

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université MOULOUD MAMMARI de TIZI-OUZOU



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



En vue d'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Mémoire de Fin d'études

Thème

Résolution d'un Problème Linéaire

Fractionnaire Multi-Objectifs Flou

Proposé et dirigé par :

M^{me} BOUARAB Ouiza

Réalisé par :

M^{elle} CHALLAL Keltouma

Devant le jury :

M ^{me} KHEFFACHE. R	Maître de conférences « B »	U.M.M.T.O	Présidente
Mr MERAKEB. A	Maître de conférences « A »	U.M.M.T.O	Examineur
M ^{me} BOUARAB. O	Maître de conférences « B »	U.M.M.T.O	Promotrice

Promotion 2017 /2018

Remerciements

♦ Je remercie Dieu Clément et Miséricordieux, tout puissant d'avoir guidé mes pas vers les portes du savoir tout en illuminant mon chemin, et m'avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour mener ce travail à terme.

♦ Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à ma promotrice **M^{me} BOUARAB Ouïza** qui m'a guidé et m'a orienté, je lui exprime ma grande gratitude pour l'attention et le temps qu'elle m'a consacré ainsi que les précieux conseils qu'elle m'a prodigué.

♦ Je remercie également les membres de jury de m'avoir honoré en acceptant d'évaluer mon travail.

♦ Je témoigne une reconnaissance particulière aux enseignants qui m'ont suivi pendant mon cursus universitaire.

♦ Enfin, je remercie mes camarades de ma promotion, je leur exprime ma profonde sympathie et je leurs souhaitent beaucoup de réussite, ainsi que toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

■ *Mes très chers parents que nulle dédicace ne puisse exprimer ce que je leurs dois, pour leur bienveillance, leur amour et leur soutien ..." Que Dieu vous garde "*

■ *Mes chers frères que je remercie pour leurs encouragements, leurs aides et leur soutien.*

■ *Mes chers cousins et chères cousines qui n'ont jamais cessé de m'encourager et de m'aider.*

■ *La mémoire de ma grand-mère paternelle que Dieu l'accueille dans son vaste paradis.*

■ *Mes amis et tous ceux qui me sont chers.*

Table des matières

Notations	4
Avant propos	5
Introduction générale	6
1 Programmation Multi-Objectifs Déterministe	8
1.1 Introduction	8
1.2 Formulation du problème	8
1.3 Dominance	10
1.3.1 Dominance	10
1.3.2 Dominance forte	10
1.3.3 Propriétés de la relation de dominance	11
1.4 Optimalité de Pareto	11
1.4.1 Efficacité	11
1.4.2 Efficacité forte	11
1.4.3 Ensemble Pareto et Surface de Pareto	11
1.5 Détection graphique de l'efficacité	12
1.6 Solutions supportées et solutions non supportées	13
1.7 Dominance au sens de Geoffrion	14
1.8 Caractérisation des solutions efficaces	16
1.9 Points particuliers	19
1.9.1 Point idéal	19
1.9.2 Point anti-idéal	20
1.9.3 Matrice des gains	20
1.9.4 Point nadir	20
1.10 Approches de résolution d'un problème linéaire multi-objectifs	22
1.10.1 Problématique	22
1.10.2 Approche 1: Approche mono-objectif	22
1.10.3 Approche 2: Approche multi-objectifs	25
1.11 Conclusion	26
2 Programmation Linéaire Fractionnaire Mono-Objectif	27
2.1 Introduction	27
2.2 Forme d'un Programme Linéaire Fractionnaire Mono-Objectif	27
2.3 Notions sur l'optimisation convexe	27
2.3.1 Combinaison linéaire convexe	27
2.3.2 Enveloppe convexe	28
2.3.3 Polyèdre	28
2.3.4 Point extrême	28

2.3.5	Fonction concave	29
2.4	Fonctions convexes généralisées	30
2.4.1	Fonction quasiconvexe	30
2.4.2	Fonction quasiconcave	30
2.4.3	Fonction strictement quasiconvexe	31
2.4.4	Fonction différentiable	31
2.4.5	Fonction pseudoconvexe	32
2.4.6	Fonction pseudoconcave	32
2.4.7	Conditions nécessaires d'optimalité	33
2.5	Résultats théoriques sur l'optimisation linéaire fractionnaire	34
2.6	Résolution d'un Problème Linéaire Fractionnaire	35
2.6.1	La résolution directe	35
2.6.2	Résolution par paramétrisation [7]	39
2.6.3	Résolution d'un programme équivalent [3]	39
2.7	Conclusion	41
3	Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs	42
3.1	Introduction	42
3.2	Formulation du problème	42
3.3	Complexité du problème	43
3.4	Conversion du Problème Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs en Programme Linéaire	43
3.5	Conclusion	47
4	Logique Floue	48
4.1	Introduction	48
4.2	Préliminaires sur les ensembles flous	48
4.2.1	Ensemble flou	49
4.2.2	Noyau d'un ensemble flou	50
4.2.3	Ensemble flou normalisé	50
4.2.4	Ensemble flou convexe	50
4.2.5	Nombre flou	50
4.2.6	Opérations sur les ensembles flous	51
4.2.7	Fonction de référence	52
4.2.8	Nombre flou de type L-R	52
4.2.9	Nombre flou de type triangulaire	53
4.2.10	Comparaison et arithmétique de nombres flous triangulaires	54
4.2.11	Nombre flou de type trapézoïdal	55
4.2.12	Comparaison et arithmétique de nombres flous trapézoïdaux	55
4.3	Principe d'extension de Zadeh	56
4.4	Conclusion	57
5	Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs Floue	58
5.1	Introduction	58
5.2	Forme générale d'un problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs Floue	58
5.3	Défuzzification	59
5.4	Résolution d'un problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs Floue	62
5.5	Organigramme récapitulatif	64

5.6	Exemple numérique:	66
5.7	Conclusion :	73
6	Implémentation et Résultats	74
6.1	Introduction	74
6.2	Choix de langage	74
6.3	Présentation du langage de programmation MATLAB	75
6.4	Application de l'exemple sur MATLAB	75
6.5	Conclusion	86
	Conclusion générale	87
	Bibliographie	87

Notations

- FMOLFPP : Fuzzy Multi-Objective Linear Fractional Programming Problem (Problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs Floue)
- MOLFPP: Multi-Objective Linear Fractional Programming Problem (Problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs).
- LFPP: Linear Fractional Programming Problem (Problème de Programmation Linéaire Fractionnaire).
- LPP: Linear Programming Problem (Problème de Programmation Linéaire).
- LP: Linear Program (Programme Linéaire).

Avant propos

La Recherche Opérationnelle (R.O), aussi appelée science du management ou science de la décision, est une discipline dont l'objet est d'aider les gestionnaires à prendre des décisions en utilisant des modèles et des méthodes scientifiques adaptées.

On situe la naissance de la R.O lors de la deuxième guerre mondiale, lorsque l'état-major britannique Patrick Maynard Stuart Blackett fit appel à des équipes de mathématiciens et de physiciens pour l'aider à analyser des questions de stratégie militaire (développement d'un réseau de radars, organisation des convois maritimes...). Après la guerre, cette approche systématique et scientifique des problèmes de décision a été transposée au monde économique et industriel où elle a connu de nombreux succès. Depuis, de nouvelles méthodes et de nouveaux champs d'application ont vu le jour.

La Recherche Opérationnelle (R.O) est la discipline des méthodes scientifiques et techniques mathématiques utilisables pour élaborer de meilleures décisions. Elle permet de rationaliser, de simuler et d'optimiser l'architecture et le fonctionnement des systèmes de production ou d'organisation.

La R.O propose des méthodes conceptuelles pour analyser des situations complexes et permet aux décideurs de faire les choix les plus efficaces grâce à :

- Une meilleure compréhension des problèmes,
- La vision complète des données,
- La considération de toutes les solutions possibles,
- Des prédictions prudentes de résultats incluant une évaluation des risques,
- Des outils et des méthodes modernes d'aide à la décision.

La R.O. apparait comme une discipline carrefour associant les mathématiques, l'économie et l'informatique. Elle est par nature en prise directe sur l'industrie et joue un rôle-clé dans le maintien de la compétitivité.

Les apports de la R.O sont visibles tout autour de nous dans des domaines les plus divers: de l'organisation des lignes de production de véhicules à la planification des missions spatiales, voir dans la vie de tous les jours dans l'organisation du traitement des produits recyclables, l'organisation des ramassages scolaires ou la couverture satellite des téléphones portables.

"La vie elle même est affaire de Recherche Opérationnelle"

Introduction Générale

L'une des principales missions de la Recherche Opérationnelle est d'aider à prendre des décisions en vue d'une gestion efficace, rationnelle et logique.

Depuis les années 70, les activités de recherche en Recherche Opérationnelle au niveau mondial n'ont cessé de se développer tant au niveau de ses concepts théoriques et de l'amélioration technique de ses outils d'optimisation qu'au niveau applicatif où elle intervient de manière cruciale dans des secteurs de plus en plus nombreux et diversifiés comme : «la production industrielle, la planification, le transport, l'informatique, les télécommunications, l'énergie, mais aussi dans les banques et les assurances... etc ». Les modèles traditionnels développés dans le cadre des méthodes quantitatives de gestion considéraient en général un objectif unique, pour lequel il existe une solution optimale. Les algorithmes mis au point consistent alors à définir un moyen d'atteindre, le plus rapidement possible, une telle solution. Cependant, dans de nombreux cas cette modélisation ne traduit pas exactement la réalité.

La plupart des problèmes réels intervenant en mathématiques de décision sont de nature qui impose la prise en compte de plusieurs objectifs qui sont souvent antagonistes . Tout décideur est obligé de tenir compte du maximum d'éléments en sa possession, pour aboutir à la meilleure décision possible.

Ainsi pour mieux appréhender la réalité, l'approche multi-objectifs devient incontournable. Il est utile dans ce cas de définir un concept d'optimalité, d'étudier les propriétés et les conditions d'existence des solutions et déterminer des méthodes pratiques de recherche des décisions relatives à ce concept d'optimalité([8],[22],[24]).

La programmation fractionnaire a attiré l'attention de nombreux chercheurs. La raison principale de l'intérêt dans la programmation fractionnaire provient du fait que des modèles de programmation pourraient mieux répondre aux problèmes réels si l'on considère l'optimisation des rapports des propriétés physiques et / ou des quantités économiques.

Plusieurs applications des programmes mathématiques fractionnaires ont déjà été décrites dans la littérature([10],[19],[21]), Comme domaines d'applications des problèmes fractionnaires soumis à un ensemble de contraintes, nous pouvons citer par exemple:

- Le domaine des finances où il est souvent question d'optimiser un rapport de deux fonctions telles que [dette/capitaux propres], [rendement/employé], [coût effectif/coût standard], [bénéfice/coût], [inventaire/ventes], [risque des actifs/capital].
- Le domaine de la santé comme la planification dans un hôpital [coût/patient], [infirmière/patient], [docteur/patient]...etc.
- Les processus de décision de Markov peuvent également mener à la maximisation du rapport de la moyenne et l'écart type.

Aussi, dans certaines situations les connaissances dont nous disposons sur une situation quelconque sont imparfaites soit parce que nous avons un doute sur leur validité, elles sont alors incertaines, soit parce que nous éprouvons une difficulté à les exprimer clairement, elles sont alors imprécises.

Les connaissances imprécises n'ont été prises en considération qu'à partir de 1965, lorsque L.A. ZADEH [23], professeur à l'université de Californie à Berkeley a introduit la notion de sous-ensemble flou, à partir de l'idée d'appartenance partielle à une classe de catégorie aux limites mal définies dans une généralisation dans la théorie classique des ensembles admettant des situations intermédiaires entre le tout et le rien ([4], [15]).

C'est ainsi que dans notre travail, nous nous sommes intéressés au cas où les objectifs sont linéaires fractionnaires flous et les contraintes sont linéaires floues. Les problèmes en question sont connus sous le nom de problèmes linéaires fractionnaires multi-objectifs flous ([6], [11], [16], [17], [18]).

A cet effet, nous avons structuré notre travail comme suit:

- Dans le chapitre 1: Nous nous sommes intéressés à l'optimisation multi-objectifs, en rappelant les différentes définitions de base, les théorèmes d'existence des solutions efficaces et quelques approches utilisées pour résoudre ce type de problèmes.
- Dans le chapitre 2: Nous présentons les notions de base de la programmation linéaire fractionnaire mono-objectif, ainsi que quelques stratégies de résolution telles que la résolution directe où nous avons cité la méthode de Cambini, la résolution par paramétrisation, et la résolution d'un problème équivalent où la méthode de Charne et Cooper est présentée.
- Le chapitre 3 est réservé à la programmation linéaires fractionnaires multi-objectifs, où nous exposons la méthode de Guzel qui nous permet de convertir un problème linéaire fractionnaire multi-objectifs en problème linéaire.
- Le chapitre 4 est consacré à la logique floue où les notions de base et définitions nécessaires à la compréhension de la théorie des ensembles flous sont présentées.
- Dans le chapitre 5, la programmation fractionnaire linéaire multi-objectifs floue est abordée, nous avons donné la forme générale du problème et nous avons décrit une méthode pour résoudre ce type de problème en combinant les méthodes proposées par Chen et Hsieh [4] et Guzel([13], [14]), puis nous avons illustré la méthode proposée par un exemple numérique.
- Le chapitre 6 finalise notre travail par l'implémentation du problème linéaire fractionnaire multi-objectifs flou sur le logiciel MATLAB.

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion générale et la bibliographie utilisée.

Chapitre 1

Programmation Multi-Objectifs Déterministe

1.1 Introduction

La vie réelle foisonne de problèmes qui cherchent une solution. La majorité de ces problèmes ont des solutions qui ne sont pas forcément convenables selon un ou plusieurs critères bien définis. La plupart des problèmes d'optimisation réels sont décrits à l'aide de plusieurs objectifs ou critères souvent contradictoires et parfois complémentaires qui doivent être optimisés simultanément. Pour les problèmes n'incluant qu'un seul objectif, l'optimum recherché est clairement défini, celui-ci reste à formaliser pour les problèmes d'optimisation multi-objectifs.

Prenons le cas d'une personne souhaitant acheter une maison. La maison idéale est celle qui est peu chère avec beaucoup d'espace et bien située si possible, mais cette maison idyllique n'existe pas. Notre acheteur va donc devoir identifier les meilleurs compromis possibles correspondants à son budget.

Plusieurs autres problèmes peuvent être décrits de la même manière ([15],[22]), tels que l'établissement d'un emploi du temps scolaire, c'est un problème multi-objectifs de nature car il faut en même temps optimiser plusieurs objectifs tels que: le volume horaire à enseigner, l'occupation des locaux, la charge horaire par enseignant, le nombre de matières... etc.

Dans ce qui suit, nous donnerons quelques définitions et notions nécessaires à la compréhension de certains concepts de base que nous utiliserons dans la suite.

1.2 Formulation du problème

Mathématiquement, un problème de programmation linéaire multi-objectifs peut être défini de la manière suivante:

$$\text{(MOLP)} \quad \begin{cases} \text{Optimiser} & Z(x) = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_k(x)) \\ \text{S.c.} & \\ & x \in S \end{cases} \quad (1.1)$$

Où $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ est l'ensemble non vide des solutions réalisables ou admissibles, avec A matrice réelle de type (m, n) et b vecteur réel d'ordre m ,

$k \geq 2$ est le nombre de fonctions objectifs,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ représente le vecteur de décision, avec $x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$ sont les variables

de décision et n le nombre de variables de décision,

L'ensemble \mathbb{R}^n qui contient S ($S \subset \mathbb{R}^n$) est dit espace de décision,

L'ensemble $\psi = Z(S)$ est l'image de l'ensemble S sur l'espace des objectifs \mathbb{R}^k ,

ψ est appelé espace admissible des critères, avec, $Z(x) = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_k(x))^t$ est le vecteur de k fonctions objectifs,

$$\psi = Z(S) = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_k)^t \in \mathbb{R}^k / y = z(x) / x \in S\} \subset \mathbb{R}^k.$$

Exemple 1.1. Pour $n = 2$ et $k = 2$.

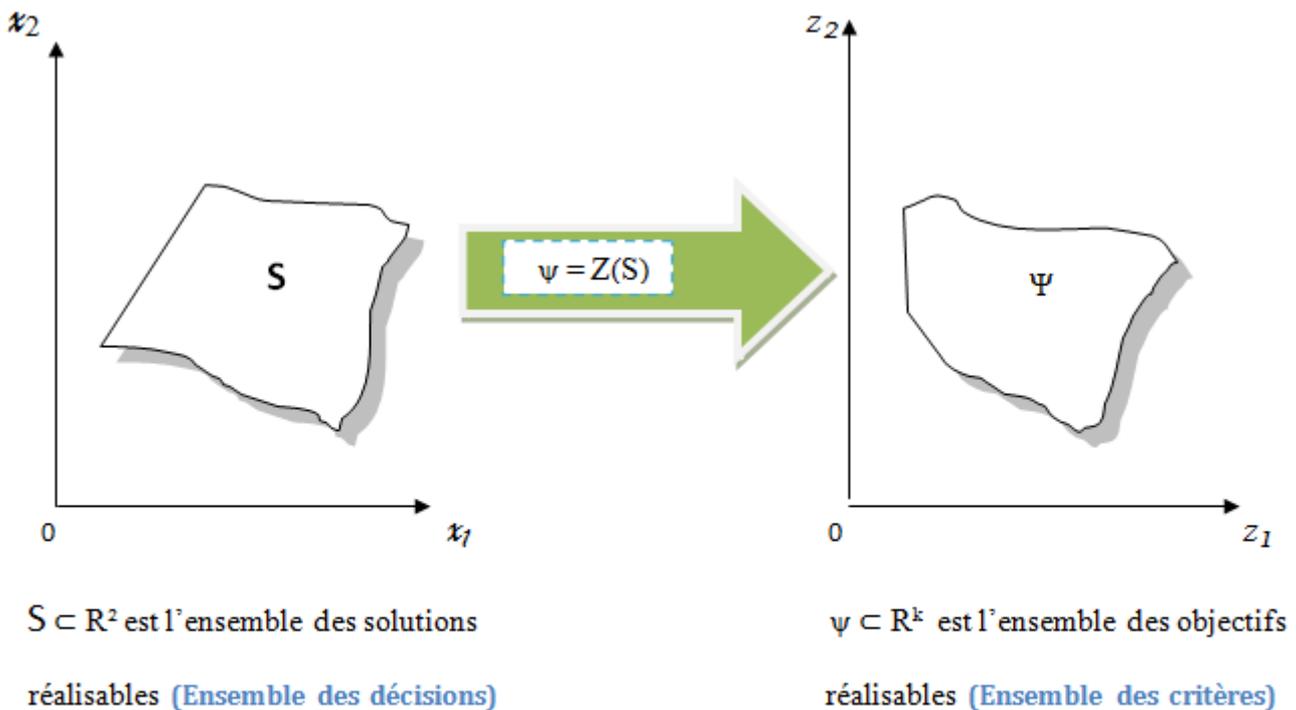


Figure 1.1: Représentation graphique de l'ensemble des décisions et l'ensemble des critères admissibles.

Remarque

Dans ce chapitre, nous considérons que toutes les fonctions objectifs sont à " minimiser ", en effet :

Un problème de maximisation peut être aisément transformé en problème de minimisation (et vice versa) en considérant l'équivalence suivante:

$$\text{maximiser } Z(x) \iff \text{minimiser } (-Z(x)).$$

1.3 Dominance

A la fin du 19^{ème} siècle (1896), l'économiste Vilfredo Pareto ([8], [15], [22], [24]), formule un concept d'optimalité qui porte son nom (optimalité au sens de Pareto) qui constitue les origines de la recherche sur l'optimalité multi-objectifs.

1.3.1 Dominance

Définition 1.1

Soient deux vecteurs: $Z^1 = (z_1^1, z_2^1, \dots, z_k^1) \in \mathbb{R}^k$ et $Z^2 = (z_1^2, z_2^2, \dots, z_k^2) \in \mathbb{R}^k$.

On dit que le vecteur Z^1 domine le vecteur Z^2 pour un problème à minimum si et seulement si :

$Z^1 \leq Z^2$ et $Z^1 \neq Z^2$, c'est à dire : $z_i^1 \leq z_i^2 \forall i \in \{1, \dots, k\}$ et $z_l^1 < z_l^2$ pour au moins un $l \in \{1, \dots, k\}$.

Ou bien : Le vecteur Z^1 est meilleur que le vecteur Z^2 si :

1. Les composantes de Z^1 sont meilleures ou égales que les composantes de Z^2 .
2. Au moins une composante de Z^1 est meilleure que la composante correspondante de Z^2 .

Ou bien : On dit que le vecteur Z^1 domine le vecteur Z^2 si :

- Z^1 est au moins aussi bon que Z^2 sur tous les objectifs.
- Z^1 est strictement meilleur que Z^2 sur au moins un objectif.

1.3.2 Dominance forte

Définition 1.2

On dit que le vecteur Z^1 domine fortement le vecteur Z^2 si et seulement si :

$Z^1 < Z^2$, c'est à dire: $z_i^1 < z_i^2 \forall i \in \{1, \dots, k\}$, dans ce cas :

Z^1 est strictement meilleur que Z^2 .

Exemple 1.2.

Soient les vecteurs: $Z^1 = (3, 2, 7)$, $Z^2 = (4, 6, 9)$, $Z^3 = (3, 7, 11)$.

Z^1 domine fortement Z^2 ou Z^2 est fortement dominé par Z^1 .

Z^1 domine Z^3 .

Z^2 et Z^3 sont incomparables.

→ Z^1 domine Z^2 et Z^3 .

1.3.3 Propriétés de la relation de dominance

La relation de dominance :

- n'est pas réflexive car U ne domine pas U (elle est irréflexive),
- n'est pas antisymétrique car on a jamais U domine V et V domine U ,
- n'est pas symétrique, car si U domine $V \not\Rightarrow V$ domine U ,
- est asymétrique $\iff \forall U, V$ si U domine $V \implies V$ ne domine pas U ,
- est transitive, car si :
$$\begin{cases} U \text{ domine } V \\ \text{et} \\ V \text{ domine } Z \end{cases} \implies U \text{ domine } Z .$$

Définition 1.3

Une relation de dominance binaire est dite relation d'ordre partiel strict si :

- Elle est asymétrique et transitive.

Ou

- Elle est irréflexive et transitive .

Résultat:

La relation de dominance est une relation d'ordre partiel strict sur l'espace des objectifs.

1.4 Optimalité de Pareto

1.4.1 Efficacité

Définition 1.4

Une solution réalisable $x^* \in S$ est dite efficace (ou Pareto optimale) si et seulement s'il n'existe aucune solution $x \in S$ telle que :

$$z_i(x) \leq z_i(x^*), \forall i \in \{1, \dots, k\} \text{ et } z_i(x) < z_i(x^*) \text{ pour au moins un indice } i \in \{1, \dots, k\}.$$

1.4.2 Efficacité forte

Définition 1.5

Une solution $x^* \in S$ est dite fortement efficace si et seulement s'il n'existe aucune solution $x \in S$ telle que:

$$z_i(x) < z_i(x^*), \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

1.4.3 Ensemble Pareto et Surface de Pareto

Définition 1.6

Dans l'ensemble réalisable S . L'ensemble des solutions efficaces ou l'ensemble de solutions Pareto-optimales du problème (1.1) constitue l'ensemble Pareto du programme linéaire multi-objectifs (MOLP).

