

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU
Faculté du Génie de la Construction
Département de Génie Civil

MEMOIRE DE MASTER ACADEMIQUE

EN GENIE CIVIL

Option : Structures



Présenté par : Hacherouf Mohamed Cherif

THEME :

Analyse statique et dynamique d'un câble de suspension d'une cabine téléphérique



Devant les membres du jury composé:

Kaci Salah
Sadaoui Arezki
Illouli Said

Professeur
Professeur
Maitre de Conférence A

U.M.M.Tizi-Ouzou
U.M.M.Tizi-Ouzou
U.M.M.Tizi-Ouzou

Président
Rapporteur
Examineur

Soutenu, le 10/07/2019

REMERCIEMENTS

A l'issue de cette présente étude, j'adresse mes remerciements à Dieu de m'avoir donné la chance et le courage d'aboutir au terme de ce travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à M. Sadaoui Arezki, professeur à l'UMMTO pour la confiance qu'il m'a accordé en acceptant de rapporter ce travail .Son soutien constant, sa disponibilité et ces précieux conseils, m'ont permis de mener à bien ce travail, qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier aussi les membres de jury, M.Kaci Salah et M.Illouli Said pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger ce travail.

Mes remerciements s'adressent aussi à M. Lattari Kamel pour sa disponibilité ses conseils et son orientation qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

Enfin, Je tiens à remercier ma famille et mes amis(es) pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents qui m'ont apporté leurs soutiens et leurs encouragements.

Puisse dieu tout puissant vous garder et vous procurer Santé et bonheur.

A mes très chères sœurs

A mes très chers frères

A mes très chers nièces et neveux

A mes très chères belles sœurs

A mes très chers amis(es)

A toute ma promotion M2 Structures 2018/2019 en particulier Mlle Khider ouerdia

A tous ceux qui m'ont aidé de loin ou de près à réaliser ce travail

Merci pour tous.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1 : Introduction

1-1 Etat de la question	1
1-2 Etat de la problématique et objectifs de ce travail.....	5
1-4 Cheminement du travail suivi	6

Chapitre 2 : Durabilité des câbles de suspension: Aperçu bibliographique

2-1 Généralités	8
2-2 Durabilité des câbles	8
2-2-1 Recommandations de la commission interministérielle de la précontrainte	8
2-2-2 Inventaire des facteurs de vieillissement des câbles.....	9
2-2-3 Effets des sollicitations mécaniques et environnementales.....	12
2-2-4 Effets conjugués des sollicitations mécaniques et environnementales.....	14
2-3 Choix des matériaux	16
2-3-1 Câbles et autres pièces en acier	16
2-3-2 Matières plastiques	17
2-3-3 Peinture de la partie courante des torons multi-couches	18
2-3-4 Besoin de remplaçabilité	19
2-4 Catégories des câbles de précontrainte	19
2-4-1 Catégorie MTP : câbles multi-torons parallèles	19
2-4-2 Catégorie MFP : câbles multi-fils parallèles	21
2-4-3 Catégorie TMC: câbles à torons multi-couches	22

Chapitre 3 : Partie statique : Fondements théoriques de base et analyses

3-1 Généralités	25
3-2 Comportement d'un câble parabolique sous l'action de son poids propre	26
3-2-1 Aperçu historique	26
3-2-2 Parabole inextensible-théorie du câble inextensible.....	27
3-2-3 Exemple d'application	31

3-2-4 Parabole élastique - théorie du câble extensible	35
3-2-5 Exemple d'application	39
3-3 Câble parabolique sous charges appliquées	41
3-3-1 Aperçu historique	41
3-3-2 Sous charge ponctuelle	41
3-3-3 Exemple d'application sous charge ponctuelle.....	45
3-3-4 Exemple d'application d'un caténaire de transport de matériel	46
3-3-5 Sous charge partiellement répartie.....	47
3-3-6 Exemple d'application d'évaluation de la poussée.....	50

Chapitre 4 : Partie dynamique: Développements théoriques de base et analyses en régime vibratoire libre

4-1 Généralités	52
4-2 Aperçu historique.....	52
4-3 Développements théoriques	55
4-3-1 Forme géométrique initiale.....	55
4-3-2 Equations générales de mouvements d'un élément de câble.....	55
4-3-3 Equation linéarisée de la poussée	57
4-3-4 Découplage du mouvement plan et transversal	57
4-4 Mouvement transversal horizontal.....	58
4-5 Mouvement transversal vertical	59
4-5-1 Modes antisymétriques plans.....	59
4-5-2 Modes symétriques plans.....	62
4-5-3 Application de calcul des modes de vibration.....	67

Chapitre 5 : Conclusions générales

5-1 Rétrospective.....	73
5-2 Organisation du travail.....	74
5-3 Résultats obtenus	75
5-4 Recommandations futures.....	76

Références77

Annexe

LISTE DES FIGURES

Figure 1-1 : Pont routier Pierre-Laporte, Québec city ; Longueur totale : 1041 m ; Portée principale: 668 m ; Hauteur totale: 116 m ; Année : 1966-1970

Figure 1-2: Pont type haubané comme celui de Sidi Merouane à Mila

Figure 1-3: Vue d'une télécabine surplombant le campus Hasnaoua

Figure 1-4 : Vue d'une télécabine entre Oued Koriche et Bouzaréah, Alger

Figure 1-5: Passerelle piétonnière suspendue rigidifiée par des câbles précontraints

Figure 1-6: Photo de ligne de transport d'énergie électrique dans ses positions extensible et inextensible.

Figure 1-7: Câbles à torons parallèles et enroulés.

Figure 2-1 : Fatigue et usure induite par petits débattements.

Figure 2-2 : Facies de rupture par fatigue.

Figure 2-3 : Rupture de gaine PEHD de type ESC.

Figure 2-4 : Détail d'un toron.

Figure 2-5 : Schéma de principe d'un câble MTP à gaine individuelle [10].

Figure 2-6 : Schéma de principe d'un câble MTP à gaine collective [10].

Figure 2-7 : Coupe transversale d'un câble MFP [10].

Figure 2-8 : Coupe transversale types des câbles TMC [10].

Figure 2-9 : Câble TMC [10,13].

Figure 3-1 : Comportement d'une parabole inextensible.

Figure 3-2 : Situation 1 du câble .

Figure 3-3 : Situation 2 du câble.

Figure 3-4 : Câble dans ses positions extensible et inextensible.

Figure 3-5 : Solution graphique d'une parabole élastique [15] dans ses positions extensible et inextensible.

Figure 3-6: Câble sous charge ponctuelle

Figure 3-7: Emplacement du premier élément du tablier du pont de Bosphore [22] extensible et inextensible.

Figure 3-8: Vue d'un câble parabolique surplombant un ravin

Figure 3-9: Câble parabolique sous charge partiellement répartie

Figure 3-10 : Travée partiellement et complètement chargée

Figure 4-1: Configuration du câble sous l'action d'un petit déplacement arbitraire

Figure 4-2: Première composante longitudinale du mode antisymétrique [22]

Figure 4-3: Seconde composante longitudinale du mode antisymétrique [22]

Figure 4-4: Illustration graphique de la première solution non nulle [22] de l'équation transcendante (4-19)

Figure 4-5: Formes possibles de la première composante verticale du mode symétrique plan [22]

Figure 4-6 : Illustration du mode vibration symétrique 1

Figure 4-7 : Illustration du mode vibration symétrique 2

Figure 4-8 : Illustration du mode vibration symétrique 1-tablier complètement chargé

Figure 4-9 : Illustration du mode vibration symétrique 2-tablier complètement chargé

NOTATIONS

A: Allongement relatif sous charge maximale

f_{rg} : Classe de résistance

T : Tension développée dans le câble.

W: Poids propre par unité de longueur du câble.

H : Composante horizontale de la tension T du câble.

S_c : Section transversale du câble.

E_c : Module d'élasticité du câble.

f: Flèche à mi-travée du câble.

Δf : variation de la flèche f.

f^* : Rapport entre la variation de la flèche Δf sur la flèche f.

h : Variation de la poussée dans le câble .

\tilde{h} : Constante représentant la variation de la poussée .

ΔH : Variation de la poussée engendrée dans le câble suite à son allongement.

H^* : Rapport entre la variation de la poussée ΔH et la poussée H.(câble extensible)

ΔH^* : Rapport entre la variation de la poussée ΔH et la poussée H(sous charges appliquées)

i : nombre imaginaire où $i^2 = -1$.

ℓ : Longueur horizontale de la travée du câble .

L : Longueur du câble .

L_e : Longueur virtuelle du câble .

p : Intensité de la charge répartie .

P : Intensité de la charge concentrée .

P^* : Intensité de la charge concentrée définie par un coefficient multiplicatif.

x_1 : Position de la charge concentrée .

x_2 et x_3 : Positions de la charge répartie.

$y(x)$: Equation géométriques initiales du câble.

λ : Paramètre caractérisant la géométrie et l'élasticité du câble.

T_i : Période de vibration du câble .

u : Déplacement horizontal d'un point quelconque du câble.

v : Déplacement vertical d'un point quelconque du câble (déflexion).

w: Déplacement transversale d'un point quelconque du câble.

v^* : Déflexion du câble définie par un coefficient multiplicatif .

W : Poids linéique du câble.

m : Masse par unité de longueur du câble.

ω : Fréquence naturelle circulaire de vibration.

f_i : Fréquence de vibration.

g : l'accélération due à la pesanteur ($=9.81 \text{ m/s}^2$).

τ : Tension supplémentaire engendrée par le mouvement.

β : Paramètre caractérisant les pulsations propres du câble.

e: Fonction exponentielle.

$\tilde{u}(x), \tilde{v}(x), \tilde{w}(x)$: Déformées modales correspondantes aux déplacements $u(x,t)$, $v(x,t)$ et $w(x,t)$ respectivement.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1-1 Etat de la question

L'utilisation des câbles dans le domaine de la construction est connue depuis fort longtemps et constitue tant sur le plan architectural que technique une évolution conceptuelle importante dans l'art de construire. Leurs avantages permettant à la fois d'augmenter la portée et de réduire le poids propre, répondent d'une manière radicale au problème longtemps posé dans la réalisation des grandes portées dont les exemples sont très nombreux dans le domaine des constructions civiles et industrielles [1,2,3,4]. Mentionnons particulièrement les ouvrages suivants :

- ponts suspendus (fig.1-1) ou haubanés (fig.1-2) indispensables pour franchir des vallées, des rivières ou des bras de mer d'une ampleur considérable.
- téléphériques fortement appréciés et notamment privilégiés ces derniers temps en Algérie comme mode de transport public aérien; c'est à l'image de celui actuellement en phase de réalisation dans la ville de Tizi-ouzou (fig.1-3) devant relier la gare modale de Bouhinoun au mont de Redjaouna passant par le stade du premier novembre et près de la cité administrative de la wilaya. Ce mode de transport est généralement utilisé pour gravir un relief pentu et très accidenté ou franchir une dépression géographique (vallée, voie d'eau, montagne dans les stations de ski ou encore en milieu urbain pour la desserte d'un terrain communal au relief difficile) dans le but de se soustraire à des contraintes topographiques (fig. 1-4).
- passerelles piétonnières (fig. 1-5) qui sont des ouvrages très flexibles dont l'implantation est très intéressante dans des sites d'attraction.
- lignes aériennes de transport de l'énergie électrique (fig.1-6).

Les câbles les plus employés dans ce type d'ouvrages sont généralement des câbles de type toronné i.e constitués des fils d'acier enroulés hélicoïdalement autour d'un fil central appelé âme, en plusieurs couches de pas inversés (fig.1-7). Ils ont une très haute limite d'élasticité atteignant plusieurs fois celle de l'acier traditionnel de charpente métallique. Les

torons dont sont ainsi formés les câbles peuvent contenir des centaines de fils et atteindre des limites de rupture de plusieurs centaines de tonnes. Leur module d'élasticité intrinsèque est plus petit que celui du matériau en acier à cause de l'enroulement des fils en hélice ou une valeur de 170000MPa n'est pas rare. On parle ainsi de câbles à torons parallèles lorsque les câbles sont constitués d'un ensemble de torons alignés. Quand ils sont constitués d'un ensemble de torons enroulés autour d'une âme centrale métallique ou textile, on parle alors de cordages. Les cordages possèdent un module d'élasticité intrinsèque encore plus faible, qui peut être inférieur à 140000 MPa.



Figure 1-1 : Pont routier Pierre-Laporte, Québec city ; Longueur totale : 1041 m ; Portée principale: 668 m ; Hauteur totale: 116 m ; Année : 1966-1970

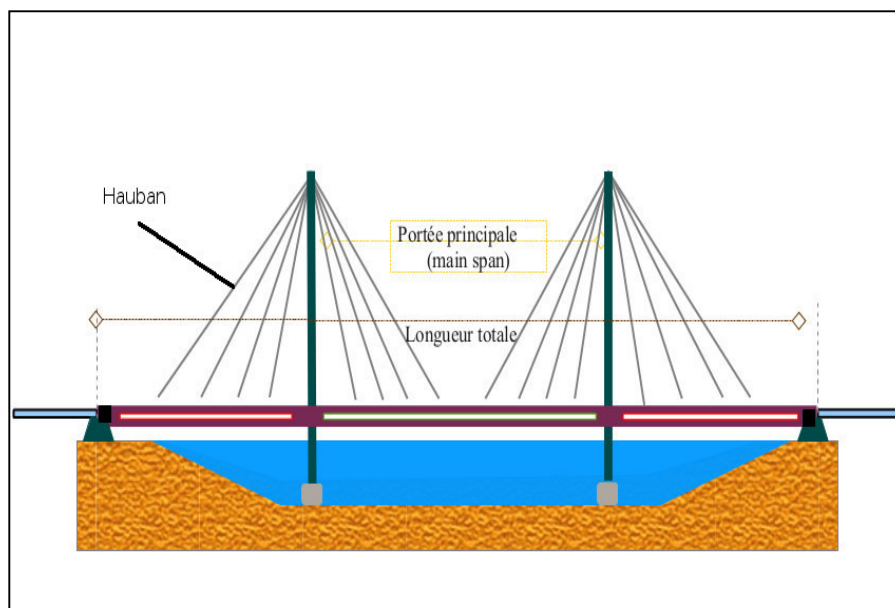


Figure 1-2: Pont type haubané comme celui de Sidi Merouane à Mila

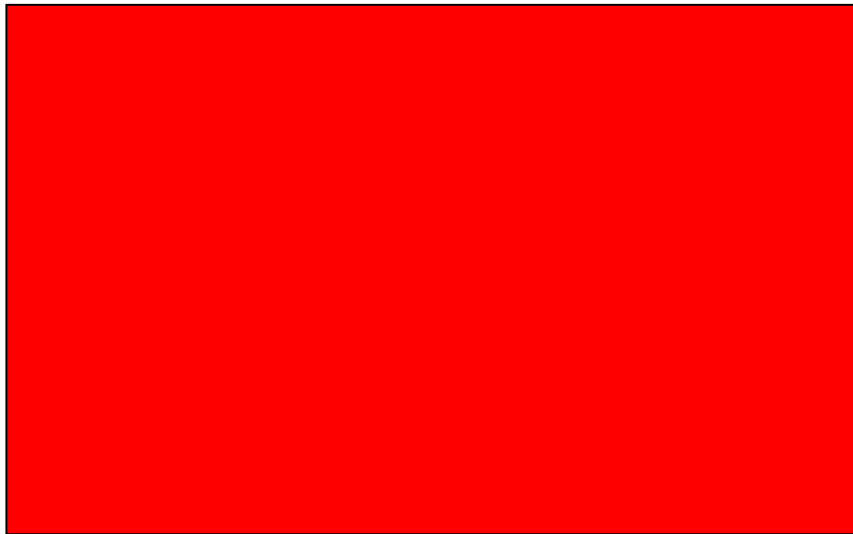


Figure 1-3: Vue d'une télécabine surplombant le campus Hasnaoua



Figure 1-4 : Vue d'une télécabine entre Oued Koriche et Bouzaréah, Alger



Figure 1-5: Passerelle piétonnière suspendue rigidifiée par des câbles précontraints



Figure 1-6: Photo de ligne de transport d'énergie électrique

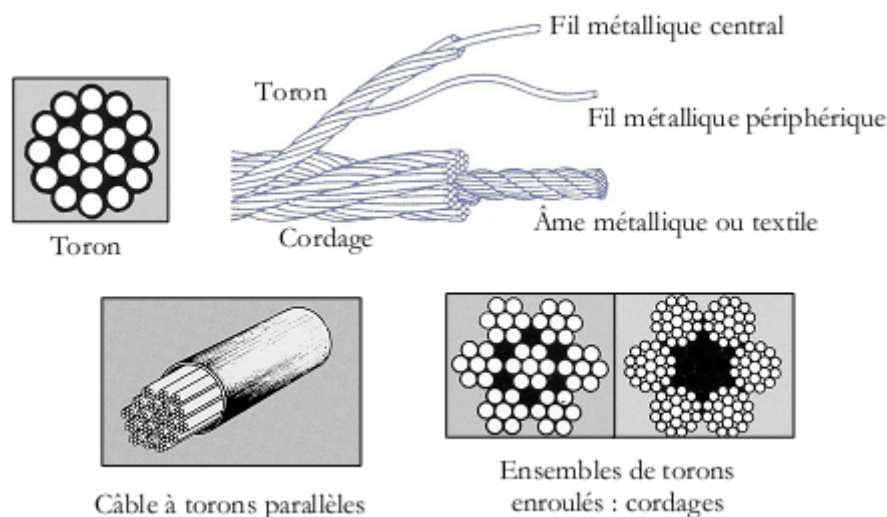


Figure 1-7: Câbles à torons parallèles et enroulés

1-2 Etat de la problématique et cadre de ce travail

La caractéristique essentielle des câbles suspendus est que ce sont des structures souples, dont l'analyse mécanique est fondamentalement non linéaire parce qu'ils sont susceptibles de subir des grands déplacements. Ils en subissent lors de la réalisation ou au cours de l'exécution de pose, quand on ajuste des flèches pour respecter des contraintes d'environnement. Par ailleurs, les systèmes à câbles qui sont réputés très légers employant comme principal élément le câble, l'équilibre des charges doit être réalisé uniquement par des efforts de traction pure, développés parallèlement à la fibre moyenne du câble. Cela signifie qu'aucune rigidité flexionnelle ou de compression n'est attribuée au système. De cette caractéristique découle la nécessité pratique de mise en tension préalable à toute utilisation, et dont l'effet joue un rôle extrêmement important dans la stabilité des structures correspondantes dont le poids propre demeure particulièrement faible. Cette pré-tension, également appelée précontrainte, représente la charge qu'il est nécessaire d'intégrer initialement à une résille pour qu'en aucun cas de surcharge, l'un quelconque des éléments du système ou de la résille ne risque d'être virtuellement comprimé i.e tendu.

On ne peut cependant faire abstraction de la vulnérabilité de ce type de structures aux problèmes de stabilité liés principalement aux phénomènes de flottement et de résonance qui, à défaut de n'avoir pas reçu à priori une grande attention, risquent d'affecter à terme

sérieusement la durabilité entière de la construction. En effet, à cause des effets dynamiques dus aux charges, les câbles peuvent être animés de mouvements de grandes amplitudes par exemple sous l'impulsion de la pression du vent, de la chute de manchons de givre ou, en cas d'incident dans les lignes de transport d'énergie électrique, des forces de Laplace résultant des courants de court-circuit. Ces mouvements exercent sur les supports des câbles des efforts beaucoup plus élevés que les efforts statiques qu'il faut en tenir compte dans la conception des ouvrages. L'étude du comportement dynamique des câbles devient par conséquent importante à laquelle, en outre, il faut considérer la non linéarité géométrique qui joue un rôle significatif dans un système léger et aussi déformable qu'est le système à câble [1,2,3].

Le but principal de ce travail consiste de mettre au point une méthode de calcul analytique complète, simple et précise, capable d'analyser le comportement des câbles suspendus à leurs extrémités, ayant une forme parabolique, soumis à l'action des charges aussi bien statique que dynamique. A ceci va se greffer un autre objectif complémentaire qui consiste de mettre en évidence, à travers une analyse paramétrique appropriée, l'effet de certains paramètres sur la stabilité du câble comme sa cambrure, la pré-tension de réglage, l'intensité et la disposition des charges verticales ainsi que ses pulsations propres.

1-3 Cheminement du travail suivi

Le travail présenté dans ce mémoire sera organisé en cinq chapitres dont le présent premier chapitre en guise d'introduction est consacré essentiellement à la nature de la problématique et de la question des structures suspendues légères ainsi qu'à la description des objectifs fixés.

Le chapitre deux expose les conditions de durabilité et des vibrations des câbles dans le but de mettre en relief la vulnérabilité des agressions environnementales et les vibrations résultantes qui peuvent par le phénomène de fatigue endommager à terme les câbles et par conséquent mettre en péril complètement la stabilité de l'ouvrage. Tout d'abord, nous analyserons les conséquences des facteurs de vieillissement des câbles et le choix des matériaux constitutifs de base qui permettent d'obtenir la durabilité requise. Nous rappellerons ensuite les paramètres aérodynamiques des câbles où seront présentés succinctement les différents phénomènes physiques susceptibles de donner lieu à des vibrations. Enfin, nous décrirons quelques actions permettant de combattre ces vibrations.

Le chapitre suivant se rapportera à la revue d'une manière approfondie et commentée des formulations théoriques décrivant le comportement d'un câble seul et isolé soumis à l'action de charges statiques c'est-à-dire supposées appliquées lentement pour pouvoir négliger toute accélération dynamique. Bien que l'étude soit principalement théorique, des exemples d'illustration seront apportés dans le but de comprendre les fondements mathématiques de base des méthodes de calcul qui sont parfois assez laborieuses à cause du problème des grands déplacements qu'il faut en tenir compte dans la formulation mathématique. Les câbles sont principalement supposés ancrés solidement à des massifs d'ancrage et dont la géométrie est de la forme d'une parabole de deuxième degré.

