \left(\sin^2 \theta_m + 2 \sqrt{\frac{2r_i}{a}} \sin \theta_m \sin \frac{3\theta_m}{2} + \frac{2r_i}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$i = 1, 2$

III.2.2 Application numérique

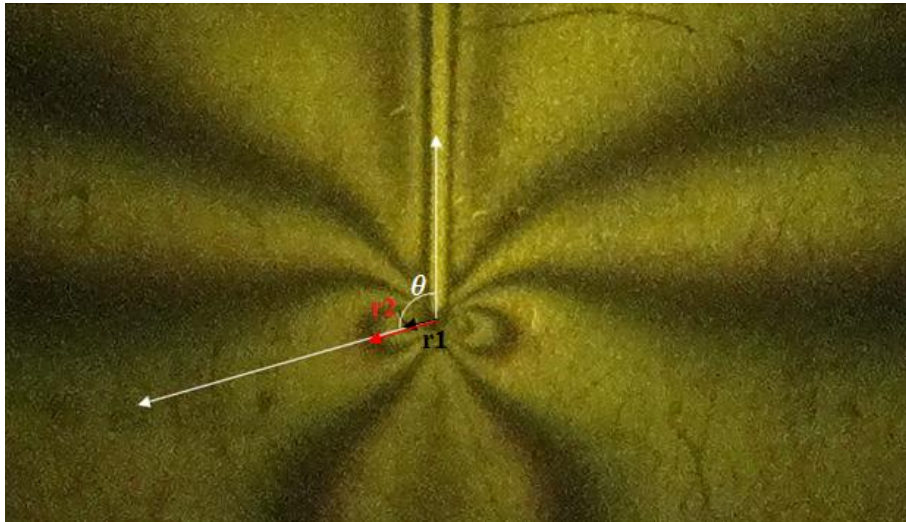


Fig III-1 : Dépouillement des isochromes

r_1 flèche noire.

r_2 flèche rouge.

θ_m angle délimité par les deux flèches blanches.

Rayon (mm)	Ordre de frange N	τ_m (N/mm ²)	Constante de frange	θ_m
5	3.5	2.01	11.5	70°
10	4.5	2.59	11.5	70°

Tableau III-1 : Résultats de l'expérience pour le calcul du FIC par la méthode photoélastique

$$f_1 = 1.93$$

$$f_2 = 2.33$$

$$KI = \frac{\sqrt{2\pi r_1 r_2}}{f_2 \sqrt{r_1} - f_1 \sqrt{r_2}} (\tau_{1m} - \tau_{2m}) = 11.51 \text{MPa}\sqrt{m}$$

Donc pour une plaque à doubles entailles aiguës DENT soumise à une traction uniaxiale, la méthode photoélastique prévoit un facteur d'intensité de contraintes

$$KI = 11.51 \text{MPa}\sqrt{m}$$

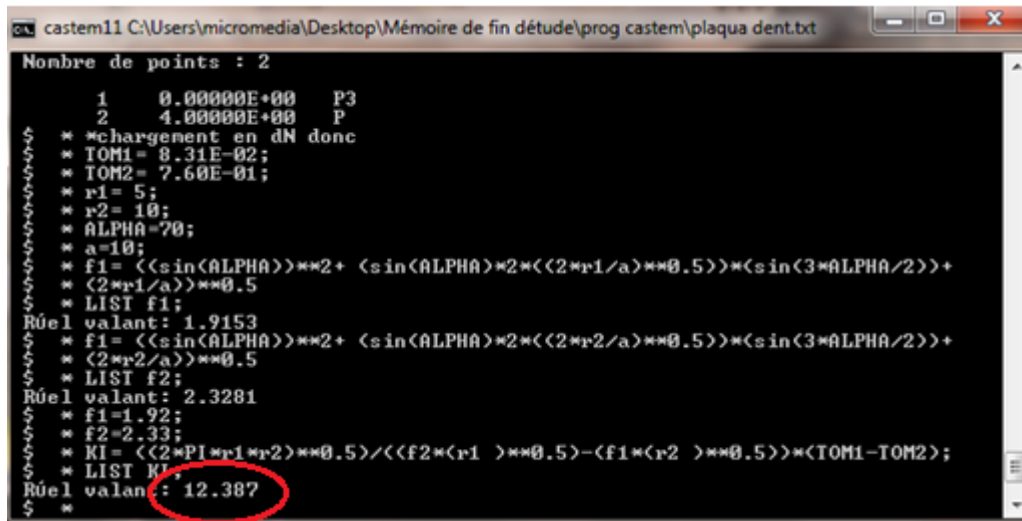
Remarque

Faute de moyen, on n'a pas pu réaliser l'expérience par la méthode photoélastique dans le cas d'une plaque fissurée. On ne peut donc estimer la valeur du facteur d'intensité de contrainte pour ce cas de figure.

III.3 Méthode numérique

III.3.1 Calcul du facteur d'intensité de contrainte par la méthode des éléments finis (CASTEM) pour une plaque DENT

Facteur d'intensité de contrainte calculé par Castem :



La fenêtre des résultats Castem affiche $KI = 12.39 \text{ MPa}\sqrt{m}$

III.4 Discussion des résultats

Facteur d'intensité de contrainte KI (MPa√m)			Ecart En %
Valeur théorique	Valeur pratique	Valeur trouvée par la MEF	
9.93	11.51	12.39	7.1 %

Tableau III-2 récapitulatif des résultats trouvés pour une plaque DENT

Il existe un écart entre les valeurs théoriques, expérimentales et numériques, et ceci est dû à plusieurs facteurs :

La théorie suppose la linéarité du problème or, en réalité ce n'est qu'une hypothèse faite pour simplifier la résolution. En pratique, la linéarité, l'homogénéité et l'isotropie absolue n'existent pas. D'autres phénomènes physiques apparaissent et peuvent parasiter ou altérer les résultats, à titre d'exemple les contraintes résiduelles et d'éventuelles erreurs de manipulation. Tous ces problèmes justifient les écarts trouvés, néanmoins ces résultats restent relativement bons.

Conclusion générale

Cette étude a mis en évidence le phénomène de concentration de contraintes, elle y a également apporté quelques solutions. Et compte tenu de la complexité des méthodes théoriques dans ce genre de problèmes, parfois même l'impossibilité de résolution de certains cas de figures, ce projet a démontré l'utilité de la méthode photoélastique dans le calcul des facteurs de concentrations de contraintes. De même, elle s'est avérée aussi efficace dans le domaine de la mécanique de la rupture.

Les techniques de mesure des paramètres de rupture par la photoélasticimétrie, sont évidemment des méthodes approchées mais qui complètent les approches analytiques au delà des limites de ses dernières. Cependant à cause de la relative imprécision du calcul théorique, la technique photosélastique constitue un outil efficace pour ce genre d'analyse.

Ce projet comprend aussi une étude par la méthode des éléments finis des problèmes évoqués précédemment, et il va sans dire qu'une étude numérique est plus rapide que les deux méthodes citées avant réunies (méthode théorique et expérimentale), toutefois, elle exige un certain savoir faire dans le domaine de la programmation.

Il existe un écart entre les valeurs théoriques, expérimentales et numériques, et ceci est dû aux facteurs expliqués précédemment, toutefois ces résultats restent relativement bons.

Références bibliographiques

[1] : William A.NASH « Résistance des matériaux 2 »

Edition Schaum septembre 1985.

[2] : Jian LU et Henri –Paul LIEURADE « Concentration de contrainte » 10 avr. 1998.

