REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTE DE SCIENCES - DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Option: Processus Aléatoires et Statistique de la Décision

Equation de Langevin et Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

sous la Direction de

Mr BOUDIBA MOHAND AREZKI

présenté le 10/10/2016 par:

AZOUZ Mohamed

devant le Jury:

Mme ZIDI YAMINA,MC, UMMTO, Présidente
Mr BOUDIBA MOHAND AREZKI, MC, UMMTO, Rapporteur
Mr YOUSFI SMAIL, MC, UMMTO, Examinateur
Mme LADJIMI FETIMA, MAA, UMMTO, Examinatrice

Remérciements

Je remércie Mme ZIDI Yamina pour avoir accepter de faire partie et de présider ce Jury. De même je remércie Mme LADJIMI Fetima et Mr YOUSFI Smail pour avoir accepter de faire partie de ce Jury. Je remércie enfin mon encadreur Mr BOUDIBA Mohand Arezki pour avoir accepter de diriger ce mémoire et aussi pour ses conseils et ses critiques.

Je remercie mon père-enseignant qui m'a initié et montré l'intêret des mathématiques dès l'âge précoce.Aussi je remércie tous les enseigants qui travaillent dans ce sens. Enfin, j'adresse mes remerciements à tout mes ami(e)s avec lesquels j'ai partagé des moments inoubliables.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à toute ma famille.

Contents

Introduction **7**

1 Mouvement Brownien, Processus de Wiener: Propriétés générales **9**
1.1 Mouvement Brownien comme limite d'une marche aléatoire . . 10
1.2 Simulation des trajectoires 13
1.3 Processus de Wiener comme martingale 14
1.4 Quelques propriétés des processus de Wiener 17
1.5 La non-différentiabilité du processus de Wiener 19
1.6 Variation des trajectoires 21
1.7 Loi du logarithme itéré 25

2 Intégrale d'Itô **29**
2.1 Intégrale d'Itô d'un processus étagé 29
2.2 L'espace M^2 33
2.3 Propriétés de l'intégrale d'Itô 39
2.4 Formule d'Itô pour un processus de Wiener 41

3 Applications: quelques calculs classiques **47**

Conclusion **59**

Bibliographie **61**

Introduction

Le mouvement Brownien est un modèle mathématique pour décrire les positions X_t, d'une particule à l'instant t, dans un liquide. Ce modèle est à la base d'une théorie mathématique avec de nombreuses applications. Cependant, du point de vue des trajectoires, il ne tient pas compte des variations du moment cinétique au cours du temps. Le modèle attaché à l'équation de Langevin corrige ce manque. Elle décrit le mouvement d'une particule de masse m dans un liquide, en tenant compte des variations du moment cinétique. Si V_t est la vitesse de la particule à l'instant t, elle s'exprime sous la forme

$$m\frac{dV_t}{dt} = -\beta V_t + \sigma\frac{dX_t}{dt}$$

où β et σ sont des coéffiscients positifs caractérisant le milieu et $(X_t)_t$ est le mouvement brownien standard (Cf. [3]). La solution est de la forme

$$V_t = \gamma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dX_s$$

Ce type de processus sont des processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Notre but est de rassembler les éléments de base pour comprendre surtout les mèthodes de résolution et eventuellement les solutions de ce type d'equation. Plus précisément, à partir de la litterature (Cf. [3], [4], [5]...) notre but est de réaliser une synthèse des éléments de base sur les processus de Wienner et l'intégrale d'Itô comme outils fondamentaux pour cela.

Dans le chapitre I, nous faisons la construction du mouvement Brownien et donnons la démonstration de quelques propriétés de base.

Dans le chapitre II, nous faisons la construction de l'intégrale 'Itô d'abord pour des processus étagés et ensuite pour des processus plus généraux. Nous montrons les principales propriétés de cette intégrale et términons par la for-

mule d'Itô .

Dans le chapitre III, nous faisons quelques calculs d'intégrales 'Itô. Nous presentons aussi l'equation de Langevin et une introduction aux processus d'Orstein-Uhlenbeck.

Enfin, nous présentons une conclusion sur les perspectives de ce travail.

Chapter 1

Mouvement Brownien, Processus de Wiener: Propriétés générales

Aperçue historique du mouvement Brownien Le mouvement Brownien est associé à l'analyse de mouvements qui évoluent au cours du temps de manière désordonée et dont l' évolution semble difficile à prévoir même dans un intervalle de temps très court. C'est le botaniste Robert Brown qui décrit en 1827 le mouvement erratique de fines particules de pollen en suspension dans un liquide.

En 1900, Louis Bachelier introduit le mouvement Brownien pour modéliser la dynamique des prix des actions à la bourse .

En 1905, Albert Einstein donne les justifications physiques qui permettent de décrire le mouvement d'une particule qui diffuse dans un fluide.

En 1923, Norbert Wiener réalise la première étude mathématique, construit rigoureusement le mouvement Brownien et donnes la démonstration de son éxistance, comme processus aléatoire.

De nombreux travaux ont été réalisés depuis et il existe à présent une littérature trés riche sur le sujet.

1.1 Mouvement Brownien comme limite d'une marche aléatoire

Considérons une particule qui se déplace sur l'axe des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. A chaque unité de temps, elle se déplace à gauche ou à droite au hasard.
On s'interesse à la position de la particule à un instant quelconque n. Le modèle mathématique correspondant est:
On suppose que les déplacements à chaque instant sont des variables alétoires réelles $X_n, n \in \mathbb{Z}$. Les déplacements étant indépendants, on suppose que les $X_n, n \in \mathbb{Z}$ sont indépendantes. On suppose de plus que ces déplacements obèissent à la même loi de probabilité $P[X_n = +1] = P[X_n = -1] = \frac{1}{2}$ pour tout entiers relatif n.
Soit alors S_n la variable aléatoire définie par $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$:
$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$
S_n représente la position de la particule à l'instant n, partant de 0 à l'instant 0.

On se place à présent sur la droite réelle $\mathbb{R}$ et nous supposons que la particule fait des sauts à droite $+\triangle x$ où à gauche $-\triangle x$ durant chaque intervalle de temps $\triangle t$. Soit S_t la position de la particule à l'instant $t \geq 0$ et $n = [\frac{t}{\triangle t}]$ et introduisons les variables alétoires X_n tel que $X_n = \pm\triangle x$.
Nous pouvons alors approcher S_t par les var $S_n(t)$ définies par

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \triangle x(X_1 + X_2 + ... + X_{[\frac{t}{\triangle t}]}) \\ &= \triangle x(X_1 + X_2 + ... + X_n) \end{aligned}$$

On pose $S_0 = 0$. Nous faisons l'hypothèse que les variables X_n sont i.i.d et de loi tel que

$$P[X_n = \triangle x] = P[X_n = -\triangle x] = \frac{1}{2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n(t)] &= \triangle x.(\mathbb{E}[X_1 + ... + X_{[\frac{t}{\triangle t}]}]) \\ &= \triangle x(\mathbb{E}[X_1] + ... + \mathbb{E}[X_{[\frac{t}{\triangle t}]}]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} Var[S_n(t)] &= \mathbb{E}[(S_n(t) - \mathbb{E}[S_n(t)])^2] \\ &= \mathbb{E}[(S_n(t))^2] \\ &= (\triangle x)^2.Var[X_1 + X_2 + ... + X_{[\frac{t}{\triangle t}]}] \\ &= (\triangle x)^2.[\frac{t}{\triangle t}] \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de passer à la limite, en faisant tendre $\triangle x$ et $\triangle t \longrightarrow 0$ de sorte que le processus limite ne soit pas trivial.

Si, par exemple, on prend $\triangle x = \triangle t \longrightarrow 0$, on obtient $\mathbb{E}[S_n(t)] = 0$ et $Var[S_n(t)] \longrightarrow 0$. i.e le processus $(S_t; t > 0)$ serait alors presque sûrement nul.
En effet: Si X une v.a tq $Var[X] = 0$ alors $X = 0$ p.s car
$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] = 0 \Rightarrow X = 0$ p.s car $X^2 \geq 0$. Et donc $S_t \longrightarrow 0$ p.s.

Posons maintenant $\triangle x = \sigma\sqrt{\triangle t}$ avec $\sigma > 0$ une constante réelle et faisons $\triangle t \longrightarrow 0$.
On aura:

$$\mathbb{E}[S_n(t)] = 0$$

et

$$Var[S_n(t)] = (\triangle x)^2.[\frac{t}{\triangle t}] = \sigma^2(\triangle t)[\frac{t}{\triangle t}] \longrightarrow \sigma^2.t$$

On applique le théorème central limite (T.C.L) et on aura:

$$\frac{S_n(t) - \mathbb{E}[S_n(t)]}{\sqrt{Var[S_n(t)]}} = \frac{S_n(t)}{\sigma\sqrt{t}} \longrightarrow N(0;1) \text{ en loi lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

D'où

$$S_t \in N(0, \sigma^2 t).$$

Conclusion Le processus limite $(S_t)_t$ représentant les positions instantanées de la particule sur $\mathbb{R}$ est un processus tel que :
(1) $\mathbb{E}[S_t] = 0$ et $Var[S_t] = \sigma^2.t.$ avec $t \geq 0$ et σ une constante strictement positive et de plus : $\forall \sigma > 0 : S_t \in N(0; \sigma^2 t)$ avec $S_0 = 0$.

(2) $(S_t; t \geq 0)$ est à acroissement indépendant:celà est dû au fait que $(X_n)_n$ indépendante. en effet,le changement de position durant$[t; t + \triangle t]$ est indépendant de ce qui arrive au temps t i.e $S(t + \triangle t) - S(t)$ est indépendant de $(S(\varrho); \varrho \leq t)$

(3) $(S_t; t \geq 0)$à acroissement stationnaire : du fait que le changement de positions dans une unité de temps dépend seulement de la longueur de l'intervalle des sauts mais pas de la position de l'origine du temps (homogènité en temps) i.e $S(t + \triangle t) - S(t)$ ne dépend pas de t.

(4?) Il reste à vérifier la continuité de $(S_t; t \geq 0)$:
Montrons que $(S(t); t \geq 0)$ est continue i.e montrons que:
$\lim\limits_{\triangle t \longrightarrow 0} \dfrac{P[\mid S(t + \triangle t) - S(t) \mid \geq \gamma]}{\triangle t} = 0 \ \forall \gamma > 0.$

En effet:
Subdivisons l'intervalle $[0; 1]$ en n parties, $\triangle t = \frac{1}{n}$.
Si le mouvement est continue alors on aura:

$$h.(\triangle t) = \sup_{k \in [1;n]} |S(k.(\triangle t) - S((k-1).\triangle t)| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \triangle t \to 0$$

C'est à dire :

$$\lim_{\triangle t \to 0} P[h(\triangle t) \geq \gamma] = 0; \forall \gamma > 0.$$

; Par la propriété (3) (processus à acroissement indépendant) on a :
Les $Y_k = |S(k.\triangle t) - S((k-1).\triangle t)|$ sont indépendants.
Par la stationnarité du processus (4) on aura les Y_k ont la même distribution.
Ce qui implique:

$$\begin{aligned} P[h(\triangle t) \geq \gamma] &= 1 - P[\sup Y_k < \gamma] \\ &= 1 - (P[Y_1 < \gamma])^n \\ &= 1 - (1 - P[Y_1 \geq \gamma])^n \\ &\simeq 1 - \exp(-nP[Y_1 \geq \gamma]) \end{aligned}$$

Car:

$$P[\{\sup(X,Y) < c\}] = P[\{X < c; Y < c\}] \Rightarrow P[\{\sup_{1\leq k\leq n} Y_k < \gamma\}] = P[\bigcap_{1\leq k\leq n} \{Y_k < \gamma\}]$$

et par l'indépendance des événements Y_k on aura:

$$P[\sup_{1\leq k\leq n} Y_k < \gamma] = \prod_{1\leq k\leq n} P[Y_k < \gamma]$$

Et comme les événement suivent la même loi ,on aura:

$$P[\{\sup_{1\leq k\leq n} Y_k < \gamma\}] = (P[Y_1 < \gamma])^n$$

Faisant maintenant tendre $n \longrightarrow \infty$ i.e $\triangle t \longrightarrow 0$ on aura :

$$P[h(\triangle t) \geq \gamma] \longrightarrow 0 \Leftrightarrow nP[Y_1 \geq \gamma] \longrightarrow 0$$

Ce qui veut dire :

$$P[|S(t+\triangle t) - S(t)| \geq \gamma] \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty \text{ i.e lorsque } \triangle t \longrightarrow 0$$

D'où la continuité des trajectoires de $(S_t; t \geq 0)$.

