

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie Electrique

Spécialité : RESEAUX ELECTRIQUES

Présenté par
Thinhinene HAMITOUCHE

Thème

Théorie de la stabilité par la méthode des petites variations Application à un système du second degré

Mémoire soutenu publiquement le 18 septembre 2014 devant le jury composé de :

M Ahmed CHALLAL

Maitre Assistant Classe A, UMMTO, Président

M Karim HADJ SAID

Maitre Assistant Classe A, UMMTO, Rapporteur

M Slimane RABAHALLAH

Maitre Assistant Classe A, UMMTO, Examineur

M Hamza BESSAI

Maitre Assistant Classe A, UMMTO, Examineur

REMERCIEMENTS

Au terme de ce modeste travail:

Je tiens à exprimer mon extrême reconnaissance envers mon promoteur Monsieur **KARIM HADJ SAID**, pour son encadrement, et ses précieux conseils durant la réalisation de ce projet.

Je remercie aussi **M^r MANSOURI**, pour son aide.

Pour avoir accepté de présider le jury, je tiens à remercier Monsieur **AHMED CHALLAL**, d'avoir porté la plus grande des attentions à mon travail.

Je tiens également à remercier Monsieur **Slimane RABAHALLAH**, et Monsieur **Hamza BESSAI**, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'en être examinateur.

Sommaire

Liste des symboles	1
Liste des figures	4
Introduction générale.....	6

Chapitre I: Généralités sur la stabilité

I.1 - Introduction :	8
I.2 - La stabilité au sens de Lyapunov :.....	9
I.2.1 - Définitions de la stabilité :	9
I.2.1.1 - Stabilité du point d'équilibre :.....	9
I.2.1.2 - Stabilité asymptotique :	10
I.2.1.3 - Stabilité exponentielle :	10
I.2.2 - Méthodes d'analyse de stabilité au sens de Lyapunov :	11
I.2.2.1 - Première méthode de Lyapunov - méthode indirecte :	11
I.2.2.2 - Deuxième méthode de Lyapunov - méthode directe :.....	12
I.3 - Les différents types de la stabilité de système de puissance :	12
I.3.1 - La stabilité de l'angle de rotor :	15
I.3.1.1 - Stabilité angulaire aux grandes perturbations - stabilité transitoire :	16
I.3.1.2 - Stabilité angulaire aux petites perturbations - stabilité dynamique :.....	22
I.3.2 - La stabilité de tension :	23
I.3.3 - La stabilité de fréquence :	25
I.4 - Conclusion :	26

Chapitre II : Théorie des signaux

II.1 - Introduction	27
II.2 - Représentation d'état :	27
II.3 - Linéarisation du système	28

II.4 - Analyse du modèle linéaire	31
II.4.1 - Analyse des valeurs propres	31
II.4.1.1 - Valeurs propres de la matrice d'état A	31
II.4.1.2 - Vecteurs propres associés à une valeur propre	36
II.4.1.3 - Matrices modales	37
II.4.2 - Analyse modale	40
II.5 - Commandabilité et observabilité	41
II.6 - Forme des modes et sensibilité	41
II.7 - Facteurs de participation	43
II.8 - Résidus	45
II.9 - Conclusion	47

Chapitre III: Application de la théorie à un exemple mathématique

III.1 - Introduction	48
III.2 - Exemple de calcul	48
III.3 - Conclusion	59

Chapitre IV: Application de la théorie à un circuit RLC comme système du second degré

IV.1 - Introduction :	60
IV.2 - Etude d'un circuit RLC comme filtre passe-bas :	60
IV.2.1 - Définition d'un filtre passe-bas :	60
IV.2.2 - Calcul de l'impédance Z totale d'un filtre passe-bas :	61
IV.3 - Etude du filtre passe-bas par Matlab/Simulink en utilisant la fonction de transfert :	63
IV.3.1 - Fonction de transfert :	63
IV.3.2 - Analyse de la réponse fréquentielle du circuit :	63
IV.3.2.1 - Diagramme de Bode :	63
IV.3.2.2 - Analyse de la réponse temporelle du circuit :	66
IV.3.2.3 - Valeurs propres et coefficients d'amortissement :	67

IV.3.2.4 - Analyse du circuit :	67
IV.4 - Etude du circuit RLC par la méthode des équations d'état en appliquant la théorie de stabilité par petites variations :	70
IV.4.1 - Solution de l'équation avec les paramètres RLC ainsi que ζ et ω_n :	70
IV.4.2 - Calcul des valeurs propres :	78
IV.5 - Conclusion :	79
Conclusion générale	80
Bibliographie	81

Liste des symboles

x : vecteur d'état

x_e : point d'équilibre du système

$V(x)$: fonction de Lyapunov

Ω : domaine d'attraction

E_g : source de tension idéale

E_0 : tension du jeu de barre infini

X_g : réactance du générateur

X_E : réactance de la ligne et le transformateur

$\delta, \delta_a, \delta_b$: angles de rotor (l'angle de puissance)

P_{e1}, P_{e2} : puissances électriques

A_1 : zone d'accélération

A_2 : zone de décélération

H : constante d'inertie

ω_0 : vitesse de synchronisme

P_m : puissance mécanique fournie au générateur

P_e : puissance électrique du générateur

δ_0 : angle de rotor initial, à l'instant de l'application de défaut

δ_1 : angle de rotor à l'instant de l'élimination de défaut

δ_2 : angle de rotor à la fin de la période transitoire

n : ordre du système

r : nombre de variables d'entrée

f_i : $i^{\text{ème}}$ fonction non linéaire

x_i : $i^{\text{ème}}$ variable d'état

u_j : $j^{\text{ème}}$ variable d'entrée

t : temps

u : vecteur des variables d'entrée

f : vecteur de fonctions non linéaires

y : vecteur des variables de sortie

y_k : $k^{\text{ième}}$ variable de sortie

g : vecteur de fonctions non linéaires

g_k : $k^{\text{ième}}$ fonction non linéaire

Δx : vecteur d'état de dimension ' n '

Δy : vecteur des variables de sortie de dimension ' m '

Δu : vecteur des variables d'entrée de dimension ' r '

A : matrice d'état de dimension ' $n \times n$ '