[3] : Pierre SUQUET « Plasticité et rupture » 2005.

[4] : Jean Claude Charmet: Mécanique du solide et des matériaux, élasticité-plasticité-rupture
ESPCI - Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique 1980.

[5] : Plate forme optique et photonique Université J Fourier Grenoble 19 juin 2012.

[6] : Gay PLUVINAGE « Mécanique élasto-plastique de la rupture », édition Cépaduès (20 février 1995).

[7] : J-S Fleuret « prise en main de CASTEM 2000, présentation et post traitement CASTEM » Avril 1996.

[10] : mémoire de fin d'étude (ingénieur) proposé par Broz VACLAV et présenté par Mustapha TOUMI et Djamel TILIUIUNE « La photoélasticimétrie ; problème de concentration de contrainte » promotion 1989.

[11] : BERNARD BARTHELEMY « Notions pratiques de la mécanique de la rupture »

EYROLLES 1980.

[12] : RENE LABENS Introduction à la mécanique de la rupture

Edition PLURALIS 1980.

[13]: Revue scientifique écrite par Ahmad Loqman, Andiyanto Sutandar, Julian Chan Hou Kan, Chen GuangZe et Chou Shou Kang “An experimental investigation of stress concentration factor” année 2000.

[14] : Abaques tirés des : cours et applications d’RDM par LP, AULNOYE.

ANNEXE I

Introduction

L'outil informatique a marqué une nouvelle aire, et son utilisation connaît un essor considérable dans tous les domaines, il a révolutionné d'une vaste manière la technologie grâce à sa rapidité de calculs et aux différents logiciels de simulations élaborés à cet effet. En mécanique bon nombre de structures sont étudiées minutieusement sur ordinateur avant leurs réalisations. ces simulations apportent plus de fiabilité à ces constructions et aident l'ingénieur dans sa tâche de dimensionnement.

Des tas de logiciels sont utilisés de nos jours par les constructeurs, on cite « Solid Works, Abaqus, Catia, AutoCad, Sap2000, Castem...ext. Cette partie comprend une étude numérique du phénomène de concentration de contraintes et du phénomène d'intensité de contraintes en utilisant le logiciel Castem,

Les programmes conçus pour cette étude sont donnés ci après.

Calcul du facteur de concentration de contrainte par la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel CASTEM

Les programmes réalisés pour cette études sont joins dans la partie annexe, ils donnent

- Le maillage et la géométrie des éprouvettes étudiées.
- Les conditions aux limites et celles du chargement.
- Les déformations des éprouvettes.
- Les réseaux d'isoclines et d'isochrome.
- Les graphes d'évolutions de contraintes.
- Le programme qui calcule le facteur de concentration de contrainte et le facteur d'intensité de contrainte.

POUR UNE PLAQUE DENT

OPTI 'DIME' 2 'ELEM' 'SEG2' 'MODE' 'PLAN' 'CONT' ;

P1=0. 0.;

P2=0. 60.;

P3=13.25 60.;

P4=13.25 0.;

P5=57. 0.;

P6=57. 20.;

P7=58. 20.;

P8=58. 0.;

P9=101.75 0.;

P10=101.75 60.;

P11=58. 60.;

P12=58. 40.;

P13=57. 40.;

P14=57. 60.;

P15=115. 0.;

P16=115. 60.;

C0=13.25 30.;

C1=13.25 33.25;

C2=10. 30.;

C3=13.25 26.75;

C4=16.5 30.;

C5=101.75 26.75;

C6=98.50 30.;

C7=101.75 33.25;

Programmation CASTEM

C8=105. 30.;

C=101.75 30.;

AR1=CERC 30 C1 C0 C2 ;

AR2=CERC 30 C2 C0 C3 ;

AR3=CERC 30 C1 C0 C4 ;

AR4=CERC 30 C4 C0 C3 ;

AR5=CERC 30 C5 C C6;

AR6=CERC 30 C6 C C7;

AR7=CERC 30 C7 C C8;

AR8=CERC 30 C8 C C5;

L1=P1 DROI 30 P2;

L2=P2 DROI 30 P3;

L3=P3 DROI 30 C1;

L4=C3 DROI 30 P4;

L5=P4 DROI 30 P1;

CONT1=L1 ET L2 ET L3 ET AR1 ET AR2 ET L4 ET L5;

*TRAC CONT1;

SURF1= SURF PLAN CONT1 ;

TRAC SURF1;

L6=P4 DROI 30 P5;

L7=P5 DROI 30 P6;

L8=P6 DROI 30 P7;

L9=P7 DROI 30 P8;

Programmation CASTEM

L10=P8 DROI 30 P9;

L11=P9 DROI 30 C5;

L12=C7 DROI 30 P10;

L13=P10 DROI 30 P11;

L14=P11 DROI 30 P12;

L15=P12 DROI 30 P13;

L16=P13 DROI 30 P14;

L17=P14 DROI 30 P3;

CONT2=L6 ET L7 ET L8 ET L9 ET L10 ET L11 ET AR5 ET AR6 ET L12 ET L13

ET L14 ET L15 ET L16 ET L17 ET L3 ET AR3 ET AR4 ET L4;

TRAC CONT2;

SURF2= SURF PLAN CONT2 ;

TRAC SURF2;

L18=P9 DROI 30 P15;

L19=P15 DROI 30 P16;

L20=P16 DROI 30 P10;

CONT3=L18 ET L19 ET L20 ET L12 ET AR7 ET AR8 ET L11;

TRAC CONT3;

SURF3= SURF PLAN CONT3;

TRAC SURF3;

SURFACE=SURF1 ET SURF2 ET SURF3;

TRAC SURFACE;

.....

**-----

Programmation CASTEM

* Description du matériau / création de la rigidité / chargement

*=====

*DEFINITION DU MODELE ET DU MATERIAU

*=====

MO = MODE SURFACE MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;

MA = MATE MO YOUN 32.73 NU 0.37;

RI = RIGI MO MA;

*=====

* bloquages - conditions aux limites

*=====

CL1=BLOQU P10 'UX' ;

CL2=BLOQU P5 'UX' ;

CLTOT=CL1 ET CL2;

RI1=CLTOT ET RI;

=====

* forces

*=====

F1=FORC (60. 0.) C2;

F2=FORC (-60. 0.) C8;

F= F1 ET F2;

*-----

* Calculs et résolution

*=====

* Calcul des déformations

*=====

Programmation CASTEM

```
DEPL1=RESO RI1 F;
DEFO=DEFO 0. DEPL1 SURFACE;
DEF1=DEFO 1. DEPL1 SURFACE rouge;
*TRAC cach SURFACE (DEFO ET DEF1);
*TRAC cach SURFACE (DEF1);
*=====
* calcul des contraintes
*=====
CHACONTR=SIGM MO MA DEPL1;
CHANOEUD=CHAN NOEUD MO CHACONTR;
CHANPOIN=CHAN CHPO MO CHANOEUD;
*=====
* extraction des contraintes (SX,SY,SXY)
*=====
SY=EXCO CHANPOIN SMYY;
SX=EXCO CHANPOIN SMXX;
SXY=EXCO CHANPOIN SMXY;
CONT=SURFACE CONT;

TRAC (SX-SY) SURFACE CONT;
DIFCONTR=(((SX-SY)**2)+(4*(SXY**2)))**0.5;
phi=360*(1./10.5)*10.*DIFCONTR;
ISOC = (cos((phi)/2.))**2;

trac ISOC SURFACE cont;

intens=ISOC
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOC.res';
```