Le processus limite ainsi obtenu est un Mouvement Brownien Standard (M.B.S).

Définition. 1. *Un processus aléatoire à valeurs réels $(X_t; t \in \mathbb{R}^+)$ est un processus de Wiener (mouvement Brownien standard) s'il satisfait les conditions suivantes:*
(1) $X_0(\omega) = 0$ $\forall\omega$.
(2) L'application $t \longmapsto X_t(\omega)$ est continue en $t \in \mathbb{R}^+$. $\forall\omega$.
(3) $\forall t, h \geq 0 : X_{t+h} - X_t$ est indépendant de la tribu engendrée par les var $X_\upsilon; \forall\upsilon \leq t$ c'est à dire $\sigma(X_\upsilon; \upsilon \leq t)$.
(4) L'accroissement $X_{t+h} - X_t$ est stationnaire $\forall t, h \geq 0$.
i.e. la loi de $(X_{t+h} - X_t) \in N(0; h)$, $\forall t \geq 0$ ne depend que de h.

1.2 Simulation des trajectoires

Par construction , les processus de Wiener sont les processus limites de marches aléatoires symétriques $S_n(t)$. Nous pouvons donc considérer les $S_n(t)$ de la section 1 comme une approximation du processus de Wiener $(X(t))_{t\geq 0}$. Cela nous donne un moyen de simulation des trajectoires.

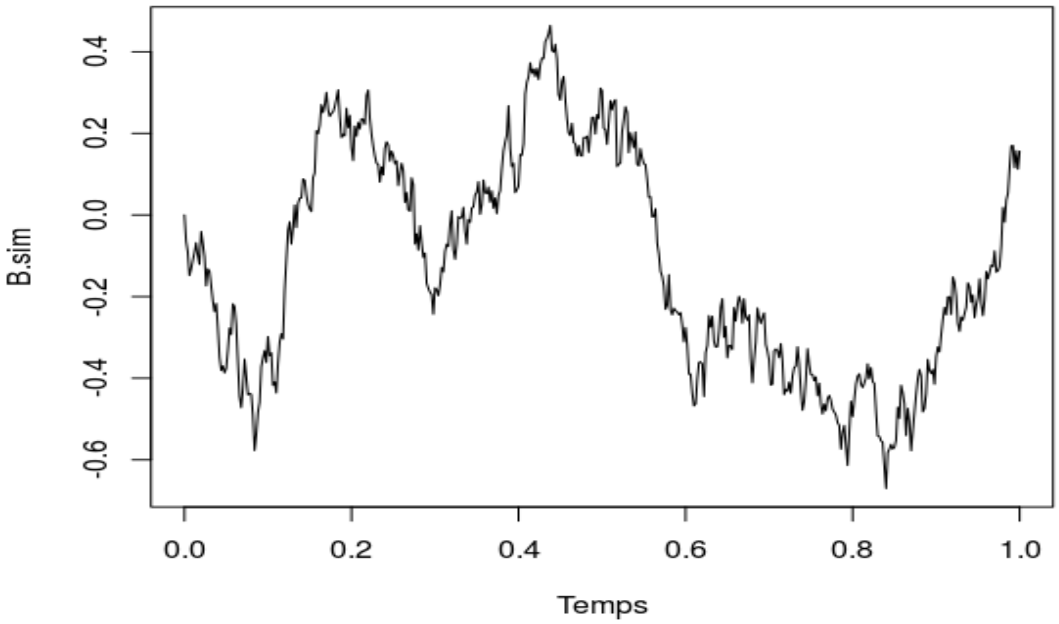

Figure 1.1: Exemple de trajectoire du processus de Wiener

1.3 Processus de Wiener comme martingale

Proposition. 1. *Si* $(X(t); t \geq 0)$ *un processus de Wiener par rapport à la filtration croissante* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *alors:*
(1) $(X(t); t \geq 0)$ *est une Martingale par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
(2) $(X^2(t) - t; t \geq 0)$ *est une Martingale par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
(3) $\forall \upsilon$, $\exp\{\upsilon.X(t) - \frac{\upsilon^2}{2}t\}$ *est une Martingale par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Démonstration. (1) Par définition, $(X(t))_t$ est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
$X(t) \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$; car par définition on a: $X(t) \in N(0; t)$,ce qui implique:

$$\mathbb{E}[X(t)] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[|X(t)|] = 0 < \infty;$$

en général , pour une v.a X telle que : $\mathbb{E}[X] = 0$ et $X \geq 0 \Rightarrow X = 0$ p.s .

Et : $\forall s < t$;

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X(t) - X(s) + X(s))|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[X(t) - X(s)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X(s)|\mathcal{F}_s] \text{ (par linéarité de l'espérence)} \\
&= X(s) + \mathbb{E}[X(t) - X(s)] \text{ car } X(t) - X(s) \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_s \\
&= X(s).
\end{aligned}$$

D'où $X(t)$ est une Mgle.
(2) D'après la définition on a $X(t) \in \mathcal{F}_t \Rightarrow X^2(t) \in \mathcal{F}_t$ donc ;

$$\mathbb{E}[X^2(t) - t|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X^2(t)|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[t|\mathcal{F}_t] = X^2(t) - t;$$

D'où le processus $(X^2(t) - t)_t$ est adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$.

$(X^2(t) - t)_t \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ car :
On a : $Var[X(t)] = \mathbb{E}[X^2(t)] - (\mathbb{E}[X(t)])^2$, et comme $X(t) \in N(0, t)$ on aura:

$$\mathbb{E}[|X^2(t)| - t] = Var[X(t)] - t = t - t = 0 < \infty;$$

d'où le résultat.
Et on a ; D'une part:
$\mathbb{E}[X(s)X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s]$ (car $X(s)$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable).
Comme $X(t) - X(s)$ est indpendante de $\mathcal{F}_s$ et $X(t) - X(s) \in N(0, t - s)$ on aura :

$$\mathbb{E}[(X(t) - X(s))^2 - (t-s)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(X(t) - X(s))^2|\mathcal{F}_s] - (t-s) \text{ (linéarité de l'espérence);}$$

et donc d'après les propriétés du processus de Wiener on aura:

$$\mathbb{E}[(X(t) - X(s))^2 - (t - s)|\mathcal{F}_s] = (t - s) - (t - s) = 0.$$

D'autre part on a : $\forall s < t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[((X(t) - X(s))^2 - (t - s)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X^2(t) - t|\mathcal{F}_s] - 2\mathbb{E}[X(s)X(t)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X^2(s) + s|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[X^2(t) - t|\mathcal{F}_s] - 2X^2(s) + X^2(s) + s \\
&= \mathbb{E}[X^2(t) - t|\mathcal{F}_s] - (X^2(s) - s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc : $\mathbb{E}[X^2(t) - t|\mathcal{F}_s] = X^2(s) - s$ d'où :

$$(X^2(t) - t; t \geq 0) \text{ est une Mgle.}$$

(3). La fonction génératrice des moments de $X(t) \in N(0;t)$ est:

$$\mathbb{E}[e^{\upsilon X(t)}] = e^{t\frac{\upsilon^2}{2}} < \infty$$

En effet:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{i\lambda X(t)}] &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x}(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}})dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2t}}dx \\
&= e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}};
\end{aligned}$$

si on pose $i\lambda = \upsilon$ on aura: $\mathbb{E}[e^{\upsilon X(t)}] = e^{t\frac{\upsilon^2}{2}} < \infty$.

Ce qui justifie l'intégrabilité de $e^{\upsilon X(t)-t\frac{\upsilon^2}{2}}$ avec :

$$\mathbb{E}[e^{\upsilon X(t)-t\frac{\upsilon^2}{2}}] = 1$$

Et pour $s < t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{\upsilon X(t)}|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[e^{\upsilon X(s)}e^{\upsilon(X(t)-X(s))}|\mathcal{F}_s] \\
&= e^{\upsilon X(s)}\mathbb{E}[e^{\upsilon X(t)-X(s)}|\mathcal{F}_s] \\
&= e^{\upsilon X(s)}\mathbb{E}[e^{\upsilon(X(t)-X(s))}] \\
&= e^{\upsilon X(s)}e^{(t-s)\frac{\upsilon^2}{2}}.
\end{aligned}$$

On conclut que : $\mathbb{E}[e^{\upsilon X(t)-t\frac{\upsilon^2}{2}}|\mathcal{F}_s] = e^{\upsilon X(s)-s\frac{\upsilon^2}{2}}$.

D'où:

$$(e^{\upsilon X(s)-s\frac{\upsilon^2}{2}}; t \geq 0) \text{ est une martingale .}$$

□

Nous notons le résultat suivant (Cf.[4]), qui nous sera utile ulterieuremùent.

Théorème. 1 (Paul Lévy). *Soit $(X(t); t > 0)$ un processus aléatoire à trajectoires continue adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ tel que:*
(1) $(X(t); t > 0)$ est une Mgle par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$.
(2) $(X^2(t) - t; t > 0)$ est une Mgle par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$.
Alors:$(X(t); t > 0)$ est un processus de Wiener (M.B.S).

Théorème. 2. *Soit* $(X(t); t \geq 0)$ *un processus continu tel que :* $\forall \upsilon, e^{\upsilon X(t) - t\frac{\upsilon^2}{2}}$ *est une Mgle.*
Alors : $(X(t); t \geq 0)$ *est un processus de Wiener.*

Démonstration. Puisque $e^{\upsilon X(t) - t\frac{\upsilon^2}{2}}$ est une Mgle ;

$$\mathbb{E}[e^{\upsilon X(t) - t\frac{\upsilon^2}{2}} | \mathcal{F}_s] = e^{\upsilon X(s) - s\frac{\upsilon^2}{2}}.$$

Comme $X(t) - X(s) \in N(0; t-s)$, la fonction génératrice des moments nous donne :

$$\mathbb{E}[e^{\upsilon X(t) - t\frac{\upsilon^2}{2}}] = e^{(t-s)\frac{\upsilon^2}{2}};$$

et puisque $X(t) - X(s) \in N(0; t-s)$ et aussi indépendante de $(\mathcal{F}_s)$ et aussi donc indépendante de toutes familles de tribues engendrées par la filtration $(X(\upsilon); \upsilon \leq s)$. D'où le résultat cherché :

$$\mathbb{E}[e^{\upsilon X(t) - t\frac{\upsilon^2}{2}} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[e^{\upsilon X(s) - s\frac{\upsilon^2}{2}}].$$

□

1.4 Quelques propriétés des processus de Wiener

Proposition. 2. *Soit* $(X_t; t \geq 0)$ *un processus de Wiener standard . Alors les processus ci-dessous sont des processus de Wiener :*
(1) $V_t = -X_t; t \geq 0$ *(symétrie).*
(2) Soit $T \in \mathbb{R}^+$ *fixé :* $V_t = X_{t+T} - X_t$, $t \in \mathbb{R}^+$ *(stationnarité).*
(3) Soit $T \in \mathbb{R}^+$ *fixé :* $V_t = X_T - X_{T-t}$, $t \in [0, T]$ *(renversement du temps).*
(4) Soit C *une constante positive :*

$$V_t = \frac{1}{C} X_{C^2 t}; t \geq 0 \text{ (loi d'échelle) .}$$

(i.e un processus qui garde le même aspect à différentes échelles).

(5) Soit $(V_t; t \geq 0)$ *alors*

$$V_t = \begin{cases} 0 & si\ t = 0 \\ tX_{\frac{1}{t}} & si\ t > 0 \end{cases}$$

(inversion du temps)

Démonstration.