Définition 1.7

Dans l'espace réalisable de critères ψ , l'image de l'ensemble Pareto est appelé Frontière de Pareto ou Surface de Pareto, ou Front de Pareto.

1.5 Détection graphique de l'efficacité

Pour tester graphiquement l'efficacité d'une solution, Ralph Steuer a introduit le concept d'ensemble dominant qui est principalement basé sur la notion du cône.

Définition 1.8 (Cône)

Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ($K \neq 0_{\mathbb{R}^n}$), K est un cône de \mathbb{R}^n si et seulement si :
 $\forall x \in K, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \cdot x \in K$.

Remarque:

- L'origine $0_{\mathbb{R}^n}$ doit être contenue dans chaque cône.
- Tous les cônes sont non bornés.

Exemple 1. 3

- Le demi espace fermé: $K = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq 0\}$ est un cône.
- Le demi espace ouvert $K' = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) < 0\}$ n'est pas un cône car il ne contient pas l'origine.

Définition 1.9

- Un cône négatif C^- est défini par $C^- = \{x \in \mathbb{R}^n / z(x) \in \mathbb{R}^k \text{ avec } z(x) \leq 0\} \rightarrow$ pour un problème multi-objectifs à minimum.
- Un cône positif C^+ est défini par $C^+ = \{x \in \mathbb{R}^n / z(x) \in \mathbb{R}^k \text{ avec } z(x) \geq 0\} \rightarrow$ pour un problème multi-objectifs à maximum.

Théorème 1.1 (théorème du contact) [16]

Une solution $x \in \mathbb{R}^n$ est efficace pour un problème multi-objectifs si et seulement si :

$$\begin{cases} (C^- + x) \cap S = \{x\} & : \text{Pour un problème à minimum.} \\ (C^+ + x) \cap S = \{x\} & : \text{Pour un problème à maximum.} \end{cases}$$

Ce théorème fournit un test permettant de détecter les solutions efficaces géométriquement, c'est à dire:

Si $Dx \cap S = \{x\} \implies x$ est efficace pour le problème multi-objectifs.

Si $Dx \cap S \neq \{x\} \implies x$ n'est pas efficace pour le problème multi-objectifs.

Où $Dx = C^- + \{x\}$ ou $Dx = C^+ + \{x\}$ est appelé " ensemble dominant ".

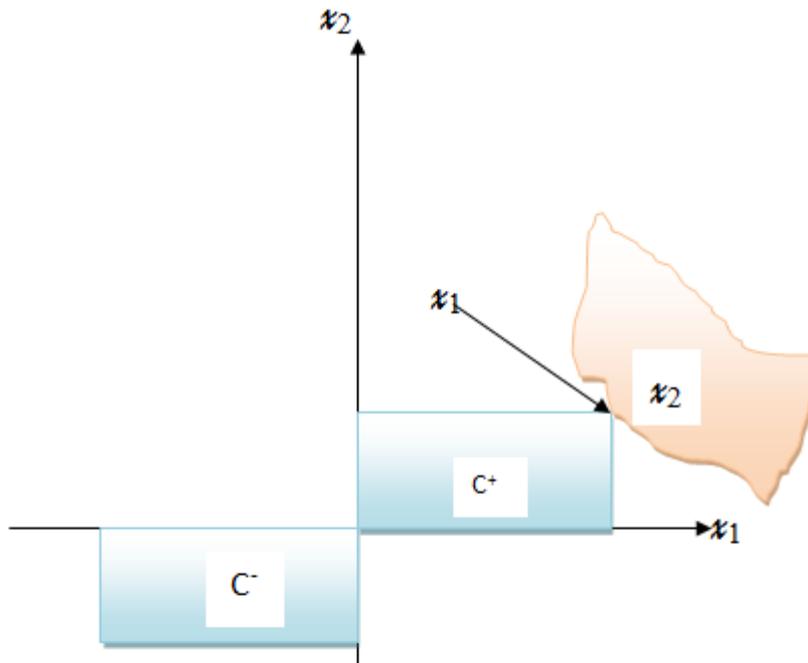


Figure 1.2 : Détection graphique de l'efficacité

Dans la figure ci-dessus nous avons x_1 est efficace et x_2 est non efficace.

1.6 Solutions supportées et solutions non supportées

La définition de Front se réfère à l'espace des objectifs. Sur le Front Pareto, deux types de solutions peuvent être différenciées, les solutions supportées et les solutions non supportées:

Les solutions supportées: Sont celles qui appartiennent aux portions convexes du Front Pareto (elles sont situées sur la frontière).

Les solutions non supportées: Elles se situent dans les portions concaves du Front Pareto mais, elles ne sont pas dominées pour autant.

Illustration des solutions supportées et solutions non supportées

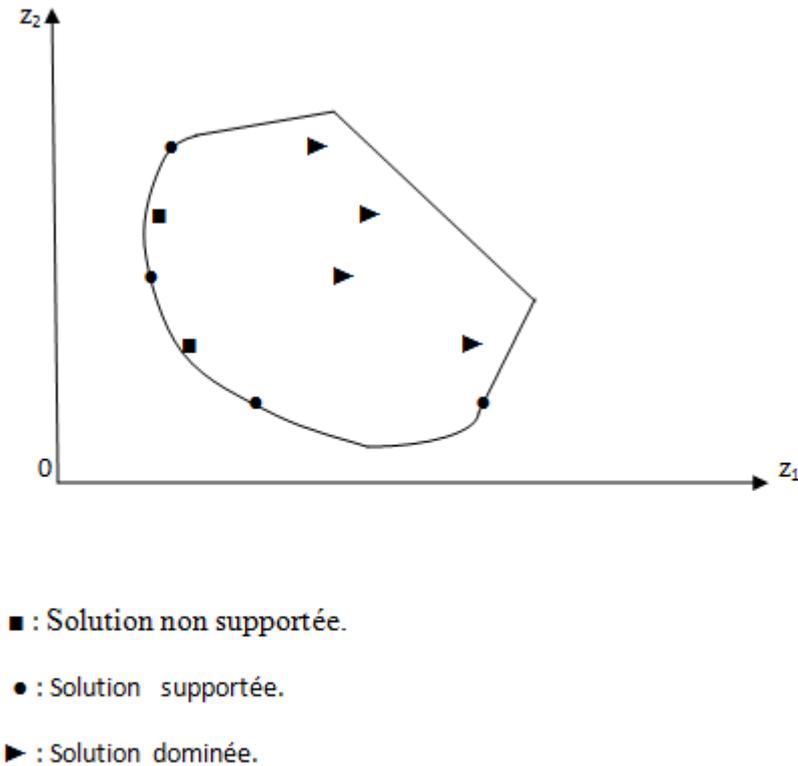


Figure 1.3. Représentation des différents types de solutions en bi-objectif

1.7 Dominance au sens de Geoffrion

Une autre forme de dominance importante dans le monde de l'optimisation multi-objectifs est la dominance au sens de Geoffrion [11].

Des solutions optimales obtenues par ce type de dominance sont appelées solutions de Pareto optimales propres.

Définition 1.10 (Dominance au sens de Geoffrion) [12]

Une solution $x^* \in S$ est appelée solution Pareto optimale propre pour le problème multi-objectifs (1,1) si :

1. x^* est Pareto optimale pour le problème (1.1) et,
2. S'il existe un nombre $M > 0$ tel que : $\forall i = \overline{1, k}, \forall x \in S$ vérifiant $z_i(x) < z_i(x^*)$,
 \exists au moins un $j \in \{1, \dots, k\}$ tel que : $z_j(x^*) < z_j(x)$

et :
$$\frac{z_2(x^*) - z_1(x)}{z_j(x^*) - z_j(x)} \leq M$$

Considérons le problème paramétrique mono-objectif suivant :

$$(P_\lambda) \begin{cases} \text{Min} \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i z_i(x) \\ \text{S.c.} \\ x \in S \end{cases} \quad (1.2)$$

Où λ_i sont des poids relatifs à chaque objectif z_i ($i = \overline{1, k}$) tels que :

$$\lambda_i \geq 0, \forall i = \overline{1, k} \text{ et } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

Théorème 1.2 (Théorème de Geoffrion) [12]

Si x^* est une solution optimale du problème (1.2) où $\lambda_i > 0 \forall i = \overline{1, k}$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ alors x^* est Pareto optimale propre pour le problème (1.1).

Exemple 1.4

Soit le problème linéaire bi-objectifs suivant :

$$\begin{cases} \text{Min} (z_1(x) = -3x_1 - x_2; z_2(x) = x_1 + 6x_2) \\ \text{S.c.} \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.3)$$

Prenons : $\lambda_1 = 0.5$ et $\lambda_2 = 0.5$

Le problème paramétrique correspondant au problème (1.3) s'écrit :

$$(P_\lambda) \begin{cases} \text{Min} \sum_{i=1}^2 \lambda_i z_i(x) \\ \text{S.c.} \\ x \in S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 3x_1 - x_2 \leq 6; x_2 \leq 2\} \end{cases}$$

$$(P_\lambda) \begin{cases} \text{Min} \left(\frac{1}{2}(-3x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(x_1 + 6x_2) \right) = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \text{S.c.} \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P_\lambda) \begin{cases} \text{Min} (-x_1 + \frac{1}{2}x_2) \\ \text{S.c.} \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Nous résolvons le problème (P_λ) avec la méthode du simplexe et nous obtenons :

$x^* (x_1 = 2, x_2 = 0)$ sa solution optimale donc d'après Geoffrion $x^* = (2, 0)^t$ est Pareto optimale propre qui est aussi efficace pour le problème (1.3).

1.8 Caractérisation des solutions efficaces

Nous présentons quelques caractérisations qui permettent de tester l'efficacité d'une solution réalisable pour un problème linéaire multi-objectifs :

Théorème 1.3 (Ecker et Wendell)[9]

Soit $x^* \in S$ un vecteur de décision donné et \hat{x} un vecteur quelconque de S .

x^* est efficace pour le problème (1.1) si et seulement si x^* est solution du problème (mono-objectif) intermédiaire suivant :

$$(P_{\hat{x}}) \begin{cases} \text{Minimiser } \sum_{i=1}^{i=k} z_i(x) \\ \text{S.c.} \\ x \in S \\ z_i(x) \leq z_i(\hat{x}), \forall i = \overline{1, k} \end{cases} \quad (1.4)$$

Exemple 1.5

Soit le problème linéaire bi-objectifs suivant:

$$\begin{cases} \text{Min } (-3x_1 - x_2, x_1 + 2x_2) \\ \text{S.c.} \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Prenons $\hat{x}=(1, 1) \in S$.

Le problème $(P_{\hat{x}})$ correspondant au problème (1.5) s'écrit :

$$(P_{\hat{x}}) = (P_{(1,1)}) \begin{cases} \text{Min } \sum_{i=1}^2 z_i(x) = z_1(x) + z_2(x) \\ \text{S.c.} \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2. \\ z_1(x) \leq z_1(1, 1) = -3(1) - 1 = -4 \\ z_2(x) \leq z_2(1, 1) = 1 + 2(1) = 3 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(P_{\hat{x}}) = \begin{cases} \text{Min } (-2x_1 + x_2) \\ \text{S.c :} \\ \quad 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ \quad x_2 \leq 2 \\ \quad -3x_1 - x_2 \leq -4 \\ \quad x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{\textit{\textcircled{a}} \text{ r\u00e9soudre avec la m\u00e9thode du simplexe}}$$

La solution optimale de $(P_{\hat{x}})$ obtenue est : $x^* (x_1 = 2; x_2 = 0)^t$.

Donc, d'apr\u00e8s le th\u00e9or\u00e8me d'Ecker et Wendell, la solution $x^* (2, 0)$ est efficace pour le probl\u00e8me bi-objectifs (1.5).

Th\u00e9or\u00e8me 1.4 (Benson) [1]

Pour un probl\u00e8me \u00e0 minimum, soit le probl\u00e8me mono-objectif suivant :

$$P_{\varepsilon}(x^*) \begin{cases} \text{Minimiser } \theta = \sum_{i=1}^{i=k} \varepsilon_i \\ \text{S.c :} \\ \quad x \in S. \\ \quad z_i(x) + \varepsilon_i = z_i(x^*); i = \overline{1, k}. \\ \quad x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon_i \in \mathbb{R}; \forall i = \overline{1, k} \\ \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k) \in \mathbb{R}_+^k \\ \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \end{cases} \quad (1.6)$$

Alors :

1. x^* est efficace pour le probl\u00e8me (1.1) \iff La valeur optimale de la fonction objectif θ est nulle dans le probl\u00e8me $P_{\varepsilon}(x^*)$.
2. Si $\theta \neq 0$ pour la solution optimale \hat{x} de $P_{\varepsilon}(x^*)$ alors \hat{x} est efficace pour le probl\u00e8me (1.1).

Remarque:

Si le probl\u00e8me (1.1) est un probl\u00e8me \u00e0 maximum alors $P_{\varepsilon}(x^*)$ s'écrit :

$$P_{\varepsilon}(x^*) \begin{cases} \text{Max } \theta = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \\ \text{S.c :} \\ \quad x \in S \\ \quad z_i(x) - \varepsilon_i = z_i(x^*); i = \overline{1, k} \\ \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \varepsilon_i \in \mathbb{R}^+; i = \overline{1, k} \end{cases}$$

Exemple 1.6.

Soit le problème multi-objectifs suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Z(x) = (z_1(x) = x_1 - 2x_2; z_2(x) = -x_1 + 4x_2; z_3(x) = 2x_1 + x_2) \\ \text{S.c.} \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (1.7)$$

1) Vérifions si la solution réalisable $x^* = (0, 0)^t$ est efficace au sens de Benson :
Le problème mono-objectif ($P_\varepsilon(x^*)$) correspondant au problème (1.7) s'écrit :

$$P_\varepsilon(x^*) = P_\varepsilon(0, 0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \theta = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \text{S.c. :} \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ z_1(x) + \varepsilon_1 = z_1(x^*) \\ z_2(x) + \varepsilon_2 = z_2(x^*) \\ z_3(x) + \varepsilon_3 = z_3(x^*) \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \\ \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \mathbb{R}_+^3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow P_\varepsilon(0, 0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \text{S.c.} \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 + \varepsilon_1 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + \varepsilon_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + \varepsilon_3 = 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \quad \text{à résoudre par la méthode du simplexe,}$$

La solution optimale du problème $P_\varepsilon(x^*)$ est : $x_1 = x_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$. Donc, $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$.

D'après le théorème de Benson la solution $x^* = (0, 0)^t$ est efficace pour (1.7).

2) Vérifions si la solution réalisable $x^* = (2, 0)^t$ est efficace au sens de Benson :
Le problème mono-objectif ($P_\varepsilon(x^*)$) correspondant au problème (1.7) s'écrit :

$$P_\varepsilon(x^*) = P_\varepsilon(2,0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \theta = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \text{S.c.} \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ z_1(x) + \varepsilon_1 = z_1(x^*) \\ z_2(x) + \varepsilon_2 = z_2(x^*) \\ z_3(x) + \varepsilon_3 = z_3(x^*) \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \\ \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \mathbb{R}_+^3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow P_\varepsilon(2,0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \text{S.c.} \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 + \varepsilon_1 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 + \varepsilon_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + \varepsilon_3 = 4 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \quad \text{à résoudre par la méthode du simplexe,}$$

La solution optimale du problème $P_\varepsilon(x^*)$ est : $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{2}, \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = \frac{5}{2}$. Donc, $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 + 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \neq 0$.

D'après le théorème de Benson la solution $x^* = (2, 0)^t$ n'est pas efficace pour le problème (1.7), par contre la solution $\hat{x} = (3, \frac{1}{2})$ est efficace pour le problème (1.7).

1.9 Points particuliers

1.9.1 Point idéal

Définition 1.11

Le point idéal $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_k^*)^t \in \mathbb{R}^k$ est le vecteur qui minimise chacune des fonctions objectives z_i ($i = \overline{1, k}$) séparément, c'est à dire :

$$y_i^* = \text{Min } (z_i(x), i = \overline{1, k}, x \in S)$$

$$\text{Ou bien : } y^* = (y_1^* = \min_{x \in S} z_1(x); y_2^* = \min_{x \in S} z_2(x); \dots; y_k^* = \min_{x \in S} z_k(x))^t.$$

Remarques :

- Généralement le point idéal n'appartient pas à l'espace des critères réalisables ($\psi = Z(S)$) puisque les objectifs de (1.1) sont souvent contradictoires.

2. Le point idéal est le vecteur des valeurs les plus préférées “ souhaitables de chaque objectif $z_i, i = \overline{1, k}$ “.

1.9.2 Point anti-idéal

Définition 1.12

Le point anti-idéal $y^a = (y_1^a, y_2^a, \dots, y_k^a)^t \in \mathbb{R}^k$ est le vecteur qui maximise [pour un problème à minimiser] chacune des fonctions objectifs $z_i (i = \overline{1, k})$ séparément, c'est à dire :

$$y_i^a = (y_1^a = \max_{x \in S} z_1(x); y_2^a = \max_{x \in S} z_2(x); \dots; y_k^a = \max_{x \in S} z_k(x))^t.$$

1.9.3 Matrice des gains

Définition 1.13

Soit \bar{x}_i la solution optimale en Minimisant (Maximisant) l'objectif z_i sur S, la matrice carrée de dimension k suivante:

$$G = \begin{matrix} & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \dots & \bar{x}_k \\ \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccc} y_{11} = y_1^* & y_{12} & \dots & \dots & y_{1k} = z_1(\bar{x}_k) \\ y_{21} = z_2(\bar{x}_1) & y_{22} = y_2^* & \dots & \dots & y_{2k} = z_2(\bar{x}_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{k1} = z_k(\bar{x}_1) & y_{k2} = z_k(\bar{x}_2) & \dots & \dots & y_{kk} = y_k^* \end{array} \right) \end{matrix}$$

est appelée ” matrice des gains ” .

$$Où : \begin{cases} z_i^* = \min_{x \in S} z_i(x) = z_i(\bar{x}_i); \forall i = \overline{1, k} \\ z_{ij} = z_i(\bar{x}_j); \forall i = \overline{1, k} \text{ et } \forall j = \overline{1, k} \text{ avec } i \neq j. \end{cases}$$

1.9.4 Point nadir

Définition 1.14

De la matrice des gains, nous pouvons définir le point nadir

$$y^{nad} = (y_1^{nad}, y_2^{nad}, \dots, y_k^{nad})^t \in \mathbb{R}^k, \text{ avec :}$$

$$y_i^{nad} = \max_{j=\overline{1, k}} y_{i,j}; \forall i = \overline{1, k}, \text{ pour un problème à minimiser.}$$

$$y_i^{nad} = \min_{j=\overline{1, k}} y_{i,j}; \forall i = \overline{1, k}, \text{ pour un problème à maximiser.}$$

Remarques :

1. Le point nadir est le vecteur des valeurs les plus mauvaises de chaque critère $y_i, (i = \overline{1, k})$
2. Si pour un critère j, \exists plusieurs solutions optimales donc, la matrice des gains n'est pas unique, ainsi le vecteur nadir peut ne pas être unique .

3. Le point nadir sert à restreindre l'espace des recherches \mathbb{R}^k . Il peut être utilisé comme point de réservation (valeurs non souhaitables) et il est utilisé dans les méthodes interactives.

Exemple 1.7

Soit la matrice des gains suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 9 & 3 & 15 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$y^* = (7, 3, 1)^t$ est le point idéal.

$y^{nad} = (9, 15, 6)^t$ pour un problème à minimiser.

$y^{nad} = (7, 3, 1)^t$ pour un problème à maximiser.

Illustration des trois points pour un problème à minimiser

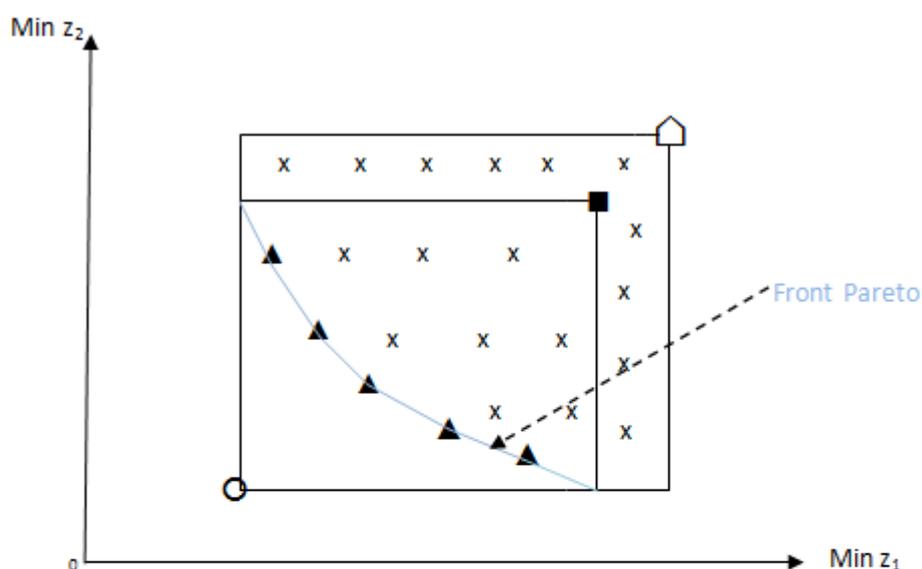


Figure 2.4 :

X : Solutions réalisables.

▲ : Solutions Pareto optimales.

○ : Point idéal.

■ : Point Nadir.

⌣ : Point anti-idéal.

Définition 1.15 (Décideur)

Un décideur est un individu (ou un groupe d'individus) qui face à une situation de décision, a la responsabilité d'évaluer les différentes alternatives (solutions) possibles afin de proposer ou de mettre en œuvre une solution (ou des solutions).

Définition 1.16 (L'analyste)

Il est responsable de la définition du modèle de décision et de la présentation des résultats au décideur .

1.10 Approches de résolution d'un problème linéaire multi-objectifs

1.10.1 Problématique

La difficulté principale d'un problème multi-objectifs c'est qu'il n'existe pas de définition de la solution optimale. Le décideur peut simplement exprimer le fait qu'une solution est préférable à une autre, mais il n'existe pas une solution meilleure que toutes les autres, dès lors, résoudre un problème multi-objectifs ne consiste pas à rechercher la solution optimale, mais l'ensemble des solutions de compromis pour lesquelles ne nous pourrions pas effectuer une opération de classement.

Deux approches de résolution d'un problème d'optimisation multi-objectifs peuvent être distinguées dans la littérature([15],[22]).

1.10.2 Approche 1: Approche mono-objectif

Elle consiste à ramener (transformer) le problème multi-objectifs à un problème mono-objectif . Elle caractérise les méthodes dites " a priori ", nous allons détailler deux méthodes les plus utilisées dans la littérature.

a) Méthode de la somme pondérée ou méthode d'agrégation des objectifs [15]

Cette méthode consiste à ramener le problème linéaire multi-objectifs (1.1) à un problème paramétrique mono-objectif (P_λ) de la manière suivante :

$$(P_\lambda) \begin{cases} \min \left(\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i z_i(x) \right) \\ S.c. \\ x \in S \end{cases} \quad (1.8)$$

Où $\lambda_i \geq 0, \forall i = \overline{1, k}$, avec $\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i = 1$.

