

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET
D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de fin d'études de Master Académique

Filière : Génie Electrique

Spécialité : Commande des systèmes

Domaine : Science et Technologie

Mémoire dirigé par : **Mme YOUSFI Safia**

Présenté par : **Samir TAZEKRITT**

Thème

Commande CRONE d'un pendule inversé

Mémoire soutenu publiquement le _mois 2015 devant le jury composé de :

Aldjia NAIT ABDESSELAM
MAA, UMMTO, président

Safia YOUSFI
MAA, UMMTO, Rapporteur

Khedoudja KHERRAZ
MAA, UMMTO, Examineur

Ouiza BOUKENDOUR
MAB, UMMTO, Examineur

SOMMAIRES

REMERCIEMENTS

Dédicaces

Liste des figures

INTRODUCTION GÉNÉRALE 1

CHAPITRE 1: GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES D'ORDRE FRACTIONNAIRES

INTRODUCTION 3

1. *Historique du calcul fractionnaire* 3

2. *Définition mathématique* 4

2.1. *Intégrale fractionnaire* 4

2.1.1. *Définition* 4

2.1.2. *Propriétés* 5

2.2. *Dérivation fractionnaire* 5

2.2.1. *Définition de Riemann-Liouville* 5

2.2.2. *Définition de caputo* 6

2.2.3. *Définition de Grunwald-Letnikov (G-L)* 6

3. *Représentation d'un système d'ordre fractionnaire* 7

3.1. *Equation différentielle généralisée* 7

3.2. *Fonction de transfert fractionnaire* 7

3.2.1. *Fonction de transfert d'ordre fractionnaire explicite* 7

3.2.2. *Fonction de transfert d'ordre fractionnaire implicite* 8

3.3. *Représentation d'état fractionnaire* 9

3.3.1. *Réalisation du modèle d'état fractionnaire* 10

3.3.1.1. *Cas des systèmes commensurables* 10

3.3.1.2. *Cas des systèmes d'ordre non entier généralisés* 11

4. *Propriétés des systèmes fractionnaires* 12

4.1. *Stabilité des systèmes fractionnaires* 12

4.2. *Commandabilité des systèmes fractionnaires* 14

4.3. *Observabilité des systèmes fractionnaires* 15

5. *Passage du modèle d'état au modèle fonction de transfert* 15

Conclusion 16

CHAPITRE 2: GÉNÉRALITÉS SUR LA COMMANDE CRONE

1. *Principe de la commande robuste* 17

1.1. *Asservissement nominal* 18

1.2. *Asservissement réel* 18

2.	Les objectifs robustes	19
3.	<i>Principe de la commande CRONE</i>	20
3.1.	<i>Principe de la commande CRONE de première génération</i>	20
3.2.	<i>Principe de la commande CRONE de deuxième génération</i>	21
3.3.	<i>Principe de la commande CRONE de troisième génération</i>	23
3.3.1.	Le gabarit généralisé.....	24
3.3.2.	Gabarit curviligne	25
3.4.	<i>Commande CRONE des systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties carrés</i> . 26	
3.4.1.	Commande CRONE multi-SISO.....	27
3.4.2.	Commande CRONE multivariable des systèmes carrés.....	27
4.	<i>SUSPENSION CRONE</i>	27
4.1.	Exemple d'application de la suspension CRONE.....	28
4.1.1.	Le modèle	29
4.1.2.	La solution CRONE.....	30
	<i>CONCLUSION</i>	30

CHAPITRE 3 : APPLICATION DE LA COMMANDE CRONE SUR UN PENDULE INVERSÉ

1.	<i>Modèle mathématique: Modèle dans l'espace d'état</i>	34
1.1.	<i>Équations du système d'entraînement</i>	36
1.2.	<i>Équations linéaires de l'ensemble</i>	38
2.	<i>Représentation d'état de l'ensemble</i>	39
3.	<i>Stabilisation du pendule par la commande CRONE de première génération</i>	40
3.1.	Résultats de Simulation.....	42
3.2.	Interprétation des résultats	44
4.	<i>Application de la commande LQR sur le pendule inversé</i>	45
4.1.	<i>Calcul de la commande</i>	45
4.1.1.	Critères d'optimisation pour le régulateur.....	45
4.1.2.	Gains du régulateur.....	46
4.2.	<i>Résultats de simulation</i>	46
4.3.	Comparaison des deux méthodes.....	49
	Conclusion.....	49
	Conclusion générale.....	50

Liste des tableaux

références bibliographiques

REMERCIEMENTS

*Je remercie avant tout le bon dieu de m'avoir donné la force et la
volonté nécessaires pour achever mon travail*

*J'exprime aussi mes sincères remerciements et profonde gratitude
infinie à ma promotrice M^{me} Yousfi pour avoir bien dirigé ce travail, pour
son suivi, ses conseils et sa disponibilité en tout moment.*

*Je remercie toutes les personnes de près ou de loin qui m'ont bien
aidé et a réaliser ce travail de recherche*

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

*mes chers parents pour tous les sacrifices consentis, pour leur soutien
durant tout mon cursus ;*

mes frères et sœurs ;

toute ma famille ;

tous mes amis ;

et à tous mes collègues et amis de l'option Commande des systèmes.

Introduction générale

Le monde industriel connaît actuellement un énorme développement technologique, sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants du point de vue qualité et performances. Ce progrès technologique et industriel est dû pour beaucoup au grand saut qualitatif qu'a connu l'outil informatique logiciel et matériel, notamment depuis l'apparition des microprocesseurs, ce qui a permis de rendre possible l'application de méthodes et de techniques considérées jusqu'à présent comme purement théoriques. Cela est dû aussi au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes. Tout ceci a permis de mettre en œuvre des méthodes et des approches très complexes pour l'identification et la commande des systèmes.

L'une des théories qui peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et en ingénierie, est celle du calcul fractionnaire qui étend la dérivation et l'intégration aux ordres fractionnaires.

Au début c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordre entier par des opérateurs d'ordre fractionnaire, permettant le calcul de la dérivée d'ordre α réel ou complexe d'une fonction différentiable $f(t)$.

Partant de quelques spéculations de G.W. Leibniz (1695, 1697) et L. Euler (1730), cette théorie a été largement développée jusqu'à nos jours. De nombreux mathématiciens ont contribué à ce développement jusqu'à la moitié du siècle passé, dont nous pouvons citer : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822) N.H., J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A.K. Grünwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A., E.R. Love (1938), A. Erdélyi (1939), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Parallèlement à ce progrès théorique, quelques aspects pratiques limités du calcul fractionnaire, ont été développés par : Abel (1823, 1825), Boole (1824), Heavisid (1892, 1922) et Gemant (1936) pour résoudre certains problèmes physiques.

Ce n'est qu'au début des années 1950 que Van Der Ziel dans ses recherches sur les spectres de bruit des semi-conducteurs, puis Davidson et Cole dans leurs travaux sur la relaxation diélectrique dans certains liquides, ont pu modéliser des phénomènes naturels en faisant appel à la dérivée d'ordre fractionnaire. Depuis ces découvertes, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordre

fractionnaire et leur intérêt dans différentes disciplines tels que : l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, l'Automatique et le traitement du signal, et dans différentes applications telles que : la modélisation, l'identification et la commande. En effet, il a été montré qu'un nombre important de systèmes physiques ont un comportement qui peut être mieux décrit en utilisant des modèles mathématiques d'ordre fractionnaire.

Le pendule inversé est un exemple typique du système instable, c'est un système mécanique non linéaire, il est bien difficile de le commander par les techniques de commande linéaires classiques. Cependant, le système du pendule inversé est toujours utilisé pour vérifier et évaluer des théories de contrôle de la stabilité, et de nombreuses recherches sur la commande du système ont été menées.

Dans le premier chapitre nous avons fait l'objet du calcul fractionnaire, nous avons donné les définitions de base de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire, quelques propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire, les différentes représentations des systèmes fractionnaires et enfin les conditions de commandabilité, d'observabilité et de stabilité de ce système.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude de la Commande Robuste d'Ordre non Entier (CRONE) des systèmes linéaire mono-variables et multi-variables, tout en exposant le principe de la robustesse.

Dans le troisième chapitre nous avons donné quelques théories du pendule inversé, ensuite nous avons appliqué la commande CRONE sur ce pendule et des tests de simulation ont été fait pour mettre en évidence sa robustesse.

Enfin nous terminerons par une conclusion générale qui récapitule les travaux réalisés, ainsi que les résultats et les perspectives envisageables.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes d'ordre fractionnaires

Introduction

Les systèmes d'ordre fractionnaire sont des systèmes qui sont modélisés par des équations différentielles d'ordre non entier. Ces équations sont basées sur la notion de dérivation et d'intégration d'ordre non entier.

L'idée des dérivées et d'intégrales d'ordre fractionnaire semble un peu étrange et difficile à expliquer, cela est due au fait que l'opérateur d'ordre fractionnaire n'a pas une interprétation géométrique précise, contrairement aux opérateurs d'ordre entier. Pour cette raison, cet outil mathématique est souvent considéré comme irréal. Cependant plusieurs phénomènes physiques ont une description fractionnaire, donc le calcul d'ordre fractionnaire est nécessaire pour les expliquer.

1. Historique du calcul fractionnaire

L'origine du calcul fractionnaire semble remonter à Leibniz (1695). Dans une lettre au Marquis de L'Hospital, il propose de généraliser sa formule pour la dérivée n ème d'un produit de deux fonctions à $n > 0$. Dans une autre lettre à Bernoulli, il mentionne la notion des dérivées "d'ordres généraux".

Euler est le second grand mathématicien à aborder la question du calcul d'ordre fractionnaire (1730). Dans son article où il introduit sa célèbre fonction Gamma Γ qui généralise la factorielle ($\Gamma(n+1) = n!$), il conclut en proposant une définition pour la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ de x^β , avec $\beta > 0$.

Le calcul d'ordre fractionnaire est considéré comme une ancienne thématique qui a marqué son début au XVII^{ème} siècle. Cent ans plus tard le calcul fractionnaire a attiré l'attention de célèbres mathématiciens tels que P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A. K. Grünwald (1867-1872) et A.V. Letnikov (1868-1872) [1]. Il est resté un sujet non populaire parmi la communauté d'ingénierie, mais son intérêt n'est reconnu que dans la deuxième moitié du XX^{ème} siècle suite au développement des outils informatiques qui ont permis d'envisager des applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur.

Dans ce chapitre, on va introduire les définitions de base et les propriétés fondamentales des opérateurs intégral-différentiels d'ordre fractionnaire et on va illustrer par quelques exemples ces opérateurs.

2. Définition mathématique

L'opérateur d'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire sont la généralisation de la fonction de dérivation entière à des ordres non entiers quelconque, donnant ainsi la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo, une autre généralisation basée sur la définition usuelle de la dérivation entière, est proposée par Grunwald-Letnikov.

2.1. Intégrale fractionnaire

2.1.1. Définition

L'intégration répétée "k" fois de la fonction réelle $f(t)$ de la variable réelle t continue et intégrable sur $[t_0, +\infty[$ s'exprime par :

$$I_{t_0}^k f(t) = \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_3} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} f(t_1) dt_1 = \frac{1}{(k-1)!} \int_{t_0}^t (t - \delta)^{k-1} f(\delta) d\delta \quad (\text{I. 1})$$

Avec t_0 : état initial

Avec la généralisation de la fonction factorielle à un ordre réel donné par la fonction Gamma, on obtient la fonction d'intégration non entière suivante [2]:

$$I_{t_0}^a f(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_{t_0}^t (t - \delta)^{a-1} f(\delta) d\delta \quad (\text{I. 2})$$

Γ : La fonction d'Euler définie par :

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^+ v^{\lambda-1} e^{-v} dv \quad (\text{I. 3})$$

L'équation (I. 2) peut être interprétée comme l'aire de la surface que définit la fonction $f(t)$ pondérée par le facteur d'oubli représenté par la fonction suivante :

$$y_a(t) = \frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)} \quad (\text{I. 4})$$

La formule (I. 2) peut être aussi interprétée comme le produit de convolution de la fonction causale $f(t)$ et la fonction causale $y_a(t)$ qui est exprimée comme suit :

$$I_{t_0}^a f(t) = y_a(t) * f(t) \quad (\text{I. 5})$$

Pour $t_0 = 0$ on note $I_{t_0}^a = I^a$

Si $a = 1$ alors $I^a f(t)$ est une intégrale classique.

2.1.2. Propriétés

a) Composition de deux intégrales non entières:

Les opérateurs d'intégration non entière vérifient la propriété de semi-groupe soit :

$$I_{t_0}^{a_1} f(t) \cdot I_{t_0}^{a_2} f(t) = I_{t_0}^{a_1} (I_{t_0}^{a_2} f(t)) = I_{t_0}^{a_1+a_2} f(t) \quad \text{Avec } \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{cases} \quad (\text{I. 6})$$

b) Transformée de Laplace:

L'interprétation de l'équation (I. 2) comme un produit de convolution permet le calcul de la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre réel d'une fonction temporelle causale.

Lemme 1:

La transformée de Laplace de la fonction t^a est :

$$L\{t^a\} = s^{-a-1} \Gamma(a) \quad (\text{I. 7})$$

Soit alors

$$L\{y_a(t)\} = L\left\{\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}\right\} = s^{-a} \quad (\text{I. 8})$$

La transformée de Laplace de l'opérateur d'intégration fractionnaire s'écrit sous la forme :

$$L\{I^a f(t)\} = L\{y_a(t) * f(t)\} = L\{y_a(t)\} \cdot L\{f(t)\} = s^{-a} F(s) \quad (\text{I. 9})$$

2.2. Dérivation fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie les définitions de Riemann-Liouville, Caputo ainsi que Grunwald-letnikov qui sont les plus utilisées.

2.2.1. Définition de Riemann-Liouville

Soit $a \in \mathbb{R}^+$, n est un nombre entier strictement positif, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $f(t)$ est une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty[$, la dérivée d'ordre ' a ' de $f(t)$ de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}^{RL}D_t^a f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left({}_{t_0}I_t^{(n-a)} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-a)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-a-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I. 10})$$

Avec $(n-a) < a < n$

2.2.2. Définition de caputo

Caputo a reformulé la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire comme suit :

$${}^C D_t^a f(t) = I^{n-a} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-a)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{a-n+1}} d\tau \quad (\text{I. 11})$$

Avec $n-a < a < n$ et $n \in \mathbb{N}$

Pour $t_0 = 0$ entre les deux définitions, il existe les deux relations suivantes :

$${}^{RL} D^a f(t) = {}^C D^a f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k-1+a)} f^{(k)}(0^+) \quad (\text{I. 12})$$

$${}^{RL} D^a \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) = {}^C D^a f(t) \quad (\text{I. 13})$$

2.2.3. Définition de Grunwald-Letnikov (G-L)

Elle est basée sur la généralisation de la dérivée classique d'une fonction $f(t)$ d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la forme :

$$D^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \quad (\text{I. 14})$$

Avec

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (\text{I. 15})$$

En remplaçant dans l'équation (I. 15) l'entier n par $a \in \mathbb{R}$ avec ($a > 0$) l'expression alors deviens :

$$\binom{a}{j} = \frac{\Gamma(a+1)}{j! \Gamma(a-j+1)} \quad (\text{I. 16})$$

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $a > 0$ de G-L est donc :

$${}^G D_t^a f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(h)^a} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{a}{j} f(t - jh) \quad (\text{I. 17})$$

Où $\lfloor \cdot \rfloor$ dénotés la partie entière, h le pas d'échantillonnage et $\binom{a}{j}$ sont appelés coefficients binomiaux. Cette définition sera utilisée pour la simulation et l'évaluation numérique de la dérivée fractionnaire.