(1)symétrie: On a les trajectoires de $V(t) = -X(t)$ sont p.s continues et $V(0) = -X(0) = 0$ p.s .
Comme le processus de Wiener $X(t)$ est stationnaire et à acroissement indépendant , alors $V(t) = -X(t)$ est aussi stationnaire et à accroissement indépendant.
Et

$$\forall 0 \leq s \leq t \; V(t) - V(s) = -(X(t) - X(s)) \in N(0, t-s)$$

D'où $(V(t); t \geq 0)$ est un processus de Wiener.

(2) Stationnarité:
Soit $0 \leq t_0 < t_1 < ..... < t_n$. Les accroissements $V(t_i + T) - V(t_i)$ de $V(t)$ sont indépendants.
Étant donné les accroissemts $X(t_n+T)-X(t_{n-1}+T); ....; X(t_1+T)-X(t_0+T)$ de $X(t)$ sont indépendants.
Pour tout $0 \leq s < t$,l'accroissement $V(t) - V(s) \in N(0, t-s)$ car
$X(t+T) - X(s+T) \in N(0, t-s)$.
De plus les trajectoires $t \mapsto V(t) = X(t+T) - X(t)$ est continue. et

$$V(0) = X(0+T) - X(T) = 0$$

D'où : $(V(t); t \geq 0)$ est un processus de Wiener standard.

(4) Loi d'échelle:
Il est claire que $V(0) = \frac{1}{C}X(0) = 0$ p.s , et les trajectoires $t \mapsto V(t) = \frac{1}{C}X(C^2t)$ sont prèsque sûrement continues.

On démontre que $(V(t); t \geq 0)$ et $(|V(t)|^2 - t; t \geq 0)$ sont des martingales relativement à la filtration

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_t &= \sigma\{V(s) : 0 \leq s \leq t\} \\ &= \sigma\{X(C^2 s) : 0 \leq s \leq t\} \\ &= \sigma\{X(s) : 0 \leq s \leq C^2 t\} \\ &= \mathcal{F}_{C^2 t} \end{aligned}$$

Effictivement,si $s < t$ alors $C^2 s < C^2 t$ donc

$$\begin{aligned} E[V(t)|\mathcal{G}_s] &= E[\frac{1}{C}X(C^2t)|\mathcal{F}_{C^2s}] \\ &= \frac{1}{C}\mathbb{E}[X(C^2t)|\mathcal{F}_{C^2s}] \\ &= \frac{1}{C}X(C^2s) \\ &= V(s) \end{aligned}$$

D'où $(V(t); t \geq 0)$ est une Mgle.
Et

$$\begin{aligned} E[|V(t)|^2 - t|\mathcal{G}_s] &= E[\frac{1}{C^2}|X(C^2t)|^2 - t|\mathcal{F}_{C^2s}] \\ &= \frac{1}{C^2}E[|X(C^2t)|^2 - C^2t|\mathcal{F}_{C^2s}] \\ &= \frac{1}{C^2}(|X(C^2s)|^2 - C^2s) \\ &= |V(s)|^2 - s \end{aligned}$$

D'où $(|V(t)|^2 - t; t \geq 0)$ est une Mgle.
Comme $(V(t); t \geq 0)$ et $(|V(t)|^2 - t; t \geq 0)$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ et d'après le théorème de Paul Lévy (théorème 1) on aura: $(V(t); t \geq 0)$ est un processus de Wiener.

□

1.5 La non-différentiabilité du processus de Wiener

Proposition. 3. *Le processus de Wiener $(X(t); t \geq 0)$ est prèsque sûrement non différentiable pour tout $t \geq 0$.*

Démonstration. Nous voulons montrer que

$$P[\{\omega; \forall n \in \mathbb{N}, \exists t \in [0, \frac{1}{n^4}] \text{ tel que } \frac{|X(t)|}{t} > n\}] = 1.$$

Soit:

$$A_n = \{\frac{|X(t)|}{t} > n \text{ pour un } t \in [0, \frac{1}{n^4}].\}$$

Par la loi d'échelle :

$$V_n(t) = \frac{1}{n^2} X(n^4 t)$$

est un processus de Wiener pour quelque soit n .

$$\begin{aligned} P[A_n] &\geq P[\{\omega; \frac{|X(\frac{1}{n^4})|}{\frac{1}{n^4}} > n\}] \\ &= P[\{\omega; \frac{|V(\frac{1}{n^4})|}{\frac{1}{n^4}} > n\}] \\ &= P[|X(1)| > \frac{1}{n}] \to 1 \text{ lorsque } n \to \infty. \end{aligned}$$

Comme $(A_n)_n$ est une suite décroissante (au sens de l'inclusion) d'événements,

$$P[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n] = \lim_{n \longrightarrow \infty} P[A_n] = 1,$$

D'où $X(t)$ est non-différentiable en 0.
Et comme $V_t(s) = X(s+t) - V(t)$ est un processus de Wiener pour $t \geq 0$ quelconque (propriété (2)) donc $V_t(s)$ est non-différentiable en $s = 0$ ce qui implique que $X(t)$ est p.s non-différentiable en t. □

La propriété de Markov pour le processus de Wiener

Définition. 2. *(la propriété de Markov)*
Soit $(X(t)_t$ un processus aléatoire à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ et $\forall t, \mathcal{F}_t = \sigma(X_s,\ s \leq t)$. $(X(t)_t$ est un processus de Markov si

$$\forall t, s > 0 : P[X(t+s) \in B | \mathcal{F}_s] = P[X(t+s) \in B | X_s]; \forall B \in \mathcal{E}.$$

Théorème. 3. *Le processus de Weiner vérifie la propriété de Markov.*

Remarque. 1. *Si le processus de Wiener $(X(t); t \geq 0)$ démarre du point x,alors $X(t) \in N(x,t)$ c'est-à-dire :*

$$P_x[X(t) \in (a;b)] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-(y-x)^2}{2t}} dy.$$

P_x est la probabilité des événements lorsque le le point de départ du processus est x.
Et $p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-(y-x)^2}{2t}} dy$ est la densité des probabilités de transition du processus de Wiener.

On aura :

$$X^x(t) = x + X^0(t)$$

avec :
$X^x(t)$: le processus de Wiener qui démarre de x.
$X^0(t)$: le processus de Wiener qui démarre du l'origine.

Exemple. 1. *Calcul de $P[X(1) \leq 0; X(2) \leq 0]$*

$$\begin{aligned}
&= P[X(1) \leq 0; X(1) + X(2) - X(1) \leq 0] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} P[X(1) \leq 0; X(1) + X(2) - X(1) \leq 0 | X(1) = y_1] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y_1^2}{2}} dy_1 \\
&= \int_{-\infty}^{0} P[X(1) + X(2) - X(1) | X(1) = y_1] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y_1^2}{2}} dy_1 \\
&= \int_{-\infty}^{0} P[X(2) - X(1) \leq -y_1] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y_1^2}{2}} dy_1 \\
&= \int_{-\infty}^{0} F[(-y_1)] dF(y_1) \\
&= \int_{-\infty}^{0} [1 - F(y_1)] dF(y_1) \\
&= \frac{1}{2} - (\int_{0}^{\frac{1}{2}} y dy) \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

avec F la fonction de répartition de la loi normale.

1.6 Variation des trajectoires

Définition. 3. *Soit $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots\ldots\ldots < t_n^n = T$ une subdivision de l'intervalle $[0;T]$ en n parties de même longueurs i.e telle que les $t_i^n = \frac{iT}{n}$.*

On note les accroissements correspondants au processus de Wiener $X(t)$ par

$$\triangle_i^n X = X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)$$

Proposition. 4. *Soit $\triangle_i^n X$ les accroissements du processus de Wiener sur l'intervalle $[0;T]$ alors on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (\triangle_i^n X)^2 = T \in \mathbb{L}^2$$

Démonstration. Comme les accroissements $\triangle_i^n X$ sont indépendants et

$$E[\triangle_i^n X] = 0 \ ; \ E[(\triangle_i^n X)^2] = \frac{T}{n} \ ; \ E[(\triangle_i^n X)^4] = \frac{3T^2}{n^2}.$$

Effictivement; pour le calcul de $E[(\triangle_i^n X)^4]$, on a utilisé la fonction génératrice des moment. En effet; on a vu que: $\mathbb{E}[e^{i\lambda X(t)}] = e^{\frac{-\lambda^2 t}{2}}$, donc:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t)^4] &= \frac{d^4}{d\lambda^4}\mathbb{E}[e^{i\lambda X(t)}]\|_{\lambda=0} \\ &= \frac{d^4}{d\lambda^4} e^{\frac{-\lambda^2 t}{2}} \|_{\lambda=0} \\ &= 3t^2. \end{aligned}$$

D'où: $E[(\triangle_i^n X)^4] = \frac{3T^2}{n^2}$.

On aura :

$$\begin{aligned} E[(\sum_{i=0}^{n-1}(\triangle_i^n X)^2 - T)^2] &= E[(\sum_{i=0}^{n-1}(\triangle_i^n X)^2 - \frac{T}{n})^2] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E[((\triangle_i^n X)^2 - \frac{T}{n})^2] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \{E[(\triangle_i^n X)^4] - 2\frac{T}{n}E[(\triangle_i^n X)^2] + \frac{T^2}{n^2}\} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} [\frac{3T^2}{n^2} - \frac{2T^2}{n^2} + \frac{T^2}{n^2}] \\ &= \frac{2T^2}{n^2} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(\triangle_i^n X)^2 = T \in \mathbb{L}^2$$

□

Définition. 4. *Soit* $t = (t_0, t_1, ..., t_n)$ *une subdivision de* $[0;T]$ *et soit*

$$\triangle t = \max_{0\leq i\leq n-1} |t_{i+1} - t_i|$$

On définit la variation de la fonction $f : [0;T] \to \mathbb{R}$ *par*

$$\limsup_{\triangle t\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}|f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

Théorème. 4. *Soit* $(X(t); t \geq 0)$ *un processus de Wiener alors la variation des trajectoires de* $X(t)$ *est infinie p.s*

Démonstration. Considèrons la suite des subdivisions $t^n = (t_0^n, t_1^n, ..., t_n^n)$ de l'intervalle $[0;T]$ en n parties égales. Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1}|\triangle_i^n X|^2 \leq (\max_{0\leq i\leq n-1}|\triangle_i^n X|)\sum_{i=0}^{n-1}|\triangle_i^n X|.$$

Comme les trajectoires de $X(t)$ sont p.s continues sur l'intervalle $[0;T]$,

$$\lim_{n\to\infty}(\max_{0\leq i\leq n-1}|\triangle_i^n X|) = 0 \text{ p.s}$$

Par la proposition(5) il éxiste une sous suite de subdivision $(t^{n_k})_k$ telle que $t^{n_k} = (t_0^{n_k}, t_1^{n_k}, ..., t_{n_k}^{n_k})$ sachant que :

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{n_k-1}|\triangle_i^{n_k} X|^2 = T \text{ p.s}$$

Parce que pour n'importe quelle suite qui converge p.s dans $\mathbb{L}^2$,on peut extraire une sous suite qui converge p.s dans $\mathbb{L}^2$ car $\mathbb{L}^2$ est complet.
Il en résulte que :

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{n_k-1}|\triangle_i^{n_k} X| = \infty \text{ p.s}$$

Tandis que :

$$\lim_{k\to\infty}\triangle t_i^{n_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{T}{n_k} = 0$$

□

Le processus de Wiener visite tout les nombres réels

Proposition. 5. *Soit* $(X(t); t \geq 0)$ *un processus de Wiener sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *adapté à la filtration croissante* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *alors :*

$$P[\inf_{t\geq 0} X(t) = -\infty; \sup_{t\geq 0} X(t) = +\infty] = 1$$

Étapes de démonstration: On donne une proposition détaillée équivalente à la proposition donnée en posant:
$M_t = \sup_{0\leq s\leq t} X(t)$ et $m_t = \inf_{0\leq s\leq t} X(t)$
$M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ et $m_\infty = \lim_{t\to\infty} m_t$
On montre:
(i) l'éxistance de M_∞ ; m_∞ et montrons $m_t < 0 < M_t$ sur $[0, +\infty]$

(ii) $-\infty = m_\infty = \liminf_{t\to\infty} X(t) < \limsup_{t\to\infty} X(t) = M_\infty = +\infty$.