Programmation CASTEM

```
sort intens AVS ASCII;
*****

*TRACER LES ISOCLINES
*****

term1= (2. * SXY);
term2= (SX- SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA);
ISOCL= (ISOCL ** 2);

trac isocl SURFACE cont;

intens1=ISOCL
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL.res';

sort intens1 AVS ASCII;
*****

ALPHA1 =(ALPHA+10);
ISOCL1= sin(2. * ALPHA1);
ISOCL1= (ISOCL1 ** 2);

trac isocl1 SURFACE cont;

intens1=ISOCL1
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL1.res';

sort intens1 AVS ASCII;
*****

ALPHA2 =(ALPHA+20);
```

Programmation CASTEM

```
ISOCL2= sin(2. * ALPHA2);
```

```
ISOCL2= (ISOCL2 ** 2);
```

```
trac isocl2 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL2
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL2.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA3 =(ALPHA+30);
```

```
ISOCL3= sin(2. * ALPHA3);
```

```
ISOCL3= (ISOCL3 ** 2);
```

```
trac isocl3 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL3
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL3.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA4 =(ALPHA+40);
```

```
ISOCL4= sin(2. * ALPHA4);
```

```
ISOCL4= (ISOCL4 ** 2);
```

```
trac isocl4 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL4
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL4.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA5 =(ALPHA+50);
```

Programmation CASTEM

```
ISOCL5= sin(2. * ALPHA5);
```

```
ISOCL5= (ISOCL5 ** 2);
```

```
trac isocl5 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL5
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL5.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA6 =(ALPHA+60);
```

```
ISOCL6= sin(2. * ALPHA6);
```

```
ISOCL6= (ISOCL6 ** 2);
```

```
trac isocl6 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL6
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL6.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA7 =(ALPHA+70);
```

```
ISOCL7= sin(2. * ALPHA7);
```

```
ISOCL7= (ISOCL7 ** 2);
```

```
trac isocl7 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL7
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL7.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

Programmation CASTEM

ALPHA8=(ALPHA+80);

ISOCL8= sin(2. * ALPHA8);

ISOCL8= (ISOCL8 ** 2);

trac isocl8 SURFACE cont;

intens1=ISOCL8

intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL8.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*-----

* Evolutions des contraintes Sx Sy suivant LIG20

*-----

*suivant X

SMAX=DIFCONTR;

P20= 80. 30.;

LG=P12 DROI 20 P20;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LG;

EVOL1=EVOL ROUGE 'CHPO' LG COMPTOM;

DESS EVOL1;

LIST EVOL1;

*suivant Y

LC=P12 DROI 5 P7;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LC;

EVOL2=EVOL ROUGE 'CHPO' LC COMPTOM;

DESS EVOL2;

LIST EVOL2;

*calcul du facteur de concentration de contrainte Kt

Programmation CASTEM

*suivant la table des contraintes donnée par castem

SMAX=11.63;

SNOM=3.18;

kt=SMAX/SNOM;

LIST Kt;

*suivant X ET Y

SMAX=DIFCONTR;

P= 19. 40.;

LT=P3 DROI 5 P;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LT;

EVOL3=EVOL ROUGE 'CHPO' LT COMPTOM;

DESS EVOL3;

LIST EVOL3;

*calcul du facteur d'intensité de contrainte KI

TOM=DIFCONTR/2;

P= 19. 60.;

LT=P3 DROI 40 P;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE TOM LT;

EVOL2=EVOL ROUGE 'CHPO' LT COMPTOM;

LIST EVOL2;

*chargement en dN donc

TOM1= 8.31E-02;

TOM2= 7.60E-01;

r1= 5;

Programmation CASTEM

```
r2= 10;
ALPHA=70;
a=10;
f1= ((sin(ALPHA)**2+ (sin(ALPHA)*2*((2*r1/a)**0.5))*(sin(3*ALPHA/2)))+
(2*r1/a)**0.5
LIST f1;
f1= ((sin(ALPHA)**2+ (sin(ALPHA)*2*((2*r2/a)**0.5))*(sin(3*ALPHA/2)))+
(2*r2/a)**0.5
LIST f2;
f1=1.92;
f2=2.33;
KI= ((2*PI*r1*r2)**0.5)/((f2*(r1)**0.5)-(f1*(r2)**0.5))*(TOM1-TOM2);
LIST KI;

INTENS=RAPPORT2*100;
OPTION SORT 'EPROUVETTE2.RES';
SORT INTENS AVS ASCII
* -----
* Fin du fichier
* -----
*
FIN;
```

POUR UNE PLAQUE A DOUBLE ENTAILLES ARRONDIES

OPTI 'DIME' 2 'ELEM' 'SEG2' 'MODE' 'PLAN' 'CONT' ;

P1=0. 0.;

P2=0. 40.;

P3=14.5 40.;

P4=14.5 0.;

P5=83. 0.;

P6=83. 9.;

P7=89. 9.;

P8=89. 0.;

P9=157.5 0.;

P10=157.5 40.;

P11=89. 40.;

P12=89. 31.;

P13=83. 31.;

P14=83. 40.;

P15=172. 0.;

P16=172. 40.;

C0=14.5 20.;

C1=14.5 23.5;

C2=11. 20.;

C3=14.5 16.5;

C4=18. 20.;

C5=157.5 16.5;

C6=154. 20.;

C7=157.5 23.;

Programmation CASTEM

C8=161. 20.;

C=157.5 20.;

CX=86. 31.;

C9=86. 12.;

C10=86. 28.;

CC=86. 9.;

AR1=CERC 40 C1 C0 C2 ;

AR2=CERC 40 C2 C0 C3 ;

AR3=CERC 40 C1 C0 C4 ;

AR4=CERC 40 C4 C0 C3 ;

AR5=CERC 40 C5 C C6;

AR6=CERC 40 C6 C C7;

AR7=CERC 40 C7 C C8;

AR8=CERC 40 C8 C C5;

AR9=CERC 40 P6 CC C9;

AR10=CERC 40 C9 CC P7;

AR11=CERC 40 P12 CX C10;

AR12=CERC 40 C10 CX P13;

L1=P1 DROI 30 P2;

L2=P2 DROI 20 P3;

L3=P3 DROI 30 C1;

L4=C3 DROI 30 P4;

L5=P4 DROI 20 P1;

CONT1=L1 ET L2 ET L3 ET AR1 ET AR2 ET L4 ET L5;

Programmation CASTEM

TRAC CONT1;

SURF1= SURF PLAN CONT1 ;

TRAC SURF1;

L6=P4 DROI 40 P5;

L7=P5 DROI 40 P6;

L8=P7 DROI 40 P8;

L9=P8 DROI 40 P9;

L10=P9 DROI 40 C5;

L11=C7 DROI 40 P10;

L12=P10 DROI 40 P11;

L13=P11 DROI 40 P12;

L14=P13 DROI 40 P14;

L15=P14 DROI 40 P3;

CONT2=L6 ET L7 ET AR9 ET AR10 ET L8 ET L9 ET L10 ET AR5 ET AR6 ET L11

ET L12 ET L13 ET AR11 ET AR12

ET L14 ET L15 ET L3 ET AR3 ET AR4 ET L4;

TRAC CONT2;

SURF2= SURF PLAN CONT2 ;

TRAC SURF2;

L16=P9 DROI 20 P15;

L17=P15 DROI 30 P16;

L18=P16 DROI 20 P10;

CONT3=L16 ET L17 ET L18 ET L11 ET AR7 ET AR8 ET L10;

TRAC CONT3;

Programmation CASTEM

SURF3= SURF PLAN CONT3;

TRAC SURF3;

SURFACE=SURF1 ET SURF2 ET SURF3;

TRAC SURFACE;

*-----

* Description du matériau / création de la rigidité / chargement

*=====

*DEFINITION DU MODELE ET DU MATERIAU

*=====

MO = MODE SURFACE MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;

MA = MATE MO YOUN 32.73 NU 0.37;

RI = RIGI MO MA;

*=====

* bloquages - conditions aux limites

*=====

CL1=BLOQU C10 'UX''UY';

CL2=BLOQU C9 'UX''UY' ;

CLTOT=CL1 ET CL2;

RI1=CLTOT ET RI;

=====

* forces

*=====

F1=FORC (76. 0.) C2;

F2=FORC (-76. 0.) C8;

F= F1 ET F2;

Programmation CASTEM

