République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAAMERI DE TIZI OUZOU

Mémoire de Master

Faculté des sciences.
Département de Mathématique

Spécialité : Méthodes et Modèles de décision

Thème :

Résolution de problème min-max en programmation linéaire par la méthode ADAPTEE .

Présenté par

BELKACEM Rachid

Dirigé par : **Mr M.AIDENE**

DEVANT LE JURY COMPOSE DE:

PRESIDENTE : Mme BOUARABE.O

EXAMINATRICE : Mme GOUMEZIANE.L

Année universitaire 2015-2016

Remerciements

Nous tenons à témoigner notre reconnaissance à DIEU tout puissant, qui nous a aidé et béni par sa volonté durant toute cette période.

Notre profonde gratitude et sincères remerciements à mon promoteur Mr : M. AIDENE pour sa précieuse assistance, sa disponibilité et l'intérêt qu'il a manifesté pour ce modeste travail.

Nous remercions aussi tous ceux, et celles qui ont contribué de près ou de loin pour l'accomplissement de ce modeste travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

Tout d'abord et avant tout à mes chers parents qui ont veillé

sur moi pour que je me retrouve la où

je suis aujourd'hui.

A mes frères,

A mes sœurs,

A tous les gens qui m'aiment et à

ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Sommaire

INTRODUCTION GENERALE [5 ,6] :

Les problèmes d'optimisation se réfèrent à des dates très lointaines . Les premiers problèmes posés sont de type géométrique : par exemple délimiter une plus grande surface avec une longueur donnée .

Il fallait attendre le seizième siècle (apparition de l'algèbre) pour voir les premiers problèmes d'optimisation de type algébrique (ou géométrique). Parmi les problèmes les plus connus à cette date , le problème du brachistochrone : calcul d'allure de la courbe qu'empruntera une particule glissant entre deux points donnés en un minimum de temps soumise seulement à son poids .

La programmation mathématique se propose pour objet l'étude et la mise en œuvre des algorithmes de résolution .

La présence de terme « programmation » dans le nom donné à cette discipline peut s'expliquer historiquement par le fait que les premières recherches et les premières applications se sont développées dans le contexte de l'économie et de la recherche opérationnelle.

Naturellement, la terminologie employée alors, reflète l'étroite relation existant entre l'activité d'analyse mathématique d'un problème et son interprétation économique (la recherche d'un programme économique optimal).

C'est ainsi que G.B.Dantzig propose en 1949 le terme de programmation linéaire pour l'étude des problèmes théoriques et algorithmiques liées à l'optimisation de fonctions linéaires sous contraintes linéaires.

La programmation linéaire est une branche particulièrement active de la programmation mathématique, qui elle-même constitue une discipline fort importante des mathématiques appliquées , et il y a, à cela, de nombreuses raisons. La première est peut-être le nombre, la variété, et l'importance de ses applications que se soit dans la science de l'ingénieur, ou dans d'autres domaines des mathématiques appliquées.

Mais l'importance de la programmation linéaire vient aussi du fait qu'elle fournit un cadre conceptuel adéquat pour l'analyse et la résolution de nombreux problèmes des mathématiques appliquées.

Dans la plupart des problèmes pratiques, les variables sont bornées. Une composante x_j est bornée inférieurement d_{1j} et supérieurement d_{2j} où $d_{1j} < d_{2j}$.

Si on note d_1 et d_2 les vecteurs bornes inferieure et supérieure respectivement , on obtient les contraintes dites simples (ou directes) suivantes $d_1 \leq x \leq d_2$.

La plus simple (et aussi moins efficace) manière de traiter ces contraintes, consiste à introduire des variables d'écarts x_1 et x_2 , on obtient ainsi les contraintes $x + x_1 = d_2$ et x -$x_2 = d_1$.

Dans ce cas le nombre de variables d'un problème de programmation linéaire à variables bornées : $(p)\begin{cases} f(x) = c'x \rightarrow \max & (1) \\ Ax = b & (2) \\ d_1 \leq x \leq d_2 & (3) \end{cases}$ passe de n à 3n , il est clair que la taille du problème (et donc sa complexité) augmente considérablement si les contraintes simples sont transformées en introduisant des variables d'écarts.

Une méthode particulière du simplexe pour la résolution d'un problème de programmation linéaire à variables bornées, qui traite les contraintes simples $d_1 \leq x \leq d_2$ implicitement a été proposée, simultanément, par G.B.Dantzig et A.Charnes et C.E.Lemke, comme pour la méthode du simplexe, dans les itérations de cette méthode, on passe d'une solution réalisable basique à une autre solution réalisable basique en améliorant la valeur de la fonctionnelle de (P), jusqu'à l'obtention d'une solution optimale .

Remarquant cependant, que la région admissible du problème considéré est un polyèdre de $\mathbb{R}^n$, ses points extrêmes sont des solutions réalisables basiques, chaque solution réalisable basique correspond au point d'intersection de n hyperplants linéairement indépendants. Sachant que le système $Ax = b$ nous fourni m hyperplans linéairement indépendants qui se rencontrent en chaque solution réalisable, à partir des contraintes simples $d_1 \leq x \leq d_2$, on détermine les $n - m$ hyperplants restants pour constituer l'ensemble des n hyperplans linéairement indépendants nécessaires pour définir chaque point extrême .

Par conséquent, avec les contraintes généralisées $Ax = b$ du problème (P), il reste $P = n - m$ degrés de liberté pour le choix des n hyperplants nécessaires, on associe donc à tout point extrême p variables indépendantes (non basiques) fixées soit à la borne inferieure d_1 ou à la borne supérieure d_2, sachant que les m variables basiques sont déterminées uniquement par contraintes généralisées.

Cependant, pour chaque base il y a 2^{n-m} possibilités de fixer les variables non basiques aux bornes inférieures et/ou supérieure, ce qui constitue un réel obstacle à la recherche de la solution réalisable initiale.

Une autre méthode adaptée à la résolution d'un problème de programmation linéaire à variable bornées, sans introduire des variables d'écarts pour transformer les contraintes simples $d_1 \leq x \leq d_2$, a été proposée par R.Gabasov et F.M.Kirillova , cette méthode définit un plan d'appui comme étant la paire $\{x , Q_p\}$ où x est un plan admissible quelconque et Q_p appui du problème. Dans les itérations de cette méthode qui se fait en deux étapes, le changement du plan et le changement de l'appui, sachant que ces deux changements sont indépendants.

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème min-max en programmation linéaire. La résolution d'un tel problème, peut éventuellement se faire par les méthodes de la programmation linéaire, en transformant le problème min-max en un problème linéaire adéquat. Cette transformation engendre une augmentation du nombre de variables qui passe de n à $n + p + 1$, et de nombre de contraintes qui passe de m a $m + p$ où p est le nombre des composantes de la fonctionnelle min-max , d'où l'intérêt de construire des méthodes de résolution de problème min-max sans opérer de transformation, ce qui a fait l'objet de plusieurs travaux que se soit dans le cas de problèmes min-max en général, ou dans le cas particulier de problèmes min-max en programmation linéaire.

Vu l'importance des Problèmes min-max dans de nombreuses applications pour le contrôle optimal, et la programmation multi-objective ainsi que dans le domaine de la décision multicritère, il est nécessaire de développer des méthodes simples et efficaces pour la résolution de ces problèmes.

Le présent travail, s'inspirant essentiellement des travaux de R.Gabasov et F.M.Kirillova, est consacré à la résolution du problème min-max en programmation linéaire.

Dans le premier chapitre, nous rappelons la méthode adaptée pour la résolution de problème de programmation linéaire :

$$(p)\begin{cases} f(x) = c'x \to \max \\ Ax = b \\ d_1 \leq x \leq d_2 \end{cases}$$

Et une étude comparative entre la méthode adaptée et celle de simplexe.

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution du problème min-max avec des contraintes simples en programmation linéaire par la méthode adaptée. Et en suite nous généraliserons les contraintes dans le troisième chapitre.

Nous proposons dans ce chapitre la résolution du problème de programmation linéaire par la méthode ADAPTEE mise en avant par R. Gabasov et F.M. Kirillova [7] et une étude comparative avec la méthode de simplexe .

I.1.PRESENTATION DE PROBLEME :

Considérons le problème suivant :

$$(p_1)\begin{cases} f(x) = c'x \rightarrow \max & (1) \\ Ax = b & (2) \\ d_1 \leq x \leq d_2 & (3) \end{cases}$$

Où x , c, d_1 ,d_2 sont des n-vecteurs réels . b est un m-vecteur réel ; c' transposé de c
$A = A[I, j]$ une $m \times n$ matrice :
$I = \{1 \ldots .m\}$: l'ensemble des indices lignes de A.
$J = \{1 \ldots .n\}$: l'ensemble des indices colonnes de A.

Définition 1 :

Tout vecteur vérifiant les contraintes (2) et (3) est dit plan du Problème (p_1)

- Un plan x^0 est optimal si $c'x^0 = \max\ c'x$
- Un plan x^0 est ε -optimal si $f(x^0) - f(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ réel, donné.

Définition 2 :

L'ensemble des indices $J_B \subset J$,$|J_B|$ = m est dit support (appui) du problème (p_1) et la matrice $A_B = A[I, j_B]$ matrice de support (matrice d'appui) si det $A_B \neq 0$.
De là en choisissant un support j_B , tout vecteur $x(J)$ peut s'écrire sous la forme

$$x(J) = (x(j_B)\ , x(\ j_H))\ , J_H = J - J_B \text{ , Où}$$

$x(j_B)$ est l'ensemble des composantes sur les indices du support,
$x(j_H)$ est l'ensemble des composantes sur les indices hors-support,
De la même manière la matrice A peut s'écrire de la manière suivante

$$A(I, J) = (A(I, J_B), A(I, J_H)\ )$$

En utilisant cette dernière décomposition le système $Ax = b$ prend la forme suivante :

$$Ax = (A(I, J_B), A(I, J_H)\ ).\ (x(j_B)\ , x(\ j_H)) = b.$$

$$Ax = A(I, J_B).\ (x(j_B) + A(I, J_H).\ \ x(\ j_H)) = \text{b}.$$

De là comme A_B est inversible , donc on peut calculer les composent x_B en fonction de x_H : $x_B = x(j_B) = A_B^{-1}(b - A_H.x_H)$, où $A_H = A(I, J_H)$.

Définition 3 :

La paire $\{ x, J_B\}$ formée du plan x et du support J_B , est appelée support-plan du problème (p_1)

Définition 4:

La paire $\{ x, J_B\}$ est dit non-dégénéré si :

$$d_{1j} < x_j < d_{2j} \ , j \in J_B.$$

I-2 FORMULE D' ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE :

Soit $\{ x, J_B\}$ un support plan non dégénéré de départ . Construisons les vecteurs suivants :

$$y' = y'(I) = c'_B A_B^{-1} \ ,$$

$$\Delta_j = y'A(I,j) - c'_B \ , \quad j \in J \ , \quad \Delta' = y'A - c'.$$

Où y' et Δ' sont appelés respectivement vecteurs des potentiels et des estimations

REMARQUE 1 :

Par construction, les composantes de support de vecteur Δ sont nulles $\Delta_B = \Delta(J_B) = 0$.

Considérons un autre plan un autre plan $\bar{x} = x + \Delta\, x$ et calculons la quantité définissant l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\Delta\, f(x) = f(\bar{x}) - f(x) = c'\bar{x} - c'x = c'\Delta\, x$$

$$= c'(J_B).\Delta x\ (J_B) + c'(\,J_H).\,\Delta x\ (J_H)$$

$$= c'_B \Delta\, x_B + c'_H \Delta\, x_H\,.$$

Comme $Ax = b$ et $A\bar{x} = b$ alors

$$A\Delta x = 0 \Rightarrow \mathrm{A_B}\Delta\, x_B + \mathrm{A_H}\Delta\, x_H = 0 \ \Rightarrow \Delta\, x_B = -A_B^{-1}\, A_H \Delta\, x_H \ .$$

En remplaçant $\Delta\, x_B$ dans $\Delta\, f(x)$, on obtient :

$$\Delta\, f(x) = \ (c'_B A_B^{-1}\, A_H + c'_H)\,\Delta\, x_H = -\Delta'_H x_H = -\textstyle\sum_{j\in J_H} \Delta_j\, \Delta\, x_j \qquad (4)$$

Comme $\bar{x}$ est un plan admissible alors , l'accroissement Δx vérifie

$$d_{1j} - x_j \leq \Delta\, x_j \leq \ \ d_{2j} - x_j \ \ , \quad j \in J\ , \qquad (5)$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle (4) sous les contraintes (5) est atteint pour

$$\begin{cases} \Delta\, x_j = d_{1j} - x_j, & \Delta_j > 0 \\ \Delta\, x_j = d_{2j} - x_j, & \Delta_j < 0 \\ d_{1j} - x_j \leq \Delta\, x_j \leq \ d_{2j} - x_j & \Delta_j = 0, j \in J_H \end{cases}$$

Et égal à : $\beta = \beta(x, J_B) = \sum_{j\in J_H^+} \Delta_j \left(x_j - d_{1j}\right) + \sum_{j\in J_H^-} \Delta_j \left(x_j - d_{2j}\right)$ appelée valeur de suboptimalité

$$\text{Où } J_H^+ = \{j \in J_H / , \Delta_j \geq 0\} \ \ , \quad J_H^- = \{j \in J_H / , \Delta_j \leq 0\}$$

De là il en résulte que :

$$\Delta\, f(x) = \ \ f(\bar{x}) - \ f(x) \leq \ \beta(x, J_B) \text{ et pour } \bar{x} = x^0$$

On aura $f(x^0) - f(x) \leq \beta(x, J_B)$
De cette dernière inégalité , on déduit le critère suivant

THEOREME 1 (Critère d'optimalité)
Les relations

$$\begin{cases} x_j = d_{1j}, & \Delta_j \geq 0 \\ x_j = d_{2j}, & \Delta_j \leq 0 \\ d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j} & \Delta_j = 0, \quad j \in J_H \end{cases} \qquad (6)$$

Sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan (x, J_B)

PREUVE
Condition suffisante : si les relation (6) sont vérifiées alors $\beta(x, J_B) = 0$ et comme $\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, J_B) = 0$ pour tout $\bar{x}$,
Donc $f(\bar{x}) \leq f(x)$,$\forall \bar{x} \Longrightarrow x$ est optimal.

Condition nécessaire :
Soit { x, $J_B\}$ un support plant optimal non dégénéré et supposons que les relations (6) ne sont pas vérifiées , c'est-à-dire, il existe un indice $J_0 \in J_H$ te que :
$\Delta_{j_0} > 0, \quad x_{j_0} > d_{1_{j_0}}$ ou $\Delta_{j_0} < 0, \quad x_{j_0} < d_{2_{j_0}}$
Prenons par exemple le 2^{em} cas : $\Delta_{j_0} < 0, x_{j_0} < d_{2_{j_0}}$.
Construisons un nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante :
$\bar{x} = x + \Delta x = \theta . \ell$, θ un réel positif non nul et ℓ est un vecteur (direction).
Il faut trouver ℓ et θ tel que : A$\bar{x} = b$,$d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$. Pour cela sur J_H, posons

$$\Delta x = \begin{cases} 0 & si\ j \in J_H - j_0 \\ \theta & si\ j = j_0 \end{cases}$$

Avec $\theta > 0$

$\Delta x(J_B)$=$-A_B^{-1} A_H \Delta x(J_H)$= $-\theta A_B^{-1} a_{j_0}$, $\bar{x}$ vérifie $A\bar{x} = b$ et pour que $\bar{x}$ vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$, il faut prendre un θ suffisamment petit, d'autant plus que le support plan $\{x, J_B\}$ est non dégénéré.
En portant $\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta . \ell$ dans la formule d'accroissement, on obtient

$$\Delta f(x) = \Delta f(\bar{x}) - f(x) = -\theta \, \Delta_{j_0} \ell_{j_0} > 0.$$

Ce qui contredit l'optimalité de $\{x, J_B\}$

THEOREM 2 (Critère de suboptimalité)

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Pour l' ε-optimalité du plan x, il est suffisant de trouver un tel support J_B , pour lequel la valeur de suboptimalité vérifie l'inégalité suivante

$$\beta(x, J_B) \leq \varepsilon .$$

<u>PREUVE : condition suffisante</u>

Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon \Rightarrow \Delta f(x) \leq \varepsilon \Rightarrow x$. est ε-optimal, ce qui permet d'obtenir le résultat anticipé.