B : matrice des variables d'entrée de dimension ' $n \times r$ '

C : matrice des variables de sortie de dimension ' $m \times n$ '

D : matrice de dimension ' $m \times r$ '

I : matrice d'identité

λ : valeurs propres du système

σ : partie réelle de la valeur propre (abscisse de convergence)

ω : pulsation propre d'oscillation (rad/s)

ω_n : pulsation naturelle d'oscillation (rad/s)

ζ : facteur d'amortissement d'oscillation

A : matrice $n \times n$

Φ : vecteur $n \times 1$

λ_i : $i^{\text{ième}}$ valeur propre

Φ_i : $i^{\text{ième}}$ vecteur propre à droite associé à la valeur propre λ_i

Ψ_i : $i^{\text{ième}}$ vecteur propre à gauche associé à la valeur propre λ_i

Λ : matrice diagonale ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ éléments de la diagonale) de dimension ' $n \times n$ '

z : variable d'état transformée

B_m : matrice de commandabilité, de dimension ' $n \times r$ '

C_m : matrice d'observabilité, de dimension 'm×n'

$B_m(i,j)$: élément de la matrice B_m est le facteur de commandabilité du mode λ_i par le signal u_j

$C_m(j,i)$: élément de la matrice C_m est le facteur d'observabilité du mode λ_i par le signal y_j

a_{kj} : élément de la matrice A se situant à la $k^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne

P_{ki} : facteur de participation

Φ_{ki} : élément de la $k^{\text{ième}}$ ligne et de la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice modale Φ

Ψ_{ik} : élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne de la matrice modale Ψ

$G(s)$: fonction de transfert en boucle ouverte

s : opérateur de Laplace

s_1, s_2, \dots, s_n : pôles de $G(s)$

R_i : résidu de $G(s)$ au pôle s_i

$H(s)$: contrôleur

p_{ij} : coefficient représentant le degré de participation du mode j pour la formation de la grandeur d'état i

$\Delta x_i(t)$: condition initiale

$x_1(t)$: solution indépendante

$\omega_n = 1/\sqrt{LC}$: fréquence naturelle

$\zeta = (R/2)/\sqrt{L/C}$: constante d'amortissement

θ : angle d'amortissement

Liste des figures

Figure 1 : Stabilité d'un point d'équilibre	9
Figure 2 : Stabilité asymptotique.....	10
Figure 3 : Stabilité exponentielle.....	11
Figure 4 : Classification des différents types de la stabilité de système de puissance	14
Figure 5 : Variation d'angle de rotor (cas 1 : instabilité de première oscillation, cas 2 : instabilité de multi-oscillations	17
Figure 6 : Machine synchrone connectée à un jeu de barre infini.....	17
Figure 7 : Relation puissance - angle de rotor.....	18
Figure 8 : Variation d'angle de rotor (cas 1 : machine stable, cas 2 : machine instable)	20
Figure 9 : Courbes du générateur suite à un défaut de transmission (Cas a : puissance – angle, Cas b : variation d'angle de rotor)	21
Figure 10 : Schéma bloc du système (25)	31
Figure 11 : Représentation des points singuliers correspondant aux six combinaisons possibles de valeur propre	35
Figure 12 : Exemple de représentation des valeurs propres dans le plan complexe et analyse par lieu des pôles de la stabilité d'un système.....	36
Figure 13 : L'ensemble système-contrôleur en boucle fermée	46
Figure 14 : Tracé du diagramme de Bode (G) à l'aide de l'outil informatique Matlab	64
Figure 15 : Représentation de trois diagrammes de Bode avec des résistances de plus en plus grandes (R=1, R=5, R=20	65
Figure 16 : Courbe qui illustre une onde avec une fréquence 1 rad/s	66
Figure 17 : Courbe qui illustre une onde avec une fréquence 0.9 rad/s	66

Figure 18 : Courbe qui illustre une onde avec une fréquence 1.1 rad/s	67
Figure 19 : Représentation du diagramme de Bode, la réponse du système, le diagramme de Nyquist, la courbe des pôles, avec une résistance R=1	68
Figure 20 : Représentation du diagramme de Bode, la réponse du système, le diagramme de Nyquist, la courbe des pôles, avec une résistance de R=5	69
Figure 21 : Schéma du circuit RLC	70
Figure 22 : Représentation des valeurs propres λ_1 et λ_2 dans le plan complexe	75
Figure 23 : Courbe représentative des points z_1 et z_2	76
Figure 24 : Schéma des courbes correspondantes à z_1 et z_2 dans un plan.....	78
Tableau 1 : Tableau représentant les valeurs propres, l'amortissement et la fréquence	67

Introduction générale

Le comportement d'un système de puissance face aux problèmes de stabilité dépend du lieu, de la nature et de l'ampleur de la perturbation.

L'ampleur de la perturbation peut être de nature graduelle ou brusque (variations lentes de la charge, court-circuit sévère, perte d'ouvrage de production ou de transport, ...).

De ce fait, les études et l'expérience ont réparti la stabilité du système électrique en trois types : stabilité statique, stabilité transitoire et stabilité dynamique.

Des systèmes dynamiques réels possèdent des caractéristiques non-linéaires. Leur comportement peut être décrit par un ensemble d'équations différentielles et algébriques. Ces systèmes de puissance évoluent généralement autour d'un point de fonctionnement donné. Lors de petites perturbations, il est alors possible de linéariser ces équations différentielles et algébriques autour de ce point. On peut alors faire appel à la notion de stabilité en « petits signaux ».

Notre travail consiste à fournir une introduction au problème de stabilité des systèmes de puissance en donnant les concepts de base et les différentes définitions de la terminologie utilisée.

Nous avons réparti notre travail en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux généralités sur la théorie de stabilité des systèmes de puissance, en donnant d'une manière succincte les différentes étapes à suivre pour l'analyse de la stabilité du système en fonction du type de stabilité, de la nature et du temps de la perturbation ainsi que de la configuration du système.

Dans le chapitre deux, nous avons étudié la méthode de stabilité dite des « petits signaux ». Elle nécessite sa mise en équations différentielles et algébriques, leur linéarisation autour du point de fonctionnement et leur mise sous forme d'équations d'état nécessaire pour l'analyse de stabilité.