Le chapitre quatre sera consacré à la revue des fondements théoriques de base de calcul d'un câble de suspension sous l'action dynamique. Seule la théorie linéaire en régime vibratoire libre sera adoptée afin de dériver l'équation d'équilibre de mouvement vertical d'un élément différentiel et les équations des poussées résultantes engendrées dans les câbles en négligeant les effets de second ordre liés aux grands déplacements. Cependant, seul le mouvement transversal vertical sera considéré à cause de la vitesse des ondes de vibration longitudinales qui est généralement beaucoup moins importante que celle des ondes de vibration transversales. La résolution des équations qui en résultent conduit à une équation type transcendante donnant lieu à des modes propres antisymétriques et à des modes propres symétriques. Les fréquences propres de vibration et les déformées modales seront obtenues par analogie au cas d'un câble parabolique simple. Nous montrerons particulièrement comment évaluer les pulsations et les fréquences propres de vibration selon que le câble est en mode de vibration antisymétrique ou symétrique.

Nous terminerons en guise de dernier chapitre par une conclusion générale suivie par quelques recommandations pour l'amélioration et la poursuite de ce travail.

CHAPITRE 2

DURABILITE DES CABLES DE SUSPENSION : APERCU BIBLIOGRAPHIQUE

2-1 Généralités

Ce chapitre consiste de passer en revue les principaux facteurs qui influencent la durabilité et les vibrations des câbles qui sont des éléments constitutifs clés pour la stabilité des ouvrages suspendus dont un défaut quelconque peut conduire à des conséquences graves allant jusqu'à la ruine complète de l'ouvrage en question. Mentionnons que ce chapitre s'inspire profondément sur le document de travail établi par SETRA, en novembre 2001, intitulé : Haubans, recommandations de la commission interministérielle de la précontrainte [5] et sur les articles de M. Virlogeux et al. [6,7] qui détaillent les phénomènes aérodynamiques responsables des vibrations des câbles ou des haubans et de leur résistance à la fatigue afin de formuler des mesures correctives.

2-2 Durabilité des câbles

La notion de durabilité des ouvrages suspendus est complexe à définir avec précision car elle dépend en réalité de tous les éléments constitutifs de l'ouvrage où il convient d'y porter une attention particulière. C'est du fait que contrairement à la plupart des autres structures, il y a peu ou pas d'organes accessoires comme dans un pont suspendu par exemple. Chacun a un rôle à jouer, et un désordre ou une anomalie de fonctionnement, d'apparence mineure, peut à terme entraîner sinon la ruine, du moins des désordres graves dans la structure principale.

2-2-1 Recommandations de la commission interministérielle de la précontrainte

Selon les recommandations de la commission interministérielle française de la précontrainte sur les haubans, la durabilité dépend au moins des paramètres suivants :

- conception générale de l'ouvrage ;
- conditions de service ;
- dimensions de l'ouvrage ;
- environnement de l'ouvrage (naturel ou industriel, terrestre ou marin, etc.)

Cependant les câbles, qui sont les éléments clés et fondamentales dans la stabilité des structures suspendues, doivent offrir les meilleures garanties opérationnelles. L'analyse de leur durabilité doit être menée très sérieusement lors de la conception initiale de l'ouvrage. Les câbles restent néanmoins les éléments les plus vulnérables de la structure et, il subsiste une part d'aléa dans l'appréciation de leur durabilité. En outre, on ne peut exclure toute possibilité d'accident de la route qui les endommagerait. C'est pourquoi la conception des câbles doit permettre leur remplacement rapide et sans conséquences nuisibles à l'ouvrage ni service interrompu du trafic. Toutes les dispositions de protection doivent garantir des possibilités d'inspection, de réglage et de maintenance, afin d'atteindre la durée de vie souhaitée ou de déterminer la nécessité de son remplacement.

2-2-2 Inventaire des facteurs de vieillissement

2-2-2-1 Sollicitations mécaniques

Les sollicitations statiques et dynamiques qui concernent directement les câbles se résument par les points suivants :

- variations d'effort normal liées aux charges d'exploitation ;
- rotation du tablier au droit de l'ancrage des suspentes et des haubans : amplitude importante, de l'ordre de quelques milliradians en fonction de la raideur du tablier, et fréquence faible (fraction de hertz) directement liée à la fréquence du trafic de poids lourds ou de trains sur l'ouvrage. Ces rotations entraînent une flexion des câbles près de leur ancrage.

- Flexions des câbles liées au vent, à la pluie ou à l'action combinée des deux ;; vibrations de faible amplitude et de fréquence importante, avec un très grand nombre de cycles.
- Flexion statique liée aux erreurs de positionnement des suspentes et des câbles d'ancrage, dont l'origine est le défaut de perpendicularité de la suspente par rapport à sa face d'appui sur l'ouvrage.

2-2-2-2 Sollicitations purement environnementales

Les agressions environnementales sur l'ouvrage et sur les câbles doivent être caractérisées spécifiquement pour chaque projet, afin de mettre en place des solutions capables d'y résister. On peut notamment citer :

- la pluie ;
- le vent et le vent de sable ;
- le soleil (rayonnement ultra-violet, chaleur de rayonnement infrarouge)
- les variations thermiques, globales ou différentielles au sein des composants ;
- le froid et ses conséquences (givre, glace, etc. selon la situation géographique) ;
- les projections d'eau provenant de la chaussée, et en période hivernale les projections d'eau salée voire le brouillard salin jusqu'à 5 ou 6 m de hauteur ;
- l'atmosphère, par l'oxygène de l'air ou les atmosphères particulièrement agressives d'origine naturelle (bord de mer) ou industrielle de certains sites ;
- les agressions diverses : oiseaux, rongeurs, vandalisme, chocs divers provenant de chargements instables sur les véhicules, etc.
- les incendies de véhicules sur l'ouvrage.

2-2-2-3 Sollicitations provisoires de construction

Il s'agit à la fois :

- des sollicitations de manutention et de mise en place : blessure, déformation excessive, etc. contre lesquelles il faut protéger les câbles par des dispositifs adaptés et des outils bien étudiés ;

- des contraintes mécaniques résultant d'un état statique provisoire en phase de construction : surchargement liés à certaines phases d'exécution, etc.

Les vérifications réglementaires sont communément effectuées pour les éléments structurels en phase de construction, mais il convient également d'assurer l'intégrité des éléments de protection (revêtement métallique, gaine, etc.).

2-2-2-4 Incendie à proximité des câbles

Les incendies de véhicule sur la voie publique sont des phénomènes courants. De tels incendies ont périodiquement lieu sur ou sous des ouvrages d'art. L'action du feu est complexe à définir, et l'élévation de température provoquée par un incendie dépend en particulier du confinement et de l'apport de matières inflammables. Contrairement aux tunnels, les ponts sont bien ventilés donc relativement peu exposés à de fortes élévations de température en cas de feu. L'incendie d'un camion citerne transportant des hydrocarbures pourrait toutefois évoquer une élévation de température significative de l'ouvrage.

Sur un pont suspendu, on peut craindre l'incendie d'un camion près des câbles. Un tel incendie conduira à des conséquences graves et fatales car la stabilité de la structure sera dangereusement affectée en cas de la rupture d'un câble porteur. Certains ouvrages sont toutefois implantés dans des environnements particuliers, par exemple à proximité d'un dépôt de carburant ou d'une raffinerie de pétrole, où la circulation de camions citernes transportant des hydrocarbures est assez fréquente. Dans ce cas, il peut être justifié d'améliorer la résistance au feu des câbles, pour éviter de perdre des armatures en cas d'incendie. Il convient alors de:

- faciliter l'évacuation des matières inflammables sur le tablier par des bouches d'évacuation implantées avec une fréquence suffisante. Ces bouches comportent ou non une récupération des produits d'écoulement, en fonction de l'environnement ;
- limiter l'apport de matières inflammables, en préférant une protection individuelle des armatures à l'injection générale du câble par des produits pétroliers (certains de ces matériaux d'injection, comme les brai époxy sont plus dangereux que d'autres) ;

- retarder l'élévation de température au niveau des armatures, pendant un délai correspondant à l'extinction du feu, i.e une ou deux heures au plus. Il existe des matériaux d'isolation développés dans ce but comme les coulis de ciment remplissant les vides entre torons individuellement protégés et enveloppe externe du câble, ou couverture intumescence.

2-2-3 Effets des sollicitations mécaniques et environnementales

2-2-3-1 Sollicitations mécaniques

Si les sollicitations statiques sur les câbles sont bien appréhendées par l'analyse physique et numérique, les sollicitations dynamiques font plutôt l'objet d'une analyse statistique et/ou probabiliste appuyée sur des résultats d'essais. Les plus complexes sont des combinaisons d'efforts dynamiques de traction et de flexion et dont les effets peuvent être simulés par des essais de laboratoire.

Dans toutes les zones de contacts, les sollicitations dynamiques entraînent des phénomènes tribologiques [8] de type **fatigue induite par petits débattements (fIP)** et **usure induite par petits débattements (UIP)** ainsi montrés par les photos de la figure 2-5. Le mouvement relatif des pièces en contact (fig.2-6), même de très faible amplitude (quelques microns), entraîne une abrasion avec production de débris dont les conséquences sont multiples :

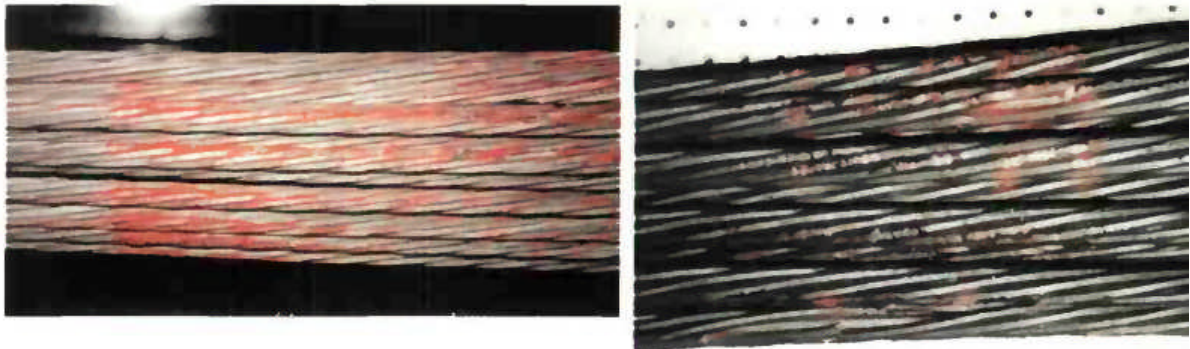
- accroissement des jeux et pénétration de débris dans les joints de grains ;
- oxydation des débris, coulures de rouille dans le cas de l'acier ;
- mise en pression des débris dans l'interface ;
- dislocation et amorce de fissures de fatigue.

L'analyse de ces phénomènes nécessite un examen détaillé des conditions de contact :

- amplitude et fréquence des mouvements ;
- effort normal de contact ;
- nature des matériaux au contact ;

- conditions de protection ou de lubrification.

Pour tous les assemblages autorisant de petits déplacements relatifs, liés par exemple aux variations de contrainte dans les câbles, il est nécessaire de traiter le contact : traitement de surface, incorporation d'un matériau d'interface ou d'un lubrifiant, etc.



a) FIP

b) FIP

Figure 2-5 : Fatigue et usure induite par petits débattements

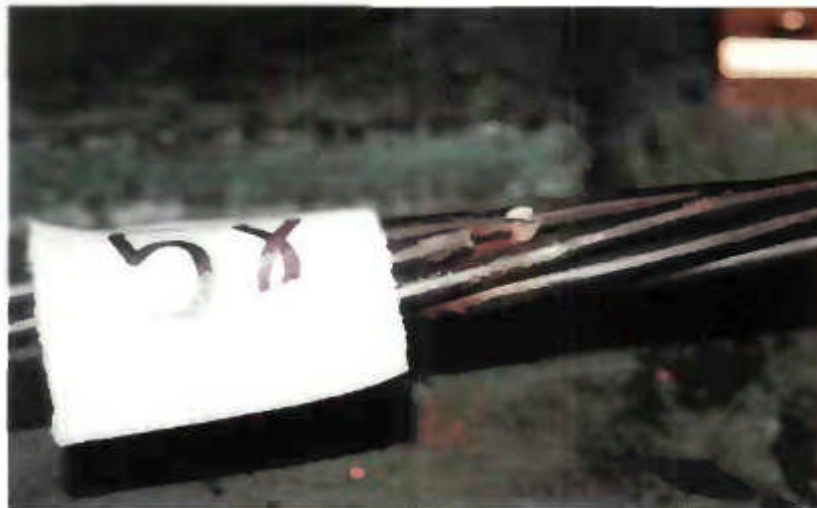


Figure 2-6 : Facies de rupture par fatigue

2-2-3-2 Sollicitations environnementales

Une analyse exhaustive dépasse largement le cadre de ce travail et l'on se borne aux quelques exemples suivants :

- **Eau** : L'oxydation est le principal problème des structures en acier. Les câbles, étant constitués d'un grand nombre de fils de faible diamètre, sont donc vulnérables à la corrosion. En outre, l'eau n'a pas les mêmes effets selon qu'elle est sous forme de pluie, de condensation ou d'éclaboussures :
 - La pluie combinée au vent engendre des phénomènes d'instabilité vibratoire
 - La corrosion de l'acier par l'eau est plus ou moins intense selon les éléments agressifs dissous dans l'eau (dérivés du soufre dans l'atmosphère, dérivés chlorés des sels de déverglaçage, etc.
 - Le temps d'exposition doit être pris en compte : l'accumulation d'eau stagnante dans une enceinte non drainée engendre une sollicitation permanente, critique pour les dispositifs d'étanchéité. Au contraire, l'eau de ruissellement renouvelle les éléments agressifs consommables (oxygène dissous) et peut s'avérer plus nocive. Il faut donc protéger de l'arrivée d'eau en confinant ou en drainant selon les cas.

- **Soleil** : l'action du soleil agit par son rayonnement :
 - Le rayonnement ultraviolet dégrade les chaînes de polymères et rend les matières plastiques fragiles, en catalysant des réactions de photolyse ou de photo-oxydation ;
 - Le rayonnement infrarouge (chaleur) chauffe les composants des câbles, protégés ou non, et engendre des sollicitations thermo-mécaniques.

- **Vent** : l'action du vent est source de sollicitations dynamiques sur les câbles. Il agit également sur les polymères, en accélérant l'évaporation des agents protecteurs contre le rayonnement ultraviolet. Enfin, l'action abrasive des vents de sable est parfois déterminante.

2-2-4 Effet conjugué des sollicitations mécaniques et environnementales

Bornons nous aux exemples suivants :

2-2-4-1 Usure et eau

Les phénomènes FIP et UIP produisent dans l'interface du contact un troisième corps constitué des débris de l'abrasion. Dans le cas de l'acier, il s'agit de l'oxyde de fer (rouille). Le ruissellement de l'interface produit des coulures, toujours désagréables sur le plan esthétique, mais cela n'est pas la conséquence la plus grave. Le lavage du troisième corps provoque sa régénération, accroît le jeu, facilite la circulation d'eau, entraîne sur le métal mise à nu une corrosion par solubilisation et donc une dégradation plus rapide.

C'est un des modes de ruine des câbles de ponts à torons multicouches, au niveau des contacts ponctuels entre couches de fils croisés, quand aucun produit de remplissage n'est prévu. Des problèmes similaires peuvent se produire au niveau des selles de ponts à haubans.

2-2-4-2 Contraintes résiduelles, et environnement

Sur les polyoléfines, le phénomène ESC (environmental stress cracking) est maintenant très connu [9]. Il peut se produire sur des câbles préfabriqués, protégés par des gaines polyéthylène mal formulées et enroulées sur des bobines de diamètre très faibles. Suivons cet exemple de pathologie observée sur des câbles gainés de polyéthylène à haute densité (PEHD) et injectés au coulis de ciment, après seulement une dizaine d'année de service.

- Lors de l'enroulement, le toronnage des câbles entraîne une certaine torsion, si bien que la gaine est soumise à un cumul torsion et flexion.
- Le dépassement de la limite élastique du PEHD (limite d'écoulement) entraîne sur la bobine des déformations permanentes irréversibles qui donneront à la gaine déroulée un tracé hélicoïdal.
- Le cumul de ces contraintes résiduelles et de celles de service (flexion du câble, dilatation gênée en cas d'injection au coulis de ciment) peut provoquer des fissures de surfaces qui se propagent par fatigue.
- L'eau peut alors pénétrer dans le câble et s'infiltrer jusqu'à l'acier par les inévitables fissures de retrait du coulis de ciment.
- La respiration des fissures étant une zone FIP-UIP, la corrosion de l'acier progresse jusqu'à la rupture du câble (fig.2-7).



Figure 2-7 : Rupture de gaine PEHD de type ESC

2-3 Choix des matériaux

Ce choix concerne non seulement les matériaux de base, en général définis par les sollicitations mécaniques, mais aussi les techniques de mise en œuvre, les traitements à cœur ou en surface et la formulation particulière permettant d'obtenir la durabilité requise. Les exemples ci-dessous fournissent quelques bases de jugement.

2-3-1 Câbles et autres pièces en acier

Le choix de l'acier des câbles et de leur mode d'élaboration est étroitement lié à la tenue en fatigue axiale sous 2 millions de cycles. Dans le cas de structures légères, les câbles sont soumis à une amplitude de contrainte importante et il convient, là aussi, d'être vigilant au

choix du type de câble. C'est pourquoi la catégorie B des normes des fils ou torons est systématiquement choisie.

La résistance à 2 millions de cycles de fatigue axiale n'est cependant pas une garantie suffisante de durabilité, en particulier pour les produits comportant des contacts inter fils non protégés vis-à-vis des phénomènes tribologiques. Le choix de l'acier du toron doit donc être associé à un traitement des contacts permettant de se prémunir des phénomènes FIP et UIP (traitement de surface et lubrification, combiné à une protection anticorrosion). Le choix de torons galvanisé est souvent recommandé car la galvanisation est le seul procédé industriel qui ait largement fait ses preuves en la matière.

Quant aux autres pièces comme les têtes d'ancrage, les organes de transfert et les dispositifs d'ancrage (mors ou manchon), le choix de l'acier doit être guidé par une analyse semblable à celle des câbles, tenant compte de leurs spécificités de forme et de fonction. La durabilité de ces organes dépend aussi :

- De leur mode d'élaboration (forge, fonderie, laminage) ;
- Des traitements qu'ils reçoivent (thermique, thermo-chimique, de surface) ;
- De la combinaison de matériaux différents, en évitant les incompatibilités.

Il convient enfin de détecter et d'exclure tout défaut (fissures, porosités, soufflures, tapures, etc.) par des exigences sur le processus de fabrication et des contrôles adéquats (radiographie, ultrasons, ressuage, IRM, etc.).

2-3-2 Matières plastiques

Des matières plastiques sont utilisées sur les câbles. Les plus courantes sont les polyoléfinés, et les gaines de PEHD en particulier. Il convient d'analyser avec soin, et de manière spécifique à chaque matériau, le vieillissement de ces matières plastiques.

2-3-2-1 Gains extérieures en PEHD

La principale cause de vieillissement des gaines en PEHD exposées au soleil est la photoxydation des chaînes de polymères, donnant lieu à la formation de carbonyles, puis à la perte des propriétés mécaniques du PEHD. Il convient donc de formuler le PEHD avec des

agents anti-oxydants et anti-ultraviolets pour obtenir des gaines de durabilité suffisante. Le noir de carbone permet par exemple d'absorber les ultraviolets, à condition que sa dispersion soit homogène. Il est remplacé par d'autres agents chimiques dans les gaines de couleur. L'efficacité de ces agents doit être analysée par des essais de vieillissement accéléré qui sont basés sur l'étude de l'endommagement physico-chimique du matériau en prenant compte l'agressivité de l'environnement où sera placé la gaine (intensité du rayonnement ultraviolet en fonction de la situation géographique de l'ouvrage) et les facteurs accélérateurs (température, vent, etc.).

2-3-2-2 Torons gainés

Une analyse particulière est nécessaire pour les gaines de torons individuellement gainés, où le PEHD est directement en contact de l'acier. Le rôle de l'interface acier-PEHD est primordial : l'action différentielle de la chaleur sur l'acier et le PEHD, par suite de la différence des coefficients de dilatation thermique, doit être prise en compte dans la conception du système de câblage. Un matériau d'interface est indispensable, qui sert généralement aussi à colmater les vides interfils du toron.

2-3-3 Peinture de la partie courante des torons multi-couches

Le vieillissement des systèmes de protection par peinture affecte à la fois :

- l'aspect et la tenue de la couleur, justifiant des exigences sur le pigment ;
- la protection anti-corrosion et la tenue mécanique, justifiant le choix de la résine.

Comme pour toutes les structures métalliques, la qualité de la préparation de surface est capitale pour la durabilité de la peinture. Le recours au grenailage est admis seulement lorsque des dispositions garantissent l'absence de grains dans le câble en fin d'opération. Il convient d'apporter aussi un grand soin à la protection des assemblages mécaniques mobiles ou semi-mobiles. En effet, la présence de grains dans le câble ou les assemblages pourrait compromettre sérieusement leur tenue en fatigue. Sur la peinture, comme pour les matières plastiques, la combinaison des contraintes mécaniques et d'agressions environnementales entraîne une accélération du vieillissement. Cela doit être pris en compte dans le mode

opératoire d'application initiale de la peinture, avant ou après la mise en tension des câbles, ainsi que lors de l'opération de renouvellement de la peinture.