Les poids λ_i sont choisis en fonction de l'importance des objectifs $z_i, (i = \overline{1, k})$.

Théorème 1.5 [22]

La solution optimale de (P_λ) est une solution efficace pour le problème (1.1) si tous les poids λ_i sont positifs ($\lambda_i \geq 0) \forall i = \overline{1, k}$.

Définition 1.17 (*Ensemble convexe*)

On dit qu'un ensemble S est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in S$$

D'un point de vue géométrique, un convexe est donc un ensemble qui, lorsqu'il contient deux points, contient nécessairement le segment les reliant.

Exemple 1.8

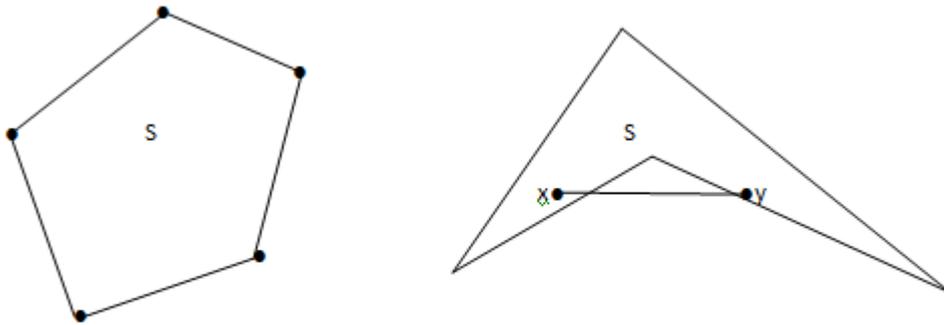


Figure 1.5

► la figure gauche est un ensemble convexe.

► La figure droite est un ensemble non convexe, car le segment reliant x et y n'appartient pas à S .

Définition 1.18 (*Fonction convexe*)

La fonction $z : S \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe sur S convexe non vide de \mathbb{R}^n si et seulement si :

$$\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0, 1] \quad z(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda z(x) + (1 - \lambda) z(y).$$

Définition 1.19

Le problème d'optimisation multi-objectifs(1.1) est dit convexe si et seulement si :

- 1) Chaque fonction objectif $z_i, \overline{i = 1, k}$ est convexe.
- 2) L'ensemble S est convexe.

Théorème 1.6 [15]

Si le problème d'optimisation multi-objectifs(1.1) est convexe et x^* est l'une de ses solutions efficaces alors, il existe un vecteur des poids $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ positifs tels que x^* est solution optimale de (P_λ) .

Exemple 1.9

Soit le problème linéaire bi-objectifs suivant :

$$(P_{\lambda}) \begin{cases} \text{Min } (z_1(x) = -3x_1 - x_2; z_2(x) = -x_1 + 2x_2) \\ \text{S.c.} \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \end{cases} \quad (1.9)$$

On donne : $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 0.5$ (*Poids choisis par le décideur*)

Le problème paramétrique mono-objectifs (P_{λ}) correspondant au problème (1.9) s'écrit :

$$(P_{\lambda}) \begin{cases} \text{Min } \sum_{i=1}^{i=2} \lambda_i z_i(x) \\ \text{S.c.} \\ x \in S \end{cases}$$

$$(P_{\lambda}) \begin{cases} \text{Min } \left(\frac{1}{2}(-3x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(-x_1 + 2x_2) \right) \\ \text{S.c.} \\ x \in S \end{cases}$$

$$(P_{\lambda}) \begin{cases} \text{Min } \left(-2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right) \\ \text{S.c.} \\ x \in S \end{cases}$$

La solution optimale de (P_{λ}) est $x^*(x_1 = 2, x_2 = 0)^t$

D'après le théorème (1.5), x^* est efficace (Pareto optimale) pour le problème (1.9)

Inversement : Le problème (1.9) étant linéaire donc convexe et on conclut d'après le théorème (1.6) que toute solution efficace de (1.9) est optimale pour (P_{λ}).

b) Méthode ε -contraintes [15]

Une autre façon de transformer le problème (1.1) en un problème mono-objectif est de minimiser l'objectif z_i (jugé prioritaire par le décideur) et de convertir les autres objectifs en contraintes, le problème transformé obtenu :

$$(P_{\varepsilon}) \begin{cases} \text{Minimiser } z_i(x) \\ \text{S.c. :} \\ x \in S \\ z_j(x) \leq \varepsilon_j, \forall j = \overline{1, k}, \text{ avec } j \neq i \end{cases} \quad (1.10)$$

Théorème 1.7 [15]

Pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_k)$ tel que le problème (1.10) a une solution optimale x^* alors cette solution x^* est Pareto-optimale pour le problème (1.1).

Exemple 1.10

Soit le problème linéaire multi-objectifs suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Z(x) = (z_1(x) = -3x_1 + x_2; z_2(x) = x_1 + 2x_2; z_3(x) = 2x_1 + x_2) \\ \text{S.c :} \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \end{array} \right. \quad (1.11)$$

En considérant le critère z_3 prioritaire et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1, 3)^t$

Le problème (P_ε) s'écrit :

$$(P_\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z_3(x) = 2x_1 + x_2 \\ \text{S.c :} \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ z_1(x) \leq \varepsilon_1 \iff -3x_1 + x_2 \leq 1 \\ z_2(x) \leq \varepsilon_2 \iff x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \end{array} \right. \quad \text{à résoudre par la méthode du simplexe.}$$

La solution optimale de (P_ε) est $x^* = (0, 0)^t$ donc elle est efficace pour le problème (1.11).

En faisant varier le vecteur ε :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= (1, 3)^t \text{ nous obtiendrons } x_1^* = (0, 0)^t \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= (-2, 2)^t \text{ nous obtiendrons } x_2^* = \left(\frac{2}{3}, 0\right)^t \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= (-1, 5)^t \text{ nous obtiendrons } x_3^* = \left(\frac{1}{3}, 0\right)^t \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)^t \text{ nous obtiendrons } x_4^* = \left(\frac{1}{6}, 0\right)^t \end{aligned}$$

L'ensemble $\{x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\}$ est un sous-ensemble de l'ensemble Pareto du problème (1.11)

Remarques:

1. Les poids λ_i et les paramètres ε_j sont définies par le décideur .
2. En faisant varier les poids λ_i et les paramètres ε_j dans les deux méthodes , on peut trouver un sous-ensemble de points efficaces (Pareto-optimaux) pour le problème (MOLP).

1.10.3 Approche 2: Approche multi-objectifs

Elle consiste à proposer des solutions en tenant compte de l'ensemble des objectifs, cette approche contient les méthodes dites " a posteriori " et méthodes " Progressives " :

1) Méthodes " a posteriori " (Recherche \rightarrow décideur):

Le décideur prend sa décision d'après un ensemble de solutions calculées par un solveur .

2) Méthodes " Progressives" ou " Interactives (Décideur $\xleftrightarrow{\leftarrow}$ Recherche):

Dans ces méthodes, les processus de décision et d'optimisation sont alternés. Par moment, le décideur intervient pour modifier certaines variables ou contraintes, afin de diriger le processus d'optimisation. Il modifie ainsi interactivement le compromis entre ses préférences et ses résultats.

1.11 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif de présenter les principales définitions nécessaires à la présentation des problèmes d'optimisation multi-objectifs, comme le concept d'optimalité au sens de Pareto et le concept d'efficacité, puis quelques approches de résolution ont été abordées comme l'approche mono-objectif où la méthode de la somme pondérée et la méthode $\varepsilon - \text{contraintes}$ sont présentées, et l'approche multi-objectifs qui contient les méthodes " a posteriori " et les méthodes " progressives " .

Chapitre 2

Programmation Linéaire Fractionnaire Mono-Objectif

2.1 Introduction

La programmation linéaire fractionnaire ou hyperbolique consiste à optimiser un objectif mis sous forme d'un rapport de deux fonctions linéaires, soumis à un ensemble de contraintes linéaires ([3],[5], [18],[24]).

Différentes versions de ce modèle, en variables réelles, en variables entières, en variables mixtes ou en variables 0-1, ont une multitude d'applications que ce soit en optimisation combinatoire, en programmation stochastique, en bases de données ou en économie ... etc [20].

2.2 Forme d'un Programme Linéaire Fractionnaire Mono-Objectif

Un Problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Mono-Objectif peut être écrit comme suit :

$$(LFP) \begin{cases} \max Z(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{p^t x + \alpha}{q^t x + \beta} \\ S.c. \\ S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases} \quad (2.1)$$

Où α, β sont des réels, p^t et x des vecteurs de \mathbb{R}^n , q^t un vecteur non nul de \mathbb{R}^n , A une matrice réelle d'ordre $m \times n$ et b un vecteur de \mathbb{R}^m .

L'ensemble S est supposé borné, non vide et $q^t x + \beta > 0$ sur S .

2.3 Notions sur l'optimisation convexe

2.3.1 Combinaison linéaire convexe

Définition 2.1

Un vecteur $y \in S$ est une combinaison linéaire convexe des points $\{x_1, \dots, x_p\}$ s'il existe des coefficients réels $\lambda_i, \{i = 1, \dots, p\}$, tels que :

$$y = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, \text{ avec } \lambda_i \geq 0, \forall i = \{1, \dots, p\}, \text{ et } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$$

2.3.2 Enveloppe convexe

Définition 2.2

L'enveloppe convexe d'un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points de \mathbb{R}^n qui s'écrivent comme combinaisons convexes des points de S. Elle est notée par :

$$Con(S) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, x_i \in S, \lambda_i \geq 0, i = \{1, \dots, p\} \text{ et } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \right\}$$

C'est le plus petit ensemble convexe contenant S.

- L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n / a^t x = b\}$ représente un *hyperplan* de \mathbb{R}^n ;
- L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n / a^t x \leq b\}$ représente un demi-espace fermé de \mathbb{R}^n dont l'hyperplan correspondant constitue la *frontière*.

2.3.3 Polyèdre

Définition 2.3

1) Un polyèdre S est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés et/ou d'hyperplans. Un polyèdre est un ensemble convexe fermé.

2) Un polyèdre S est borné s'il existe une valeur β finie et positive telle que :
 $|x_j| \leq \beta, \forall j \in \{1, \dots, n\}$ et $\forall x \in S$

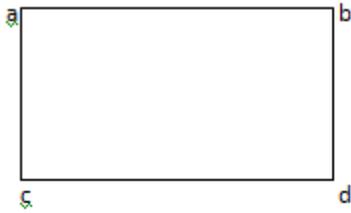
3) Un *polytope* est un polyèdre borné et non vide.

2.3.4 Point extrême

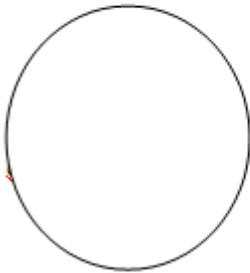
Définition 2.4

Soit S un convexe non vide de \mathbb{R}^n . x est dit point extrême ou sommet de S si :
 $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in S \text{ et } \lambda \in]0, 1[\text{ alors } x = x_1 = x_2$

Exemple 2.1



a, b, c et d sont des points extrêmes.



Le nombre de points extrêmes d'un cercle n'est pas dénombrable.

Figure 2.1. Points extrêmes

2.3.5 Fonction concave

Définition 2.5

La fonction $N: S \rightarrow \mathbb{R}$ est dite concave sur S convexe non vide de \mathbb{R}^n si et seulement si :

$$\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0, 1] \quad N(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda N(x) + (1 - \lambda)N(y)$$

- Les cas stricts correspondent aux mêmes définitions avec des inégalités strictes pour $0 < \lambda < 1$ et $x \neq y$
- (N) est convexe (respectivement strictement convexe) $\iff (-N)$ est concave (respectivement strictement concave).

Lemme 2.1 [20]

Si N est une fonction convexe alors l'ensemble niveau : $L(N, \alpha) = \{x \in S : N(x) \leq \alpha\}$ est convexe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

Preuve :

Soient $x_1, x_2 \in L(N, \alpha)$, ainsi $x_1, x_2 \in S$ car $L(N, \alpha) \subset S$, on a aussi $N(x_1) \leq \alpha$ et $N(x_2) \leq \alpha$.

Soit $\lambda \in [0, 1]$, et $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ comme S est convexe donc $x \in S$ et par la convexité de N on a :

$$N(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda N(x_1) + (1 - \lambda)N(x_2) \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha.$$

D'où $x \in L(N, \alpha)$ et par conséquent $L(N, \alpha)$ est convexe.

Définition 2.6

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$. L'ensemble $V_\varepsilon(\bar{x}) = \{x \in S : \|x - \bar{x}\| < \varepsilon\}$ est appelé voisinage de $\bar{x} \in S$,

où $\varepsilon > 0$ et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^n .

Définition 2.7

On dit que \bar{x} appartient à l'intérieur de S , noté $\text{int}(S)$, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $V_\varepsilon(\bar{x}) \subset S$.

2.4 Fonctions convexes généralisées

Les fonctions convexes généralisées jouent un rôle très important dans la théorie de l'optimisation.

Soit une fonction $N : S \subset \mathbb{R}^n$ avec S un convexe non vide de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

2.4.1 Fonction quasiconvexe

Définition 2.8

La fonction N est quasiconvexe sur S si:

$$\forall x, y \in S \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ on a : } N(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{N(x), N(y)\} \quad (2.2)$$

N est quasiconvexe sur S est ainsi équivalente à:

$$\forall x, y \in S \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1], N(x) \leq N(y) \Rightarrow N(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq N(y).$$

2.4.2 Fonction quasiconcave

Définition 2.9

La fonction N est quasiconcave sur S si:

$$\forall x, y \in S \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ on a : } N(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{N(x), N(y)\} \quad (2.3)$$

La fonction N est quasiconcave $\iff (-N)$ est quasiconvexe.

Une fonction qui est à la fois quasiconvexe et quasiconcave est dite quasimonotone ou quasilinéaire.

Les fonctions quasiconvexes, quasiconcaves et quasilinéaires sont caractérisées par la convexité de leurs ensembles niveaux.

Théorème 2.1 [20]

1) f est quasiconvexe si et seulement si l'ensemble $L(N, \alpha) = \{x \in S : N(x) \leq \alpha\}$ (Lower level set) est convexe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) f est quasiconcave si et seulement si l'ensemble $U(N, \alpha) = \{x \in S : N(x) \geq \alpha\}$ (Upper level set) est convexe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) f est quasilinéaire si l'ensemble $Y(N, \alpha) = \{x \in S : N(x) = \alpha\}$ (level surface) est convexe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. La réciproque est vraie si la fonction f est continue sur S .

Preuve de 1)

\Rightarrow) Supposons que N est quasiconvexe et soient $x_1, x_2 \in L(N, \alpha)$ donc $x_1, x_2 \in S$ car

$L(N, \alpha) \subset S$ et $\max\{N(x_1), N(x_2)\} \leq \alpha$, soit $\lambda \in [0, 1]$ et $(x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$,

comme S est convexe donc $(x \in S)$ et par la quasiconvexité de N on a :

$(N(x) \leq \max\{N(x_1), N(x_2)\} \leq \alpha)$ d'où $x \in L(N, \alpha)$, ainsi $L(N, \alpha)$ est convexe.

\Leftarrow) Supposons que $L(N, \alpha)$ est convexe pour tout réel α . Soient x_1 et x_2 dans S ,

$\lambda \in [0, 1]$ et $(x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$. Notons que $x_1, x_2, L(N, \alpha)$ pour

$\alpha = \max\{N(x_1), N(x_2)\}$ étant convexe par hypothèses donc $x \in L(N, \alpha)$ et

$N(x) \leq \alpha = \max\{N(x_1), N(x_2)\}$ c'est à dire $N(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max\{N(x_1), N(x_2)\}$,

par conséquent N est quasiconvexe.

Remarque 2.1

Toute fonction convexe sur S convexe est quasiconvexe

2.4.3 Fonction strictement quasiconvexe

Définition 2.10

La fonction N est strictement quasiconvexe sur S si :

$\forall x, y \in S$ avec $N(x) \neq N(y)$, $\forall \lambda \in]0, 1[$ on a : $N(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{N(x), N(y)\}$.

N est strictement quasiconcave si $(-N)$ est strictement quasiconvexe.

2.4.4 Fonction différentiable

Définition 2.11

Soit S un ensemble non vide de \mathbb{R}^n et $N : S \rightarrow \mathbb{R}$. N est dite différentiable en $\bar{x} \in \text{int}(S)$ s'il existe un vecteur gradient noté $\nabla N(\bar{x})$ et une fonction $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$N(x) = N(\bar{x}) + \nabla N(\bar{x})(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\| \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}), \forall x \in S.$$

$$\text{Où } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) = 0 \text{ et } \nabla N(\bar{x}) = \left(\frac{\delta N(\bar{x})}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta N(\bar{x})}{\delta x_n} \right).$$

2.4.5 Fonction pseudoconvexe

Définition 2.12

Soit N une fonction différentiable sur S un ouvert non vide de \mathbb{R}^n . N est pseudoconvexe sur S si :

$$\forall x \text{ et } y \in S, (y - x)^t \nabla N(x) \geq 0 \Rightarrow N(y) \geq N(x).$$

2.4.6 Fonction pseudoconcave

Définition 2.13

Soit N une fonction différentiable sur S un ouvert non vide de \mathbb{R}^n . N est pseudoconcave sur S si :

$$\forall x \text{ et } y \in S, (y - x)^t \nabla N(x) \leq 0 \Rightarrow N(y) \leq N(x).$$

Théorème 2.2 [20]

Soit $N : S \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable et pseudoconvexe sur S un convexe ouvert non vide de \mathbb{R}^n alors N est à la fois quasiconvexe et strictement quasiconvexe.

Proposition 2.1 [20]

1. Si N est convexe alors N est quasiconvexe. Si de plus N est différentiable alors elle est pseudoconvexe.
2. Si N est concave alors N est quasiconcave. Si de plus N est différentiable alors elle est pseudoconcave

Théorème. 2.3 [20]

Si $N : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasiconcave (ou quasiconvexe) et continue sur S polyèdre borné, alors au moins une solution optimale \bar{x} est un point extrême de S .

Preuve

N étant continue sur S compact donc atteint au moins un minimum $\bar{x} \in S$.

Si \bar{x} est un point extrême de S , le résultat est vérifié.

Sinon, soit (x_1, \dots, x_k) k points extrêmes de S avec $\bar{x} \neq x_j, \forall j \in \{1, \dots, k\}$ d'où
$$N(\bar{x}) < \min_{1 \leq j \leq k} N(x_j).$$

Considérons l'ensemble niveau $S_\alpha = \{x \in S / N(x) \geq \alpha\}$. Notons que $x_j \in S_\alpha \forall j \in \{1, \dots, k\}$ et comme N est quasiconcave donc S_α est convexe.

D'autres part, \bar{x} peut s'écrire en combinaison linéaire convexe des $x_j, j \in \{1, \dots, k\}$ c'est à dire
$$\bar{x} = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \text{ avec } \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \text{ et } \lambda_j \geq 0, \text{ pour } j \in \{1, \dots, k\}$$

On conclut que $\bar{x} \in S_\alpha$ d'où $N(\bar{x}) \geq \alpha$, contradiction.

Cette contradiction montre que $N(\bar{x}) = N(x_j)$ pour un certain point extrême x_j .

2.5. Conditions d'optimalité

Considérons le problème de minimisation (P_m) suivant :

$$(P_m) \begin{cases} \text{Minimiser} & N(x) \\ \text{S.c.} & \\ & x \in S \end{cases} \quad (2.4)$$

Définition 2.14

Une solution admissible \bar{x} est dit minimum global si et seulement si $N(\bar{x}) \leq N(x)$, $\forall x \in S$.

Définition 2.15

Une solution admissible \bar{x} est dit minimum local si et seulement si il existe un voisinage $V_\varepsilon(\bar{x})$ de \bar{x} tel que $N(\bar{x}) \leq N(x)$, $\forall x \in S \cap V_\varepsilon(\bar{x})$.

2.4.7 Conditions nécessaires d'optimalité

Théorème 2.4 [20]

Si $N : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe sur S un ensemble convexe non vide, si \bar{x} est un *minimum local* alors il est un *minimum global* pour le problème (P_m) .

Preuve :

Si \bar{x} est un minimum local donc il existe un voisinage $V(\bar{x})$ de \bar{x} tel que

$$N(\bar{x}) \leq N(x) \text{ pour tout } x \in S \cap V(\bar{x}).$$

Par contradiction, supposons que \bar{x} n'est pas un minimum global ainsi il existe $\hat{x} \in S$

tel que $N(\hat{x}) < N(\bar{x})$.

Par la convexité de N , la relation suivante est vérifiée pour tout $\lambda \in [0; 1]$,

$$N(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\bar{x}) \leq \lambda N(\hat{x}) + (1-\lambda)N(\bar{x}) < \lambda N(\bar{x}) + (1-\lambda)N(\bar{x}) = N(\bar{x})$$

ce qui contredit le fait que \bar{x} soit un minimum local car pour $\lambda > 0$ est suffisamment petit,

nous avons: $\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\bar{x} \in S \cap V(\bar{x})$.

Théorème 2.5 [20]

Soit $N : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction pseudoconvexe et différentiable sur S convexe non vide. Si $\bar{x} \in S$ tel que $\nabla N(\bar{x}) = 0$ alors \bar{x} est un minimum global de N sur S .

Théorème 2.6 [20]

Soit $N : S \rightarrow \mathbb{R}$ strictement quasiconvexe sur S et S un convexe non vide de \mathbb{R}^n . Si \bar{x} est un minimum local alors \bar{x} est un minimum global de N sur S .

Preuve :

Supposons, au contraire, qu'il existe $\hat{x} \in S$ avec, $N(\hat{x}) < N(\bar{x})$. S étant convexe donc $\lambda\hat{x} + (1 - \lambda)\bar{x}$, $\forall \lambda \in [0, 1]$. Comme \bar{x} est un minimum local par hypothèse donc

$$N(\bar{x}) \leq N(\lambda\hat{x} + (1 - \lambda)\bar{x}) \quad \forall \lambda \in [0, \delta] \text{ et } \delta \in [0; 1].$$

N est strictement quasiconvexe et $N(\hat{x}) < N(\bar{x}) \Rightarrow N(\lambda\hat{x} + (1 - \lambda)\bar{x}) < N(\bar{x}) \quad \forall \lambda \in]0, 1[$, ceci contredit l'optimalité local de \bar{x} .

Les fonctions pseudoconvexes partagent, la propriété importante du théorème (2.7), avec les fonctions convexes.

Théorème 2.7 [20]

Si $N : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe et différentiable sur S convexe non vide et $\bar{x} \in S$ tel que $\nabla N(\bar{x}) = 0$, alors \bar{x} est un minimum global de N sur S .

Preuve

Soit $x \in S$, N étant convexe et différentiable sur S donc,

$N(x) \geq N(\bar{x}) + \nabla N(\bar{x})^t (x - \bar{x})$ et comme $\nabla N(\bar{x}) = 0$ alors $N(x) \geq N(\bar{x})$ pour tout x , d'où \bar{x} est un minimum global pour .

2.5 Résultats théoriques sur l'optimisation linéaire fractionnaire

Considérons le problème linéaire fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } Z(x) = \frac{p^t x + \alpha}{q^t x + \beta} \\ \text{S.c.} \\ S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases} \quad (2.5)$$

On suppose que l'ensemble S est un polyèdre borné non vide de \mathbb{R}^n et que $q^t x + \beta > 0$ sur S .