```
*-----  
* Calculs et résolution  
*-----  
*=====
```

* Calcul des déformations

```
*=====
```

DEPL1=RESO RI1 F;
DEFO=DEFO 0. DEPL1 SURFACE;
DEF1=DEFO 1. DEPL1 SURFACE rouge;
TRAC cach SURFACE (DEFO ET DEF1);
TRAC cach SURFACE (DEF1);

```
*=====
```

* calcul des contraintes

```
*=====
```

CHACONTR=SIGM MO MA DEPL1;
CHANOEUD=CHAN NOEUD MO CHACONTR;
CHANPOIN=CHAN CHPO MO CHANOEUD;

```
*=====
```

* extraction des contraintes (SX,SY,SXY)

```
*=====
```

SY=EXCO CHANPOIN SMYY;
SX=EXCO CHANPOIN SMXX;
SXY=EXCO CHANPOIN SMXY;
CONT=SURFACE CONT;

TRAC (SX-SY) SURFACE CONT;
DIFCONTR=(((SX-SY)**2)+(4*(SXY**2)))**0.5;

Programmation CASTEM

```
phi=360*(1./11.5)*10.*DIFCONTR;
```

```
ISOC = (COS((phi)/2.))**2;
```

```
trac ISOC SURFACE cont;
```

```
intens=ISOC
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOC.res';
```

```
sort intens AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
*TRACER LES ISOCLINES
```

```
*****
```

```
term1= (2. * SXY);
```

```
term2= (SX- SY);
```

```
term3= ABS (term1/term2);
```

```
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
```

```
ISOCL= sin(2. * ALPHA);
```

```
ISOCL= (ISOCL ** 2);
```

```
trac isocl SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA1 =(ALPHA+10);
```

```
ISOCL1= sin(2. * ALPHA1);
```

```
ISOCL1= (ISOCL1 ** 2);
```

Programmation CASTEM

```
trac isocl1 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL1
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL1.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA2 =(ALPHA+20);
```

```
ISOCL2= sin(2. * ALPHA2);
```

```
ISOCL2= (ISOCL2 ** 2);
```

```
trac isocl2 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL2
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL2.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA3 =(ALPHA+30);
```

```
ISOCL3= sin(2. * ALPHA3);
```

```
ISOCL3= (ISOCL3 ** 2);
```

```
trac isocl3 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL3
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL3.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA4 =(ALPHA+40);
```

```
ISOCL4= sin(2. * ALPHA4);
```

```
ISOCL4= (ISOCL4 ** 2);
```

```
trac isocl4 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL4
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL4.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA5 =(ALPHA+50);
```

```
ISOCL5= sin(2. * ALPHA5);
```

```
ISOCL5= (ISOCL5 ** 2);
```

```
trac isocl5 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL5
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL5.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA6 =(ALPHA+60);
```

```
ISOCL6= sin(2. * ALPHA6);
```

```
ISOCL6= (ISOCL6 ** 2);
```

```
trac isocl6 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL6
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL6.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA7 =(ALPHA+70);
```

```
ISOCL7= sin(2. * ALPHA7);
```

Programmation CASTEM

```
ISOCL7= (ISOCL7 ** 2);
```

```
trac isocl7 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL7
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL7.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA8 =(ALPHA+80);
```

```
ISOCL8= sin(2. * ALPHA8);
```

```
ISOCL8= (ISOCL8 ** 2);
```

```
trac isocl8 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL8
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL8.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*-----
```