2-3-4 Besoin de remplaçabilité

L'analyse de la durabilité doit être menée très sérieusement lors de la conception initiale de l'ouvrage. Comme il subsiste malgré tout une part d'aléas dans l'appréciation du vieillissement futur, il est indispensable de prévoir des câbles remplaçables et facilement visitables. La remplaçabilité est conditionnée par le mode d'accrochage du câble sur la structure. En particulier, les assemblages des organes de protection dans la zone d'ancrage doivent être réversibles plutôt que permanents (filetage au lieu de la soudure).

La visitabilité des câbles, par des méthodes directes ou indirectes, visuelles, dynamiques ou acoustiques impose les dispositions technologiques suivantes :

- possibilités d'ouvertures d'accès à l'examen visuel ou au prélèvement d'éléments en vue d'un contrôle de vieillissement ;
- protections supportant les démontages répétés ;
- mise en place de systèmes de mesure interrogeables à distance en permanence.

2-4 Catégories des câbles de précontrainte

Les câbles de précontrainte utilisés dans les ouvrages suspendus sont constitués de diverses armatures en acier. Comme déjà mentionné précédemment, on peut en distinguer trois catégories en fonction des armatures élémentaires utilisées (fils ou torons) ainsi récapitulées dans le tableau ci-dessous [10,11,12,13]:

Abréviation	Désignation	Armatures en acier revêtu
MTP	Multi-torons parallèles	Torons de précontrainte T15,2 ou T15,7 gainés individuellement ou collectivement
MFP	Multi-fils parallèles	Fils ronds boutonnés gainés collectivement
TMC	Torons multi-couches	Fils ronds et/ou fils profilés

2-4-1 Catégorie MTP : câbles multi-torons parallèles

Les câbles multi-torons sont constitués de torons parallèles, ancrés individuellement (fig.2-12) dont les torons sont protégés par un dépôt métallique et une gaine injectée individuelle (fig.2-13) ou collective (fig.2-14). Les armatures des câbles MTP possèdent les caractéristiques suivantes :

- diamètre nominal : 15.2 mm (toron T15.2) ou 15.7 mm (toron T15.7) ;
- section résistante nominale : 140 mm² ou 150 mm² respectivement ;
- masse linéique nominale du toron nu : 1.086 kg/m ou 1.172 kg/m respectivement ;
- revêtement de protection d'un dépôt métallique de zinc ou d'un alliage zinc et aluminium normalisé compris entre 190 et 350 g/m² (épaisseur moyenne de 26 à 40 µm environ) ;
- classe de résistance f_{rg} 1770 ou 1860 MPa ;
- allongement relatif sous charge maximale A_{gt} supérieur ou égal à 3.5% ;
- module d'élasticité du faisceau de torons parallèles de l'ordre de 190 GPa ;
- très basse relaxation (TBR) : inférieure ou égale à 2.5 % à 1000 h sous 0.7 F_m (20°C) ;
- tenue en fatigue : 2 millions de cycles avec une contrainte maximale de 0.45 f_{rg} et une variation de contrainte de 300 MPa ;
- Coefficient de traction déviée inférieur ou égale à 26%.

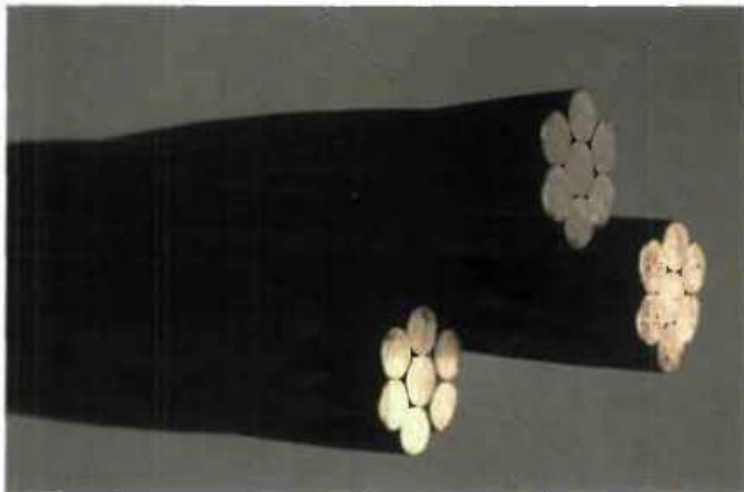


Figure 2-12 : Détail d'un toron

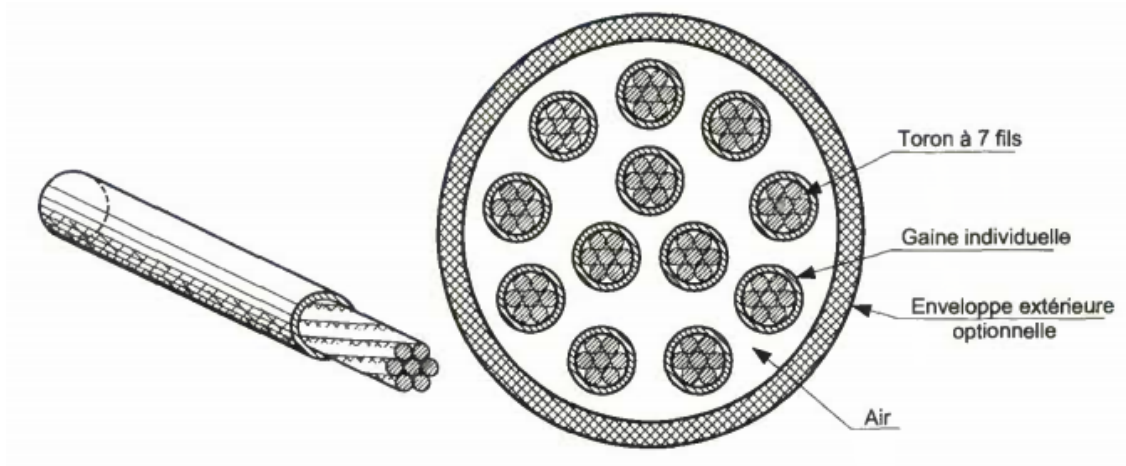


Figure 2-13 : Schéma de principe d'un câble MTP à gaine individuelle [10]

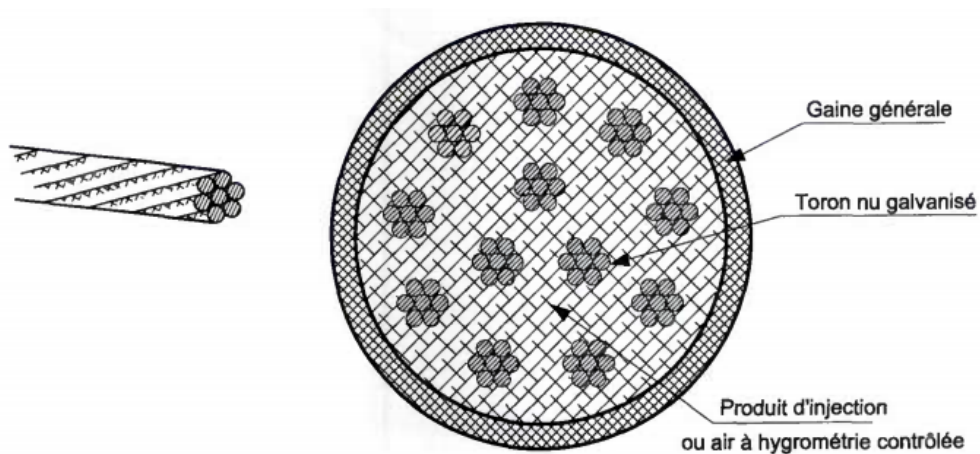


Figure 2-14 : Schéma de principe d'un câble MTP à gaine collective [10]

2-4-2 Catégorie MFP : câbles multi-fils parallèles

Les armatures des câbles MFP sont des fils lisses revêtus (fig. 2-15) et ayant les caractéristiques suivantes :

- diamètre nominal : 7 mm ;
- section résistante nominale : 38.5 mm²;

- masse linéique nominale d'un fil de 7 mm : 0.301kg/ml;
- revêtement de protection d'un dépôt métallique de zinc ou d'un alliage zinc et aluminium normalisé compris entre 190 et 350 g/m² (épaisseur moyenne de 26 à 50 μm environ) ;
- classe de résistance f_{rg} 1670 ou 1770 MPa ;
- allongement relatif sous charge maximale A_{gt} supérieur ou égal à 3.5% ;
- module d'élasticité du faisceau de fil de 7 mm de l'ordre de 200 GPa ;
- très basse relaxation (TBR) : inférieure ou égale à 2.5 % à 1000 h sous 0.7 F_m (20°C) ;
- tenue en fatigue : 2 millions de cycles avec une contrainte maximale de 0.45 f_{rg} et une variation de contrainte de 300 MPa.

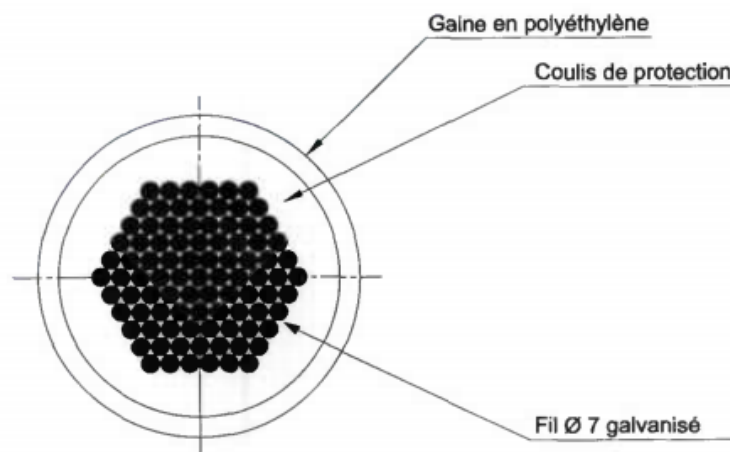


Figure 2-15 : Coupe transversale d'un câble MFP [10]

2-4-3 Catégorie TMC: câbles à torons multi-couches

Les câbles à torons multi-couches sont constitués d'un ou plusieurs câbles monotorons dont le schéma de principe est illustré sur la figure 2-16. Un câble monotoron multi-couches est formé de fils élémentaires enroulés en hélice autour d'un fil d'âme, en plusieurs couches successives. Ces couches sont généralement à pas inversés, ce qui engendre des contacts interfilaires ponctuels, ou au contraire enroulées avec le même pas et des fils de diamètre choisis pour obtenir des contacts interfilaires linéiques.

Le diamètre extérieur d'un TMC dépend du nombre de couches et des diamètres des fils élémentaires; ils varient sur demande de 20 à 150 mm et la composition de chaque type de câble est définie de façon spécifique pour chaque projet. Les fils élémentaires peuvent être ronds ou profilés. Les fils profilés sont utilisés sur certains câbles pour réaliser les couches extérieures (2 à 4 couches de fils profilés emboîtés) ; les couches intérieures étant réalisées avec des fils ronds : ce type de câble est appelé câble clos.

Les fils extérieurs profilés ont été développés par la construction mécanique pour améliorer l'étanchéité des câbles, mais aussi pour répondre à la nécessité mécanique d'une surface extérieure cylindrique, apte à passer sur des poulies. A l'origine, ils étaient surtout destinés aux câbles de téléphériques et remontés mécaniques, puis leur usage a été étendu aux structures de génie civil et off-shore.

Les fils élémentaires ronds et profilés des câbles TMC sont des fils revêtus destinés avant tout aux câbles porteurs fixes pour les structures de bâtiment et de génie civil (fig. 2-17), et présentent les caractéristiques suivantes:

- diamètre nominal des fils ronds ou hauteur nominale des fils profilés compris entre 2 et 8 mm ;
- revêtement de protection d'un dépôt métallique de zinc ou d'un alliage zinc-aluminium, de classe A au minimum ;
- classe de résistance f_{rg} des fils 1570, 1670 MPa ou 1860 MPa;
- allongement relatif total après rupture supérieur à 4% ou bien allongement relatif sous charge maximale A_{gt} supérieur à 3.5%;

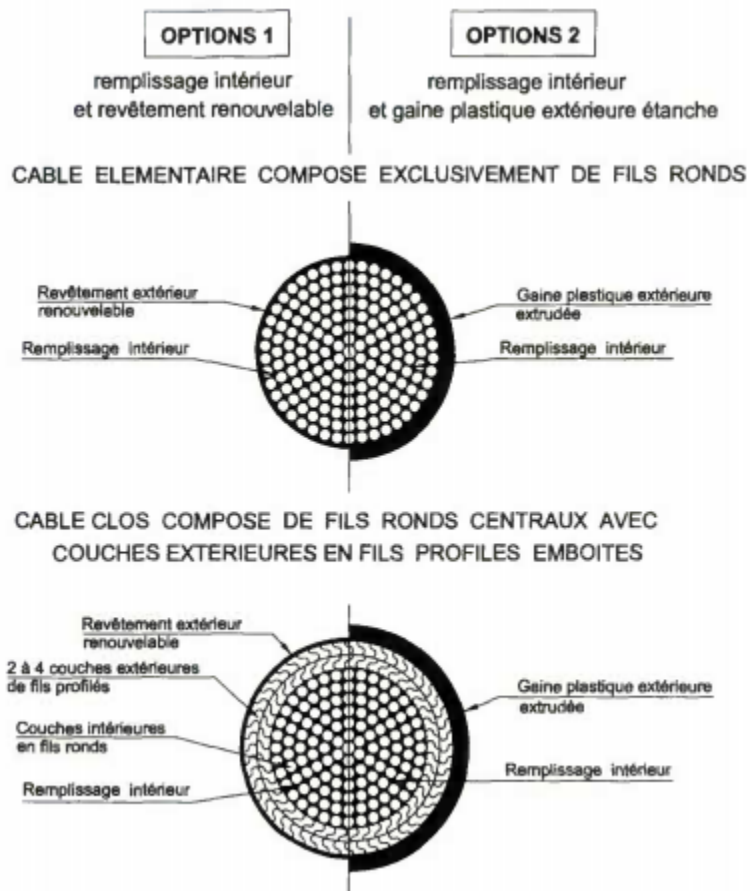


Figure 2-16 : Coupe transversale types des câbles TMC [10]



Figure 2-17 : Câble TMC [10,13]

CHAPITRE 3

PARTIE STATIQUE : FONDEMENTS THEORIQUES DE BASE ET ANALYSES

3-1 Généralités

Dans ce chapitre, nous allons analyser d'une manière approfondie et commentée, le comportement statique d'un câble suspendu, accroché librement à ses extrémités et dont la géométrie est fondamentalement, par hypothèse, une parabole de deuxième degré. Bien que l'étude soit principalement théorique, des exemples d'illustration seront apportés dans le but de comprendre les fondements théoriques des méthodes de calcul qui sont parfois assez laborieuses. Trois cas de charges les plus rencontrés en pratique seront considérés à savoir le poids propre du câble, une charge ponctuelle quelconque et une surcharge partiellement répartie par mètre horizontal du câble. Une équation de troisième degré obtenue dans chaque cas de charge, à caractère essentiellement non linéaire, servant au calcul de la poussée ou de la tractée dans le câble est dérivée en exploitant fondamentalement l'équation dite des déplacements orthogonaux et la condition d'immobilité des extrémités du câble qui sont supposées solidaires à des massifs d'ancrage.

Les hypothèses simplificatrices communément admises sont telles que le câble employé comme élément porteur principal possède une section transversale uniforme et fait d'un matériau hookien dont la densité est constante en n'importe quel point du câble. Les expansions et les contractions ainsi que les effets de Poisson qui se développent dans la section transversale sont supposés négligeables. On ignore également la rigidité flexionnelle du câble c'est-à-dire, en d'autre terme, d'admettre un comportement parfaitement flexible du câble ; ce qui revient en langage structural à énoncer que, tout au long d'un câble, que le moment fléchissant est nul. Il s'ensuit que la résultante des efforts développés dans chaque point du câble est tangentielle au profil du câble et agit au centre de gravité de la section transversale au point considéré. En outre, pour des raisons de simplicité, chaque extrémité du câble est supposée ancrée dans des supports rigides et qui, dans la plupart du temps sauf

indication contraire, sont tous supposés situés au même niveau i.e sans dénivellation d'appuis.

Par ailleurs, la géométrie d'un câble dont sa forme est assimilée initialement à une forme parabolique, plutôt que sa forme exacte dite chaînette ou caténaire, impose que le rapport flèche/travée soit relativement petit. Dans les développements théoriques qui vont suivre, le rapport flèche/travée doit être de l'ordre de $1/8$ ou moins correspondant à des câbles relativement tendus (ou peu profonds). C'est de sorte que les chaînettes soient fortement aplaties pour pouvoir les assimiler, dans l'état initial, réellement à des paraboles. A priori, un câble qui ne satisfait pas cette exigence, ne va décrire exactement une forme parabolique. En pratique, de tels câbles sont rarement conçus pour reprendre des charges transversales.

3-2 Comportement d'un câble parabolique sous l'action de son poids propre

3-2-1 Aperçu historique

La littérature révèle que c'est Galilée [14], pour la première fois au début du 17^{ème} siècle, qui a examiné la forme de la courbe que prend un câble suspendu, uniforme, inextensible et accroché librement à ses extrémités soumis à l'action de son poids propre. Apparemment, il n'a pas pu aller plus loin que de constater une similarité entre la courbe obtenue et une parabole. Cette courbe est évidemment, bien connue aujourd'hui, sous le nom de chaînette ou caténaire. La solution du problème a été publiée, en 1691, par un éminent groupe de géomètres composée de James Bernoulli, de son frère John, Leibnitz et Huygens [14]. Plusieurs autres problèmes caténaux ont été ensuite poursuivis par James Bernoulli, y compris sa première tentative de tenir compte des effets de l'extensibilité du câble. Par la suite, les investigations dans ce domaine ont été effectuées par d'autres chercheurs. La plus intéressante d'entre-elles est, peut-être, la chaînette sous résistance uniforme, dans laquelle la section transversale du câble se modifie pour permettre à la contrainte de rester invariable le long de son profil. La solution est obtenue par Gilbert [14], en 1826, en relation avec la conception par l'ingénieur Telford du pont suspendu du détroit de Menai, dans les pays de Galle, au royaume uni.

En dépit des premières réflexions de Galilée, il est surprenant qu'il ait fallu bien plus de 100 ans plutard après la découverte de la chaînette que fut découverte la solution simple

parabolique du profil du câble. En 1794, encore une fois lors de la conception d'un pont suspendu réalisé à Leningrad, Fuss [14] a démontré que, si le poids propre du câble est supposé réparti par mètre horizontal de la travée plutôt que le long de son profil, le câble prend bien une forme parabolique du second degré. Depuis, la parabole reçoit une grande attention non seulement à cause de la simplicité des calculs qu'elle procure, mais aussi à cause de nombreuses situations pratiques comme dans le cas des ponts suspendus du fait qu'une bonne partie des surcharges appliquées agissent uniformément répartie le long de la travée. Cependant, dans tous les travaux antérieurs au milieu du 19ème siècle, à l'exception de ceux de Bernoulli mentionnés ci-dessous, aucune allusion n'est faite à l'extensibilité que ces câbles en possèdent. Par conséquent, le concept d'un câble élastique a reçu peu d'attention jusqu'à 1858, quand Rankine publia une solution approchée de l'augmentation de la flèche lorsqu'un câble parabolique, inextensible et suspendu à ses extrémités permet de subir des déformations. Suivi ensuite, en 1891, par Routh [15] pour des solutions de caténaire élastique plus difficiles.

3-2-2 Parabole inextensible-théorie classique du câble pesant inextensible

C'est l'étude du cas limite classique d'un câble dépourvu d'élasticité (câble inextensible) qui permet d'isoler dans le comportement réel d'un câble les effets de grands déplacements c'est-à-dire les effets de la modification de la géométrie du profil. Dans cette section, on va s'intéresser donc à un câble complètement inextensible de poids linéique w dont on fait varier la tension T suivant la corde du câble.

Considérons un câble de forme parabolique, uniforme et inextensible, suspendu librement à ses extrémités et soumis à l'action de son poids propre dont la géométrie est représentée sur la figure 3-1a. A cause du rapport $f/\ell=1/8$ ou moins, la charge peut être supposée uniformément répartie par mètre horizontal de la travée.

L'équation d'équilibre vertical selon y ($\sum F_y = 0$) d'un élément du câble (fig.3-1b) permet:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = -w \quad (3-1)$$

où T est la tension développée dans le câble, w est son poids propre par unité de longueur du câble et dy/ds est le sinus de l'angle d'inclinaison que fait l'élément du câble avec l'axe des x ; d étant une différentielle.