A présent faisant une décomposition de $\beta(x, J_B)$.

Pour cela construisons le problème dual de (P_1) :

$$\begin{cases} \Theta(\lambda) = b'\mu - d'_1\nu + d'_2 w \longrightarrow min \\ A'\mu - \nu + w = c , \qquad \nu \geq 0, w \geq 0 \end{cases}$$

Le vecteur $\lambda = (\mu, \nu, w)$ défini de la manière suivante

$$\mu = \gamma ;$$
$$\nu_j = \Delta_j, w_j = 0 \ \ si\ \Delta_j \geq 0,$$
$$\nu_j = 0, w_j = -\Delta_j \ \ si\ \Delta_j \leq 0 \quad , j \in J$$

Est un plan dual

$\beta = \beta(x, J_B)$= $\sum_{j \in J} \Delta_j \ x_j - \ \ \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j \, d_{1j} - \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j \, d_{2j}$. En introduisant le plan dual défini ci-dessus , on obtient :

$$\beta(x, J_B) = \Delta' x - d'_1\nu + d'_2\delta = \gamma' A x - c'x - d'_1 \ \nu + d'_2 \, w,$$
$$= b'\gamma - c'x - d'_1 \ \nu + d'_2 \, w + c'x^0 - c'x^0$$
$$= (c'x^0 - c'x) + (b'\gamma - d'_1 \ \nu + d'_2 \, w - c'x^0) = (c'x^0 - c'x) + (\Theta(\lambda) - \Theta(\lambda^0)).$$

Donc $\beta(x, J_B) = \beta_x + \beta_B$,

Où β_x =$(c'x^0 - c'x)$ est appelée , l'écart de non optimalité de plan x ,

β_B=$(\Theta(\lambda) - \Theta(\lambda^0))$:l'écart de la non optimalité du support J_B.

REMARQUE 2

A partir de l'expression $\beta(x, J_B)$= $\beta_x + \beta_B$, On conclut que l'amélioration du support plan $\{x, J_B\}$ peut se faire indépendamment les uns des autres .

Si $\beta(x, J_B) > \varepsilon$, alors on passe au changement du support plan $\{x, J_B\}$.

I-3 LE DEROULEMENT DE LA METHODE :

La méthode de résolution est constituée de deux procédures .

- Changement de plan qui consiste à augmenter $c'x$ et un changement du support qui consiste à diminuer $\Theta(\lambda)$.

I-3.1 CHANGEMENT DE PLAN :

Le nouveau plan $\bar{x}$ sera construit de la manière suivante :

$\bar{x} = x + \theta\,\ell$, ℓ : étant la direction admissible , θ (un réel positif) est le pas admissible maximal le long de la direction ℓ. (tel que $f(\bar{x}) \geq f(x)$).
Le vecteur de direction $\ell = (\ell(J_B), \ell(J_H))$ est construit de la manière suivante :
Sur J_H, on pose $\theta = 1$ et

$$\ell_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j, & si \quad \Delta_j > 0 \\ d_{2j} - x_j, & si \quad \Delta_j < 0 \\ 0 & si \quad \Delta_j = 0, j \in J_H \end{cases} \qquad (7)$$

Et $\ell(J_B) = -A_B^{-1}\, A_H . \ell(J_H)$ pour avoir $A\,\bar{x} = b$. pour que $\bar{x}$ vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$

Il faut calculer

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{1j} - x_j}{\ell_j}, & si \quad \ell_j < 0 \\ \dfrac{d_{2j} - x_j}{\ell_j}, & si \quad \ell_j > 0 \\ \infty & si \;\; \ell_j = 0, j \in J_B \;; \end{cases}$$

$$\theta_{j_0} = \min(\theta_j) \text{ pour } j \in J_B$$

Et le pas maximal sera θ^0 =min(1, θ_{j_0}).
De là le nouveau plan sera : $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$ et la valeur de suboptimalité pour le nouveau plan sera : $\beta(\bar{x}, J_B) = \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j \left(\bar{x}_j - d_{1j} \right) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j \left(\bar{x}_j - d_{2j} \right)$

$= \beta(\bar{x}, J_B) + \theta^0 \sum_{j \in J_H} \Delta_j \ell_j$ (en remplaçant les ℓ_j donnés par (7))

$= \beta(x, J_B) - \theta^0\ \beta(x, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B)$.

De cette dernière expression on conclut

- Si $\theta^0 = 1$ alors $\bar{x}$ est optimal
- Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$ alors $\bar{x}$ est ε-optimal .
- Si $(\bar{x}, J_B) > \varepsilon$, on passe au changement du support $J_B \longrightarrow \bar{J}_B$ ($A_B \rightarrow \bar{A}_B$).

I-3.2 CHANGEMENT DU SUPPORT :

Le changement du support $A_B \rightarrow \bar{A}_B$ consiste à faire un changement du coplan Δ vers $\bar{\Delta}$ et du vecteur des potentiels γ vers $\bar{\gamma}$ de telle sorte que :
$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \beta(\bar{x}, J_B)$, pour cela on pose :

$$\begin{cases} \bar{\Delta}(J) = \Delta(J) + \sigma_0 t(J) & \in \mathcal{R}^n \qquad (8) \\ \bar{y}(I) = y(I) + \sigma_0 t(I) & \in \mathcal{R}^m \qquad (9) \end{cases}$$

Où t est la direction de diminution de la fonction duale , σ_0 le pas maximal le long de cette direction .

Calcul de t et σ_0 :

En utilisant la définition de Δ et y on obtient :

$\bar{\Delta} = \bar{y}'A - c' = (y' + \sigma_0 t'(I))A - c' = = \Delta' + \sigma_0 t'(I)A$

De là :

$$t'(J) = t'(J)A(I,J) \Longrightarrow t'(J_B) = t'(J)A(I,J_B) \Longrightarrow t'(I) = t'(J_B).A_B^{-1}$$

Ce qui donne $t'(J_H) = t'(J_B)\, A_B^{-1}\, .A(I, J_H)$

Après calcul du plan $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$, le pas θ^0 est donné par $\theta^0 = \min(1, \theta_{j_0}) = \theta_{j_0}$

$j_0 \in J_B$ on cherchera un indice $J_i \in J_H$ qui va entrer dans la base à la place de j_0 .

Pour cela posons :

$$t_j = \begin{cases} -signe(\ell_{j_0}) & si\ j = j_0 \\ \\ 0 & si\ j \in J_B - j_0 \end{cases}$$

$$t'(J_H) = t'(J_B)\, A_B^{-1}\, .A(I, J_H)$$

Et calculons

$$\sigma_0 = \sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H}(\sigma_j)$$

$$\sigma_j = \begin{cases} -\dfrac{\Delta_j}{t_j} & si\ \Delta_j\, t_j < 0 \\ 0 & si\ \ \Delta_j = 0\, , x_j \neq d_{1j}\, , t_j > 0 \ \ ou \\ & \quad \Delta_j = 0\, , x_j \neq d_{2j}\, , t_j < 0\, , \qquad j \in J_H \\ +\infty & \qquad dans\ \ les\ \ autre\ cas \end{cases}$$

- Le calcul de σ_0 vérifie $\bar{\Delta}_j \Delta_j \geq 0\, , \forall\, j \in J$.
- $\bar{\Delta}(j_1) = 0.$

Le nouveau support sera $\bar{J}_B = (\ J_B - j_0\ ) \cup j_1$,

Et on remarque que la quantité $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$ est égal à :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \sum_{j \in \bar{J}_H^+} \Delta_j\,(\,\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} \Delta_j\,(\bar{x}_j - d_{2j})$$

Où $\bar{J}_{H^+} = \{j \in J_H / \bar{\Delta}_j \geq 0\}$, $\bar{J}_{H^-} = \{j \in J_H / \bar{\Delta}_j \leq 0\}$,

Selon la relation (8) et sur J_B

$\beta(\bar{x},\bar{J}_B) = \sum_{j\in J_H^+} \Delta_j \left(\overline{x}_j - d_{1j}\right) + \sum_{j\in J_H^-} \Delta_j \left(\overline{x}_j - d_{2j}\right) + \sigma_0 \Big(\sum_{j\in J_H^+} t_j \left(\overline{x}_j - d_{1j}\right) +$

$\sum_{j\in J_H^-} t_j \left(\overline{x}_j - d_{2j}\right)\Big)$

$\beta(\bar{x},\bar{J}_B) = (1-\theta^0).\beta(x,J_B) \ + \ \sigma_0 \Big(\sum_{j\in J_H^+} t_j \left(\overline{x}_j - d_{1j}\right) + \ \sum_{j\in J_H^-} t_j \left(\overline{x}_j - d_{2j}\right)\Big)$

$t.\ell = 0$ car $A\,.\ell = 0$ $t'(J_B) = t'(J)A(I,J_B)$ et $t'(J_H) = t'(J_B)\ A_B^{-1}$ .A(I, J_H).

Par construction toutes les composantes de $t'(J_B)$ sont nulles sauf à l'indice j_0.

Posons $\alpha = \alpha_0 = \sum_{j\in J_H^+} t_j \left(\overline{x}_j - d_{1j}\right) + \ \sum_{j\in J_H^-} t_j \left(\overline{x}_j - d_{2j}\right) = -(1-\theta^0).\sum_{j\in J_H^-} t_j\ell_j$

$= (1-\theta^0)t_{j_0}\ell_{j_0}$

$$\alpha = \alpha_0 \quad = (1-\theta^0)t_{j_0}\ell_{j_0}\begin{cases} x_{j_0} + \ell_{j_0} - d_{1j_0} & si\ \ t_{j_0} = 1 \\ -\left(x_{j_0} + \ell_{j_0} - d_{2j_0}\right) & si\ \ t_{j_0} = -1 \end{cases}$$

Donc $\beta(\bar{x},\bar{J}_B) = (1-\theta^0).\beta(x,J_B) - \sigma_0|\alpha_0|$

I.4 ALGORITHME DE RESOLUTION :

- Soit $\{x\ ,J_B\}$ un support plan de départ

I -Calculer

- $y' = c_B'A_B^{-1}$.
- $\Delta' = y'A - c'$.
- $\beta(x,J_B)$

  Si $\beta(x,J_B) = 0$ alors $\{\ x\ ,J_B\ \}$ est optimal arrêt du processus

  Si $\beta(x,J_B) \leq\ \varepsilon$ alors $\{\ x\ ,J_B\ \}$ est ε-optimal arrêt du processus

  Sinon aller à II .

II

- Déterminer le vecteur $\ell(J\ )$,
- Déterminer le vecteur $\overline{x}\ (J\ )$,
- Calculer $(1-\theta^0)\beta$

  Si $(1-\theta^0)\beta \leq \varepsilon$ $\{\ \bar{x}\ ,J_B\ \}$ est ε-optimal arrêt du processus.

  Si $\theta^0 = 1$ alors $\{\ \bar{x}\ ,J_B\ \}$ est optimal arrêt du processus.

  Sinon Aller à III.

III Changement de support

- Calculer le vecteur t

- Calculer $\sigma_{j_1} = \min\limits_{j\in J_H}(\sigma_j)$

- Le nouveau support est $\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1$,
- Aller à I avec un support plan $\{ \bar{x} , \bar{J}_B \}$.

I-5-EXEMPLE D'APLICATION :

Nous allons résoudre le problème suivant par la méthode adaptée et en revanche par la méthode de simplexe :

$$(I)\begin{cases} -x_1+3x_2+x_3+2x_4+4x_5+2x_6+x_7 \longmapsto max \\ \\ 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5+x_6+x_7 = 5 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+2x_4+2x_5+2x_6 = 3 \\ 2x_1+4x_2+x_3+5x_4+3x_5+3x_6+2x_7 = 8 \\ 4x_1+6x_2+5x_3+2x_4+5x_5+x_6+3x_7 = 7 \\ \\ -3 \leq x_1 \leq 5 \\ -2 \leq x_2 \leq 6 \\ -7 \leq x_3 \leq 7 \\ -3 \leq x_4 \leq 8 \\ -2 \leq x_5 \leq 9 \\ -3 \leq x_6 \leq 5 \\ -4 \leq x_7 \leq 7 \end{cases}$$

Avec x'=$(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7)$, ; $d_1 = (-3; -2; -7; -3; -2; -3; -4)$; $d_2 = (5; 6; 7; 8; 9; 5; 7)$, $c' = (-1; 3; 1; 2; 4; 2; 1)$, $b' = (5; 3; 8; 7)$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

I.5.1 RESOLUTION DE L'EXEMPLE AVEC LA METHODE ADAPTEE

Par la méthode adaptée : nous prenons comme solution initiale le vecteur x défini comme suit (en prenant $x_5 = x_6 = x_7 = 0$)

$$x = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 27/22 \\ -8/11 \\ 6/11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad J_B = \{1,2,3,4\}$$

1^{ere} Itération :

Δ	x	ℓ	θ	$\bar{x}$	ι
0	$6/11$	-258/11	13/86	-3	1
0	$27/22$	-251/33	213/502	10/129	0
0	$-8/11$	592/33	255/592	256/129	0
0	$6/11$	326/33	123/296	263/129	0
-41/6	0	9	1	117/86	27/11
1/2	0	-3	1	-39/86	-9/11
1/3	0	-4	1	-26/43	3/11

$\theta^0 = \min(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \theta_1 = 13/86$, $\beta = \beta_1$= 2295/343, (1- $\theta_1)\beta_1$=1471/259
$\sigma_0 = \min(451/162$, 11/18, ∞)=σ_6=11/18
Donc $\bar{J}_B = \{2,3,4,6\}$

$2^{èm}$ Itération :

Δ	x	ℓ	θ	$\bar{x}$	ι
11/18	-3	0	1	-3	13/9
0	10/129	1022/129	382/511	55/27	0
0	256/129	-1460/129	1159/1460	-22/27	0
0	263/129	-876/43	325/1314	-3	1
-16/3	117/86	657/86	1	13/4	8/3
0	-39/86	5621/258	201/803	533/108	0
1/2	-26/43	-146/43	1	-13/9	0

$\theta^0 = \min(\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_6) = \theta_4 = 325/1314$, $\beta = \beta_1$= 575/18
(1- $\theta_1)\beta_1$= 18273/760 $\quad\quad$ $\sigma_0 = \min(\infty, 2, \infty)$=$\sigma_5 = 2$
Donc $\bar{J}_B = \{2,3,5,6\}$

$3^{èm}$ Itération :

Δ	x	ℓ	θ	$\bar{x}$	
7/2	-3	0	1	-3	
0	55/27	115/54	214/115	25/6	
0	-22/27	-23/27	167/23	-5/3	
2	-3	0	1	-3	
0	13/4	0	∞	13/4	
0	533/108	-23/27	857/92	49/12	
1/2	-13/9	-23/9	1	-4	

$$\theta^0 = \min(1, \theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_6) = 1$$