Le troisième chapitre est consacré à l'application des différentes étapes de cette théorie à un système purement mathématique afin de se familiariser avec cette méthode et d'acquérir le

mécanisme nécessaire pour son application à un système physique afin de tirer des conclusions sur sa stabilité.

Dans le dernier chapitre, nous avons choisi un circuit RLC pour la configuration d'un filtre passe-bas afin de disposer d'un système électrique dont les équations différentielles sont du second ordre et de pouvoir ainsi illustrer la théorie de stabilité pour la méthode des petites variations. Dans ce chapitre, nous avons entamé notre étude par l'analyse classique d'un filtre, puis nous avons utilisé le logiciel Matlab/Simulink pour avoir un aperçu sur l'apport de l'informatique dans l'étude des circuits et enfin nous avons étudié le circuit en utilisant la méthode des « petits signaux ».

Nous avons achevé notre travail par une conclusion générale dans laquelle nous avons mis l'accent sur l'importance des études de stabilité dans la continuité de fonctionnement normal, et sur la sécurité des systèmes en général.

CHAPITRE I:

Généralités sur la

stabilité

I.1 - Introduction :

La bonne performance d'un système de puissance dépend de sa capacité de fournir à tout moment la puissance demandée dans des conditions de qualité satisfaisantes, en maintenant les niveaux de tension et de fréquence dans des limites acceptables.

La stabilité est considérée comme l'une des trois grandes études des systèmes de puissance, les deux autres étant l'écoulement de puissance et l'analyse de défauts. Il est clair que les études de stabilité sont les plus complexes, tant en termes de modélisation que de méthodes de recherche des solutions.

La stabilité d'un système de puissance est la capacité du système, pour des conditions initiales données, de retrouver un point d'équilibre suite à une perturbation. Ainsi, la stabilité est une condition d'équilibre entre des "forces" opposées, et l'instabilité résulte d'une perturbation menant à un déséquilibre important entre les "forces" opposées.

Cette instabilité peut avoir différentes formes et peut être influencée par différents facteurs.

L'analyse des problèmes de stabilité implique l'identification des facteurs essentiels contribuant à l'instabilité et le développement de méthodes pouvant améliorer la stabilité du système.

Le problème de la stabilité des systèmes dynamiques a été et reste le sujet de préoccupation majeur du travail des mathématiciens, des physiciens et des ingénieurs.

Les critères d'analyse de stabilité peuvent être classés en deux grandes catégories :

- **Les critères fréquentiels** : tels les critères de Nyquist, le diagramme de Bode. Ces critères dépendent de la fonction de transfert du système.
- **Les critères temporels** : tels les critères de Kalman, les méthodes de Liapounov. Ces critères dépendent du modèle d'état du système.

Une contribution majeure aux études de stabilité fut apportée par A.M. Liapounov en 1892, dont les travaux ont été connus dans les années soixante. Il a introduit la majorité des concepts et définitions de base concernant la stabilité des systèmes représentés par des systèmes différentiels arbitraires mais a aussi fourni les principaux résultats théoriques.

La stabilité au sens de Liapounov est une théorie générale valable pour tout système décrit par des équations différentielles linéaires ou non-linéaires.

Ce chapitre traite de la stabilité du système de puissance. Il est divisé en trois grandes parties.

La première partie rappelle les principes de la stabilité au sens de Liapounov. Dans la deuxième partie, nous rappelons les caractéristiques des différents types de stabilité d'un

système de puissance. La troisième partie s'intéresse plus particulièrement à la stabilité angulaire aux petites perturbations avec les stabilisateurs de puissance (PSSs).

I.2 - La stabilité au sens de Liapounov :

I.2.1 - Définitions de la stabilité :

Considérons un système non-autonome (dépendant du temps) et non-commandé (entrée nulle) décrit par l'équation différentielle non-linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (1)$$

où : x est un vecteur d'état et \dot{x} sa dérivée dans le temps t .

Ce système est dit en équilibre autour d'un point x_e si, en l'absence d'influence externe et que son état ne varie pas au cours du temps :

$$f(x_e, t) = 0 \quad (2)$$

Ainsi, nous nous intéressons aux comportements des trajectoires du système au voisinage de ses points d'équilibre.

Nous rappelons dans ce qui suit quelques définitions importantes qui forment l'approche de la stabilité au sens de Liapounov.

I.2.1.1 - Stabilité du point d'équilibre :

Un point d'équilibre x_e est dit stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une valeur $\delta > 0$ telle que :

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0 \quad (3)$$

Où : t_0 est l'instant initial. Dans le cas contraire, x_e est dit instable [SHA03], [SIG05].

Ainsi, la stabilité au sens de Liapounov signifie que la trajectoire $x(t)$, avec une condition initiale $x(t_0)$, doit rester proche du point d'équilibre x_e (c.-à-d., $\|x(t_0) - x_e\| < \delta$), pour tout $t \geq t_0$. Pour cela, les solutions $x(t)$ doivent rester à l'intérieur de la région délimitée par $\|x(t) - x_e\|$, c'est-à-dire rester dans un "tube" de rayon ε autour de la trajectoire $x(t) = x_e$ (Figure 1).

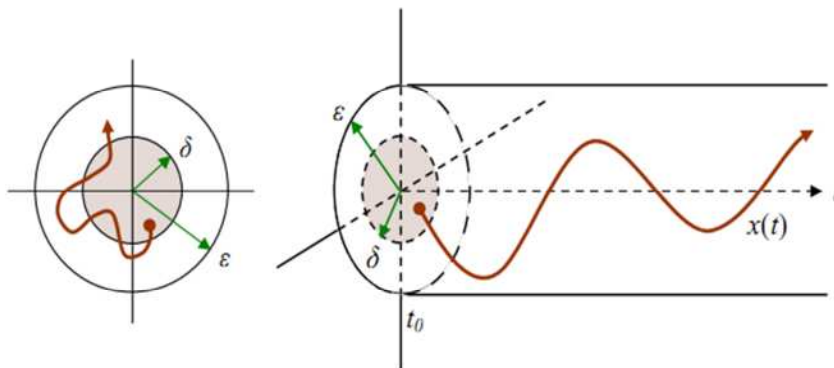


Figure 1 : Stabilité d'un point d'équilibre [SIG05]

I.2.1.2 - Stabilité asymptotique :

Un point d'équilibre est asymptotiquement stable s'il est stable et si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \quad (4)$$

La stabilité asymptotique signifie que non seulement le point d'équilibre est stable, mais qu'on est aussi capable de déterminer un domaine proche du point d'équilibre tel que n'importe quelle trajectoire, issue d'un état initial $x(t_0)$ appartenant à ce domaine, tende vers x_e quand t tend vers ∞ (Figure 2) [SHA03].