Remarque

Ces différentes définitions nous montrent que la dérivée d'ordre fractionnaire prend en compte les valeurs de $f(t)$ à tous les instants passés grâce à l'intégration qui y apparaît, elle fournit donc une caractérisation globale de $f(t)$. Et cet effet « effet mémoire » qui fait de l'opérateur de dérivation non entière un excellent outil de modélisation des phénomènes de diffusion connus pour être à mémoire longue.

3. Représentation d'un système d'ordre fractionnaire

Les systèmes fractionnaires sont des systèmes représentés par des équations différentielles non Entières, mais d'autres descriptions peuvent être utilisées. Dans notre cas nous considérons un système d'ordre non entier, linéaire à temps continu causal et invariant dans le temps décrit par l'approche classique, et représenté comme dans le cas entier par trois modèles :

- équation différentielle généralisée ;
- Fonction de transfert fractionnaire ;
- Représentation d'état fractionnaire ;

3.1. Equation différentielle généralisée

De manière générale, un système d'ordre non entier mono-variable, linéaire à temps invariant est décrit par une équation différentielle généralisée de la forme :

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i D^{a_i} y(t) = \sum_{j=1}^m b_j D^{B_j} u(t) \quad (\text{I. 18})$$

Où $u(t) \in R$ et $y(t) \in R$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système et $a_i, B_j \in R$.

Lorsque les ordres de dérivation a_i, B_j sont tous multiples d'un même nombre réel 'a' tel que :

$a_i = i a, B_j = j a$, le système non entier est dit d'ordre commensurable.

3.2. Fonction de transfert fractionnaire**3.2.1. Fonction de transfert d'ordre fractionnaire explicite**

Dans le domaine temporel, un système est dit d'ordre fractionnaire explicite lorsqu'il est représenté par une équation différentielle de la forme :

$$\sum_{i=0}^L a_i D^{n_{ai}} y(t) = \sum_{m=0}^M b_m D^{n_{bm}} u(t) , \{a_i , n_{ai} , b_m , n_{bm}\} \geq n_{b_m} \quad (\text{I. 19})$$

Où :

$u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système.

La fonction de transfert du système (I. 19) est donnée par un rapport de deux polynômes à puissances fractionnaires.

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^{n_{b_0}} + \dots + b_m s^{n_{b_m}}}{a_0 s^{n_{a_0}} + \dots + a_l s^{n_{a_l}}} \quad (\text{I. 20})$$

Dans le cas où tous les exposants de s sont multiples d'une certaine valeur réelle q (ordres commensurables), la fonction de transfert (I. 20) peut être réécrite sous la forme :

$$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^M (b_m s^{mq})}{\sum_{l=0}^L (a_l s^{lq})} \quad (\text{I. 21})$$

Où q est un nombre réel, M et L sont des entiers tels que $M \leq L$.

Un système d'ordre fractionnaire décrit par une fonction de transfert de la forme (I. 21) est appelé **système commensurable**.

Bien que n'importe quelle valeur réelle q suffise pour que le système soit commensurable, la valeur de q est généralement prise comme étant un nombre rationnel.

3.2.2. Fonction de transfert d'ordre fractionnaire implicite

La dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction $g(t)$ est dite implicite lorsqu'elle ne porte pas directement sur $g(t)$ mais sur le produit de $g(t)$ par une exponentielle croissante de constante du temps τ .

$$\left\{ \frac{d}{dt} \right\}_{imp}^a g(t) = \left\{ \frac{d}{dt} \right\}^a (g(t) e^{\frac{t}{\tau}}) \quad (\text{I. 22})$$

La relation (I. 22) définit la dérivée implicite d'ordre α de $g(t)$.

La transformée de Laplace de cette équation donne :

$$G(s) = \frac{1}{(1 + \tau s)^\alpha} \quad \text{avec } \tau \in R^+ \text{ et } R \alpha > 0 \quad (\text{I. 23})$$

Dans le cas général, un système est dit à dérivée d'ordre fractionnaire implicite lorsqu'il est fondé sur le produit de pôles et de zéros d'ordre fractionnaire, soit :

$$G(s) = \prod_{i=1}^N (1 + \tau_i s)^{\alpha_i} \quad \text{avec } \tau_i \in R^+ \quad \text{et } \alpha_i \quad i = 1, \dots, N \in IR \quad (I. 24)$$

3.3. Représentation d'état fractionnaire

Le modèle d'état d'un système d'ordre fractionnaire est défini comme dans le cas entier par deux équations :

Une équation d'état : dans laquelle chaque variable d'état $x_i(t)$ est dérivée à un ordre non entier α_i . Dans ce cas on parle de la représentation d'état généralisée. Dans le cas des systèmes commensurable, tous les états $x_i(t)$ sont dérivés à un même ordre non entier ' α '.

Une équation de sortie : qui est une combinaison linéaire des états, comme dans le cas entier.

Il en résulte un modèle d'état, écrit sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + B u \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (I. 25)$$

Où :

u : est le vecteur des entrées de dimension $n_u \times I$.

x : est le vecteur d'état d'ordre fractionnaire de dimension $n_x \times I$.

y : est le vecteur des sorties de dimension $n_y \times I$.

α : est l'ordre de dérivation tel que $0 < \alpha < 1$.

A , B , C et D sont toutes des matrices ou des vecteurs à éléments constants et de dimension appropriée.

Comme pour les représentations d'état d'ordre entier, les représentations d'état d'ordre fractionnaire ne sont pas uniques. Les systèmes d'ordre fractionnaire réel commensurable, permettent aussi une représentation dans l'espace d'état :

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{q}} x = Ax + B u \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (I. 26)$$

3.3.1. Réalisation du modèle d'état fractionnaire

3.3.1.1. Cas des systèmes commensurables

Soit un système non entier mono variable linéaire invariant représenté par sa fonction de transfert $G(s)$, donnée sous forme :

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{b_m p^{ma} + b_{m-1} p^{(m-1)a} + \dots + b_1 s^a + b_0}{p^{na} + a_{n-1} p^{(m-1)a} + \dots + a_1 s^a + a_0} \quad (\text{I. 27})$$

Pour calculer le modèle d'état qui lui correspond, on procède en trois étapes :

Étapes 1 :

Grâce au changement de variable s , le modèle non entier $G(s)$ peut être remplacé par un modèle entier $\dot{G}(s)$, qui s'écrit sous la forme :

$$\dot{G}(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{(m-1)a} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{(m-1)} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (\text{I. 28})$$

Étapes 2 :

Calculer le modèle d'état entier correspond à $\dot{G}(s)$, on peut obtenir toutes les formes particulières utilisées dans la théorie des systèmes d'ordre entier (forme commandable, observable, Jordan,). On obtient, le modèle de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{I. 29})$$

Étapes 3 :

On remplace dans le modèle d'état (I. 29), la dérivée entière d'ordre un par la dérivée non entière d'ordre α , ainsi le modèle d'état correspondant à la forme de transfert (I. 26) obtenu est de la forme [3] :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{I. 30})$$

La méthode reste applicable dans le cas du système commensurable multi-variables.

3.3.1.2. Cas des systèmes d'ordre non entier généralisés

a) Cas où $G(s)$ a un numérateur constant :

La fonction de transfert $G(s)$ s'écrit sous la forme :

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{z(s)}{U(s)} * \frac{y(s)}{z(s)} = \frac{1}{s^{a_n} + a_{n-1}s^{a_{n-1}} + \dots + a_1s^{a_1} + a_0} * b_0 \quad (\text{I. 31})$$

On suppose, sans perte de généralité, que : $a_n > a_{n-1} > \dots > a_2 > a_1$.

L'équation différentielle associée à $\frac{Z(s)}{U(s)}$ est donnée par :

$$D^{a_n} Z = -a_{n-1}D^{a_{n-1}} Z - \dots - a_1D^{a_1} Z + U \quad (\text{I. 32})$$

La variable t est omise pour ne pas surcharger les expressions.

Faisons le changement de variable pour obtenir le vecteur d'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = z \\ x_2 = D^{a_1} x_1 \\ x_3 = D^{a_2 - a_1} x_2 = D^{a_2 - a_1} (D^{a_1} z) = D^{a_2} z \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n = D^{a_{n-1} - a_{n-2}} x_{n-1} = D^{a_{n-1}} z \end{array} \right. \quad (\text{I. 33})$$

$$D^{(a)}(x) = \left\{ \begin{array}{l} D^{a_1} x_1 = x_2 \\ D^{a_2 - a_1} x_2 = x_3 \\ D^{a_3 - a_2} x_3 = x_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ D^{a_n - a_{n-1}} x_n = D^{a_n - a_{n-1}} (D^{a_{n-1} - a_{n-2}}) = \dots D^{a_n} z \end{array} \right. \quad (\text{I. 34})$$

Le dernier composant de la dérivée du vecteur d'état $D^{(a)}(x)$ $D^{(a_n)}(x)$ s'écrit en fonction d'autre dérivé de $z(t)$ et s'exprime comme suit :

$$D^{a_n - a_{n-1}} x_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-2} x_{n-1} - a_{n-1} x_n + U \quad (\text{I. 35})$$

4. Propriétés des systèmes fractionnaires

4.1. Stabilité des systèmes fractionnaires

La définition de la stabilité au sens de BIBO (Bounded input, Bounded output) dite aussi stabilité externe est donnée par la définition suivante :

Définition 1 [4]

Un système est dit BIBO stable si et seulement si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.

Dans le cas des systèmes linéaires non entiers d'ordre commensurable, comme dans le cas entier, la condition de stabilité est que l'équation caractéristique du système n'admet aucune racine à partie réelle positive. La condition de stabilité établie par Matignon pour les systèmes non entiers commensurable nécessite que les pôles p_i du système vérifient la condition donnée par le théorème suivant :

Théorème [5]

Un système fractionnaire d'ordre commensurable est BIBO stable si et seulement si toutes les racines p_i du polynôme entier correspondant à son polynôme caractéristique ont leurs arguments qui vérifient la condition suivante :

$$|\arg(p_i)| > \frac{\pi}{2\lambda} \quad (\text{I. 36})$$

Avec

$|\arg(p_i)|$: L'argument de la racine p_i

λ : Ordre commensurable

Alors le domaine de stabilité est représenté sur la figure suivante :

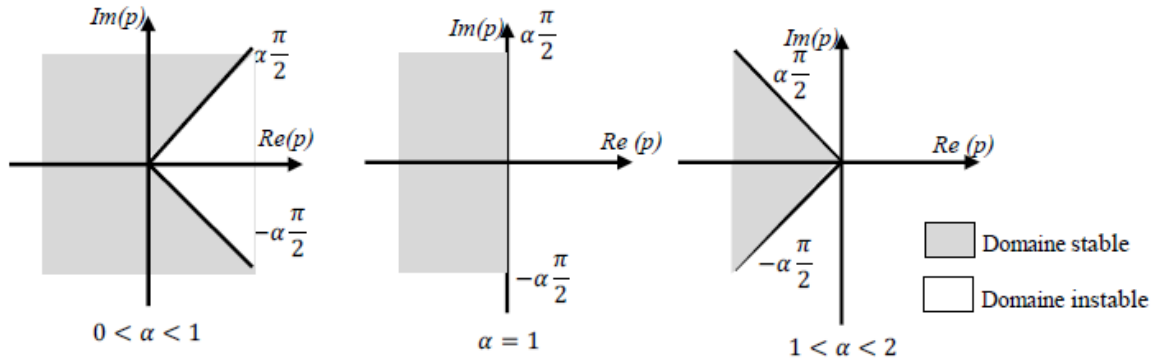


Figure 1 : domaine de stabilité des systèmes fractionnaires

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps invariant et à dérivée d'ordre n entier, nous savons bien qu'un système est stable si les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles strictement négatives, donc situées dans la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant, la définition de la stabilité est différente de celle des systèmes d'ordre entier.

En effet, les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier peuvent bel et bien avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables.

La stabilité des systèmes fractionnaires commensurables a été étudiée dans [6] où des conditions nécessaires et suffisantes ont été obtenues donnant lieu au théorème suivant :

Théorème [7]

Considérons le système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable suivant :

$$\begin{cases} D^a x(t) = Ax(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < a < 2 \quad \text{(I. 37)}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, soit $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ le système (I. 37) on choisissant l'entrée $u(t) = 0$ est stable si et seulement si on a :

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{a\pi}{2}, \lambda_i \in \sigma(A) \quad \text{Avec } i = 0 \dots n \quad \text{(I. 38)}$$

D'après cette définition de la stabilité, on résume toute les régions de la stabilité sous cette figure :

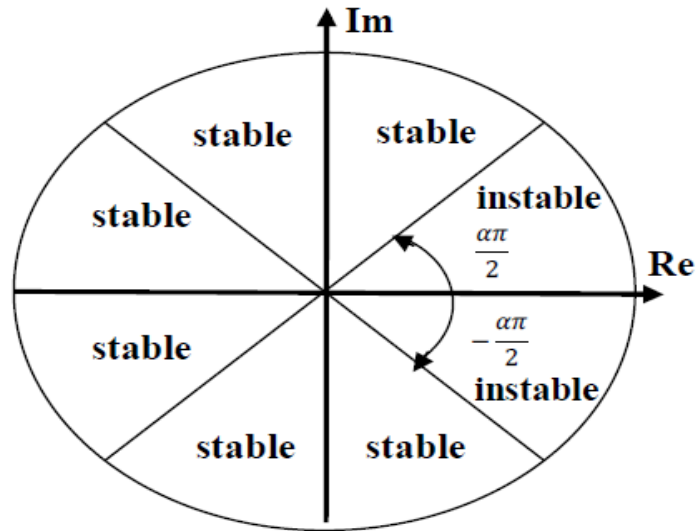


Figure 2 : Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaires avec $0 < a < 1$

Si $1 < a < 2$, alors la relation précédente (I. 38) décrit une région convexe du plan complexe comme le montre la figure suivante :

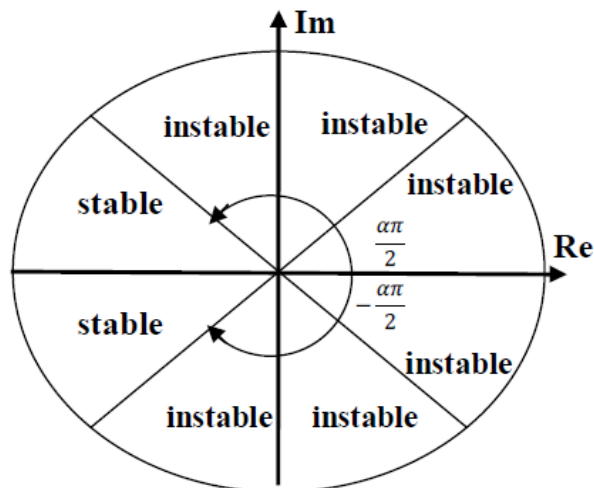


Figure 3 : Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaires avec $1 < a < 2$.