Donc {(-3 , 25/6 , -5/3 , -3 , 13/4 , 49/12 ,-4) } est optimal et la valeur de la fonctionnelle 25

I.5.2 RESOLUTION DE L'EXEMPLE AVEC LA METHODE DU SIMPLEXE :

Et posons $\gamma = x - d_1, \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma \leq d_2 - d_1$

$$(II)\begin{cases} -2y_1+3y_2+y_3+2y_4+4y_5+2y_6+y_7-34 \longmapsto max \\ 3y_1+2y_2+y_3+3y_4+5y_5+y_6+y_7 = 51 \\ 3y_1+2y_2+3y_3+2y_4+2y_5+2y_6 = 53 \\ 2y_1+4y_2+y_3+5y_4+3y_5+3y_6+2y_7 = 67 \\ 4y_1+6y_2+5y_3+2y_4+5y_5+y_6+3y_7 = 97 \\ y_1+y_8 = 8 \\ y_2+y_9 = 8 \\ y_3+y_{10} = 14 \\ y_4+y_{11} = 11 \\ y_5+y_{12} = 11 \\ y_6+y_{13} = 8 \\ y_7+y_{14} = 11 \end{cases} \qquad avec \;\; y_i \geq 0 \quad i = \overline{1 \quad 14}$$

Le problème (II) est équivalent à (I) , écrit sous forme matricielle suivant :

$$(II)\begin{cases} \varphi' \, Y + \alpha \longrightarrow \max \\ \phi \, Y = \gamma \, , y_i \geq 0 \;\; , \;\; i = \overline{1 \quad 14} \end{cases}$$

$$\varphi = (-2\ 3\ 1\ 2\ 4\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ )$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 3&2&1&3&5&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 3&2&3&2&2&2&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 2&4&1&5&3&3&2&0&0&0&0&0&0&0 \\ 4&6&5&2&5&1&3&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$Y = (y_1; y_2; y_3; y_4; y_5; y_6; y_7; y_8; y_9; y_{10}; y_{11}; y_{12}; y_{13}; y_{14})$$

1^{ere} Itération :

ON a $J = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$, $J_B = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14\}$

$$J_H = \{1,2,13\}$$

On prend comme solution initiale :

$Y =$ (0 , 0 , 407/49 , 62/49 , 234/49 , 8 , 344/49 , 8 , 8 , 279/49 , 477/49 , 305/49 , 0 , 195/49) , dressons alors le premier tableau du simplexe :

C / λ					-2	3	1	2	4	2	1	0	0	0	0	0	0	0
	Base	y_1	$A_B^{-1}a_2$	θ_j	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
37/49	a_3	407/49	26/49	407/49	3	2	1	3	5	1	1	0	0	0	0	0	0	0
-5/49	a_4	62/49	16/49	62/16	3	2	3	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
$-3/49$	a_5	234/49	$-6/49$	/	2	4	1	5	3	3	2	0	0	0	0	0	0	0
6/49	a_6	8	0	/	4	6	5	2	5	1	3	0	0	0	0	0	0	0
0	a_7	344/49	54/49	344/54	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	a_8	8	0	/	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	a_9	8	1	8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	a_{10}	279/49	$-26/49$	/	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	a_{11}	477/49	$-16/49$	/	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
74/49	a_{12}	305/49	6/49	305/6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	a_{14}	195/49	$-54/49$	/	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
				Δ_j	212/49	-59/49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	74/49	0

On remarque que la relation $\Delta_j \geq 0$, $\forall j \in J_H$ n'est pas vérifiée , donc la solution réalisable de base n'est pas optimale , on doit alors changer la base de manière suivante : $j_0 = 2$ de là le vecteur a_2 va rentrer dans la nouvelle base .

En prenant $\theta^0 = \min\{\theta_3, \theta_4, \theta_7, \theta_9, \theta_{12}\}$ =θ_4=62/16 le vecteur a_4 va sortir de la base

2^{em} Itération :

$$J_B = \{2,3,5,6,7,8,9,10,11,12,14\}$$
$$J_H = \{1,4,13\}$$

C \ λ					-2	3	1	2	4	2	1	0	0	0	0	0	0	0
	Base	y_2	$A_B^{-1}a_{13}$	θ_j	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
23/48	a_2	62/16	$-5/2$	/	3	2	1	3	5	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1/2	a_3	25/4	1	25/4	3	2	3	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
19/24	a_5	21/4	0	/	2	4	1	5	3	3	2	0	0	0	0	0	0	0
-17/48	a_6	8	1	8	4	6	5	2	5	1	3	0	0	0	0	0	0	0
0	a_7	11/4	3	11/12	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	a_8	8	0	/	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	a_9	33/8	5/2	66/40	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	a_{10}	31/4	-1	/	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	a_{11}	11	0	/	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
-3/2	a_{12}	23/4	0	/	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	a_{14}	33/4	-3	/	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
				Δ_j	245/48	0	0	59/16	0	0	0	0	0	0	0	0	-3/2	0

On remarque que la relation $\Delta_j \geq 0$,$\forall j \in J_H$ n'est pas vérifiée , donc la solution réalisable de base n'est pas optimale , on doit alors changer la base de manière suivante $j_0 = 13$ de là le vecteur a_{13} va rentrer dans la nouvelle base .

En prenant $\theta^0 = \min\{\theta_3, \theta_6, \theta_7, \theta_9\}$ =θ_7=11/12 le vecteur a_7 va sortir de la base

3^{em} Itération :

$$J_B = \{2,3,5,6,8,9,10,11,12,13,14\}$$
$$J_H = \{1,4,7\}$$

C \ λ			-2	3	1	2	4	2	1	0	0	0	0	0	0	0
	Base	y_3	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
1/2	a_2	37/6	3	2	1	3	5	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	a_3	16/3	3	2	3	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
1/2	a_5	21/4	2	4	1	5	3	3	2	0	0	0	0	0	0	0
0	a_6	85/12	4	6	5	2	5	1	3	0	0	0	0	0	0	0
0	a_8	8	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	a_9	11/6	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	a_{10}	26/3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	a_{11}	11	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	a_{12}	23/4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	a_{13}	11/12	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	a_{14}	11	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
			9/2	0	0	2	0	0	1/2	0	0	0	0	0	0	0

On remarque que la relation $\Delta_j \geq 0$,$\forall j \in J_H$ est vérifiée , donc la solution réalisable de base est optimale et l'Algorithme s'arrête .

La solution de base de problème (II) est : $Y = (y_1; y_2; y_3; y_4; y_5; y_6; y_7; y_8; y_9; y_{10}; y_{11}; y_{12}; y_{13}; y_{14})$
= (0 ;37/6 ;16/3 ;0 ;21/4 ;85/12 ;0 ;8 ; 11/6 ;26/3 ;11 ;23/4 ;11/12 ;11) avec la valeur de l'objective de 25 qui correspond à la solution :

$x = (-3\,,25/6\,,-5/3\,,-3\,,13/4\,,49/12\,,-4\,)$ de problème (I) avec 25 la valeur de l'objective.

I.5.3 COMPARAISON ENTRE LA METHODE ADAPTEE ET LA METHODE DU SIMPLEXE :

- Les deux méthodes ont des algorithmes de résolution finis .
- On a remarqué d'après l'exemple que la résolution de problème (I) par la méthode de simplexe nécessite l'ajout de variables supplémentaires et d'équations ce qui entraine plus de calculs en comparant avec la méthode ADAPTEE
- La solution converge plus rapidement vers l'optimale dans la méthode ADAPTEE que dans la méthode du simplexe et cela en fait que la recherche de la solution optimale dans la méthode de simplexe se réalise par le saut sur les sommets décrits par le polyèdre du contraintes alors que la méthode ADAPTEE prend les points à l'intérieur du polyèdre .
- La méthode ADAPTEE nous permet de trouver une solution ε-optimal.

I.5.4 RESOLUTION DE L'EXEMPLE SOUS LPSOLVE DE MATLAB :[1]

- **MATLAB** est un langage de haute performance pour le calcul technique. Il intègre le calcul, la visualisation et la programmation dans un environnement simple d'utilisation où les problèmes et les solutions sont exprimées en notation mathématique familier. Les utilisations typiques comprennent

- Math et de calcul
- développement Algorithme
- L'acquisition des données
- Modélisation, simulation et prototypage
- L'analyse des données, l'exploration et la visualisation
- graphiques scientifiques et techniques
- Le développement d'applications, y compris graphique de l'interface utilisateur

- **MATLAB et lpsolve :[2]**

lpsolve est appelable à partir de MATLAB via une interface externe ou MEX-fonction. En tant que tel, il semble que lpsolve est entièrement intégré avec MATLAB. Matrices peuvent être directement transférés entre MATLAB et lpsolve dans les deux sens. L'interface complète est écrit en C de sorte qu'il a des performances maximales. L'ensemble API (Application Programming Interface) lpsolve est mis en œuvre avec le spécifique de certains supplémentaire pour MATLAB (en particulier pour le soutien de la matrice). Donc, vous avez le plein contrôle à la fonctionnalité complète de lpsolve via le mxlpsolve pilote MATLAB. Si vous trouvez que cela implique trop de travail pour résoudre un modèle lp alors vous pouvez également travailler via haut niveau M-fichiers qui peuvent rendre les choses beaucoup plus facile.

- **INTRODUCTION DE L'EXEMPLE SOUS LPSOLVE DE MATLAB : [3]**

lp_solve.m est le script qui utilise l'API pour créer une fonction de niveau supérieur appelé lp_solve. Cette fonction accepte comme arguments des matrices et des options pour créer et résoudre un modèle lp.

Cette figure illustre l'utilisation de la fonction lp_solve :

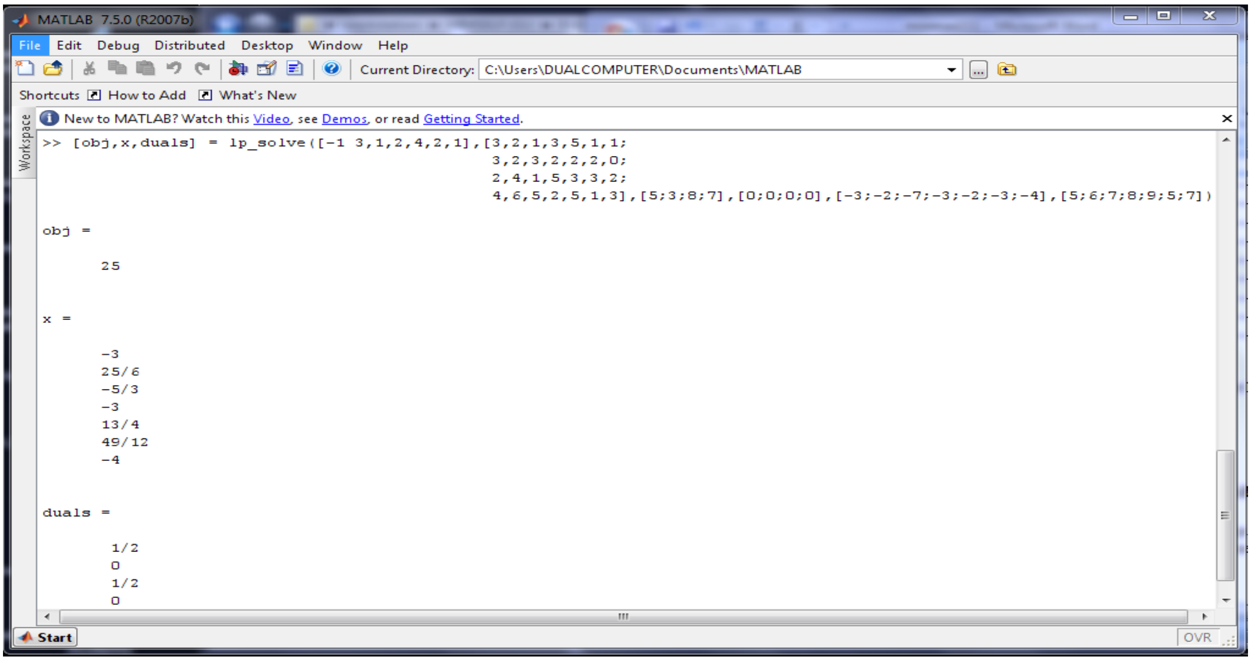

Figure 1 montre la création et résolution d'un programme LP SOUS LPSOLVE DE MATLAB

I.5.5 RESOLUTION DE L'EXEMPLE SOUS LPSOLVE :[4]

Cette figure illustre la création de programme LP sous logiciel lpsolve :

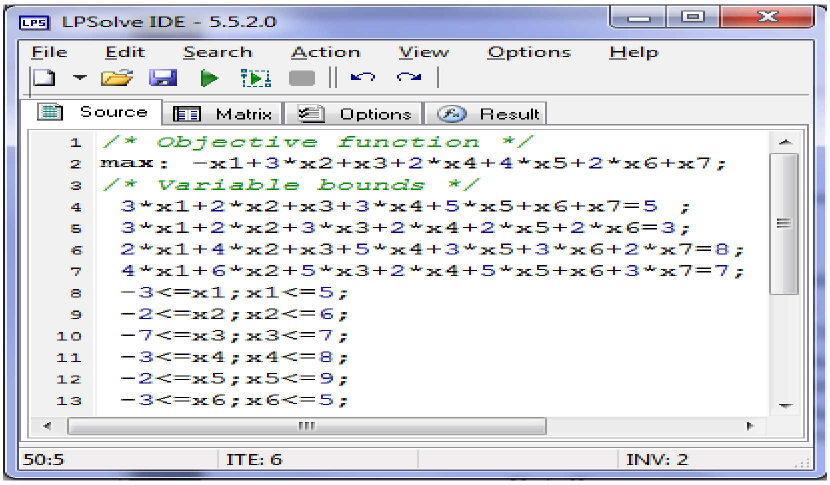

Figure 2 montre la création d'un programme LP SOUS LPSOLVE

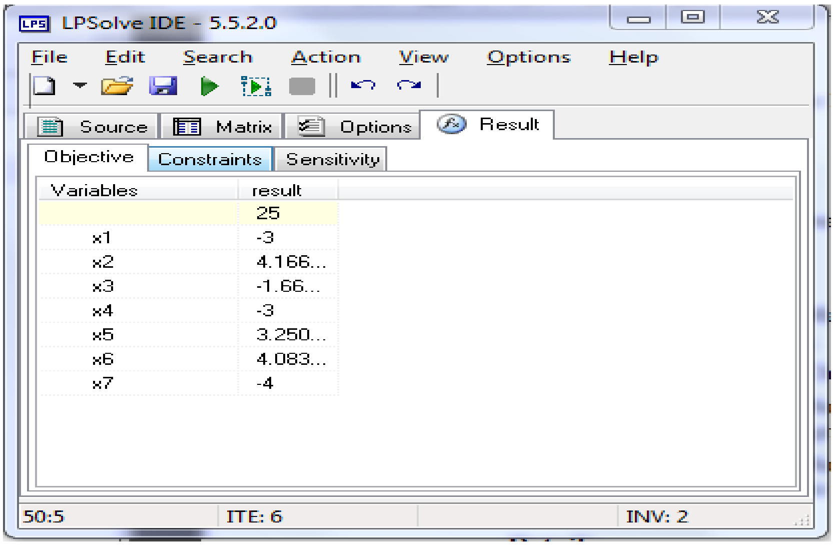

Figure 3 AFICHAGE DES RESULTATS DE PROGRAMME LP :

CONCLUSION :

- Nous avons vu dans ce chapitre les avantages de la méthode ADAPTEE en comparant à celle du simplexe. La méthode ADAPTEE est plus avantageuse que la méthode du simplexe dans le cadre de la complexité et cela le fait qu'elle converge rapidement vers l'optimal et l'ajout de variables supplémentaires et d'équations dans le simplexe entraine plus de calculs.