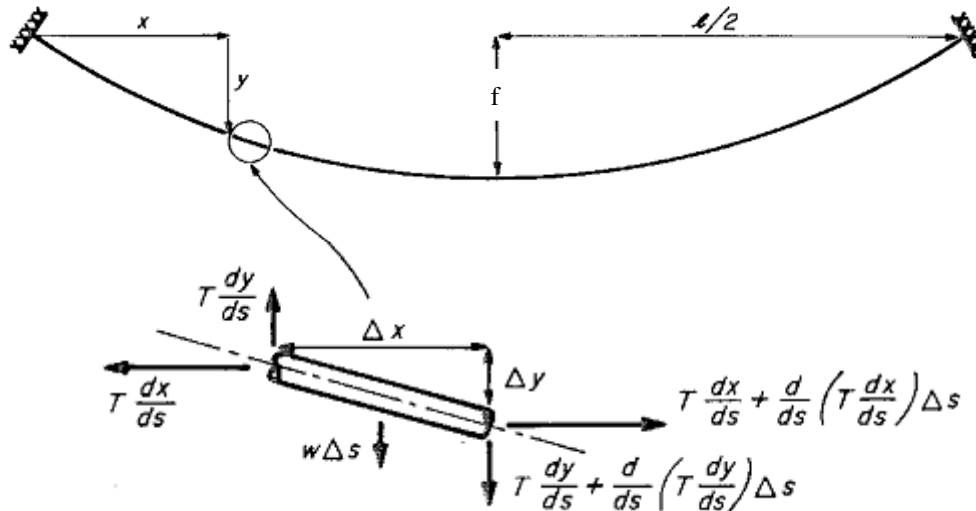


Figure 3-1 : Comportement d'une parabole inextensible

L'équilibre des forces selon x ($\sum F_x = 0$) permet aussi d'écrire puisque il n'y a aucune charge horizontale appliquée:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0$$

On déduit directement après intégration de cette dernière relation:

$$T \frac{dx}{ds} = \text{Cste} (=H) \tag{3-2}$$

où H représente la composante horizontale de la tension T du câble qui est constante partout en n'importe quel point et dy/ds est le cosinus de l'angle d'inclinaison de l'élément du câble;

Par conséquent, en tenant compte de la relation (3-2) et de la règle de transformation d'une

fonction différentielle soit $dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx$ et $d^2y = \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} d^2x$, l'équation 3-1 permet d'écrire :

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -w \frac{ds}{dx} \quad (3-3a)$$

Tenant compte du fait que $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$, il est possible d'écrire

finalement :

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -w \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3-3b)$$

Notons que lorsque w est constante, la solution de l'équation (3-3b) est bien connue sous le nom de chaînette ou caténaire. En effet, la modélisation la plus fine d'un câble pesant tendu entre ses deux ancrages ayant un poids linéique uniforme est ainsi naturellement assimilable à une chaînette ou caténaire. Cependant, d'un point de vue strictement théorique, le poids linéique w d'un câble en place n'est pas tout à fait uniforme, puisque sa tension varie avec l'altitude et que le câble présente donc une certaine variation de section, due à une variation d'allongement. Toutefois, cet effet est tout à fait négligeable, et l'on peut utiliser avec confiance les formules analytiques classiques données ci-après pour évaluer de façon rigoureuse les caractéristiques du profil comme la flèche maximale, inclinaison des tangentes aux extrémités, longueur développée, etc. La modélisation en chaînette permet surtout d'apprécier l'effet de grands déplacements sur la rigidité axiale effective d'un câble.

Lorsqu'on suppose de plus dans la formule (3-3b) que $w ds/dx$ est constante, le profil du câble prend une forme d'une parabole qui constitue le résultat fondamental trouvée par Fuss. Cependant, pour un câble aplati (f/l très petit) dont le poids propre est par unité de longueur, la pente du profil du câble est petite et, par suite $ds \approx dx$. L'équilibre d'un tel élément de câble est exactement donné par la relation :

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -w \quad (3-4)$$

Pour un système de coordonnées montré sur la figure 3-1 et en moyennant les conditions aux limites soit $x=0$, $y=0$ et $x=\ell$, la solution de cette équation différentielle est une parabole dont la déflexion peut se mettre sous la forme :

$$y = \frac{w\ell^2}{2H} \left\{ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (3-5)$$

La valeur de la déflexion à $x = \ell/2$ représente la flèche f , et ainsi la composante horizontale de la tension du câble s'écrit :

$$H = \frac{w\ell^2}{8f} \quad (3-6)$$

Ainsi, la tension au n'importe point du câble est donnée par la relation :

$$T = H \frac{ds}{dx} = H \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3-7)$$

qui est au fait peu différente de sa composante horizontale H . Par ailleurs, à l'aide des équations (3-5) et (3-6), on convient souvent d'écrire l'équation de la déflexion sous la forme :

$$y = \frac{4f}{\ell^2} x(\ell - x) \quad (3-8)$$

Cependant, la solution n'est pas complète. Par exemple, si seulement w et ℓ sont connues, H ne peut pas être déterminée sauf si f est connue. Dans de telles situations, la longueur L du câble doit être préalablement connue, et alors la flèche peut-être trouvée. La longueur du câble peut-être évaluée.

Soit avec : $L = \int_0^{\ell} ds$; $ds = dx \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{4f}{\ell^2} (\ell - 2x)$, il s'ensuit :

$$L = \int_0^{\ell} \left[1 + \left\{ \frac{4f}{\ell^2} (\ell - 2x)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] dx \quad (3-9)$$

L'intégrale peut-être évaluée exactement mais il convient avec une précision assez suffisante de développer en série binomiale la relation (3-9) et ensuite intégrer terme par terme, conduisant à :

$$L = \ell \left\{ 1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{\ell} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{f}{\ell} \right)^4 + \dots \right\} \quad (3-10)$$

C'est une équation du second degré en fonction de f/ℓ et sa résolution conduit à :

$$\left(\frac{f}{\ell} \right)^2 \square \frac{5}{24} \left\{ \left(1 + \frac{18}{5} \left(\frac{L-\ell}{\ell} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right\} \quad (3-11)$$

Ainsi, en général, si w et ℓ sont connues, il est nécessaire de spécifier uniquement une des trois variables (H, f, L) dans le but d'obtenir la solution complète.

3-2-3 Exemple d'application

On désire concevoir une passerelle qui doit relier 2 berges distantes de 100 m et montrant une différence de niveau de 10 m. Cette passerelle est composée de deux câbles parallèles auxquels est suspendu un tablier sur lequel circulent les piétons. La charge maximale pour chaque câble, supposée uniformément répartie par unité de longueur, vaut 1kN/m. On demande, pour chacune des deux situations suivantes (fig.3-2 et 3.3), de calculer l'effort maximal dans les câbles, les réactions d'appuis et la géométrie du câble en considérant qu'il est inextensible.

- a) Cas de la situation 1 (fig.3-2): le câble descend plus bas que l'appui de droite ;
d=20m**

- Géométrie :

L'équation de la parabole passant par deux points comportant une différence de niveau h et un point $c(x_{\max}, y_{\max}=d)$, situé plus bas que les deux appuis est donnée par l'équation [11] :

$$y = \frac{4d}{(\beta\ell)^2} x(\beta\ell - x) \quad (*) \quad ; \quad \beta = \frac{2d}{h} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{h}{d}}\right) \quad ; \quad x_{\max} = \beta\ell/2$$

On obtient : $\beta=1.1716$; $y=0.005826x(117.16-x)$ en m ; ; $x_{\max}=58.578$ m

La résolution de l'intégrale suivante fournit la longueur du câble :

$$L = \int_0^{\ell} ds \quad ; \quad ds = dx \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{soit} \quad L = \int_0^{100} \left[1 + (0.6828 - 0.0117x)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx = 105.83 \text{ m}$$

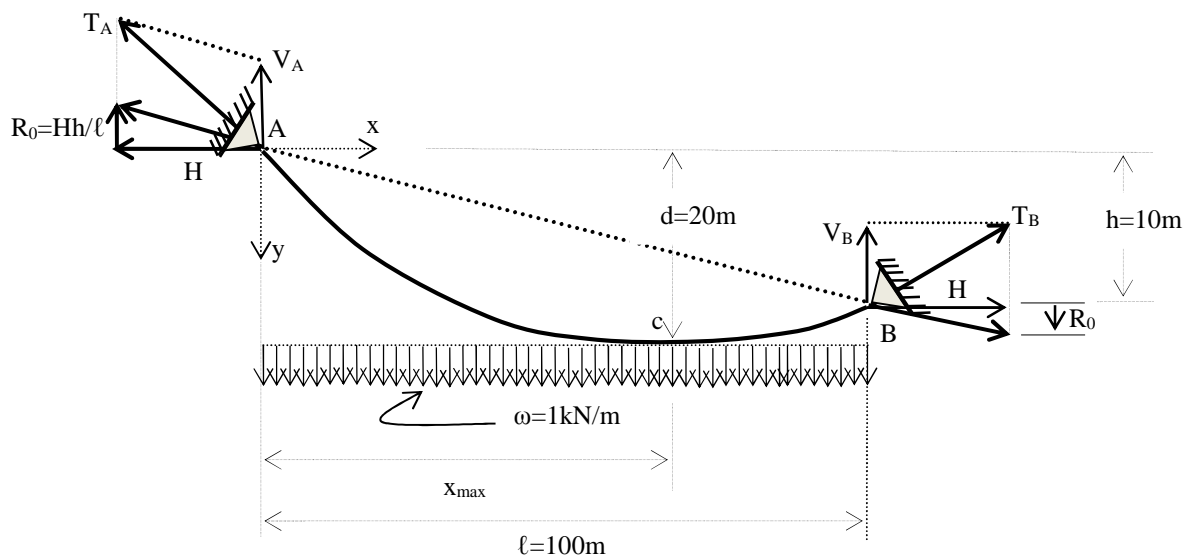


Figure 3-2 : Situation 1 du câble

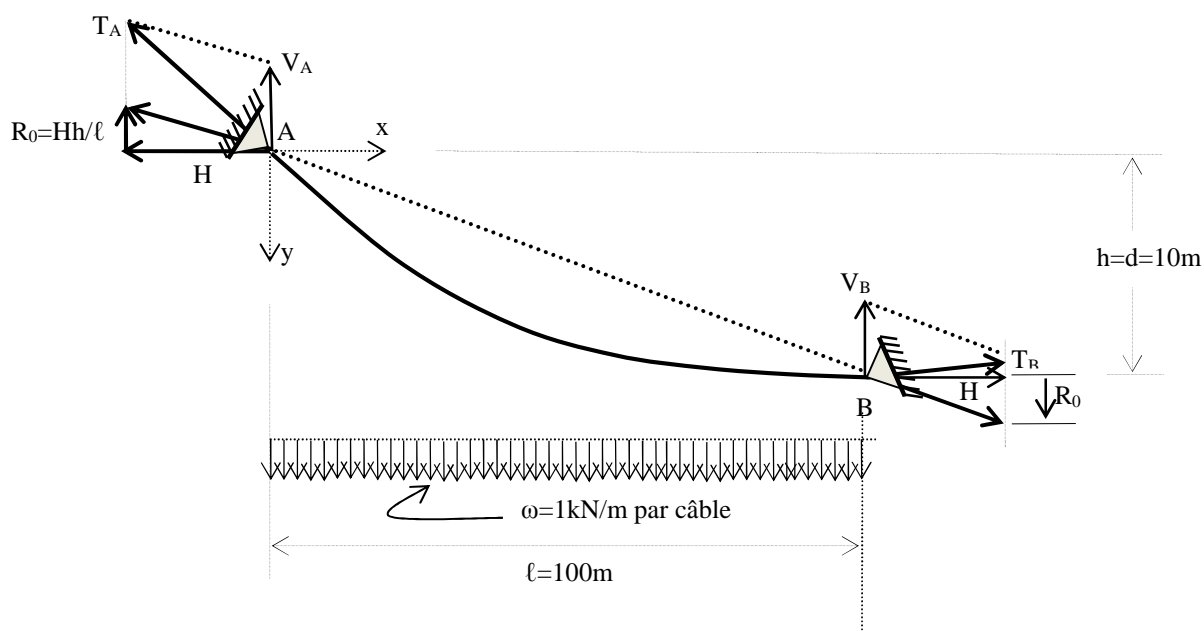


Figure 3-3 : Situation 2 du câble

- Réactions d'appuis

- Equilibre des moments par rapport au point A ($\sum M / A = 0$) :

$$V_B l - R_0 l + H h - w l^2 / 2 = 0 \leftrightarrow V_B l - H l h / l + H h - w l^2 / 2 = 0 \text{ soit } V_B = w l / 2$$

- Equilibre des moments par rapport au point B ($\sum M / B = 0$) :

$$V_A l + R_0 l - H h - w l^2 / 2 = 0 \leftrightarrow V_A l + H l h / l - H h - w l^2 / 2 = 0 \text{ soit } V_A = w l / 2$$

$$NB : V_A + V_B = ? w l \text{ ok}$$

- Equilibre du tronçon situé à gauche du point C ($x_{\max} = 58.578\text{m}$; $y_c = y_{\max} = d = 20\text{m}$) par rapport à ce même point :

$$w (x_{\max})^2 / 2 + H d - (R_0 + V_A) x_{\max} = 0 \text{ soit avec } R_0 = H h / l, \text{ on trouve :}$$

$$H = \left(\frac{w l}{2} x_{\max} - \frac{w x_{\max}^2}{2} \right) / \left(d - \frac{h}{l} x_{\max} \right)$$

$$= \left(\frac{1 \times 100}{2} \times 58.578 - \frac{1 \times 58.578^2}{2} \right) / \left(20 - \frac{10 \times 58.578}{100} \right) = 85.78 \text{ kN}$$

Par suite, les réactions d'appuis sont :

- $R_H = H = 85.78 \text{ kN} (=R_{HA} = R_{HB})$
 - $R_{VA} = R_0 + V_A = Hh/\ell + V_A = \left(\frac{10}{100} \times 58.578 - \frac{1 \times 100}{2} \right) = 58.58 \text{ kN}$
 - $R_{VB} = w\ell/2 - R_{VA} = 50 - 58.58 \text{ kN}$
- Effort maximal dans le câble

Comme la réaction verticale est la plus grande en A, c'est donc à cet appui que l'effort dans le câble est le plus grand. Il vaut :

$$N_{\max} = \sqrt{R_H^2 + R_{VA}^2} = 103.88 \text{ kN.}$$

b) Cas de la situation 2 (fig.3-3): le câble est horizontal à l'appui de droite ; h=d

- Géométrie :

Le cas limite d'un câble dont la tangente est horizontale à l'appui est donnée par la relation [11] :

$$y = \frac{h}{\ell^2} x(2\ell - x) \quad (**)$$

$$y = 10^{-3}x(200-x) \text{ en m}$$

La longueur du câble ainsi que le calcul des réactions conduisent à:

$$L = \int_0^{100} \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^{100} \left\{ 1 + (0.2 - 0.002x)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx = 100.66 \text{ m}$$

$$R_H = H = 500 \text{ kN} (=R_{HA} = R_{HB}); \quad R_{VA} = 100 \text{ kN}; \quad R_{VB} = 0 \text{ kN.}$$

NB: La formule (*) peut-être dérivée en considérant: $y = \frac{h}{\ell}x + \frac{w}{H}x(\ell - x)$; $y_{\max} = d \rightarrow$

$x_{\max} = \beta\ell/2$ et $H = \frac{w\ell^2}{2h}(\beta - 1)$. L'expression de la composante horizontale H est obtenue

après résolution d'une équation de second degré avec la remarque $\beta^2 = \frac{4d}{h}(\beta - 1)$. Quant à

la formule (**), elle peut être obtenue à partir de la formule générale de la déformée du câble

soit $y = \frac{h}{\ell}x + \frac{w}{H}x(\ell - x)$ en considérant $y'|_{x=\ell} = 0$.

3-2-4 Parabole élastique - théorie du câble extensible

Dans beaucoup de situations, l'accroissement de la flèche, d'un câble accroché à ses extrémités suite de son étirage ou de son allongement, est d'une importance pratique moindre. Elle peut être négligée en toute sécurité pour des câbles en acier ayant des portées allant jusqu'à 100 m. Cependant, lorsque les portées sont plus importantes, la situation devient très différente. En effet, la flèche d'un câble en acier de longue portée soit de l'ordre de 1000 m, peut facilement atteindre 1 m ou plus comme dans le cas des ponts suspendus quand les câbles sont librement attachés à leurs extrémités. Dans de tels cas, il est impératif de calculer la flèche avec plus de rigueur.

La théorie de la parabole élastique ou dite souvent du câble extensible que nous allons présenter dans ce qui suit, est à l'origine proposée pour la première fois par Routh puis améliorée par Irvine [14]. Le principe consiste de mettre en relation la géométrie du câble dans sa nouvelle position d'équilibre suite à son allongement en fonction de la variation de la poussée engendrée dans le câble.

Considérons une longueur sans contrainte L d'un câble inextensible (équ.3-10) ayant une flèche donnée f comme montré sur la figure 3-4. Quand le câble est suspendu entre deux appuis, à une certaine distance $\ell (< L)$, celui-ci s'étire naturellement ; les appuis sont supposés situés au même niveau. La flèche s'accroît alors de $f + \Delta f$ et la composante horizontale H (équ. 3-6) de la tension du câble diminue d'une quantité ΔH et se réduit à $H - \Delta H$; ΔH étant la poussée engendrée dans le câble suite à son extensibilité. Un point P (x,y) du câble dans sa position inextensible passe à un autre point P'(x+u,y+v) dans la nouvelle position extensible

du câble; Les quantités u et v étant les fonctions de déplacement respectivement horizontal et vertical que nous supposons petits.

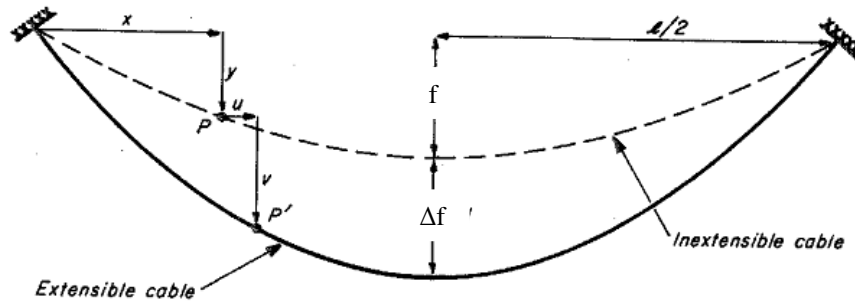


Figure 3-4 : Câble dans ses positions extensible et inextensible

Les conditions d'équilibre des forces verticales agissant sur un élément du câble dans sa nouvelle position déformée par analogie à l'équation (3-4) permettent d'écrire :

$$(H - \Delta H) \frac{d^2(y + v)}{dx^2} = -w \quad (3-12)$$

La résolution de cette équation différentielle en tenant compte des conditions aux limites, conduit à l'équation parabolique suivante en posant $H^* = \frac{\Delta H}{H}$:

$$y + v = \frac{1}{(1 - H^*)} \frac{w\ell^2}{2H} \left\{ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (3-13)$$

En substituant l'équation (3-5) dans l'équation (3-13), cela permettra d'écrire pour la déflexion additionnelle :

$$v = \frac{H^*}{(1 - H^*)} \frac{w\ell^2}{2H} \left\{ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (3-14)$$

Par suite, le taux d'augmentation de la flèche, noté par $f^* = \frac{\Delta f}{f}$ conduirait à :

$$f^* = \frac{H^*}{1-H^*} \quad (3-15)$$

Dans le but d'évaluer (H^*), il est nécessaire de recourir à l'équation des déplacements orthogonaux servant au calcul de la poussée comme dans le cas du chapitre précédent. La formulation générale de cette équation sera dérivée à l'annexe A. Dans ce contexte, il est alors possible d'écrire:

$$\frac{(H - \Delta H)}{E_c S_c} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 = \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (3-16)$$

E_c et A_c représentent respectivement le module d'élasticité et la section transversale du câble. Sachant que les déplacements u et v sont nuls aux extrémités du câble, dy/dx et dv/dx sont continues le long de sa travée, l'intégration par partie de la relation (3-16) conduirait à :

$$\frac{(H - \Delta H)L^e}{E_c S_c} = - \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \int_0^\ell v dx \quad (3-17)$$

où L^e est une longueur virtuelle du câble définie par : $L^e = \int_0^\ell \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 dx \approx \ell \left\{ 1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{\ell} \right)^2 \right\}$.

Après substitution, intégration et réarrangement, on peut obtenir l'équation cubique suivante :

$$(1 - H^*)^3 = \frac{\lambda^2}{24} (2H^* - H^{*2}) \quad (3-18)$$

où $\lambda^2 = \left(\frac{w\ell}{H} \right)^2 \frac{\ell}{\left(\frac{HL^e}{E_c S_c} \right)}$ est un paramètre fondamental qui caractérise le câble dans son état

inextensible. Il prend en compte les effets de la géométrie initiale et de l'élasticité du câble.

L'équation (3-18) peut être résolue d'une manière standard, mais ici une solution graphique convient parfaitement. La figure (3-5) montre que H^* doit être compris intuitivement et logiquement entre $0 < H^* < 1$.

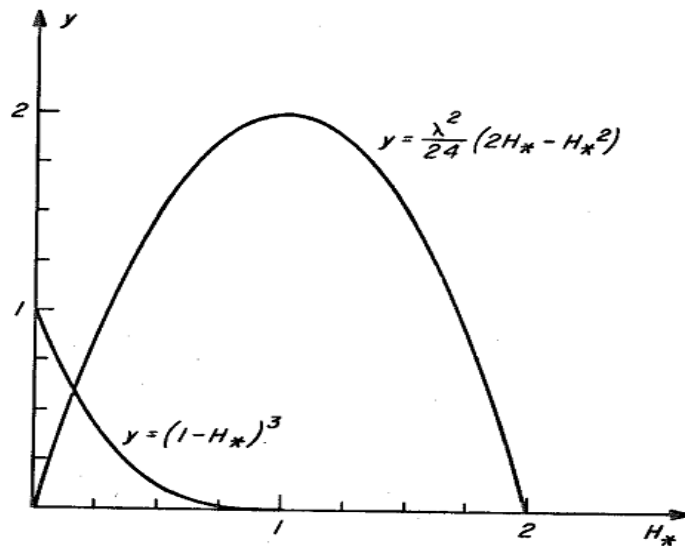


Figure 3-5 : Solution graphique d'une parabole élastique [15]

Considérons maintenant deux limites pour λ^2 :

a) λ^2 grand (>100) :

Cette situation correspond à la plupart des câbles ayant un rapport f/ℓ petit. L'équation (3-18) devient alors : $1 - 3H^* \approx \frac{\lambda^2}{12} H^*$, à partir de laquelle il est possible de déduire les relations approximatives de Rankine :

$$H^* \approx \frac{1}{3 + \frac{\lambda^2}{12}} \tag{3-19a}$$

$$f^* \approx \frac{1}{2 + \frac{\lambda^2}{12}} \tag{3-19b}$$

Notons comme rapportée par Pugsley [12], cette dernière relation peut être réarrangée et écrite sous la forme suivante:

$$f^* \approx \frac{1}{\frac{\lambda^2}{12} \left\{ 1 - \frac{32}{15} \left(\frac{f}{\ell} \right)^2 \right\}}$$

3-2-5 Exemple d'application

Soit un câble d'un pont suspendu de longue portée dont les propriétés du câble sont : $\ell=915 \text{ m}$; $w = 4.4 \text{ kN/m}$; $E_C = 180 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$; $S_C = 0.161 \text{ m}^2$; f/ℓ (géométrie initiale) = $1/12$. Calculons f^* .