Démonstration.
(i)
On a $(m_t) \downarrow t$, $(M_t) \uparrow t$ et comme le processus de Wiener est à trajectoires continues , ce qui implique $X(t)$ monotone d'où l'éxistence de m_∞ et M_∞.
Soit

$$A_n = \{\omega, X(t_n) > 0\}$$

$(A_n)_n$ est une suite d'évenements indépendant du fait $X(t_n)$ est la somme de v.a.r indépendantes.
$P[A_n] = P[X(t_n) > 0] = \frac{1}{2}$ car $X(t_n) \in N(0, t_n)$.

$$P[\limsup A_n] \geq \limsup P[A_n] = \frac{1}{2} \tag{1.1}$$

Par le théorème de 0 ou 1 de Kolmogorov ,on aura :

$$P[\limsup A_n] = 0 \text{ ou } 1.$$

D'après (1.1) ,on déduit que : $P[\limsup A_n] = 1$.

Or :

$$\limsup A_n = \{X(t_n) > 0 \text{ i.o } \} \subset \{M_t > 0; \forall t > 0\};$$

Donc :

$$M_t > 0 \text{ p.s}$$

Et comme le processus de Wiener est symétrique,on déduit que :

$$P[\{m_t < 0; \forall t > 0\}] = 1$$

. D'où :

$$m_t < 0 \text{ p.s}$$

(ii)
Montrons que : $\limsup_{t\to+\infty} X(t) = M_\infty = +\infty$.
Soit $k \in \mathbb{R}$

$$P[X(t_n) > k] = P[\frac{X(t_n)}{k} > \frac{k}{\sqrt{2\pi}}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k}{\sqrt{2\pi}}}^{+\infty} e^{\frac{-\nu^2}{2}} d\nu \to \frac{1}{2}$$

Par conséquent :

$$P[X(t_n) > 0 \text{ i.o }] = P[\limsup_n \{X(t_n) > k\}] \geq \limsup_n P[X(t_n) > k] = \frac{1}{2}.$$

Pour $k = +\infty$

$$\limsup_n [X(t_n)] = +\infty] \geq \frac{1}{2}$$

D'après le théorème du o ou 1 de Kolmogorov on aura :

$$P[\limsup_n [X(t_n) = +\infty] = 1$$

Donc :

$$\limsup_{t\to\infty} X(t) = M_\infty = +\infty$$

Et gràce à la symétrie du processus de Wiener on déduit :

$$\liminf_{t\to\infty} X(t) = m_\infty = -\infty.$$

□

1.7 Loi du logarithme itéré

Théorème. 5. *(Loi du logarithme itéré)*
Soit $(X(t); t \geq 0)$ un processus de Wiener sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel que $X(t)$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable , alors:

$$\forall s \geq 0 : P[\liminf_{t\to 0} \frac{X(t+s) - X(s)}{\sqrt{2t \ln\ln \frac{1}{t}}} = -1; \limsup_{t\to 0} \frac{X(t+s) - X(s)}{\sqrt{2t \ln\ln \frac{1}{t}}} = 1] = 1.$$

Démonstration. Grâce aux propriétés de symétrie et d'invariance par translation du processus de Wiener, il suffit en fait de démontrer que :

$$P[\limsup_{t\to 0} \frac{X(t)}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} = 1] = 1.$$

Montrons d'abord que :

$$P[\limsup_{t\to 0} \frac{X(t)}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} \leq 1] = 1.$$

Pour simplifier les notations , on note :

$$h(t) = \sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}.$$

Soit $\alpha;\beta > 0$, d'après l'inégalité maximale de Doob appliquée à la martingale:

$$(e^{\alpha X(t)-\frac{\alpha^2}{2}t})_{t\geq 0}$$

On a : $\forall t \geq 0$;

$$P[\sup_{0\leq s\leq t}(X(s) - \frac{\alpha}{2}s) > \beta] = P[\sup_{0\leq s\leq t}(e^{\alpha X(s)-\frac{\alpha^2}{2}s}) > e^{\alpha\beta}] \leq e^{-\alpha\beta}$$

Soit $\theta, \delta \in (0,1)$. En appliquant l'inégalité précédente pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec :

$$t = \theta^n; \alpha = \frac{(1+\delta)h(\theta^n)}{\theta^n}; \beta = \frac{1}{2}h(\theta^n)$$

On obtient quand $n \longrightarrow \infty$;

$$P[\sup_{0\leq s\leq \theta^n}(X(s) - \frac{(1+\delta)h(\theta^n)}{2\theta^n}s) > \frac{1}{2}h(\theta^n)] = O(\frac{1}{n^{1+\delta}})$$

Par conséquent , d'après le lemme de Borel-Cantelli , pour presque tout $\omega \in \Omega$ on peut trouver $N(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N(\omega)$,

$$\sup_{0\leq s\leq \theta^n}(X_s(\omega) - \frac{(1+\delta)h(\theta^n)}{2\theta^n}s) \leq \frac{1}{2}h(\theta^n);$$

ce qui implique $\forall \theta^{n+1} < t < \theta^n$ (car $\theta \in (0,1)$)

$$X_t(\omega) \leq \sup_{0\leq s\leq \theta^n} X_s(\omega) \leq \frac{1}{2}(2+\delta)h(\theta^n) \leq \frac{(2+\delta)h(t)}{2\sqrt{\theta}}.$$

On déduit ainsi :

$$P[\limsup_{t\longrightarrow 0} \frac{X(t)}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} \leq \frac{2+\delta}{2\sqrt{\theta}}] = 1.$$

Faisant $\theta \longrightarrow 1, \delta \longrightarrow 0$, on obtient:

$$P[\limsup_{t\longrightarrow 0} \frac{X(t)}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} \leq 1] = 1. \tag{1.2}$$

Montrons maintenant : $P[\limsup_{t\longrightarrow 0} \frac{X(t)}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} \geq 1] = 1$.

Soit $\theta \in (0,1)$, pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$A_n = \{\omega, X_{\theta^n}(\omega) - X_{\theta^{n+1}}(\omega) \geq (1-\sqrt{\theta})h(\theta^n)\}$$

On va montrer que : $\sum P[A_n] = +\infty$.
Pour cela,on utilise l'inégalité :

$$\int_a^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \geq \frac{a}{1+a^2} e^{-\frac{a^2}{2}}; a > 0.$$

On a ainsi:

$$P[A_n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_n}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \geq \frac{a_n}{1+a_n^2} e^{-\frac{a_n^2}{2}}$$

avec:

$$a_n = \frac{(1-\sqrt{\theta})h(\theta^n)}{\theta^{\frac{n}{2}}\sqrt{1-\theta}}$$

Au voisinage de $+\infty$;

$$\frac{a_n}{1+a_n^2} e^{-\frac{a_n^2}{2}} = O(\frac{1}{n^{\frac{1-\theta-2\sqrt{\theta}}{1-\theta}}}).$$

Par conséquent:

$$\sum P[A_n] = +\infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli on aura :

$$P[\{\omega; X_{\theta^n} - X_{\theta^{n+1}} \geq (1-\sqrt{\theta})h(\theta^n)\} \text{ i.o }] = 1.$$

Mais d'après la première partie de la démonstration,
pour presque tout ω on peut trouver $N(\omega)$ tel que $\forall n \geq N(\omega)$

$$X_{\theta^{n+1}} > -2h(\theta^{n+1}) \geq -2\sqrt{\theta}h(\theta^n)$$

Par conséquent :

$$P[\{\omega; X_{\theta^n} > h(\theta^n)(1-5\sqrt{\theta})\} \text{ i.o }] = 1.$$

Ce qui implique :

$$P[\limsup_{t\longrightarrow 0} \frac{X(t)}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} \geq 1-5\sqrt{\theta}] = 1.$$

Faisant $\theta \longrightarrow 0$ et on obtient :

$$P[\limsup_{t\longrightarrow 0} \frac{X(t)}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} \geq 1] = 1. \tag{1.3}$$

De (1.2) et (1.3) on a le résultat cherché:

$$P[\limsup_{t\longrightarrow 0} \frac{X(t)}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} = 1] = 1.$$

□

Par la propriété d'invariance par inversion du temps du processus de Wiener,on a:

Corollaire. 1. *Soit $(X(t); t \geq 0)$ un processus de Wiener sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel que $X(t)$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable , alors :*

$$P[\liminf_{t\to+\infty} \frac{X(t)}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} = -1; \limsup_{t\to+\infty} \frac{X(t)}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} = 1] = 1.$$

Chapter 2

Intégrale d'Itô

2.1 Intégrale d'Itô d'un processus étagé

Définition 1. *Soient $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et $(f(t); t \geq 0)$ un processus aléatoire. On dit que le processus $(f(t); t \geq 0)$ est un processus étagé (simple random step process) s'il existe une subdivision finie $(t_i)_{i=0}^n$*

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$

et une suite de v.a $(\eta_j)_{j=0}^n$ tel que $\forall j = 0, \cdots, n,\ \eta_j \in \mathcal{F}_{t_j},\ \ \eta_j \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ et qui vérifient

$$\forall t,\ \ f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbb{I}_{[t_j; t_{j+1})}(t) \tag{2.1}$$

On note M^2_{step} l'ensemble des processus aléatoires étagés.

Proposition 1. *M^2_{step} est un espace vectoriel i.e*

$$\forall f, g \in M^2_{step} \text{ et } \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ on aura } (af + bg) \in M^2_{step}$$

Remarque 1. *Comme les v.a $\eta_j \in \mathbb{L}^2$ alors le processus*

$$f(t) \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)\ ;\ \forall t \in [0; T]$$

Définition 2. *Soit $f(t) \in M^2_{step}$ un processus étagé et soit $(X(t); t \geq 0)$ un processus de Wiener. On apelle intégrale d'Itô du processus $f(t)$ le processus*

aléatoire noté $I(f)$ définie par :

$$I(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (X(t_{j+1}) - X(t_j))$$

Remarque 2. *(1) Comme les v.a $\eta_j \in \mathcal{F}_{t_j} - mesurable$ alors le processus $(f(t); t \geq 0)$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$.*
(Ceci revient à éxiger que $f(t)$ ne dépend que du passé du processus de Wiener jusqu'au temps t)

Proposition 2. *Quelque soit le processus $f(t) \in M^2_{step}$ on a :*
(1) $I(f) \in \mathbb{L}^2$
(2) $\mathbb{E}[|I(f)|^2] = \mathbb{E}[\int_0^\infty |f(t)|^2 dt]$

Démonstration. (1)
On pose : $\triangle_j X = X(t_{j+1}) - X(t_j)$ et $\triangle_j t = t_{j+1} - t_j$.
Donc : $\mathbb{E}[\triangle_j X] = 0$ et $\mathbb{E}[\triangle_j^2 X] = \triangle_j t$.
Premièrement , on calcule $\mathbb{E}[|I(f)|^2]$.
On a d'après la définition de l'intégrale d'Itô ;

$$|I(f)|^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \eta_j \eta_k \triangle_j X \triangle_k X = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \triangle_j^2 X + 2\sum_{k<j} \eta_j \eta_k \triangle_j X \triangle_k X$$

Comme η_j et les $\triangle_j X$ sont indépendants,

$$\mathbb{E}[\eta_j^2 \triangle_j^2 X] = \mathbb{E}[\eta_j^2]\mathbb{E}[\triangle_j^2 X] = \mathbb{E}[\eta_j^2]\triangle_j t$$

Si $k < j$ alors les $\eta_j \eta_k \triangle_k X$ et $\triangle_j X$ sont indépendantes ; donc

$$\mathbb{E}[\eta_j \eta_k \triangle_j X \triangle_k X) = \mathbb{E}[\eta_j \eta_k \triangle_j X] = 0$$

D'où:

$$\mathbb{E}[|I(f)|^2] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[\eta_j^2]\triangle_j t < \infty \text{ car les v.a } \eta_0, \eta_1, ..., \eta_{n-1} \in \mathbb{L}^2.$$

Ce qui veut dire que : $I(f) \in \mathbb{L}^2$.