```
* Evolutions des contraintes Sx Sy suivant LIG20
```

```
*-----
```

```
SMAX=DIFCONTR;
```

```
P17= 82. 30.;
```

```
LG=C10 DROI 20 P17;
```

```
COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LG;
```

```
EVOL1=EVOL ROUGE 'CHPO' LG COMPTOM;
```

```
DESS EVOL1;
```

```
LIST EVOL1;
```

Programmation CASTEM

LC=P12 DROI 30 P7;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LC;

EVOL2=EVOL ROUGE 'CHPO' LC COMPTOM;

DESS EVOL2;

LIST EVOL2;

LX=C10 DROI 20 C9;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LX;

EVOL3=EVOL ROUGE 'CHPO' LX COMPTOM;

DESS EVOL3;

LIST EVOL3;

P= 50. 20.;

LX=C10 DROI 10 P;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LX;

EVOL4=EVOL ROUGE 'CHPO' LX COMPTOM;

DESS EVOL4;

LIST EVOL4;

*calcul du facteur de concentration de contrainte Kt

*suivant la table des contraintes donnée par castem

SMAX=4.23;

SNOM=1.897;

kt=SMAX/SNOM;

LIST Kt;

INTENS=RAPPORT2*100;

OPTION SORT 'EPROUVETTE2.RES';

SORT INTENS AVS ASCII;

*-----

* Fin du fichier

*-----

FIN;

POUR UNE PLAQUE TROUEE

OPTI 'DIME' 2 'ELEM' 'SEG2' 'MODE' 'PLAN' 'CONT' ;

P1=0. 0.;

P2=0. 40.;

P3=15. 40.;

P4=15. 0.;

P5=50. 0.;

P6=50. 40.;

P7=85. 0.;

P8=85. 40.;

P9=100. 0.;

P10=100. 40.;

C=10. 20.;

C0=15. 25.;

C1=15. 20.;

C2=15. 15.;

C3=20. 20.;

C4=50. 15.;

C5=45. 20.;

C6=50. 25.;

C7=55. 20.;

C8=50. 20.;

C9=80. 20.;

C10=85. 25.;

C11=90. 20.;

C12=85. 15.;

C13=85. 20.;

AR1=CERC 50 C0 C1 C;

AR2=CERC 50 C C1 C2;

AR3=CERC 50 C4 C8 C5;

AR4=CERC 50 C5 C8 C6;

AR5=CERC 50 C0 C1 C3;

AR6=CERC 50 C3 C1 C2;

AR7=CERC 50 C12 C13 C9;

AR8=CERC 50 C9 C13 C10;

AR9=CERC 50 C10 C13 C11;

AR10=CERC 50 C11 C13 C12;

AR11=CERC 50 C6 C8 C7;

AR12=CERC 50 C7 C8 C4;

L1=P1 DROI 50 P2 ;

L2=P2 DROI 50 P3 ;

L3=P3 DROI 50 C0 ;

L4=C2 DROI 50 P4 ;

Programmation CASTEM

L5=P4 DROI 50 P1 ;

CONT1=L1 ET L2 ET L3 ET AR1 ET AR2 ET L4 ET L5;

TRAC CONT1;

SURF1= SURF PLAN CONT1 ;

TRAC SURF1;

L6=P4 DROI 50 P5;

L7=P5 DROI 50 C4;

L8=C6 DROI 50 P6;

L9=P6 DROI 50 P3;

CONT2=L6 ET L7 ET AR3 ET AR4 ET L8 ET L9 ET L3 ET AR5 ET AR6

ET L4;

TRAC CONT2;

SURF2= SURF PLAN CONT2 ;

TRAC SURF2;

L10=P5 DROI 50 P7;

L11=P7 DROI 50 C12;

L12=C10 DROI 50 P8;

L13=P8 DROI 50 P6;

CONT3=L10 ET L11 ET AR7 ET AR8 ET L12 ET L13 ET L8 ET AR11 ET

AR12 ET L7;

TRAC CONT3;

SURF3= SURF PLAN CONT3 ;

Programmation CASTEM

TRAC SURF3;

L14=P7 DROI 50 P9;

L15=P9 DROI 50 P10;

L16=P10 DROI 50 P8;

CONT4=L14 ET L15 ET L16 ET L12 ET AR9 ET AR10 ET L11;

TRAC CONT4;

SURF4= SURF PLAN CONT4 ;

TRAC SURF4;

SURFACE= SURF1 ET SURF2 ET SURF3 ET SURF4;

TRAC SURFACE;

* Description du matériau / création de la rigidité / chargement

*-----

*=====

*DEFINITION DU MODELE ET DU MATERIAU

*=====

MO = MODE SURFACE MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;

MA = MATE MO YOUN 32.73 NU 0.37;

RI = RIGI MO MA;

*=====

* bloquages - conditions aux limites

*=====

CL1=BLOQU C5 'UY' ;

CL2=BLOQU C7 'UY' ;

Programmation CASTEM

CLTOT=CL1 ET CL2;

RI1=CLTOT ET RI;

*=====

* forces

*=====

F1=FORC (30. 0.) C11;

F2=FORC (-30. 0.) C;

F= F1 ET F2;

*-----

* Calculs et résolution

*-----

* Calcul des déformations

*=====

DEPL1=RESO RI1 F;

DEFO=DEFO 0. DEPL1 SURFACE;

DEF1=DEFO 1. DEPL1 SURFACE rouge;

TRAC cach SURFACE (DEFO ET DEF1);

TRAC cach SURFACE (DEF1);

*=====

* calcul des contraintes

*=====

CHACONTR=SIGM MO MA DEPL1;

CHANOEUD=CHAN NOEUD MO CHACONTR;

CHANPOIN=CHAN CHPO MO CHANOEUD;

*=====

* extraction des contraintes (SX,SY,SXY)

Programmation CASTEM

*=====

SY=EXCO CHANPOIN SMYY;

SX=EXCO CHANPOIN SMXX;

SXY=EXCO CHANPOIN SMXY;

CONT=SURFACE CONT;

TRAC (SX-SY) SURFACE CONT;

DIFCONTR=(((SX-SY)**2)+(4*(SXY**2)))**0.5;

phi=360*(1./11.5)*10.*DIFCONTR;

ISOC = (COS((phi)/2.))**2;

trac ISOC SURFACE cont;

intens=ISOC

intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOC.res';

sort intens AVS ASCII;

*TRACER LES ISOCLINES

term1= (2. * SXY);

term2= (SX- SY);

term3= ABS (term1/term2);

ALPHA = (0.5) * (ATG term3);

ISOCL= sin(2. * ALPHA);

ISOCL= (ISOCL ** 2);

*trac isocl SURFACE cont;

intens1=ISOCL

intens= ISOC;

Programmation CASTEM

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*****

ALPHA2 =(ALPHA+20);

ISOCL2= sin(2. * ALPHA2);

ISOCL2= (ISOCL2 ** 2);

*trac isocl2 SURFACE cont;

intens1=ISOCL2
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL2.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*****

ALPHA3 =(ALPHA+30);

ISOCL3= sin(2. * ALPHA3);

ISOCL3= (ISOCL3 ** 2);

*trac isocl3 SURFACE cont;

intens1=ISOCL3
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL3.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*****

ALPHA4 =(ALPHA+40);

ISOCL4= sin(2. * ALPHA4);

ISOCL4= (ISOCL4 ** 2);
```

Programmation CASTEM

```
trac isocl4 SURFACE cont;

intens1=ISOCL4
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL4.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*****

ALPHA5 =(ALPHA+50);

ISOCL5= sin(2. * ALPHA5);

ISOCL5= (ISOCL5 ** 2);

trac isocl5 SURFACE cont;

intens1=ISOCL5
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL5.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*****

ALPHA6 =(ALPHA+60);

ISOCL6= sin(2. * ALPHA6);

ISOCL6= (ISOCL6 ** 2);

trac isocl6 SURFACE cont;

intens1=ISOCL6
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL6.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*****

ALPHA7 =(ALPHA+70);

ISOCL7= sin(2. * ALPHA7);

ISOCL7= (ISOCL7 ** 2);
```

```
trac isocl7 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL7
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL7.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA8 =(ALPHA+80);
```

```
ISOCL8= sin(2. * ALPHA8);
```

```
ISOCL8= (ISOCL8 ** 2);
```

```
trac isocl8 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL8
```

```
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL8.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*-----
```

```
* Evolutions des contraintes Sx Sy suivant X
```

```
*-----
```

```
SMAX=DIFCONTR ;
```

```
LG=C7 DROI 20 C9;
```

```
COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LG;
```

```
EVOL1=EVOL ROUGE 'CHPO' LG COMPTOM;
```

```
DESS EVOL1;
```

```
LIST EVOL1;
```

```
LC=C6 DROI 20 C10;
```

```
COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LC;
```

Programmation CASTEM

EVOL2=EVOL ROUGE 'CHPO' LC COMPTOM;

DESS EVOL2;

LIST EVOL2;

P29= Noeud 29949;

LX=C7 DROI 10 P29;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LX;

EVOL3=EVOL ROUGE 'CHPO' LX COMPTOM;

DESS EVOL3;

LIST EVOL3;

*calcul du facteur de concentration de contrainte Kt

*suivant la table des contraintes donnée par castem

SMAX=6.412E-1;

SNOM=2.37E-1;

kt=SMAX/SNOM;

LIST Kt;

*-----

* Evolutions des contraintes Sx Sy suivant Y

*-----

SMAX=DIFCONTR;

P11=55. 40.;

LK=C7 DROI 20 P11;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LK;

EVOL4=EVOL ROUGE 'CHPO' LK COMPTOM;

Programmation CASTEM

DESS EVOL4;

LIST EVOL4;

LY=C6 DROI 20 P11;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LY;

EVOL5=EVOL ROUGE 'CHPO' LY COMPTOM;

DESS EVOL5;

LIST EVOL5;INTENS=RAPPORT3*100;

OPTION SORT 'EPROUVETTE2.RES';

SORT INTENS AVS ASCII;

*-----

* Fin du fichier

*-----

FIN;

POUR UNE PLAQUE FISSUREE

OPTI 'DIME' 2 'ELEM' 'SEG2' 'MODE' 'PLAN' 'CONT' ;

P1=0. 0.;

P2=15. 0.;

P3=15. 40.;

P4=0. 40.;

P5=50. 0.;

P6=50. 15.;

P7=49. 15.;

P8=49. 25.;