INTRODUCTION :

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à la résolution de problème min-max avec des contraintes simples en programmation linéaire avec la méthode ADAPTEE mise en avant par R. Gabasov et F.M. Kirillova [7] et en suit nous avons représenté des exemples pour appliquer la méthode .

II-1 PRESENTATION DU PROBLEME :

Considérons le problème Min-max en programmation linéaire suivant

$$(\text{P2})\begin{cases} f(x) = \min\limits_{k\in K}\left(c_k^{'}x + \alpha_k\right) \longrightarrow \underset{x}{Max}, \\ \qquad d_1 \leq x \leq d_2, \end{cases}$$

Où $x, d_1, , d_2$ sont des n-vecteurs réels , $c_k, k \in K$ des n-vecteurs , α_k des scalaires $c_k^{'}$ le transposé du vecteur c_k $k \in K$.

$K = \{1..P\}$: L'ensemble des indices des composantes de la fonctionnelle f .

Définition 1 :

- Tout vecteur x vérifiant $d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j},\ j \in J,$ est dit plan du problème (P2).
- Un plan x^0 est optimal si il réalise le maximum de la fonctionnelle du problème (p2).
- Un plan x^0 est ε-optimal si $f(x^0) - f(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$, (ε >0 réel ,donné)

Définition 2 :

Soit x un plan du problème (p2) et considérons l'ensemble $K(x)$ défini comme suit

$$K(x) = \left\{k \in K \quad , f(x) = c_k^{'}x + \alpha_k\right\}$$

$K(x)$, est appelé ensemble des indices des composantes actives de la fonctionnelle. $K(x) \neq \emptyset$ pour tout plan x du problème (P2) .

On définit le vecteur des écarts des composantes de la fonctionnelle f :

$$\omega(K) = (\omega_k \ , k \in K)$$

$$\omega_k = \omega_k(x\ ) = c_k^{'}x + \alpha_k - f(x), k \in K \ , \qquad (1)$$

Conséquences : En prenant un autre plan $\bar{x} = x + \Delta x$, on construit le vecteur

$$\Delta\omega_k = \omega_k(\bar{x}) - \omega_k(x), k \in K$$

- $\omega_k(x) \geq 0 \quad , k \in K.$
- $\min_{k \in K} \omega_k(x) = 0$
- $\Delta\omega_k \geq -\omega_k, k \in K$ en effet $\Delta\omega_k = \omega_k(\bar{x}) - \omega_k(x) = c_k^{'}\Delta + f(x) - f(\bar{x})$
  $k \in K$, et on remarque que $\Delta\omega_k + \omega_k = c_k^{'}\Delta x - f(\bar{x}) + c_k^{'}x + \alpha_k$

$$= c_k^{'}(x + \Delta x) + \alpha_k - f(\bar{x})$$
$$= c_k^{'}(\bar{x}) + \alpha_k - f(\bar{x}) \geq 0$$
$$\Rightarrow \Delta\omega_k \geq -\omega_k , k \in K$$

II.2 SUPPORT DE LA FONCTIONNELLE :

Considérons les sous-ensemble d'indices J_f , K_f , $J_f \subset J$, $K_f \subset K$, tel que

$$|K_f| = |J_f| + 1$$

Et formons la matrice suivante :

$$\Delta_f = (\Delta(K_f, J_f), \mathrm{e}(K_f)) \ , \qquad (2)$$

Où :

$$\Delta(K, J) = -C(K, J) \text{ et } \mathrm{e}(K) = (e_k = 1 , k \in K) . \qquad (3)$$

$C(K, J)$ est la matrice formée par P vecteurs lignes $c_k^{'}$, $k \in K$.

L'ensemble $Q_f = \{ K_f, J_f \}$ est appelé support de la fonctionnelle si la matrice Δ_f inversible

II.3 SUPPORT PLAN :

La paire $\{x, Q_f\}$ formée du plan x et du support Q_f est appelée support plan du problème (P2)

Le support plan $\{ x, Q_f\}$ est dit non dégénéré si :

- $d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j}$ $j \in J_f$,
- $c_k^{'}x + \alpha_k > f(x), k \in K_H = K - K_f$.

II-4 ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE :

En utilisant le support Q_f, on construit le vecteur des estimations $\Delta(\ J\ )$:

$$\Delta'(\ J\ ) = \gamma'\,(K_f)\ .\ \Delta(\ K_f, J\ )\ , \qquad (4)$$

Où $\gamma'\,(K_f)$ est la dernière ligne de la matrice Δ_f^{-1} , sachant que cette dernière peut se mettre sous la forme suivante

$$\Delta_f^{-1} = \begin{pmatrix} D\ (J_f, K_f \\ \gamma'(K_f) \end{pmatrix} \qquad (5)$$

De là on a les relations suivantes :

- $\gamma'\,(K_f) = (0'(J_f), 1).\Delta_f^{-1}$ (6)
- $\sum_{k \in K_f} \gamma_k = 1$ (7)
- $\Delta(\ J_f) = 0(J_f)$. (8)

- **DEFINITION**
  - Le support Q_f de la fonctionnelle est dit régulier si $\gamma_k \geq 0, k \in K_f$.
  - Le support $Q_f\{\ K_{f,}\ J_f\ \}$ avec $J_f = \emptyset$ est régulier, par définition.

Par la suite , on ne considère que des supports réguliers .

Considérons un support plan $\{\ x\ , Q_f\ \}$ de départ du problème (P2) et soit un autre plan $\bar{x} = x + \Delta\ x$, calculons la quantité suivante .

$$\Delta\ f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \quad . \qquad (9)$$

De la relation (1) et du plan $\bar{x}$, on a

$\bar{\omega}_k = c_k^{'}\bar{x} + \alpha_k - f(\bar{x})$, $k \in K$, de là il en résulte que :

$$\bar{\omega}\,(K) - \omega(K) = \Delta\omega(K) = -\Delta\,(K, J).\Delta x - e(K).\Delta f\ (x), \qquad (10)$$

Qui nous donne le système de cramer suivant :

$$\Delta\omega(K_f) = -(\Delta\,(K_f,J_f), e(K_f)\,)\begin{pmatrix}\Delta\, x_f \\ \Delta\, f(x)\end{pmatrix} - \Delta\,(K_f,J_H), \Delta x_H$$

De la on obtient la solution suivante :

$$\begin{pmatrix}\Delta\, x_f \\ \Delta\, f(x)\end{pmatrix} = -\Delta_f^{-1}\Delta\omega(K_f) - \Delta_f^{-1}(\Delta(K_f,J_H)\Delta x_H \;.$$

En utilisant la relation (5), on obtient

$$\Delta x\,(J_f) = -D(J_f,K_f).\,\Delta(K_f,J_H)\Delta x\,(J_H) - D(J_f,K_f)\Delta\omega(K_f) \quad , \qquad (11)$$

$$\Delta\, f(x) = -\Delta'(J_H)\,\Delta\, x\,(J_H) - \gamma'(K_f)\Delta\omega(K_f) \quad , \qquad (12)$$

Le maximum de (12) sous les contraintes suivantes :

- $d_{1j} - x_j \leq \Delta\, x_j \leq d_{2j} - x_j\;, j \in J_H$
- $\Delta\omega_k \geq -\omega_k \quad , \quad k \;\in K_f$

Est atteint pour :

$$\begin{cases}\Delta\, x_j = d_{2j} - x_j \quad si \quad \Delta_j < 0 \\ \Delta\, x_j = d_{1j} - x_j \quad si \quad \Delta_j < 0 \\ \Delta\omega_k = -\omega_k\;; k \in K_f, J \in J_H\end{cases}$$

Et est égal à :

$$\beta = \beta(x,Q_f) = \sum_{j\in J_H^+}\Delta_j\,(\,x_j - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-}\Delta_j\,(x_j - d_{2j}) + \sum_{k\in K_f}\gamma_k\,\omega_k \;(13)$$

Appelée la valeur de suboptimalité du support plan $\{\,x\,, Q_f\,\}$,

Où $J_H^+ = \{j \in J_H /\;\Delta_j \geq 0\}$, $J_H^- = \{j \in J_H / \,\Delta_j \leq 0\}$

De la on a :

$\Delta\, f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x,Q_f)$ et pour $\bar{x}$=x^0

On obtient :

$$0 \leq f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x,Q_f) \qquad (14)$$

De cette dernière inégalité , on déduit le critère suivant :

THEOREME : (Critère d'optimalité)
Les relations suivantes

$$\begin{cases} x_j = d_{1j}, & \Delta_j \geq 0 \\ x_j = d_{2j}, & \Delta_j \leq 0 \\ d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j} & \Delta_j = 0, \qquad j \in J_H \\ \omega_k = 0 \ si \ \gamma_k \geq 0 \ , k \in K_f \\ \omega_k \geq 0 \ si \ \gamma_k = 0 \ , k \in K_f \end{cases} \qquad (15)$$

Sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence , elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{ x , Q_f \}$,

Condition suffisante : Soit $\{ x , Q_f \}$ un support plan du problème (P2) , pour lequel les conditions (15) sont verifiées , alors la relation (13) donne $\beta(x, Q_f) = 0$. En outre quelque soit $\bar{x}$, d'après la relation (15) $f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, Q_f) = 0$, d'où l'optimalité du support plan $\{ x , Q_f \}$.

Condition nécessaire . soit $\{ x , Q_f \}$ un support optimal non dégénéré et supposons que les conditions (16) ne sont pas vérifiées , on a alors les deux cas possibles :

1) $\exists j_0 \in J_H \ / \ \Delta_{j_0} > 0, \quad x_{j_0} > d_{1j_0}$ ou $\Delta_{j_0} < 0 \ , \ x_{j_0} < d_{2j_0}$.

2) $\exists K_0 \in K_f \ / \ \gamma_{k_0} > 0, \quad \omega_{k_0} > 0.$

Construisons alors un nouveau plan $\bar{x} = x + \theta \ \ell$ avec $\theta > 0$ .pour cela nous choisissons le premier cas :

$$\exists j_0 \in J_H \ / \ \Delta_{j_0} > 0, \quad x_{j_0} > d_{1j_0}.$$

Posons ℓ_{j_0} = signe (α_0) où $\alpha_0 =(d_{1j_0} - x_{j_0}$ si $\Delta_{j_0} > 0 \quad et \quad x_{j_0} > d_{1j_0}$,

$\ell_j = 0$, $\forall \ j \in J_{H-j_0}$, $\Delta\omega_k = 0 \ , k \in K_f$ et

$$\ell(J_f) = -D(J_f, K_f)\,\Delta(J_f, K_H)\ell(J_H) \text{ (d'après la relation (12))}$$

$$\Delta_{j_0} > 0 \quad et \quad x_{j_0} > d_{1j_0} , \exists \theta_1 > 0 \ / \ \bar{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta_1 \ \geq d_{1j_0} .$$

On obtient donc dans ce cas $\bar{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta_1$signe (α_0) , $\bar{x}_j = x_j$, $\forall \ j \in \ J_H - J_0$

$\Rightarrow \forall \ j \in \ J_H$, $\bar{x}_j = x_j - \theta_1 \ell_j$, $\theta_1 > 0$,$d_{1j} \leq x_j - \theta_1 \ell_j = \bar{x}_j \leq d_{2j}$

D'autre part , puisque $\{ x , Q_f \}$ est un support plan non dégénéré , on a :

$d_{1j} < x_j < d_{2j}\ \forall\ j \in J_f$ il existe $\theta_2 > 0$ tel que $d_{1j} \leq x_j - \theta_2 \ell_j \leq d_{2j}$,$\forall\ j \in J_f$.

Donc pour θ seffisament petit $\bar{x} = x + \theta\ \ell$,est un plan du probléme (P2) et on obtient : $\Delta f(x) = -\theta \Delta_{j_0}$ signe $(\alpha_0) > 0$, ce qui contredit l'optimalité du support plan $\{ x , Q_f \}$

Le deuxième cas :

Posons $\Delta\omega_{k_0} = -\theta_1 \omega_{k_0}$, $\theta_1 > 0$, $\Delta\omega_k = 0$,$\forall\ k \in K_f - k_0$ et $\ell(J_H) = 0(J_H)$

$\ell(J_f) = D(J_H, K_f)\ \omega(K_f)$ (d'après la relation (12)).

Comme est un support plan non dégénéré , alors on a :

$d_{1j} < x_j < d_{2j} \forall\ j \in J_f$ il existe $\theta_2 > 0$ tel que $d_{1j} \leq x_j - \theta_2 \ell_j \leq d_{2j}$,$\forall\ j \in J_f$.

Donc pour θ seffisament petit $\bar{x} = x + \theta\ \ell$,est un plan du probléme (P2) et on obtient :

$\Delta f(x) = \theta . \gamma_{k_0} \omega_{k_0} > 0$, ce qui contredit l'optimalité du support plan $\{ x , Q_f \}$
.

THEOREME : (Critère de suboptimalité)

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel donné . pour l' ε-optimalité du plan x , il est suffisant de trouver un support Q_f pour lequel la valeur de suboptimalité vérifie l'inégalité suivant :

$$\beta\ (x, \mathrm{Q_f}) \leq \varepsilon . \qquad (16)$$

Preuve : Condition suffisante

Si $(x, Q_f) \leq \varepsilon$, alors de la relation (15) ; on obtient

$\Delta\ f(x) \leq \varepsilon$, ce qui implique que x est ε-optimal .

Faisons une décomposition de $\beta(x, Q_f)$

Pour cela nous construisons la problème dual de (P2) suivant

$$(D2)\begin{cases} \Theta\,(X) = \lambda'\alpha - \nu' d_1 + w' d_2 \qquad \longrightarrow \min \\ -\lambda'(K).\,C(\,K,J) - \nu'(\,J\,) + w'(J) = 0\,'\,(\,J\,) \\ \lambda'(K).\,e\,(K) = 1, \\ \lambda \in \mathbb{R}_+^p \qquad \nu\,, w \in \mathbb{R}_+^n \end{cases}$$

Le vecteur $X = (\lambda, \nu\,, w)$, construit de la manière suivante

$$\begin{cases} \lambda'\left(K_f\right) = \left(0\,'\left(J_f\right), 1\right)\Delta_f^{-1} \qquad ; \lambda'(K_H) = 0 \\ \nu_j = \Delta_j\,, w_j = 0 \quad si \qquad \Delta_j \geq 0 \\ \nu_j = 0\,, w_j = -\Delta_j \quad si \quad \Delta_j < 0 \end{cases}$$

Est un plan du problème dual (D2)

$$\beta\left(x, Q_f\right) = \sum_{j\in J_H^+} \Delta_j\left(\,x_j - d_{1j}\right) + \sum_{j\in J_H^-} \Delta_j\left(x_j - d_{2j}\right) + \sum_{k\in K_f} \gamma_k\,\omega_k \qquad .$$

En introduisant le plan ci-dessus , on obtient :

$$\beta\left(x, Q_f\right) = -\sum_{j\in J_H^+} \Delta_j\left(\,d_{1j}\right) - \sum_{j\in J_H^-} \Delta_j\left(d_{2j}\right) + \sum_{j\in J_H} \Delta_j\left(x_j\right) + \sum_{k\in K_f} \gamma_k\,\omega_k$$

$$\gamma'\left(\,K_f\,\right)\ \omega\left(\,K_f\,\right) = -\Delta'(J_H).\,x(\,J_H\,) + \gamma'\left(\,K_f\,\right)\ \alpha\left(\,K_f\,\right) - f(x)$$

$$\beta\left(x, Q_f\right) = \lambda'\alpha - \nu' d_1 + w' d_2 - f(x) = \lambda'\alpha - \nu' d_1 + w' d_2 - f(x) + f(x^0) - \Theta\,(X^0)$$

$$= (\,\Theta\,(X\,) - \Theta\,(X^0)\,)\ + (\,f(x^0) - f(x)\,)$$

Désignons par :

$$\beta(x) = (\,f(x^0) - f(x)\,)\,,$$

$$\beta\left(Q_f\right) = (\,\Theta\,(X\,) - \Theta\,(X^0)\,)$$

Donc $\beta\left(x, Q_f\right) = \beta(x) + \beta\left(Q_f\right)$,

Où $\beta(x)$ est appelé , l'écart de la non optimalité du plan x ,

$\beta\left(Q_f\right)$ est appelé l'écart de la non optimalité du support Q_f.