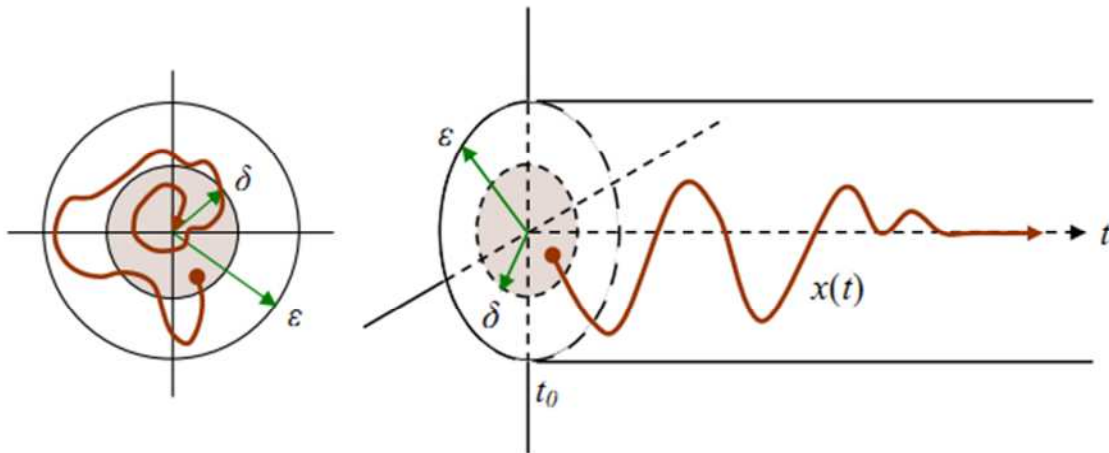


Figure 2 : Stabilité asymptotique [SIG05]

Un ensemble d'états initiaux $x(t_0)$ à partir desquels les trajectoires convergent vers un point d'équilibre asymptotiquement stable est appelé un domaine d'attraction D .

La stabilité asymptotique est la propriété généralement recherchée en pratique. Il faut cependant remarquer que la définition ci-dessus ne donne pas d'information sur la vitesse à laquelle la trajectoire $x(t)$ converge vers l'équilibre. C'est pourquoi, on introduit la notion de stabilité exponentielle qui permet de caractériser cette vitesse [SIG05].

I.2.1.3 - Stabilité exponentielle :

Un point d'équilibre est exponentiellement stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe des constantes $a > 0$, $b > 0$ et $\delta > 0$ telles que [SIG05] :

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < a \cdot \|x(t_0) - x_e\| \cdot e^{-bt} \forall t \geq t_0 \quad (5)$$

Cette stabilité signifie que le vecteur d'état, pour une condition initiale $x(t_0)$, converge vers un point d'équilibre x_e plus rapidement qu'une fonction exponentielle ; b est appelé le taux de convergence. Par ailleurs, la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique qui implique elle-même la stabilité d'un point d'équilibre. La Figure 3 illustre schématiquement la définition de la stabilité exponentielle.

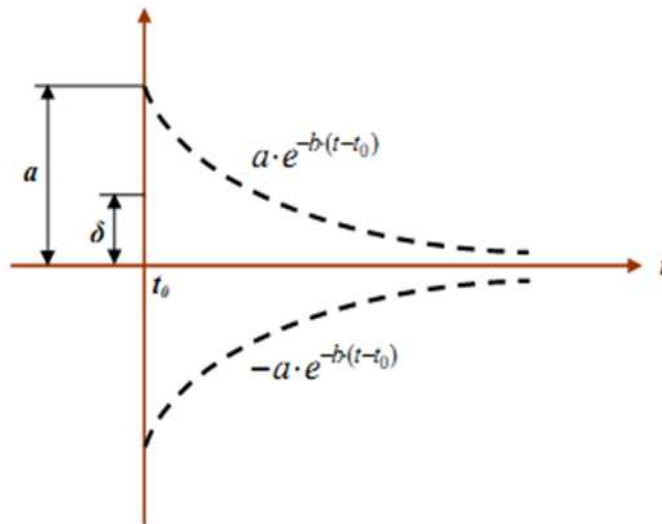


Figure 3 : Stabilité exponentielle

I.2.2 - Méthodes d'analyse de stabilité au sens de Liapounov :

I.2.2.1 - Première méthode de Liapounov - méthode indirecte :

La première méthode de Liapounov se base sur l'analyse du comportement du système linéarisé autour de son point d'équilibre. Plus précisément, on examine les valeurs propres λ_i du système de la matrice Jacobienne (la matrice d'état) A , évaluée au point d'équilibre x_e :

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e} \quad (6)$$

Les caractéristiques de stabilité sont les suivantes :

- Si toutes les valeurs propres de la matrice d'état sont à partie réelle strictement négative ($\forall i, \text{ Réel } (\lambda_i(A)) < 0$), le système est exponentiellement stable à son point d'équilibre. Dans ce cas, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$.
- Si la matrice d'état possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive ($\exists i, \text{ réel } (\lambda_i(A)) > 0$), le système est instable. Dans ce cas, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$.

La première méthode est simple à appliquer mais étant donné que cette méthode repose sur une linéarisation du système, sa validité est alors limitée à un certain voisinage du point d'équilibre. Lorsque la linéarisation du système n'est pas possible ou lorsqu'on veut analyser le système sans le résoudre explicitement, on utilise la deuxième méthode de Liapounov [SIG05].