P9=50. 25.;

P10=50. 40.;

P11=85. 0.;

P12=85. 40.;

P13=100. 0.;

P14=100. 40.;

P15=51. 15.;

P16=51. 25.;

C0=15. 15.;

C=15. 20.;

C1=10. 20.;

C2=15. 25.;

C3=20. 20.;

C4=85. 15.;

C5=80. 20.;

C6=85. 25.;

C7=90. 20.;

C8=85. 20.;

AR1=CERC 50 C2 C C1 ;

AR2=CERC 50 C1 C C0 ;

AR3=CERC 50 C0 C C3 ;

AR4=CERC 50 C3 C C2 ;

AR5=CERC 50 C4 C8 C5;

AR6=CERC 50 C5 C8 C6;

AR7=CERC 50 C6 C8 C7;

AR8=CERC 50 C7 C8 C4;

L1=P1 DROI 50 P2;

L2=P2 DROI 50 C0;

Programmation CASTEM

L3=C2 DROI 50 P3;

L4=P3 DROI 50 P4;

L5=P4 DROI 50 P1;

CONT1=L1 ET L2 ET AR1 ET AR2 ET L3 ET L4 ET L5;

TRAC CONT1;

SURF1= SURF PLAN CONT1 ;

*TRAC SURF1;

L6=P2 DROI 50 P5;

L7=P5 DROI 50 P6;

L8=P6 DROI 8 P7;

L9=P7 DROI 50 P8;

L10=P8 DROI 8 P9;

L11=P9 DROI 50 P10;

L12=P10 DROI 50 P3;

CONT2=L6 ET L7 ET L8 ET L9 ET L10 ET L11 ET L12

ET L3 ET AR4 ET AR3 ET L2;

TRAC CONT2;

SURF2= SURF PLAN CONT2 ;

TRAC SURF2;

L13=P5 DROI 50 P11;

L14=P11 DROI 50 C4;

L15=C6 DROI 50 P12;

Programmation CASTEM

L16=P12 DROI 50 P10;

L17=P10 DROI 50 P9;

L18=P9 DROI 4 P16;

L19=P16 DROI 50 P15;

L20=P15 DROI 4 P6;

L21=P6 DROI 50 P5;

CONT3=L13 ET L14 ET AR5 ET AR6 ET L15 ET L16

ET L11 ET L18 ET L19 ET L20 ET L7;

TRAC CONT3;

SURF3= SURF PLAN CONT3 ;

TRAC SURF3;

L22=P11 DROI 50 P13;

L23=P13 DROI 50 P14;

L24=P14 DROI 50 P12;

L25=P12 DROI 50 C6;

L26=C4 DROI 50 P11;

CONT4=L22 ET L23 ET L24 ET L15 ET AR7 ET AR8 ET L14;

TRAC CONT4;

SURF4= SURF PLAN CONT4 ;

TRAC SURF4;

SURFACE=SURF1 ET SURF2 ET SURF3 ET SURF4;

TRAC SURFACE;

Programmation CASTEM

```
**-----  
* Description du matériau / création de la rigidité / chargement  
*-----  
*=====
```

*DEFINITION DU MODELE ET DU MATERIAU

```
*=====
```

MO = MODE SURFACE MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE;
MA = MATE MO YOUN 32.73 NU 0.37;
RI = RIGI MO MA;

```
*=====
```

* bloquages - conditions aux limites

```
*=====
```

CL1=BLOQU P6 'UX' 'UY' ;
CL2=BLOQU P9 'UX' 'UY' ;

CLTOT=CL1 ET CL2;
RI1=CLTOT ET RI;

```
*****  
=====
```

* forces

```
*=====
```

F1=FORC (-20. 0.) C1;
F2=FORC (20. 0.) C7;

F= F1 ET F2;

```
*-----
```

* Calculs et résolution

Programmation CASTEM

```
*-----  
*=====  
* Calcul des déformations  
*-----  
DEPL1=RESO RI1 F;  
DEFO=DEFO 0. DEPL1 SURFACE;  
DEF1=DEFO 1. DEPL1 SURFACE rouge;  
*TRAC cach SURFACE (DEFO ET DEF1);  
*TRAC cach SURFACE (DEF1);  
*=====  
* calcul des contraintes  
*-----  
CHACONTR=SIGM MO MA DEPL1;  
CHANOEUD=CHAN NOEUD MO CHACONTR;  
CHANPOIN=CHAN CHPO MO CHANOEUD;  
*=====  
* extraction des contraintes (SX,SY,SXY)  
*=====  
SY=EXCO CHANPOIN SMYY;  
SX=EXCO CHANPOIN SMXX;  
SXY=EXCO CHANPOIN SMXY;  
CONT=SURFACE CONT;  
  
TRAC (SX-SY) SURFACE CONT;  
DIFCONTR=(((SX-SY)**2)+(4*(SXY**2)))**0.5;  
phi=360*(1./11.65)*10.*DIFCONTR;  
ISOC = (COS((phi)/2.))**2;
```

```
trac ISOC SURFACE cont;
```

```
intens=ISOC  
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOC.res';
```

```
sort intens AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
*TRACER LES ISOCLINES
```

```
*****
```

```
term1= (2. * SXY);
```

```
term2= (SX- SY);
```

```
term3= ABS (term1/term2);
```

```
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
```

```
ISOCL= sin(2. * ALPHA);
```

```
ISOCL= (ISOCL ** 2);
```

```
trac isocl SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL  
intens= ISOC;
```

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL.res';
```

```
sort intens1 AVS ASCII;
```

```
*****
```

```
ALPHA1 =(ALPHA+10);
```

```
ISOCL1= sin(2. * ALPHA1);
```

```
ISOCL1= (ISOCL1 ** 2);
```

```
trac isocl1 SURFACE cont;
```

```
intens1=ISOCL1  
intens= ISOC;
```

Programmation CASTEM

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL1.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*****

ALPHA2 =(ALPHA+20);

ISOCL2= sin(2. * ALPHA2);

ISOCL2= (ISOCL2 ** 2);

trac isocl2 SURFACE cont;

intens1=ISOCL2
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL2.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*****

ALPHA3 =(ALPHA+30);

ISOCL3= sin(2. * ALPHA3);

ISOCL3= (ISOCL3 ** 2);

trac isocl3 SURFACE cont;

intens1=ISOCL3
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL3.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*****

ALPHA4 =(ALPHA+40);

ISOCL4= sin(2. * ALPHA4);

ISOCL4= (ISOCL4 ** 2);

trac isocl4 SURFACE cont;

intens1=ISOCL4
intens= ISOC;
```

Programmation CASTEM

```
option SORT 'c:\surfer\ISOCL4.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*****

ALPHA5 =(ALPHA+50);

ISOCL5= sin(2. * ALPHA5);

ISOCL5= (ISOCL5 ** 2);

trac isocl5 SURFACE cont;

intens1=ISOCL5
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL5.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*****

ALPHA6 =(ALPHA+60);

ISOCL6= sin(2. * ALPHA6);

ISOCL6= (ISOCL6 ** 2);

trac isocl6 SURFACE cont;

intens1=ISOCL6
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL6.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*****

ALPHA7 =(ALPHA+70);

ISOCL7= sin(2. * ALPHA7);

ISOCL7= (ISOCL7 ** 2);

trac isocl7 SURFACE cont;
```