REMARQUE

A partir de l'expression $\beta(x, Q_f) = \beta(x) + \beta(Q_f)$, on conclu que l'amélioration du support plan $\{ x , Q_f \}$, peut se faire indépendamment les un de autre .

Si $\beta(x, Q_f) > \varepsilon$, alors on passe au changement du support plan $\{ x , Q_f \}$

II-5 ITERATION DE L'ALGORITHME

La méthode de résolution est constituée de deux procédures

- Changement de plan
- Changement de support .

II-5-1 LE CHANGEMENT DE PLAN

Le changement du plan $\bar{x}$, a pour effet d'augmenter la valeur de la fonctionnelle

$$f \,:\, f(\bar{x}) \geq f(x)$$

On construit donc un nouveau plan $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$ où le vecteur ℓ est la direction de l'amélioration du point x et θ^0 $(\theta^0 \geq 0)$ le pas maximal le long de cette direction

Le vecteur directeur ℓ est défini comme suit :

$$\ell_j \begin{cases} d_{1j} - x_j, & si \qquad \Delta_j > 0 \\ d_{2j} - x_j, & si \qquad \Delta_j < 0 \quad , j \in J_H \\ 0 & sinon \end{cases}$$

En vertu du fait que $\Delta\,\omega\,(K_f) \geq -\omega(K_f)$

On peut écrire $\Delta\,\omega\,(K_f) = -\theta\omega(K_f)$ avec $\theta \leq 1$, ce qui résulte à partir de (11)

$$\ell\,(J_f) = D(J_f, K_f)\left(-\Delta(k_f, J_H)\ell(J_f) + \omega\,(J_f)\right)$$

Soit θ^0 la valeur maximale du pas pour lequel les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) $d_{1j} \leq x + \theta^0 \ell \leq d_{2j} \quad \forall\, j \in J.$
b) $\Delta\,\omega_k \geq -\omega_k \,, \forall\, k \in K.$

La condition a) est vérifiée sur J_H pour $\theta \in [0,1]$, sur J_f , pour $\theta = \theta_{j_0}$

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{1j} - x_j}{\ell_j}, & si \quad \ell_j < 0 \\ \dfrac{d_{2j} - x_j}{\ell_j}, & si \quad \ell_j > 0 \\ \infty & si \ \ell_j = 0, j \in J_f \end{cases} ;$$

$$\theta_{j_0} = \min(\theta_j) \text{ pour } j \in J_f$$

Quant à la deuxième condition b) est vérifiée $\theta \leq 1$ sur K_f , et sur K_H pour

$$\theta_{k_0} = \min_{k \in K_H}(\theta_K)$$

$$\theta_K = \begin{cases} \dfrac{c_k^{'} x + \alpha_k - f(x)}{\beta\left(x\,,Q_f\right) - c_k^{'}\ell} & si\ c_k^{'}\ell \leq \beta\left(x\,,Q_f\right) \\ \infty & sinon \end{cases}$$

Le pas maximal θ^0 est donc

$$\theta^0 = \min(\,1, \theta_{k_0}, \theta_{j_0})$$

Donc

$\beta\left(\bar{x}\,,Q_f\right) = (1-\theta^0)\beta\left(x\,,Q_f\right)$.

Alors

Si $\theta^0 = 1$ alors le support plan $\left\{\,\bar{x}\ \,,Q_f\,\right\}$ est optimal .

Si $\beta\left(\bar{x}\,,Q_f\right) \leq\ \varepsilon$ alors le support plan $\left\{\,\bar{x}\ \,,Q_f\,\right\}$ est ε-optimal.

Si $\beta\left(\bar{x}\,,Q_f\right) \geq\ \varepsilon$ alors on passe au changement de support .

II-5-2 LE CHANGEMENT DU SUPPORT

Le changement du support se poursuit de la diminution de la fonctionnelle duale : i.e. que changement de Q_f avec $\bar{Q}_f$ entraîne le changement du plan dual $(\lambda\,,\nu\,,w\,)$ vers $(\bar{\lambda}\,,\bar{\nu}\,,\bar{w}\,)$. De là posons

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = \lambda + \ \sigma\,.\,\delta\,\lambda = \lambda + \sigma t(K) \\ \bar{\nu} = \nu\ + \delta\,\nu \\ \bar{w} = w + \ \delta\,w \end{cases}$$

Où t est la direction admissible du changement du plan dual ,

σ , le pas maximal le long de cette direction

Ici on remplace $\nu\,, w$ par Δ : $\bar{\Delta} = \Delta + \sigma t(\,J)$.

Le calcul de la direction admissible et du pas maximal se fait comme suit :

A partir de $\bar{\Delta} = \Delta + \sigma t(J)$.
$t'(J) = \delta\lambda'(K)\,\Delta\,(K,J)$ (car $\lambda'(K) = 0$) , on obtient $t'\left(J_f\right) = \delta\lambda'(K)\,\Delta\left(K, J_f\right)$.
Comme $\delta\lambda'(K)\,.\,e\,(k) = 0$
ce qui donne

$$\left(t'\left(J_f\right), 0\right) = \delta\lambda'\left(K_f\right)\left(\Delta\left(k_f, J_f\right), e\left(k_f\right)\right) + \delta\lambda'(K_H)\left(\Delta\left(k_H, J_f\right), e\left(k_H\right)\right)$$

alors

$$\delta\lambda'\left(K_f\right) = \left(t'\left(J_f\right), 0\right)\Delta_f^{-1} - \delta\lambda'(K_H)\left(\Delta\left(k_H, J_f\right), e\left(k_H\right)\right)\Delta_f^{-1}$$

Donc

$$t'(J_H) = \delta\lambda'\left(K_f\right)\Delta\left(k_f, J_H\right) + \delta\lambda'(K_H)\,\Delta\left(k_f, J_H\right)$$

$t'\left(J_f\right)$ et $\delta\lambda'(K_H)$ sont construit d'une manière à assurer une diminution de la fonctionnelle du problème duale (D2)

- $\theta^0 = \theta_{j_0}$, on pose $t_{j_0} = -\text{signe}\,(\ell_{j_0})$, $t\left(J_f - J_0\right) = 0$, $\delta\lambda\,(K_H) = 0$
- $\theta^0 = \theta_{j_0}$, on pose $\delta\lambda_{k_0} = 1$, $\delta\lambda\left(K_{H-k_0}\right) = 0, t\left(J_f\right) = 0$

Le calcul du pas maximal σ^0:

$$\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1}\,;\,\sigma_{k_1})$$

Où $\sigma_{j_1} = \min(\sigma_j)$ pour $j \in J_H$.

$$\sigma_J \begin{cases} -\dfrac{\Delta_j}{t_j} & si\ \Delta_j\, t_j < 0 \\ 0 & si\ \Delta_j = 0\,, x_j \neq d_{1j}\,, t_j > 0 \\ & \quad \Delta_j = 0\,, x_j \neq d_{2j}\,, t_j < 0 \\ +\infty & dans\ \ les\ \ autre\ cas \end{cases}$$

Et d'autre part $\sigma_{k_1} = \min\limits_{k \in K_f}(\sigma_K)$

$$\sigma_K \begin{cases} -\dfrac{\lambda_k}{\delta\lambda_k} & si\ \ \delta \\ +\infty\ sinon \end{cases}$$

On construit le nouveau support $\bar{Q}_{f0}$ comme suit :

- Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$ et $\sigma^0 = \sigma_{K_1}$ alors $\bar{J}_f = J_f - j_0\,, \bar{K}_f = K_f - k_1$
- Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$ et $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\bar{J}_f = (\,J_f - j_0\,) \cup j_1,\ \ \bar{K}_f = K_f$
- Si $\theta^0 = \theta_{k_0}$ et $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\bar{J}_f = J_f - j_0\ ,\ \bar{K}_f = K_f \cup k_0$
- Si $\theta^0 = \theta_{k_0}$ et $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\bar{J}_f = J_f\ ,\ \bar{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$

La construction du nouveau support $\bar{Q}_f = \{\bar{K}_f, \bar{J}_f\}$, détermine une itération de méthode , si bien que tous les résultats sont résumés dans l'algorithme suivant .

II-6 ALGORITHME DE LA METHODE :

1.Soit le support $\{x, Q_f\}$ du problème (P2) et $\varepsilon > 0$ un nombre réel donné

2.Calculer $\beta\left(x, Q_f\right)$.

Si $\beta\left(x, Q_f\right) = 0$ alors $\{x, Q_f\}$ est optimal

Si $\beta\left(x, Q_f\right) < \varepsilon$ alors $\{x, Q_f\}$ est ε-optimal

Sinon continuer le processus

3.Calculer

- $\ell(J_H)$; $\ell(J_f)$
- θ^0=min (1 ; θ_{k_0};θ_{j_0})
- Calculer $\bar{x}=x + \theta^0 \ell$

  Si $\beta\left(\bar{x}, Q_f\right) = 0$ alors $\{\bar{x}, Q_f\}$ est optimal

  Si $\beta\left(\bar{x}, Q_f\right) < \varepsilon$ alors $\{\bar{x}, Q_f\}$ est optimal

  Si $\beta\left(\bar{x}, Q_f\right) > \varepsilon$ alors continuer le processus

4 . Si $\theta^0=\theta_{k_0}$

$\delta\lambda_{K_0} = 1$; $\delta\lambda\,(K_H - k_0) = 0$; $t\left(J_f\right) = 0$

$\delta\lambda'\left(K_f\right) = -\,\delta\lambda'(K_H)\left(\Delta\left(k_H, J_f\right), e(k_H)\right)\,\Delta_f^{-1}$

$t'(J_H) = \delta\lambda'(K)\left(\Delta\left(k, J_H\right)\right)$ faire (6)

- Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$

  $t_{j_0} = -signe(\ell_{j_0})$; $t'\left(J_f - j_0\right) = 0.$

  $\delta\lambda'(K_H) = 0$

  $\delta\lambda'\left(K_f\right) = \left(t'(J_f), 0\right)\Delta_f^{-1}$

  Aller (5)

5.Calculer

$\sigma^0 = \sigma_{j_1}$: $\bar{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_1$, $\bar{K}_f = K_f$

$\sigma^0 = \sigma_{k_1}$: $\bar{J}_f = (J_f - j_0)$, $\bar{K}_f = K_f - k_1$

Aller à 2

6.Calculer

$\sigma^0 = \sigma_{j_1}$: $\bar{J}_f = J_f \cup j_1$, $\bar{K}_f = K_f \cup k_0$

$\sigma^0 = \sigma_{k_1}$: $\bar{J}_f = J_f$, $\bar{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$

Aller à 2

RESOLUTION PRATIQUE

On choisit un plan de départ x $J_f = \emptyset$ (pour assurer la régularité du support de la fonctionnelle) et $K_f = \{k_0\}$; avec $\left(c'_{k_0}x + \alpha_{k_0}\right) = \min\limits_{k\in K}\left(c'_k x + \alpha_k\right)$

Nous entamons l'algorithme avec le support de la fonctionnelle $Q_f = \{K_f, J_f\}$

II.7 EXEMPLES D'APLICATION :

$$\min_k \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 + x_6 \quad + 2 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 + 5x_6 \quad + 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 + 5x_6 + 3 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 + 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{max, avec} \begin{pmatrix} -2 \le x_1 \le 2 \\ -3 \le x_2 \le 3 \\ -4 \le x_3 \le 4 \\ -5 \le x_4 \le 5 \\ -6 \le x_5 \le 6 \\ -7 \le x_6 \le 7 \end{pmatrix}$$

Avec x'=$(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$, ; $d_1 = (-2; -3; -4; -5; -6; -7)$
; $d_2 = (2; 3; 4; 5; 6; 7)$, $\alpha' = (2; 2; 3; 4)$

$$c'_k = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \overline{1\ ,\ 4}$$

1^{er} ITERATION

K_f={3} , J_f=∅

N^0	Δ	x	ℓ	$\theta(K)$	$\theta(J)$	$\bar{x}$	$\delta\lambda$	$t(J)$	$f(\bar{x})$	$\sigma(J)$	$\lambda(K)$	$\sigma(K)$
1	-2	-2	4	13/28		-1/7	1	-3	-4	∞	0	∞
2	-4	-3	6	14/29		-3/14	0	1	-41/14	4	0	∞
3	-4	-4	8			-2/7	-1	2	-4	2	1	1
4	-5	-5	10	11/21		-5/14	0	1	-3/2	5	0	∞
5	-1	-6	12			-3/7		-4		∞		
6	-5	-7	14			-1/2		4		5/4		

$\beta(x, Q_f) = 196$, $\beta(\bar{x}, Q_f) = 105$ Donc on passe au changement de support

$\theta^0 = \theta_{k_1}$ et $\sigma^0 = \sigma_{k_3}$ alors $\bar{K}_f = \{1\}$; $\bar{J}_f = \{\ \}$.

2^{eme} ITERATION

$\bar{K}_f = \{1\}$; $\bar{J}_f = \{\,\}$.

N^0	Δ	x	ℓ	$\theta(K)$	$\theta(J$	$\bar{x}$	$f(\bar{x})$	$\delta\lambda$	$\lambda(K)$	$t(J)$	λ	$\sigma(J)$	$\sigma(K)$
1	-5	-1/7	15/7			0	2	-1	0	5	1	1	∞
2	-3	-3/14	45/14	1/15		0	2	1	0	4		3/4	∞
3	-2	-2/7	30/7	∞		0	3	0	1	0		∞	1
4	-4	-5/14	75/14	1/3		0	4	0	0	3		4/3	∞
5	-5	-3/7	45/7			0				1		∞	
6	-1	-1/2	15/2			0				-4		5/4	

$\beta(x, Q_f) = 90$, $\beta(\bar{x}, Q_f) = 84$ Donc on passe au changement de support

$\theta^0 = \theta_{k_2}$ et $\sigma^0 = \sigma_{j_2}$ alors $\bar{K}_f = \{1,2\}$; $\bar{J}_f = \{2\,\}$.

3^{eme} ITERATION

$K_f = \{1,2\}$; $J_f = \{2\,\}$.

N^0	Δ	x	ℓ	$\theta(K)$	$\theta(J)$	$\bar{x}$	$f(\bar{x})$	$\delta\lambda$	$\lambda(K$	$t(J$	λ	$\sigma(J)$	$\sigma(K)$
1	-5/4	0	2			8/29	349/29	-3/2	0	3/2	1/4	$5/6$	1/6
2	0	0	-0.75		4	-3/29	349/29	1/2	0	0	3/4		∞
3	-2	0	4	∞		16/29	419/29	0	1	-2		∞	
4	-7/4	0	5	4/29		20/29	349/29		0	5/2		7/10	
5	-17/4	0	6			24/29				7/2		17/14	
6	-4	0	7			28/29				-2		∞	

$\beta(x, Q_f) = 72.75$, $\beta(\bar{x}, Q_f) = 7275/116$ Donc on passe au changement de support

$\theta^0 = \theta_{k_4}$ et $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$

$\bar{K}_f = \{2,4\}$; $\bar{J}_f = \{2\,\}$.