I.2.2.2 - Deuxième méthode de Liapounov - méthode directe :

La deuxième méthode de Liapounov s'appuie sur une observation physique fondamentale :

Chapitre I : Généralités sur la stabilité

Si l'énergie totale d'un système, linéaire ou non-linéaire, est continuellement dissipée (on parle de système dissipatif), alors le système doit tendre finalement vers un point d'équilibre.

Ainsi, l'idée de Liapounov, pour étudier la stabilité d'un système donné, est d'examiner la variation d'une seule fonction scalaire (appelée la fonction de Liapounov) dépendant de l'énergie totale du système. Autrement dit, cette méthode est basée sur la définition d'une fonction de Liapounov décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du domaine d'attraction. Cette méthode s'énonce comme suit:

Le point d'équilibre x_e est stable s'il existe, dans un certain voisinage Ω de ce dernier, une fonction de Liapounov $V(x)$ telle que :

$$V(x_e) = 0$$

$$V(x) > 0 \text{ pour tout } x \text{ dans } \Omega$$

$$\frac{d}{dt}V(x) \leq 0 \text{ dans } \Omega.$$

Les deux premières conditions expriment la présence de surfaces fermées entourant le point d'équilibre x_e . La troisième condition exprime que les trajectoires du système soit restent sur ces surfaces, soit coupent les surfaces en entrant à l'intérieur d'elles, d'où la stabilité du point d'équilibre.

La deuxième méthode de Liapounov permet, outre l'analyse de stabilité d'un point d'équilibre du système, de déterminer une partie de son domaine d'attraction en ce sens que Ω est inclus dans D [AND], [SHA03], [SIG05].

I.3 - Les différents types de la stabilité de système de puissance :

Pendant des années, des recherches diverses et complexes étaient effectuées pour comprendre les problèmes de stabilité des systèmes de puissance. Ainsi de nombreuses définitions de la stabilité de systèmes de puissance étaient proposées en insistant sur les divers aspects qui reflètent la manifestation de l'état stable du système, la plus récente est :

La stabilité d'un système de puissance est la capacité d'un système d'énergie électrique, pour une condition de fonctionnement initiale donnée, de retrouver le même état ou un autre état d'équilibre après avoir subi une perturbation physique, en gardant la plupart des variables du système dans leurs limites, de sorte que le système entier reste pratiquement intact.

Ainsi un système de puissance possédant un état d'équilibre est considéré comme stable, si, suite à une perturbation, le système peut encore retrouver une position d'équilibre. Le système est également considéré comme stable s'il tend vers une autre position d'équilibre située dans

Chapitre I : Généralités sur la stabilité

la proximité du point d'équilibre initial. Cela correspond aux propriétés de la stabilité du point d'équilibre au sens de Liapounov.

La stabilité d'un système de puissance électrique représente la propriété du mouvement du système autour d'un état d'équilibre (c'est-à-dire les conditions de fonctionnement initiales).

Dans un état d'équilibre, toutes les différentes forces opposées sont égales :

- **soit instantanément** : c'est le cas des points d'équilibre,
- **soit périodiquement** : c'est le cas des variations périodiques lentes en raison des petites fluctuations continues sur les charges ou la génération.

Ainsi, la stabilité d'un système de puissance dépend non seulement des conditions de fonctionnement initiales, mais elle dépend également de la nature physique et de l'amplitude de la perturbation.

En raison de la taille, de l'importance et de la complexité des problèmes de stabilité, il est très intéressant de faire des simplifications et des hypothèses appropriées pour représenter analytiquement le système.

Pour analyser et résoudre les problèmes d'instabilité dans les systèmes de puissance, il est indispensable de regrouper les différents groupes de stabilité. Cette classification de la stabilité est basée sur les considérations suivantes :

- nature physique de l'instabilité résultante
- amplitude de la perturbation
- plage de temps nécessaire pour assurer la stabilité
- dispositifs et processus nécessaires pour assurer la stabilité.

Habituellement, la stabilité est divisée en trois groupes, à savoir :

- stabilité de l'angle de rotor
- stabilité de tension
- stabilité de fréquence.

La Figure 4 présente ces principales catégories de stabilité d'un système de puissance et leurs sous-catégories.

Traditionnellement, le problème de la stabilité a été de maintenir le fonctionnement synchrone des générateurs du système. Ainsi, pour avoir une production satisfaisante de la puissance électrique, toutes les machines synchrones du système doivent fonctionner en synchronisme. Cet aspect de la stabilité est influencé par les dynamiques de l'angle de rotor du générateur et de la relation puissance-angle.

L'instabilité peut également avoir lieu sans perte de synchronisme. Par exemple, un système composé d'un générateur alimentant un moteur à induction peut devenir instable en raison de

Chapitre I : Généralités sur la stabilité

l'effondrement de la tension de la charge. Dans ce cas, c'est la stabilité et le contrôle de la tension qui créent le problème, plutôt que le maintien du synchronisme. Ce type d'instabilité peut aussi se produire dans le cas de charges couvrant une vaste zone dans un grand système.

Un autre type d'instabilité peut avoir lieu : dans l'éventualité d'un fort écart entre la puissance de la charge et la puissance de la génération, les contrôleurs principaux des générateurs et de la charge deviennent importants. S'ils ne sont pas bien coordonnés, il est possible que la fréquence du réseau devienne instable. Des unités de générations et/ou de charges peuvent finalement être déclenchées en entraînant une panne du système. Dans ce cas, les générateurs peuvent rester en synchronisme mais le système devient instable.