4.2. Commandabilité des systèmes fractionnaires [8]

La définition de la Commandabilité appliquée sur les systèmes fractionnaires est la même que celle utilisée dans les cas des systèmes linéaire entiers.

Le système fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation (I.30) est commandable si pour un temps donné t_0 il existe un temps fini $t_1 > t_0$ tel que, quelque soit deux états $x(t_0) = x_0$ et $x(t_1) = x_1$ dans l'espace d'état, alors il existe une entrée de commande $u(t)$ avec $t \in [t_0, t_1]$ qui permet de transférer l'état $x(t)$ de x_0 à x_1 en un temps fini t_1 .

Le système fractionnaire d'ordre commensurable (I. 30) est commandable si et seulement si le rang de la matrice de Commandabilité :

$$C = [B \ AB \ A^2B, \dots, A^{n-1} B] \quad (\text{I.39})$$

est égal à n

4.3. Observabilité des systèmes fractionnaires [9]

le système fractionnaire commensurable de l'équation (I. 30) est observable pendant un intervalle de temps $[t_0 \ t_1]$ avec $t_1 > 0$, si n'importe quel état $x(t_0)$ peut être déduit à partir des observations de la sortie $y(t)$ et de l'entrée $u(t)$ pendant un temps fini t avec $t \in [t_0 \ t_1]$

Et la condition de l'observabilité qui peut s'appliquer sur le système (I. 30) est le rang de la matrice d'observabilité :

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{I. 40})$$

est égal à n

5. Passage du modèle d'état au modèle fonction de transfert

Le passage du modèle d'état fractionnaire au modèle fonction de transfert se fait de façon analogue au cas entier en utilisant la formule suivante :

$$G(s) = ((C(s^{(a)}I - A))^{-1} B + D) \quad (\text{I. 41})$$

Avec

$$s^{(a)} I_n = \text{diag} [s^{a_1} \ s^{a_2} \ s^{a_3} \ \dots \ s^{a_n}] \quad (\text{I. 42})$$

Dans un cas particulier d'une forme canonique commandable, la fonction de transfert résultante s'écrit comme suit :

$$G(s) = \frac{c_1 s^{b_1} + c_2 s^{b_2} + \dots + c_n s^{b_n}}{a_1 s^{\delta_1} + a_2 s^{\delta_2} + \dots + a_n s^{\delta_n} + a_{n+1} s^{\delta_{n+1}}} \quad (\text{I. 43})$$

Avec:

$$b_1 = 0, \quad b_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_j \quad \text{Pour } i = 2, \dots, n \quad (\text{I. 44})$$

et

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_j \quad \text{Pour } i = 2, \dots, N \quad (\text{I. 45})$$

On fait alors comme dans le cas entier, les éléments des matrices C et A constituent respectivement les coefficients du numérateur et dénominateur de la fonction de transfert correspondante.

Les ordres de dérivation du numérateur et dénominateur sont des combinaisons linéaires des ordres de dérivation des vecteurs d'état.

$$G(s) = \frac{c_1 + c_2 s^{b_2} + \dots + c_n s^{b_n}}{a_1 + a_2 s^{\delta_2} + \dots + a_n s^{\delta_n} + a_{n+1} s^{\delta_{n+1}}} \quad (\text{I. 46})$$

L'équation caractéristique du système, correspond comme dans le cas entier ou polynôme du dénominateur de la fonction de transfert et elle est donnée par :

$$s^{(a)} I_n - A = 0 \quad (\text{I. 47})$$

Conclusion

Nous avons présentés dans ce chapitre une introduction aux notions fondamentales de la théorie du calcul d'ordre fractionnaire. Commençant par les différentes définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire, leurs propriétés et la présentation de la transformée de Laplace de ces opérateurs. Après, nous avons présenté les fonctions spécifiques pour le calcul d'ordre fractionnaire.

Chapitre 2

Généralités sur la commande CRONE

Introduction

Les commandes robustes ont pour objectifs de suivre les variations de la consigne, de rejeter les perturbations et le bruit, et de garantir des marges de robustesse. Quelques unes des méthodes de commande robuste font la synthèse à partir d'un modèle nominal du système sur la base de critères de stabilité et de performance, par contre il y a des méthodes qui prennent en compte dans la synthèse des critères explicites de robustesse vis à vis des incertitudes.

Plusieurs méthodes de commande robuste existent dans la littérature, nous citons :

- Commande LQG/LTR (Linéaire Quadratique Gaussienne avec recouvrement de transfert de boucle)
- Commande prédictive (GPC, MPC)
- Approche QFT (Quantitative Feedback Theory)
- Placement de pôle robuste
- Commande H_∞
- Commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier)

1. Principe de la commande robuste

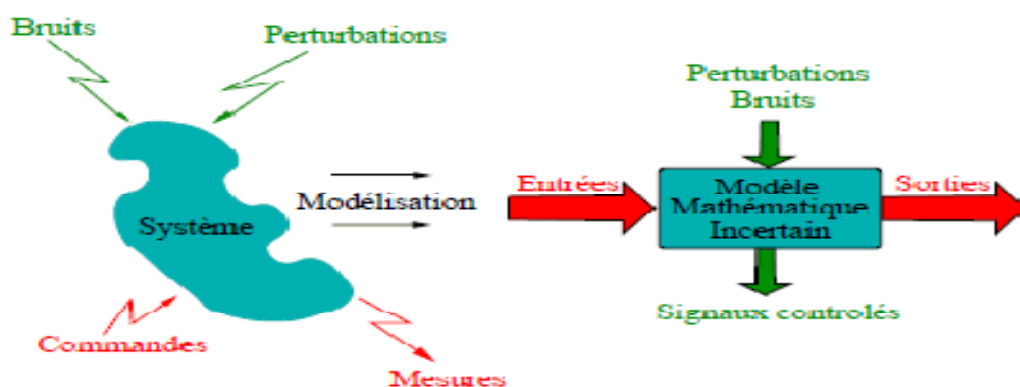


Figure 4 : Modélisation d'un système réel

En réalité, le modèle d'un système n'est qu'une approximation de ce dernier (voir la figure de ci-dessus). En effet, passer d'un système réel à un modèle mathématique suppose de négliger certaines lois, et certaines principes internes au système.

Le problème de commande robuste consiste à concevoir un correcteur K qui garantie des propriétés de robustesse et de stabilité à un système G . La théorie de commande robuste repose, le plus souvent, sur la structure à contre réaction ; comme le montre l'asservissement suivant:

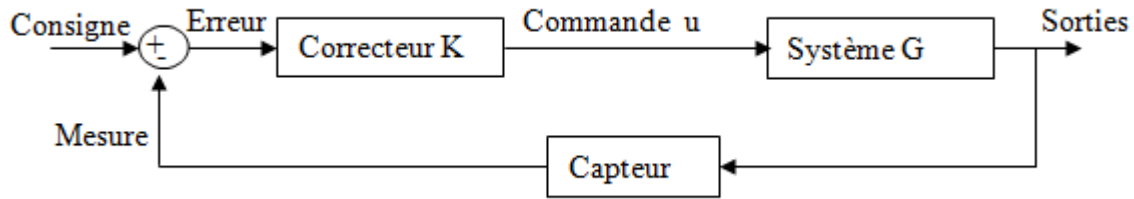


Figure 5 : Schéma bloc d'un problème de commande robuste

Suivant la forme du système G (avec ou sans les incertitudes « voir la figure ci-dessous »), deux problèmes de commande peuvent se poser

- Problème nominal : (sans incertitudes)
- Problème réel : (avec les incertitudes)

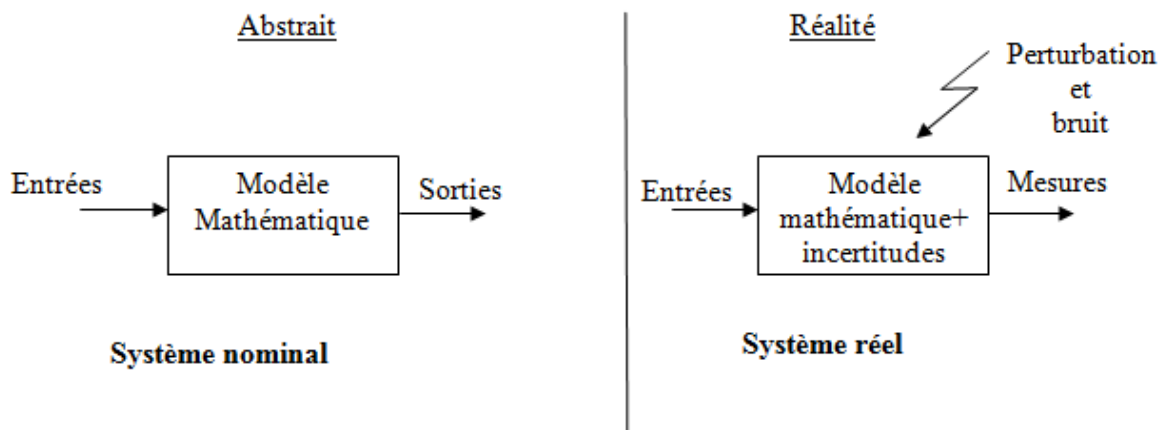


Figure 6 : Système nominal et système réel

1.1. Asservissement nominal

Le problème nominal consiste à trouver un contrôleur K qui garantit la stabilité et certaines performances au système nominal, tout en ignorant les incertitudes.

1.2. Asservissement réel

Le problème réel de la commande robuste consiste à trouver un contrôleur K qui garantit la stabilité et certaines performances au système nominal additionné aux incertitudes.

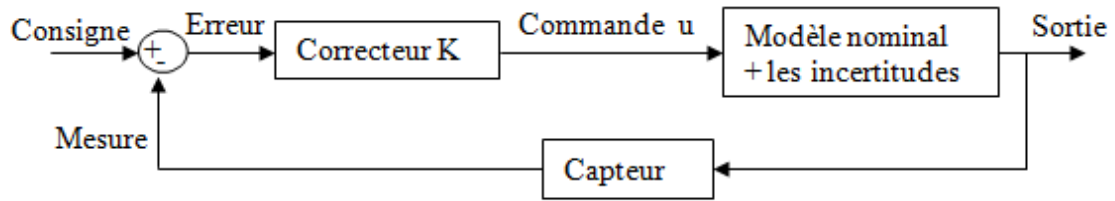


Figure 7 : Schéma bloc d'un asservissement réel

2. Les objectifs de robustesse

Le contrôleur doit assurer la stabilité et des performances pas pour le modèle uniquement, mais aussi pour le système réel qu'il représente (avec les incertitudes).

a) Robustesse en stabilité

A la différence des systèmes certains, les systèmes incertains, en général, sont définis par une loi dynamique $\dot{x}(t) = f(x(t), \Delta(t))$, (où $x(t)$ est le vecteur d'état, et $\Delta(t)$ représente les incertitudes) et leur stabilité est conditionnée par la stabilité des incertitudes.

Un système est robustement stable si pour chaque incertitude $\Delta(t)$, le système $\dot{x}(t) = f(x(t), \Delta(t))$ est stable.

b) Robustesse en performance

Dans le cadre de la modélisation incertaine, les performances du système sont valides dans la mesure où l'ensemble des réalisations incertaines satisfait simultanément les mêmes performances. On dit qu'un système incertain satisfait une performance robuste si et seulement si l'ensemble des systèmes LTI qui le constituent satisfait cette même performance.

Fixer un objectif de performance robuste pour un système incertain revient à imposer une borne supérieure à l'ensemble des coûts. Cette spécification permet de garantir une borne maximum sur toutes les incertitudes de l'amplification des perturbations.

Les différentes méthodes pour résoudre ce problème se comparent entre elles suivant que le coût est minimum. La problématique des performances de coût robuste est alors d'approcher au mieux le coût dans la pire des cas.

Dans l'approche fractionnaire qu'utilise la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier), la robustesse est de nature plus sévère puisqu'il s'agit de la robustesse du degré de stabilité. L'objectif étant alors le maintien de la performance dynamique fréquentielle ou temporelle qui mesure ce degré (robustesse en performance). Plus

précisément, la robustesse dont il s'agit est celle du degré de stabilité de la commande vis-à-vis des incertitudes du procédé.

Il est fréquent de considérer la robustesse de stabilité, l'objectif est alors le maintien de la stabilité (robustesse en stabilité).

3. Principe de la commande CRONE

La commande CRONE est basée sur la configuration commune de retour unitaire figure (8). Le correcteur ou/et la fonction de transfert en boucle ouverte sont définis en utilisant l'opérateur de dérivation ou d'intégration d'ordre non entier. La robustesse exigée est celle des marges de stabilité et des performances, et en particulier la robustesse du maximum de la fonction de sensibilité complémentaire commune.

Les bases de la commande CRONE ont été fondées dans la deuxième moitié des années 1970 par A. Oustaloup dans son travail de synthèse d'un laser à colorant continu. Trois stratégies bien distinctes assurant d'excellentes performances de robustesse ont fait l'objet de développements théoriques et technologiques importants. Chacune d'elles définit une génération de la commande CRONE.

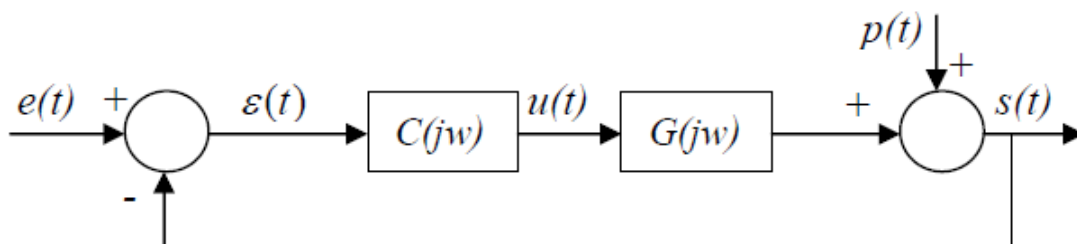


Figure 8 : Diagramme de commande à retour unitaire

3.1. Principe de la commande CRONE de première génération

Les variations de la marge de phase de la commande consécutives aux variations paramétriques du procédé résultent des variations de phase du procédé et du régulateur autour de la fréquence ω_n qui est elle-même susceptible de varier. La stratégie de la commande CRONE de première génération consiste à réduire les variations de la marge de phase aux variations de phase du procédé en implantant un correcteur à phase constante autour de la fréquence ω_n , ce régulateur CRONE à phase constante est fondé sur une transmittance d'ordre non entier réel n de la forme [10] :

$$c(p) = \left(\frac{1 + \frac{p}{\omega_b}}{1 + \frac{p}{\omega_h}} \right)^n \quad (\text{II. 1})$$

La stratégie de la commande CRONE première génération est particulièrement appropriée lorsque la fréquence ω_u est comprise dans une bande de fréquence où la réponse fréquentielle du procédé est asymptotique, c'est à dire où sa courbe de phase est constante, et où donc ne se manifestent que des incertitudes portant sur le gain du procédé. Un tel comportement situé en haute fréquence génère des niveaux de commande souvent trop importants. Le choix de la commande CRONE de deuxième génération est alors à favoriser.