(2)
On a d'après la définition du processus aléatoire étagé ;

$$|f(t)|^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \eta_j \eta_k \mathbb{I}_{[t_j;t_{j+1})}(t)\mathbb{I}_{[t_k;t_{k+1})}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \mathbb{I}_{[t_j;t_{j+1})}(t).$$

Ce qui implique :

$$\mathbb{E}[\int_0^\infty |f(t)|^2 dt] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[\eta_j^2] \triangle_j t.$$

Ce qui veut dire :

$$\mathbb{E}[|I(f)|^2] = \mathbb{E}[\int_0^\infty |f(t)|^2 dt].$$

□

Proposition 3.

$$\forall f, g \in M^2_{step} : \mathbb{E}[I(f).I(g)] = \mathbb{E}[\int_0^\infty f(t)g(t)dt]$$

Démonstration. Pour toute fonction étagé $f, g \in M^2_{step}$, il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < .... < t_n$ telle que :

$$\forall t \geq 0 : f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbb{I}_{[t_j;t_{j+1})}(t) \text{ et } g(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j \mathbb{I}_{[t_j;t_{j+1})}(t)$$

avec η_j et $\zeta_j \in \mathbb{L}^2$ et aussi sont $\mathcal{F}_{t_j} - mesurable$ pour tout $j = 0; 1; ....n-1$.
On pose : $\triangle_j X = X(t_{j+1}) - X(t_j)$ et $\triangle_j t = t_{j+1} - t_j$.

$$\begin{aligned} I(f)I(g) &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \eta_j \zeta_k \triangle_j X \triangle_k X \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \zeta_j |\triangle_j X|^2 + \sum_{j<k} \eta_j \zeta_k \triangle_j X \triangle_k X + \sum_{j<k} \eta_j \zeta_k \triangle_j X \triangle_k X \end{aligned}$$

Par indépendence des η_j, ζ_k et les $\triangle_j X, \triangle_k X$ on aura:

$$\mathbb{E}[\eta_j \zeta_j |\triangle_j X|^2] = \mathbb{E}[\eta_j \zeta_j].\mathbb{E}[\triangle_j X|^2] = \mathbb{E}[\eta_j \zeta_j] \triangle_j t$$

Et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\eta_j\zeta_k\triangle_j X\triangle_k X] &= \mathbb{E}[\eta_j\zeta_k\triangle_j X]\mathbb{E}[\triangle_k X]=0\\ \mathbb{E}[\zeta_j\eta_k\triangle_j X\triangle_k X] &= \mathbb{E}[\zeta_j\eta_k\triangle_j X]\mathbb{E}[\triangle_k X]=0\end{aligned}$$

Ce qui implique que pour tout $j<k$ on a :

$$\mathbb{E}[I(f)I(g)]=\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}[\eta_j\zeta_j]\triangle_j t.$$

Donc;il suffit de montrer que :

$$\mathbb{E}[\int_0^\infty f(t)g(t)dt]=\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}[\eta_j\zeta_j]\triangle_j t$$

Mais ceci est vrai car :

$$\begin{aligned}f(t)g(t) &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\eta_j\zeta_k\mathbb{I}_{[t_j,t_{j+1})}(t)\mathbb{I}_{[t_k,t_{k+1})}(t)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\eta_j\zeta_j\mathbb{I}_{[t_j,t_{j+1})}(t)\end{aligned}$$

□

Proposition 4. *L'application* $I:M^2_{step}\to\mathbb{L}^2$ *est linéaire i.e*

$$\forall f,g\in M^2_{step}\ et\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}: I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g)$$

Démonstration. Soit la subdivision $0=t_0<t_1<....<t_n$ telle que

$$f=\sum_{j=0}^{n-1}\eta_j\mathbb{I}_{[t_j,t_{j+1})}\text{ et }g=\sum_{j=0}^{n-1}\zeta_j\mathbb{I}_{[t_j,t_{j+1})};$$

avec η_j et $\zeta_j\in\mathbb{L}^2$ et aussi sont $\mathcal{F}_{t_j}-mesurable$ pour tout $j=0;1;....n-1$.
(si les deux partitions dans les formules de f et g sont différente , c'est possible de trouver un ajustement convenable pour les deux partitions)
On pose : $\triangle_j X=X(t_{j+1})-X(t_j)$. Alors on a

$$\alpha f + \beta g = \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha\eta_j + \beta\zeta_j)\mathbb{I}_{[t_j, t_{j+1})}$$

Et

$$\begin{aligned} I(\alpha f + \beta g) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha\eta_j + \beta\zeta_j)\triangle_j X \\ &= \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \triangle_j X + \beta \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j \triangle_j X \\ &= \alpha I(f) + \beta I(g). \end{aligned}$$

□

Remarque 3. *On a définit l'intégrale d'Itô $I(f)$ pour n'importe quel processus étagé $f \in M^2_{step}$ .Maintenant; on va faire une extention de I par approximation qu'on va définir à une classe plus large de processus aléatoire.*

2.2 L'espace M^2

Définition 3. *On note M^2 la classe des processus aléatoires $(f(t); t \geq 0)$ tel que :*

$$\mathbb{E}[\int_0^\infty |f(t)|^2 dt] < \infty,$$

et il existe une suite $(f_n)_n \in M^2_{step}$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt] = 0 \tag{2.2}$$

Dans ce cas on dit que $(f_n)_n$ est une approximation de f .(ou bien $(f_n)_n$ est une suite approximante de f.)

Définition 4. *Soit le processus $f \in M^2$ et soit la suite $(f_n)_n \in M^2_{step}$ une suite approximante de f. On appelle intégrale d'Itô de f la variable aléatoire $I(f)$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|I(f) - I(f_n)|^2] = 0$$

On écrit alors:

$$I(f) = \int_0^\infty f(t) dX(t)$$

Proposition 5. *Pour tout processus aléatoire $f \in M^2$, l'intégrale d'Itô $I(f) \in \mathbb{L}^2$ existe, est unique et satisfait :*

$$\mathbb{E}[|I(f)|^2] = \mathbb{E}[\int_0^\infty |f(t)|^2 dt] \tag{2.3}$$

Démonstration. On note la norme du processus aléatoire $f \in M^2$, et la norme du v.a $\eta \in L^2$ par :

$$||f||_{M^2} = \sqrt{\mathbb{E}[\int_0^\infty |f(t)|^2 dt]} \text{ et } ||\eta||_{\mathbb{L}^2} = \sqrt{\mathbb{E}[\eta^2]}$$

Soit la suite des processus aléatoire étagé $(f_n)_n \in M^2_{step}$ qui est une approximation du processus $f \in M^2$ qui satisfait la définition (3) i.e

$$\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_{M^2} = 0.$$

Montrons que la suite $(I(f_n))_n \in \mathbb{L}^2$ est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$.
Nous avons

$$\forall \epsilon > 0; \exists N \text{ tel que } : ||f - f_n||_{M^2} < \frac{\epsilon}{2} \text{ pour tout } n > N.$$

car

$$\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_{M^2} = 0,$$

du fait que $(f_n)_n$ est une suitre approximante. Par la proposition (3) on a: $\forall m; n > N$

$$\begin{aligned} ||I(f_m) - I(f_n)||_{\mathbb{L}^2} &= ||I(f_m - f_n)||_{\mathbb{L}^2} \\ &= ||f_m - f_n||_{M^2} \\ &\leq ||f - f_m||_{M^2} + ||f - f_n||_{M^2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

D'où la suite d'intégrales d'Itò $(I(f_n))_1^n$ est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$.
Comme toute suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$ a une limite car l'espace $(\mathbb{L}^2, ||.||_{\mathbb{L}^2})$ est un Hilbert donc complet, donc la suite $(I(f_n))_{i=1}^n$ a une limite dans $\mathbb{L}^2$ Il faut démontrer que la limite est la même pour tout n si on change de suite approximante.
En effet;supposons que $(f_n)_n; (g_n)_n \in M^2_{step}$ deux suites approximantes de f.

Il est immédiat de montrer que les suites $(I(f_n))_n; (I(g_n))_n$ ont une même limite dans $\mathbb{L}^2$ Cela montre l'existence et l'unicité de $I(f)$.

Enfin, nous avons

$$\forall n; ||I(f_n)||_{\mathbb{L}^2} = ||f_n||_{M^2}$$

Lorsque $n \to \infty$ on obtient :

$$||I(f)||_{\mathbb{L}^2} = ||f||_{M^2}$$

□

Définition 5. *(1) Soit un processus aléatoire $(f(t); t \geq 0)$; on définit M_T^2 l'espace de tout les processus aléatoires tel que :*

$$\forall T > 0 : \mathbb{I}_{[0;T)}.f \in M^2.$$

(2) Soit $(X(t); t \geq 0)$ un processus de Wiener. L'intégrale d'Itô de (0 à ∞) de processus $f \in M_T^2$ est définit par :

$$I_T(f) = I(\mathbb{I}_{[0;T)}f) = \int_0^T f(t)dX(t)$$

Proposition 6. *Soient $(X(t); t \geq 0)$ un processus de Wiener adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et $f \in M_{step}^2$ alors:*

$$f \in M_{step}^2 \Longrightarrow f \in M_t^2 \ ; \forall t.$$

Et

$$I_t(f) = \int_0^t f(s)dX(s) \text{ est une Mgle adapté à } (\mathcal{F}_t)_t.$$

Démonstration. On a par définition :

$$f \in M_{step}^2 \Longrightarrow \mathbb{I}_{[0,t]}f \in M_{step}^2 \subset M^2 \ , \forall t > 0.$$

On montre que $I_t(f)$ est une Mgle par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$.
Soit $0 \leq s < t$ et supposons que $f \in M_{step}^2$.
On considère la subdivision (t_j) telle que :

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = s < t_{k+1} < \cdots < t_m = t < t_{m+1} < \cdots < t_n.$$

On note $\triangle_j = X(t_{j+1}) - X(t_j)$; Par définition on a :

$$\mathbb{I}_{[0,t]}f = \sum_{j=0}^{m-1} \eta_j \mathbb{I}_{[t_j,t_{j+1}]}$$

Et

$$I_t(f) = I(\mathbb{I}_{[0,t]}f) = \sum_{j=0}^{m-1} \eta_j \triangle_j X,$$

qui est adapté à $(\mathcal{F}_t)_t$ est aussi intégrable. On a

$$\mathbb{E}[I_t(f)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[I(\mathbb{I}_{[0,t]}f)|\mathcal{F}_s] = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{E}[\eta_j \triangle_j X|\mathcal{F}_s].$$

Si $j < k$ alors les η_j et les $\triangle_j X$ sont $\mathcal{F}_s - mesurable$ et

$$\mathbb{E}[\eta_j \triangle_j X|\mathcal{F}_s] = \eta_j \triangle_j X.$$

Si $j \geq k$, alors $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{t_j}$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\eta_j \triangle_j X|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\eta_j \triangle_j X|\mathcal{F}_{t_j}]|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[\eta_j \mathbb{E}[\triangle_j X|\mathcal{F}_{t_j}]|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[\eta_j|\mathcal{F}_s]\mathbb{E}[\triangle_j X] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme les $\eta_j \in \mathcal{F}_{t_j} - mesurable$ et les $\triangle_j X$ sont indépendants de $\mathcal{F}_{t_j}$.Il en résulte que

$$\mathbb{E}[I_t(f)|\mathcal{F}_s] = \sum_{j=0}^{k-1} \eta_j \triangle_j X = I(\mathbb{I}_{[0,s]}f) = I_s(f).$$

□

Théorème 1. *Soit le processus aléatoire $(f(t); t \geq 0)$ à trajectoires p.s continues adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Alors on a :*
(1) $f \in M^2$, i.e l'intégrale d'Itô existe,lorsque

$$\mathbb{E}[\int_0^\infty |f(t)|^2 dt] < \infty. \tag{2.4}$$

(2) $f \in M_T^2$,i.e l'intégrale d'Itô existe,lorsque

$$\mathbb{E}[\int_0^T |f(t)|^2 dt] < \infty. \tag{2.5}$$

Démonstration. (1)
Supposons que le processus à trajectoires continue $(f(t); t \geq 0)$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Si (2.4) est conservée; soit la suite de processus étagé $(f_n(t))_n \in M^2_{step}$ telle que :

$$f_n(t) = \begin{cases} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds & \text{si } \frac{k}{n} \leq t < \frac{k-1}{n} \text{ pour } k = 1; 2; 3; .....; n^2 - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{2.6}$$