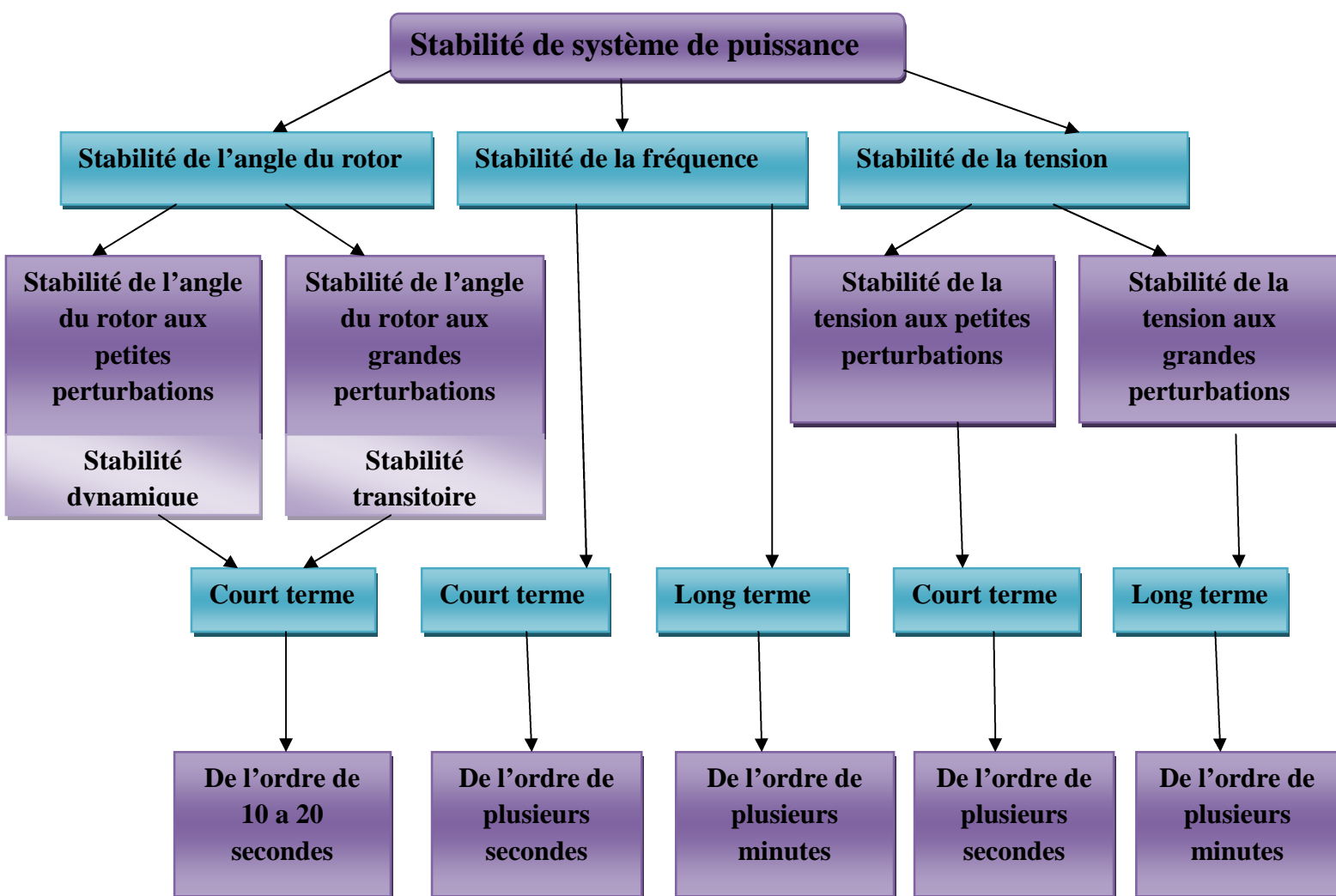


Figure 4 : Classification des différents types de la stabilité de système de puissance

[TOU12], [FAR01], [AND08], [BOU13]

I.3.1 - La stabilité de l'angle de rotor :

Etant donné que la génération de puissance électrique dépend principalement des machines synchrones, un aspect important est le fonctionnement de ces générateurs au synchronisme.

Au synchronisme, les rotors de chaque machine synchrone du système tournent à la même vitesse électrique et les angles entre les champs magnétiques, rotoriques et statoriques restent constants.

En fonctionnement nominal équilibré, la puissance électrique fournie par le générateur aux charges est égale, en négligeant les pertes, à la puissance mécanique fournie par la turbine.

Quand le système est perturbé, la puissance électrique de la machine varie rapidement, mais la variation de puissance mécanique fournie à la machine est relativement lente. En raison de cette différence de vitesse de réponse, un écart temporaire d'équilibre de puissance a lieu. Par conséquent, ce déséquilibre de puissance entraîne une variation des couples agissant sur le rotor. Ceci entraîne une accélération ou décélération du rotor selon le sens du déséquilibre, voire un glissement du champ de synchronisme en entraînant une perte de synchronisme du générateur avec le reste du système. Si l'équilibre de puissance n'est pas rétabli, la machine est mise hors service par une protection de survitesse ou de perte de synchronisme, et la stabilité du système est mise en danger [TOU12], [FAR01], [HAM12].

Suite à une perturbation du système, le facteur principal qui détermine l'évolution de l'état du système est l'écart entre les angles de rotor. Les angles sont mesurés par rapport à une référence tournante au synchronisme. Nous pouvons dire que les angles de rotor d'un système de puissance peuvent évoluer selon deux scénarios :

- ❖ Soit les angles de rotor s'accroissent ensemble et oscillent à l'unisson. Ils peuvent éventuellement atteindre de nouvelles valeurs stables. Tant que les écarts entre les angles de rotor restent constants, le système reste stable et il demeure au synchronisme.
- ❖ Soit un ou plusieurs angles de rotor s'accroissent plus rapidement que les autres. Alors, les écarts entre les angles de rotor divergent dans le temps. Le système devient par conséquent instable et perd le synchronisme.

Pour conclure, nous pouvons dire que :

La stabilité de l'angle de rotor concerne la capacité des machines synchrones d'un système de puissance interconnecté à rester en synchronisme suite à une perturbation. Elle dépend de la capacité de maintenir/restaurer l'équilibre entre les couples électromagnétique et mécanique agissant sur le rotor de chaque machine synchrone dans le système. L'instabilité qui peut résulter se produit sous forme d'augmentation des oscillations angulaires de certains

générateurs pouvant conduire à une perte de synchronisme avec d'autres générateurs [BOU13].

Suivant l'amplitude de la perturbation, nous pouvons caractériser la stabilité de l'angle de rotor en deux sous-catégories :

- Stabilité angulaire aux grandes perturbations - stabilité transitoire
- Stabilité angulaire aux petites perturbations - stabilité dynamique

I.3.1.1 - Stabilité angulaire aux grandes perturbations - stabilité transitoire :

Elle concerne la capacité du système de puissance à maintenir le synchronisme après avoir subi une perturbation sévère transitoire telle un court-circuit sur une ligne de transmission ou une perte d'une partie importante de la charge ou de la génération. La réponse du système implique de grandes variations des angles de rotor. Elle dépend de la relation non-linéaire couple-angle [AND08], [SHA03], [BOU13].