Lemme 2.2 [20]

La fonction $\left(Z(x) = \frac{p^t x + \alpha}{q^t x + \beta} \right)$ est à la fois pseudoconvexe et pseudoconcave sur S .

Preuve :

Prouvons que Z est pseudoconvexe sur S . Soient $x, y \in S$ tels que $:(y - x)^t \nabla Z(x) \geq 0$ et montrons que $: Z(y) \geq Z(x)$

$$\text{On a : } \nabla Z(x) = \frac{(q^t x + \beta)p - (p^t x + \alpha)q}{(q^t x + \beta)^2}$$

Comme $(y - x)^t \nabla Z(x) \geq 0$ et $qx + \beta > 0$, donc: $(y - x)^t [(q^t x + \beta)p - (p^t x + \alpha)q] \geq 0$.

et : $(y - x)^t [(q^t x + \beta) p - (p^t x + \alpha) q] = [(p^t y + \alpha) (q^t x + \beta) - (q^t y + \beta) (p^t x + \alpha)] \geq 0$,

d'où : $(p^t y + \alpha) (q^t x + \beta) \geq (q^t y + \beta) (p^t x + \alpha)$.

En divisant les deux termes de l'inégalité par l'expression $(q^t x + \beta) (q^t y + \beta)$, on obtient :

$\frac{(p^t y + \alpha)}{(q^t y + \beta)} \geq \frac{(p^t x + \alpha)}{(q^t x + \beta)}$, ce qui signifie que : $Z(y) \geq Z(x)$, et donc z est pseudoconvexe sur S .

De manière similaire ,on montre que z est pseudoconcave sur S .

Conséquences du lemme 2.2

Les programmes linéaires fractionnaires ou hyperboliques partagent quelques propriétés importantes avec les programmes de programmation linéaire. L'extension de l'algorithme du simplexe au problème (2.1) ou (2.2) est due à Martos et Swarup .

(1) Puisque Z est à la fois pseudoconvexe et pseudoconcave sur S donc, d'après le théorème (2.2) elle est aussi quasiconvexe ,strictement quasiconvexe,quasiconcave et strictement quasiconcave sur S .

(2) Puisque Z est à la fois quasiconvexe et quasiconcave donc elle est quasilinéaire .

(3) Puisque la fonction objectif Z est strictement quasiconvexe et strictement quasiconcave sur S alors, d'après le théorème (2.6) un minimum (maximum) local est aussi un minimum (maximum) global sur S respectivement .

(4) Puisque Z est quasiconvexe et quasiconcave sur S alors d'après le théorème(2.3) au moins une solution optimale du problème (2.1) et (2.5) est atteinte en un point extrême de S .

(5) Puisque Z est pseudoconvexe et pseudoconcave sur S donc, d'après le théorème (2.5), si $\nabla z(x^*) = 0$, alors x^* est un minimum global de Z sur S .

2.6 Résolution d'un Problème Linéaire Fractionnaire

2.6.1 La résolution directe

Dans cette stratégie de résolution, le programme fractionnaire est traité sous sa forme originale, c'est à dire sans modifier ni l'objectif, ni l'ensemble des contraintes. Cette approche est utilisée pour résoudre les programmes fractionnaires hyperboliques (linéaires fractionnaires) en variables continues, en variables entières, en variables bivalentes 0-1 et en variables mixtes.

Méthode de (Cambini et Martein) [2]

Rappelons le problème linéaire fractionnaire (2.1) précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } Z(x) = \frac{p^t x + \alpha}{q^t x + \beta} \\ \text{S.c.} \\ S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Où α et β sont des réels, p et x des vecteurs de \mathbb{R}^n , q un vecteur non nul de \mathbb{R}^n , A une matrice réelle d'ordre $m \times n$ et b un vecteur de \mathbb{R}^m .

L'ensemble S est supposé borné non vide et $(q^t x + \beta) > 0$ sur S .

Définition 2.16

Un point réalisable x^* est une solution niveau optimale pour le problème (2.1) si x^* est une solution optimale pour le problème linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } (p^t x + \alpha) \\ \text{S.c} \\ x \in S \text{ et } qx = qx^* \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Si de plus x^* est un point extrême de S , x^* est dite solution niveau optimale de base .

L'algorithme de (Cambini et al) génère une séquence finie de solutions niveau optimales dont la première x° est une solution optimale du programme linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } (q^t x + \beta) \\ \text{S.c} \\ x \in S \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Si x° est unique, alors elle est aussi une solution niveau optimale de base pour (2.1)

Sinon, résoudre le programme linéaire (2.5) pour obtenir une solution niveau optimale de base

Théorème 2.8 [2]

Le point x° de S est une solution optimale du problème linéaire fractionnaire (2.1) si et seulement si le vecteur gradient réduit $\bar{\gamma} = \bar{\beta}\bar{p} - \bar{\alpha}\bar{q}$ est tel que :

$\bar{\gamma}_j \leq 0$ pour tout indice hors base $j \in N_k$.

Algorithme de (Cambini et al) [2]

Étape (1):

Trouver la solution niveau optimale x^1 ,

-Si une solution n'existe pas, alors $\sup_{x \in S} Z(x) = +\infty$ terminer,

-Sinon, poser $k = 1$ et aller à l'étape (2).

Étape (2) :

(a) Si $J = \{j/\bar{q}_j > 0\} = \emptyset$, terminer , x^k est une solution optimale de (2.1),

(b) Sinon, soit s tel que: $\frac{\bar{p}_s}{\bar{q}_s} = \max_{j \in J} \left(\frac{\bar{p}_j}{\bar{q}_j} \right)$.

- Si $\bar{\gamma}_s > 0$, aller à l'étape (3),
- Sinon, terminer, x^k est une solution optimale de (2.1).

Étape (3): La variable hors base x_s entre dans la base en moyennant une opération pivot .

Poser $k = k + 1$ et aller à l'étape (2),

Si une telle opération n'est pas possible, terminer, $\sup_{x \in S} Z(x) = \frac{\bar{p}_s}{\bar{p}_s}$.

Exemple illustratif

Considérons le problème linéaire fractionnaire mono-objectif suivant :

$$(P_{LF}) \begin{cases} \text{Max} & \frac{3x_1 + 5x_2 + 1}{x_1 - x_2} \\ \text{S.c.} & \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2, x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Résolvons le problème (P_{LF}) en utilisant l'algorithme de Cambini et al .

Étape 1:

Nous résolvons par la méthode du simplexe le problème (P_L) suivant :

$$(P_L) \begin{cases} \text{Min} & (x_1 - x_2) \\ \text{S.c.} & \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$(P_L) \iff \begin{cases} \text{Max } (-x_1 + x_2) \\ \text{S.c.} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases} \quad (2.10)$$

Le premier tableau du simplexe :

q			-1	1	0	0
q_B	Base	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	6	1	2	1	0
0	x_4	2	0	1	0	1
	Z=0	Δ_j	1	-1	0	0

La variable x_2 entre dans la base et la ligne de pivot correspondante est la quatrième ligne, d'où x_4 sort de la base.

Le deuxième tableau du simplexe :

q			-1	1	0	0
q_B	Base	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	2	1	0	1	-2
1	x_2	2	0	1	0	1
	Z=2	Δ_j	1	0	0	1

Nous avons $\Delta_j \geq 0 \forall j \in \{1, \dots, 4\}$, donc l'algorithme s'arrête et la solution niveau optimale est $x^0 = (0, 2)^t$.

Étape 2 : Le tableau du simplexe associé à la solution x^0 est :

p^t	-1	3	5	0	0
q^t	0	1	-1	0	0
x_3	6	1	2	1	0
x_4	2	0	1	0	1

La première et la deuxième ligne représentent les coûts du numérateur et du dénominateur respectivement :

$$p^t = (3, 5); q^t = (1, -1); B = \{3, 4\}; N = \{1, 2\}.$$

Calculons les valeurs du vecteur gradient réduit de la fonction objectif tels que :

$$\bar{\gamma}_j = \bar{\beta} \bar{p} - \bar{\alpha} \bar{q} \quad \forall j \in N$$

Nous obtenons :

$$\bar{\gamma}_j = -1(1, -1) = (-1, 1)$$

Nous remarquons que le vecteur gradient réduit $\bar{\gamma}_0 > 0$ et nous avons :

$$\frac{\bar{p}_s}{\bar{q}_s} = \max \left\{ \frac{\bar{p}_j}{\bar{q}_j}, j \in N, \bar{q}_j > 0 \right\} = \max \left\{ \frac{3}{1}, -\frac{5}{1} \right\} = 3.$$

$k=1$, donc la solution $x^0 = (3, 0)^t$ n'est pas optimale.

Étape 3 :

La variable x_2 entre dans la base et la ligne de pivot correspondante est la quatrième ligne d'où x_4 sort de la base .

$$B=\{3, 2\}; N=\{1, 4\}.$$

p^t	-11	3	0	0	-5
q^t	2	1	0	0	1
x_3	2	1	0	1	-2
x_2	2	0	1	0	1

$$p^t=(3, -5); q^t=(1, 1)$$

$$\bar{\gamma}_j = \bar{\beta} \bar{p} - \bar{\alpha} \bar{q}.$$

$$\bar{\gamma}_j = -2(3, -5) - 11(1, 1) = (-17, -1)$$

Nous avons $\bar{\gamma}_j \leq 0; j \in N$, ceci entraîne la fin de déroulement de l'algorithme d'où, la solution

optimale du problème (P_{LF}) est $(0, 2)^t$ et $Z_{opt} = -11/2$.

2.6.2 Résolution par paramétrisation [7]

A l'inverse de la résolution directe, on construit un problème à objectif simplifié, combinaison linéaire du numérateur et du dénominateur par l'intermédiaire d'un paramètre λ tout en gardant inchangé l'ensemble des contraintes.

Une séquence de résolution de ce type de problème fournit une solution du programme fractionnaire. Cette méthode a été utilisée pour les différents programmes fractionnaires linéaires et non linéaires, en variables continues comme en variables discrètes sur des domaines bornés.

Le programme paramétré (Q_λ) associé consiste à simplifier l'objectif en combinant linéairement le numérateur et le dénominateur par l'intermédiaire d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans le cas d'un programme hyperbolique, (Q_λ) est un programme linéaire dont l'objectif est fonction du paramètre λ et il est défini comme suit :

$$(Q_\lambda) \begin{cases} \text{Maximiser } \vartheta(\lambda) = (p - \lambda q)^t x + (\alpha - \lambda \beta) = (p^t x + \alpha) - \lambda (q^t x + \beta) \\ \text{S.c } S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases} \quad (2.11)$$

En notant λ^* la valeur optimale du problème (2.1), le résultat fondamental liant le programme fractionnaire (2.1) au programme paramétré (Q_λ) associé est donné par :

Proposition 2.2 [20]

Toute solution optimale de (Q_{λ^*}) est une solution optimale du problème (2.1).

2.6.3 Résolution d'un programme équivalent [3]

Un changement de variables permet lui aussi de simplifier l'objectif, mais en transportant la difficulté sur l'ensemble des contraintes. La transformation du programme linéaire en un programme équivalent à objectif non fractionnaire est obtenu par un changement de variables.

Cette transformation proposée par Charne et al [3] s'applique au problème hyperbolique (2.1) en variables continues et s'effectue en introduisant deux nouvelles variables

$$y = \left(\frac{1}{q^t + \beta} \right) x \text{ et } t = \frac{1}{q^t x + \beta} \quad (2.12)$$

Pour obtenir un problème linéaire (P_E) équivalent :

$$(P_E) \begin{cases} \text{Maximiser} & p^t y + \alpha t \\ \text{S.c} & \\ & Ay - bt \leq 0 \\ & q^t y + \beta t = 1 \\ & y, t \geq 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Cette notion d'équivalence est précisée par :

Proposition 2.3 [3]

Si (y^*, t^*) est une solution optimale de (P_E) , alors $t^* > 0$ et $x^* = \frac{y^*}{t^*}$ est une solution optimale du problème (2.1).

Cette transformation en un programme linéaire équivalent a pour but d'appliquer les algorithmes standards tels que la méthode du simplexe.

Exemple illustratif Considérons le problème de la programmation linéaire fractionnaire mono-objectif suivant :

$$(P_{F_1}) \begin{cases} \text{Max} & Z(x) = \frac{-x_1 + 4}{x_2 + 1} \\ \text{S.c} & \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

Nous remarquons que $Z(x) \leq 0$ pour l'ensemble des solutions réalisables, car nous avons : $N(x) = -x_1 + 4 \leq 0$ et $D(x) = x_2 + 1 \geq 0$; $x_1, x_2 \geq 0$.

En appliquant le changement de variables: $t = \frac{1}{D(x)}$, $y = tx$ nous aurons :

La fonction objectif :

$$y = t \times x, \text{ avec } t = \frac{1}{x_2 + t}$$

Sous contraintes :

$$\begin{aligned} (x_2 + 1) \times t &\leq 1 \\ (-x_1 + 4) \times t &\leq 0 \\ (-x_1 + 3x_2) \times t &\leq 0 \\ (x_1 - 6) \times t &\leq 0 \\ x_1, x_2, t &\geq 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons le problème linéaire équivalent suivant :

$$(P_{F_2}) \begin{cases} \text{Max } Z(y, t) = -y_1 + 4t. \\ \text{S.c :} \\ y_2 + t \leq 1 \\ -y_1 + 4t \leq 1 \\ -y_1 + 3y_2 \leq 0 \\ y_1 - 6t \leq 0 \\ y_1, y_2, t \geq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Nous résolvons le problème de la programmation linéaire (P_{F_2}) par la méthode du simplexe et nous obtenons :

$$y_1^* = 0, y_2^* = 0.27, t^* = 0.1.$$

D'où la solution optimale du problème (P_{F_1}) est :

$$x_1^* = \frac{y_1^*}{t^*} = \frac{0}{0.1} = 0$$

$$x_2^* = \frac{y_2^*}{t^*} = \frac{0.27}{0.1} = 2.7$$

$$\implies x^* (x_1^* = 0, x_2^* = 2.7)^t.$$

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, l'optimisation convexe et les conditions nécessaires d'optimalité sont abordées, et quelques stratégies de résolution d'un problème hyperbolique sont présentées telles que la résolution directe, où la méthode de Cambini est citée, la résolution par paramétrisation, et la résolution d'un problème équivalent telle que la méthode de Charne et al.

Chapitre 3

Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs

3.1 Introduction

Dans divers problèmes pratiques qui se posent dans la théorie de la décision, l'économie et la gestion de portefeuille, etc., il est nécessaire d'optimiser le rapport de plusieurs fonctions linéaires. Ces problèmes de prise de décision sont appelés problèmes linéaires fractionnaires multi-objectifs, qui est un domaine de recherche très investi ces dernières années. L'établissement des conditions d'existence des solutions efficaces et la dualité en constituent un des axes qui a suscité beaucoup d'intérêt.

3.2 Formulation du problème

Mathématiquement, un problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs peut être formulé comme suit :

$$\text{(MOLFPP)} \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } Z_1(x) = \frac{p^1x + \alpha^1}{q^1x + \beta^1} \\ \text{maximiser } Z_2(x) = \frac{p^2x + \alpha^2}{q^2x + \beta^2} \\ \vdots \\ \text{maximiser } Z_k(x) = \frac{p^kx + \alpha^k}{q^kx + \beta^k} \\ \text{S.c.} \\ S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Où $k \geq 2$, α^i, β^i sont des scalaires ; $p^i, q^i \in \mathbb{R}^n$ pour tout $i = \{1, \dots, k\}$; $b \in \mathbb{R}^m$; $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Nous supposerons pour toute la suite que:

S est un compact non vide de \mathbb{R}^n . $q^i x + \beta^i > 0$ sur S pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.

3.3 Complexité du problème

La difficulté d'un problème découle de l'efficacité des algorithmes de résolution qu'on peut lui appliquer. La complexité d'un algorithme évalue un majorant du nombre d'opérations élémentaires, comme une fonction de la taille des données, qu'on doit effectuer, dans le pire des cas, pour obtenir le résultat escompté.

Un algorithme est dit polynomial s'il est de complexité polynomiale et on dit qu'un problème est de (classe P) s'il peut être résolu en temps polynomial en la taille de ses données.

Par contre, un algorithme qui n'est pas polynomial est dit exponentiel et un problème est de (classe NP : Non déterministe Polynomial) si on peut vérifier un certificat donnant la solution, en temps polynomial en la taille des données. On a alors : $P \subseteq NP$. Les problèmes NP-complets sont les problèmes les plus difficiles de la classe NP [20].

3.4 Conversion du Problème Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs en Programme Linéaire

Nuran Guzel [13] a proposé une méthode permettant de convertir un problème de programmation linéaire fractionnaire multi-objectifs en programme linéaire, la méthode est fondamentalement basée sur le théorème proposé par Dinkelbach [7] qui est donné par:

Théorème 3.1 (Théorème de Dinkelbach) [7]

$$z_i^* = \frac{N_i(x^*)}{D_i(x^*)} = \max \left\{ \frac{N_i(x)}{D_i(x)} / x \in S \right\} \text{ si et seulement si :}$$

$$\max \{ N(x) - z_i^* D(x) / x \in S \} = 0 \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, k.$$

Définition 3.1 (Solution efficace)

Une solution $\bar{x} \in S$ est dite solution efficace du problème (MOLFPP) si et seulement s'il n'existe aucune autre solution $x \in S$ telle que :

- $Z_i(x) \geq Z_i(\bar{x})$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.
- $Z_i(x) > Z_i(\bar{x})$ pour au moins un $i \in \{1, \dots, k\}$.

Proposition 3.1 (Nuran Guzel) [13]

\bar{x} est une solution efficace du problème linéaire fractionnaire multi-objectifs (MOLFPP), si \bar{x} est la solution optimale du problème linéaire :

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^k (N_i(x) - z_i^* D_i(x)) / x \in S \right\} \tag{3.2}$$

où $z_i^* = \frac{N_i(x_i^*)}{D_i(x_i^*)} = \max \left\{ \frac{N_i(x)}{D_i(x)} / x \in S \right\}$ pour tout $i = 1, 2, \dots, k$.

Démonstration

Soient:

$$x_i^* \text{ Le maximum global de la fonction objectif } \frac{N_i(x)}{D_i(x)} ; \{i = \overline{1, k}\}$$

$$z_i^* = \max \left\{ \frac{N_i(x)}{D_i(x)} / x \in S \right\}; \{i = \overline{1, k}\} \text{ tels que:}$$

$$z_i^* = z_i(x_i^*) = \frac{N_i(x_i^*)}{D_i(x_i^*)} = \max \left\{ \frac{N_i(x)}{D_i(x)} / x \in S \right\}, \forall i = 1, 2, \dots, k. \quad (a)$$

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\frac{N_i(x_i^*)}{D_i(x_i^*)} \geq \frac{N_i(x)}{D_i(x)} \iff D_i(x) \frac{N_i(x_i^*)}{D_i(x_i^*)} \geq N_i(x), \forall i = 1, 2, \dots, k$$

$$\Rightarrow N_i(x) - z_i^* D_i(x) \leq 0, \forall i = 1, 2, \dots, k, \text{ et } \forall x \in S \quad (b)$$

Et soit \bar{x} la solution optimale du problème :

$$\text{Max} \left\{ \sum_{i=1}^k (N_i(x) - z_i^* D_i(x)) / x \in S \right\} = \text{max} \left\{ \sum_{i=1}^k (N_i(x) - \frac{N_i(x_i^*)}{D_i(x_i^*)} D_i(x)) / x \in S \right\}.$$

Nous avons donc :

$$\sum_{i=1}^k (N_i(x) - z_i^* D_i(x)) \leq \sum_{i=1}^k (N_i(\bar{x}) - z_i^* D_i(\bar{x})) \leq \sum_{i=1}^k \max\{N_i(x) - z_i^* D_i(x)\} \leq 0, \forall x \in S.$$

Ainsi :

$$N_i(x) - z_i^* D_i(x) \leq N_i(\bar{x}) - z_i^* D_i(\bar{x}) \leq 0$$

$$\implies \left[\frac{N_i(x)}{D_i(x)} - z_i^* \right] D_i(x) \leq \left[\frac{N_i(\bar{x})}{D_i(\bar{x})} - z_i^* \right] D_i(\bar{x})$$

$$\implies \left[\frac{N_i(x)}{D_i(x)} - z_i^* \right] \leq \frac{D_i(\bar{x})}{D_i(x)} \left[\frac{N_i(\bar{x})}{D_i(\bar{x})} - z_i^* \right] \quad (c)$$

D'après le théorème de Dinkelbach, nous avons : $\left[\frac{N_i(x)}{D_i(x)} - z_i^* \right]$ et $\left[\frac{N_i(\bar{x})}{D_i(\bar{x})} - z_i^* \right]$ sont non-positifs.

Donc, pour $\frac{D_i(\bar{x})}{D_i(x)} \geq 1$ nous obtenons :

$$\frac{D_i(\bar{x})}{D_i(x)} \left[\frac{N_i(\bar{x})}{D_i(\bar{x})} - z_i^* \right] \leq \left[\frac{N_i(\bar{x})}{D_i(\bar{x})} - z_i^* \right]$$

$$\implies \frac{N_i(\bar{x})}{D_i(x)} - z_i^* \leq \frac{N_i(\bar{x})}{D_i(\bar{x})} - z_i^*$$

D'où $\frac{N_i(x)}{D_i(x)} \leq \frac{N_i(\bar{x})}{D_i(\bar{x})}$ et $z_i(x) \leq z_i(\bar{x}), \forall i = 1, 2, \dots, k.$

Par conséquent, \bar{x} est une solution efficace du problème de programmation fractionnaire linéaire multi-objectifs (MOLFPP).

Supposons que \bar{x} n'est pas une solution efficace du problème (MOLFPP), alors :

$$\exists x \in S \text{ et } j \in \{1, \dots, k\} \text{ tel que : } \frac{N_i(\bar{x})}{D_i(\bar{x})} \leq \frac{N_i(x)}{D_i(x)} \forall i = 1, 2, \dots, k,$$

En utilisant (c), nous aurons :

$$\frac{N_i(\bar{x})}{D_i(\bar{x})} \leq \frac{N_i(x)}{D_i(x)} \leq z_i^* \implies N_i(\bar{x}) - z_i^* D_i(\bar{x}) \leq N_i(x) - z_i^* D_i(x) \forall i = 1, \dots, k$$

$$\text{et : } \frac{N_j(\bar{x})}{D_j(\bar{x})} < \frac{N_j(x)}{D_j(x)} < z_j^*$$

$$\implies N_j(\bar{x}) - z_j^* D_j(\bar{x}) < N_j(x) - z_j^* D_j(x) \text{ pour au moins un } j \in \{1, \dots, k\}$$

Nous sommes les k inégalités, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^k N_i(\bar{x}) - z_i^* D_i(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^k N_i(x) - z_i^* D_i(x).$$

ce qui contredit que \bar{x} est une solution optimale du problème :

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^k (N_i(x) - z_i^* D_i(x)) / x \in S \right\}.$$

→ *Contradiction.*

D'où la proposition de Guzel est vérifiée .