On remarque que pour $k = 1; 2; .....$

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f_n(t)|^2 dt = n|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)dt|^2 \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f(t)|^2 dt \text{ p.s} \tag{2.7}$$

Par l'inégalité de Jensen on aura;

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt = 0 \text{ p.s}$$

Ce qui implique,

$$\lim_{n\to\infty} E[\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt] = 0$$

Par le théorème de la convergence dominé de Lebesgue et par la condition (2.4) car;

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt &\leq 2\int_0^\infty (|f(t)|^2 + |f_n(t)|^2)dt \\ &\leq 2\int_0^\infty |f(t)|^2 dt + 2\int_0^\infty |f(t)|^2 dt \\ &\leq 4\int_0^\infty |f(t)|^2 dt \end{aligned}$$

car on a :

$$\int_0^\infty |f_n(t)|^2)dt \leq \int_0^\infty |f(t)|^2 dt \text{ p.s } \forall n.$$

On prend $k = 0$ à ∞ dans (2,7) on aura:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt &= \int_0^N |f(t) - f_n(t)|^2 dt + \int_N^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt \\ &\leq \int_0^N |f(t) - f_n(t)|^2 dt + 2\int_N^\infty (|f(t)|^2 + |f_n(t)|^2) dt \\ &\leq \int_0^N |f(t) - f_n(t)|^2 dt + 4\int_{N-1}^\infty |f(t)|^2 dt \text{ p.s}\end{aligned}$$

La dernière inégalité est dû au fait que

$$\int_N^\infty |f_n(t)|^2 dt \leq \int_{N-\frac{1}{n}}^\infty |f_n(t)|^2 dt \leq \int_{N-1}^\infty |f_n(t)|^2 dt \text{ p.s}$$

Pour tout n et N , et prenons l'intégrale de $k = nN$ à ∞ dans (2.7);

$$\lim_{N\to\infty} \int_{N-1}^\infty |f(t)|^2 dt = 0 \text{ p.s.}$$

Par (2.4) et par

$$\forall N \text{ fixé; } \lim_{n\to\infty} \int_0^N |f(t) - f_n(t) dt = 0 \text{ p.s.}$$

du fait que les trajectoires de f sont continues.
Ce qui veut dire que la suite des processus aléatoire $(f_n)_n \in M^2_{step}$ qui est une approximation de f selon la définition (3); donc $f \in M^2$.
(2)
Si f vérifie (2.5) pour un certain $T > 0$, alors $\mathbb{I}_{[0;T)} f$ vérifie (2.4).Comme f est adaptée à $(\mathcal{F}_t)_t$ et à trajectoires continue p.s , alors $\mathbb{I}_{[0;T)} f$ est aussi adapté à $(\mathcal{F}_t)_t$ et à trajectoires continue p.s sauf peut être en T . Mais la singularité de continuité en point T n'influence pas sur la démonstration (1), donc $\mathbb{I}_{[0;T)} f \in M^2$ i.e $f \in M^2_T$. □

Proposition 7. *Soit* $(X(t); t \geq 0)$ *un processus de Wiener alors on a :*

$$X(t) \in M^2_T \text{ ; } \forall T > 0$$

Démonstration. Par définition , $X(t)$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ et a trajectoires p.s continues. De plus,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\int_0^T |X(t)|^2 dt] &= \int_0^T \mathbb{E}[|X(t)|^2]dt \\ &= \int_0^T tdt < \infty\end{aligned}$$

D'après le théorème précédent on aura $X(t) \in M_T^2$. □

2.3 Propriétés de l'intégrale d'Itô

Les propriétés de base de l'intégrale d'Itô sont résumées dans le théorème suivant.

Théorème 2. *Soit $(X(t); t \geq 0)$ un processus de Wiener adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ alors : Pour toutes $f, g \in M_t^2$, quelque soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et pour tout s tels que $0 \leq s < t$:*

(1)Linéarité

$$\int_0^t (\alpha f(r) + \beta g(r))dX(r) = \alpha \int_0^t f(r)dX(r) + \beta \int_0^t g(r)dX(r);$$

(2)Isométrie d'Itô

$$\mathbb{E}[|\int_0^t f(r)dX(r)|^2] = \mathbb{E}[\int_0^t |f(r)|^2 dX(r)];$$

(3)La propriété de la martingale

$$\mathbb{E}[\int_0^t f(r)dX(r)|\mathcal{F}_s] = \int_0^s f(r))dX(r).$$

Démonstration. (1) Si $f, g \in M_t^2$, alors $\mathbb{I}_{[0,t)}f, \mathbb{I}_{[0,t)}g \in M^2$, donc il existe des suites $(f_n)_n, (g_n)_n \in M_{step}^2$ qui sont une approximation de $\mathbb{I}_{[0,t)}f, \mathbb{I}_{[0,t)}g$

respictivement. Ce qui implique que $\mathbb{I}_{[0,t)}(\alpha f + \beta g)$ peut être une approximation de la suite $(\alpha f_n + \beta g_n)_n$.
D'après la proposition (4) chapitre (2) on aura :

$$I(\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha I(f_n) + \beta I(g_n) \text{ pour tout } n.$$

Par passage à la limte la limite lorsque $n \longrightarrow \infty$ dans l'espace $\mathbb{L}^2$ on aura :

$$I(\mathbb{I}_{[0,t)}(\alpha f + \beta g)) = \alpha I(\mathbb{I}_{[0,t)} f) + \beta I(\mathbb{I}_{[0,t)} g),$$

ce qui prouve (1).

(2) Ce résultat est dû à l'approximation de $\mathbb{I}_{[0,t)}$ par un processus étagé dans M^2_{step} et en utilisant la proposition (2) chapitre (2).

(3) Si $f \in M^2_t$, alors $\mathbb{I}_{[0,t)} f \in M^2$. Soit $(f_n)_n \in M^2_{step}$ la suite approximante de $\mathbb{I}_{[0,t)} f$ .D'après la proposition (6) chapitre (2) on aura : $\forall 0 \leq s < t$

$$\mathbb{E}[I(\mathbb{I}_{[0,t)} f_n | \mathcal{F}_s) = I(\mathbb{I}_{[0,s)} f_n) \ ; \forall n$$

Par passage à la limite dans $\mathbb{L}^2$ lorsque $n \longrightarrow \infty$; il suffit de montrer que :

$$\mathbb{E}[I(\mathbb{I}_{[0,t)} f | \mathcal{F}_s) = I(\mathbb{I}_{[0,s)} f).$$

Effictivement; remarquons que $(\mathbb{I}_{[0,s)} f_n)_n$ est une suite approximante de $\mathbb{I}_{[0,s)} f$ dans M^2_{step}, donc

$$I(\mathbb{I}_{[0,s)} f_n) \to I(\mathbb{I}_{[0,s)} f) \text{ dans } \mathbb{L}^2 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

D'une manière similiaire $(\mathbb{I}_{[0,t)} f_n)_n$ est aussi une suite approximante de $\mathbb{I}_{[0,t)} f$ dans M^2_{step} , ce qui implique :

$$I(\mathbb{I}_{[0,t)} f_n) \to I(\mathbb{I}_{[0,t)} f) \text{ dans } \mathbb{L}^2 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Le lemme au dessous implique que :

$$\mathbb{E}[I(\mathbb{I}_{[0,t)} f_n) | \mathcal{F}_s) \to \mathbb{E}[I(\mathbb{I}_{[0,t)} f) | \mathcal{F}_s] \text{ dans } \mathbb{L}^2,$$

cqfd $\square$

Lemme. 1. *Si ξ et $\xi_1, \xi_2 \cdots$ sont des v.a dans $\mathbb{L}^2$ telles que $\xi_n \to \xi$ dans $\mathbb{L}^2$ lorsque $n \to \infty$, alors*

$$\mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{G}] \to \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] \text{ dans } \mathbb{L}^2 \text{ lorsque } n \to \infty$$

Pour toutes tribus $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \Omega$

Démonstration. Par l'inégalité de Jensen on a :

$$|\mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]|^2 = |\mathbb{E}[\xi_n - \xi|\mathcal{G}]|^2 \leq \mathbb{E}[|\xi_n - \xi|^2|\mathcal{G}],$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})|^2] &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}(|\xi_n - \xi|^2|\mathcal{G})] \\ &= \mathbb{E}[|\xi_n - \xi|^2] \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty \end{aligned}$$

□

2.4 Formule d'Itô pour un processus de Wiener

Supposons que f est une fonction réelle.On veut calculer $df(X_t)$.
Rappelons la formule de Taylor

$$\triangle f(x) = f'(x)\triangle x + \frac{1}{2}f''(x)(\triangle x)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)(\triangle x)^3 + \cdots$$

c'est-à-dire :

$$df(x) = f'(x)dx + \frac{1}{2}f''(x)(dx)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)(dx)^3 + \cdots$$

On sait que :

$$df(x) = f'(x)dx$$

car $(dx)^2, (dx)^3$ sont nuls . Maintenant ; soit X_t un processus de Wiener alors :

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2 + \frac{1}{3!}f'''(X_t)(dX_t)^3 + \cdots$$

On note :

$d^2X_t = t$; $d^3X_t = d^2X_t.dX_t = tdX_t = 0$; $\cdots$; $d^kX_t = 0$ pour $\forall k \in \{3, 4, 5, \cdots\} \subset \mathbb{N}$

Donc on aura :

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)dt$$

Par intégration :

$$f[X(t)] - f[X(0)] = \int_0^t f'[X(\upsilon)]dX(\upsilon) + \frac{1}{2}\int_0^t f''[X(\upsilon)]d\upsilon$$

Ceci est la Formule d'Itô. L'intégrale $\int_0^t f'[X(\upsilon)]dX(\upsilon)$ est au sens d'Itô , la deuxième intégrale $\int_0^t f''[X(\upsilon)]d\upsilon$ est au sens de Riemann.

Théorème 3. *(Formule d'Itô) Soient $(X(t); t \in \mathbb{R}^+)$ un processus de Wiener adpté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ et $f \in C^2(\mathbb{R})$ i.e f est deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}$ .On suppose de plus que $f' \in M_t^2$, $\forall t > 0$ Alors :*

$$f[X(t)] = f[X(0)] + \int_0^t f'[X(\upsilon)]dX(\upsilon) + \frac{1}{2}\int_0^t f''[X(\upsilon)]d\upsilon$$

La formule d'Itô peut aussi écrite sous la forme différentielle stochastique:

$$d[f(X_t)] = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)dt$$

Démonstration. Soit $\Pi = (t_i^n)_i$ une subdivision sur $[0, t]$ .On a :

$$f[X(t)] = f[X(0)] + \sum_{i=0}^{n-1}(f[X(t_{i+1}^n)] - f[X(t_i^n)]).$$

Appliquons la formule de Taylor à $f[X(t_{i+1}^n)] - f[X(t_i^n)]$, on aura :

$$f[X(t_{i+1}^n)] - f[X(t_i^n)] = f'[X(t_i^n)][X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)] + \frac{1}{2}f''(\theta_i^n)[X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)]^2;$$

avec $\theta_i^n \in (X(t_i^n); X(t_{i+1}^n))$. Donc :

$$f[X(t)] = f[X(0)] + \sum_{i=0}^{n-1} f'[X(t_i^n)][X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)] + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\theta_i^n)[X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)]^2.$$

On pose $||\Pi|| = \max_i(t_{i+1}^n - t_i^n)$;
à la limite lorsque $||\Pi|| \longrightarrow 0$ on aura :

$\sum_{i=0}^{n-1} f'[X(t_i^n)][X(t^n i + 1) - X(t_i^n)]$ converge vers l'intgrale d'Itô: $\int_0^t f'[X(\upsilon)]dX(\upsilon)$;

car $f \in C^2$ donc $f'(t)$ est continue et comme $f' \in M_t^2$ i.e $\forall t \in \mathbb{R}^+$: $\mathbb{E}[\int_0^t |f'|^2 ds] < \infty$ donc d'après le théorème (1) chapitre (2) l'intégrale d'Itô existe.
Et la deuxième somme :

$\sum_{i=0}^{n-1} f''(\theta_i^n)[X(t^n i+1) - X(t_i^n)]^2$ converge (d'après le lemme qui suit) vers: $\int_0^t f''[X(\upsilon)]d\upsilon$.