Remarque

Dans le domaine de la commande en automatique, la recherche de la synthèse d'un tel régulateur définit l'approche (dite non entière) qu'utilise la commande CRONE de première génération.

3.2. Principe de la commande CRONE de deuxième génération

Quand le procédé n'est soumis qu'à des variations de type gain autour de la fréquence ω_u , les variations de marge de phase dues à la non constance de sa phase en fonction de la fréquence sont maintenant compensées par la phase du régulateur. Ce régulateur qui n'est plus à phase constante, permet de synthétiser un gabarit vertical (dans le plan de Nichols) auquel correspond la transmittance en boucle ouverte [11] :

$$B(p) = \left(\frac{\omega_n}{p} \right)^n \quad \text{Pour } \omega \in [\omega_a, \omega_b] \quad \text{et } n \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{II. 2})$$

Dans le domaine de la commande en automatique, l'objectif est d'obtenir un comportement fréquentiel similaire, notamment sur la figure (9) :

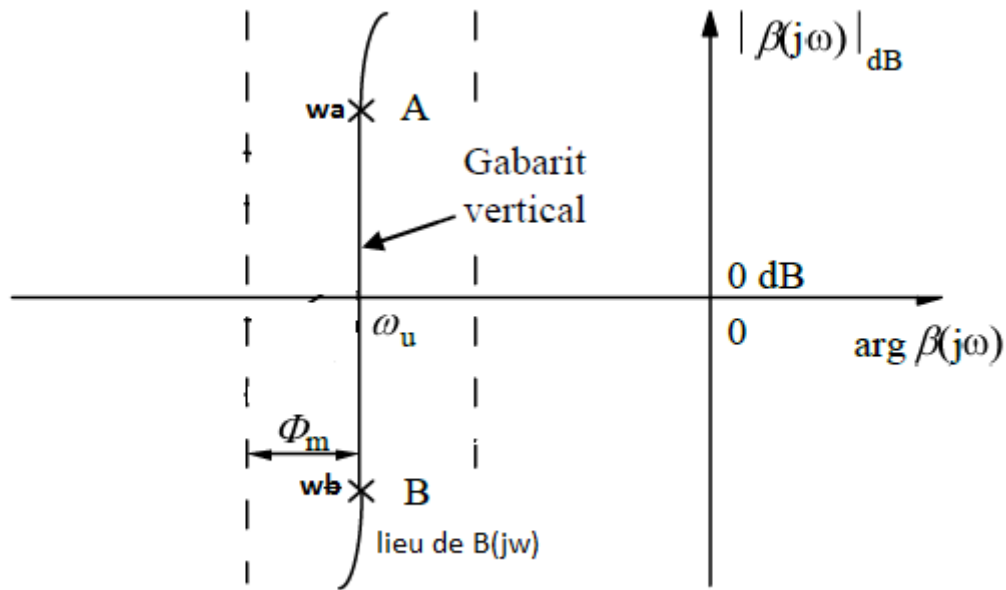


Figure 9 : un segment de droite verticale définit le gabarit dans le plan de Black

Un lieu de Black en boucle ouverte qui dessine le gabarit vertical ainsi définie pour l'état paramétrique nominal du procédé

Un glissement du gabarit sur lui-même lors d'une reparamétrisation du procédé (cette condition étant vérifiée lorsque la reparamétrisation conduit uniquement à des variations de gain autour de ω_n).

La forme et le glissement vertical du gabarit assure, non seulement la constante de la marge de phase φ_m mais également sur la (figure 10).

- La constante de premier dépassement réduit de la réponse libre ou indicielle en asservissement ou en régulation, à travers la tangence du gabarit a un même contour d'iso -dépassement (de graduation D_1') [12].
- La constante du facteur d'amortissement en asservissement et en régulation à travers la tangence du gabarit a un même contour d'iso amortissement (de graduation ξ) [13].

Remarque

La recherche de la synthèse d'un tel gabarit définit l'approche (dite non entière) qu'utilise la commande CRONE de deuxième génération.

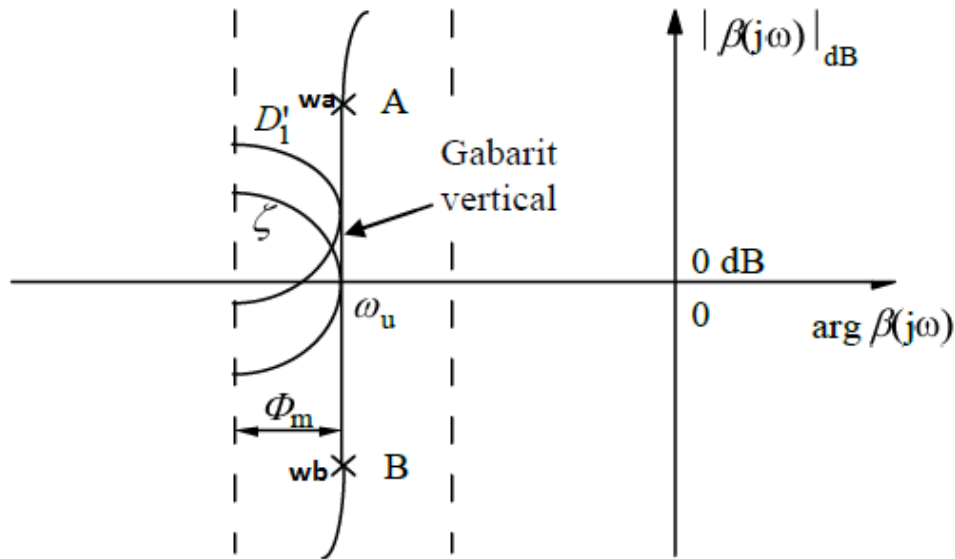


Figure 10 : la forme et le glissement vertical de gabarit AB assurent à la fois la robustesse de la marge de phase ϕ_m , du premier dépassement réduit D_1' et du facteur d'amortissement ξ

Néanmoins, pour prendre en compte à la fois le gabarit vertical au voisinage de la fréquence ω_u ainsi que des spécifications de précision ou de sensibilité au bruit, la fonction de transfert de la boucle ouverte utilisée est la suivante :

$$\hat{a}(p) = k \left(\frac{\omega_b}{p} + 1 \right)^{n_b} \left(\frac{1 + \frac{p}{\omega_h}}{1 + \frac{p}{\omega_b}} \right)^n \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{\omega_h} \right)^{n_h}} \quad (\text{II. 3})$$

Avec ω_b et ω_h les fréquences transitionnelles respectivement basse et haute fréquence. Le correcteur est ensuite défini par le rapport entre la réponse fréquentielle en boucle ouverte et la réponse fréquentielle nominale du procédé :

$$C(j\omega) = \beta(j\omega) G_0(j\omega) \quad (\text{II. 4})$$

3.3. Principe de la commande CRONE de troisième génération

Lorsque la reparamétrisation du procédé ne conduit pas uniquement à des variations de gain autour de la fréquence au gain unité en boucle ouverte, ω_n , il n'y a aucune raison pour que le gabarit vertical assure au mieux la robustesse de la commande. Il convient alors de le généraliser conformément à deux niveaux de généralisation.

Le premier niveau consiste à considérer un gabarit, toujours défini comme un segment de droite pour l'état paramétrique nominal du procédé, mais de direction et de position quelconque, appelé gabarit généralisé [14].

Le deuxième niveau consiste à substituer au gabarit généralisé un ensemble de gabarits de même type, sa description par un produit de transmittance non entières complexes bornées en fréquence, définit un gabarit curviligne [15].

3.3.1. Le gabarit généralisé

a) Principe et définition

Un premier niveau de généralisation consiste à considérer un gabarit :

- ✓ toujours défini comme un segment de droite pour l'état paramétrique nominal du procédé.
- ✓ Mais qui ne détermine plus forcément un blocage de phase autour de la fréquence ω_n

Le segment de droite vertical qui définissait jusqu'ici le gabarit dans le plan de BLACK est ainsi remplacé par un segment de droite de position et de direction quelconque autour d'une fréquence ω_g autour de laquelle est défini le gabarit généralisé n'est plus forcément égale à la fréquence ω_u comme pour le gabarit vertical.

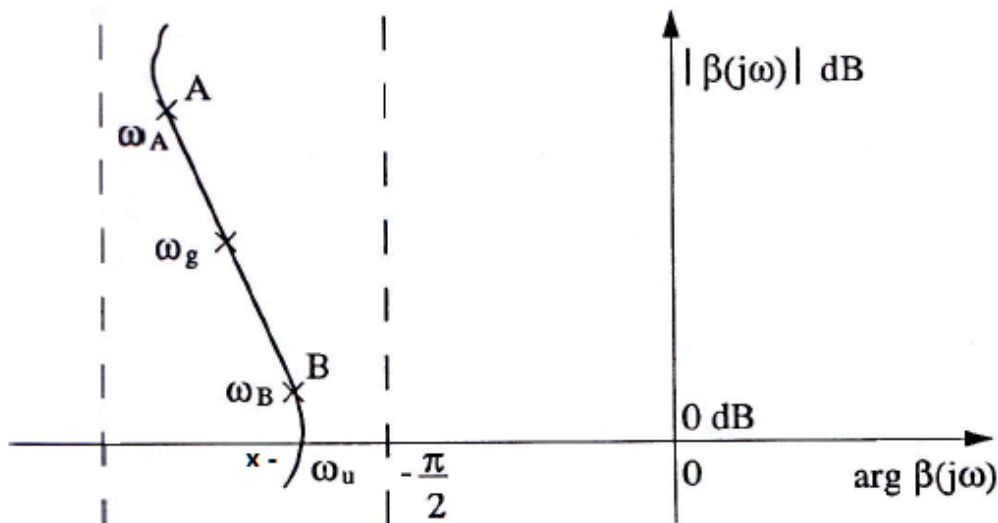


Figure 11 : Représentation du gabarit généralisé dans le plan de Black

Dans le cadre de cette généralisation, il existe un nombre indéfini de gabarits généralisés qui peuvent tangenter pour une fréquence ω_u donnée par la figure (12).

Le même contour d'iso dépassement (de graduation D'_1).

Ou le même contour d'iso-amortissement (de graduation ξ).

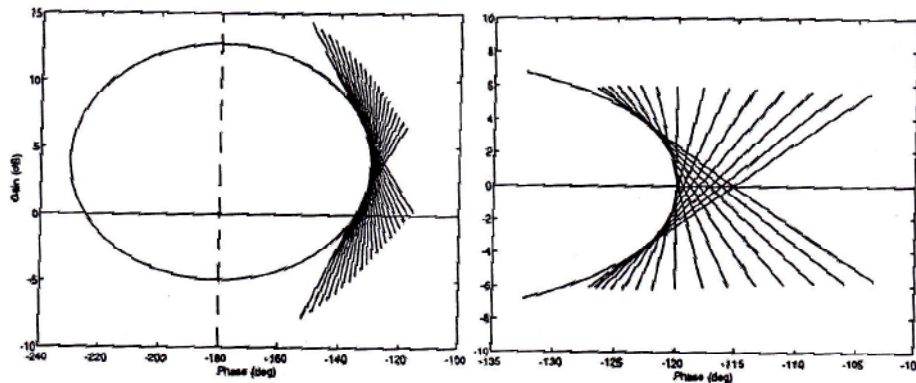


Figure 12 : le même degré de stabilité de la commande peut être assuré par une infinité de gabarits généralisés tangentant un même contour de performance en l'occurrence (a) un contour d'amplitude de Black de graduation $Q_a = 2,3$ db et (b) un contour d'iso amortissement de graduation $\xi = 0.707$

Parmi l'infinité de gabarits généralisés ainsi définie, il convient de sélectionner un gabarit optimal pour l'ensemble des procédés reparamétrisés possibles.

Le gabarit optimal peut donc être défini comme le gabarit généralisé qui, pour une fréquence ω_u donnée, tangente le contour désiré d'iso dépassement D_1' ou d'iso amortissement ξ pour l'état paramétrique nominal du procédé, et minimise un critère quadratique portant sur les variations extrémales de D_1' ou de ξ consécutives aux domaines d'incertitudes résultant des différents états paramétriques possibles du procédé.

La recherche de la synthèse d'un tel gabarit définit l'approche optimale initiale de la commande CRONE de troisième génération [16].

3.3.2. Gabarit curviligne

Quand les variations paramétriques du procédé conduisent à des domaines d'incertitude importants et sur une grande plage fréquentielle ou que les performances requises sont extrêmement exigeantes, les paramètres déterminés par l'optimisation a , b , ω_l et ω_h ne suffisent pas à résoudre le problème de commande. Le deuxième niveau de généralisation consiste alors à considérer, non plus un seul gabarit, mais un ensemble de gabarits généralisés appelé gabarit curviligne [17].

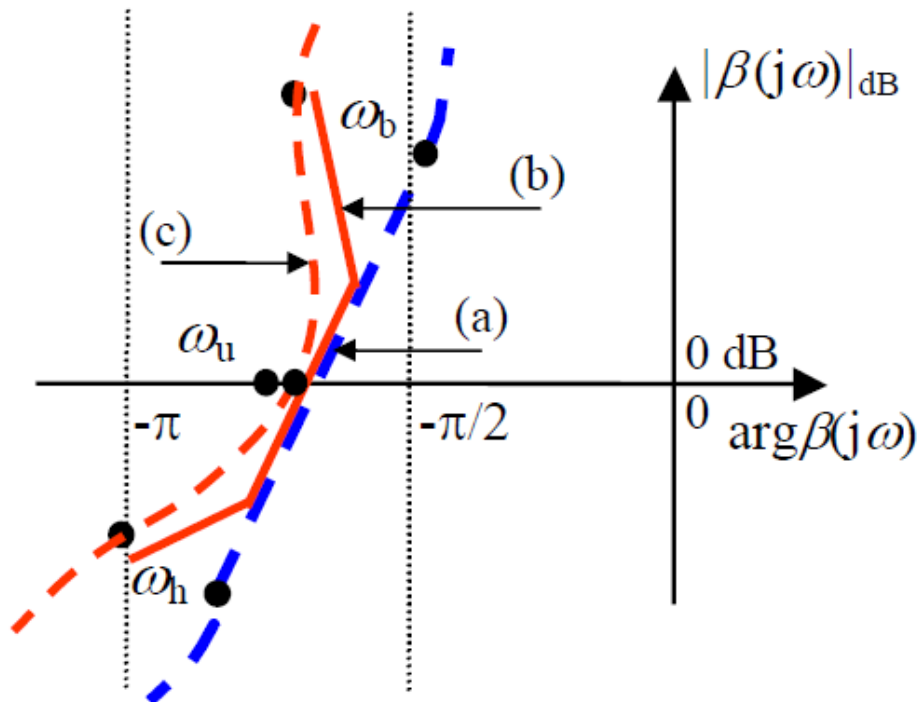


Figure 13 : Gabarit généralisé (a), ensemble de gabarits généralisés (b) et gabarit curviligne (c)

3.4. Commande CRONE des systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties carrés

La méthodologie CRONE a montré son efficacité pour la synthèse dans le domaine fréquentiel de commande robuste des systèmes (procédés) linéaires stationnaires (LTI), incertains et possédant une entrée de commande et une sortie (SISO) [18]. Par ailleurs, les systèmes LTI ayant un nombre d'entrées de commande n égal aux nombre de sorties à réguler m (MIMO carrés) sont souvent, pour des questions de simplicité et/ou de sécurité, commandés par des régulateurs "multi variables" diagonaux (dits aussi décentralisés).