Nous avons: $\lambda^2 = 2 \times 10^3 \gg 100$. Par conséquent, les relations (3-19) conduiront à: $H^* \approx 1/170$, $f^* \approx 1/169$ et par conséquent, $\Delta f = 0.455 \text{ m}$. Comparativement, la théorie de Rankine donne $f^* \approx 1/164$.

b) λ^2 petit ($\ll 1$) :

Cette situation peut bien correspondre aux câbles aplatis (dans lesquels $w\ell/H$ petit) et/ou les cas extensibles (dans lesquels E_C est petit. Cependant, quelques précautions sont à prendre en considérant les limites des équations (3-13) ou (3-14) lorsque λ^2 s'approche de zéro. Dans de tels cas:

$$H^* \approx 1 - \left(\frac{\lambda^2}{24} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3-20a)$$

$$\frac{f + \Delta f}{\ell} \approx \frac{3^{\frac{2}{3}}}{4} \left\{ \left(\frac{w\ell}{H} \right) \left(\frac{H}{E_C S_C} \right) \left(\frac{L^e}{\ell} \right) \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (3-20b)$$

Trois cas bien distincts peuvent être ici observés à savoir i) si $w\ell/H$ est petit et E_C est grand, $\Delta f \rightarrow 0$ comme prévu. C'est le cas d'un câble en acier aplati et tendu ii) si pour certains câbles

$w\ell/H$ et E_C sont les deux petits, alors $\Delta f \rightarrow$ vers une quantité finie iii) si $w\ell/H$ est dans l'ordre de l'unité et E_C est grand, alors $\Delta f \rightarrow \infty$. Les deux derniers cas sont d'une importance pratique mineure. En effet, le troisième cas par exemple n'a réellement aucun sens dans la mesure où l'hypothèse de la petitesse des déflexions additionnelles sur lesquelles la procédure de calcul est basée, se trouve exagérément violée.

Mentionnons enfin que la théorie de la parabole élastique est employée primordialement dans les ponts suspendus en phase de construction ou dans la réalisation des lignes aériennes de transport de l'énergie électrique (fig.1-6). Les résultats donnés par les relations (3-19) peuvent s'appliquer avec confiance. Cependant, dans les autres situations pratiques, les allongements des câbles peuvent être négligés.

3-3 Câble parabolique sous charges appliquées

3-3-1 Aperçu historique

Le comportement d'un câble suspendu est analysé, pour la première fois, par James Bernoulli vers la fin du 17^{ème} siècle juste après la découverte de la caténaire. Il a examiné la réponse d'une caténaire sous une force concentrée en se basant uniquement sur les principes géométriques, procédure très d'actualité à cette époque. C'est en 1796 que Fuss a établi les équations générales d'équilibre, en coordonnées cartésiennes, d'un élément de câble sous l'action de n'importe quel type de force. Plus tard, aux environs du milieu du 19^{ème} siècle, plusieurs travaux sont apparus en liaison étroite avec la conception des ponts suspendus où sont analysés les câbles paraboliques pesants sous divers types de charges appliquées. Rankine, en 1858, met notamment en exergue la réponse non linéaire des câbles et que la non linéarité est du type favorable c'est-à-dire les déplacements augmentent moins vite que les augmentations des charges. Les effets sont amplement analysés et commentés dans le livre de Pugsley [23]. Plus récemment, avec l'avènement des moyens informatiques des solutions numériques sont apportées. Par exemple, O'Brien [24] a montré l'utilisation plusieurs techniques dans la résolution des problèmes de câbles des ponts suspendus.

3-3-2 Sous charge ponctuelle

Supposons que la forme d'un câble, dans sa position suspendue libre, est donnée par la parabole d'équation suivante où sont tenus compte les effets initiaux dus à l'élasticité du câble:

$$y = \frac{w\ell^2}{2H} \left\{ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (3-21)$$

Considérons une charge ponctuelle d'intensité P appliquée à une distance x_1 de l'appui gauche, comme montré sur la figure 3-6. En admettant que les déplacements du câble sont petits de telle façon que les pentes de la déformée demeurent petites, la condition d'équilibre vertical à une section courante du câble permet d'écrire :

i) Pour $0 \leq x \leq x_1$: $(H + \Delta H) \frac{d(y+v)}{dx} = P(1 - \frac{x_1}{\ell}) + \frac{w\ell}{2} (1 - \frac{2x}{\ell})$

où v est la déflexion additionnelle verticale du câble et ΔH est la composante horizontale de la tension développée dans le câble sous l'effet de la charge ponctuelle appliquée. Le terme de droite est analogue à la force de cisaillement qui se produit dans une poutre isostatique sous l'action du poids propre uniformément répartie par mètre horizontal de la travée et sous la charge appliquée.

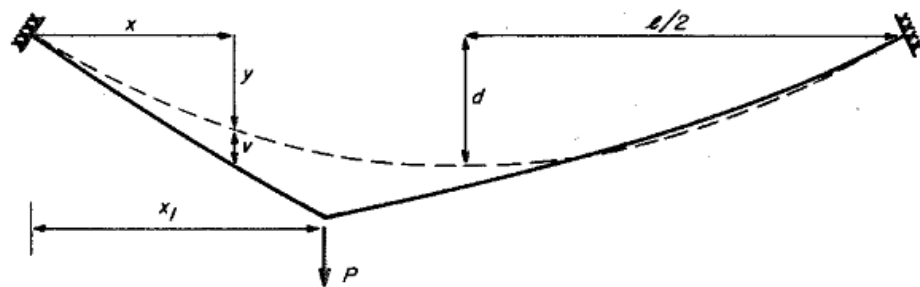


Figure 3-6: Câble sous charge ponctuelle

Il vient par conséquent,

$$(H + \Delta H) \frac{dv}{dx} = P(1 - \frac{x_1}{\ell}) - \Delta H \frac{dy}{dx} \quad (3-22)$$

Semblablement, on peut également obtenir:

ii) pour $x_1 \leq x \leq \ell$:

$$(H + \Delta H) \frac{dv}{dx} = -P \frac{x_1}{\ell} - \Delta H \frac{dy}{dx} \quad (3-23)$$

En intégrant les équations (3-23) et (3-24) et en faisant satisfaire les conditions aux limites, on peut obtenir les équations suivantes pour la déflexion verticale additionnelle du câble :

i) pour $0 \leq x \leq x_1$:

$$v_* = \frac{1}{1 + \Delta H^*} \left\{ \left(1 - \frac{x_1}{\ell}\right) \frac{x}{\ell} - \frac{\Delta H^*}{P^*} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right) \right\} \quad (3-24)$$

ii) pour $x_1 \leq x \leq \ell$:

$$v_* = \frac{1}{1 + \Delta H^*} \left\{ \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{x_1}{\ell} - \frac{\Delta H^*}{P^*} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right) \right\} \quad (3-25)$$

où $v_* = \frac{v}{\left(\frac{P\ell}{H}\right)}$; $\Delta H^* = \frac{\Delta H}{H}$; $P^* = \frac{P}{w\ell}$

Evaluons maintenant ΔH^* pour trouver la solution complète du problème en faisant appel à l'équation de la poussée dans le câble (voir annexe). On peut ainsi écrire en gardant les termes de second ordre. :

$$\frac{\Delta H L_e}{E_c S_c} = \int_a^\ell du + \int_0^\ell \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$$

Puisque dy/dx est une fonction continue le long de la travée et, u et v sont nuls aux appuis, l'expression ci-dessus peut se réduire à :

$$\frac{\Delta H L_e}{E_c S_c} = \frac{w}{H} \int_0^\ell v dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \quad (3-26)$$

Sous la charge ponctuelle, dv/dx est discontinue au point d'application de la charge et, le dernier terme ci-dessus, après intégration par partie, conduit à :

$$\frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{dv}{dx} v \Big|_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} + \frac{d^2v}{dx^2} \int_0^{x_1} v dx + \frac{d^2v}{dx^2} \int_{x_1}^\ell v dx \right\}$$

Soit en remplaçant ce résultat dans l'équation (3-26) en tenant compte des équations (3-24) et (3-25), et après intégration, il est possible d'obtenir l'équation adimensionnelle suivante en fonction de ΔH^* :

$$2\Delta H^* (1 + \Delta H^*)^2 = \lambda^2 \left\{ \left(\frac{x_1}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{\ell}\right)^3 (P^* + P^{*2}) - \frac{\Delta H^*}{12} (2 + \Delta H^*) \right\}$$

Elle peut être réécrite sous la forme cubique standard :

$$\Delta H^{*3} + \left(2 + \frac{\lambda^2}{24}\right)\Delta H^{*2} + \left(1 + \frac{\lambda^2}{12}\right)\Delta H^* - \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \left(\frac{x_1}{\ell}\right) - \left(\frac{x_1}{\ell}\right)^2 \right\} P^* (1 + P^*) = 0 \quad (3-27)$$

L'équation est de la forme $z^3 + az^2 + bz - c = 0$ où a,b,c sont des quantités réelles positives et possède une seule racine positive réelle qui sera retenue comme la solution pour l'inconnue recherchée ΔH^* . Pour un problème donné Il est clair que ΔH^* ne dépend pas seulement de P^* et de x_1/ℓ , mais aussi de λ^2 qui est un paramètre qui prend en compte la géométrie et l'élasticité du câble. On peut aussi montrer sans peine, pour des valeurs données de P^* et de λ^2 , que ΔH^* est maximum pour $x_1 = \ell/2$. Les variables P^* et λ^2 peuvent prendre des valeurs grande ou petite sous réserve que la pente de la déflexion du câble demeure petite.

Il est possible de linéariser cette théorie générale en négligeant tous les termes de second ordre qui apparaissent dans les équations différentielle d'équilibre ainsi que dans l'équation de la poussée du câble. Par suite, il faut laisser de coté les termes $H \frac{dv}{dx}$ et $\frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$ qui apparaissent respectivement dans les équations (3-22) et (3-26). Ainsi, les équations (3-24) et (3-25) deviennent:

i) pour $0 \leq x \leq x_1$:

$$v_* = \left\{ \left(1 - \frac{x_1}{\ell}\right) \frac{x_1}{\ell} - \frac{\Delta H^*}{P^*} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right) \right\} \quad (3-28a)$$

ii) pour $x_1 \leq x \leq \ell$:

$$v_* = \left\{ \left(1 - \frac{x_1}{\ell}\right) \frac{x_1}{\ell} - \frac{\Delta H^*}{P^*} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right) \right\} \quad (3-28b)$$

, et l'équation de la poussée du câble se réduit à :

$$\frac{\Delta H L_c}{E_c S_c} = \frac{w}{H} \int_0^{\ell} v dx \quad (3-29)$$

Après substitution, intégration et réarrangement, on peut obtenir la solution linéarisée pour ΔH^* qui est exprimée sous la forme suivante:

$$\Delta H^* = \frac{1}{\left(1 + \frac{12}{\lambda^2}\right)} 6P^* \left\{ \left(\frac{x_1}{\ell}\right) - \left(\frac{x_1}{\ell}\right)^2 \right\} \quad (3-30)$$

Habituellement, la solution linéarisée est acceptable pour des valeurs petites de P^* . En effet, si λ^2 est grand, P^* doit être supérieur à une valeur de l'ordre 10^{-1} pour avoir une marge d'erreur de 10%. Si λ^2 est petit, des valeurs importantes pour P^* sont tolérables. En pratique, les petites valeurs de λ^2 correspondent aux câbles aplatis. Par contre, les valeurs élevées de λ^2 reflètent les câbles plutôt inextensibles ayant un rapport flèche/travée de l'ordre de 1/8. Pour des câbles tendus, λ^2 doit être très très petit devant 1 ($\ll 1$), et on peut remarquer que l'équation (3-30) donne $\Delta H^* \rightarrow 0$. Pour des câbles tels ceux utilisés dans les ponts suspendus où le rapport flèche/travée est de l'ordre de 1/10, on peut voir que pour $\lambda^2 \gg 1$:

$$\Delta H^* \rightarrow 6P^* \left\{ \left(\frac{x_1}{\ell}\right) - \left(\frac{x_1}{\ell}\right)^2 \right\}.$$

Illustrons maintenant l'application de ces théories au moyen de ces deux exemples ci-après.

3-3-3 Exemple d'application sous charge ponctuelle

Considérons l'emplacement du premier élément à mi-travée d'un pont suspendu comme lors de la réalisation du pont de Bosphore (fig. 3-7a). On demande de calculer la

valeur de la déflexion au milieu de la travée et la valeur de la poussée ainsi induite sous l'action de la charge. Les propriétés du câble dans position libre suspendu : $\ell=915 \text{ m}$; $w = 4.4 \text{ kN/m}$; $E_C = 180 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$; $S_C = 0.161 \text{ m}^2$; f/ℓ (géométrie initiale) = $1/12$; P (poids du segment du tablier à soulever, par câble) = 890 kN (fig.3-7b).

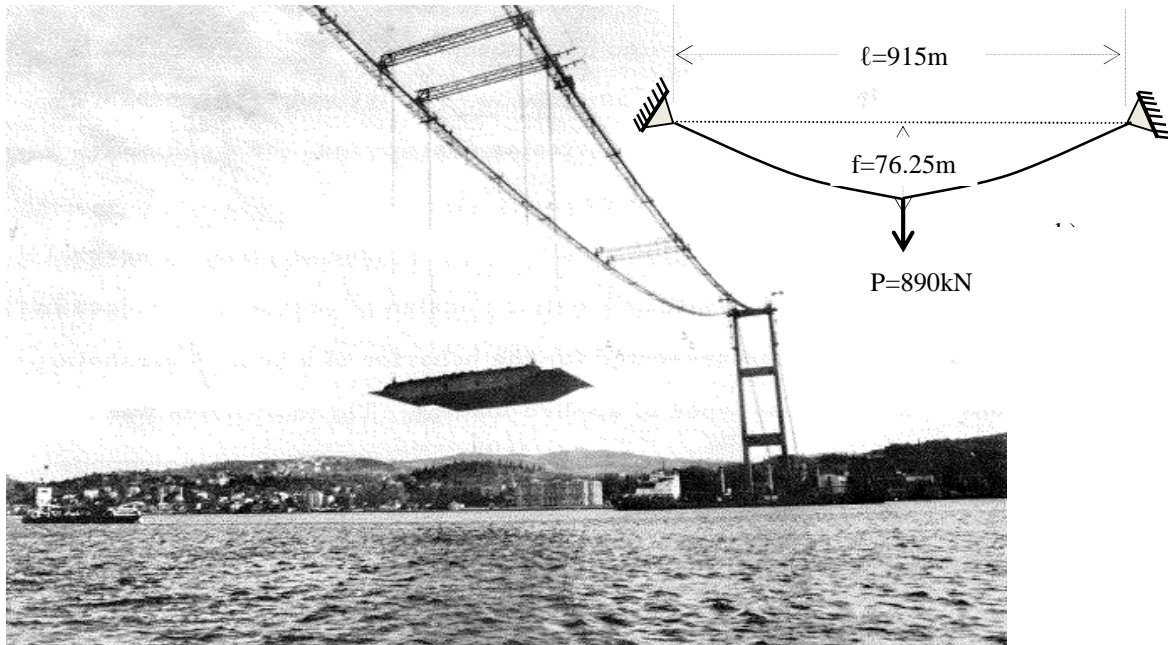


Figure 3-7: Emplacement du premier élément du tablier du pont de Bosphore [22]

Nous avons, $\lambda^2 = 2 \times 10^3$; $x_1/\ell=0.5$; $P^*=0.221$. L'équation cubique à résoudre devient (équ.3-27): $\Delta H^{*3} + 85.5\Delta H^{*2} + 168\Delta H^* - 67.5 = 0$. La résolution conduit à $\Delta H^* = 0.343$ qui par comparaison à la théorie linéaire donne $\Delta H^* = 0.33$. Cependant, cette quasi-parfaite concordance du résultat avec la théorie exacte est trompeuse. En effet, pour ce problème, la relation entre la poussée induite dans le câble et la charge appliquée apparaît essentiellement linéaire mais entre la déflexion additionnelle et la charge, la relation est non linéaire. On enregistre au milieu de la travée $v^*=0.0415 \text{ m}$ (équ.3-24) à partir duquel $v=5.6\text{m}$.

3-3-4 Exemple d'application d'un catérail de transport de matériel

Soit une sorte de catérail utilisée pour transporter du matériel le long d'un ravin comme illustré sur la figure 3-8. Dans sa position libre suspendue, le câble a une travée de longueur 91.5 m avec un rapport flèche/travée égale à $1/50$ (cas d'un câble aplati tendu). On

demande de calculer ΔH^* et v^* lorsqu'une charge ponctuelle d'intensité $P=17.8 \text{ kN}$ est située au milieu de la travée.

Les propriétés du câble sont : $w = 38.8 \text{ N/m}$; $E_C = 104 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$; $S_C = 5.06 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

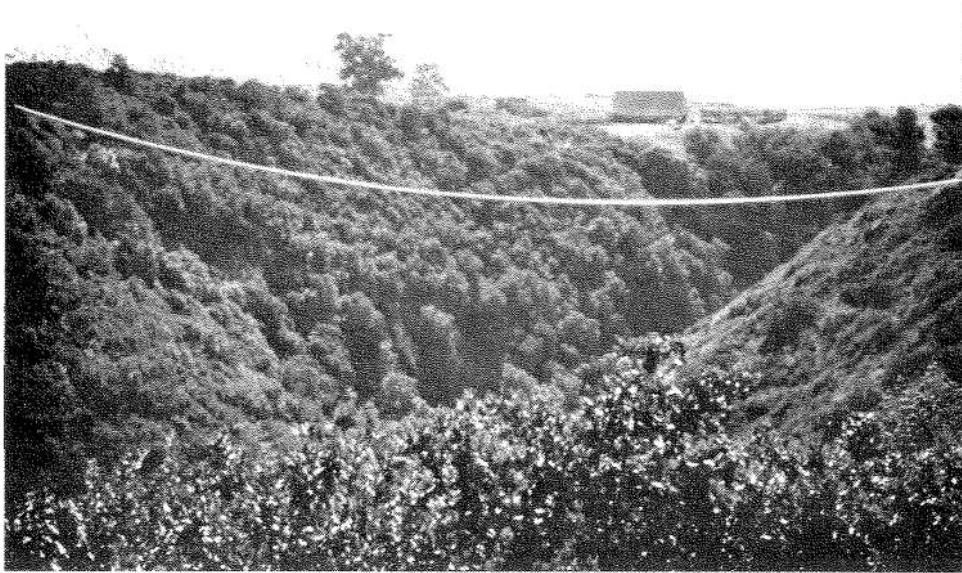


Figure 3-8: Vue d'un câble parabolique surplombant un ravin

Nous avons, $\lambda^2 = 60.2$; $x_1/l=0.5$; $P^*=5.0$. L'équation cubique (équ.3-27) s'écrit: $\Delta H^{*3} + 4.5\Delta H^{*2} + 6\Delta H^* - 226 = 0$ et la solution est: $\Delta H^* = 4.65$. La théorie linéaire (équ.3-30) donne $\Delta H^* = 6.25$. Par suite, la déflexion à mi-travée (équ.3-24) est $v^*=0.0237 \text{ m}$ (équ.3-24) à partir de laquelle on trouve $v=1.73 \text{ m}$. Sous cette charge, la flèche a presque doublée mais, puisque la pente du câble est petite, le résultat est fiable.

3-3-5 Sous charge partiellement répartie

Soit une charge une partiellement répartie, d'intensité p par unité de longueur de la travée, appliquée sur un intervalle quelconque de coordonnées $x=x_2$ et $x=x_3$ d'un câble suspendue à ses extrémités comme montré sur la figure 3-9.