Au final,on a le résultat:

$$f[X(t)] = f[X(0)] + \int_0^t f'[X(\upsilon)]dX(\upsilon) + \frac{1}{2}\int_0^t f''[X(\upsilon)]d\upsilon.$$

□

Lemme. 2. *Si g est une fonction continue et $\Pi = (t_i)_i$ une subdivision sur $[0,t]$, alors pour tout $\theta_i^n \in (X(t_i^n), X(t_{i+1}^n))$,*

$$P[\lim_{\Pi \to 0} g(\theta_i^n)(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2 = \int_0^t g(X(\upsilon)d\upsilon)] = 1.$$

Démonstration. Remarquons

$$|\sum_{i=0}^{n-1}(g(\theta_i^n) - g(X(t_i^n)))(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2| \leq \max_i |g(\theta_i^n) - g(X(t_i^n))|. \sum_{i=0}^{n-1}(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2.$$

Comme g et $X(t)$ sont p.s continues donc :

$$\max_i |g(\theta_i^n) - g(X(t_i^n))| \to 0 \text{ en probabilité ;}$$

et d'après la proposition (5) chapitre (1) :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2 \to t \text{ en probabilité .}$$

D'où :

$$|\sum_{i=0}^{n-1}(g(\theta_i^n) - g(X(t_i^n)))(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2| \longrightarrow 0 \text{ en probabilité .}$$

Maintenant , on montre

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(X(t_i^n))(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2 \to \int_0^t g(X(\upsilon)d\upsilon) \text{ en probabilité .} \quad (2.8)$$

Par la continuité des trajectoires du processus de Wiener et par la définition de l'intégrale de Riemann , on aura :

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(X(t_i^n))(t_{i+1}^n - t_i^n) \longrightarrow \int_0^t g(X(s))ds \text{ p.s .}$$

Après on montre que la différence entre les sommes converge en probabilité vers 0 ,

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(X(t_i^n))[(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)] \to 0 \text{ en probabilité .} \quad (2.9)$$

Aussi , pour D quelconque ,

$$|\sum_{i=0}^{n-1} g(X(t_i^n))\mathbb{I}_{\{|g(X(t_i^n))|>D\}}[(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)]|$$

$$\leq \max_{s\leq t} |g(X(s))\mathbb{I}_{\{|g(s)|>D\}}|.|\sum_{i=0}^{n-1}(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2 - t|$$

$$\longrightarrow 0 \text{ en probabilité lorsque } n \to \infty \text{ et } D \to \infty,$$

le premier terme converge vers 0 p.s lorsque $D \to \infty$ car g et $X(t)$ sont continues , et la somme dans le deuxième terme converge vers t en probabilité d'après la proposition (5) du chapitre (1).
Pour montrer (2.9) , on suppose que $\exists D : |g(x)| \leq D; \forall x$ i.e g est supposée bornée et on pose :

$$\triangle X_i = X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n), \triangle t_i = t_{i+1}^n - t_i^n \text{ et } g_i = g(X(t_i^n)).$$

Comme $(g_i((\triangle X_i)^2 - \triangle t_i))_i$ est une martingale adapté à la filtration $(\mathcal{F}_{t_i})$ avec

$$\mathbb{E}[(g_i((\triangle X_i)^2 - \triangle t_i))^2|\mathcal{F}_{t_i}] = g_i^2 Var[(\triangle X_i)^2] = 2g_i^2(\triangle t_i)^2 \leq 2D^2(\triangle t_i)^2.$$

Donc

$$\mathbb{E}[(g_i((\triangle X_i)^2 - \triangle t_i))^2] \leq 2D^2(\triangle t_i)^2.$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sum_{i=0}^{n-1}(g_i((\triangle X_i)^2 - \triangle t_i))^2] &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}[(g_i((\triangle X_i)^2 - \triangle t_i))^2] \\
&\leq 2D^2\sum_{i=0}^{n-1}(\triangle t_i))^2 \\
&\leq 2D^2 t||\Pi|| \to 0.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve (2.9). □

Exemple 1. *Calcul de* $de^{X(t)}$.
On pose : $f(x) = e^x$ *ce qui implique* $f'(x) = e^x$ *et* $f''(x) = e^x$
La formule d'Itô nous donne :

$$\begin{aligned}
de^{X(t)} = df(X(t)) &= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))dt \\
&= e^{X(t)}dX(t) + \frac{1}{2}e^{X(t)}dt
\end{aligned}$$

Si on pose $Y(t) = e^{X(t)}$ *alors la différentielle stochastique s'écrit sous la forme :*

$$dY(t) = Y(t)dX(t) + \frac{1}{2}Y(t)dt$$

Remarque 4. *L'extention de la formule d'Itô , sous la forme différentielle , pour une fonction* $F \in C^{1,2}$ *et supposons aussi que* $\frac{\partial F}{\partial x} \in M_T^2$ *pour tout* $T \geq 0$ *est :*

$$dF(t, X(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial X}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}dt;$$

avec $(dt)^2 = 0$ *et* $dtdX(t) = 0$.

Théorème 4. *Soient* $F(t, x) \in C^{1,2}$ *une fonction réelle , et* $\frac{\partial F(t,X(t))}{\partial x} \in M_T^2$ *pour tout* $T \geq 0$ *. Alors :*

$$\begin{aligned}
F(T, X(T)) - F(0, X(0)) &= \int_0^T (\frac{\partial F(t, X(t))}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(t, X(t))}{\partial x^2})dt + \\
&+ \int_0^T \frac{\partial F(t, X(t))}{\partial x}dX(t) \ p.s.
\end{aligned}$$

Sous la forme différentielle , la formule d'Itô s'écrit :

$$dF(t, X(t)) = (\frac{\partial F(t, X(t))}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(t, X(t))}{\partial x^2})dt + \frac{\partial F(t, X(t))}{\partial x}dX(t).$$

Chapter 3

Applications: quelques calculs classiques

Calcul de $\int_0^T X(t)dX(t)$

Soit $(X(t); t \geq 0)$ un processus de Wiener. On vérifie que

$$\int_0^T X(t)dX(t) = \frac{1}{2}X(T)^2 - \frac{1}{2}T$$

En effet;
Soit $T > 0$ fixé et

$$f(t) = \mathbb{I}_{[0,T)}X(t).$$

Nous avons $f \in M^2$ et par suite

$$\int_0^\infty f(t)dX(t) = \int_0^T X(t)dX(t).$$

Prenons $0 = t_0^n < t_1^n < ..... < t_n^n = T$ une subdivision $[0; T]$ en n parties égales avec $t_i^n = \frac{iT}{n}$,et soit

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i^n)\mathbb{I}_{[t_i^n; t_{i+1}^n)}.$$

Alors la suite des processus étagé $(f_n)_n$ est une suite approximante de f ,

comme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\int_0^\infty |f(t)-f_n(t)|^2 dt] &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \mathbb{E}[|X(t)-X(t_i^n)|^2]dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (t-t_i^n)dt \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(t-t_i^n)^2 dt \\
&= \frac{1}{2}\frac{T^2}{n} \to 0 \text{ p.s.}
\end{aligned}$$

Mais on sait que :

$$I(f_n(t)) = \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i^n)(X(t_{i+1}^n)-X(t_i^n)) \to \frac{1}{2}X(T)^2 - \frac{1}{2}T$$

En effet: Profitant de l'égalité $\forall a,b \in \mathbb{R} : a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2-a^2) - \frac{1}{2}(a-b)^2$, on aura:

$$\begin{aligned}
I(f_n) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(X(t_{i+1}^n)^2 - X(t_i^n)^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(X(t_{i+1}^n)-X(t_i^n))^2 \\
&= \frac{1}{2}X(T)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(X(t_{i+1}^n)-X(t_i^n))^2
\end{aligned}$$

En utilisant la proposition (5) du chapitre (1) on aura

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(X(t_{i+1}^n)-X(t_i^n))^2 = T$$

D'où:

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n)(t) = \frac{1}{2}X(T)^2 - \frac{1}{2}T.$$

Ce qui veut dire:

$$I(f) = \int_0^T X(t)dX(t) = \frac{1}{2}X(T)^2 - \frac{1}{2}T.$$

Calcul de $\int_0^T X(s)dX(s)$ avec la formule d'Itô . Soit la fonction réelle f telle que $f(x) = x^2$. On a $f \in C^2$ car $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 2x$ est continue , et $f''(x) = 2$ est continue . On a aussi $f \in M_T^2$. En effet ;
il suffit de vérifier que : $\mathbb{E}[\int_0^T |X_s|^2 ds] < \infty$.
Par définition de l'espérence on a : $\mathbb{E}[\int_0^T |X_s|^2 ds] = \int_\Omega dP \int_0^T |X_s|^2 ds$.
Et comme $|X_s|^2 \geq 0$, on peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli i.e

$$\mathbb{E}[\int_0^T |X_s|^2 ds] = \int_\Omega dP \int_0^T |X_s|^2 ds = \int_0^T ds \int_\Omega |X_s|^2 dP.$$

Or : $\mathbb{E}[|X_s|^2] = \int_\Omega |X_s|^2 dP < \infty$ car ;
$X_s^2 = (X_s - X_0)^2$, et par définition du processus de Wiener on a :
$X_s - X_0 \in N(0, s)$, $\forall s \geq 0$. D'où $\mathbb{E}[|X_s|^2] < \infty$.
Ce qui implique :

$$f \in M_T^2.$$

Donc on peut utiliser la formule d'Itô ;

$$f(X(s)) - f(X(0)) = \int_0^T f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^T f''(X(s))ds,$$

ce qui veut dire :

$$X^2(T) - X^2(0) = 2\int_0^T X(s)dX(s) + \int_0^T ds = 2\int_0^T X(s)dX(s) + T,$$

i.e

$$X^2(T) = 2\int_0^T X(s)dX(s) + T,$$

D'où le résultat qu'on a trouvé avant :

$$\int_0^T X(s)dX(s) = \frac{1}{2}X^2(T) - \frac{1}{2}T.$$

Calcul de $\int_0^T tdX(t)$

Soit $(X(t); t \geq 0)$ un processus de Wiener. On veut montrer que :

$$\int_0^T tdX(t) = TX(t) - \int_0^T X(t)dt.$$

En effet, soit $f(t) = t$; alors $\mathbb{I}_{[0,T]}f \in M_T^2$.
Prenons $0 = t_0^n < t_1^n < ..... < t_n^n = T$ une subdivision $[0;T]$ en n parties égales avec $t_i^n = \frac{iT}{n}$, et soit

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i^n)\mathbb{I}_{[t_i^n;t_{i+1}^n)}.$$

La suite

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} t_i^n \mathbb{I}_{[t_i^n,t_{i+1}^n]} \in M_{step}^2$$

approximante de $\mathbb{I}_{[0,T]}f$, comme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\int_0^\infty |\mathbb{I}_{[0,T]}f(t) - f_n(t)|^2 dt] &= \mathbb{E}[\int_0^T |f(t) - f_n(t)|^2 dt] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} |t - t_i^n|^2 dt \\
&= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{T^3}{n^3} \\
&= \frac{T^3}{3n^2} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

À l'aide de l'égalité $c(b-a) = (db-ca) - b(d-c)$, on peut écrire l'intégrale d'Itô $I(f_n)$ comme suit

$$\begin{aligned}
I(f_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} t_i^n (X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}^n X(t_{i+1}^n) - t_i^n X(t_i^n)) - \sum_{i=0}^{n-1} (X(t_{i+1}^n)(t_{i+1}^n - t_i^n) \\
&= TX(T) - \sum_{i=0}^{n-1} (X(t_{i+1}^n)(t_{i+1}^n - t_i^n).
\end{aligned}$$

Noius avons

$$I(f_n) = TX(T) - \int_0^T X(t)dt \in \mathbb{L}^2 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

En effet, en utilisant l'inégalité $|\sum_{i=0}^{n-1} a_i|^2 \leq n\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|^2$ et par l'inégalité de Caucy-Schwarz on aura