Il est alors fréquent que chaque élément du régulateur ne soit alors synthétisé qu'en ne tenant compte que d'un des comportements SISO du procédé (relation dynamique directe entre une seule entrée de commande et une seule sortie du procédé). L'influence des termes de couplage présents dans le procédé MIMO considéré est alors bien sûr susceptible de conduire à des systèmes dont les amortissements s'avèrent plus réduits que prévus. Deux extensions de la méthodologie CRONE SISO ont initialement été proposées pour la commande de procédés MIMO carrés.

3.4.1. Commande CRONE multi-SISO

La première approche est dite multi-SISO dans la mesure où le régulateur qui en résulte est caractérisé par une matrice de transfert diagonale dont chaque élément est synthétisé, indépendamment des autres, en tenant compte d'un élément de la diagonale du procédé dont l'incertitude est augmentée en tenant compte du module des termes non diagonaux. Si cette approche est souvent efficace, cette augmentation de l'incertitude pouvant être pessimiste, le régulateur obtenu peut aussi parfois s'avérer peu performant.

3.4.2. Commande CRONE multivariable des systèmes carrés

La deuxième approche est totalement multivariable au sens où le régulateur synthétisé n'est pas diagonal mais doit assurer un comportement découplé (diagonal) en boucle fermée pour l'état nominal du procédé. La fonction de transfert en boucle ouverte nominale, β_0 , est alors diagonale et ses éléments sont simultanément optimisés afin de minimiser les variations du degré de stabilité en boucle fermée pour l'ensemble des états paramétriques du procédé.

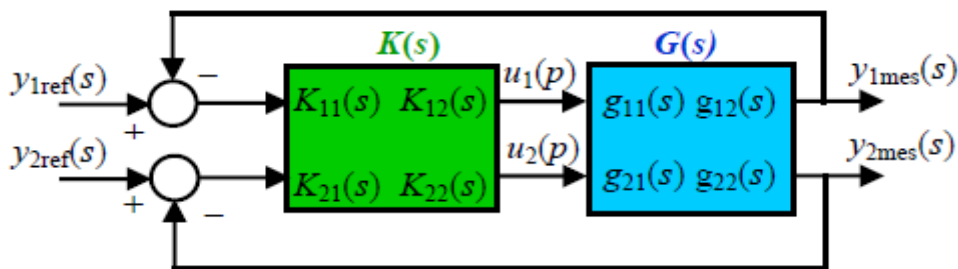


Figure 14 : Schéma d'une commande centralisée d'un procédé MIMO 2x2

Les avantages de cette méthode sont le nombre malgré tout restreint de paramètres permettant de décrire la boucle ouverte et la possibilité de prendre en compte les incertitudes liées au procédé sans aucun pessimisme.

4. Suspension CRONE

Le principe de la suspension CRONE consiste à remplacer le ressort et l'amortisseur d'une suspension traditionnelle par un dispositif mécanique défini par une fonction de transfert force-déplacement d'ordre non entier. La suspension ainsi obtenue est dite CRONE

en raison de son lien étroit avec la commande CRONE de deuxième génération. C'est la raison pour laquelle le principe de cette commande est utilisé pour synthétiser la suspension. Ses paramètres sont ensuite déterminés à partir d'une optimisation sous contraintes d'un critère de performances composé de grandeurs représentatives de l'isolation vibratoire. Les réponses fréquentielles et temporelles montrent la robustesse, vis-à-vis des variations de la masse suspendue, du facteur de résonance dans le domaine fréquentiel et du facteur d'amortissement dans le domaine temporel.

À partir du concept de la suspension CRONE, plusieurs solutions technologiques ont été étudiées pour sa mise en œuvre. L'une d'entre elles, appelée suspension CRONE passive, est développée à partir du lien qui existe entre récursivité et dérivation non entière. En effet, il est possible de synthétiser la dérivation non entière sur une bande de fréquences en utilisant un ensemble de N cellules élémentaires ressort-amortisseur dont les constantes de temps sont distribuées de manière récursive. Dans le domaine de l'automobile, la suspension est composée de N sphères (ressorts à gaz), chacune d'elles étant équipée d'un amortisseur. L'implantation de cette solution technologique sur une Citroën BX expérimentale du laboratoire a contribué à la validation du concept de la suspension CRONE.

4.1. Exemple d'application de la suspension CRONE

La suspension d'automobile

L'objectif est de remplir trois fonctions, par ordre décroissant d'importance, dont la première préexiste aux deux autres:

- ✓ maintenir le véhicule en compensant son poids,
- ✓ assurer une bonne tenue de route,
- ✓ assurer un confort suffisant.

Confort et tenue de route étant relativement antinomiques, un compromis est nécessaire.

4.1.1. Le modèle (Figure 15)

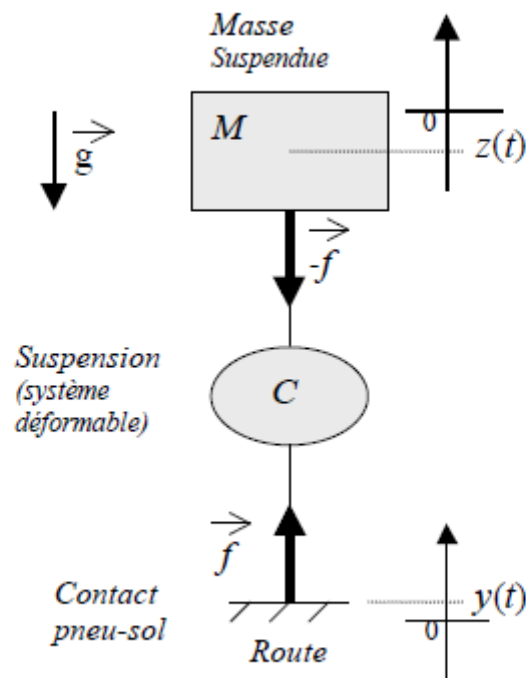


Figure 15: Schéma d'une suspension (masse non suspendue négligée).

Dans le domaine fréquentiel ($p = \frac{d}{dt}$), le déplacement vertical $Z(p)$ de la caisse s'exprime, en première approximation (linéarisation, $z(t=0)$, masse non suspendue négligée, accélération horizontale du véhicule supposée nulle, etc.)

$$Z(p) = \frac{c(p)}{c(p) + m p^2} Y(p) - \frac{m g}{p(c(p) + M p^2)} \quad (\text{II. 5})$$

Où $Y(p)$ est le déplacement vertical relatif de la chaussée, M la masse suspendue, g la constante de pesanteur et $C(p)$ la transmittance de la suspension (Figure 16).

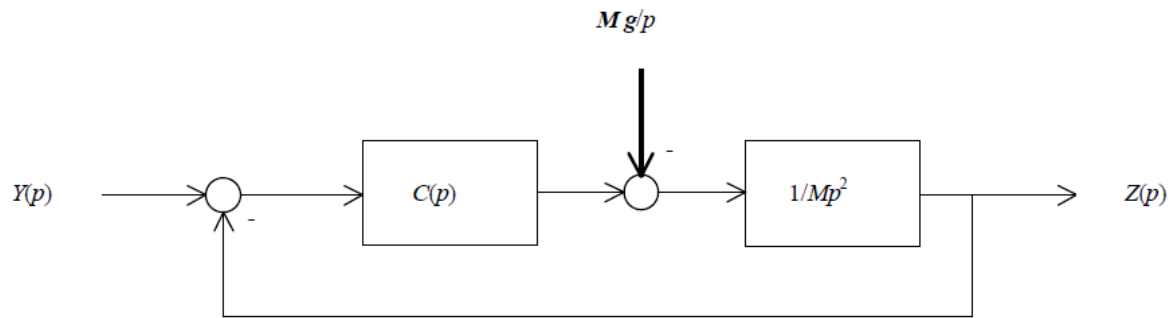


Figure 16: Schéma fonctionnel d'une suspension en régime linéaire

4.1.2. La solution CRONE

Dans sa version idéale, elle s'exprime:

$$c(p) = k p^v \text{ avec } 0 < v < 1 \quad (\text{II. 6})$$

La robustesse invoquée, qui concerne l'incertitude sur M , est l'invariance, sous changement de fréquence, du transfert : $Y \rightarrow Z$.

La conclusion qui s'impose est qu'une telle transmittance, qui présente une raideur statique nulle:

$$c_0 = c(0) = 0 \quad (\text{II. 7})$$

La réalisation effectivement mise en œuvre est présentée comme une approximation de l'idéal ci-dessus par association de cellules convenablement tarées, conduisant à une raideur statique $C_0 = 215 \text{ N/m}$, valeur physiquement négligeable, non admissible pour une suspension d'automobile, et qui renvoie à la remarque précédente.

En fait, la réintroduction d'un terme de rappel statique ruinant l'invariance recherchée, basée sur son absence, ce terme ne peut prendre une valeur significative sans dénaturer l'approche, inadaptée au problème.

Conclusion

La troisième génération de la commande CRONE résulte de la généralisation de la commande CRONE de deuxième généralisation à travers deux niveaux de généralisation.

La généralisation du gabarit vertical, que réalisent le gabarit généralisé puis le gabarit curviligne, est guidée pas le souci d'étendre le domaine d'application de la commande

CRONE à tous les types de reparamétrisation du procédé, notamment à des reparamétrisations ne conduisent pas uniquement à des variations de gain autour de la fréquence ω_u , l'originalité d'une telle approche repose sur la reparamétrisation réduite à peu de paramètres qu'autorise l'ordre non entier complexe d'intégration de l'ensemble de transmittance en boucle ouverte assurant le même degré de stabilité nominal. Le gabarit généralisé et le gabarit curviligne sont en effet décrits par des transmittance fondées sur l'intégration non entière complexe.

La première génération propose un régulateur optimal fractionnaire (non entier) à blocage de phase aux alentours de la fréquence au gain unité de la boucle ouverte. Ce type de régulateur ne participe donc pas aux variations de phase de la boucle ouverte et permet donc d'assurer la robustesse de la marge de phase pour les systèmes ayant déjà une phase constante auto. Cette première génération s'applique donc, essentiellement à un ensemble de systèmes dont les variations paramétriques génèrent uniquement une variation du gain. Cela permet de conserver le blocage de phase du procédé et donc la robustesse de la marge de phase. Ce type de régulateur génère souvent des efforts de commande très élevés dus au fait que le comportement « blocage de phase » du procédé n'est souvent observé qu'en hautes fréquences. C'est par contre une solution à recommander pour des systèmes purement intégrateurs ou inertiels.

La seconde génération propose de rechercher un régulateur optimal permettant d'assurer la robustesse de la marge de phase. Pour cela on définit une boucle ouverte fractionnaire d'ordre réel, $\beta(s)$ à blocage de phase sur toute une plage de fréquence autour de la fréquence au gain unité dont on déduit le régulateur, par la relation $K(s) = G_o$

Le lieu de Nichols de la boucle ouverte autour de la pulsation $\omega_B u_B$ est une droite verticale permettant d'assurer la robustesse de la marge de phase, de la marge de module et aussi des pics de résonance des fonctions de sensibilité et sensibilité complémentaire.

Enfin, la troisième génération, basée sur une boucle ouverte fractionnaire d'ordre complexe, permet de commander un ensemble de procédés dont les variations paramétriques conduisent à des incertitudes plus complexes qu'une variation de gain. Le gabarit vertical est alors remplacé par un gabarit généralisé dont le lieu de Nichols autour de la fréquence ω_u reste une droite mais de direction quelconque. Un deuxième niveau de généralisation consiste à remplacer le gabarit généralisé par un ensemble de droites de direction quelconque (gabarit curviligne).

Chapitre 3

Application de la commande CRONE sur un pendule inversé

Introduction

Un pendule inversé est un système qui présente des caractéristiques intéressantes permettant d'illustrer quelques problèmes type. IL s'agit d'un système instable parfaitement décrit par un modèle non linéaire obtenu en appliquant les lois de la physique. Le schéma de principe du système est donné sur la figure suivante:

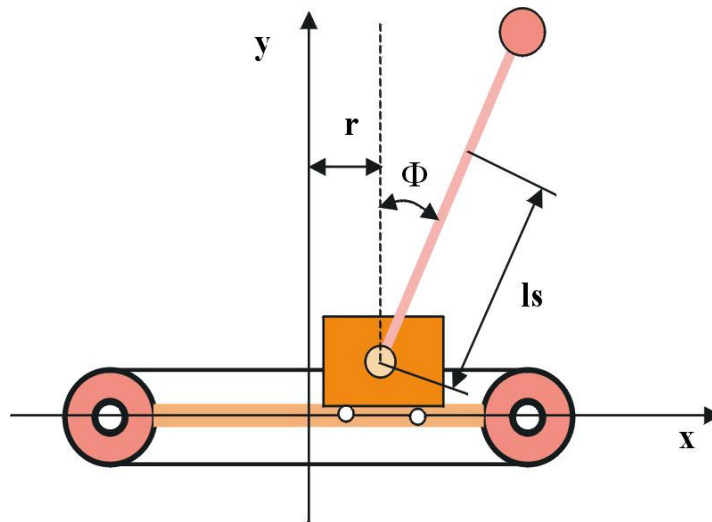


Figure 17 : Schéma général d'un Pendule inversé

Le système est constitué d'un chariot de masse M solidaire d'une courroie qui peut être entraînée horizontalement à l'aide d'un moteur à courant continu et d'un système à poulies. Une tige d'aluminium avec à son bout une masse (pendule) est reliée au chariot et peut pivoter dans le plan vertical (voir figure). Soit L la distance entre l'axe de rotation de la tige et le centre de gravité du pendule et m la masse du pendule, on appelle θ l'angle entre le pendule et la verticale et r la position du chariot par rapport à l'origine qui sera prise entre les deux poulies.

1. Modèle mathématique: Modèle dans l'espace d'état

Nous considérons un système de pendule inversé décrit par la dynamique suivante [19].