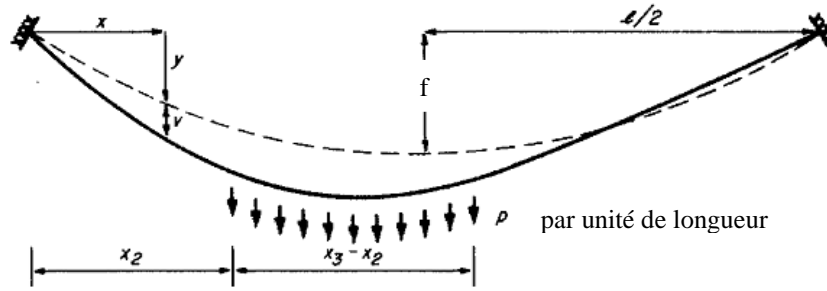


Figure 3-9: Câble parabolique sous charge partiellement répartie

Exploitions encore une fois l'analogie qui existe avec une poutre simplement appuyée comme le cas de la section précédente sous la charge ponctuelle. La condition d'équilibre vertical à une section courante du câble d'abscisse x à partir de l'appui gauche entraîne :

i) Pour $0 \leq x \leq x_2$:

$$(H + \Delta H) \frac{dv}{dx} = p\ell \left\{ \left(\frac{x_3}{\ell} - \frac{x_2}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right) \right\} - \Delta H \frac{dy}{dx} \quad (3-31a)$$

ii) Pour $x_2 \leq x \leq x_3$:

$$(H + \Delta H) \frac{dv}{dx} = p\ell \left\{ \left(\frac{x_3}{\ell} - \frac{x}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right) \right\} - \Delta H \frac{dy}{dx} \quad (3-31b)$$

iii) Pour $x_3 \leq x \leq \ell$:

$$(H + \Delta H) \frac{dv}{dx} = p\ell \left\{ -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right) \right\} - \Delta H \frac{dy}{dx} \quad (3-31c)$$

Après intégration et ajustement avec les conditions aux limites, on peut obtenir les expressions suivantes, sous forme adimensionnelles, pour la déflexion verticale du câble :

i) Pour $0 \leq x \leq x_2$:

$$v^* = \frac{1}{1+\Delta H} \left[\left\{ \left(\frac{x_3}{\ell} - \frac{x_2}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right) \right\} \left(\frac{x}{\ell} \right) - \frac{\Delta H}{p^*} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x}{\ell} \right) - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right) \right] \quad (3-32a)$$

ii) Pour $x_2 \leq x \leq x_3$:

$$v^* = \frac{1}{1+\Delta H} \left[\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{\ell} \right) \left(\frac{x}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right) \left(\frac{x}{\ell} \right) \right\} - \frac{\Delta H}{p^*} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right) \right] \quad (3-32b)$$

iii) Pour $x_3 \leq x \leq \ell$:

$$v^* = \frac{1}{1+\Delta H} \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right\} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) - \frac{\Delta H}{p^*} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x}{\ell} \right) - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right) \right] \quad (3-32c)$$

$$\text{où } v^* = \frac{v}{\left(\frac{p\ell^2}{H} \right)} ; \quad \Delta H^* = \frac{\Delta H}{H} ; \quad p^* = \frac{p}{w}$$

L'expression de la variation de la composante horizontale de la tension du câble, ΔH , peut être également déduite à partir de l'annexe A, et qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\Delta H L_c}{E_c S_c} = \int_0^{\ell} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) v dx \quad (3-33)$$

Après substitution des équations (3-32) dans l'équation (3-33), intégration et réarrangement de tous les termes, l'équation adimensionnelle cubique suivante peut être obtenue :

$$\Delta H^{*3} + \left(2 + \frac{\lambda^2}{24} \right) \Delta H^{*2} + \left(1 + \frac{\lambda^2}{12} \right) \Delta H^* - \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x_3}{\ell} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^3 \right\} p^* - \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_3}{\ell} \right) \left(\frac{x_2}{\ell} \right) - \frac{1}{4} \left(\left(\frac{x_3}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\ell} \right)^2 \right)^2 \right\} p^{*2} = 0 \quad (3-34)$$

Cette équation générale est de la forme $z^3 + az^2 + bz - c = 0$ où a, b, c sont des quantités réelles positives, et qui selon la règle des signes de Descartes, elle possède une seule racine positive réelle. Cette racine est la solution recherchée pour l'inconnue ΔH^* . Il est possible de montrer que lorsque l'intervalle chargé de longueur $(x_3 - x_2)$ est petit et $p(x_3 - x_2)$ devient fini de telle sorte qu'il tend vers une charge concentrée, que l'équation (3-34) se réduit à l'équation (3-27) obtenue sous la charge ponctuelle appliquée sur le câble. En outre, on peut aussi montrer que si p^* et λ^2 sont données, ΔH^* est maximum lorsque le chargement est disposé symétriquement par rapport au centre de la travée. Par ailleurs, soulignons que la théorie ainsi présentée prend en compte les termes du second ordre. Elle peut s'appliquer par exemple pour le calcul des ponts suspendus en phase de construction lors du montage du tablier partiellement ou totalement. Dans ce contexte, l'utilisation de la théorie générale non linéaire est essentielle vu que le poids du tablier est souvent plusieurs fois important que celui des câbles et accessoires, et que λ^2 est grand.

3-3-6 Exemple d'application d'évaluation de la poussée

:On demande d'évaluer la poussée et la déflexion engendrées dans les câbles du pont suspendu en phase de la construction décrit dans les exemples #2 ou #3. Particulièrement, il faut calculer la composante horizontale de la tension dans le câble et la déflexion à mi-travée selon l'un des cas de charges suivants a) tablier disposé sur la moitié centrale de la travée b) tablier disposé sur l'ensemble de la travée. On suppose négligeable la rigidité flexionnelle lors de la phase de construction et que le poids réparti du tablier est de $5.84 \times 10^4 \text{ N/m}$ par câble.

a) Tablier placé sur la moitié centrale de la travée (fig.3-10a)

Nous avons : $p = 5.84 \times 10^4 \text{ N/m}$; $\lambda^2 = 2 \times 10^3$; $x_2/\ell = 0.25$; $x_3/\ell = 0.75$; $p^* = 13.3$. L'équation cubique à résoudre s'écrit (équ.3-34): $\Delta H^{*3} + 85.5\Delta H^{*2} + 168\Delta H^* - 8.95 = 0$, laquelle donne comme solution: $\Delta H^* = 8.9$. La déflexion à mi-travée s'élève à : $v^* = 0.00102$; $v = 8.3 \text{ m}$. Notons que si les câbles sont inextensibles et les termes de second ordre sont négligés dans l'équation de la poussée du câble, alors $\Delta H^* = 9.17$ qui est une valeur assez proche de celle issue de la théorie générale de calcul. Cependant, les câbles ne sont pas inextensibles. En fait,

sous l'action de ce chargement, la longueur du câble à subir une variation qui peut être estimée par la relation suivante:

$$\Delta L \approx \Delta H \frac{H \ell}{E_c S_c} \left(1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f}{\ell}\right)^2\right) \quad (3-35)$$

Ce qui donne numériquement, $\Delta L \approx 1.75$, valeur très loin d'être négligeable. Cependant, la théorie inextensible donne pourtant des résultats acceptables ; c'est du fait que les deux termes dans l'équation de la poussée du câble à savoir $\frac{\Delta H L_e}{E_c S_c}$ et $\int_0^\ell \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$ sont approximativement égaux dans ce cas.

b) Tablier placé sur toute la travée (fig.3-10b)

Nous avons : $p^*=13.3$; $\lambda^2 = 2 \times 10^3$; $x_2/\ell=0$; $x_3/\ell=1.0$; L'équation cubique est alors $\Delta H^{*3} + 85.5\Delta H^{*2} + 168\Delta H^* - 17 = 0$ qui donne comme solution: $\Delta H^* = 12.35$. En comparaison à la théorie inextensible, celle-ci conduirait à $\Delta H^* = p^*=13.3$. La déflexion à mi-travée donne: $v^*=0.00067$ soit $v=5.43$ m. Par conséquent, en plaçant la charge sur la totalité de la travée, la flèche du pont passera de la valeur de 76.25 m à 81.7 m. Chaque longueur va subir une variation de longueur (allongement) $\Delta L \approx 2.42$ m à partir de sa longueur initiale i.e avant l'application de la charge. Le câble subit une déformation $\frac{\Delta L}{L} = 0.0026$ (=2.6‰) qui est beaucoup plus petit que le taux d'augmentation de la flèche $\frac{\Delta f}{f} = 0.071$ (=7.1‰).

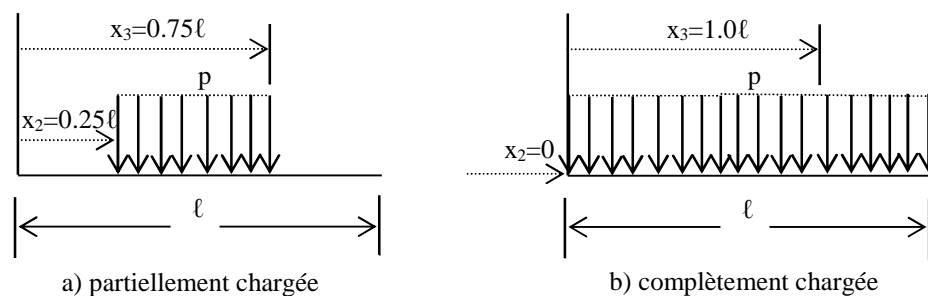


Figure 3-10 : Travée partiellement et complètement chargée

CHAPITRE 4

REPOSE DYNAMIQUE : DEVELOPPEMENTS THEORIQUES DE BASE ET ANALYSES EN REGIME VIBRATOIRE LIBRE

4-1 Généralités

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à l'analyse du comportement vibratoire particulièrement en régime libre d'un câble parabolique uniforme ayant une travée quelconque soit en l'absence de toute excitation extérieure d'origine force ou déplacement. L'équation transcendante permettant de calculer les périodes propres du câble sera établie en exploitant fondamentalement, pour des raisons de simplicité des calculs qu'elle engendre, l'hypothèse liée à la linéarisation de l'équation de la poussée c'est-à-dire en négligeant les effets de second ordre. Cependant, nous allons d'abord donner un bref aperçu historique dans le but de mieux mettre en relief le contexte de la question.

4-2 Aperçu historique

Durant la première moitié du 18^{ème} siècle, quelques éléments de la théorie de vibration d'une corde tendue fixée à ses deux extrémités, ont été apportés par Taylor, D'Alembert, Euler et Bernoulli [16]. En 1732, Bernoulli [17] examina les oscillations transversales d'un câble uniforme fixé à l'une de ses extrémités et suspendu par effet de gravité. Le même problème avait été aussi discuté par Euler [18], en 1781, soit approximativement cinquante années plus tard. Bernoulli et Euler ont donné la solution des fréquences de vibration sous la forme de séries infinies connues actuellement par la fonction de Bessel d'ordre 0 du type 1.

A cette époque, cependant, la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles était encore juste à ses débuts, et l'analyse était considérablement centrée plutôt sur les systèmes discrets que sur les systèmes continus. A titre d'exemple, en 1788, Lagrange [18], avait obtenu une solution pour les vibrations d'une barre inextensible fixée à ses deux extrémités, sans masse, dans laquelle des masses discrètes ont été suspendues. Les équations générales de mouvement des systèmes discrets étaient pour la première fois avancées par Lagrange en 1760. La plus importante contribution à la théorie de vibration des câbles datait

de 1820 quand Poisson [19] avait publié un article où sont présentées les équations générales différentielles sous forme cartésienne de mouvement d'un élément de câble sous l'action d'un système de forces généralisées. Ces équations dynamiques étaient analogues aux équations statiques présentées par Fuss, en 1796, que Poisson avait utilisé pour améliorer les solutions obtenues auparavant pour un câble vertical et une corde tendue. Ainsi, en 1820, des solutions linéarisées assez correctes avaient été élaborées pour les vibrations libres des câbles uniformes ayant des géométries en forme de caténaire. A l'exception des travaux de Lagrange sur les systèmes discrets équivalents, aucun résultat n'avait été donné pour les vibrations libres des câbles dont le rapport flèche/travée tendait vers zéro ou infini.

En 1851, Rohrs [19] avait obtenu une solution approximative, assez appréciable, pour les vibrations verticales symétriques d'un câble suspendu uniforme où le rapport flèche/travée était relativement petit. La solution utilisait une forme simplifiée des équations générales de Poisson soit au premier ordre, et une autre équation dite de continuité de la chaîne. On supposait que la chaîne était inextensible de manière que l'équation de continuité ne dépende que des considérations liées à la compatibilité géométrique. Cinq ans plus tard, Routh [17] en 1868, donna une solution exacte pour les vibrations symétriques verticales (en associant le mouvement longitudinal) d'un câble inextensible et hétérogène suspendu en forme de cycloïde. Il avait montré que la solution se réduisait à celle d'un câble uniforme lorsque le rapport flèche/travée devient petit. Également, Routh avait obtenu une solution exacte pour les vibrations antisymétriques d'un câble cycloïde en associant le mouvement longitudinal.

A ce stade, la question semble avoir été laissée en hibernation jusqu'au 1941 quand Rannie et Von Karman [17], indépendamment, dérivèrent la solution pour les vibrations libres, symétriques et antisymétriques d'un câble inextensible formée de trois travées. Dans le travail effectué en 1941, Vincent [20] avait étendu les résultats de Rannie et de Von Karman en introduisant les effets de l'élasticité du câble pour analyser le mouvement vertical symétrique. Cependant, il n'avait pas examiné la nature de la solution obtenue et, par conséquent, il semble n'avoir pas fait remarquer l'effet substantiel que l'élasticité du câble engendre sur les résultats. Une théorie semi-empirique pour le calcul des fréquences naturelles des trois premiers modes plans d'un câble suspendu uniforme a été avancée par Pugsley en 1949. Il avait démontré l'application des résultats en effectuant une expérimentation sur des câbles dont le rapport flèche/travée variait entre $1/10$ à $1/4$. En admettant que le câble est uniforme et inextensible, Saxon et Cochr, [21], en 1953, effectuaient une contribution majeure

à la théorie de vibration des câbles dans le plan. Ils avaient obtenus des solutions qui effectivement se réduisaient à des résultats déjà connus pour des câbles inextensibles à faible rapport flèche/travée et pour lesquels des solutions asymptotiques donnaient de bons résultats pour des rapports flèche/travée élevés. L'un des aspects les plus intéressants des développements ultérieurs de la théorie des vibrations verticales symétriques d'un câble suspendu est qu'il n'y a pas de théories qui ont cherché à expliquer réellement lorsque le rapport flèche/travée se réduit à zéro. Pour des petits rapports flèche/travée, les théories antérieures qui sont dérivées sur la base de l'hypothèse liée à l'inextensibilité du câble, montrent que le premier mode symétrique dans le plan, principalement dans le cas du mouvement vertical, se produit à une fréquence qui est contenue dans la première solution non nulle.

Comme sera montré ultérieurement, elle sera donnée par l'équation transcendante de la forme $\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = \frac{\beta\ell}{2}$ à savoir $(\beta\ell)_1 \approx 2.86\pi$ où $\beta = \sqrt{\frac{m\omega^2}{H}}$; m est la masse par unité de longueur du câble, H est la composante horizontale du câble sous charge statique, ω est la fréquence naturelle circulaire ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) de vibration et ℓ est la longueur du câble ; T étant la période de vibration correspondante du câble.

Cependant, il est connu depuis longtemps que la fréquence du premier mode symétrique de vibration transversale d'une corde tendue est contenue dans la première solution donnée par l'équation $\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = 0$, à savoir $(\beta\ell)_1 = \pi$. Cette différence, d'ordre de 300%, ne peut pas être résolue par les analyses antérieures basées sur l'hypothèse de l'inextensibilité. L'inextensibilité est un concept qui nécessite d'être employé par beaucoup de précaution du fait qu'il n'y a pas de câble ou de chaîne réellement inextensible. Clairement, une corde tendue doit s'allonger quand elle vibre en mode symétrique, bien que des analyses standards souvent sous estiment ce point. Egalement, un câble qui possède un très petit rapport de flèche/travée doit s'allonger quand il vibre en mode de mouvement vertical symétrique. Cette question sera développée plus en profondeur dans les paragraphes qui suivent.

4-3 Développements théoriques

Considérons de nouveau comme indiqué dans le paragraphe 3-2-1, un câble parabolique uniforme chargé sous l'action de son poids propre (W) dont sa position d'équilibre statique après déplacement demeure dans son propre plan vertical.

4-3-1 Forme géométrique initiale

Admettons que le câble est librement appuyé à ses extrémités et sans présence de dénivellation d'appuis. Son profil géométrique est décrit comme par l'équation (3-5), que nous réécrivons sous la forme :

$$y = \frac{mg\ell^2}{2H} \left\{ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (4-1)$$

où $m (=W/g)$ est la masse par unité de longueur du câble et g représente l'accélération due à la pesanteur ($=9.81 \text{ m/s}^2$).

4-3-2 Equations générales de mouvements d'un élément de câble

Soumettons maintenant le câble à un petit déplacement quelconque à partir de sa position d'équilibre statique comme schématisé dans la figure 4-1. Alors, les petites vibrations qui en résultent se décomposent généralement en trois composantes à savoir i) mouvement longitudinal, u ii) mouvement transversal vertical, v iii) mouvement transversal horizontal, w .

Ainsi, l'équilibre dynamique d'un élément de câble permet d'écrire les conditions suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \left(\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right\} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4-2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \left(\frac{dy}{ds} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right\} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mg \quad (4-2b)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \frac{\partial w}{\partial s} \right\} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4-2c)$$

où u et v sont les composantes du mouvement dans le plan respectivement dans les sens longitudinal et vertical, w est la composante du mouvement perpendiculaire au plan vertical du câble, τ est la tension supplémentaire engendrée par le mouvement. Les composantes du mouvement u , v et w ainsi que la tension τ sont des fonctions dépendantes simultanément des coordonnées et du temps.

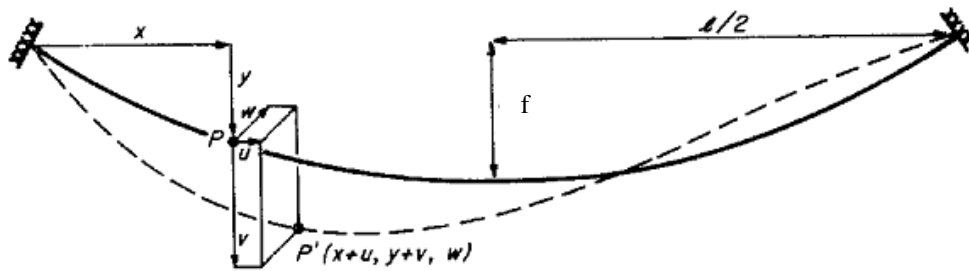


Figure 4-1: Configuration du câble sous l'action d'un petit déplacement arbitraire

Les équations (4-2) peuvent être simplifiées pour des problèmes manuels en développant chaque équation tenant compte des conditions liées à la position d'équilibre statique et en négligeant les termes de second ordre. En plus, puisque l'analyse est valable uniquement pour des câbles avec un rapport flèche/travée de l'ordre de 1/8 ou moins, la composante longitudinale du mouvement de ces équations s'avère d'une moindre importance et peut donc être négligée. Par conséquent, les équations d'équilibre du mouvement d'un élément infinitésimal de câble de longueur dx se réduisent à :

$$H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h \frac{d^2 y}{dx^2} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4-3)$$

$$H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4-4)$$

où h étant la composante additionnelle de la tension induite dans le câble et qui est une fonction dépendante du temps seul.

4-3-3 Equation linéarisée de la poussée

L'équation de la poussée du câble sous sa forme linéarisée, qui ne dépend que l'élasticité et de la compatibilité géométrique d'un élément de câble, permet d'écrire :

$$\frac{h}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 = \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} \quad (4-5)$$

L'équation de la poussée du câble complète la solution pour le mouvement vertical symétrique. Elle permet également le calcul du mouvement longitudinal. Par conséquent, les équations (4-3), (4-4) et (4-5) forment les équations linéarisées du problème.

4-3-4 Découplage du mouvement plan et transversal

Notons que le mouvement transversal horizontal est complètement découplée du mouvement dans le plan vu qu'il n'y a pas, au premier ordre, de force de tension additionnelle dans le câble. Ce qui, selon Irvine [10], est en accord avec l'expérience où dans une chaînette ou une caténaire le seul mode de vibration facile à obtenir est le premier mode d'oscillation. Par suite, au premier ordre, une excitation dynamique ne possédant pas de composante dans le plan entrainera seulement un mouvement transversal horizontal, et vice versa.

Par ailleurs, vu les restrictions adoptées sur la géométrie du câble, c'est bien la composante verticale du mouvement qui est la plus déterminante quand le câble vibre dans le mode plan. L'amplitude qui correspond à la composante longitudinale est toujours substantiellement inférieure par rapport à celle du mouvement vertical. De ce fait, un mode symétrique plan peut être défini comme étant l'un des modes dans lequel la composante verticale du mode est symétrique, et vice versa. Dans beaucoup de situations pratiques, les

composantes longitudinales modales sont d'une moindre importance et par conséquent, les composantes verticales modales peuvent être désignées comme modes plans.

Dans ce qui suit à cause de la simplicité d'analyse qu'il procure, nous allons d'abord considérer le mouvement transversal horizontal.

4-4 Mouvement transversal horizontal

En écrivant $w(x,t) = \tilde{w}(x)e^{i\omega t}$, sachant que $i^2 = -1$, l'équation (4-4) peut se mettre sous la forme :

$$H \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{w} = 0 \quad (4-6)$$

où ω représente la fréquence circulaire naturelle de vibration. La solution générale de l'équation différentielle (4-6) est de la forme :

$$\tilde{w} = A \sin \beta x + B \cos \beta x \quad \text{où } \beta^2 = \frac{m\omega^2}{H} ; A \text{ et } B \text{ étant des constantes.}$$

A l'aide des conditions de frontière soit $\tilde{w}(x=0) = 0 = \tilde{w}(x=\ell)$, le coefficient B étant alors égal à zéro, il est possible de trouver les fréquences naturelles de vibration données par :

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m}} \quad n=1,2,3 \dots \quad (4-7)$$

où $n=1,2,3 \dots$ signifie le premier, deuxième, troisième mode etc. mode respectivement. Les modes sont données par la relation :

$$\tilde{w}_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad n=1,2,3 \dots \quad (4-8)$$

La fréquence du premier mode transversal horizontal (i.e n=1) constitue la plus faible fréquence naturelle pour un quelconque câble ayant une forme parabolique.

4-5 Mouvement transversal vertical

Ainsi définis précédemment, les modes antisymétriques plans sont constitués des composantes verticales antisymétriques et des composantes longitudinales symétriques, tandis que les modes symétriques plans sont constitués des composantes verticales symétriques et des composantes longitudinales antisymétriques. Dans le premier cas, au premier ordre, on admet qu'il n'y a aucune tension additionnelle n'est générée lors du mouvement du câble à l'opposé du dernier cas où il faut bien la prendre en considération.