Exemple 3.1

Utilisons la méthode de Guzel précédente pour convertir le problème fractionnaire linéaire bi-objectifs suivant en problème de programmation linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z_1(x_1, x_2) = \frac{4.2x_1 + 3.7x_2}{2.2x_1 + 4.7} \\ \text{Max } z_2(x_1, x_2) = \frac{2.2x_1 + 2.7x_2}{0.8x_1 + 0.8x_2 + 4.7} \\ \text{S.c} \\ \quad x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Calculons z_1^* et z_2^*

1) Pour trouver la valeur de z_1^* nous résolvons le programme linéaire fractionnaire mono-objectif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad z_1(x_1, x_2) = \frac{4.2x_1 + 3.7x_2}{2.2x_1 + 4.7} \\ \text{S.c} \\ \quad x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Nous résolvons le problème (3.3) par la méthode de Charne et Cooper étudiiée au chapitre 2 :

Nous optons pour le changement de variables suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad z = xt; \quad t = \frac{1}{2.2x_1 + 4.7} \\ \text{S.c} \\ \quad (2.2x_1 + 4.7)t \leq 1 \\ \quad (x_1 + 2x_2 - 3)t \leq 0 \\ \quad (3x_1 + 2x_2 - 6)t \leq 0 \\ \quad x_1, x_2, t \geq 0 \end{array} \right.$$

Nous obtenons le programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad 4.2z_1 + 3.7z_2 \\ \text{S.c} \\ \quad 2.2z_1 + 4.7t \leq 1 \\ \quad z_1 + 2z_2 - 3t \leq 0 \\ \quad 3z_1 + 2z_2 - 6t \leq 0 \\ \quad z_1, z_2, t \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{à résoudre par la méthode du simplexe}$$

Nous aboutissons aux résultats suivants :

$z_1^* = 1.18$, avec $x_1 = 0$ et $x_2 = 1.5$.

2) Pour trouver la valeur de z_2^* nous résolvons le programme linéaire fractionnaire mono-objectif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad z_2(x_1, x_2) = \frac{2.2x_1 + 2.7x_2}{0.8x_1 + 0.8x_2 + 4.7} \\ \text{S.c} \\ \quad x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Nous résolvons le problème (3.4) par la méthode de Charne et Cooper :

Nous optons pour le changement de variables suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = xt; t = \frac{1}{0.8x_1 + 0.8x_2 + 4.7} \\ \text{S.c} \\ (0.8x_1 + 0.8x_2 + 4.7)t \leq 1 \\ (x_1 + 2x_2 - 3)t \leq 0 \\ (3x_1 + 2x_2 - 6)t \leq 0 \\ x_1, x_2, t \geq 0 \end{array} \right.$$

Nous obtenons le programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } 2.2z_1 + 2.7z_2 \\ \text{S.c} \\ 0.8z_1 + 0.8z_2 + 4.7t \leq 1 \\ z_1 + 2z_2 - 3t \leq 0 \\ 3z_1 + 2z_2 - 6t \leq 0 \\ z_1, z_2, t \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{à résoudre par la méthode du simplexe.}$$

Nous aboutissons aux résultats :

$$z_2^* = 0.82, \text{ avec } x_1 = 1.5, \text{ et } x_2 = 0.75.$$

En utilisant la méthode de Guzel, nous obtenons la fonction objectif du programme linéaire équivalent au problème(3.2) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} z(x) &= (N_1(x) - z_1^*D_1(x)) + (N_2(x) - z_2^*D_2(x)) \\ &= (4.2x_1 + 3.7x_2) - 1.18(2.2x_1 + 4.7) + (2.2x_1 + 2.7) - 0.82(0.8x_1 + 0.8x_2 + 4.7) \\ &= 3.14x_1 + 3.04x_2 - 6.7 . \end{aligned}$$

D'où le programme linéaire équivalent au problème (3.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z(x) = 3.14x_1 + 5.754x_2 - 9.4 \\ \text{S.c} \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{à résoudre par la méthode du simplexe}$$

Résultats :

$$x_1 = 1.5, x_2 = 0.75.$$

D'où la solution efficace du problème (3.2) est :

$$x_1 = 1.5, x_2 = 0.75 \text{ avec } \text{Max } z_1(x_1, x_2) = 1.13 \text{ et } \text{Max } z_2(x_1, x_2) = 0.82.$$

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la forme générale d'un problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs, ainsi qu'une méthode de conversion du problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs en problème linéaire qui a été proposée par Nuran Guzel [13].

Chapitre 4

Logique Floue

4.1 Introduction

Les connaissances dont nous disposons sur une situation quelconque sont généralement imparfaites:

-Soit parce que nous avons un doute sur leur validité, elles sont alors incertaines (exemple: Il fera beau peut être demain).

-Soit parce que nous éprouvons une difficulté à exprimer ces connaissances clairement, elles sont alors imprécises (exemple: être proche de 5)

Ces connaissances imprécises ont été prises en considération en 1965 par Zadeh [23], qui a introduit la notion des ensembles flous à partir de l'idée d'appartenance partielle à une classe.

4.2 Préliminaires sur les ensembles flous

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un ensemble.

Le mérite de Zadeh a été de tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée, c'est à dire permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à un ensemble, c'est à dire autoriser un élément d'appartenir plus au moins fortement à cet ensemble.

La figure suivante présente l'ensemble classique et l'ensemble flou :

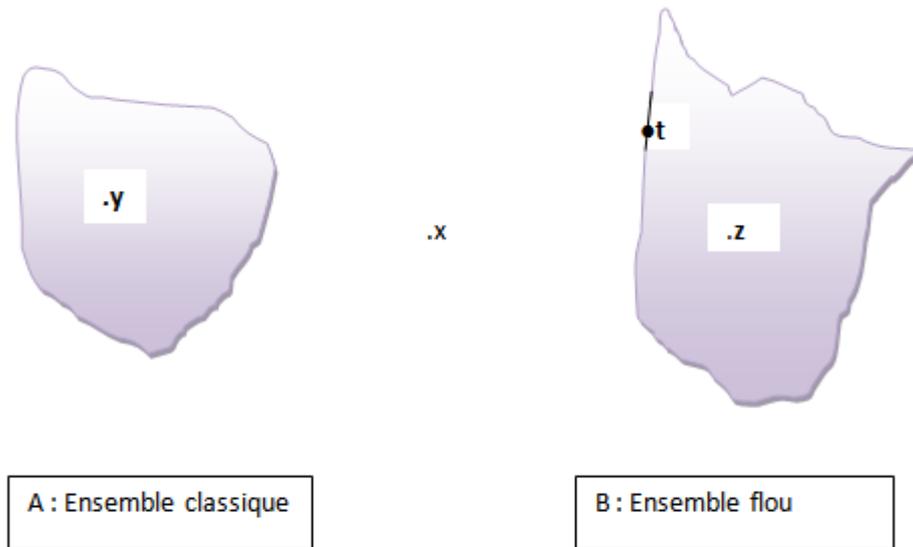


Figure 4.1 : Ensemble classique et ensemble flou.

Dans la figure ci-dessus nous avons :

- x n'appartient ni à A, ni à B.
- y appartient à A.
- z appartient totalement à B.
- t appartient partiellement à B.

4.2.1 Ensemble flou

Définition 4.1

Soit S un ensemble référentiel appelé univers qui, peut être fini ou infini, entier ou continu, ordonné ou non ordonné .

Un ensemble flou noté \tilde{A} est caractérisé par une fonction d'appartenance :

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}} : S &\rightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \end{aligned}$$

Où $\mu_{\tilde{A}}(x)$ représente selon le contexte

Soit : Le degré d'appartenance de x à \tilde{A} .

Soit : Le degré de compatibilité de x avec un concept vague.

Soit : Le degré de similarité de x avec un prototype.

Donc un ensemble flou \tilde{A} de S est l'ensemble des couples définis par :

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) / x \in S \}$$

Exemple 4.1 Soient $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et $\tilde{A} = \{(x_1, 0.8); (x_2, 0); (x_3, 1); (x_4, 0.2); (x_5, 0.5)\}$ sous ensemble flou de S .

Nous observons alors trois cas possibles :

$$\begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0 & \text{si } x \text{ n'appartient pas à } \tilde{A} \\ 0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1 & \text{si } x \text{ appartient partiellement à } \tilde{A} \\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 & \text{si } x \text{ appartient totalement à } \tilde{A} \end{cases}$$

Remarque:

Un ensemble classique A est caractérisé par sa fonction caractéristique (ou fonction d'appartenance de A) telle que :

$$X_A(x) = \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

4.2.2 Noyau d'un ensemble flou

Définition 4.2

Le noyau de \tilde{A} , noté $Noy(\tilde{A})$ est l'ensemble classique de tous les éléments qui lui appartiennent totalement (avec un degré 1). Formellement : $Noy(\tilde{A}) = \{x \in S / \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$.

4.2.3 Ensemble flou normalisé

Définition 4.3

Un ensemble flou est dit être normalisé si et seulement si :
 $\exists x_0 \in S / \mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$ c'est à dire ($Noy \neq \emptyset$).

4.2.4 Ensemble flou convexe

Définition 4.4

Un ensemble flou est convexe si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in \tilde{A}, \forall \lambda \in [0, 1]: \mu_{\tilde{A}}((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1); \mu_{\tilde{A}}(x_2)) \tag{4.1}$$

4.2.5 Nombre flou

Définition 4.5

Un nombre flou \tilde{A} est un ensemble flou normalisé et convexe de \mathbb{R} ($S = \mathbb{R}$) et dont la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}$ est continue par morceau .

Exemple 4.2

$\tilde{4}$ est le nombre flou “ a peu près égale à 4 “

$\tilde{4}$ est le nombre flou caractérisé par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ (x - 3) & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \\ (-x + 5) & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Il est présenté par la figure suivante :

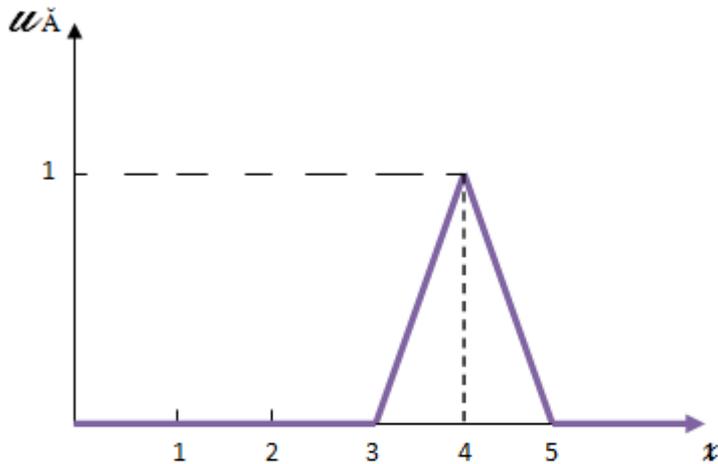


Figure 4.2 : Fonction d'appartenance du nombre flou $\tilde{4}$

”

4.2.6 Opérations sur les ensembles flous

Soient \tilde{A} et \tilde{B} deux ensembles flous d'un même référentiel S de fonctions d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}$ et $\mu_{\tilde{B}}$ respectivement :

1. Inclusion : $\tilde{A} \subset \tilde{B} \iff \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in S,$
2. Égalité : $\tilde{A} = \tilde{B} \iff \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in S,$
3. Complémentaire ou négation : $\tilde{\tilde{A}} = \left\{ (x; \mu_{\tilde{\tilde{A}}}(x)) / \mu_{\tilde{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), x \in S \right\},$
4. Intersection : $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ est un ensemble flou de S dont la fonction d'appartenance est définie par : $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in S,$
5. Réunion : $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ est un ensemble flou avec la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in S.$$

4.2.7 Fonction de référence

Définition 4.6 [16]

Une fonction $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite fonction de référence si elle vérifie les conditions suivantes :

- a) $L(-x) = L(x), \forall x \in \mathbb{R}$,
- b) $L(0) = 1$,
- c) L n'est pas croissante sur $[0, +\infty[$.

4.2.8 Nombre flou de type L-R

Définition 4.7 [16]

Un nombre flou \tilde{A} est de type L-R si sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}$ est définie par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-\alpha}{x}\right) & \text{si } x \leq m, \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } m \leq x \leq n \\ R\left(\frac{x-n}{\beta}\right) & \text{si } x \geq n, \beta > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Où : L (Left) et R (Right) sont deux fonctions de référence,

m est la valeur moyenne à gauche,

n est la valeur moyenne à droite,

α et β sont deux nombres strictement positifs appelés écart à gauche et écart à droite.

Un nombre flou de type L-R est noté par :

$$\tilde{A} = (m, n, \alpha, \beta)_{L-R} \text{ ou bien : } \tilde{A} = (m - \alpha, m, n, n + \beta)_{L-R}$$

Il est présenté par :

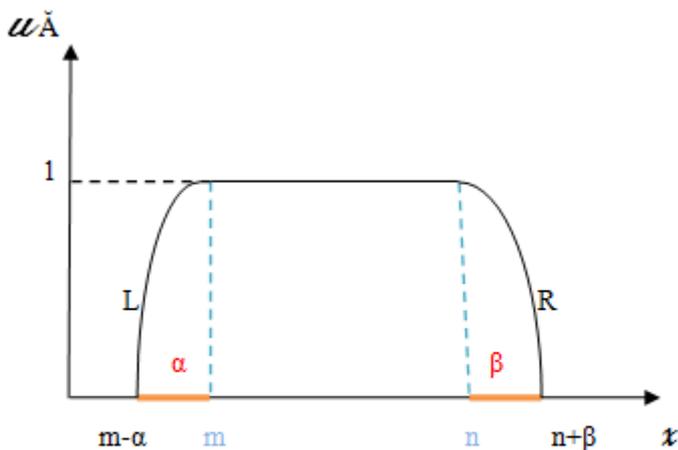


Figure 4.3 : Nombre flou de type L-R

Exemple 4.3

Soit le nombre flou $\tilde{A} = (m, n, \alpha, \beta)_{L-R} = (4, 6, 2, 3)$. La fonction d'appartenance de \tilde{A} est présentée par la figure suivante :

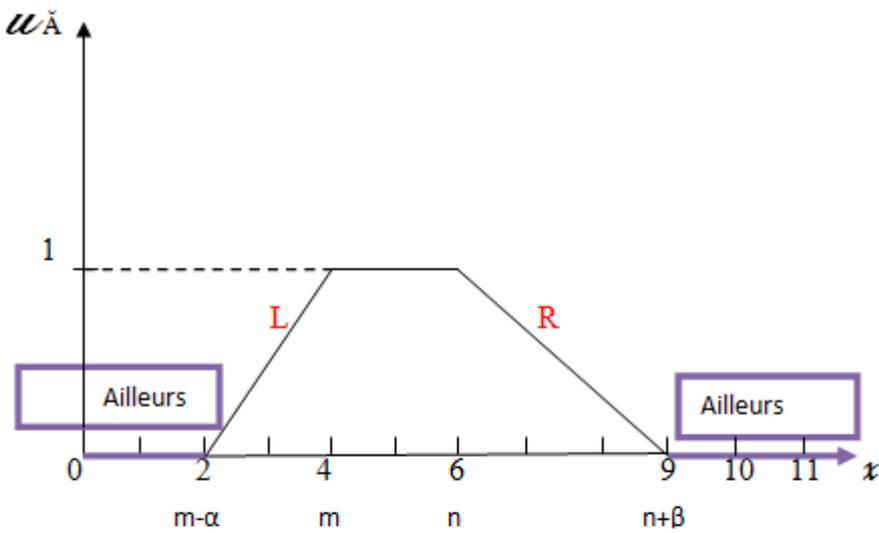


Figure 4.4 : Fonction d'appartenance de \tilde{A}

Remarques :

1. Il existe plusieurs types de nombres flous de type L-R.
2. Lorsque les fonctions de référence L et R sont linéaires, nous parlons alors de nombres flous de type triangulaire ou trapézoïdal.

4.2.9 Nombre flou de type triangulaire

Définition 4.8

Un nombre flou noté $\tilde{A} = (a, b, d)$ est de type triangulaire si sa fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{b - a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x = b \\ \frac{d - x}{d - b} & \text{si } b \leq x \leq d \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Il est présenté graphiquement par :

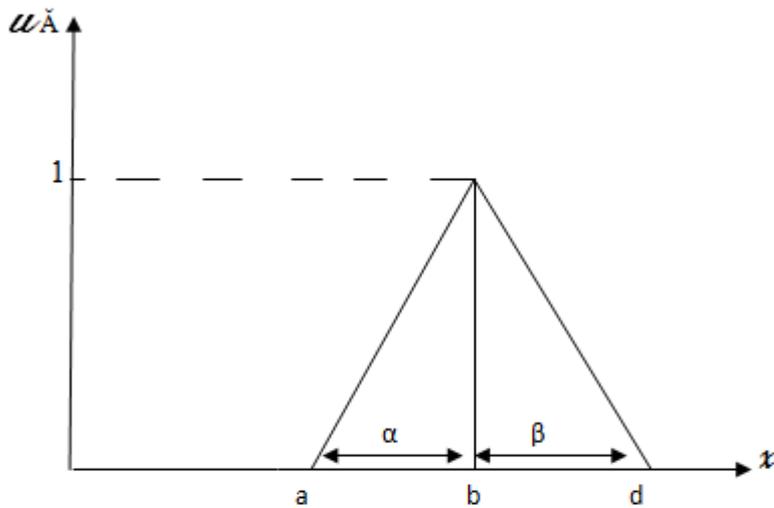


Figure 4.5 : Nombre flou triangulaire (a, b, c)

4.2.10 Comparaison et arithmétique de nombres flous triangulaires

Soient $\tilde{A}=(a_1, b_1, d_1)$ et $\tilde{B}=(a_2, b_2, d_2)$ deux nombres flous de type triangulaire

a) Comparaison de deux nombres flous triangulaires

1. Un nombre flou triangulaire \tilde{A} est non-négatif si et seulement si $a_1 \geq 0$
2. $\tilde{A}=\tilde{B} \iff a_1 = a_2; b_1 = b_2; d_1 = d_2.$
3. $\tilde{A} \leq \tilde{B} \iff a_1 \leq a_2; a_1 - b_1 \leq a_2 - b_2; a_1 + d_1 \leq a_2 + d_2.$

b) Arithmétique des nombres flous triangulaires

1. $\tilde{A} \oplus \tilde{B}=(a_1 + a_2, b_1 + b_2, d_1 + d_2).$
2. $-\tilde{A}=- (a_1, b_1, d_1)=(-a_1, d_1, b_1).$
3. $\tilde{A} \ominus \tilde{B}=(a_1 - a_2, b_1 + d_2, d_1 + b_2).$
4. $\lambda \otimes \tilde{A} = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda d_1) & \text{si } \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ (\lambda a_1, -\lambda d_1, -\lambda b_1) & \text{si } \lambda \leq 0 \end{cases}$

Exemple 4.4

Soient $\tilde{A} = (2, 1, 3)$ et $\tilde{B} = (-3, 2, 4)$ deux nombres flous triangulaires, alors:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (2, 1, 3) \oplus (-3, 2, 4) = (2 - 3, 1 + 2, 3 + 4) = (-1, 3, 7)$$

$$-\tilde{A} = -(2, 1, 3) = (-2, 3, 1)$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (2, 1, 3) - (-3, 2, 4) = (2, 1, 3) + (3, 4, 2) = (5, 5, 5).$$

4.2.11 Nombre flou de type trapézoïdal

Définition 4.9

Un nombre flou \tilde{A} est de type trapézoïdal si sa fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Il est noté par: $\tilde{A} = (a, b, c, d)$

Représentation graphique :

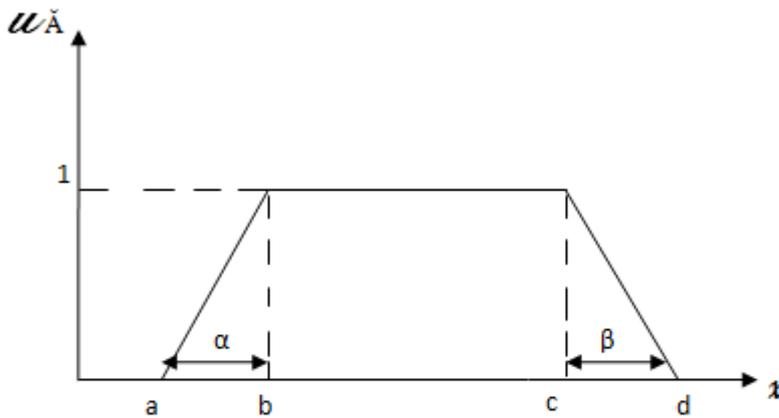


Figure 4.6: Nombre flou trapézoïdal (a, b, c, d)

Remarque: Si $b = c$, on obtient alors un nombre flou de type triangulaire .

4.2.12 Comparaison et arithmétique de nombres flous trapézoïdaux

Soient $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ et $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ deux nombres flous de type trapézoïdaux :

a) Comparaison de deux nombres flous trapézoïdaux

- \tilde{A} est non négatif si et seulement si : $a_1 \geq 0$.
- $\tilde{A} = \tilde{B} \iff a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$.
- $\tilde{A} \leq \tilde{B} \iff a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2, a_1 - c_1 \leq a_2 - d_2, b_1 + d_1 \leq b_2 + d_2$.

b) Opérations arithmétiques sur les nombres flous de type trapézoïdaux

- $\tilde{0} = (0, 0, 0, 0)$ nombre flou trapézoïdal nul .
- $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$.
- $-\tilde{A} = -(a_1, b_1, c_1, d_1) = (-b_1, -a_1, d_1, c_1)$.
- $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a_1 - b_2, b_1 - a_2, c_1 + d_2, c_2 + d_1)$.
- $\lambda \otimes \tilde{A} = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1, \lambda d_1) & \text{si } \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ (\lambda b_1, \lambda a_1, -\lambda d_1, -\lambda c_1) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

Exemple 4.5

Soient \tilde{A} et \tilde{B} deux nombres flous trapézoïdaux tels que : $\tilde{A} = (-2, 1, 1, 2)$ et $\tilde{B} = (2, 4, 1, 1)$.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \tilde{A} \oplus \tilde{B} &= (-2, 1, 1, 2) \oplus (2, 4, 1, 1) = (0, 5, 2, 3) \\ -\tilde{B} &= -(2, 4, 1, 1) = (-4, -2, 1, 1) \\ -3 \otimes \tilde{A} &= -3 \otimes (-2, 1, 1, 2) = 3 \otimes (-1, 2, 2, 1) = (-3, 6, 6, 3) \end{aligned}$$

4.3 Principe d'extension de Zadeh

Soient $Z : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \longrightarrow Y$, où S_1, S_2, \dots, S_n et Y sont des ensembles classiques , et

$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ n sous-ensembles flous de S_1, \dots, S_n respectivement .

Le principe d'extension permet d'induire dans \tilde{A}_i ($i = \overline{1, n}$) , le sous-ensemble flou \tilde{B} dans Y par Z de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Z : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n &\rightarrow Y \\ \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n &\longrightarrow Z \left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n \right) = \tilde{B} \end{aligned}$$

Dont la fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_n)} \min \left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \right) & , \text{ si } Z^{-1}(y) \neq \emptyset \\ & y = Z(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ 0 & \text{ si } Z^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Où : $Z^{-1}(y)$ est l'image réciproque de y par Z .

4.4 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif de présenter dans un premier temps les définitions nécessaires à la compréhension de la logique floue , puis nous avons fait allusion à l'extension de Zadeh qui permet de passer des opérations élémentaires ($+$, \times , $/$, $-$, ...) sur les ensembles classiques (sur \mathbb{R}) à des opérations sur les ensembles flous.