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} - mgL \sin \theta + mL \cos \theta \ddot{r} = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$(M + m)\ddot{r} - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta + mL\ddot{\theta} \cos \theta = u \quad (\text{III.2})$$

$$u = \ddot{r} \quad (\text{III.3})$$

$$J = \frac{1}{3} mL^2 \quad (\text{III.4})$$

$$\ddot{\Theta} = \frac{3g}{4L} \sin \Theta - \frac{3g}{4L} \cos \Theta \cdot u \quad (\text{III.5})$$

$$f = (M + m - 0.75m \cos^2 \Theta)u - mL\dot{\Theta}^2 \sin \Theta + 0.75 mg \cos \Theta \sin \Theta \quad (\text{III.6})$$

Avec

$M = 0.455 \text{ kg}$ est la masse du chariot

$m = 0.21 \text{ kg}$ est la masse de la barre

$L = 0.3048 \text{ m}$ est la longueur de la barre

$g = 9.807 \text{ m/sec}^2$ est l'accélération gravitationnelle

$J = \frac{1}{3} m L^2$ est le moment d'inertie

En définissant le vecteur d'état suivant:

$$[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [r \ \dot{r} \ \Theta \ \dot{\Theta}]^T \quad (\text{III.7})$$

Où

$x_1 = r$ est le déplacement

$x_2 = \dot{r}$ est la vitesse linéaire

$x_3 = \Theta$ est l'angle (déplacement angulaire)

$x_4 = \dot{\Theta}$ est la vitesse angulaire

La représentation d'état non linéaire du système de pendule inversé est la suivante:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\Theta} \\ \ddot{\Theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ u \\ \dot{\Theta} \\ \frac{3g}{4L} \sin \Theta - \frac{3}{4L} \cos \Theta \cdot u \end{pmatrix} \quad (\text{III.8})$$

En remplaçant les paramètres par leurs valeurs nous aboutissons à:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24.1314 x_3 - 4.0219 x_3^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 + 1.2303 x_3^2 \end{pmatrix} u \quad (\text{III.9})$$

$$y = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad (III.10)$$

Linéarisation des équations

Considérant que l'angle $\varphi(t)$ reste petit par rapport à 1 radian et que les termes non linéaires peuvent être négligé, on obtient le modèle linéaire suivant :

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{3g}{2L_b} \varphi(t) - \frac{f_b}{4J_b} \dot{\varphi}(t) + \frac{3}{2L_b} \ddot{x}(t) \quad (III.11)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{f_{cc}}{m_{cc}+m_b} \dot{x}(t) + \frac{m_b L_b / 2}{m_{cc}+m_b} \ddot{\varphi}(t) + \frac{1}{m_{cc}+m_b} F(t) \quad (III.12)$$

Paramètres	Unités	Description
L_b	m	longueur du balancier
m	kg	masse du balancier
M	kg	masse du chariot
m_{cr}	kg	masse de la courroie
m_{cc}	kg	masse du chariot et de la courroie
J	Kg. m ²	inertie du balancier par rapport à son c.d.g.
f_b	N/m (rad/sec)	frottement du balancier
f_{cc}	N (m/sec)	frottement du chariot-courroie
$\varphi(t)$	rad	position angulaire du balancier
$x(t)$	m	position longitudinale du chariot
$F(t)$	N	force appliquée au chariot

Tab 1: Variables et paramètres du pendule inversé

1.1. Équations du système d'entraînement

Le système d'entraînement comprend un moteur à courant continu, son amplificateur, deux poulies (P1, P2) formant le réducteur et deux poulies de renvoi de la courroie (P3, P4).

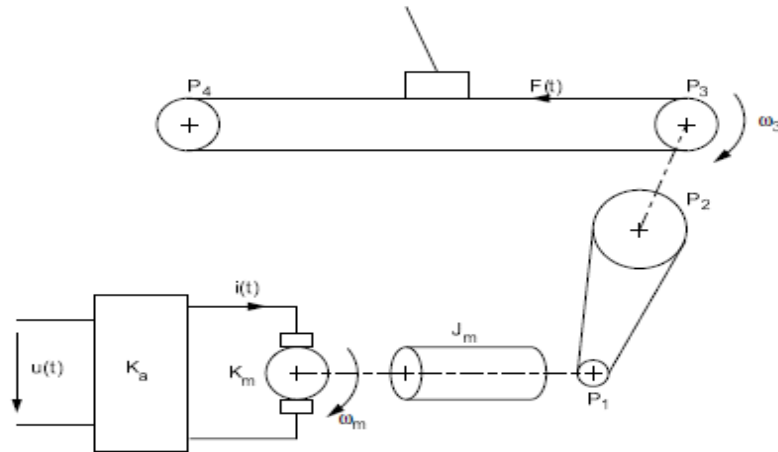


Figure 18: Système d'entraînement

Les variables et paramètres utilisés par la suite sont présentés dans le tableau 2 et illustrés par la figure 18. Une photographie du système d'entraînement est donnée à la figure 19.

L'équation du mouvement de rotation du moteur s'écrit :

$$J_0 \omega_m(t) = \sum C_k(t) = k_a k_m u(t) - \frac{r_3}{N} \dot{F}(t) \quad (\text{III.13})$$

Avec :

$$J_0 = J_m + J_1 + \frac{J_2 + J_3 + J_4}{N^2} \quad (\text{III.14})$$

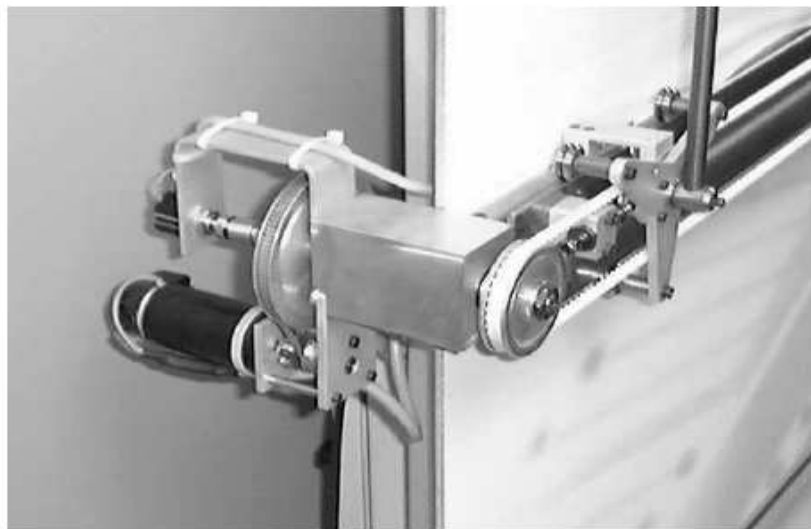


Figure 19: Vue détaillée de l'entraînement: moteur, réducteur à courroie et chariot

Paramètres	Unités	Description
ω_n	rad/sec	vitesse de rotation du moteur
ω_k	rad/sec	vitesse de rotation des poulies Pk
r_k	m	rayon des poulies Pk
K_a	A/V	gain de l'amplificateur
K_m	$N \cdot m/A$	constante de couple
N	-	rapport de réduction r_2/r_1
J_m	$kg \cdot m^2$	inertie du moteur
J_k	$kg \cdot m^2$	inertie des poulies Pk
J_0	$kg \cdot m^2$	inertie totale rapportée au moteur
$U(t)$	V	tension fournie par le régulateur

Tab 2 : Variables et paramètres de l'entraînement

Comme les accélérations longitudinale du chariot et angulaire du moteur sont reliées entre elles par l'équation suivante :

$$\dot{\omega}(t) = N \dot{\omega}_3(t) = \frac{N}{r_3} \ddot{x}(t) \quad (III.15)$$

On peut calculer la force $F(t)$ appliquée au chariot par l'intermédiaire de la tension de commande $u(t)$ tel que :

$$F(t) = -\frac{N^2 J_0}{r_3^2} \ddot{x}(t) + \frac{N K_a K_m}{r_3} u(t) \quad (III.16)$$

1.2. Équations linéaires de l'ensemble

Les équations linéaires décrivant l'ensemble du système sont réunies ci-dessous dans une écriture allégée:

$$\ddot{\varphi}(t) = +a_0 \varphi(t) - a_1 \dot{\varphi}(t) + a_2 \ddot{x}(t) \quad (III.17)$$

$$\ddot{x}(t) = -b_1 \dot{x}(t) + b_2 \ddot{\omega}(t) + b_3 F(t) \quad (III.18)$$

$$F(t) = -y_1 \ddot{x}(t) + y_2 u(t) \quad (III.19)$$

Avec :

$$a_0 = \frac{3g}{2L_b}$$

$$a_1 = \frac{f_b}{4J_b}$$

$$a_2 = \frac{3}{2L_b}$$

$$b_1 = \frac{f_{cc}}{m_{cc} + m_b}$$

$$b_2 = \frac{m_b L_b}{2(m_{cc} + m_b)}$$

$$b_3 = \frac{1}{m_{cc} + m_b}$$

$$y_1 = \frac{N^2 J_0}{r_3^2}$$

$$y_2 = \frac{N K_a K_m}{r_3}$$

La résolution de ce système différentiel permet d'écrire les accélérations $\ddot{\varphi}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ par rapport aux autres variables. On obtient ainsi la forme canonique du système différentiel :

$$\ddot{\varphi}(t) = a_{21} \varphi(t) + a_{22} \dot{\varphi}(t) + a_{24} \dot{x}(t) + b_2 u(t) \quad (\text{III. 20})$$

$$\ddot{x}(t) = a_{41} \varphi(t) + a_{42} \dot{\varphi}(t) + a_{44} \dot{x}(t) + b_4 u(t) \quad (\text{III. 21})$$

Avec :

$$a_{21} = \frac{a_0(1+b_3\gamma_1)}{1-a_2b_2+b_3\gamma_1} \quad a_{22} = \frac{-a_1(1+b_3\gamma_1)}{1-a_2b_2+b_3\gamma_1} \quad a_{24} = \frac{-a_2b_1}{1-a_2b_2+b_3\gamma_1}$$

$$a_{41} = \frac{a_0b_2}{1-a_2b_2+b_3\gamma_1} \quad a_{42} = \frac{-a_1b_2}{1-a_2b_2+b_3\gamma_1} \quad a_{44} = \frac{-b_1}{1-a_2b_2+b_3\gamma_1}$$

$$b_2 = \frac{a_2b_3\gamma_2}{1-a_2b_2+b_3\gamma_1} \quad b_4 = \frac{b_3\gamma_2}{1-a_2b_2+b_3\gamma_1}$$

2. Représentation d'état de l'ensemble

Le système considéré ici peut être décrit par quatre variables d'état qui sont les positions et vitesses du balancier et celles du chariot. Définissant le vecteur d'état et sa dérivée :

$$X(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \quad \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III. 22})$$

On obtient la description d'état suivante :

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot u(t) \quad (\text{III. 23})$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

les coefficients a_{jk} et b_j tels qu'ils ont été définis dans la section précédente.

3. Stabilisation du pendule par la commande CRONE de première génération

En utilisant le modèle d'état globale obtenu dans la section précédente [(III. 9)(III. 10)] et on utilise la méthode d'approximation d'Oustaloup de la première génération.

La première stratégie repose sur une phase constante du régulateur autour de la fréquence au gain unité en boucle ouverte ω_u . Si $C(j\omega)$ désigne la réponse en fréquences du régulateur en cascade avec le procédé, les variations de marge de phase résultent toujours des variations additives de phase du procédé et du régulateur autour de la fréquence ω_u , dans cette stratégie, le régulateur présente au moins le mérite de ne pas contribuer aux variations de marge de phase. Celles-ci se réduisent en effet aux variations de phase du procédé.

La version idéale du régulateur CRONE à phase constante est définie par une transmittance d'ordre fractionnaire de la forme:

$$C_\lambda(s) = C_0 \left(\frac{1+s/\omega_b}{1+s/\omega_h} \right)^\lambda \quad \text{avec } \omega_b \text{ et } \omega_h, \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{III.24})$$

dont le diagramme de Bode est donné par la figure (20) Sa version réelle est définie par une transmittance d'ordre entier résultant d'une distribution récursive de zéros et de pôles, soit:

$$C_\alpha(s) = \prod_{i=1}^N \frac{1+s/z_i}{1+s/p_i} \quad \text{avec } z_i, p_i \in \mathbb{R} \text{ et } N \in \mathbb{N} \quad (\text{III.25})$$

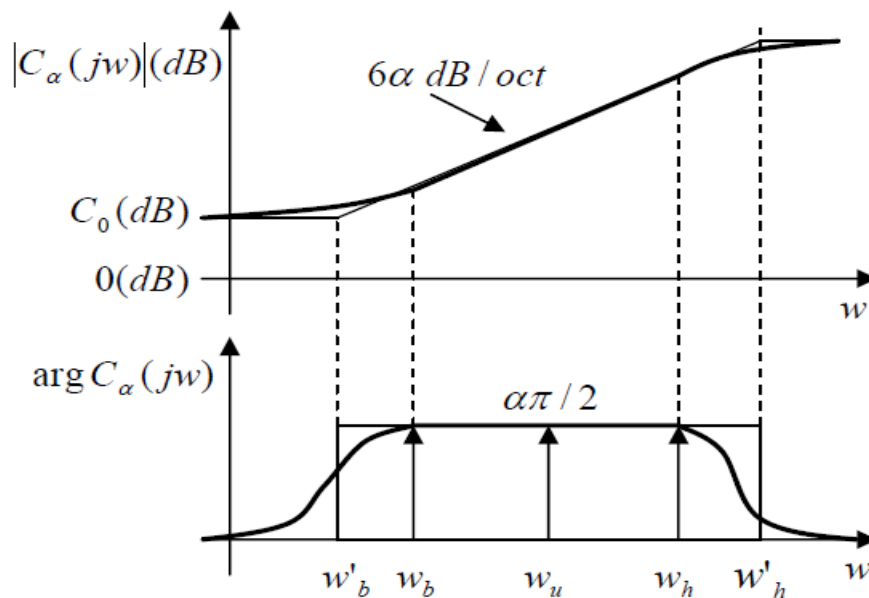


Figure 20: Diagrammes de Bode du régulateur CRONE idéal à phase constante

Où

$$\text{Si } \alpha > 0 \quad \begin{cases} z_1 = \omega_b \sqrt{b} \\ p_i = z_i \alpha & i = 1, 2 \dots \dots N \\ z_{i+1} = p_i b & i = 1, 2 \dots \dots N \\ \omega_h = P_N \sqrt{b} \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

$$\text{Si } \alpha < 0 \quad \begin{cases} p_1 = \omega_b \sqrt{b} \\ z_i = p_i \alpha & i = 1, 2 \dots \dots N \\ p_{i+1} = z_i b & i = 1, 2 \dots \dots N \\ \omega_h = z_N \sqrt{b} \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

$$\omega_h = \omega_b (ab)^N \quad \text{avec} \quad N = \text{Integer} \left(\frac{\log(\omega_h/\omega_b)}{\log(ab)} \right)$$

$$a = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{|\lambda|/N} \quad b = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{1-|\lambda|/N}$$

Afin que le régulateur CRONE ainsi défini, tant idéalement que réellement, ait une action sur la sensibilité de l'entrée ainsi que sur les erreurs de position et de traînage, il convient d'en lui intégrant en cascade une transmittance de la forme :

$$\hat{C}(s) = \left(1 + \frac{\omega_b}{s} \right)^{n_b} \frac{1}{(1+s/\omega_h)^{n_h}} \quad (\text{III.28})$$

Avec $n_b \ll \omega_b$, $n_h \gg \omega_h$ et n_b et n_h sont des nombres entiers.

la transmittance

$$C_{nh}(s) = \frac{1}{(1+s/\omega_h)^{n_h}} \quad (\text{III.29})$$

représente celle d'un filtre passe-bas d'ordre n_h tel que :

$n_h = 0$ pour que la sensibilité de l'entrée demeure constante en hautes fréquences.