Programmation CASTEM

```
intens1=ISOCL7
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL7.res';

sort intens1 AVS ASCII;

*****

ALPHA8 =(ALPHA+80);

ISOCL8= sin(2. * ALPHA8);

ISOCL8= (ISOCL8 ** 2);

trac isocl8 SURFACE cont;

intens1=ISOCL8
intens= ISOC;

option SORT 'c:\surfer\ISOCL8.res';

sort intens1 AVS ASCII;

-----

* Evolutions des contraintes Sx Sy suivant LIG27
*-----

SMAX=DIFCONTR;

P27= Noeud 31715;

LG=P16 DROI 30 P27;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LG;

EVOL1=EVOL ROUGE 'CHPO' LG COMPTOM;

DESS EVOL1;

*-----

* Evolutions des contraintes Sx Sy suivant LIG28 45°
*-----

P28= Noeud 28954;

LG=P16 DROI 30 P28;
```

Programmation CASTEM

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LG;

EVOL2=EVOL ROUGE 'CHPO' LG COMPTOM;

DESS EVOL2;

LIST EVOL2;

*-----

* Evolutions des contraintes Sx Sy suivant L11

*-----

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX L11;

EVOL3=EVOL ROUGE 'CHPO' L11 COMPTOM;

DESS EVOL3;

LIST EVOL3;

*-----

* Evolutions des contraintes Sx Sy suivant X

*-----

LC=C5 DROI 30 C3;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LC;

EVOL4=EVOL ROUGE 'CHPO' LC COMPTOM;

DESS EVOL4;

LIST EVOL4;

LC=P5 DROI 30 P10;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE SMAX LC;

EVOL5=EVOL ROUGE 'CHPO' LC COMPTOM;

DESS EVOL5;

LIST EVOL5;

*calcul du facteur de concentration de contrainte Kt

Programmation CASTEM

*suivant la table des contraintes donnée par castem

SMAX=9.328E-2;

SNOM=2.378E-2;

kt=SMAX/SNOM;

LIST Kt;

*calcul du facteur d'intensité de contrainte KI

TOM=DIFCONTR/2;

P= 34. 40.;

LT=P2 DROI 14 P7;

COMPTOM=INT_COMP SURFACE TOM LT;

EVOL2=EVOL ROUGE 'CHPO' LT COMPTOM;

LIST EVOL2;

TOM1= 1.77E-01;

TOM2= 3.201E-01;

r1= 5.30;

r2= 10.06;

ALPHA=45;

a=20;

f1= ((sin(ALPHA))**2+ (sin(ALPHA)*2*((2*r1/a)**0.5))*(sin(3*ALPHA/2))+

(2*r1/a)**0.5

LIST f1;

f1= ((sin(ALPHA))**2+ (sin(ALPHA)*2*((2*r2/a)**0.5))*(sin(3*ALPHA/2))+

(2*r2/a)**0.5

Programmation CASTEM

LIST f2;

f1=1.392;

f2=1.665;

KI= ((2*PI*r1*r2)**0.5)/((f2*(r1)**0.5)-(f1*(r2)**0.5))*(TOM1-TOM2);

LIST KI;

INTENS=RAPPORT2*100;

OPTION SORT 'EPROUVETTE2.RES';

SORT INTENS AVS ASCII;

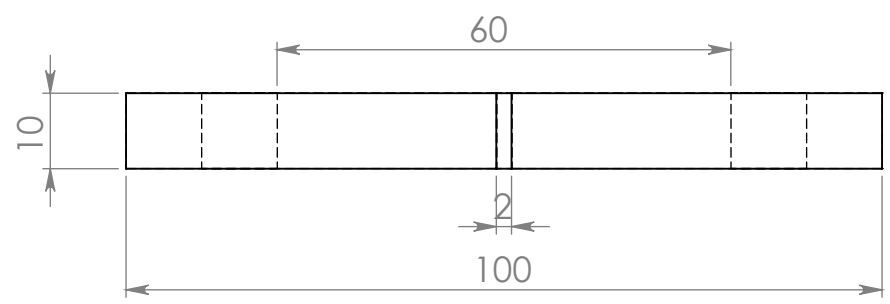
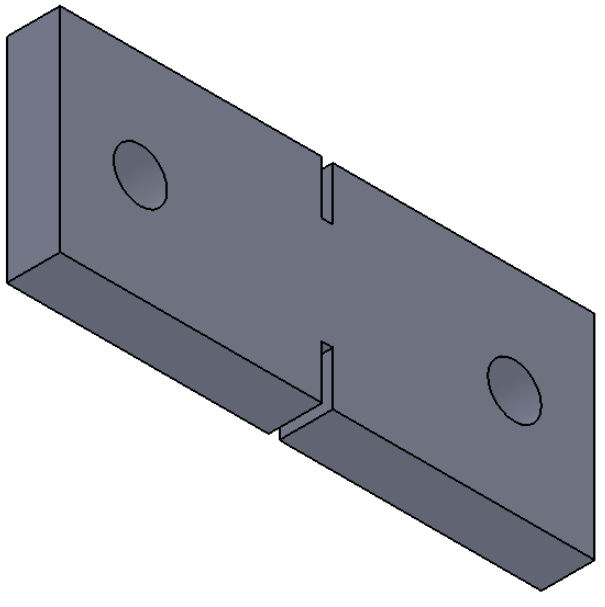
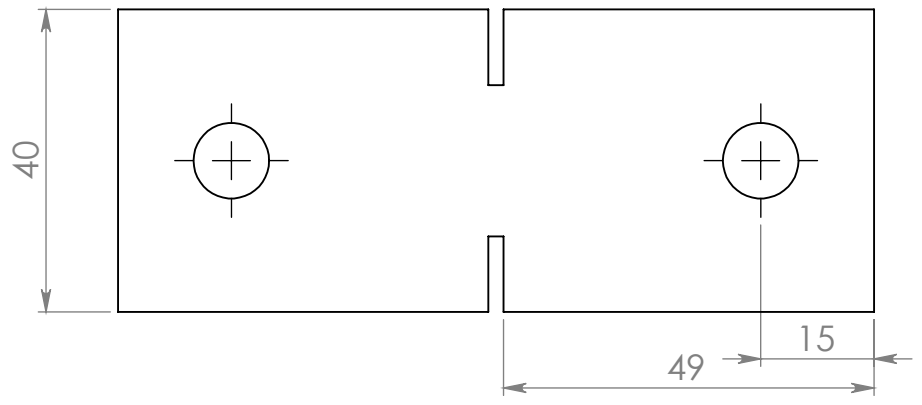
*-----