Chapitre 5

Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs Floue

5.1 Introduction

Très souvent dans des situations de la vie réelle, les valeurs des coefficients d'un problème de programmation linéaire fractionnaire multi-objectifs ne sont que de façon imprécise à la disposition de l'expert. On parle alors de la Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs Floue (FMOLFPP) qui représente un domaine de recherche très important, qui a attiré l'attention de beaucoup de chercheurs.

Dans ce chapitre, nous allons décrire une méthode pour résoudre un problème de programmation linéaire fractionnaire multi-objectifs floue en combinant les méthodes proposées par Chen et Hsieh [4] et Guzel [13] étudiée au chapitre 3.

5.2 Forme générale d'un problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs Floue

Un Problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs Floue peut être écrit de la manière suivante :

$$\text{(FMOLFPP)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad \tilde{z}_1 = \frac{\tilde{p}^1 x + \tilde{\alpha}^1}{\tilde{q}^1 x + \tilde{\beta}^1} \\ \text{Maximiser} \quad \tilde{z}_2 = \frac{\tilde{p}^2 x + \tilde{\alpha}^2}{\tilde{q}^2 x + \tilde{\beta}^2} \\ \vdots \\ \text{Maximiser} \quad \tilde{z}_k = \frac{\tilde{p}^k x + \tilde{\alpha}^k}{\tilde{q}^k x + \tilde{\beta}^k} \\ \text{S.c} \\ \tilde{A}x \leq \tilde{b}. \\ x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Où: \tilde{A} est une matrice floue d'ordre (m, n) , $x \in \mathbb{R}^n$ et \tilde{b} est un vecteur flou d'ordre m .

5.3 Défuzzification

La défuzzification est une procédure de transformation des valeurs floues en valeurs réelles. Elle permet de créer une correspondance entre l'ensemble des nombres flous et celui des nombres réels .

Dans notre cas, la défuzzification des nombres flous généralisés est faite à partir de la méthode dite GMIR (Graded Mean Integration Representation Method), introduite par Chen et Hsieh [4]. La méthode est fondamentalement basée sur la valeur intégrale de la valeur moyenne graduée de niveau h d'un nombre flou généralisé.

Cette valeur est représentée graphiquement par :

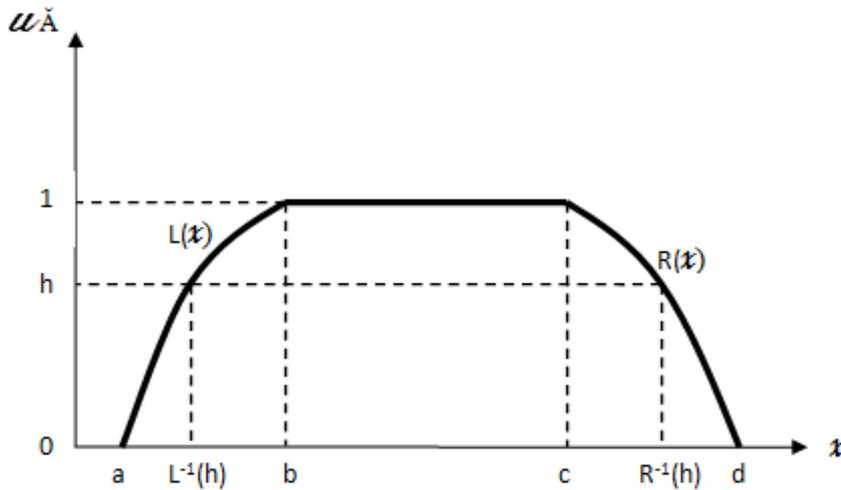


Figure 5.1 : Valeur moyenne graduée de niveau h du nombre flou généralisé $\tilde{A}=(a, b, c, d)_{L-R}$.

Définition 5.1

Soit $\tilde{A} = (a, b, c, d)_{L-R}$ un nombre flou généralisé, avec une fonction de référence gauche L et une fonction de référence droite R, L^{-1} et R^{-1} sont les fonctions inverses de L et R respectivement. La valeur moyenne graduée de niveau h de nombre flou \tilde{A} est donnée par la relation suivante :

$$\frac{h}{2} (L^{-1}(h) + R^{-1}(h)) \tag{5.2}$$

Ainsi, la valeur intégrale déduite pour un nombre flou généralisé \tilde{A} s'écrit :

$$F(\tilde{A}) = \frac{\int_0^1 \frac{h}{2} (L^{-1}(h) + R^{-1}(h)) dh}{\int_0^1 h dh} ; 0 \leq h \leq 1 \tag{5.3}$$

En utilisant la formule (5.3) aux nombres flous trapézoïdaux et triangulaires, nous obtenons la proposition suivante:

Proposition 5.1[4]

$$F(\tilde{A}) = \frac{a + 2b + 2c + d}{6} \text{ pour un nombre flou trapézoïdal } \tilde{A} = (a, b, c, d) \quad (5.4)$$

$$F(\tilde{B}) = \frac{a + 4b + d}{6} \text{ pour un nombre flou triangulaire } \tilde{B} = (a, b, d) \quad (5.5)$$

Démonstration:

1) Pour le nombre flou de type trapézoïdal $\tilde{A} = (a, b, c, d)$, la fonction de référence gauche L et la fonction de référence droite R sont données respectivement par :

$$\begin{cases} L : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \rightarrow L(x) = \frac{a - x}{a - b} \end{cases} \quad (a)$$

$$\text{Et } \begin{cases} R : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \rightarrow R(x) = \frac{d - x}{d - c} \end{cases} \quad (b)$$

D'après la formule (a) nous avons : $y = \frac{a - x}{a - b} \Rightarrow ya - yb = a - x$.

D'où : $x = a - ya + yb = L^{-1}(y)$.

Donc : $L^{-1}(h) = a - ha + hb$.

Et $\int_0^1 \frac{h}{2} L^{-1}(y) dh = \int_0^1 \frac{h}{2} (a - ha + hb) dh = \frac{1}{2} \int_0^1 (ah - h^2a + h^2b) dh$

$$= \frac{1}{2} \left[a \frac{h^2}{2} - a \frac{h^3}{3} + b \frac{h^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{a}{2} - \frac{a}{3} + \frac{b}{3} \right]$$

$$\text{D'où : } \frac{\int_0^1 \frac{h}{2} \{L^{-1}(h)\} dh}{\int_0^1 h dh} = \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{a}{2} - \frac{a+b}{3} \right]}{\frac{1}{2}} = \frac{a}{6} + \frac{b}{3} = \frac{a+2b}{6} \quad (c)$$

D'une façon similaire, nous trouvons: $R^{-1}(h) = d - hd + hc$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{h}{2} (d - hd + hc) dh = \frac{1}{2} \int_0^1 (dh - dh^2 + ch^2) dh$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{dh^2}{2} - \frac{dh^3}{3} + \frac{ch^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2} - \frac{d+c}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d+2c}{6} \right)$$

$$\text{D'où : } \frac{\int_0^1 \frac{h}{2} (R^{-1}(h)) dh}{\int_0^1 h dh} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{2c+d}{6} \right)}{\frac{1}{2}} = \frac{2c+d}{6} \quad (d)$$

Nous aboutissons au résultat suivant :

$$F(\tilde{A}) = \frac{\int_0^1 \frac{h}{2} L^{-1}(h) dh}{\int_0^1 h dh} + \frac{\int_0^1 \frac{h}{2} R^{-1}(h) dh}{\int_0^1 h dh} = (c) + (d) = \frac{a+2b}{6} + \frac{2c+d}{6}$$

$$F(\tilde{A}) = \frac{a+2b+2c+d}{6}.$$

2) Pour le nombre flou de type triangulaire $\tilde{B} = (a, b, d)$, la fonction de référence gauche L et fonction de référence droite R sont données respectivement par :

$$\begin{cases} L : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \rightarrow L(x) = \frac{a-x}{a-b} \end{cases} \quad (e)$$

$$\text{et } \begin{cases} R : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \rightarrow R(x) = \frac{d-x}{d-b} \end{cases} \quad (f)$$

D'après la formule (e) nous avons : $y = \frac{a-x}{a-b} \Rightarrow ya - yb = a - x$.

D'où : $x = a - ya + yb = L^{-1}(y)$.

Donc : $L^{-1}(h) = a - ha + hb$.

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{h}{2} L^{-1}(y) dh = \int_0^1 \frac{h}{2} (a - ha + hb) dh = \frac{1}{2} \int_0^1 (ah - ah^2 + bh^2) dh$$

$$= \frac{1}{2} \left[a \frac{h^2}{2} - a \frac{h^3}{3} + b \frac{h^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{a}{2} - \frac{a}{3} + \frac{b}{3} \right]$$

$$\text{D'où : } \frac{\int_0^1 \frac{h}{2} \{L^{-1}(h)\}}{\int_0^1 h dh} = \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{a}{2} - \frac{a+b}{3} \right]}{\frac{1}{2}} = \frac{a}{6} + \frac{b}{3} = \frac{a+2b}{6} \quad (g)$$

D'une façon similaire, nous aurons: $R^{-1}(h) = d - hd$

$$\text{Et } \int_0^1 \frac{h}{2} (d - hd) dh = \frac{1}{2} \int_0^1 (dh - dh^2) dh$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{2} h^2 - \frac{d}{3} h^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2} - \frac{d}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{6} \right)$$

$$\text{D'où : } \frac{\int_0^1 \frac{h}{2} (R^{-1}(h)) dh}{\int_0^1 h dh} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{d}{6} \right)}{\frac{1}{2}} = \frac{d}{6} \quad (h)$$

$$F(\tilde{B}) = \frac{\int_0^1 \frac{h}{2} \{L^{-1}(h) + R^{-1}(h)\} dh}{\int_0^1 h dh} = \frac{\frac{1}{2} \{ \int_0^1 h L^{-1}(h) + h R^{-1}(h) \} dh}{\frac{1}{2}}$$

$$= \int_0^1 (ah - ah^2 + bh^2) dh + \int_0^1 (dh - dh^2) dh.$$

$$=(g) + (h) = \frac{a + 2b}{6} + \frac{d}{6}$$

$$\text{D'où } F(\tilde{B}) = \frac{a + 2b + d}{6}$$

5.4 Résolution d'un problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs Flou

La stratégie de résolution consiste à défuzzifier le problème de programmation linéaire fractionnaire multi-objectifs flou en utilisant la méthode GMIR et obtenir un problème linéaire fractionnaire multi-objectifs qui sera transformé par la suite en problème de programmation linéaire en utilisant la méthode de Guzel [13], décrite dans le chapitre 3. Le problème linéaire sera résolu par la méthode du simplexe afin d'obtenir la solution optimale qui sera aussi la solution satisfaisante du problème de départ (FMOLFPP).

Définition 5.2

Concept de solution pour le Problème Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs Flou (5.1)

Une solution $x^* \in S$ est dite solution F-efficace (satisfaisante) pour le problème (FMOLFPP) si et seulement s'il n'existe aucune autre solution $x \in S$ telle que :

- $\tilde{z}_i(x) \geq \tilde{z}_i(x^*)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$
- $\tilde{z}_i(x) > \tilde{z}_i(x^*)$ pour au moins un $i \in \{1, \dots, k\}$.

Procédure de résolution

Étape 1

Défuzzifier le problème linéaire fractionnaire multi-objectifs flou pour obtenir un problème linéaire fractionnaire multi-objectifs c'est à dire convertir chaque paramètre flou de (FMOLFPP) en paramètre déterministe en utilisant la formule (5.4) pour les nombres flous trapézoïdaux, et la formule (5.5) pour les nombres flous triangulaires.

Étape 2

Résoudre chaque problème linéaire fractionnaire mono-objectif soumis à l'ensemble des contraintes: $\{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ par la méthode de Charne et Cooper du chapitre 2, et trouver z_i^* ($i = \overline{1, k}$) valeur optimale de chaque fonction objectif z_i ($i = \overline{1, k}$) respectivement .

Étape 3

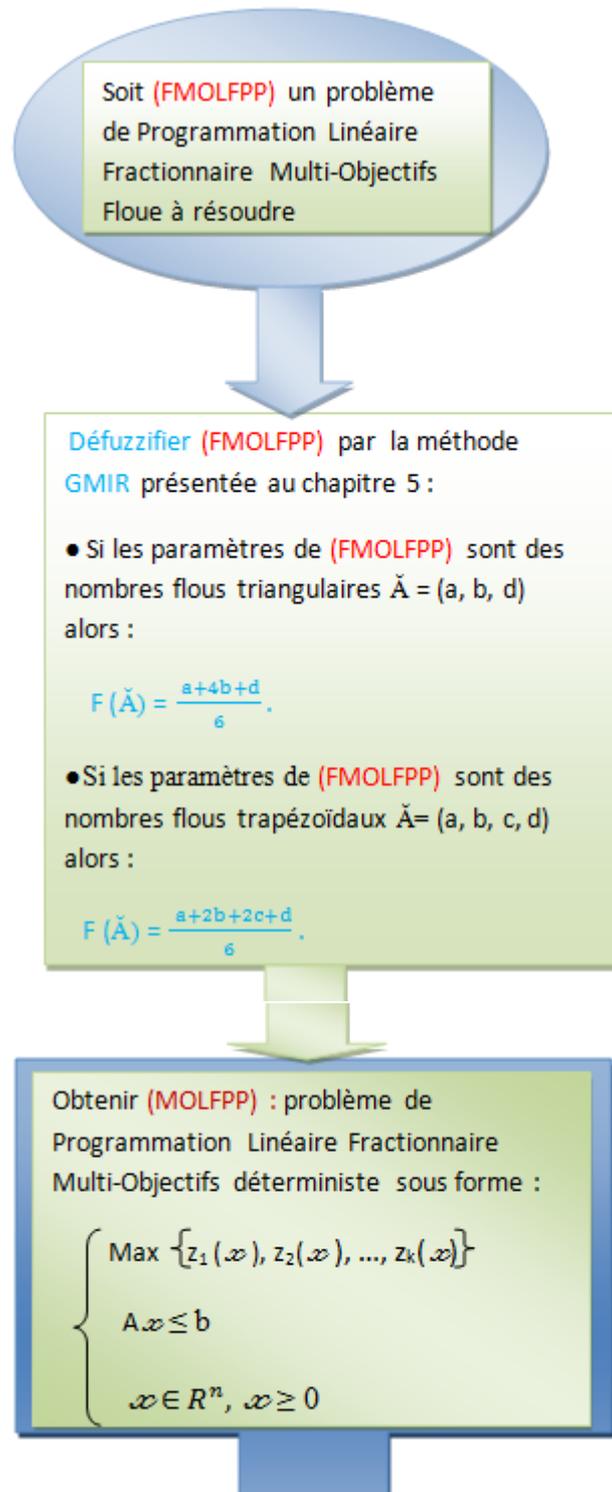
Formulation du problème linéaire équivalent au problème linéaire fractionnaire multi-objectifs en utilisant la méthode de Guzel du chapitre 3 comme suit:

Max $\left\{ \sum_{i=1}^k (N_i(x) - z_i^* D_i(x)) / x \in S \right\}$; soumis au même ensemble des contraintes $\{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ à résoudre par la méthode du simplexe.

Étape 4

La solution optimale du problème obtenu à l'étape 3, est une solution efficace du problème (*MOLFP*) obtenu à l'étape 1. Cette solution est aussi solution satisfaisante pour le problème initial (*FMOLFPP*).

5.5 Organigramme récapitulatif





Résoudre chacun des problèmes linéaires fractionnaires mono-objectif suivants :

$$1) z_1^* = \max z_1(x), A.x \leq b, x \geq 0$$

$$2) z_2^* = \max z_2(x), A.x \leq b, x \geq 0$$

.....

$$k) z_k^* = \max z_k(x), A.x \leq b, x \geq 0$$

Par la méthode de Charne et Cooper présentée au chapitre 2

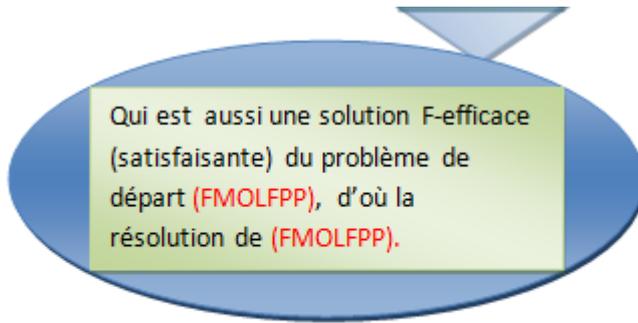


- Formuler le (PL) : programme linéaire équivalent à (MOLFPP) en utilisant la méthode de Guzel présentée au chapitre 3 :

$$\text{Max } \left\{ \sum_{i=1}^k (N_i(x) - Z_i^* D_i(x)) / A.x \leq b ; x \geq 0 \right\}$$

- Résoudre (PL) par la méthode du simplexe.

La solution optimale du problème (PL) est une solution efficace de (MOLFPP).



**Organigramme récapitulatif
de procédure de résolution
d'un problème de
Programmation Linéaire
Fractionnaire Multi-Objectifs**

5.6 Exemple numérique:

Considérons le problème de Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs Floue suivant:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{Maximiser } \tilde{z}_1 = \frac{(2, 4, 6, 8) x_1 + (5, 7, 9, 11) x_2}{(0, 1, 3, 4) x_1 + (0, 1, 1, 2) x_2 - (1, 1, 1, 1)} \\
 \text{Maximiser } \tilde{z}_2 = \frac{(4, 7, 9, 12) x_1 + (3, 4, 6, 7) x_2}{(2, 3, 5, 6) x_1 + (0, 1, 3, 4) x_2 - (1, 2, 2, 3)} \\
 \text{Maximiser } \tilde{z}_3 = \frac{(0, 1, 3, 4) x_1 - (5, 9, 11, 15) x_2}{(3, 5, 7, 9) x_1 + (1, 2, 4, 5) x_2 - (0, 1, 5, 6)} \\
 \text{Maximiser } \tilde{z}_4 = \frac{-(1, 3, 5, 7) x_1 - (2, 5, 7, 10) x_2}{(-1, 1, 3, 5) x_1 + (1, 1, 1, 1) x_2 - (0, 1, 1, 2)} \\
 \text{S.c} \\
 (0, 1, 3, 4) x_1 + (1, 3, 7, 9) x_2 \geq (6, 8, 12, 14) \\
 (0, 3, 5, 8) x_1 + (-1, 2, 4, 7) x_2 \leq (12, 18, 22, 28) \\
 -(1, 1, 1, 1) x_1 + (0, 1, 1, 2) x_2 \leq (0, 1, 3, 4) \\
 (1, 1, 1, 1) x_1 \leq (-1, 1, 3, 5) \\
 (-1, 1, 1, 3) x_2 \geq (1, 2, 6, 7) \\
 x_1, x_2 \geq 0
 \end{array} \right\} \text{(FMOLFPP)} \quad (5.6)
 \end{array}$$

Défuzzifions le problème donné en utilisant la méthode GMIR de la manière suivante :

1) Pour la première fonction objectif :

$$F((2, 4, 6, 8)) = \frac{2+2 \times 4+2 \times 6+8}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

$$F((5, 7, 9, 11)) = \frac{5+2 \times 7+2 \times 9+11}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

$$F((0, 1, 3, 4)) = \frac{0+2 \times 1+2 \times 3+4}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$F((0, 1, 1, 2)) = \frac{0+2 \times 1+2 \times 1+2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$F((1, 1, 1, 1)) = \frac{1+2 \times 1+2 \times 1+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

2) Pour la deuxième fonction objectif :

$$F((4, 7, 9, 12)) = \frac{4+2 \times 7+2 \times 9+12}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

$$F((3, 4, 6, 7)) = \frac{3+2 \times 4+2 \times 6+7}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

$$F((2, 3, 5, 6)) = \frac{2+2 \times 3+2 \times 5+6}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$F((0, 1, 3, 4)) = \frac{0+2 \times 1+2 \times 3+4}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$F((1, 2, 2, 3)) = \frac{1+2 \times 2+2 \times 2+3}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

3) Pour la troisième fonction objectif :

$$F((0, 1, 3, 4)) = \frac{0+2 \times 1+2 \times 3+4}{6} = \frac{12}{6} = 6$$

$$F((5, 9, 11, 15)) = \frac{5+2 \times 9+2 \times 11+15}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

$$F((3, 5, 7, 9)) = \frac{3+2 \times 5+2 \times 7+9}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$F((1, 2, 4, 5)) = \frac{1+2 \times 2+2 \times 4+5}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$F((0, 1, 5, 6)) = \frac{0+2 \times 1+2 \times 5+6}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

4) Pour la quatrième fonction objectif :

$$F((1, 3, 5, 7)) = \frac{1+2 \times 3+2 \times 5+7}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$F((2, 5, 7, 10)) = \frac{2+2 \times 5+2 \times 7+10}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$F((-1, 1, 3, 5)) = \frac{-1+2 \times 1+2 \times 3+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$F((1, 1, 1, 1)) = \frac{1+2 \times 1+2 \times 1+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$F((0, 1, 1, 2)) = \frac{0+2 \times 1+2 \times 1+2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Pour les contraintes :

(c_1) :

$$F((0, 1, 3, 4)) = \frac{0+2 \times 1+2 \times 3+4}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$F((1, 3, 7, 9)) = \frac{1+2 \times 3+2 \times 7+9}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

$$F((6, 8, 12, 14)) = \frac{6+2 \times 8+2 \times 12+14}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

(c_2) :

$$F((0, 3, 5, 8)) = \frac{0+2 \times 3+2 \times 5+8}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$F((-1, 2, 4, 7)) = \frac{-1+2 \times 2+2 \times 4+7}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$F((12, 18, 22, 28)) = \frac{12+2 \times 18+2 \times 22+28}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

(c_3) :

$$F(-(1, 1, 1, 1)) = -\frac{1+2 \times 1+2 \times 1+1}{6} = -\frac{6}{6} = -1$$

$$F((0, 1, 1, 2)) = \frac{0+2 \times 1+2 \times 1+2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$F((0, 1, 3, 4)) = \frac{0+2 \times 1+2 \times 3+4}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

(c_4) :

$$F((1, 1, 1, 1)) = \frac{1+2 \times 1+2 \times 1+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$F((-1, 1, 3, 5)) = \frac{-1+2 \times 1+2 \times 3+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$F((-1, 1, 1, 3)) = \frac{-1+2 \times 1+2 \times 1+3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$F((1, 2, 6, 7)) = \frac{1+2 \times 2+2 \times 6+7}{6} = \frac{18}{6} = 4$$

nous obtenons le problème de programmation linéaire fractionnaire multi-objectifs suivant :

$$(MOLFPP) \left\{ \begin{array}{l}
\text{Maximiser } z_1 = \frac{5x_1 + 8x_2}{2x_1 + x_2 - 1} \\
\text{Maximiser } z_2 = \frac{8x_1 + 5x_2}{4x_1 + 2x_2 - 2} \\
\text{Maximiser } z_3 = \frac{2x_1 - 10x_2}{6x_1 + 3x_2 - 3} \\
\text{Maximiser } z_4 = \frac{-4x_1 - 6x_2}{2x_1 + x_2 - 1} \\
S.c \\
2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\
4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\
-x_1 + x_2 \leq 2 \\
x_1 \leq 2 \\
x_2 \geq 4 \\
x_1, x_2 \geq 0.
\end{array} \right. \quad (5.7)$$