$n_h = 1$ pour que la sensibilité de l'entrée diminue avec les hautes fréquences.

et la transmittance :

$$C_{nb}(s) = \left(1 + \frac{\omega_b}{s} \right)^{n_b} \quad (\text{III.30})$$

est celle d'un proportionnel-intégrateur d'ordre n_b tel que, si n_{pb} représente l'ordre du comportement asymptotique du procédé en basses fréquences :

dans le cas où $n_{pb} = 0$

- ✓ $n_b = 1$ pour annuler l'erreur de position;
- ✓ $n_b = 2$ pour annuler l'erreur de traînage ;

dans le cas où $n_{pb} = 1$:

- ✓ $n_b = 0$ pour annuler l'erreur de position;
- ✓ $n_b = 1$ pour annuler l'erreur de traînage ;

dans le cas où $n_{pb} \geq 2$

$n_b = 0$ pour annuler les erreurs de position et de traînage .

Le modèle rationnel est obtenu ensuite en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire du modèle original par son approximation rationnelle. La sortie du modèle est donc la convolution du modèle rationnel obtenu avec le signal d'entrée.

Remarque

La robustesse de la marge de phase est obtenue seulement lorsque ω_u appartient à la bande de fréquence où la phase du procédé est constante.

Dans le cas où on ne peut pas utiliser la bande de fréquence à phase constante, la deuxième génération de la commande CRONE peut être utilisée.

3.1. Résultats de Simulation

Les essais effectués ont conduit aux résultats présentés dans les figures (21-22-23-24).

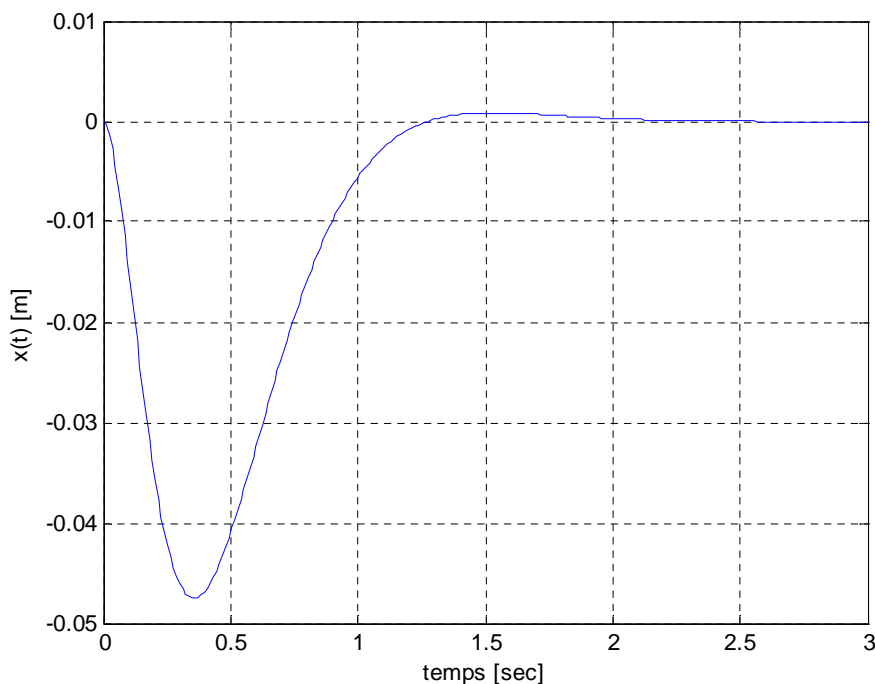


Figure 21 : Position du chariot (CRONE)

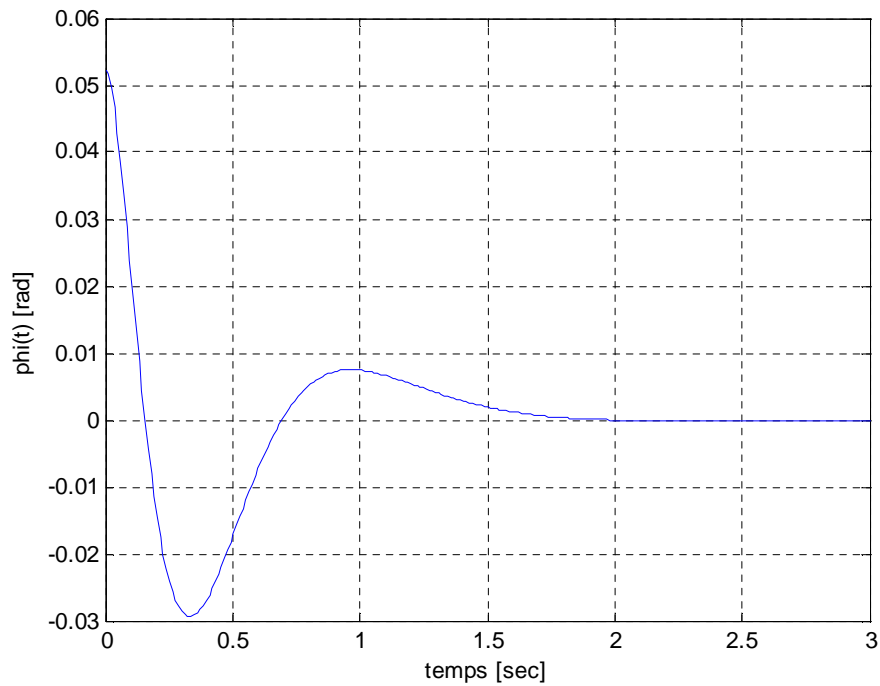


Figure 22 : l'angle du pendule (CRONE)

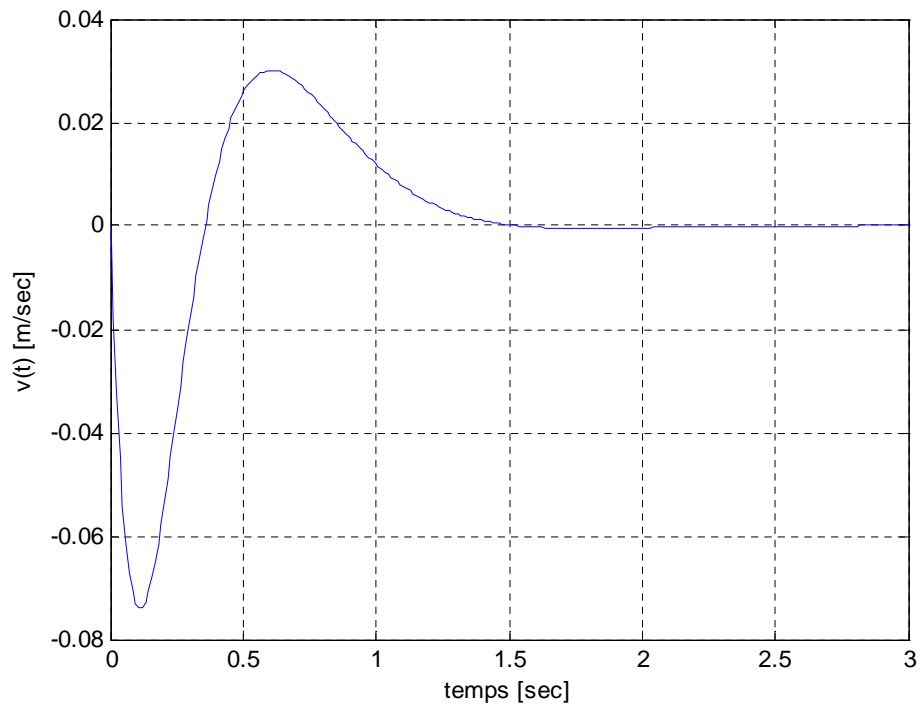


Figure 23 : Vitesse du chariot (CRONE)

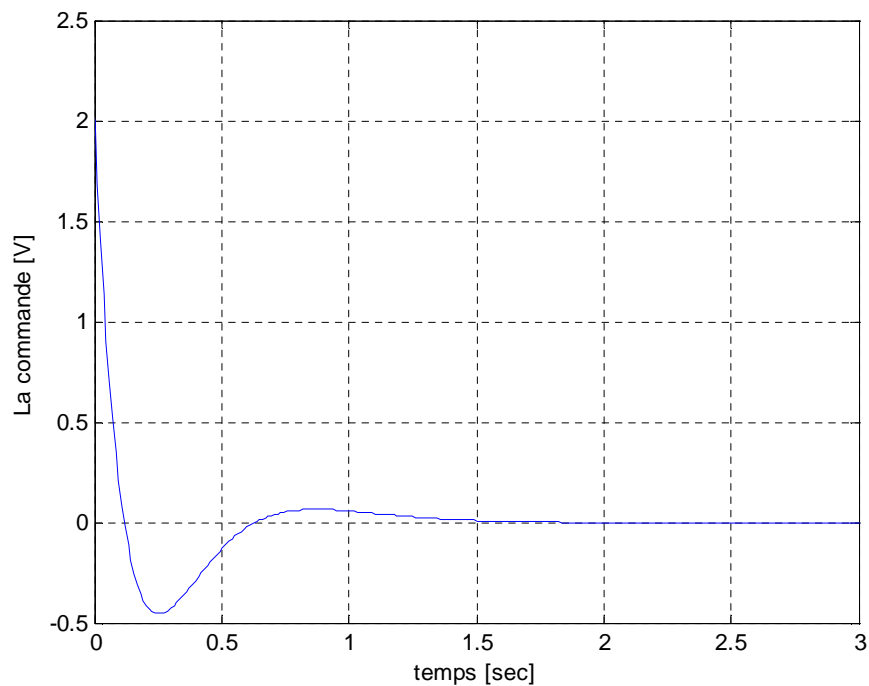


Figure 24 : Diagramme de la commande (CRONE)

3.2. Interprétation des résultats

Les figures (21-22-23-24) montre que le système pendule inversé se stabilise au bout de 2 secondes tout en respectant les contraintes imposées. En effet on constate que le déplacement de chariot ne dépasse pas $-0,05\text{m}$, l'angle est de $-0,03\text{ rad}$ et la vitesse est de $0,03\text{m/s}$.

Nous constatons aussi que la commande arrive à stabiliser le pendule inversé, en effet elle a pu le ramener à sa position d'équilibre au bout d'un temps égale à 2 secondes et l'y maintenir.

Pour mieux voir la robustesse de la commande CRONE, on applique au pendule inversé, la commande robuste LQR. Et une étude comparative des résultats de simulation des deux commandes sera faite.

4. Application de la commande LQR sur le pendule inversé

4.1. Calcul de la commande

Le régulateur d'état est un régulateur linéaire fournissant un signal de commande $u(t)$ proportionnel à chacune des 4 variables d'état décrivant le système :

$$U(t) = -K \cdot X = - \begin{pmatrix} K_\varphi & K_{\dot{\varphi}} & K_x & K_{\dot{x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III. 31})$$

Le vecteur-ligne K contient les gains associés à chaque variable d'état. D'un point de vue classique, on constate que ce régulateur d'état est en fait un double régulateur proportionnel-dérivé utilisé pour régler l'inclinaison du pendule avec $\varphi(t)$ et $\dot{\varphi}(t)$ et régler la position du chariot à l'aide de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$.

4.1.1. Critères d'optimisation pour le régulateur

La synthèse du régulateur se fait en minimisant les écarts quadratiques de l'angle et de la position longitudinale ainsi que l'énergie mise en jeu pour déplacer l'ensemble chariot balancier.

Ceci nous conduit à définir des coefficients de pondération pour chacune des positions et vitesses et pour le signal de commande.

La fonction à minimiser est alors la suivante :

$$J(Q, R) = \int_0^{+\infty} (X^t(t) Q X(t) + R \cdot u^2(t)) dt \quad (\text{III. 32})$$

Avec :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{\dot{\varphi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{\dot{x}} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 33})$$

Pour fixer les coefficients de pondération, on a adopté les critères suivants:

- ✓ l'amplitude du débattement angulaire n'est pas très importante.
- ✓ le déplacement du chariot sur le rail doit être limité.

- ✓ on ne se préoccupe pas de limiter les vitesses atteintes.
- ✓ le signal de commande $u(t)$ ne doit pas être trop grand.

Fort de ces considérations, on a choisi les pondérations suivantes :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad (\text{III. 34})$$

4.1.2. Gains du régulateur

L'utilisation de l'algorithme *LQR* (Linear-Quadratic-Regulator) pour la recherche des gains optimums est d'une grande efficacité. Une fois les coefficients de pondération Q et R fixés, on obtient les gains du régulateur d'état :

$$K_{\varphi} = -4.98 \text{ [V/rad]}$$

$$K_{\dot{\varphi}} = -0.78 \text{ [V/(rad/sec)]}$$

$$K_x = +2.24 \text{ [V/m]}$$

$$K_{\dot{x}} = +1.41 \text{ [V/(m/sec)]}$$

On remarque immédiatement les signes différents appliqués aux variables angulaires et longitudinales. On voit ainsi que le régulateur d'état obtenu introduit une réaction négative sur $\varphi(t)$ et $\dot{\varphi}(t)$ et une réaction positive sur $x(t)$ et $\dot{x}(t)$.

Il est intéressant de relever que c'est la boucle d'asservissement angulaire qui stabilise le système alors que la boucle d'asservissement du chariot seul est instable.

4.2. Résultats de simulation

Les essais effectués ont conduit aux résultats présentés dans les figures (25-26-27-28).