La stabilité transitoire dépend :

- du type de perturbation
- de la durée de perturbation
- du lieu de perturbation
- de la performance des systèmes de protection (relais, disjoncteurs, etc.)
- du point de fonctionnement avant défaut (niveau de puissance active, topologie du réseau, degré d'excitation des machines)
- des caractéristiques dynamiques (des générateurs, des charges, des régulateurs et des stabilisateurs mis en place).

Pour améliorer la stabilité transitoire, trois objectifs peuvent être fixés :

- ❖ l'amélioration du temps critique d'élimination des défauts
- ❖ l'amortissement des oscillations après la perturbation
- ❖ l'amélioration de la capacité de transfert des lignes.

La stabilité transitoire se manifeste à court terme sous forme d'un écart croissant de façon apériodique de certains angles de rotor. Si l'instabilité se manifeste directement suite à la perturbation (plus précisément dans la première seconde qui suit l'élimination du défaut), elle est appelée instabilité de première oscillation (First Swing Instability - Figure 5 Cas 1), et elle s'étend sur 3 à 5 secondes [TOU12], [SAD98], [HAM12], [SHA03].

L'instabilité transitoire peut aussi se manifester autrement. Elle peut résulter de la superposition des effets de plusieurs modes d'oscillation lents excités par la perturbation, provoquant ainsi une variation importante de l'angle de rotor au-delà de la première

Chapitre I : Généralités sur la stabilité

oscillation (instabilité de multi-oscillations - Figure 5 Cas 2). La gamme de temps associée va de 10 à 20 secondes.

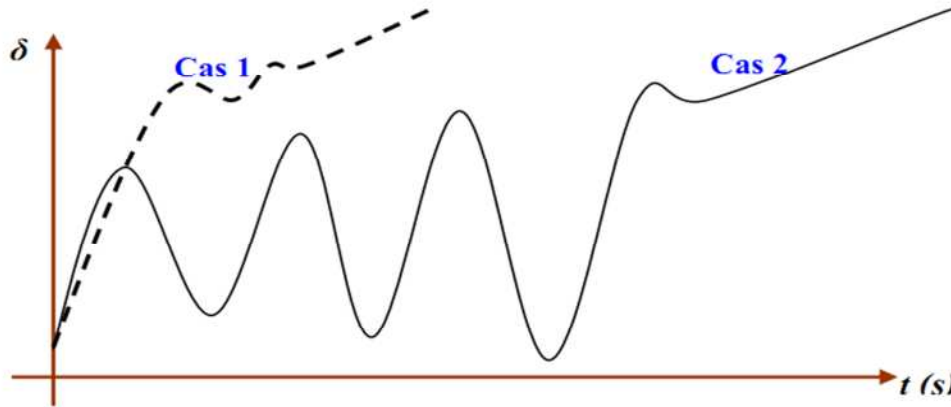


Figure 5 : Variation d'angle de rotor [HAM12]

Cas 1 : instabilité de première oscillation

Cas 2 : instabilité de multi-oscillations

Le concept de stabilité transitoire peut être expliqué par une approche graphique simple, à savoir le critère d'égalité des aires (Equal Area Criterion). Cette approche regroupe l'équation du mouvement et la courbe (P- δ) traditionnelle représentant la relation entre la puissance produite par le générateur et l'angle de rotor.

Pour expliquer cette approche, nous prenons un système de puissance simple constitué d'un générateur synchrone connecté à un jeu de barre infini via une ligne de transmission (Figure 6). Le générateur est modélisé par une source de tension idéale E_g en série avec une réactance X_g (modèle classique). La ligne et le transformateur sont représentés par la réactance X_E .

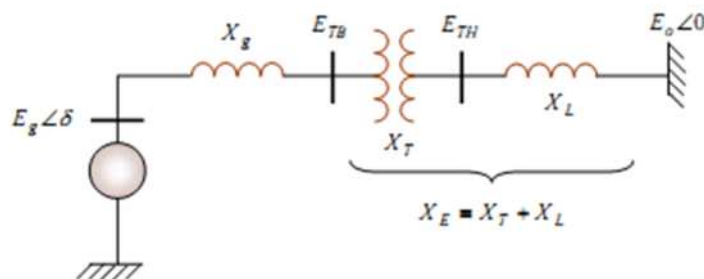


Figure 6 : Machine synchrone connectée à un jeu de barre infini [HAM12]

➤ Relation (P- δ) :

Dans l'état équilibré, la puissance produite par le générateur P_e est donnée par l'équation suivante :

$$P_e = \frac{E_g \cdot E_0}{X_g + X_E} \cdot \sin \delta \quad (7)$$

Avec :

E_g : source de tension idéale

E_0 : tension du jeu de barre infini

X_g : réactance du générateur

X_E : réactance de la ligne et le transformateur

δ : angle de rotor (l'angle de puissance).

Où : δ est le déphasage entre la tension interne du générateur (E_g) et la tension du jeu de barre infini (E_0). L'équation (7) est représentée graphiquement à la Figure 7.

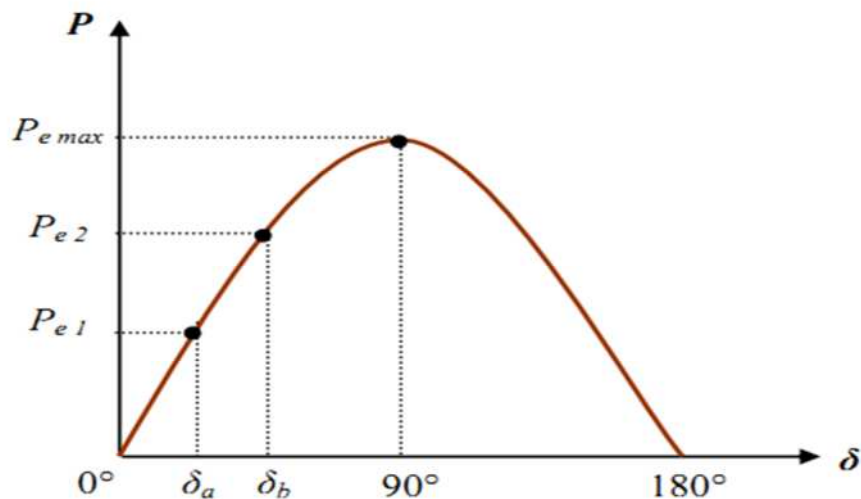


Figure 7 : Relation puissance - angle de rotor [HAM12], [SHA03]

Lors de l'équilibre, la puissance électrique P_{e1} est égale à la puissance mécanique appliquée pour l'angle correspondant δ_a .