Résolvons chacun des problèmes mono-objectif suivants :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l}
\text{Maximiser } \frac{5x_1 + 8x_2}{2x_1 + x_2 - 1} \\
S.c \\
2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\
4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\
-x_1 + x_2 \leq 2 \\
x_1 \leq 2 \\
x_2 \geq 4 \\
x_1, x_2 \geq 0.
\end{array} \right. \quad (5.8)$$

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l}
\text{Maximiser } \frac{8x_1 + 5x_2}{4x_1 + 2x_2 - 2} \\
S.c \\
2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\
4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\
-x_1 + x_2 \leq 2 \\
x_1 \leq 2 \\
x_2 \geq 4 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{array} \right. \quad (5.9)$$

$$(P_3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad \frac{2x_1 - 10x_2}{6x_1 + 3x_2 - 3} \\ \text{S.c} \\ \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.10)$$

$$(P_4) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad \frac{-4x_1 - 6x_2}{2x_1 + x_2 - 1} \\ \text{S.c} \\ \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.11)$$

En utilisant la méthode de Charne et al :

Pour le problème nono-objectif (P_1):

Nous optons pour le changement de variables suivant:

La fonction objectif :

$$z = t \times x, \text{ avec } t = \frac{1}{2x_1 + x_2 - 1}$$

Sous contraintes :

$$\begin{aligned} (2x_1 + x_2 - 1) \times t &\leq 1 \\ (-2x_1 - 5x_2 + 10) \times t &\leq 0 \\ (4x_1 + 3x_2 - 20) \times t &\leq 0 \\ (-x_1 + x_2 - 2) \times t &\leq 0 \\ (x_1 - 2) \times t &\leq 0 \\ (-x_2 + 4) \times t &\leq 0 \\ x_1, x_2, t &\geq 0. \end{aligned}$$

Pour le problème mono-objectif (P_2):

La fonction objectif :

$$z = t \times x, \text{ avec } t = \frac{1}{4x_1 + 2x_2 - 2}$$

Sous contraintes :

$$\begin{aligned} (4x_1 + 2x_2 - 2) \times t &\leq 1 \\ (-2x_1 - 5x_2 + 10) \times t &\leq 0 \\ (4x_1 + 3x_2 - 20) \times t &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-x_1 + x_2 - 2) \times t &\leq 0 \\
(x_1 - 2) \times t &\leq 0 \\
(-x_2 + 4) \times t &\leq 0 \\
x_1, x_2, t &\geq 0
\end{aligned}$$

Pour le problème mono-objectif (P_3) :

La fonction objectif :

$$z = t \times x, \text{ avec } t = \frac{1}{6x_1 + 3x_2 - 3}$$

Sous contraintes:

$$\begin{aligned}
(6x_1 + 3x_2 - 3) \times t &\leq 1 \\
(-2x_1 - 5x_2 + 10) \times t &\leq 0 \\
(4x_1 + 3x_2 - 20) \times t &\leq 0 \\
(-x_1 + x_2 - 2) \times t &\leq 0 \\
(x_1 - 2) \times t &\leq 0 \\
(-x_2 + 4) \times t &\leq 0 \\
x_1, x_2, t &\geq 0
\end{aligned}$$

Pour le problème mono-objectif (P_4) :

La fonction objectif :

$$z = t \times x, \text{ avec } t = \frac{1}{2x_1 + x_2 - 1}$$

Sous contraintes :

$$\begin{aligned}
(2x_1 + x_2 - 1) \times t &\leq 1 \\
(-2x_1 - 5x_2 + 10) \times t &\leq 0 \\
(4x_1 + 3x_2 - 20) \times t &\leq 0 \\
(-x_1 + x_2 - 2) \times t &\leq 0 \\
(x_1 - 2) \times t &\leq 0 \\
(-x_2 + 4) \times t &\leq 0 \\
x_1, x_2, t &\geq 0
\end{aligned}$$

Après le changement de variables, nous obtenons les problèmes suivants :

$$(P'_1) \left\{ \begin{array}{l}
\text{Max } 5z_1 + 8z_2 \\
\text{S.c} \\
2z_1 + z_2 - t \leq 1 \\
-2z_1 - 5z_2 + 10t \leq 0 \\
4z_1 + 3z_2 - 20t \leq 0 \\
-z_1 + z_2 - 2t \leq 0 \\
z_1 - 2t \leq 0 \\
-z_2 + 4t \leq 0 \\
z_1, z_2, t \geq 0
\end{array} \right. \quad (5.12)$$

$$(P'_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad 8z_1 + 5z_2 \\ \text{S.c} \\ 4z_1 + 2z_2 - 2t \leq 1 \\ -2z_1 - 5z_2 + 10t \leq 0 \\ 4z_1 + 3z_2 - 20t \leq 0 \\ -z_1 + z_2 - 2t \leq 0 \\ z_1 - 2t \leq 0 \\ -z_2 + 4t \leq 0 \\ z_1, z_2, t \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.13)$$

$$(P'_3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad 2z_1 - 10z_2 \\ \text{S.c} \\ 6z_1 + 3z_2 - 3t \leq 1 \\ -2z_1 - 5z_2 + 10t \leq 0 \\ 4z_1 + 3z_2 - 20t \leq 0 \\ -z_1 + z_2 - 2t \leq 0 \\ z_1 - 2t \leq 0 \\ -z_2 + 4t \leq 0 \\ z_1, z_2, t \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.14)$$

$$(P'_4) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad -4z_1 - 6z_2 \\ \text{S.c} \\ 2z_1 + z_2 - t \leq 1 \\ -2z_1 - 5z_2 + 10t \leq 0 \\ 4z_1 + 3z_2 - 20t \leq 0 \\ -z_1 + z_2 - 2t \leq 0 \\ z_1 - 2t \leq 0 \\ -z_2 + 4t \leq 0 \\ z_1, z_2, t \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Les problèmes $(P'_1), (P'_2), (P'_3), (P'_4)$ sont résolus par la méthode du simplexe et nous obtenons :

$$\text{Max } z_1 = z_1^* = 6$$

$$\text{Max } z_2 = z_2^* = 2.57143$$

$$\text{Max } z_3 = z_3^* = -1.71429$$

$$\text{Max } z_4 = z_4^* = -4.57143$$

Les valeurs : $z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*$ sont toutes obtenues pour $x^* = (2, 4)^t$

En utilisant la méthode de Guzel, on construit le problème linéaire équivalent au problème de départ comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Max } z(x) &= (N_1(x) - z_1^* D_1(x)) + (N_2(x) - z_2^* D_2(x)) + (N_3(x) - z_3^* D_3(x)) + (N_4(x) - z_4^* D_4(x)) \\ &= (5x_1 + 8x_2) - z_1^* (2x_1 + x_2 - 1) + (8x_1 + 5x_2) - z_2^* (4x_1 + 2x_2 - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2x_1 - 10x_2) - z_3^* (6x_1 + 3x_2 - 3) + (-4x_1 - 6x_2) - z_4^* (2x_1 + x_2 - 1) \\
& = (5x_1 + 8x_2) - 6(2x_1 + x_2 - 1) + (8x_1 + 5x_2) - 2.57143(4x_1 + 2x_2 - 2) \\
& + (2x_1 - 10x_2) + 1.71429(6x_1 + 3x_2 - 3) + (-4x_1 - 6x_2) + 4.57143(2x_1 + x_2 - 1) \\
& = 8.143x_1 - 4.429x_2 + 1.429.
\end{aligned}$$

Enfin, nous obtenons le programme linéaire suivant:

$$(LP) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z(x) = 8.143x_1 - 4.429x_2 + 1.429 \\ \text{S.c} \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \geq 4 \\ x, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Ce dernier problème est résolu par la méthode du dual simplexe. La solution optimale est $x^* = (2, 4)^t$.

On conclut que la solution F-efficace du problème linéaire fractionnaire multi-objectifs flou (FMOLFPP) est $x^* = (2, 4)^t$.

5.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons décrit une méthode permettant de résoudre un problème de programmation linéaire fractionnaire multi-objectifs flou (FMOLFPP). Ici le problème (FMOLFPP) est d'abord converti en problème de programmation linéaire fractionnaire multi-objectifs (MOLFPP) en utilisant la méthode GMIR proposée par Chen et Hsieh [4], c'est à dire tous les paramètres flous du problème (FMOLFPP) sont convertis en paramètres déterministes. Ensuite, le problème (MOLFPP) est transformé en problème de programmation linéaire mono-objectif (LP) en utilisant la méthode de Nuran Guzel [11].

Finalement, le problème (LP) est résolu par la méthode du dual simplexe qui fournit une solution F-efficace du problème d'origine (FMOLFPP). Pour montrer l'efficacité de la méthode proposée un exemple numérique est illustré.

Chapitre 6

Implémentation et Résultats

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous aboutissons à l'étape finale de notre travail. Nous choisissons pour la programmation de notre problème le logiciel MATLAB [Matrix Laboratory].

Nous donnerons dans ce qui suit une petite description de MATLAB, puis nous présenterons notre application qui est basée sur la programmation de l'exemple illustratif du chapitre 5 .

6.2 Choix de langage

Le choix s'est porté sur l'emploi du langage du logiciel Matlab R2015a, car il répond aux critères suivants :

La maniabilité du langage : constitué d'un ensemble de possibilités faisant en sorte que le programmeur travaille avec aisance.

-Le bagage du langage : il contient une interface graphique et des fonctions prédéfinies telles que :

Choisissez un solveur

<code>optimtool</code>	Sélectionnez le solveur et les options d'optimisation, exécutez les problèmes
------------------------	---

Définir les options

<code>optimoptions</code>	Créer des options d'optimisation
<code>optimset</code>	Créer ou modifier la structure des options d'optimisation
<code>optimtool</code>	Sélectionnez le solveur et les options d'optimisation, exécutez les problèmes
<code>resetoptions</code>	Réinitialiser les options

Optimisation basée sur un solveur

<code>intlinprog</code>	Programmation linéaire en nombres entiers mixtes (MILP)
<code>linprog</code>	Résoudre des problèmes de programmation linéaire
<code>mpsread</code>	Lire le fichier MPS pour les données d'optimisation LP et MILP

Optimisation multiobjectif

<code>fgoalattain</code>	Résoudre des problèmes d'objectifs à objectifs multiples
<code>fminimax</code>	Résoudre un problème de contrainte minimax

6.3 Présentation du langage de programmation MATLAB

MATLAB est une application qui fournit un environnement de calcul matriciel simple, efficace, interactif permettant la mise en oeuvre des algorithmes développés dans le cadre des projets linpack et eispack.

MATLAB est constitué d'un noyau relativement réduit, capable d'interpréter puis d'évaluer les expressions numériques matricielles qui lui sont adressées :

- Soit directement au clavier depuis une fenêtre de commande .
- Soit sous forme de séquences d'expressions ou scripts enregistrées dans des fichiers texte appelés m-files et exécutées depuis la fenêtre de commandes.
- Soit plus rarement sous forme de fichiers binaires appelés mex-files ou fichiers .mex générés à partir d'un compilateur C ou Fortran.

Ce noyau est complété par une bibliothèque de fonctions prédéfinies, très souvent sous forme de fichiers m-files et regroupés en paquets ou toolboxes. A coté des toolboxes requises local et matlab, il est possible d'ajouter des toolboxes spécifiques à tel ou tel problème mathématique, Optimization Toolbox, Signal Processing Toolbox par exemple ou encore des toolboxes créées par l'utilisateur lui même. Un système de chemin d'accès ou path permet de préciser la liste des répertoires dans lesquels MATLAB trouvera les différents fichiers m-files.

MATLAB comporte un très grand nombre d'opérateurs, de commandes et de fonctions permettant de réaliser plusieurs opérations.

Dans MATLAB, on peut programmer et créer les fonctions et fichiers nous même sur m-file, puis les sauvegarder et les exécuter sur l'espace de travail. Il suffit juste d'introduire le nom du fichier ou de la fonction.

6.4 Application de l'exemple sur MATLAB

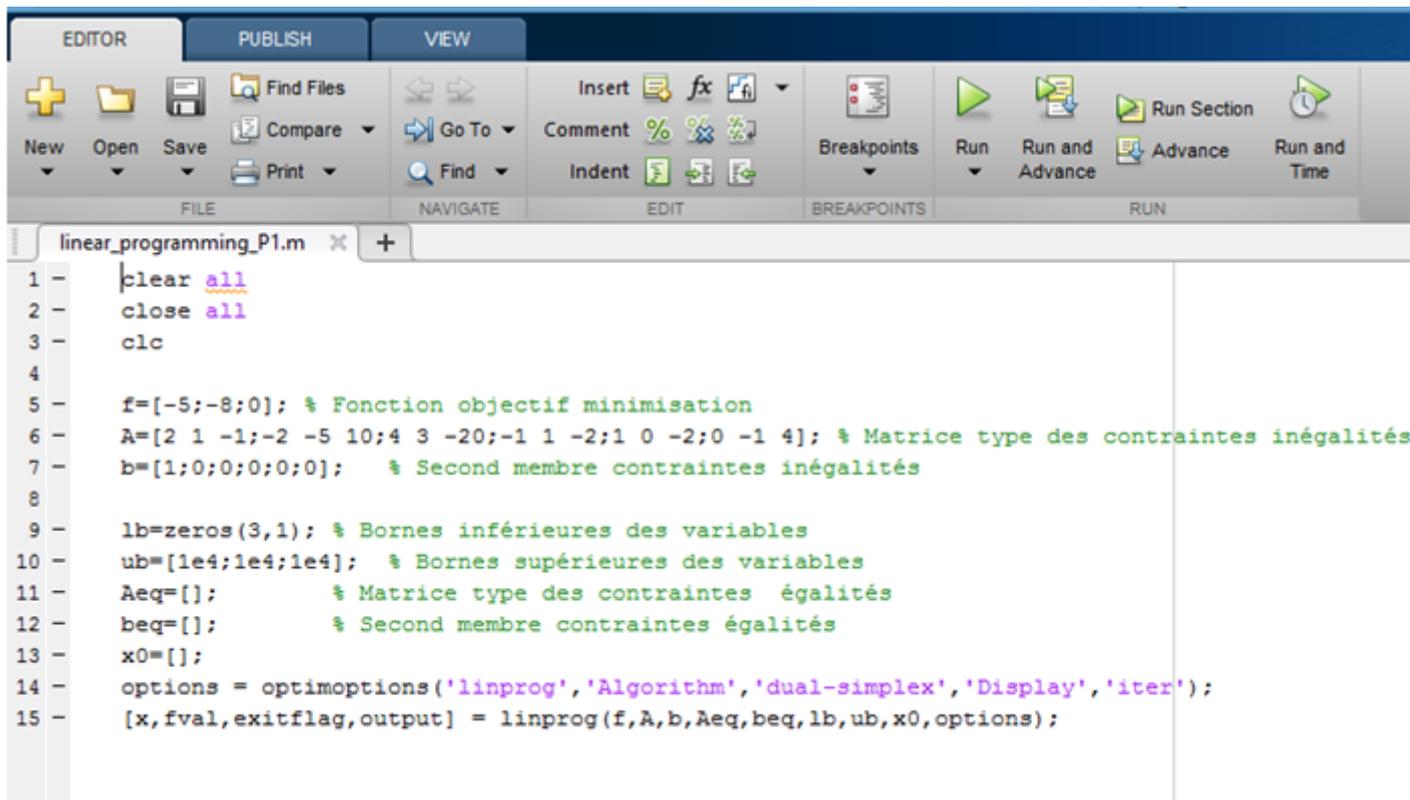
Pour notre implémentation, nous avons pris l'exemple illustratif décrit au chapitre 5 après dé-fuzzification .

$$\begin{array}{l}
 \text{(MOLFPP)} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Maximiser } z_1 = \frac{5x_1 + 8x_2}{2x_1 + x_2 - 1} \\
 \text{Maximiser } z_2 = \frac{8x_1 + 5x_2}{4x_1 + 2x_2 - 2} \\
 \text{Maximiser } z_3 = \frac{2x_1 - 10x_2}{6x_1 + 3x_2 - 3} \\
 \text{Maximiser } z_4 = \frac{-4x_1 - 6x_2}{2x_1 + x_2 - 1} \\
 \text{S.c} \\
 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\
 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\
 -x_1 + x_2 \leq 2 \\
 x_1 \leq 2 \\
 x_2 \geq 4 \\
 x_1, x_2 \geq 0.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

1) Pour le premier problème mono-objectif :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Maximiser } z_1 = \frac{5x_1 + 8x_2}{2x_1 + x_2 - 1} \\
 \text{S.c} \\
 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\
 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\
 -x_1 + x_2 \leq 2 \\
 x_1 \leq 2 \\
 x_2 \geq 4 \\
 x_1, x_2 \geq 0.
 \end{array} \right.$$

Nous ouvrons la fenêtre MATLAB, nous cliquons sur File →New, puis Blank M-File , et nous introduisons le programme suivant :



The image shows a MATLAB editor window with the following code:

```
1 - clear all
2 - close all
3 - clc
4
5 - f=[-5;-8;0]; % Fonction objectif minimisation
6 - A=[2 1 -1;-2 -5 10;4 3 -20;-1 1 -2;1 0 -2;0 -1 4]; % Matrice type des contraintes inegalites
7 - b=[1;0;0;0;0;0]; % Second membre contraintes inegalites
8
9 - lb=zeros(3,1); % Bornes inferieures des variables
10 - ub=[1e4;1e4;1e4]; % Bornes superieures des variables
11 - Aeq=[]; % Matrice type des contraintes egalites
12 - beq=[]; % Second membre contraintes egalites
13 - x0=[];
14 - options = optimoptions('linprog','Algorithm','dual-simplex','Display','iter');
15 - [x,fval,exitflag,output] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options);
```



Après l'exécution du programme → , nous obtenons les résultats suivants:

```

LP preprocessing removed 0 inequalities, 0 equalities,
0 variables, and 0 non-zero elements in 0.01 secs.

    Iter      Time      Fval   Primal Infeas   Dual Infeas
         0      0.01  -1.300000e+05   6.916789e+04   0.000000e+00
         3      0.01  -6.000000e+00   0.000000e+00   0.000000e+00

Optimal solution found.

>> x

x =

    0.2857
    0.5714
    0.1429

>> fval

fval =

   -6.0000

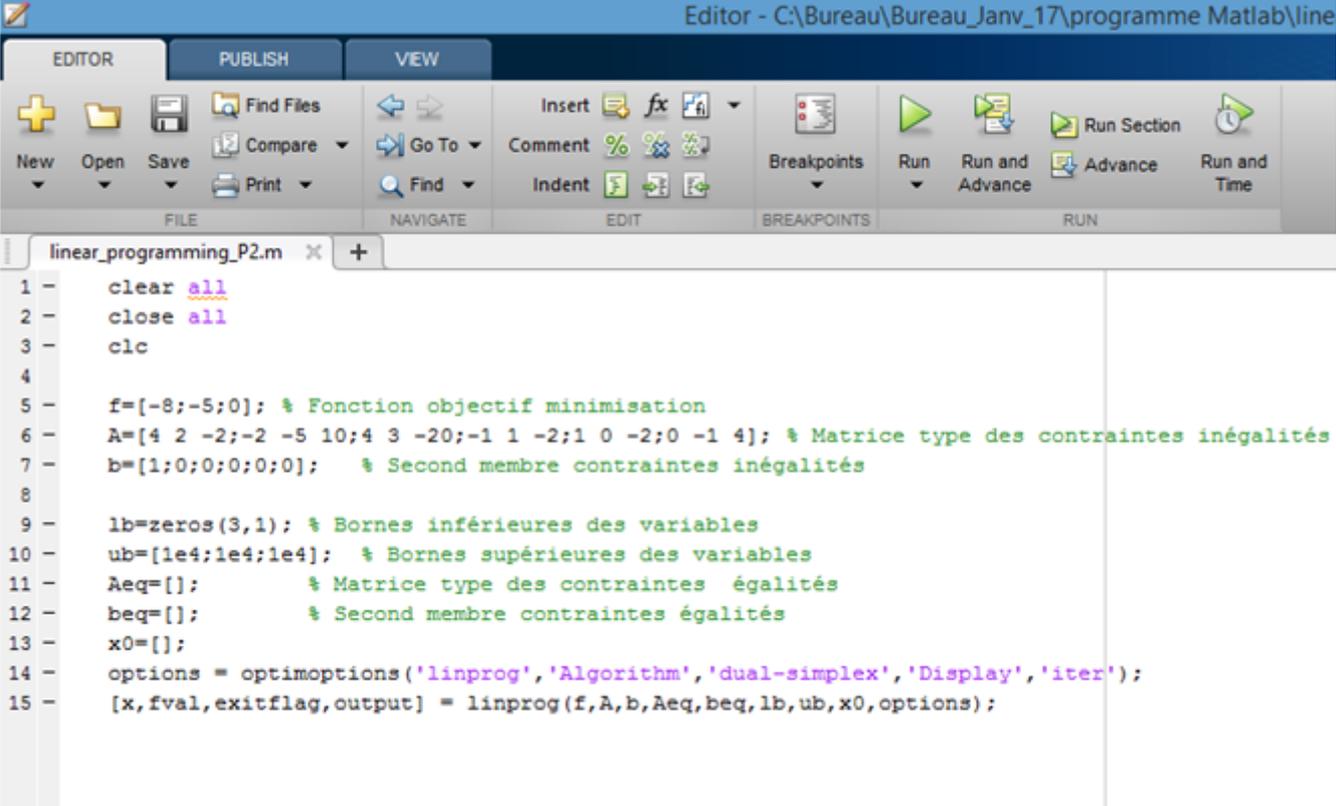
```

D'une façon similaire nous aurons :

2) Pour le deuxième problème mono-objectif :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } z_2 = \frac{8x_1 + 5x_2}{4x_1 + 2x_2 - 2} \\ \text{S.c} \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Nous introduisons le programme :



The screenshot shows the MATLAB Editor interface. The title bar reads "Editor - C:\Bureau\Bureau_Janv_17\programme Matlab\line". The menu bar includes EDITOR, PUBLISH, and VIEW. The toolbar contains icons for New, Open, Save, Find Files, Compare, Print, Go To, Find, Insert, Comment, Indent, Breakpoints, Run, Run and Advance, Run Section, and Run and Time. The main workspace displays a script named "linear_programming_P2.m" with the following code:

```
1 - clear all
2 - close all
3 - clc
4
5 - f=[-8;-5;0]; % Fonction objectif minimisation
6 - A=[4 2 -2;-2 -5 10;4 3 -20;-1 1 -2;1 0 -2;0 -1 4]; % Matrice type des contraintes inegalites
7 - b=[1;0;0;0;0;0]; % Second membre contraintes inegalites
8
9 - lb=zeros(3,1); % Bornes inferieures des variables
10 - ub=[1e4;1e4;1e4]; % Bornes superieures des variables
11 - Aeq=[]; % Matrice type des contraintes egalites
12 - beq=[]; % Second membre contraintes egalites
13 - x0=[];
14 - options = optimoptions('linprog','Algorithm','dual-simplex','Display','iter');
15 - [x,fval,exitflag,output] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options);
```