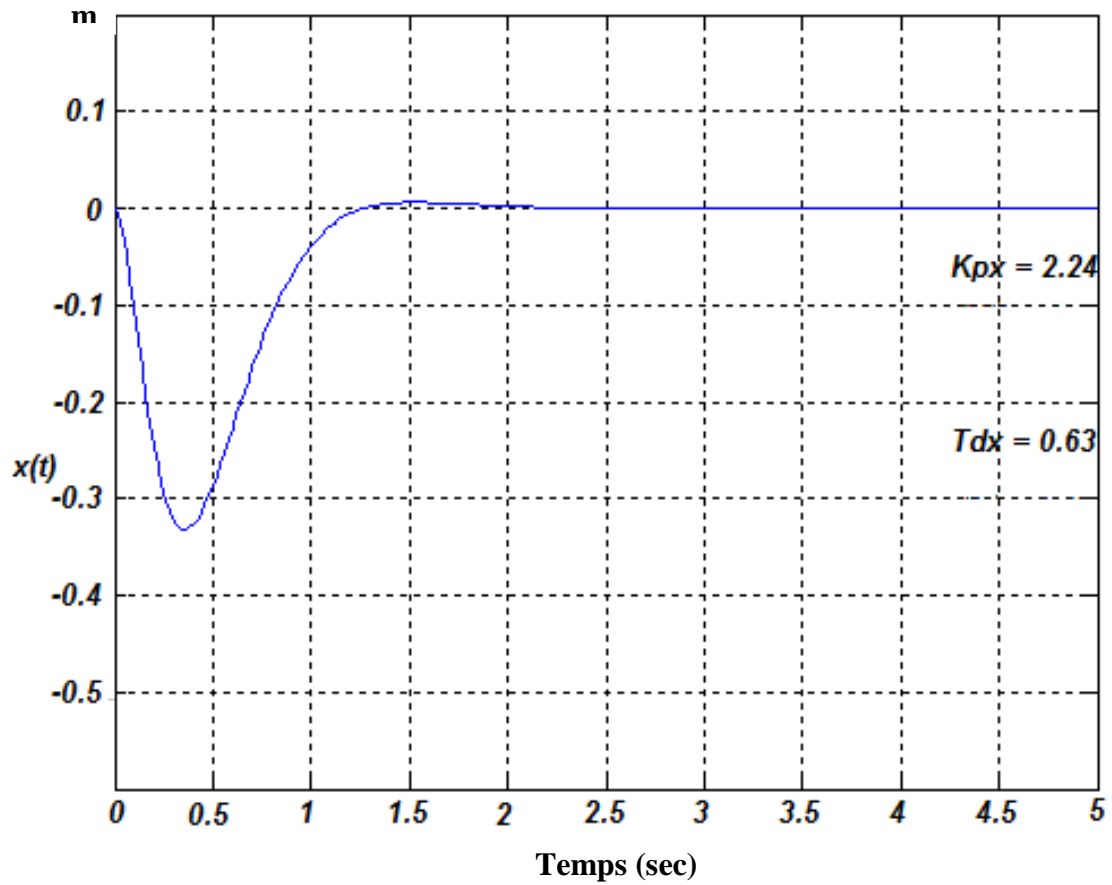


Figure 25 : Position du chariot

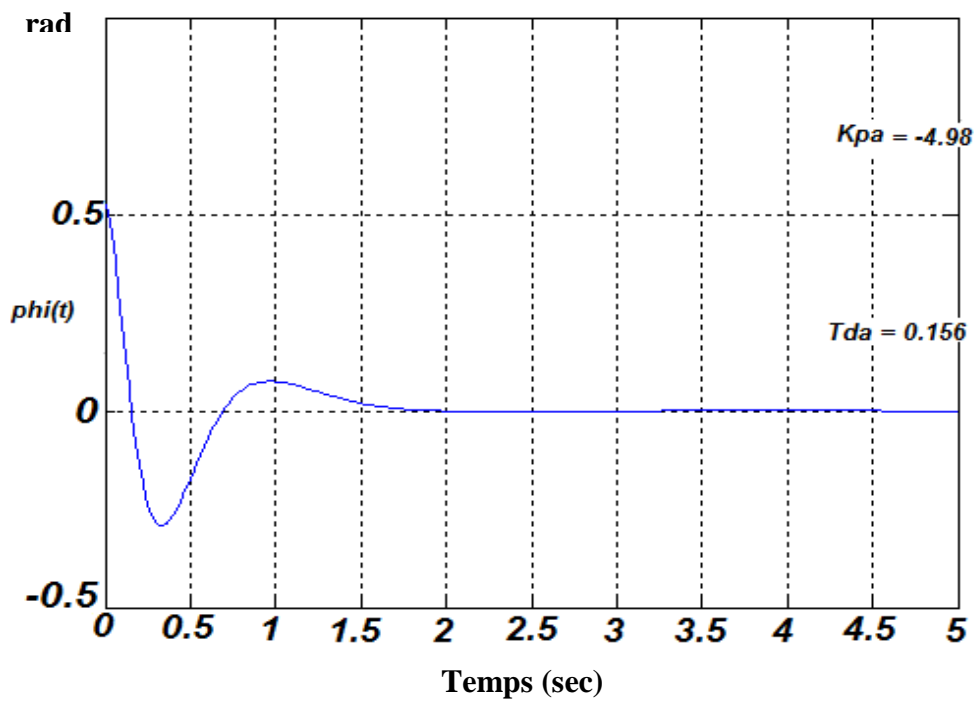


Figure 26 : l'angle du pendule

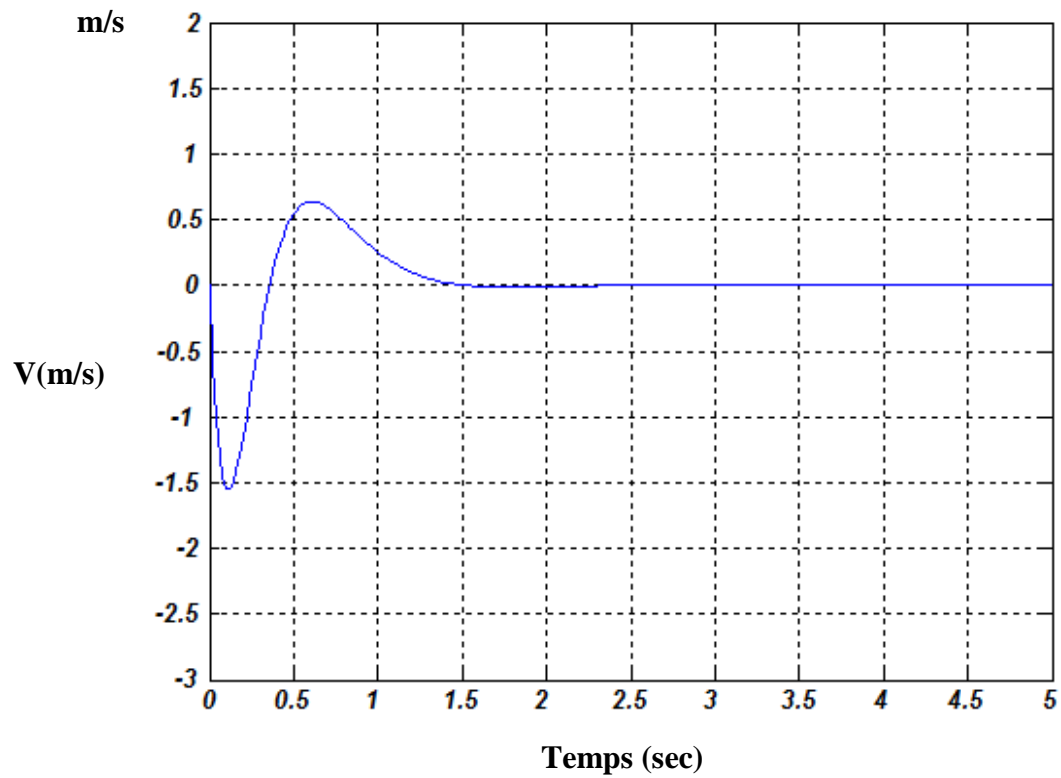


Figure 27 : la vitesse du chariot

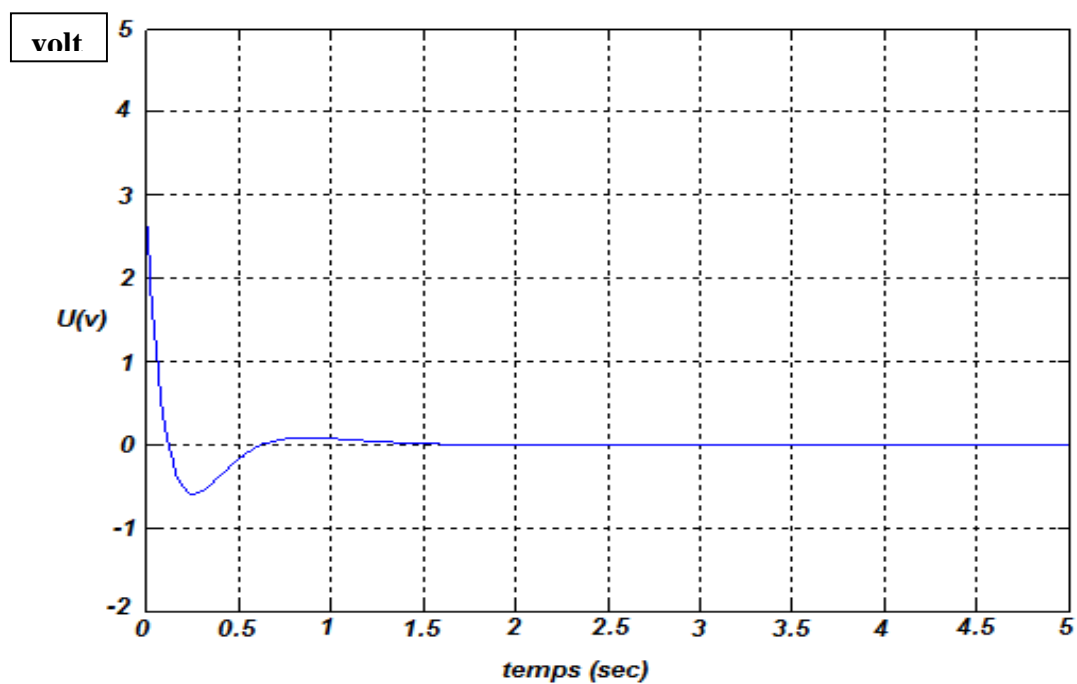


Figure 28 : Diagramme de la commande

4.3. Comparaison des deux méthodes

D'après les résultats de simulation, on remarque que les deux commandes CRONE et LQR sont bel et bien robustes, sauf que la commande CRONE aboutie à de meilleurs résultats, effectivement, la valeur maximale de la position est de -0.34 m pour la commande LQR alors qu'elle est de -0.048 m pour la commande CRONE et la vitesse maximale est de 0.03 m/s pour la commande CRONE alors qu'elle est de 0.56 m/s.

On remarque aussi que tous les états du système se stabilisent au moins de 2 secondes dans la commande CRONE alors qu'ils prennent un peu plus de temps dans la commande LQR..

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques notions de base à propos du pendule inversé, ensuite nous avons appliqué la commande CRONE (Approximation d'Oustaloup) en utilisant les propriétés de la commande CRONE de la première génération et une étude comparative des deux commandes CRONE et LQR est faite.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Notre travail porte essentiellement sur la commande CRONE d'un le pendule inversé.

Dans le premier chapitre nous avons présenté une étude bibliographique du calcul fractionnaire, nous avons donné les définitions de base de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire, quelques propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire, les différentes représentations des systèmes fractionnaires et enfin les conditions de Commandabilité, d'observabilité et de stabilité de ce système.

le deuxième chapitre sera consacré à l'étude de la Commande robuste d'Ordre non Entier (CRONE) des systèmes linéaire mono-variables et multi-variables,tout en exposant le principe de la robustesse.

Dans le troisième chapitre nous avons donné les notions de base du pendule inversé, Ensuite nous avons étudié la stabilisation du pendule inversé on se basant sur la commande CRONE de première génération (Approximation d'Oustaloup) et nous avons effectué une étude comparative des deux commandes CRONE et la méthode Linéaire Quadratique (LQR) .

Les résultats de simulation effectués sur le pendule inversé ont montré une réponse dynamique rapide et une précision élevée, et ça pour les deux commandes LQR et CRONE mais la commande CRONE à nettement de meilleur résultats.

Comme perspectives,ça serai intéressant de faire l'implémentation de cette commande sur un vrai pendule inversé .

Liste de tableaux

Tab 1: Variables et paramètres du pendule inversé

Tab2 : Variables et paramètres de l'entraînement

Liste des figures

Figure 1 : domaine de stabilité des systèmes fractionnaires.

Figure 2 : Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaires avec $0 < a < 1$.

Figure 3 : Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaires avec $1 < a < 2$.

Figure 4 : Modélisation d'un système réel

Figure 5 : Schéma bloc d'un problème de commande robuste

Figure 6 : Système nominal et système réel

Figure 7 : Schéma bloc d'un asservissement réel

Figure 8 : Diagramme de commande à retour unitaire.

Figure 9 : un segment de droite verticale définit le gabarit dans le plan de Black.

Figure 10 : la forme et le glissement vertical de gabarit AB assurent à la fois la robustesse de la marge de phase φ_m , du premier dépassement réduit D_1' et du facteur d'amortissement ξ .

Figure 11 : Représentation du gabarit généralisé dans le plan de Black.

Figure 12 : le même degré de stabilité de la commande peut être assuré par une infinité de gabarits généralisés tangentant un même contour de performance en l'occurrence (a) un contour d'amplitude de Black de graduation $Q_a = 2,3$ db et (b) un contour d'iso amortissement de graduation $\xi = 0.707$

Figure 13 : Gabarit généralisé (a), ensemble de gabarits généralisés (b) et gabarit curviligne (c).

Figure 14 : Schéma d'une commande centralisé d'un procédé MIMO 2x2.

Figure 15 : Schéma d'une suspension (masse non suspendue négligée).

Figure 16 : Schéma fonctionnel d'une suspension en régime linéaire.

Figure 17 : Schéma général d'un Pendule inversé

Figure 18 : Système d'entraînement.

Figure 19 : Vue détaillée de l'entraînement : moteur, réducteur a courroie et chariot.

Figure 20 : Diagrammes de Bode du régulateur CRONE idéal à phase constante

Figure 21 : Position du chariot (CRONE)

Figure 22 : l'angle du pendule (CRONE)

Figure 23 : Vitesse du chariot (CRONE)

Figure 24 : Diagramme de la commande (CRONE)

Figure 25 : Position du chariot

Figure 26 : l'angle du pendule

Figure 27 : la vitesse du chariot

Figure 28 : Diagramme de la commande

Références bibliographiques

- [1] **K.S. Miller, B. Ross**, “An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations,” Wiley, New York, USA, 1993
- [2] Oldham et Spanier, 1974
- [3] **Farid Merrahi**, « alimentation et commande d’une machine asynchrone à double alimentation (application à l’énergie éolienne) » mémoire de magister, école nationale polytechnique, 2007
- [4] **D. Matignon**, « *satability results in fractional equation with applications to contrôle processing* ».In Proc.IEEE-IMACS system. Man cyber. Conférence .Lille France, 1996-b
- [5] Matignon, 1996-*b* ; Matignon, 1996-*a*
- [6] Matignon, 1996-*b*, Matignon, 1996-*a*
- [7] Matignon, 1996-*b* , Sabatier et *a l*, 2008
- [8] Matignon, 1996-*b* , Matignon et Andréa-Novel, 1996, Matignon, et Andréa- Novel, 1997 Vinagre et *al*, 2002
- [9] Matignon, 1996-*b*, Matignon et Andréa-Novel, 1996, Matignon et Andréa-Novel, 1997 Vinagre, et *al*, 2002
- [10] [**Ous91a**] **Oustaloup A**- la commande CRONE, édition hermès, paris, 1991
- [11] [**Oust 91b**] **Oustaloup A**-la commande CRONE, édition hermès, Paris, 1991
- [12] [**Oust 94a**] **Oustaloup A** la robustesse (chapitre 1 : approche fréquentielle et non entière de la robustesse, la commande CRONE), édition hermès, Paris, 1994
- [13] [**Oust 95b**] **Oustaloup A, Mathieu B et Lanusse P**, RAIRO-APII, vol 29 n 2,1995.
- [14] [**LAN93**] **Landau I.D** identification et commande des systèmes, 2eme édition, éditions hermès, Paris, 1993
- [15] [**Ous 95 c**] **Oustaloup A, MATHIEU B et Lanusse P** développement et application de la robustesse, coordonnateur : Bernusso J, édition hermès, 1995
- [16] [**Oust**] la commande CRONE ,2^{eme} édition revue et augmentée
- [17] Nelson –Gruel-Dominique 2009
- [18] Landau, 1995, Oustaloup, 1995