* Fin du fichier

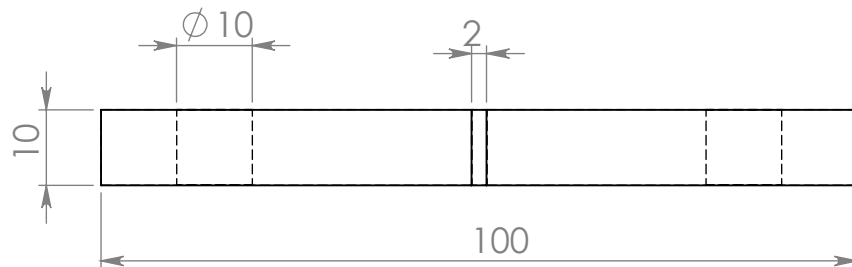
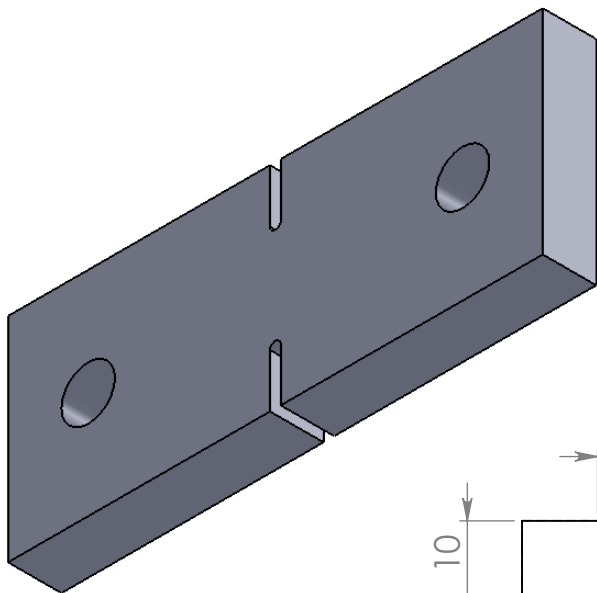
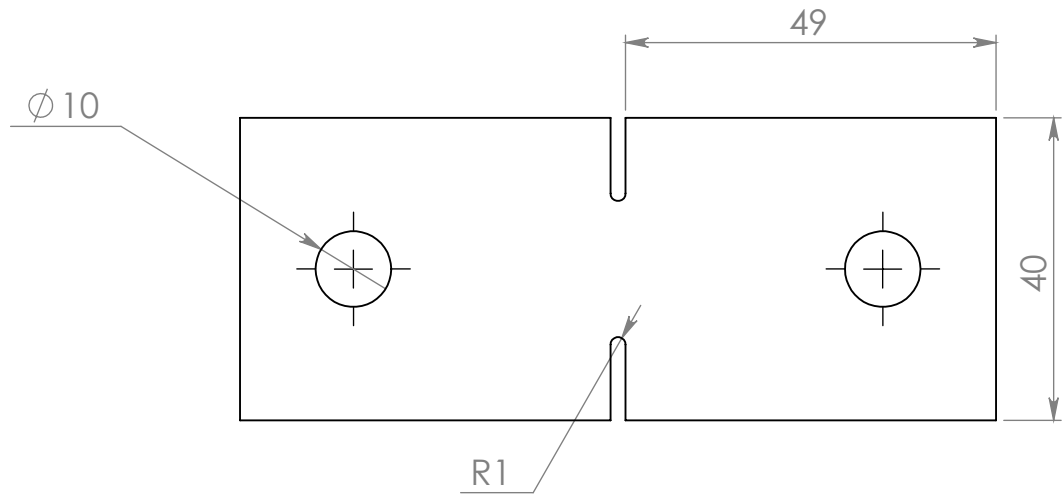
*-----

FIN;


ANNEXE II

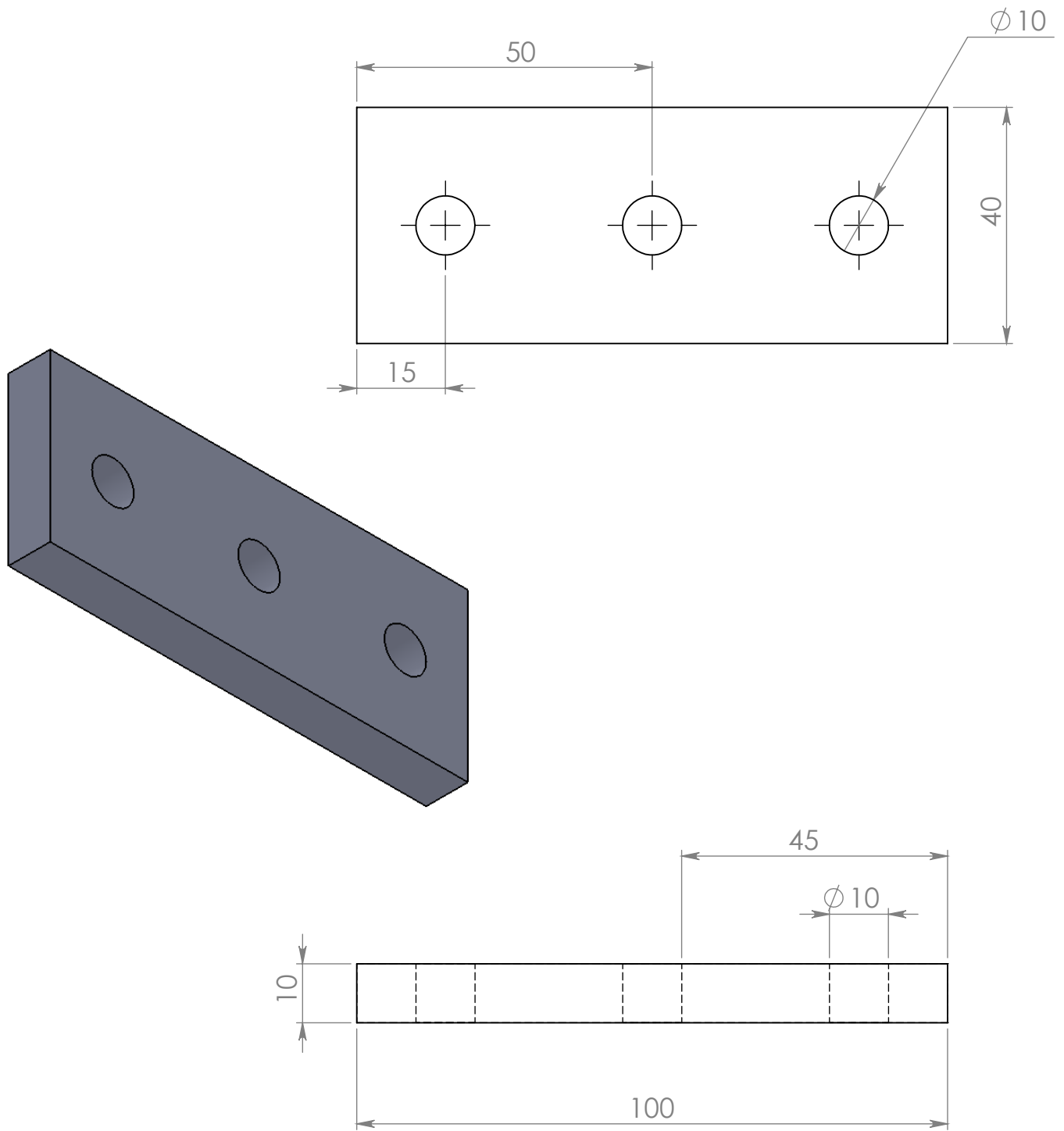


		Plaque Dent en forme U		
RF	NB	DESIGNATION	MATIERE	OBS
Echelle: 1:1		Determination du facteur de concentration de contraintes avec la méthode photoélastique		
		DEPT.GM.UMMTO		MASTER :02
A4		Cherfi Tassadit		2012/2013




Plaque DENT

RF	NB	DESIGNATION	MATIERE	OBS
Echelle: 1:1		Determination du facteur de concentration de contraintes avec la méthode photoélastique		
		DEPT.GM.UMMTO		MASTER :02
A4		Cherfi Tassadit		2012/2013



Plaque trouée

RF	NB	DESIGNATION	MATIERE	OBS
Echelle: 1:1		Determination du facteur de concentration de contraintes avec la méthode photoélastique		
		DEPT.GM.UMMTO		MASTER :02
A4		Cherfi Tassadit		2012/2013