4-5-1 Modes antisymétriques plans

Puisque au premier ordre la composante horizontale de la tension dans le câble est par hypothèse nulle, en posant $v(x, t) = \tilde{v}(x) e^{i\omega t}$ sachant $i^2 = -1$, l'équation (4-3) comme dans l'équation (4-4) pour le mouvement horizontal devient:

$$H \frac{d^2 \tilde{v}}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v} = 0 \quad (4-9)$$

L'équation de la poussée (4-5) ne dépend alors que de la compatibilité géométrique d'un élément de câble qui, après avoir substitué $u(x, t) = \tilde{u}(x) e^{i\omega t}$, s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{d\tilde{v}}{dx} = 0 \quad (4-10)$$

Conjointement avec les conditions aux limites $\tilde{v}(x=0) = \tilde{v}(x=\frac{\ell}{2}) = 0$, ces deux dernières relations sont suffisantes pour obtenir les fréquences naturelles et les composantes modales recherchées des modes antisymétriques.

On peut aisément montrer que les fréquences naturelles sont données par la relation suivante :

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m}} \quad n=1,2,3 \dots \quad (4-11)$$

où $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots$ représentent respectivement les fréquences naturelles de la première, deuxième, troisième, etc. des modes antisymétriques plans. Les composantes modales correspondantes des modes antisymétriques sont données par :

$$\tilde{v}_n(x) = A_n \sin \frac{2n\pi}{\ell} x \quad n=1,2,3 \dots \quad (4-12)$$

Les composantes longitudinales du mouvement dans ces modes peuvent être retrouvées en considérant la relation (4-10) tout en remarquant que ces composantes sont symétriques

puisque $\frac{dy}{dx} = 0$ au milieu de la travée. Les composantes modales du mouvement

longitudinale sont alors données par :

$$\tilde{u}_n(x) = -\frac{dy}{dx} \tilde{v}_n(x) - \frac{W}{H} \int_0^x \tilde{v}_n(x) dx \quad (4-13)$$

où $W (=mg)$ étant le poids par unité de longueur du câble. En effet, à partir de la relation (4-

10), nous avons pour une composante n : $\frac{d\tilde{u}_n}{dx} = -\frac{dy}{dx} \frac{d\tilde{v}_n}{dx}$.

Après intégration, nous aurons d'une part :

$$\int_0^x \frac{d\tilde{u}_n}{dx} dx = \tilde{u}_n \Big|_0^x = \tilde{u}_n(x) - \tilde{u}_n(0) ; \quad \tilde{u}_n(0) = 0 \quad (*)$$

et d'autre part, le terme $\int_0^x \frac{dy}{dx} \frac{d\tilde{v}_n}{dx} dx$ peut être développé par intégration par partie. Soit en

posant $g(x) = dy/dx$ et $f(x) = \tilde{v}_n(x)$ et en considérant la règle de dérivation du produit de

deux fonctions $gf' = gf - g'f$, on aura ainsi :

$$\int_0^x \frac{dy}{dx} \frac{d\tilde{v}_n(x)}{dx} dx = \frac{dy}{dx} \tilde{v}_n(x) - \int_0^x \frac{d^2y}{dx^2} \tilde{v}_n(x) dx ; \quad \tilde{v}_n(x=0) \text{ étant nulle.}$$

Sachant que d'après la relation 4-1 qui caractérise la forme parabolique du câble

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{W}{H} \text{ entraînant } \int_0^x \frac{dy}{dx} \frac{d\tilde{v}_n(x)}{dx} dx = \frac{dy}{dx} \tilde{v}_n(x) + \frac{W}{H} \int_0^x \tilde{v}_n(x) dx \quad (**).$$

Ce qui nous conduit systématiquement à la relation (4-13) en écrivant $*=-**$.

Si par ailleurs, on remplace la relation (4-12) dans (4-13), il est possible après intégration et réarrangements d'obtenir la relation du mode longitudinal antisymétrique que nous présentons sous la forme suivante :

$$\tilde{u}_n(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{W\ell}{H} \right) A_n \left\{ \left(1 - \frac{2x}{\ell} \right) \sin \frac{2n\pi x}{\ell} + \frac{1}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{\ell} \right) \right\} \quad n=1,2,3... \quad (4-14)$$

où comme indiqué déjà précédemment, A_n étant l'amplitude de la nième composante du mode antisymétrique vertical. Il est clair que les amplitudes des composantes longitudinales deviennent très petites lorsque le câble est presque quasi rectiligne ($\frac{f}{\ell} \ll 1$) du fait que

$$\frac{W\ell}{H} = \frac{8f}{\ell}. \text{ Notons cependant que les composantes longitudinales ont certaines propriétés}$$

particulières. Le maximum de la première composante se produit au quart de la travée et non à mi-travée (fig. 4-2) ainsi que la pente et le déplacement sont bien nuls au milieu de la travée pour la deuxième composante (fig. 4-3).

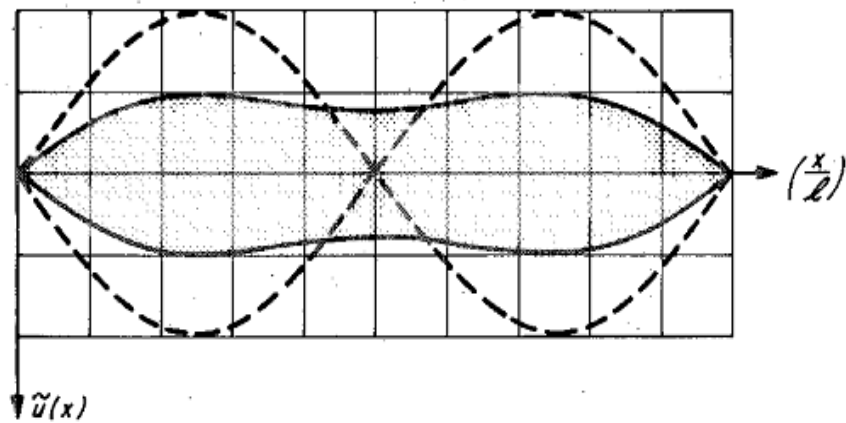


Figure 4-2: Première composante longitudinale du mode antisymétrique [22]

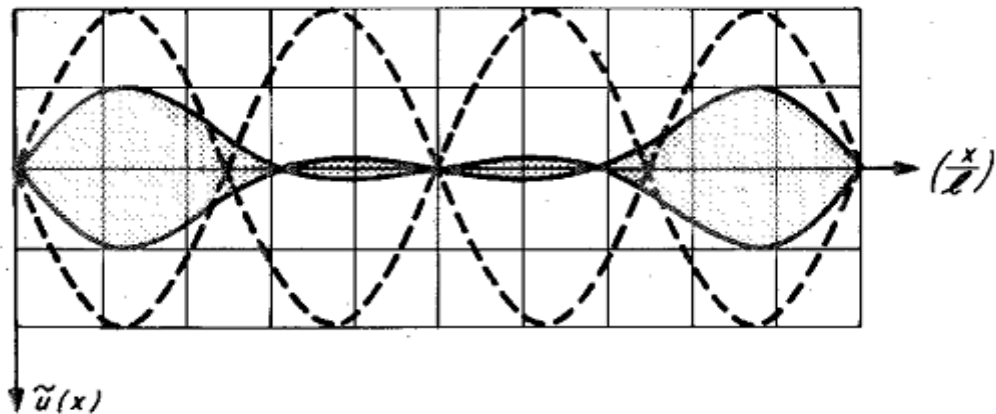


Figure 4-3: Seconde composante longitudinale du mode antisymétrique [22]

4-5-2 Modes symétriques plans

Il s'agit ici de tenir compte de la force de tension additionnelle générée lors de la vibration du câble. Procédons par analogie aux modes antisymétriques mais en posant

$$v(x,t) = \tilde{v}(x)e^{i\omega t}, \quad h(x,t) = \tilde{h}(x)e^{i\omega t} \text{ en sachant que } \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{W}{H}.$$

La relation (4-3) devient donc:

$$\frac{d^2 \tilde{v}}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v} = \frac{W\tilde{h}}{H} \quad (4-15)$$

Par ailleurs, en substituant $u(x,t) = \tilde{u}(x)e^{i\omega t}$ dans l'équation de la poussée du câble (4-5), on obtient :

$$\frac{\tilde{h}}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{d\tilde{v}}{dx} \quad (4-16)$$

A l'aide des conditions aux limites $\tilde{v}(0) = \tilde{v}(\ell) = 0$ et $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(\ell) = 0$, ces deux dernières relations suffisent pour déterminer les fréquences naturelles et les composantes modales des modes symétriques dans le plan.

La solution de la relation (4-15) à l'aide ainsi des conditions aux limites est de la forme suivante :

$$\frac{\tilde{v}(x)}{\left(\frac{W\ell^2}{H}\right)} = \frac{\tilde{h}}{H} \frac{1}{(\beta\ell)^2} \left\{ 1 - \tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \sin \beta x - \cos \beta x \right\} \quad (4-17)$$

où la valeur de $(\beta\ell)$ spécifie la composante particulière modale (symétrique) verticale. Considérons maintenant la relation (4-16) qui devient après intégration par partie en tenant compte des conditions aux limites :

$$\frac{\tilde{h}L^e}{E_c A_c} = \frac{W}{H} \int_0^\ell \tilde{v}(x) dx \quad (4-18)$$

La substitution de la relation (4-18) dans (4-17) en cherchant à éliminer la tension additionnelle \tilde{h} nous conduira à l'équation transcendante suivante qui permet d'obtenir les fréquences naturelles de vibration des modes symétriques plans.

$$\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = \frac{\beta\ell}{2} - \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\beta\ell}{2}\right)^3 \quad (4-19)$$

où $\lambda^2 = \left(\frac{W\ell}{H}\right)^2 \frac{\ell}{\left(\frac{HL^e}{E_c S_c}\right)}$ est un paramètre déjà définis précédemment qui dépend

essentiellement de l'élasticité et de la géométrie du câble. L'équation (4-19) est très importante pour la théorie de vibration des câbles dont les solutions sont fondamentalement en fonction du paramètre λ^2 . Soulignons par ailleurs que les valeurs propres recherchées du problème sont hautement non linéaires en fonction de λ^2 . A la figure 4-3 où nous illustrons quelques solutions de l'équation transcendante (4-19) où nous notons particulièrement les cas trois suivants :

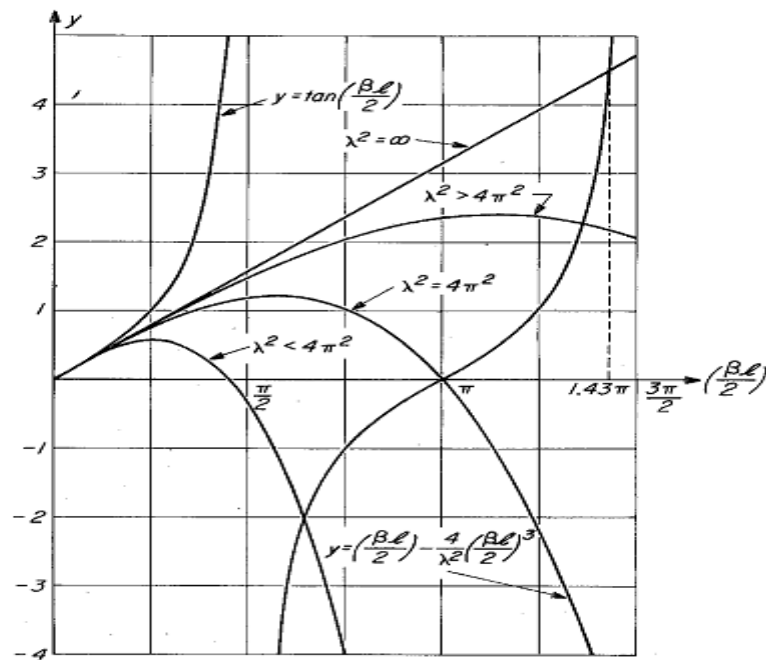


Figure 4-4: Illustration graphique de la première solution non nulle [22] de l'équation transcendante (4-19)

i) λ^2 grand ($=\infty$) ; c'est le cas d'un câble inextensible où l'équation (4-19) se réduit à :

$$\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = \frac{\beta\ell}{2} \quad (4-20)$$

Notons que cette équation apparaît également dans d'autres branches de la mécanique par exemple dans le cas du flambement avec flexion d'une barre articulée à une extrémité et encastrée à l'autre ou comme dans le cas du flambement avec torsion d'une barre entièrement encastrée à ses deux extrémités.

Les deux premières solutions de l'équation (4-20) sont $(\beta\ell)_{1,2} = 2.86 \pi$ et 4.92π . Les autres solutions sont de la forme $(\beta\ell)_n = (2n+1) \pi$ où $(\beta\ell)_n$ contient les fréquences du nième mode symétrique vertical plan d'une barre inextensible.

ii) Rapport flèche/travée petit ($=0$). Dans ce cas, le câble prend une configuration quasi rectiligne où la valeur de λ^2 est très petite qui découle directement via la relation $\frac{W\ell}{H} = \frac{8f}{\ell}$.

L'équation transcendantale (4-19) se réduit alors à :

$$\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = -\infty \quad (4-21)$$

où les valeurs $(\beta\ell)_n = (2n-1) \pi$; $n=1,2,3 \dots$ forment les solutions du nième mode vertical symétrique d'une barre tendue.

iii) D'autres valeurs limites de λ^2 se produisent au voisinage de $4\pi^2$ où nous avons pour le mouvement vertical plan : si $\lambda^2 < 4\pi^2$ (fig.4-5a), la première fréquence du mode symétrique est inférieure à la première fréquence du mode antisymétrique vertical ; Si $\lambda^2 = 4\pi^2$ (fig.4-5b), la première fréquence du mode symétrique est égale à la première fréquence du mode antisymétrique et si $\lambda^2 > 4\pi^2$ (fig.4-5c) la première fréquence du mode symétrique est supérieure à la première fréquence du mode antisymétrique.

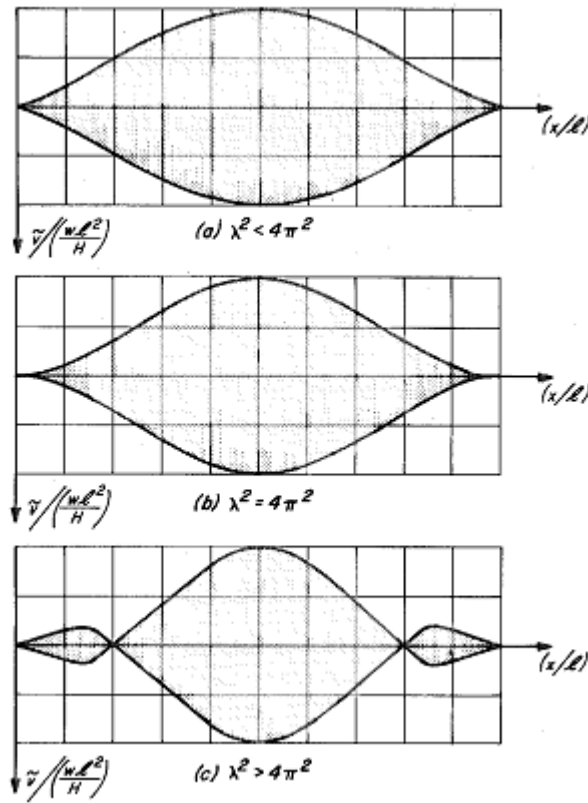


Figure 4-5: Formes possibles de la première composante verticale du mode symétrique plan [22]

Quant enfin pour les composantes modales longitudinales, elles peuvent être retrouvées à partir de l'équation (4-16) soit :

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{d\tilde{v}}{dx} = \frac{\tilde{h}}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 \quad (4-22)$$

et par conséquent :

$$\tilde{u}(x) = \frac{\tilde{h}}{E_c A_c} \int_0^x \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 dx - \frac{dy}{dx} \tilde{v}(x) - \frac{W}{H} \int_0^x \tilde{v}(x) dx \quad (4-23)$$

Les composantes longitudinales sont antisymétriques puisque les deux équations données ci-dessus montrent que le déplacement longitudinal et la pente du câble sont toujours

respectivement nuls et non nulle au milieu de la travée. Après substitution dans l'équation (4-17) et intégration, il est possible d'obtenir la relation suivante :

$$\frac{\tilde{u}(x)}{\left(\frac{W\ell^2}{H}\right)} = \left(\frac{W\ell}{H}\right) \frac{\tilde{h}}{H} \frac{1}{(\beta\ell)^2} \left\{ \frac{(\beta\ell)^2}{\lambda^2} \frac{L_x}{L^e} - \frac{1}{2} \left(1 - 2\frac{x}{\ell}\right) \left(1 - \tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) \sin \beta x - \cos \beta x\right) \right\} - \frac{1}{(\beta\ell)} \left(\beta x - \tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) (1 - \cos \beta x) - \sin \beta x \right) \quad (4-24)$$

où le paramètre de longueur L_x est défini comme suit :

$$L_x = \ell \left[\frac{x}{\ell} + 24 \left(\frac{f}{\ell}\right)^2 \left\{ \frac{f}{\ell} - 2\left(\frac{f}{\ell}\right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{f}{\ell}\right)^3 \right\} \right] \quad (4-25)$$

Comme dans le cas des composantes modales des modes symétriques, la nature antisymétrique longitudinale des modes dépend des valeurs caractéristiques du paramètre λ^2 .

4-5-3 Exemple d'application de calcul des modes de vibration

Considérons de nouveau le pont de longue portée de Bosphore ($\ell=915$ m) déjà décrit au chapitre 3 où il faut déterminer les deux premières périodes de vibration des modes symétriques plans tout en comparant les résultats obtenus avec le code ANSYS et ce en considérant les deux situations suivantes de l'ouvrage:

- quand les câbles sont dans leur position libre (ouvrage en phase de réalisation)
- quand tablier est complètement mis en en place (ouvrage en phase de service)

A- Ouvrage en phase de réalisation (câbles sont dans leur position libre)

Nous avons d'après l'exemple de la section 3-2-5, $\lambda^2 = 2000 \gg 4\pi^2$. L'équation transcendante (4-15) devient dans ce cas :

$$\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = \frac{\beta\ell}{2} - \frac{1}{500}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)^3$$

dont les deux premières solutions diffèrent très peu des valeurs obtenues pour un câble

inextensible i.e: $(\beta\ell)_{1,2} = 2.86\pi, 4.92\pi$. Par conséquent, d'après la formule $\beta^2 = \frac{m}{H}\omega^2$ avec

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; m = \frac{W}{g} \text{ et } g = 9.81 \frac{m}{s^2}, \text{ Il est possible d'écrire pour le mode 1 :}$$

$$(\beta\ell)_1 = \omega_1 \ell \sqrt{\frac{m}{H}} = 2.86\pi \text{ soit } \omega_1 = \frac{(\beta\ell)_1}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m}}.$$

Il vient alors numériquement pour les pulsations et par suite les fréquences de vibration:

$$\omega_1 = \frac{2.86\pi}{915} \sqrt{\frac{6039 \times 9.81}{4.4}} = 1.139 \text{ rad/s}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{1.139} = 5.5 \text{ s.}$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 0.181 \text{ Hz.}$$

De la même façon pour le mode 2 soit en écrivant :

$$(\beta\ell)_2 = \omega_2 \ell \sqrt{\frac{m}{H}} = 4.92\pi \text{ i.e } \omega_2 = \frac{(\beta\ell)_2}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m}}.$$

Il vient numériquement :

$$\omega_2 = \frac{4.92\pi}{915} \sqrt{\frac{6039 \times 9.81}{4.4}} = 1.960 \text{ rad/s}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{1.960} = 3.2 \text{ s}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{T_2} = 0.31 \text{ Hz.}$$

Par suite, les valeurs des deux premières périodes de vibration des modes symétriques sont $T_{1,2} = 5.5$ et 3.2 secondes. Les modes sont illustrés respectivement sur les figures 4-6 et 4-7.