4^{eme} ITERATION

$K_f = \{2,4\}$; $J_f = \{2\,\}$.

N^0	Δ	$\bar{x}$	ℓ	$\theta(K)$	$\theta(J)$	$\bar{x}$	$f(\bar{x})$
1	-1	8/29	50/29	∞		2	81
2	0	-3/29	125/87		54/25	3/4	218/3
3	-7/3	16/29	100/29	∞		4	283/3
4	-4/3	20/29	125/29			5	218/3
5	-11/3	24/29	150/29			6	
6	-13/3	28/29	175/29			7	

$\beta(x, Q_f) = 5275/87$ $\beta(\bar{x}, Q_f) = 0.$ donc $\{\bar{x}, Q_f\}$ est optimal

EXEMPLE 2 :

$$\min_k \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + \quad x_3 + 3x_4 + 5x_5 + x_6 + x_7 + 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 3 \\ 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 1x_5 + 1x_6 + 2x_7 + 8 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 5x_5 + x_6 + 3x_7 + 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \max, \begin{pmatrix} -3 \leq x_1 \leq 5 \\ -2 \leq x_2 \leq 6 \\ -7 \leq x_3 \leq 7 \\ -3 \leq x_4 \leq 8 \\ -2 \leq x_5 \leq 9 \\ -3 \leq x_6 \leq 5 \\ -4 \leq x_7 \leq 7 \end{pmatrix}$$

Avec $X' = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7)$, ; $d_1 = (-3; -2; -7; -3; -2; -3; -4)$; $d_2 = (5; 6; 7; 8; 9; 5; 7)$, $\alpha' = (5; 3; 8; 7)$

$$c'_k = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad K = \overline{1\ ,\ 4}$$

1^{er} ITERATION

$K_f = \{4\}$, $J_f = \emptyset$

N^0	Δ	x	$f(\bar{x})$	ℓ	$\theta(K)$	$\theta(J)$	$\bar{x}$	$\delta\lambda$	$t(J)$	$f(\bar{x})$	λ	$\sigma(J$	$\lambda(K)$	$\sigma(K)$
1	-4	-3	-41	8	42/107		-5/7	0	1	-4		4	0	
2	-6	-2	-47	8	$2/7$		2/7	1	4	-41/14		3/2	0	
3	-5	-7	-39	14	$17/24$		-3	0	2	-4		5/2	1	
4	-2	-3	-83	11			1/7	-1	0	-3/2	1	∞	0	1
5	-5	-2		11			8/7		3			5/3		
6	-1	-3		8			-5/7		-1			∞		
7	-3	-4		11			-6/7		3			1		

$\beta(x, Q_f) = 268$ $\beta(\bar{x}, Q_f) = 1340/7$ donc on passe au changement de support

$\theta^0 = \theta_{k_2}$ et $\sigma^0 = \sigma_{k_4}$

$\bar{K}_f = \{2\}$; $\bar{J}_f = \{\emptyset\}$.

2^{eme} ITERATION

$\bar{K}_f = \{2\}$; $\bar{J}_f = \{\emptyset\}$.

	Δ	x	$f(x)$	ℓ	$\theta(K)$	$\theta(J)$	$\bar{x}$	$\delta\lambda$	$t(J)$	$f(\bar{x})$	λ	$\sigma(J)$	$\lambda(K)$	$\sigma(K)$
1	-3	-5/7	5	40/7	40		65/84	0	0	-4		∞		
2	-2	2/7	-45/7	40/7	/		149/84	-1	1	-41/14	1	2	1	1
3	-3	-3	-5/7	10	25/96		-19/48	1	1	-4		3		
4	-2	1/7	-45/7	55/7	∞		1471/672	0	-1	-3/2		∞		
5	-2	8/7		55/7			2143/672		1			2		
6	-2	-5/7		40/7			65/84		1			2		
7	0	-6/7		0			-6/7		-2			0		

$\beta(x, Q_f) = 752/7$. $\beta(\bar{x}, Q_f) = 5026/67$ donc on passe au changement de support

$\theta^0 = \theta_{k_3}$ et $\sigma^0 = \sigma_{j_7}$

$\bar{K}_f = \{2,3\}$; $\bar{J}_f = \{7\}$.

3^{eme} ITERATION

$\bar{K}_f = \{2,3\}$; $\bar{J}_f = \{7\}$.

N^0	Δ	x	$f(x)$	ℓ	$\theta(K)$	$\theta(J)$	$\bar{x}$	$\delta\lambda$	$t(J)$	$f(\bar{x})$	λ	$\sigma(J)$	$\lambda(K)$	$\sigma(K)$
1	-3	65/84	3685/112	355/84	/		139/28	0	0	13365/112		∞		
2	-2	149/84	6715/336	355/84	∞		167/28	-1/2	-1/2	10569/112	1	∞	1	2
3	-3	-19/48	845/42	355/48	∞		111/16	1/2	-1/2	189/2	0	∞	0	∞
4	-2	1471/672	3542/95	3905/672	/		1781/224	0	1/2	11221/61		4		
5	-2	2143/672		3905/672			2005/224		-1/2			∞		
6	-2	65/84		355/84			139/28		1			∞		
7	0	-6/7		1775/224		352/355	7					∞		

$\beta(x, Q_f) = 5026/67$, $\beta(\bar{x}, Q_f) = 71/112$

$\theta^0 = \theta_{j_7}$ et $\sigma^0 = \sigma_{k_2}$

$\bar{K}_f = \{3\}$; $\bar{J}_f = \emptyset$.

3^{eme} ITERATION

$\bar{K}_f = \{3\}$; $\bar{J}_f = \emptyset$.

N^0	Δ	x	$f(x)$	ℓ	$\theta(K)$	$\theta(J)$	$\bar{x}$
1	-3	139/28	3685/112	1/28	∞		5
2	-1	167/28	6715/336	1/28	∞		6
3	-2	111/16	845/42	1/16	∞		7
4	-3	1781/224	3542/95	11/224	∞		8
5	-1	2005/224		11/224			9
6	-1	139/28		1/28			5
7	-2	7		0		352/355	7

$\beta(x, Q_f) = 1/2$, $\beta(\bar{x}, Q_f) = 0$
donc $\{\overline{x}, Q_f\}$ est optimal

CONCLUTION :
Nous nous sommes intéressé dans ce chapitre à la résolution du problème min-max avec des contraintes simples en programmation linéaire avec la méthode ADAPTEE ainsi que des exemples d'applications.

ITRODUCTION

Ce chapitre se focalise sur la résolution du problème min-max avec des contraintes généralisées en programmation linéaire avec la méthode ADAPEE mise en avant par R. Gabasov et F.M. Kirillova [7] et ensuit nous avons représenté un exemple pour appliquer la méthode.

III-1-PRESENTATION DU PROBLEME :

Considérons le problème Min-max en programmation linéaire suivant

$$(P3)\begin{cases} f(x) = \min\limits_{k\in K}\left(c_k^{'}x + \alpha_k\right) \longrightarrow \underset{x}{Max}, \\ \quad Ax = b, \\ d_1 \leq x \leq d_2, \end{cases}$$

Où x, d_1, d_2 sont des n-vecteurs réels $c_k, k \in K$ des n-vecteurs , α_k , $k \in K$ des scalaires $c_k^{'}$ le transposé du vecteur c_k $k \in K$, b un m-vecteur.

$A = A[I, J]$: $m \times n$ matrice ,rang $A = m \leq n$,

$K = \{1..P\}$: L'ensemble des indices des composantes de la fonctionnelle f

$I = \{1..m\}$: L'ensemble des indices des lignes de A.

$J = \{1..n\}$: L'ensemble des indices des colonnes de A.

$C[C, J]$: $p \times n$ matrice formée par les lignes vecteurs $c_k^{'}$ $\forall$ $k \in K$

Définition :

- Tout vecteur x vérifant $d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j}$ $j \in J$, $Ax = b$, est dit plan du problème (P3)
- Un plan x^0 est optimal si il réalise le maximum de la fonctionnelle du problème (p3)
- Un plan x^0 est ε-optimal si $f(x^0) - f(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$, (ε >0 réel ,donné)
- Soit x un plan du problème (p2) et considérons l'ensemble $K(x)$ défini comme suit

$$K(x) = \left\{k \in K \quad , f(x) = c_k^{'}x + \alpha_k\right\}$$

$K(x)$, est appelé ensemble des indices des composantes actives de la fonctionnelle f .

$K(x) \neq \emptyset$ pour tout plan x du problème (P3) .

- On définit le vecteur des écarts des composantes de la fonctionnelle $\omega(K) = (\omega_k \,, k \in K)$

$$\omega_k = \omega(K) = c_k^{'}x + \alpha_k - f(x), \qquad k \in K \,, \qquad (17)$$

Conséquences : En prenant un autre plan $\bar{x} = x + \Delta\, x$, on construit le vecteur

$$\Delta\omega_k = \omega_k(\bar{x}\,) = c_k^{'}x + \alpha_k - f(x), k \in K$$

- $\omega_k(x) \geq 0 \quad , k \in K.$
- $\min\limits_{k \in K} \omega_k(x) = 0$
- $\Delta\omega_k \geq -\omega_k, k \in K$ en effet $\Delta\omega_k = \omega_k(\bar{x}\,) - \omega_k(x) = c_k^{'}x + \alpha_k + f(x) - f(\bar{x})$ $k \in K$, et on remarque que $\Delta\omega_k + \omega_k = c_k^{'}x + \alpha_k - f(\bar{x}) + c_k^{'}x + \alpha_k$

$$= c_k^{'}(x + \Delta\, x) + \alpha_k - f(\bar{x})$$
$$= c_k^{'}(\bar{x}) + \alpha_k - f(\bar{x}) \geq 0$$
$$\Rightarrow \Delta\omega_k \geq -\omega_k \,, k \in K$$

III-2-SUPPORT DES CONTRAINTES :

L'ensemble des m indices $J_B \subset J$, , $|J_B| = m$ est dit support (appui) des contraintes du problème (P3) et la matrrice $A_B = A(I, J_B)$ matrice de support (matrice d'appui) des contraintes si det $A_B \neq 0$

III-3-SUPPORT DE LA FONCTIONNELLE :

En utilisant le support J_B , on construit la matrice suivante :

$$\Delta(K, J\,) = C(K, J_B)A_B^{-1}A(I, J) - C(K, J) \qquad (18)$$

Et soient deux sous ensembles d'indices J_f et K_f avec $K_f \subset K$ et $J_f \subset J$

$$|K_f| = |J_f| + 1 \,,$$

Par suite construisons la matrice

$$\Delta_f = (\Delta(K_f, J_f), \mathrm{e}(K_f)) \ , \quad \text{où } \mathrm{e}(K) = (e_k = 1\,, k \in K)\,. \qquad (19)$$

L'ensemble $Q_f = \{K_f, J_f\}$ est appelé support de la fonctionnelle si la matrice Δ_f est inversible

III-4-SUPPORT DU PROBLEME

L'ensemble Q_p={J_f, Q_f} formé du support des contraintes et du support de la fonctionnelle est appelé support du problème (P3).

III-5-SUPPORT PLAN :

La paire $\{x , Q_p\}$ formée du plan x et du support Q_p est appelée support –plan du problème (P3)

Le support plan $\{ x, Q_f\}$ est dit non dégénéré si :

- $d_{1j} < x_j < d_{2j} \qquad j \in J_f \cup J_B,$
- $c_k^{'} x + \alpha_k > f(x) \quad , \quad k \in K_H = K - K_f.$

III-6- ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE :

En utilisant le support Q_f , on construit les vecteur des estimations $\Delta(\ J\ )$:et le vecteur des potentiels $\mu(I)$

$$\Delta'(\ J\ ) = \gamma'\,(K_f)\ .\ \Delta(\ K_f, J\ )\ , \qquad (22)$$

$$\mu'(\ J\ ) = \gamma'\,(K_f)\ .\ \mathrm{C}(\ K_f, J_B\ )\ A_B^{-1}, \qquad (21)$$

Où $\gamma'\,(K_f)$ est la dernière ligne de la matrice Δ_f^{-1}

De là , on retire les relations suivantes :

- $\gamma'\,(K_f) = (0'(J_f), 1).\Delta_f^{-1}$ (22)
- $\sum\limits_{k\in K_f} \gamma_k = 1$ (23)
- $\Delta(\ J_f)=0(J_f)$, $\Delta(\ J_B)=0(J_B)$ (24)

DEFINITIONS

- Le support Q_f de la fonctionnelle est dit régulier si $\gamma_k \geq 0, k \in K_f$.
- Le support Q_p de problème est dit régulier si Q_f est régulier .
- Le support Q_p avec $J_f = \emptyset$ est régulier .
- Par la suite , on ne considérera que des supports réguliers .

Nous considérons un support plan {x, Q_p} du problème (P3) et soit $\bar{x} = x + \Delta\, x$ un autre plan et nous calculons la quantité suivante , représentant l'accroissement de la fonctionnelle f

$$\Delta\, f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \quad . \qquad (25)$$

Nous désignons $\Delta\omega$, le vecteur des accroissement des écarts de la fonctionnelle

$$\Delta\omega(K) = C\,(K,J).\Delta x - e(K).\Delta f\,(x) \qquad (26)$$

En utilisant la relation (19) , on obtient

$$\Delta\omega(K) = -\,\Delta(K,J).\Delta x - e(K).\Delta f\,(x) \qquad (27)$$

Et on trouve :

$$\begin{pmatrix} \Delta\, x_f \\ \Delta\, f(x) \end{pmatrix} = -\Delta_f^{-1}\ \Delta\omega(K_f) - \Delta_f^{-1}\ \left(\Delta\left(K_f, J_H\right)\right)\Delta x_H \quad , \ J_H = J - \left(J_f\ \cup J_B\right)$$

En utilisant la décomposition de la matrice Δ_f^{-1} comme ci-dessus , la dernière solution est

$$\Delta x\left(J_f\right) = -D\left(J_f, K_f\right).\Delta\left(K_f, J_H\right)\Delta x\,(J_H) - D\left(J_f, K_f\right)\Delta\omega\left(K_f\right) \quad , \qquad (28)$$

$$\Delta\, f(x) = -\Delta'(\,J_H)\,\Delta\, x\,(J_H) - \gamma'(K_f)\Delta\omega\left(K_f\right) \quad , \qquad (29)$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle (29) sous les contraintes suivantes :

- $d_{1j} - x_j \leq \Delta\, x_j \leq d_{2j} - x_j\ , j \in J_H$
- $\Delta\omega_k \geq -\omega_k \quad , \ \ k\ \in K_f$

Est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta\, x_j = d_{2j} - x_j \quad si \quad \ \Delta_j < 0 \\ \Delta\, x_j = d_{1j} - x_j \quad si \quad \ \Delta_j < 0, J \in J_H \\ \quad \Delta\omega_k = -\omega_k\,; k \in K_f, \end{cases}$$

Et est égal à

$$\beta = \ \beta\left(x, Q_f\right) = \sum_{j\in J_H^+} \Delta_j \left(\, x_j - d_{1j}\right) + \sum_{j\in J_H^-} \Delta_j \left(x_j - d_{2j}\right) + \sum_{k\in K_f} \gamma_k\, \omega_k \ (30)$$

Appelée la valeur de suboptimalité du support plan $\{\, x\,, Q_f\,\}$,

Où :

$$J_H^+ = \{j \in J_H /\ \ \Delta_j \geq 0\} \quad , \quad J_H^- = \{j \in J_H / \,\Delta_j\, \leq 0\}$$

De la on a :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta\big(x, Q_p\big) \text{ et pour } \bar{x}=x^0$$

On obtient :

$$0 \leq f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta\big(x, Q_p\big) \qquad (31)$$

De cette dernière inégalité , on déduit le critère suivant :

THEOREME (Critère d'optimalité)

Les relations suivantes

$$\begin{cases} x_j = d_{1j}, & \Delta_j \geq 0 \\ x_j = d_{2j}, & \Delta_j \leq 0 \\ d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j} & \Delta_j = 0, \qquad j \in J_H \qquad (32) \\ \omega_k = 0 \;\; si \;\; \gamma_k \geq 0 & \\ \omega_k \geq 0 \;\; si \;\; \gamma_k = 0 \,, k \in K_f & \end{cases}$$

Sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence , elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{\, x\,, Q_p \,\}$,

Condition suffisante :

Soit $\{\, x\,, Q_p \,\}$ un support plan du problème (P3) , pour lequel les conditions (32) sont vérifiées , alors la relation (31) donne $\beta\big(x, Q_p\big) = 0$. En outre quelque soit $\bar{x}$, d'après la relation (32) $f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta\big(x, Q_p\big) = 0$, d'où l'optimalité du support plan $\{\, x\,, Q_p \,\}$.