Après l'exécution, nous aurons :

```

C:\Bureau\Bureau_Janv_17\programme Matlab
LP preprocessing removed 0 inequalities, 0 equalities,
0 variables, and 0 non-zero elements in 0.00 secs.

    Iter      Time          Fval   Primal Infeas   Dual Infeas
         0         0.00  -1.300000e+05   7.876839e+04   0.000000e+00
         3         0.00  -2.571429e+00   0.000000e+00   0.000000e+00

Optimal solution found.

>> x

x =

    0.1429
    0.2857
    0.0714

>> fval

fval =

   -2.5714

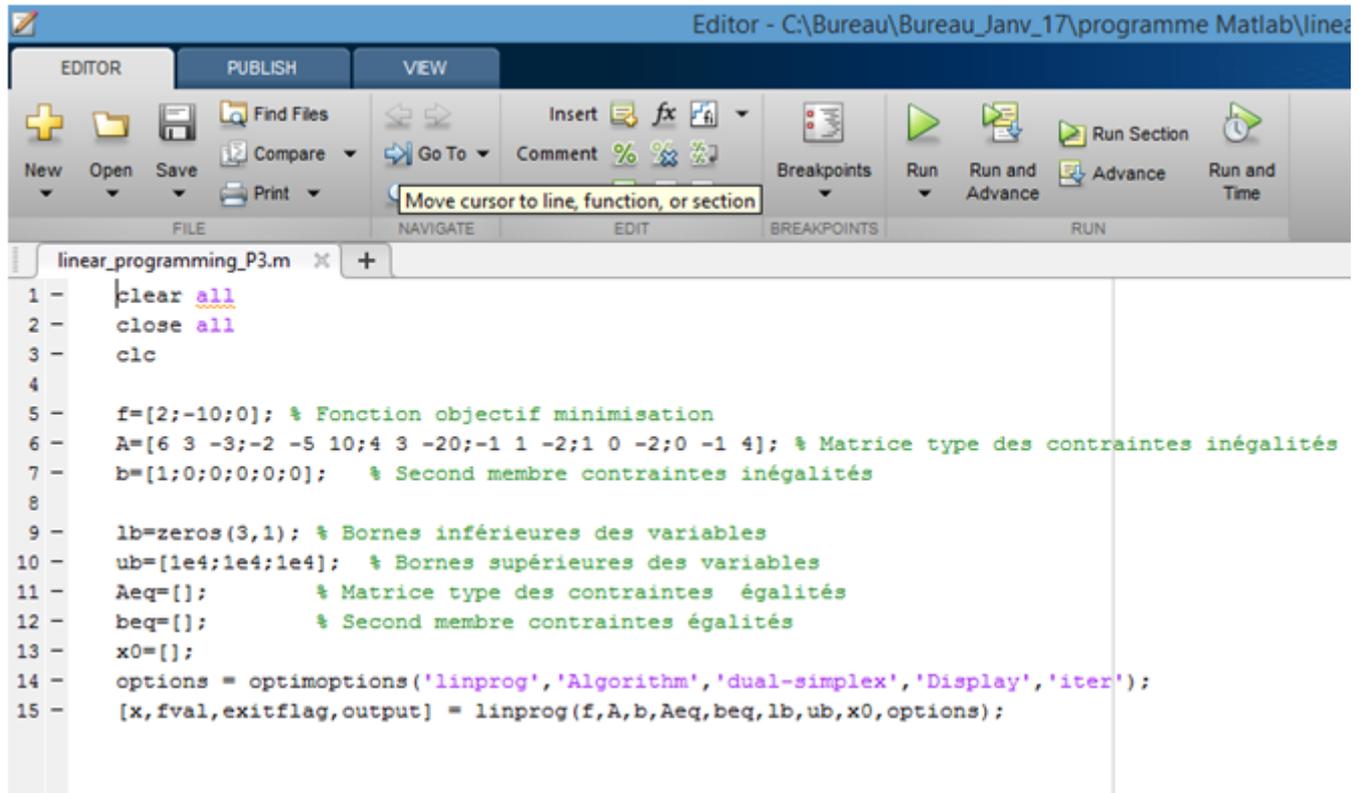
fx >>

```

3) Pour le troisième problème mono-objectif:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } z_3 = \frac{2x_1 - 10x_2}{6x_1 + 3x_2 - 3} \\ \text{S.c} \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Programme:



The screenshot shows the MATLAB Editor window with the following code in the editor:

```
1 - clear all
2 - close all
3 - clc
4
5 - f=[2;-10;0]; % Fonction objectif minimisation
6 - A=[6 3 -3;-2 -5 10;4 3 -20;-1 1 -2;1 0 -2;0 -1 4]; % Matrice type des contraintes inegalites
7 - b=[1;0;0;0;0;0]; % Second membre contraintes inegalites
8
9 - lb=zeros(3,1); % Bornes inferieures des variables
10 - ub=[1e4;1e4;1e4]; % Bornes superieures des variables
11 - Aeq=[]; % Matrice type des contraintes egalites
12 - beq=[]; % Second membre contraintes egalites
13 - x0=[];
14 - options = optimoptions('linprog','Algorithm','dual-simplex','Display','iter');
15 - [x,fval,exitflag,output] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options);
```

Résultats :

```
LP preprocessing removed 0 inequalities, 0 equalities,  
0 variables, and 0 non-zero elements in 0.00 secs.
```

Iter	Time	Fval	Primal Infeas	Dual Infeas
0	0.00	-1.000000e+05	3.931008e+04	0.000000e+00
3	0.02	-1.714286e+00	0.000000e+00	0.000000e+00

```
Optimal solution found.
```

```
>> x
```

```
x =
```

```
0.0952  
0.1905  
0.0476
```

```
>> fval
```

```
fval =
```

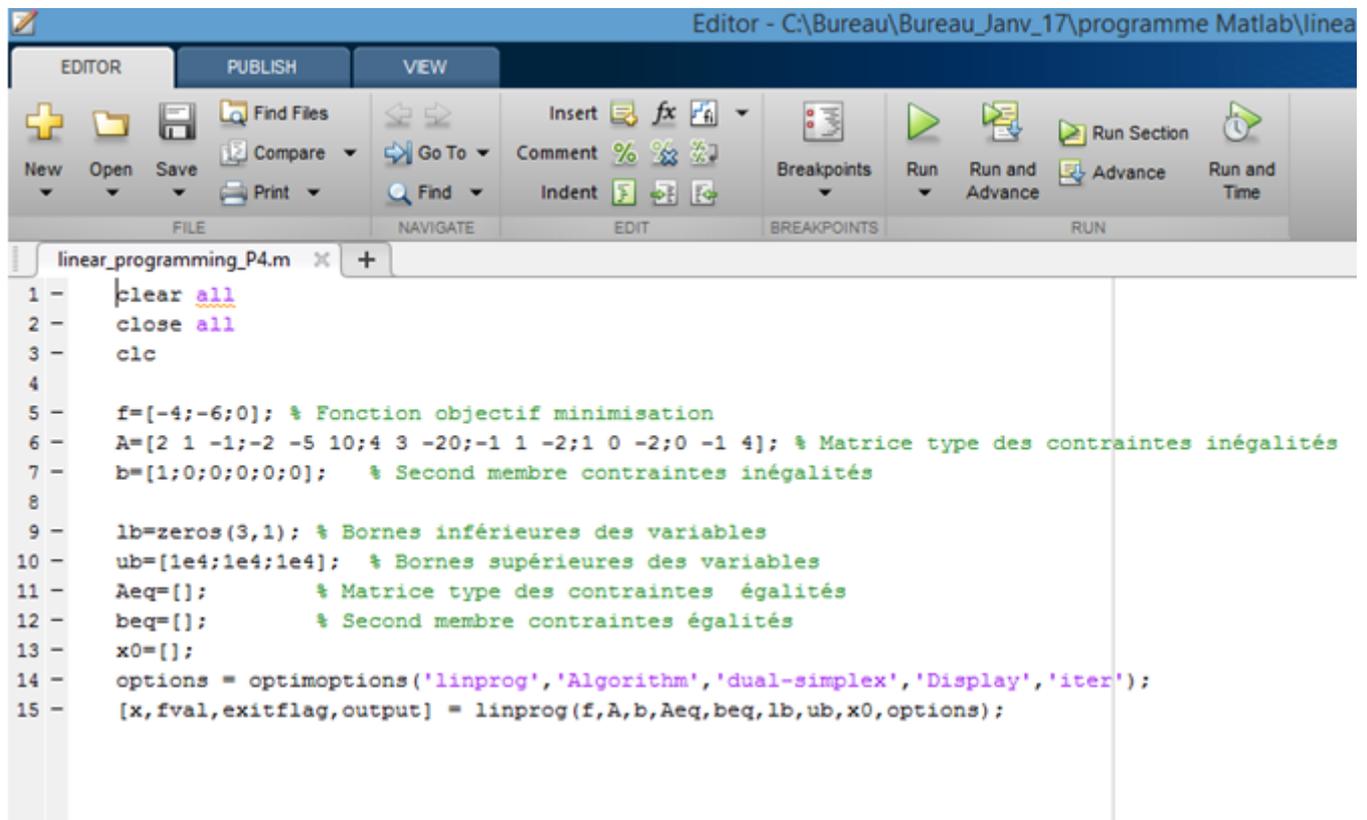
```
-1.7143
```

```
f_x >> |
```

4) Pour le quatrième problème mono-objectif :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \\ \text{S.c} \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{-4x_1 - 6x_2}{2x_1 + x_2 - 1} \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Programme



The screenshot shows the MATLAB Editor window titled "Editor - C:\Bureau\Bureau_Janv_17\programme Matlab\linea". The interface includes tabs for EDITOR, PUBLISH, and VIEW. The toolbar contains icons for file operations (New, Open, Save, Compare, Print), navigation (Go To, Find), editing (Insert, Comment, Indent), breakpoints, and execution (Run, Run and Advance, Run Section, Advance, Run and Time). The active window is "linear_programming_P4.m" and contains the following MATLAB code:

```
1 - clear all
2 - close all
3 - clc
4
5 - f=[-4;-6;0]; % Fonction objectif minimisation
6 - A=[2 1 -1;-2 -5 10;4 3 -20;-1 1 -2;1 0 -2;0 -1 4]; % Matrice type des contraintes inegalites
7 - b=[1;0;0;0;0;0]; % Second membre contraintes inegalites
8
9 - lb=zeros(3,1); % Bornes inferieures des variables
10 - ub=[1e4;1e4;1e4]; % Bornes superieures des variables
11 - Aeq=[]; % Matrice type des contraintes egalites
12 - beq=[]; % Second membre contraintes egalites
13 - x0=[];
14 - options = optimoptions('linprog','Algorithm','dual-simplex','Display','iter');
15 - [x,fval,exitflag,output] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options);
```

Résultats:

```
LP preprocessing removed 0 inequalities, 0 equalities,
0 variables, and 0 non-zero elements in 0.00 secs.

      Iter      Time      Fval  Primal Infeas  Dual Infeas
      0         0.00 -1.000000e+05  6.916789e+04  0.000000e+00
      3         0.00 -4.571429e+00  0.000000e+00  0.000000e+00

Optimal solution found.

>> x

x =

    0.2857
    0.5714
    0.1429

>> fval

fval =

   -4.5714

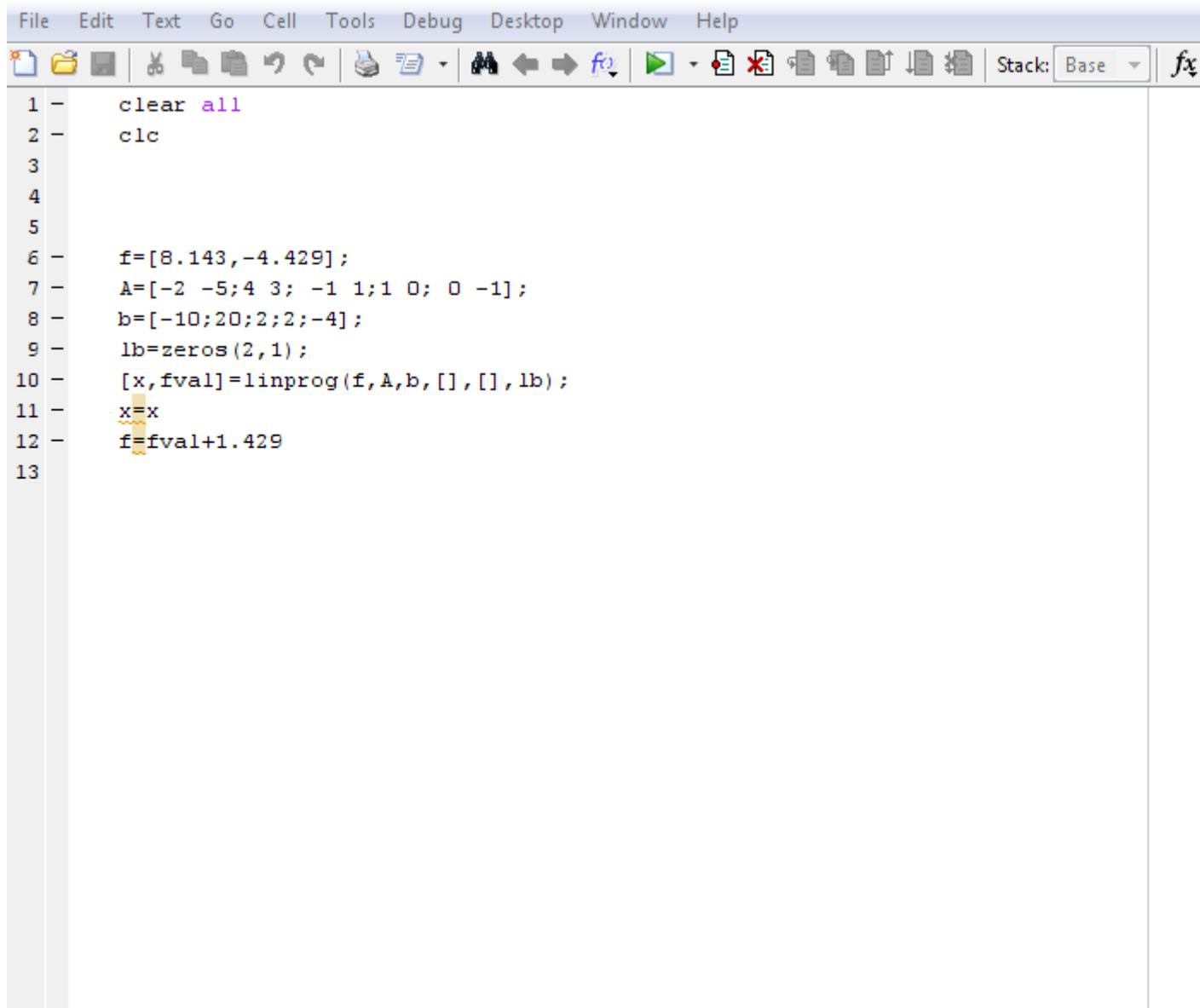
fx >> |
```

Après la transformation du problème (MOLFPP) en programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z(x) = 8.143x_1 - 4.429x_2 + 1.429 \\ \text{S.c} \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \geq 4 \\ x, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Nous pouvons programmer ce dernier sur MATLAB 2009 comme suit :

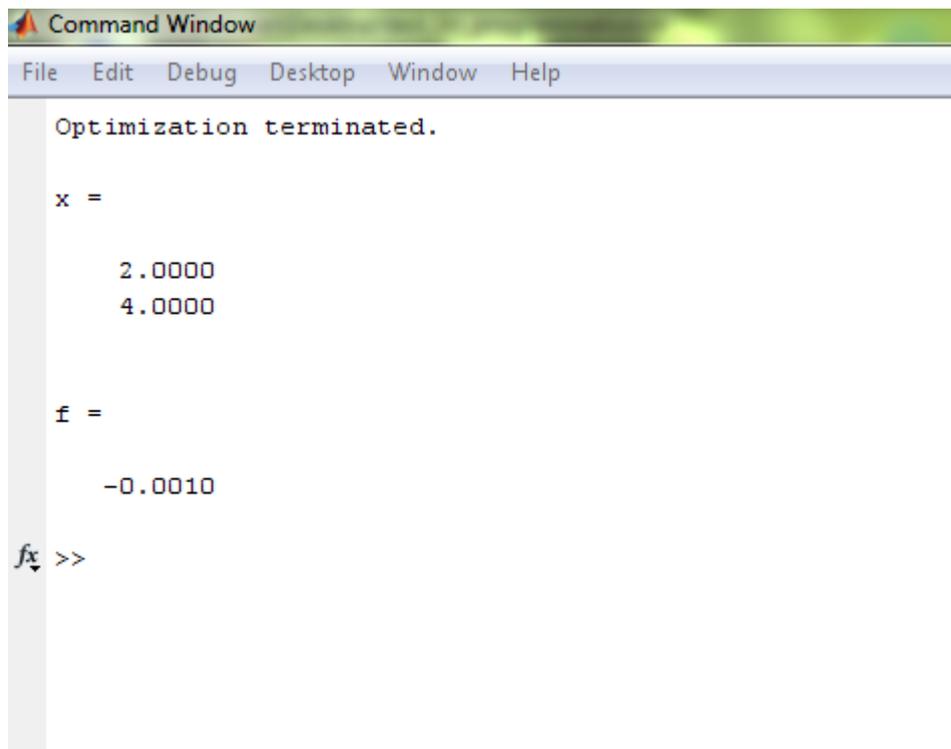
Programme:



The image shows a MATLAB script editor window with a menu bar (File, Edit, Text, Go, Cell, Tools, Debug, Desktop, Window, Help) and a toolbar. The script contains the following code:

```
1 - clear all
2 - clc
3
4
5
6 - f=[8.143,-4.429];
7 - A=[-2 -5;4 3; -1 1;1 0; 0 -1];
8 - b=[-10;20;2;2;-4];
9 - lb=zeros(2,1);
10 - [x,fval]=linprog(f,A,b,[],[],lb);
11 - x=x
12 - f=fval+1.429
13
```

Résultats:



```
Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
Optimization terminated.
x =
    2.0000
    4.0000
f =
   -0.0010
fx >>
```

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons commencé par décrire le logiciel MATLAB, puis nous avons programmé notre problème qui est l'exemple numérique traité au chapitre 5.

Conclusion générale

Les problèmes de programmation fractionnaire sont de plus en plus étudiés car ils jouent un rôle très important dans notre vie quotidienne où l'optimisation de rapport d'un ou plusieurs objectifs doit être satisfaite. Dans la littérature différentes méthodes peuvent être présentées pour résoudre différents modèles de problèmes de programmation linéaire fractionnaire telles que la méthode développée par Charne et Cooper [3] et l'algorithme proposé par Cambini et Martein[2].

Dans notre travail nous nous sommes intéressés aux problèmes de Programmation Linéaire Fractionnaire Multi-Objectifs Flou. Le noyau du thème de cette thèse est focalisé sur la résolution d'un problème de programmation linéaire fractionnaire multi-objectifs flou où nous avons développé une méthode pour résoudre ce type de problème en combinant la méthode GMIR proposé par Chen et Hsieh [4], qui consiste à défuzzifier les paramètres flous, et la méthode de Guzel ([13],[14]), qui permet de transformer le problème obtenu après la défuzzification (problème linéaire fractionnaire multi-objectifs) en problème linéaire, dont la résolution se fait par la méthode du simplexe ou dual du simplexe.

En vue de l'importance des problèmes linéaires fractionnaires multi-objectifs flous, nombreuses questions restent ouvertes aux chercheurs pour développer les meilleures méthodes pour résoudre ce type de problèmes.

Bibliographie

- [1] Benson, H. P. (1985). Finding certain weakly-efficient vertices in multiple objective linear fractional programming. *Management Science*, 31(2), 240-245.
- [2] Cambini A. et Martein L., A modified version of Marto's algorithm for the linear fractional problem, *Methods of Operational Research* 53, pp. 33-44 (1986).
- [3] Charnes, A., & Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics*, 9(3-4), 181-186.
- [4] Chen, S. H., & Hsieh, C. H. (1999). Graded mean integration representation of generalized fuzzy number. *Journal of Chinese Fuzzy Systems*, 5(2),1-7.
- [5] Choo, E.U. and Atkins,D.R. (1982). Bicriteria linear fractional programming, *Journal Optimization Theory Application*, 36, 203-220.
- [6] Dheyab, A. N. (2012). Finding the optimal solution for fractional linear programming problems with fuzzy numbers. *Journal of Kerbala University*, 10(3), 105-110
- [7] Dinkelbach, W. (1967). On nonlinear fractional programming. *Management Science*, 13(7), 492-498.
- [8] Dominique Francisci. (2002). Algorithme évolutionnaires et optimisation multi-objectifs en DATA MEANING, LABORATOIRE I3S, informatique, signaux et systèmes de sophia, ANTI POLIS, UMR6070.
- [9] Ecker J.G. and Kouada I.A. Finding Efficient Points for linear multiple objective programs, *Mathematical Programming* 8, No-8, 375-377,1975.
- [10] Falk J.E and Paloscaay S.W. Optimising the sum of linear fractional functions, *advances in Global Optimisation*, Kluwer Academic Publishers, 221 _ 258, 1992.
- [11] Farhana Akond Pramy.(2018) . An Approach for Solving Fuzzy Multi-Objective Linear Fractional Programming Problems, *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences* Vol. 3, No. 3, 280–293, 2018.
- [12] Geoffrion A.Proper efficiency and theory of vector maximisation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 22, (1968), 618-630.
- [13] Guzel, N. (2013, November). A proposal to the solution of multiobjective linear fractional programming problem. *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2013). Hindawi Publishing Corporation.
- [14] Guzel, N., & Sivri, M. (2005). Proposal of a solution to multi objective linear fractional programming problem. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 2, 43–50.

- [15] Mme Bouarab.(2016/2017)cours première année master «Optimisation multicritère floue», UMMTO .
- [16] Moumita, D., & De, P. K. (2014). A note on fuzzy multi-objective linear fractional programming problem. *International Journal of Computer Science and Network*, 3(6), 568-572.
- [17] Moumita Deb, P.K.De.(2013) . Algorithm for Solving Fuzzy Multiobjective Linear Fractional Programming Problem by Additive Weighted Method, *International Journal of Computer Applications* (0975 8887) Volume 80 - No. 2.
- [18] Muruganandam, S., & Ambika, P. (2017). Harmonic mean technique to solve multi objective fuzzy linear fractional programming problems. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(10), 7321-7329
- [19] Radzik T. *Fractional Combinatorial Optimization* , *Handbook of Combinatorial Optimization*, Edited by Z.-Z. Du and P. Pardalos, Kluwer Academic Publishers, 429-478, 1998.
- [20] Ouiza ZERDANI.(2013) . L'optimisation non Linéaire Multiobjectif .Thèse de doctorat, Université UMMTO.
- [21] Schaible S.*Fractional Programming applications and algorithms*. *European Journal of operational research* 7, 111_120,1981.
- [22] Yann Collete-Patrick Siarry.(2002) *Optimisation multiobjectif* . Editions Eyrolles. ISBN 2-212-11168-1.
- [23] Zadeh L.A, *Fuzzy sets*, *Information and Control*. 8(3), 338-353, 1965.
- [24] ZERFA Lamia et CHERGUI Mohamed El-Amine.(2016). *Méthodes Exactes pour l'Optimisation Discrète à Objectifs Multiples*. Cas linéaire et hyperbolique, Laboratoire RECITS, Faculté de Mathématiques, USTHB BP 32, BEZ, Alger, Algerie, *Les Annales RECITS* (<http://www.lrecits.usthb.dz>) Vol. 3.