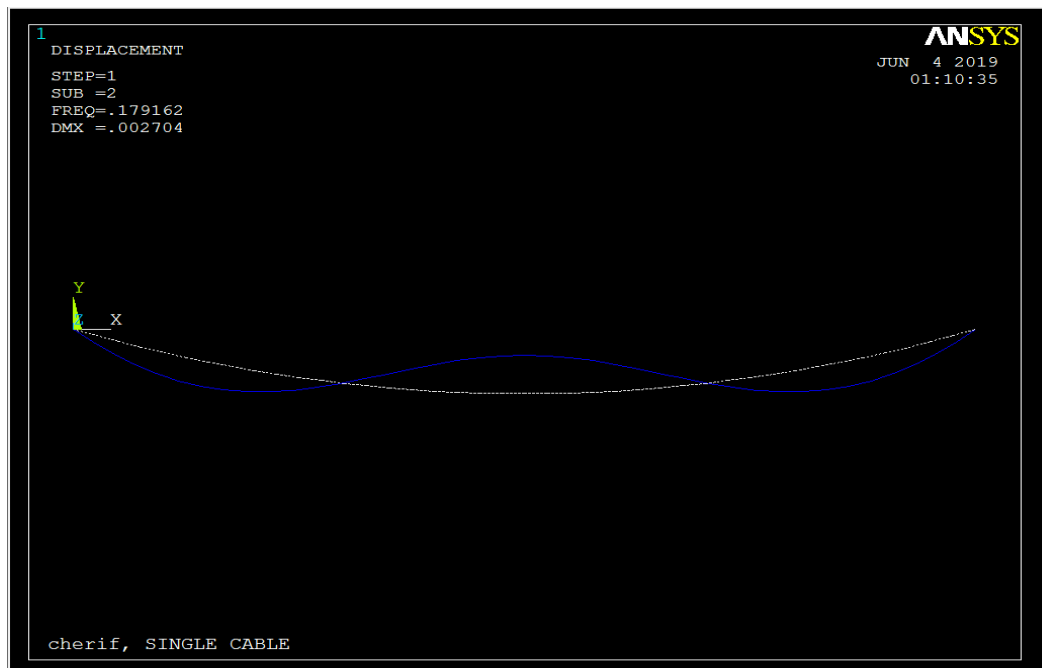


Figure 4-6 : Illustration du mode vibration symétrique 1

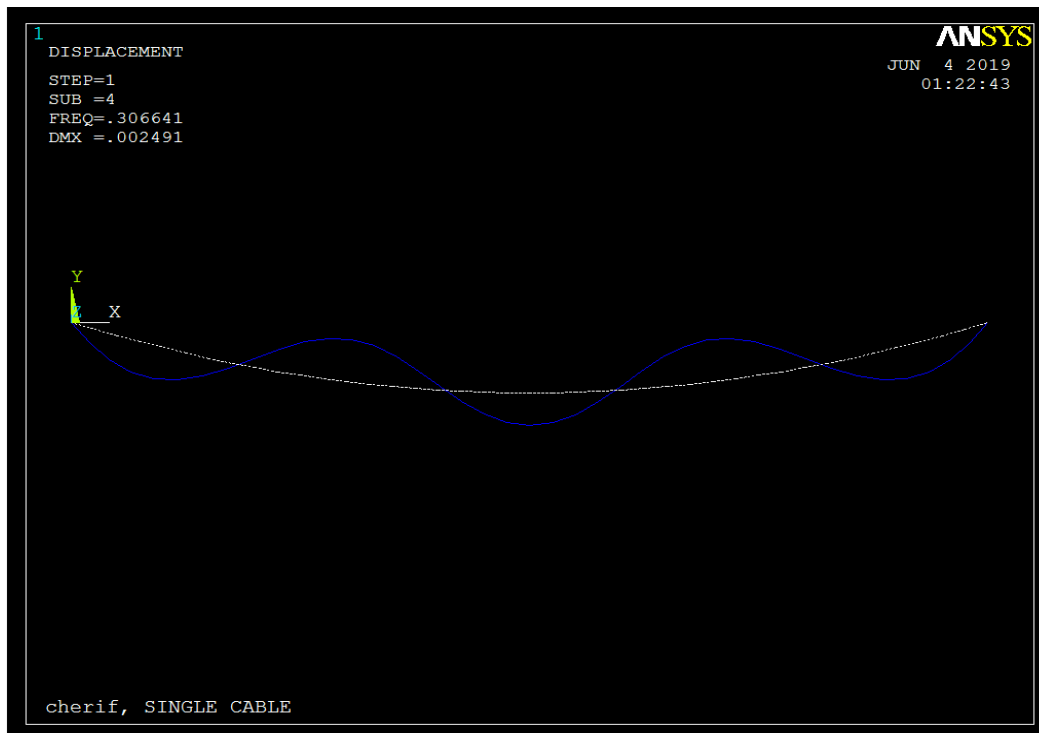


Figure 4-7 : Illustration du mode vibration symétrique 2

B- Quand le tablier est complètement achevé soit en supportant une charge répartie d'intensité $p= 58.8 \text{ kN/m}$

Dans ce cas, nous avons $\lambda^2 = 187 > 4\pi^2$. L'équation transcendante (4-19) devient alors:

$$\tan\left(\frac{\beta\ell}{2}\right) = \frac{\beta\ell}{2} - \frac{1}{47}\left(\frac{\beta\ell}{2}\right)^3$$

dont il est possible de trouver comme solutions :

$$(\beta\ell)_{1,2} = 2.87\pi, 4.24\pi.$$

Notons que la première solution n'a pratiquement pas changé comparativement à celle issue de la théorie inextensible. Ce qui n'est cependant pas pour les mode 2 et supérieurs où les solutions changent d'une manière appréciable à cause principalement de l'augmentation de la flèche du câble qui, d'après l'exemple d'application sous charge répartie de la section 3-3-3,

est de l'ordre 71‰ où $\Delta f = 5.43$ m. Les modes sont illustrés respectivement sur les figures 4-8 et 4-9.

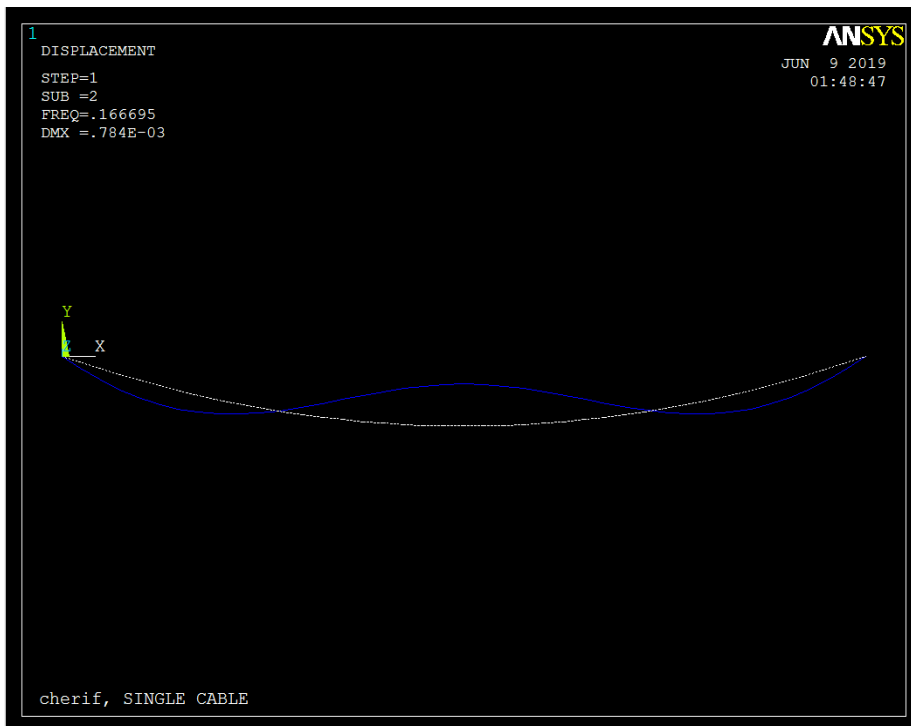


Figure 4-8 : Illustration du mode vibration symétrique 1-tablier complètement chargé

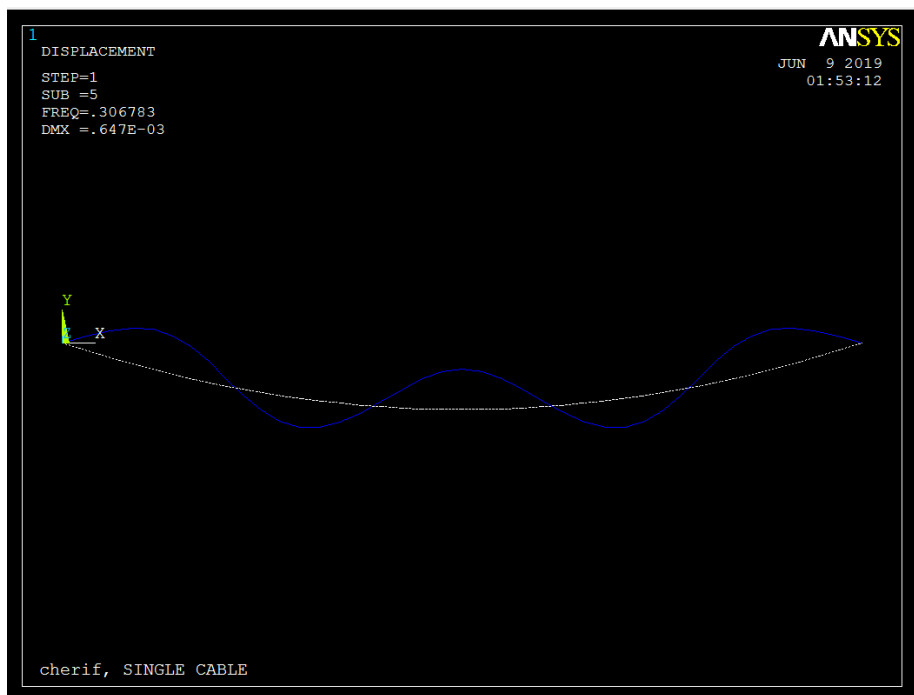


Figure 4-9 : Illustration du mode vibration symétrique 2-tablier complètement chargé

C- Comparaison des résultats avec le code ANSYS

Les fréquences obtenues pour les 10 autres modes de vibration supérieurs ($n=1,2,3,\dots,10$), l'ouvrage étant considéré dans sa phase de réalisation, en les comparant à celles eu par le code ANSYS [23], sont récapitulées dans le tableau donné ci-après. Le fichier des données ANSYS correspondant est donné en annexe. Nous remarquons particulièrement une très bonne concordance des résultats où l'erreur relative n'excède guère 3%.

Mode	Code ANSYS			Méthode analytique		
	transversale	verticale		transversale	verticale	
		symétrique	anti-symétrique		symétrique	anti-symétrique
1	0.0632			0.0634		
2			0.122			0.1268
3	0.1257			0.1268		
4		0.179			0.1813	
5	0.188			0.1902		
6			0.248			0.2536
7	0.250			0.2536		
8		0.306			0.312	
9	0.312			0.317		
10			0.372			0.3804

CHAPITRE 5

CONCLUSIONS GENERALES

5-1 Rétrospective

Le but principal de ce travail consistait essentiellement de mettre au point une méthode de calcul simple, mais suffisamment précise et fiable, permettant d'aborder le calcul statique et dynamique des câbles suspendus, ayant une forme parabolique, soumis à l'action des charges aussi bien statique que dynamique. De tels câbles peuvent supporter des cabines de transport publiques aériens comme dans le cas de téléphériques ou éventuellement un tablier léger supposé dépourvu d'aucune rigidité propre appréciable pouvant dans le cas pratique être l'exemple d'une passerelle piétonnière ou tout simplement dans le cas d'un pont suspendu en phase de réalisation. En deuxième lieu, il s'agissait de mettre en évidence, au moyen d'une analyse paramétrique appropriée, l'effet des paramètres principaux sur le comportement de la structure, et établir leurs valeurs critiques à partir desquelles la non-linéarité se révèle significative.

Les modélisations mathématiques ont été présentées d'une manière succincte où sous l'action des charges statiques d'une part, les fondements théoriques de la méthode de calcul, essentiellement non linéaire, sont basés sur l'équation des déplacements orthogonaux et la condition d'immobilité des extrémités des câbles solidaires des massifs d'ancrage. L'équation cubique qui en résulte, décrivant la tractée ou la poussée dans le câble, est établie de façon à être résolue analytiquement. Sous l'effet dynamique d'autre part, la théorie linéaire en régime vibratoire libre a été adoptée. L'équation d'équilibre de mouvement horizontal et vertical d'un élément différentiel dans la direction longitudinale du câble ainsi que l'équation de la poussée résultante engendrée dans le câble est linéarisée en négligeant les effets de second ordre liés aux grands déplacements. Dans le cas du mouvement transversal vertical, la résolution de l'équation qui en résulte conduit à une équation type transcendante donnant lieu à des modes propres antisymétriques et à des modes propres symétriques qui caractérisent le comportement dynamique en régime vibratoire libre du câble. Les pulsations et les fréquences propres de vibration ainsi que les déformées modales sont alors obtenues.

Les hypothèses admises qui délimitent les conditions de validité de la méthode de calcul sont principalement les suivantes:

- câble parfaitement flexible qui revient à énoncer en langage structural que, tout au long d'un câble en équilibre, le moment fléchissant est nul;
- câbles relativement peu profonds correspondant à un rapport flèche/travée ne dépassant pas l'ordre de 1/10 afin d'assimiler les chaînettes fortement aplaties, dans l'état initial, à des paraboles de 2^{ème} degrés;
- Lors du réglage initial, le câble porteur reprend la totalité des charges uniformément réparties dues au poids propre de l'ouvrage y compris le poids des autres éléments accessoires, engendrant une force de pré-tension dans le câble.
- Surtensions négligeables dans le cas des modes propres antisymétriques.

La méthode est ensuite appliquée d'abord à différents aspects de l'analyse statique d'un câble supportant une ponctuelle comme dans le cas d'une cabine téléphérique ou d'un tablier de pont suspendu lors de sa phase de réalisation. Sous l'aspect dynamique, les pulsations et les fréquences propres sont évaluées selon que le câble est en mode de vibration antisymétrique ou symétrique. Les résultats sont confrontés avec succès à ceux issus du code ANSYS, fortement connu internationalement, qui est un code essentiellement numérique basé sur la méthode des éléments finis.

5-2 Organisation du travail

Le travail présenté dans cette thèse a été organisé en 5 chapitres dont le premier en guise d'introduction a été consacré essentiellement à la nature de la problématique et à la question des structures suspendues ainsi qu'à la description des objectifs fixés.

Le chapitre suivant analyse les conditions de durabilité des câbles dans le but de mettre en relief la vulnérabilité des agressions environnementales (température, pluie, vent, ...) pouvant, s'ils ne sont pas maîtrisés, endommager par fatigue les câbles et ainsi mettre en péril

la stabilité de l'ouvrage. Les conséquences des facteurs de vieillissement des câbles et le choix des matériaux constitutifs de base ont été tout d'abord rapportés et commentés.

Le chapitre trois a été consacré à la revue d'une manière approfondie et commentée des formulations théoriques décrivant le comportement statique d'un câble de suspension pouvant supporter aussi bien son poids propre que des charges ponctuelles ou réparties. Des exemples d'illustration avaient été apportés dans le but de comprendre les fondements mathématiques de base des méthodes de calcul qui sont parfois assez laborieuses à cause surtout du problème des grands déplacements. Le câble est admis fondamentalement de forme parabolique et supposé ancrer solidement à ses extrémités, à des massifs d'ancrage.

L'avant dernier chapitre a trait à la présentation des développements théoriques sous l'action dynamique dont la théorie linéaire en régime vibratoire libre a été adoptée afin de dériver l'équation d'équilibre de mouvement vertical d'un élément différentiel ainsi que l'équation de la poussée résultante engendrée dans le câble en négligeant les effets de second ordre liés aux grands déplacements. La résolution de l'équation qui en résulte conduit à une équation transcendante donnant lieu à des modes propres antisymétriques et à des modes propres symétriques dont les fréquences propres de vibration et les déformées modales sont alors obtenues.

5-3 Résultats obtenus

La méthode analytique de calcul ainsi établie, nous permet de procéder aisément à l'analyse du comportement statique et dynamique en vibration libre cable suspendu à ses deux extrémités dont la configuration initiale est de forme d'une parabole. Son fondement théorique est simple. Appliquée à un système pouvant être le siège d'une cabine d'un téléphérique ou de pont suspendu lors de sa phase de réalisation, la méthode semble fiable et efficace. La comparaison des résultats obtenus révèle une excellente précision que l'on peut obtenir avec la modélisation numérique basée sur le principe de discrétisation par éléments finis où l'erreur n'excède guère en moyenne 3%.

5-4 Recommandations futures

Ce qu'on pourrait enfin suggérer comme études futures pour l'amélioration de ce thème de travail sont les suivantes :

- Étendre et raffiner la méthode de calcul en régime dynamique forcée soit sous charges vibratoires horizontales, telles que par exemple sous l'effet d'une rafale de vent.
- Entreprendre une analyse paramétrique afin de montrer l'effet de certains paramètres sur la stabilité du système comme sa cambrure, la pré-tension de réglage, l'intensité et la disposition des charges verticales ainsi que ses pulsations propres.

Annexe : Fichier de données_ code ANSYS

Comportement d'un cable de suspension d'un pont suspendu en vibration libre

```
/COM,ANSYS of single cable
/PREP7
/TITLE, behaviour of single cable under free vibration
ANTYPE,MODAL
ET,1,LINK180      ! ET: element ! 1:
R,1,0.161,,1      ! 1=> numéro de la constant
                  ! AREA => m^2, , 1=> tension only :activated
NLGEOM,ON        ! active large displacement
SSTIF,ON         ! STRESS STIFFENING
MP,EX,1,180E9    ! module de Young N/m^2
mp,prxy,1,0.3    ! Coefficient de Poisson
mp,dens,1,2785.85 ! Masse volumique
nn=41            ! number of nodes
ne=nn-1          !(nn-1): number of elements
L=915            ! longueur de la travée m
pas=L/ne         ! dimension de l'élément
f=L/12           ! flèche à mi-travée
                 ! forme parabolique
*do,i,1,nn
xx=(i-1)*pas
y=-4*f*xx*(L-xx)/L**2
N,i,xx,y
*enddo
! générer les noeuds
E,1,2            ! créer un element entre les noeuds 1 et 2
EGEN,ne,1,-1     ! créer 'ne' éléments
!déformation initiale
INIS,SET,CSYS,-2
```

```

INIS,SET,DTYP,EPEL

!données du cable
w=4400
E=180e9
S=0.161
H=6039000

x=-pas
*do,i,1,ne
x=x+pas
tt=w*((L/2)-x)
T=(H**2+tt**2)**0.5
def=T/(E*s)
INIs,DEFINE,i,,def
*enddo
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

NSUBST,5

OUTPR,,3
OUTPR,NLOAD,3    ! PRINT NODAL FORCES
KBC,3            ! STEP CHANGE B.C.'S
! BOUNDARY CONDITIONS
D,1,ALL        ! les 3 ddl(ux,uy,uz) du noeud 1 sont nuls
D,41,ALL
!D,1,UZ,,41
! Application du poids propre 4.4KN/m
*do,j,2,40
F,j,FY,-100.65
*enddo
acel,-9.81    ! appliquer la pesanteur
FINISH
/SOLU
SOLVE
FINISH

```

Références

- [1] Juozpaitis A. and al., 2010. Non linear analysis of suspension bridges with flexible and rigid cables, *Journal of Civil Eng. and Mang.*, 16:1, pp.149-151.
- [2] Desai Y.M. and al., 1989. Geometric nonlinear static analysis of cable supported structures, *Computers & Structures*, V. 29, N° 6, pp. 1001, 1009.
- [3] Goremikins V. and al., 2013. Simplified method of determination of natural-vibration frequencies of prestressed suspension bridges, *Procedia Engineering*, 57, pp. 343-352.
- [4] Grogorjeva T., Juozpaitis A. and Kamaitis Z., Static analysis and simplified design of suspension bridges having various rigidity of cables, 2010, *Journal of Civil Eng. And Mang.*, 16:3, pp. 363-371.
- [5] SETRA, novembre 2001. Haubans, Recommandations de la commission interministérielle de la précontrainte, www.setra.equipement.gouv.fr.
- [6] Virlogeux M, 1998. Cable vibration in cable stayed bridges, *Bridge aerodynamics*, Larsen Esdahl editors, Rotterdam.
- [7] Virlogeux M, Lacoste G., Fontaine J.F., Le faucheur D., Mai 1986. Réflexions sur la résistance à la fatigue des haubans : détermination des conditions de l'essai de réception des haubans et des ancrages du pont de Seyssel.
- [8] Kmet S. and Kokorudova Z., Non-linear closed-form computational model of cable trusses, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44, 2009, PP. 735-744.
- [9] Laboratoire central des ponts et chaussées (LCPC), 1989. Les ponts suspendus en France, Service d'études techniques des routes et autoroutes, Paris.
- [10] Irvine, M., 1994. Studies in the statics and dynamics of simple cable systems, PhD Thesis, Dynamics laboratory, California institute of technology, DYNL-108.
- [11] Routh E.J., 1891. *Analytical statistics*, Cambridge, Vol. 1, Chapter X.
- [12] Pugsley, A.G., 1957. *The theory of suspension bridges*, Edward Arnold, London, Chapters I,II,III.
- [13] Whittaker E.T.,1944. *Analytical dynamics*, Fourth edition, Dover, pp. 34, 177.
- [14] Irvine, M., Studies in the statics and dynamics of simple cable systems, PhD Thesis, Dynamics laboratory, California institute of technology, DYNL-108, 1994.
- [15] Krishna, P. et Natrajan, P.R., Analysis of doubly curved suspended cable networks, June 1986, *Int. Ass. of Shell Structure*, Bul. N°34.
- [16] Watson G.N., 1966. *Theory of Bessel functions*, Second edition, Cambridge, pp. 3-5.
- [17] Routh E.J., 1955. *Advanced dynamics of rigid bodies*, Sixth edition, Dover, p.178, Chapter XIII.

- [18] Rhors J.H., 1851. On the oscillations of a suspension chain, Transaction Cambridge philosophical Society, Volume IX, Part III, pp. 379-398.
- [19] Rohrs, J.H., 1941. The failure of the tacoma narrows bridge, Board of engineers, Amman O.H., Von Karman T., Federal work agency, March 28, Appendix VI.
- [20] Vincent G.S., 1965. A summary of laboratory and fields studies in the united states on wind effects on suspension bridges, Proceedings of conference on wind effects on buildings and structures, Teddington, England, V. II pp. 512-522.
- [21] Routh E.J., Advanced dynamics of rigid bodies, Sixth edition, Dover, 1955, p.178, Chapter XIII.
- [22] Irvine, M., 1994. Studies in the statics and dynamics of simple cable systems, PhD Thesis, Dynamics laboratory, California institute of technology, DYNL-108.
- [23] ANSYS® Academic Research, Release 15.0 <http://www.ansys.com/>.
- [24] Latteur P., 2014. Calculer une structure – de la théorie à l'exemple, Chapitre 13_Les câbles, ed. academia-Bruylant, www.issd.be.