Condition nécessaire :

soit $\{\, x\,, Q_f \,\}$ un support optimal non dégénéré et supposons que les conditions (32) ne sont pas vérifiées , on a alors les deux cas sont possibles :

1) $\exists j_0 \in J_H \;\; / \;\; \Delta_{j_0} > 0, \;\; x_{j_0} > d_{1j_0}$ ou $\Delta_{j_0} < 0 \;,\; x_{j_0} < d_{2j_0}$.

2) $\exists K_0 \in K_f \;\; / \;\; \gamma_{k_0} > 0, \;\; \omega_{k_0} > 0$.

Construisons alors un nouveau plan $\bar{x} = x + \theta\,\ell$ avec $\theta > 0$ .pour cela nous choisissons le premier cas :

$$\ell_{j_0} = signe\,(\alpha_0) \;\text{ où }\; \alpha_0 \begin{cases} d_{1j_0} - x_{j_0} & si \qquad \Delta_{j_0} > 0, \quad x_{j_0} > d_{1j_0} \\ d_{2j_0} - x_{j_0} & si \qquad \Delta_{j_0} < 0 \;,\; x_{j_0} < d_{2j_0}. \end{cases}$$

$\ell_j = 0, \forall\, j \in J_H - j_0$ et $\Delta\omega_k$, $k \in K_f$

$$\ell(J_B) = -A_B^{-1}\ A\left(I, J_H \cup J_f\right) \ell\left(J_H \cup J_f\right)\, et\ \ell\left(J_f\right)$$
$$= -D\left(J_f, K_f\right) \Delta\left(J_f, K_H\right) \ell(J_H)$$

$\Delta_{j_0} > 0$, $x_{j_0} > d_{1j_0}$, $\exists\ \theta_1 > 0\ /\ \bar{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta_1 \geq d_{1j_0}$.

$\Delta_{j_0} < 0$, $x_{j_0} < d_{1j_0}$, $\exists\ \theta_1 > 0\ /\ \bar{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta_1 \leq d_{2j_0}$.

On obtient donc dans ce cas $\bar{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta_1 signe\ (\alpha_0), \bar{x}_j = x_j\ , \forall\, j \in J_H - j_0$

$\Rightarrow \forall\, J \in J_H\ , \bar{x}_j = x_j + \theta_1 \ell_j,\ \ \theta_1 > 0\ , d_{1j} \leq x_j + \theta_1 \ell_j = \bar{x}_j \leq d_{2j}$.

D'autre part , puisque $\{x, Q_p\}$ est un support plan non dégénéré , alors on a :

$d_{1j} < x_j < d_{2j}\ , \forall\ j \in J_H - J_B,$ il existe $\theta_2 > 0$ tel que :

$$d_{1j} \leq \bar{x}_j = x_j + \theta_2 \ell_j \leq d_{2j}\ , \qquad \forall\ j \in J_f \cup J_B$$

Pour $= min\ (\theta_1, \theta_2), \bar{x} = x + \theta^0\, \ell$ et par construction de $\ell(J_B)$ et $\ell\left(J_f\right)$ est aussi un plan du problème (P3) et on obtient :

$\Delta\, f(x) = -\theta^0\, \Delta_{j_0} signe\ (\alpha_0) > 0$. ce qui contredit l'optimalité du plan $\{x, Q_p\}$.

2) dans ce cas on pose Posons $\Delta\omega_{k_0} = -\theta\, \omega_{k_0}\ , \theta > 0\ , \Delta\omega_k\ 0\ , \forall\, k \in K_f - k_0$ et $\ell(J_H) = 0(J_H)$

$$\ell(J_B) = -A_B^{-1}\ A\left(I, J_H \cup J_f\right) \ell\left(J_H \cup J_f\right)\, et\ \ell\left(J_f\right) = D\left(J_f, K_f\right).\, \omega\left(K_f\right).$$

Puisque $\{x, Q_p\}$ est un support plan non dégénéré , alors on a :

$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \forall\ j \in J_f \cup J_B$, donc il existe $\theta_2 > 0$ tel que :

$$d_{1j} \leq \bar{x}_j = x_j + \theta_2 \ell_j \leq d_{2j}\ , \qquad \forall\ j \in J_f \cup J_B$$

En prenant $\theta_1 = \min(\ \theta_2\, , \theta)$, $\bar{x} = x + \theta_1 \ell$, est un plan du problème (P3) et on obtient :

$\Delta f(x) = \theta_1 \gamma_{k_0} \gamma_{k_0} > 0$, ce qui contredit l'optimalité du support plan $\{x, Q_p\}$

THEOREME (CRITERE DE SUBOPTIMALITE)

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel donné . pour l' ε-optimalité du plan , il est suffisant de trouver un support Q_P pour lequel la valeur de suboptimalité vérifie l'inégalité suivant : $\beta\ (x, \mathrm{Q_f}) \leq \varepsilon$. (33)

PREUVE (condition suffisante)

Si $(x, Q_f) \leq \varepsilon$, alors de la relation (32) ; on obtient

$\Delta f(x) \leq \varepsilon$, ce qui implique que x est ε-optimal .

Faisons une décomposition de $\beta(x, Q_f)$

Pour cela nous construisons la problème duel de (P2) suivant

$$(D3)\begin{cases} \Theta\ (X) = \lambda'\alpha + \gamma' b - \nu' d_1 + w' d_2 \qquad \longrightarrow \min \\ -\lambda'(K).C(K,J) + \gamma'(I)A(I,J) - \nu'(J) + w'(J) = 0'(J) \\ \lambda'(K).e\ (K) = 1, \\ \lambda \in \mathbb{R}_+^p \qquad \nu, w \in \mathbb{R}_+^n, \qquad \gamma \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Le vecteur $X = (\lambda, \gamma, \nu, w)$, construit de la manière suivante

$$\begin{cases} \lambda'(K_f) = (0'(J_f), 1)\Delta_f^{-1} \qquad ; \lambda'(K_H) = 0 \\ \gamma'(I) = \lambda'(K_f)\,.\mathrm{C}(K_f, J_B)\, A_B^{-1} \\ \nu_j = \Delta_j\,, w_j = 0 \quad si \qquad \Delta_j \geq 0 \\ \nu_j = 0\,, w_j = -\Delta_j \quad si \quad \Delta_j < 0 \end{cases}$$

Est un plan du problème dual (D3)

$$\beta(x, Q_f) = \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j\,(x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j\,(x_j - d_{2j}) + \sum_{k \in K_f} \gamma_k\, \omega_k \qquad .$$

En introduisant le plan ci-dessus , on obtient :

$$\beta(x, Q_f) = -\sum_{j \in J_H^+} \Delta_j\,(d_{1j}) - \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j\,(d_{2j}) + \sum_{j \in J_H} \Delta_j\,(x_j) + \sum_{k \in K_f} \gamma_k\, \omega_k\ .$$

$$\gamma'(K_f)\ \omega(K_f) = \gamma'(K_f)\ \Big(C(K_f,J).x(J) - \alpha(K_f) - e(K_f)\,x(J)\Big)$$

en introduisant la matrice $\Delta(K,J)$, on aura

$$\gamma'(K_f)\ \omega(K_f) = -\Delta'(J_H).x(J_H) + \gamma'(K_f)\ C(K_f,\ J_B)A_B^{-1}b - f(x) + \lambda'\alpha$$

$$\beta(x,Q_P) = \lambda'\alpha + \gamma' b - \nu' d_1 + w' d_2 - f(x)$$

$$= \lambda'\alpha + \gamma' b - \nu' d_1 + w' d_2 - f(x) + f(x^0) - \Theta(X^0)$$
$$= (\Theta(X) - \Theta(X^0)) + (f(x^0) - f(x))$$

Désignons par :

$\beta(x) = (f(x^0) - f(x))$,

$\beta(Q_f) = (\Theta(X) - \Theta(X^0))$

Donc $\beta(x,Q_f) = \beta(x) + \beta(Q_p)$,

Où $\beta(x)$ est appelé , l'écart de la non optimalité du plan x ,et $\beta(Q_P)$ est appelé l'écart de la non optimalité du support Q_P.

III-7-ITERATION DE L'ALGORITME :

La méthode de résolution est constituée de deux procédures

- Changement de plan
- Changement de support .

III-7-1 LE CHANGEMENT DE PLAN

Le changement du plan $\bar{x}$, a pour effet d'augmenter la valeur de la fonctionnelle f : $f(\bar{x}) \geq f(x)$

On construit donc un nouveau plan $\bar{x} = x + \theta^0\,\ell$ où le vecteur ℓ est la direction de l'amélioration du point x et θ^0 ($\theta^0 \geq 0$) le pas maximal le long de cette direction

Le vecteur directeur ℓ est défini comme suit :

$$\ell_j \begin{cases} d_{1j}-x_j, & si \qquad \Delta_j > 0 \\ d_{2j}-x_j, & si \qquad \Delta_j < 0 \quad , j \in J_H \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Pour avoir $\bar{X} = b$, on prend $\ell(J_B) = -A_B^{-1}\ A\left(I, J_H \cup J_f\right) \ell\left(J_H \cup J_f\right)\ et\ \ell\left(J_f\right)$. est calculé de la manière suivante :

En vertu du fait que $\Delta\,\omega\,(K_f) \geq -\omega(K_f)$

peut écrire $\Delta\,\omega\,(K_f) = -\theta\omega\,(K_f)$ avec $\theta \leq 1$, ce qui résulte à partir de (28)

$$\ell\left(J_f\right) = D\left(J_f, K_f\right)\left(-\Delta\left(k_f, J_H\right)\ell\left(J_f\right) + \omega\left(J_f\right)\right)$$

Soit θ^0 la valeur maximale du pas pour lequel les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a)$d_{1j} \leq x + \theta^0\ell \leq \quad d_{2j} \quad \forall\, j \in J.$

$b)\Delta\,\omega_k \ \geq -\omega_k\,, \forall\, k \in K.$

La condition a) est vérifiée sur J_H pour $\theta \in [0,1]$, et sur $J_f \cup J_B$, pour $\theta = \theta_{j_0}$

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{1j}-x_j}{\ell_j}, & si \qquad \ell_j < 0 \\ \dfrac{d_{2j}-x_j}{\ell_j}, & si \qquad \ell_j > 0 \\ \infty & si \ \ \ell_j = 0, j \in J_f \cup J_B \ ; \end{cases}$$

$$\theta_{j_0} = \min(\theta_j) \text{ pour } j \in J_f \cup J_B$$

Quant à la deuxième condition est vérifiée $\theta \leq 1$ sur K_f , et sur K_H pour

$$\theta_{k_0} = \min_{k \in K_H}(\theta_K)$$

$$\theta_K = \begin{cases} \dfrac{c_k' x + \alpha_k - f(x)}{\beta\,(x\,, Q_P) - c_k'\ell} & si\ c_k'\ell \leq \beta\,(x\,, Q_P) \\ \infty & \qquad sinon \end{cases}$$

Le pas maximal θ^0 est donc

$$\theta^0 = \min(\,1, \theta_{k_0}, \theta_{j_0})$$

Donc

$\beta\,(\bar{x}\,, Q_P)$= $(1-\theta^0)\beta\left(x\,, Q_f\right)$.

Alors
Si $\theta^0 = 1$ alors le support plan $\{ x , Q_P \}$ est optimal .
Si $\beta\ (\bar{x}, Q_P) \leq \varepsilon$ alors le support plan $\{ x , Q_P \}$ est ε-optimal.
Si $\beta\ (\bar{x}, Q_P) \geq \varepsilon$ alors on passe au changement de support .

III-7-2 LE CHANGEMENT DU SUPPORT :

Le changement du support se poursuit de la diminution de la fonctionnelle duale : i.e. que changement de Q_P avec $\bar{Q}_P$ entraîne le changement du plan dual $(\lambda, \gamma, \nu, w)$ vers $(\bar{\lambda}, \bar{\gamma}, \bar{\nu}, \bar{w})$. De là posons

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = \lambda + \sigma . \delta \lambda \\ \bar{\nu} = \nu + \delta \\ \bar{w} = w + \delta \\ \bar{\gamma} = \gamma + \sigma . \delta \gamma \end{cases}$$

Nous prenons comme direction admissible le couple $(t'(J), \delta\lambda'(K))$ au point X.
σ^0 positif , le pas maximal le long de cette direction.
Le calcul de la direction admissible et du pas maximal se fait comme suit :
A partir de $\bar{\Delta} = \Delta + \sigma t(J)$, $X, \bar{X}$ des plans duaux

$$t'(J) = \delta\gamma'(I)\ \mathrm{A}\ (\mathrm{I}, \mathrm{J}) - \delta\lambda'(K)\ \mathrm{C}\ (\mathrm{K}, \mathrm{J}) \qquad (36),$$

Ce qui résulte que $t'(J_B) = \delta\lambda'(I)\ \mathrm{A_B} - \delta\lambda'(K)\ \mathrm{C}\ (\mathrm{K}, \mathrm{J_B})$
Donc $\delta\gamma'(I) = t'(J_B) A_B^{-1} + \delta\lambda'(K)\ \mathrm{C}\ (\mathrm{K}, \mathrm{J_B}) A_B^{-1}$.
On remplaçant dans (36) on aura

$$t(J) = t'(J_B) A_B^{-1} A(I, J) + \delta\lambda'(K)\ \Delta\ (\mathrm{K}, \mathrm{J}) \qquad (37)$$

$$(t'(J_f), 0) = \left(t'(J_B) A_B^{-1} A\left(I, J_f\right). 0\right) + \delta\lambda'(K_f)\left(\Delta\left(k_f, J_f\right), e\left(k_f\right)\right) + \delta\lambda'(K_H)\left(\Delta\left(k_H, J_H\right), e\left(k_H\right)\right).$$

alors

$$\delta\lambda'(K_f) = \left((t'(J_f); 0) - \left(t'(J_B) A_B^{-1} A\left(I, J_f\right). 0\right) - \delta\lambda'(K_H)\ \left(\Delta\left(k_H, J_f\right); e(K_H)\right)\ \right) \Delta_f^{-1} \qquad (38)$$

$$t'(J_H) = t'(J_B) A_B^{-1} A(I, J_H) + \delta\lambda'(K_H)\ \left(\Delta\left(k_H, J_H\right) + \delta\lambda'(K_f)\left(\Delta\left(k_f, J_H\right)\right)\right) \qquad (39)$$