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\sum_{i=0}^{n-1}(X(t_{i+1}^n)(t_{i+1}^n - t_i^n) - \int_0^T X(t)dt|^2] &= \mathbb{E}[|\sum_{i=0}^{n-1}(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(X(t_{i+1}^n) - X(t))dt|^2) \\
&\leq n\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}(|\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(X(t_{i+1}^n) - X(t))dt|^2) \\
&\leq n\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}^n - t_i^n)\mathbb{E}[\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}|X(t_{i+1}^n) - X(t)|^2 dt] \\
&= n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(t_{i+1}^n - t_i^n)^3}{2} \\
&= n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{T^3}{2n^3} \\
&= \frac{T^3}{2n} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty
\end{aligned}$$

Et cela prouve l'égalité

$$\int_0^T tdX(t) = TX(T) - \int_0^T X(t)dt.$$

Remarque 5. *La quantité $\int_0^T X(t)dt$ est une intégrale au sens de Riemann.*

Proposition 1. *Soit $(X(t);t)$ un processus de Wiener alors $X(t)^2 \in M_T^2$ pour tout $T > 0$ et on a*

$$\int_0^T X(t)^2 dX(t) = \frac{1}{3}X(T)^3 - \int_0^T X(t)dt,$$

Démonstration. Soit $f(t) = t$; alors $\mathbb{I}_{[0,T]}f \in M_T^2$.
Prenons $0 = t_0^n < t_1^n < ..... < t_n^n = T$ une subdivision $[0;T]$ en n parties égales avec $t_i^n = \frac{iT}{n}$,et posons

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i^n)^2 \mathbb{I}_{[t_i^n;t_{i+1}^n)}.$$

On obtient une suite de processus étagés $(f_n)_n \in M^2_{step}$ approximante de $f = \mathbb{I}_{[0,T]}$. En effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt] &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \mathbb{E}[|X(t)^2 - X(t_i^n)^2] dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (3(t-t_i^n)^2 + 4(t-t_i^n)t_i^n) dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} [(\frac{T}{n})^3 + 2(\frac{T}{n})^2 \frac{iT}{n}] \\
&= \frac{T^3}{n} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

On a utilisé au dessus l'égalité $(a^2-b^2)^2 = (a-b)^4 + 4(a-b)^3 b + 4(a-b)^2 b^2$ dans le calcul; en effet $\forall 0 \leq s \leq t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t^2 - X_s^2)^2] &= \mathbb{E}[(X_t - X_s)^4] + 4\mathbb{E}[(X_t - X_s)^3 X_s] + 4\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2 X_s^2] \\
&= 3(t-s)^2 + 4(t-s)s.
\end{aligned}$$

À l'aide de l'égalité $a^2(b-a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - a(b-a)^2 - \frac{1}{3}(b-a)^3$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
I(f_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i^n)^2 (X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)) \\
&= \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (X(t_{i+1}^n)^3 - X(t_i^n)^3) - \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i^n)(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2 \\
&- \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^3 \\
&= \frac{1}{3} X(T)^3 - \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i^n)(t_{i+1}^n - t_i^n) - \\
&- \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i^n)[(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)] \\
&- \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^3
\end{aligned}$$

Or pour la limite,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} X(t_i^n)(t_{i+1}^n - t_i^n) = \int_0^T X(t)dt$$

En effet; si on pose $A = \mathbb{E}[|\sum_{i=0}^{n-1} X(t_i^n)(t_{i+1}^n - t_i^n) - \int_0^T X(t)dt|^2]$ on aura :

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{E}[|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(X(t_i^n) - X(t)|^2]dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\mathbb{E}[|X(t_i^n) - X(t)|^2]dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(t - t_i^n)dt \\ &= \frac{T^2}{2} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty \end{aligned}$$

Et pour la deuxième limite,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} X(t_i^n)[(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)] = 0$$

En effet; si on pose $B = \mathbb{E}[|\sum_{i=0}^{n-1} X(t_i^n)[(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)|^2]$ on aura :

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}[X(t_i^n)^2|((X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)|^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}[X(t_i^n)^2]\mathbb{E}[|((X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)|^2] \\ &= 2\sum_{i=0}^{n-1} t_i^n(t_i^{n+1} - t_i^n)^2 \\ &= \frac{(n-1)}{n^2}T^2 \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty. \end{aligned}$$

Enfin , pour la troisième limite,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^3 = 0$$

En effet; si on pose $C = \mathbb{E}[|\sum_{i=0}^{n-1}(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^3|^2$ on aura :

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))^6] \\ &= 6\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}^n - t_i^n)^3 \\ &= 6\sum_{i=0}^{n-1}\frac{T^3}{n^3} = \frac{6T^3}{n^2} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty \end{aligned}$$

Après ces vérification ci-dessus , il en résulte que :

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(f) = \int_0^T X(t)^2 dX(t) = \frac{1}{3}X(T)^3 - \int_0^T X(t)dt.$$

□

Calcul de $\int_0^T X^2(t)dX(t)$ avec la formule d'Itô . On considère la fonction réelle f telle que $f(x) = x^3$. On a $f \in C^2$ car $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2$ est continue , et $f''(x) = 6x$ est continue . On a aussi $f \in M_T^2$ (on peut le prouver en utilisant la définition de l'espérence et le théorème de Fubini-Tonneli) . Donc on peut utiliser la formule d'Itô ;

$$X^3(T) - X^3(0) = 3\int_0^T X^2(t)dX(t) + \frac{6}{2}\int_0^T X(t)dt,$$

D'ou le résultat :

$$\int_0^T X^2(t)dX(t) = \frac{1}{3}X^3(T) - \int_0^T X(t)dt.$$

Calcul de $\int_0^T X^m(s)dX(s)$ avec $m \geq 2$. En général on prend $f(x) = x^m$ pour $m \geq 2$, on aura :

$$X^m(T) = m\int_0^T X^{m-1}(s)dX(s) + \frac{m(m-1)}{2}\int_0^T X^{m-2}(s)ds.$$

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck Dans la modélisation du mouvement d'une particule dans un liquide par le mouvement Brownien, on s'est intéressé à la position de la particule à l'instant t. Si on s'interesse à la vitesse i.e. au moment cinétique nous débouchons sur un modèle plus adapté à la réalité.

Soit $V(t)$ la vitesse à l'instant t, d'une particule de masse m en suspension dans un liquide. Soit

$$\triangle V_t = V_{t+\triangle t} - V_t,$$

et $m\triangle V$ la variation du moment cinétique de la particule pendant le temps $\triangle t$. L'équation de base est l'equation de Langevin qui s'exprime par:

$$m\triangle V = -\beta V \triangle t + \triangle M \tag{3.1}$$

où $-\beta V$ est la force de résistance visqueuse, de sorte $-\beta V \triangle t$ est la perte momentanée en raison de forces visqueuses durant $\triangle t$. $\triangle M$ est le changement de moment en raison de bombardement moléculaire de la particule durant le temps $\triangle t$. C'est un moment de transfert.
Soit $M(t)$ le processus assoicié, avec les hypothèses suivantes: $M(0) = 0$
1) $M(t + \triangle t) - M(t)$ est indépendant de $\sigma(M_\tau; \tau \leq t)$.

2) La loi de $\triangle M$ dépend seulement de $\triangle t$.

3) Les trajectoires de $M(t)$ sont continues en t.

Les hypothèses 1),2) et 3) assurent que $M(t)$ est un mouvement Brownien. Nous supposons de plus qu'aucun champs de forces constantes existent et soient $M(t)$ sans drift i.e $\mathbb{E}[M(t)] = 0$ et $Var[M(t)] = \mathbb{E}[M^2(t)] = \sigma^2 t$; par conséquent

$$M(t) = \sigma X(t);$$

avec $X(t)$ un mouvement Brownien standard. De l'équation (3-1), nous avons alors

$$m\triangle V = -\beta V \triangle t + \sigma \triangle X \tag{3.2}$$

Faisant la division de l'équation sur $\triangle t$, soit $\triangle t \longrightarrow 0$ on aura l'équation de Langevin

$$m\frac{dV}{dt} = -\beta V + \sigma \frac{dX}{dt} \tag{3.3}$$

Remarquons que

$$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t}V(t)) = \gamma e^{\alpha t}\frac{dX(t)}{dt};$$

où $\alpha = \frac{\beta}{m}$, $\gamma = \frac{\sigma}{m}$ et supposons que $V(0) = 0$. On a alors:

$$e^{\alpha t}V(t) = \gamma \int_0^t e^{\alpha t} dX(\tau).$$

En intégrant par partie, on aura:

$$e^{\alpha t}V(t) = \gamma e^{\alpha t}X(t) - \gamma\alpha \int_0^t X(\tau)e^{\alpha\tau} d(\tau).$$

D'où:

$$V(t) = \gamma \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} dX(\tau).$$

Définition 1. *Soient $\alpha > 0$, σ (fixé) $\in \mathbb{R}$. Le processus $(Y(t); t \geq 0)$ à trajectoires p.s continues tel que $Y(0) = 0$ et pour $t > 0$,*

$$Y(t) = \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dX(s),$$

est appelé processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Proposition 2. *Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck satisfait l'équation différentielle :*

$$dY(t) = -\alpha Y(t)dt + \sigma dX(t).$$

Démonstration. On pose $F(t, x) = e^{-\alpha t}x$. On a , $F \in C^{1,2}$ car:

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -\alpha e^{-\alpha t}x \text{ est continue en } t.$$

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = e^{-\alpha t} \text{ continue et } \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x} = 0 \text{ continue .}$$

On a

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} \in M_T^2;$$

effictivement; si on pose : $\xi(t) = \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dX(s)$ on aura

$$d\xi(t) = \sigma e^{\alpha t} dX(t).$$

Donc la fonction

$$\sigma e^{\alpha t}\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} \text{ est bornée pour tout } (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R};$$

ce qui implique :

$$\sigma e^{\alpha t}\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\in M_T^2\ ;\ \forall T\geq 0.$$

Donc on peut utiliser la formule d'Itô ;

$$\begin{aligned} dY(t) &= d(e^{-\alpha t}\xi(t)) \\ &= -\alpha e^{-\alpha t}\xi(t)dt + e^{-\alpha t}\sigma e^{\alpha t}dX(t) \\ &= -\alpha Y(t)dt + \sigma dX(t), \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $Y(t)$ satisfait l'équation :

$$dY(t) = -\alpha Y(t)dt + \sigma dX(t).$$

□

Conclusion

Les outils de base du calcul stochastique étant rassemblés, de nombreux développements et perspéctives s'ouvrent: Etude des solutions d'équations différentielles stochastiques; Etude des processus d'Ornsteiun-Uhlenbeck: cas des solutions de l'equation de Langevin dont nous avons esquissé quelques propriétés. Cela constitue une direction de travail. Une autre direction de travail, trés actuelle, est constituée par les applications au calcul financier. Une autre direction de travail encore est constituée par l'approximation d'un processus de Galton-Watson par des diffusions où l'intégrale d'Itô joue un rôle essentiel (Cf. [8]).

Bibliography

[1] Sheldon M. Ross, *Stochastic Processes.*

2^{nd} Edition, John Wiley et Sons, Inc, 1996.

[2] I. Guikhman et A. Skorokhod, *Introduction à la théorie des processus aléatoires*

Editions Mir, Moscou, 1980.

[3] Leo Breiman, *Probability*

Addison-Wesley Pub. Co.,1968. (Addison-Wesley series in statistics)

[4] L.C.G Rogers and David Williams, *Diffusions, Markov processes and Martigales volume* 1 *et volume* 2

2^{nd} Edition, John Wiley et Sons, Inc, 2000

[5] Zdzislaw Brzezniák and Tomasz Zastawniak, *Basic stochastic processes*

4^{th} Edition, Springer-Verlag London, 2002

[6] Samuel Karlin and Howard M.Taylor, *A first cours in stochastic processes*

2^{nd} Edition, Acadimic press United States of America, 1975

[7] Ladjimi Fetima, *Contribution à l'étude du mouvement Brownien et l'intégrale stochastique*

[8] P.Haccou,P.Jagers and V.A.Vatutin, *Branching Processes*

1^{st} Edition, Cambridge university press, 2005