$t'\left(J_f\right)$, $t'(J_B)$ et $\delta\lambda'(K_H)$ sont construit d'une manière à assurer une diminution de la fonctionnelle du problème duale (D3)

- $\theta^0 = \theta_{j_0}$, on pose $t_{j_0} = -\text{signe}\ (\ell_{j_0})$, $t\left(J_f \cup J_B - J_0\right) = 0$, $\delta\lambda\ (K_H) = 0$
- $\theta^0 = \theta_{j_0}$, on pose $\delta\lambda_{k_0} = 1$, $\delta\lambda\left(K_{H-k_0}\right) = 0, t\left(J_f \cup J_B\right) = 0$

Le calcul du pas maximal σ^0 :
On démontre que :

$$\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1} ; \sigma_{k_1})$$

Où $\sigma_{j_1} = \min(\sigma_j)$ pour $j \in J_H$.

$$\sigma_J \begin{cases} -\frac{\Delta_j}{t_j} & si \quad \Delta_j t_j < 0 \\ 0 & si \ \Delta_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \\ & \Delta_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0 \\ +\infty & dans \ les \ autre \ cas \end{cases}$$

σ_{j_1} assure la diminution de la valeur de suboptimalité

Et d'autre part $\sigma_{k_1} = \min_{k \in K_f}(\sigma_K)$

$$\sigma_K \begin{cases} -\frac{\lambda_k}{\delta\lambda_k} & si \ \delta\lambda_k\lambda_k < 0 \\ & +\infty \ sinon \end{cases}$$

σ_{K_1}assure la régularité du support $\bar{Q}_f$

On construit le nouveau support $\bar{Q}_{f0}$ comme suit :

- Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$, $j_0 \in J_f$ et $\sigma^0 = \sigma_{K_1}$ alors $\overline{J}_B = J_B$,$\bar{J}_f = J_f - j_0$,$\overline{K}_f = K_f - k_1$
- Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$, $j_0 \in c$ et $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors$\overline{J}_B = J_B$,$\bar{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_1$, $\overline{K}_f = K_f$
- Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$, $j_0 \in J_B$alors :

Si $\exists\, j_2 \in J_f$ / $t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) \neq 0$ alors $\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_2$, $\bar{J}_f = (J_f - j_2) \cup j_0$

Faire comme le cas $\theta^0 = \theta_{j_0}$, $j_0 \in J_f$

Si $\sigma^0 = \sigma_{j_*}$ alors$\overline{J}_B = \overline{J}_B$,$\bar{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_*$, $\overline{K}_f = K_f$.

Sinon si $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors$\overline{J}_B = \overline{J}_B$,$\bar{J}_f = J_f - j_0$,$\overline{K}_f = K_f - k_1$.

Sinon $t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) = 0$, pour tout $j_2 \in \bar{J}_f$ alors $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ et $\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1$,$\bar{J}_f = J_f$, $\overline{K}_f = K_f$

- Si $\theta^0 = \theta_{k_0}$ et $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\overline{J}_B = J_B$,$\bar{J}_f = J_f \cup j_0$, $\overline{K}_f = K_f \cup k_0$
- Si $\theta^0 = \theta_{k_1}$ et $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\bar{J}_B = J_B$,$\bar{J}_f = J_f$,$\overline{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$

La construction du nouveau support $\bar{Q}_P = \{\bar{Q}_f, \bar{J}_B\}$, détermine une itération de la méthode , si bien que tous les résultats sont résumés dans l'algorithme suivant .

III-8- ALGORITHME DE RESOLUTION :

1.Soit le support $\{ x , Q_p \}$ du problème (P3) et $\varepsilon > 0$ un nombre réel donné

2.Calculer $\beta \left(x , Q_p\right)$.

Si $\beta \left(x , Q_P\right) = 0$ alors $\{ x , Q_P \}$ est optimal

Si $\beta \left(x , Q_P\right) < \varepsilon$ alors $\{ x , Q_P \}$ est ε-optimal

Si $\beta \left(x , Q_P\right) > \varepsilon$ alors continuer le processus

3.Calculer

- $\ell(J_H)$; $\ell\left(J_f\right)$; $\ell(J_B)$
- θ^0=min (1 ; θ_{k_0};θ_{j_0})
- $\bar{x}$=$x + \theta^0 \ell$

  Si $\beta \left(\bar{x} , Q_P\right) = 0$ alors $\{ \bar{x} , Q_P \}$ est optimal

  Si $\beta \left(\bar{x} , Q_P\right) < \varepsilon$ alors $\{ \bar{x} , Q_P \}$ est optimal

  Si $\beta \left(\bar{x} , Q_P\right) > \varepsilon$ alors continuer le processus

4 . Si θ^0=θ_{k_0}

$\delta\lambda_{K_0} = 1$; $\delta\lambda \left(K_H - k_0\right) = 0$; $t\left(J_f \cup J_B\right) = 0$

$\delta\lambda'\left(K_f\right)$=$- \delta\lambda'(K_H)\left(\Delta\left(k_H, J_f\right), e\left(k_H\right)\right) \Delta_f^{-1}$

$t'(J_H) = \delta\lambda'(K)\left(\Delta(k , J_H)\right)$ faire (6)

- Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$, $j_0 \in J_B$

  $t_{j_0} = -signe(\ell_{j_0})$; $t'(J_B - j_0) = 0$, $t'\left(J_f\right) = 0$.

  $\delta\lambda'(K_H) = 0$

  $\delta\lambda'\left(K_f\right) = -\left(t'(J_B)A_B^{-1}A\left(I, J_f\right). 0\right) \Delta_f^{-1}$

  $t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J_H) + \delta\lambda'\left(K_f\right) \Delta\left(k_f, J_H\right)$

  Faire (4)

- Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$, $j_0 \in J_f$

  $t_{j_0} = -$signe (ℓ_{j_0}) , $t\left(J_f - J_0\right) = 0$, $t'\left(J_B \right) = 0$

  $\delta\lambda \left(K_H \right) = 0$, $\delta\lambda'\left(K_f\right) = (t'(J_B). 0) \Delta_f^{-1}$, $t'(J_H) = \delta\lambda'\left(K_f\right) \Delta\left(k_f, J_H\right)$

  Faire (5)

Si $\exists\, j_2 \in J_f$ / $t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) \neq 0$ alors $\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_2$, $\bar{J}_f = (J_f - j_2) \cup j_0$

Faire comme le cas $\theta^0 = \theta_{j_0}$, $j_0 \in J_f$

Si $\sigma^0 = \sigma_{j_*}$ alors$\overline{J}_B = \overline{J}_B$,$\bar{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_*$, $\overline{K}_f = K_f$.

Sinon si $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors$\overline{J}_B = \overline{J}_B$,$\bar{J}_f = J_f - j_0$,$\overline{K}_f = K_f - k_1$.

Aller à (2).

Sinon $t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) = 0$, pour tout $j_2 \in \bar{J}_f$ alors $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ et

$\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1, \bar{J}_f = J_f$, $\overline{K}_f = K_f$

Aller à (2).

5.Calculer σ^0

Si $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\overline{J}_B = \overline{J}_B$,$\bar{J}_f = (\ J_f - j_0\ ) \cup j_1$, $\overline{K}_f = K_f$.

$\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\overline{J}_B = \overline{J}_B$,$\bar{J}_f = J_f - j_0$,$\overline{K}_f = K_f - k_1$.

Aller à (2).

6 .calculer σ^0.

$\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\overline{J}_B = J_B$,$\bar{J}_f = \ J_f \cup j_0$, $\overline{K}_f = K_f \cup k_0$

$\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\bar{J}_B = J_B$,$\bar{J}_f = \ J_f$,$\overline{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$

Aller à (2)

RESOLUTION PRATIQUE

On choisit un plan de départ x $J_f = \emptyset$ (pour assurer la régularité du support de la fonctionnelle) et $K_f = \{k_0\}$; avec $\left(c'_{k_0}x + \alpha_{k_0}\right) = \min\limits_{k\in K}\left(c'_k x + \alpha_k\right)$

Nous entamons l'algorithme avec le support de la fonctionnelle $Q_f = \{K_f, J_f\}$

III-9-EXEMPLE D'APLICATION:

Soit le problème min-max suivant :

$$(P3)\begin{cases} f(x) = \min\limits_{k}\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 2 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 + 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 2x_5 + x_6 + 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \max\limits_{x} \\ -\frac{3}{2}x_1 + 3x_2 + \frac{7}{2}x_3 - \frac{37}{10}x_4 - \frac{21}{10}x_5 + \frac{43}{20}x_6 = 2 \\ \frac{9}{4}x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 - x_6 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + \frac{35}{4}x_3 + 5x_4 + \frac{79}{100}x_5 + \frac{7}{4}x_6 = 3 \\ 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ -2 \le x_1 \le 2 \\ -3 \le x_2 \le 3 \\ -4 \le x_3 \le 4 \\ -5 \le x_4 \le 5 \\ -6 \le x_5 \le 6 \\ -7 \le x_6 \le 7 \end{cases}$$

Avec $x'=(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$, $d_1 = (-2; -3; -4; -5; -6; -7)$
$d_2 = (2; 3; 4; 5; 6; 7)$, $\alpha = (2; 2; 3)$ $b = (2; 2; 3; 4)$

$$c_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \overline{1\ ,\ 3}\ , A = \begin{pmatrix} -3/2 & 3 & 7/2 & 37/10 & -21/10 & 43/20 \\ 9/4 & -1 & -3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 35/4 & 5 & 79/100 & -7/4 \\ 9 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1^{ere} ITERATION :

$$K_f = \{\ 2\ \}, \qquad J_f = \emptyset, \quad J_B = \{1, 2, 3, 5\}$$

N	Δ	x	$f(x)$	ℓ	$\theta(J)$	$\theta(K)$	$\bar{x}$	$\delta\lambda$	$t(J)$	$f(\bar{x})$	λ	$\sigma(J)$	$\sigma(K$
1	0	-353/821	1787/203	-602/99	764/2959	7836/239	-2017/3217		0	7319/92	0.07		
2	0	1055/856	2741/376	3852/229	989/9412		1310/737	-1	0	331/42	0.92		1
3	0	-140/1961	1881/238	-1348/159	443/956		-534/1543		0	1367/15			
4	-241/83	0		5			81/500		-1.05			∞	
5	0	279/280		-428/247	965/239		1118/1189		0				
6	-3843/7223	0		-7			-567/2500		-7.4			0.071	

$\beta(x, Q_P) = 602/33$, $\beta(\bar{x}, Q_P) = 17.65$ donc on passe au changement de support
$\bar{K}_f = \{1,2\}$,$\bar{J}_f = \{6\}$;$\bar{J}_B = \{1,2,3,5\}$

2^{eme} ITERATION

$$\bar{K}_f = \{1,2\} \quad ,\bar{J}_f = \{6\} \quad ;\bar{J}_B = \{1,2,3,5\}$$

N	Δ	x	$f(x)$	ℓ	$\theta(J)$	$\theta(K)$	$\bar{x}$	$\delta\lambda$	$t(J)$	$f(\bar{x})$	λ	$\sigma(J)$	$\sigma(K$
1	0	-2017/3217	7319/929	-4,8	0,2856		-1,206	-0,13	0	9,61	0.071		0,53
2	0	1310/737	331/42	10,13	0,12		3	0.13	0	9,61	0,92		∞
3	0	-534/1543	1367/156	-5,27	0,69	∞	-0,9817		-1	12,65			
4	-2,97	81/500		4,85			0,7456		0,141			21,025	
5	0	1118/1189		-0,097	71.49		0,928		0				
6	0	-567/2500		-0,68	9.88		-0,309		0				

$\beta(x, Q_P) = 14{,}41$, $\beta(\bar{x}, Q_P) = 12{,}67$ donc on passe au changement de support
$\bar{K}_f = \{2\}$,$\bar{J}_f = \emptyset$;$\bar{J}_B = \{1,2,5,6\}$

3^{eme} ITERATION

$$\bar{K}_f = \{2\} \quad ,\bar{J}_f = \emptyset \quad ;\bar{J}_B = \{1,2,5,6\}$$

N	Δ	x	$f(x)$	ℓ	$\theta(J)$	$\theta(K)$	$\bar{x}$	$\delta\lambda$	$t(J)$	$f(\bar{x})$	λ	$\sigma(J)$	$\sigma(K)$
1	0	-1,206	9,61	-2,65	0,298	∞	-2		1	31,62			
2	-0,527	3	9,61	0			3	1	0,175	12	1	0	∞
3	0	-0,9817	12,65	-0,375	8,03	∞	-1,093		0	23,97			
4	-0,87	0,7456		4,25			2,016		0,624				
5	0	0,928		2,2	2,29		1,588		0				
6	0	-0,309		8,236	0,887		2,15		0				

$\beta(x, Q_P) = 7{,}97, \quad \beta(\bar{x}, Q_P) = 5{,}59$ donc on passe au changement de support $\bar{K}_f = \{2\} \quad ,\bar{J}_f = \emptyset \quad ;\bar{J}_B = \{3,5,6,4\}$

4^{eme} ITERATION

$$K_f = \{\ 2\ \}, \qquad J_f = \emptyset, \quad J_B = \{\,3,5,6,4\}$$

N	Δ	$\bar{x}$	$f(x)$	ℓ	$\theta(J)$	$\theta(K)$	$\delta\lambda$	$t(J)$	$f(\bar{x})$	λ	$\sigma(J)$	$\sigma(K$
1	3	-2	31,62									
2	0	3	12									
3	0	-1,093	23,97									
4	0	2,016										
5	0	1,588										
6	0	2,15										

$\beta(x, Q_P) = 0$. donc $\{\,\bar{x}\,, Q_f\,\}$ est optimal

CONCLUSION :

Nous avons consacré ce chapitre à la résolution de problème min-max avec des contraintes généralisées en programmation linéaire avec la méthode ADAPTEE mise en avant par R. Gabasov et F.M. Kirillova [7] en présentant un exemple pour l'application de la méthode .

Notre but dans le cadre de ce mémoire était la résolution du problème min-max en programmation linéaire .

En premier lieu, nous avons introduit la méthode ADAPTEE pour la résolution d'un problème de programmation linéaire ensuite nous avons procédé à une comparaison avec la méthode de simplexe.

Nous nous sommes intéresses ensuite à la résolution du problème min-max avec des contraintes simples en programmation linéaire avec la méthode ADAPTEE ainsi que des exemples d'applications.

Le dernier chapitre du travail a été consacré à la résolution du problème min-max avec des contraintes généralisées en programmation linéaire avec la méthode ADAPTEE.

[1] http://web.mit.edu/lpsolve/doc/MATLAB.htm

[2] https://www.mathworks.com/help/optim/ug/example-linear-programming.html

[3] https://sourceforge.net/projects/lpsolve/

[4] http://web.mit.edu/lpsolve/doc/

[5] HAMDOUS SALIHA : METHODE DE RESOLUTION DE PROBLEME MIN-MAX EN PROGRAMMATION LINEAIRE. MEMOIRE DE MAGISTER UMMTO/07/11/2001

[6] CHEBBAH MOHAMMED : RESOLUTION ET IMLEMENTATION D'UN PROBLEME MIN-MAX EN CONTROLE OPTIMALE 2006 .

[7] Gabasov. R, Adaptive methode of solving linear programming problems, Preprint Seies of University of Karlsruhe, institute for Statistics and Mathematics 1980.