Un brusque changement sur la charge du générateur entraîne une variation de la puissance mécanique, et par conséquent de la puissance électrique, par exemple de P_{e1} à P_{e2} (Figure 7). Le rotor va donc accélérer de sorte que l'angle de puissance augmente, de δ_a à δ_b , pour pouvoir fournir une puissance supplémentaire à la charge. Cependant, l'accélération du rotor ne peut pas s'arrêter instantanément. Ainsi, bien que la puissance développée pour l'angle δ_b soit suffisante pour la charge, le rotor va dépasser l'angle δ_b jusqu'à ce qu'un couple opposé

Chapitre I : Généralités sur la stabilité

suffisant soit développé pour arrêter cette accélération. L'énergie supplémentaire va entraîner le ralentissement du rotor et la diminution de l'angle de puissance. Suivant l'inertie et l'amortissement du système, les oscillations de l'angle de rotor résultant vont s'amortir, et la machine restera stable (Figure 8 Cas 1), ou diverger, et la machine deviendra instable en perdant le synchronisme avec le système (Figure 8 Cas 2).

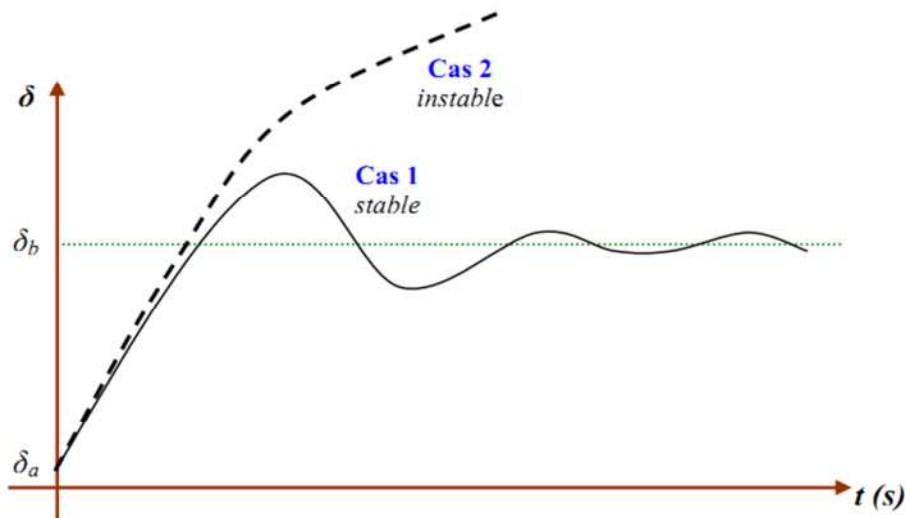


Figure 8 : Variation d'angle de rotor [HAM12]

Cas 1 : machine stable **Cas 2** : machine instable

➤ Critère d'égalité des aires :

Cette méthode (EAC : Equal Area Criterion) a été appliquée à l'origine pour un système mono-machine, et par la suite aux systèmes multi-machines en les remplaçant par une machine équivalente reliée à un nœud infini. Cette méthode graphique permet de conclure sur la stabilité du système sans tracer et analyser les réponses temporelles [TOU12].

Considérons un défaut sur la ligne de transmission, appliqué au système précédent disparaissant après quelques périodes du système. Ceci va modifier l'écoulement de puissance et, par conséquent, l'angle de rotor δ . Retraçons la courbe (P- δ) en tenant compte de ce défaut (Figure 9). En dessous de cette courbe, nous pouvons considérer deux zones :

- La première zone (A_1 : zone d'accélération) se situe au-dessous de la droite horizontale correspondant au point de fonctionnement initial (la droite de charge). Elle est limitée par les deux angles de rotor (δ_0 et δ_1) correspondants à l'apparition et à la disparition de défaut. Cette zone est caractérisée par l'énergie cinétique stockée par le rotor du fait de son accélération : $P_m > P_e$.

Chapitre I : Généralités sur la stabilité

- La deuxième zone (A_2 : zone de décélération), qui commence après l'élimination du défaut, se situe au-dessus de la droite de charge : elle est caractérisée par la décélération du rotor : $P_m < P_e$. Si le rotor peut rendre dans la zone A_2 toute l'énergie cinétique acquise durant la première phase, le générateur va retrouver sa stabilité. Mais si la zone A_2 ne permet pas de restituer toute l'énergie cinétique, la décélération du rotor va continuer jusqu'à la perte de synchronisme.

La relation entre les aires des zones (A_1 et A_2) et la stabilité transitoire peut être mathématiquement expliquée comme suit :

Rappelons tout d'abord que l'équation du mouvement de générateur est donnée par la relation suivante [AND08] :

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{\omega_0}{2H} (P_m - P_e) \quad (8)$$

Avec :

H : constante d'inertie

ω_0 : vitesse de synchronisme

P_m : puissance mécanique fournie au générateur

P_e : puissance électrique du générateur.

En multipliant cette équation par $2 \cdot \frac{d\delta}{dt}$, en intégrant par rapport au temps et en faisant un changement de variables, nous obtenons :

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + cte = \int_{\delta_0}^{\delta_2} \frac{\omega_0}{H} (P_m - P_e) \cdot d\delta \quad (9)$$

Avec :

δ_0 : angle de rotor initial, à l'instant de l'application du défaut

δ_2 : angle de rotor à la fin de la période transitoire.

Ainsi, lorsque : $t = 0 \Rightarrow \delta = \delta_0$, $\frac{d\delta}{dt} \Rightarrow$ la constante $cte = 0$

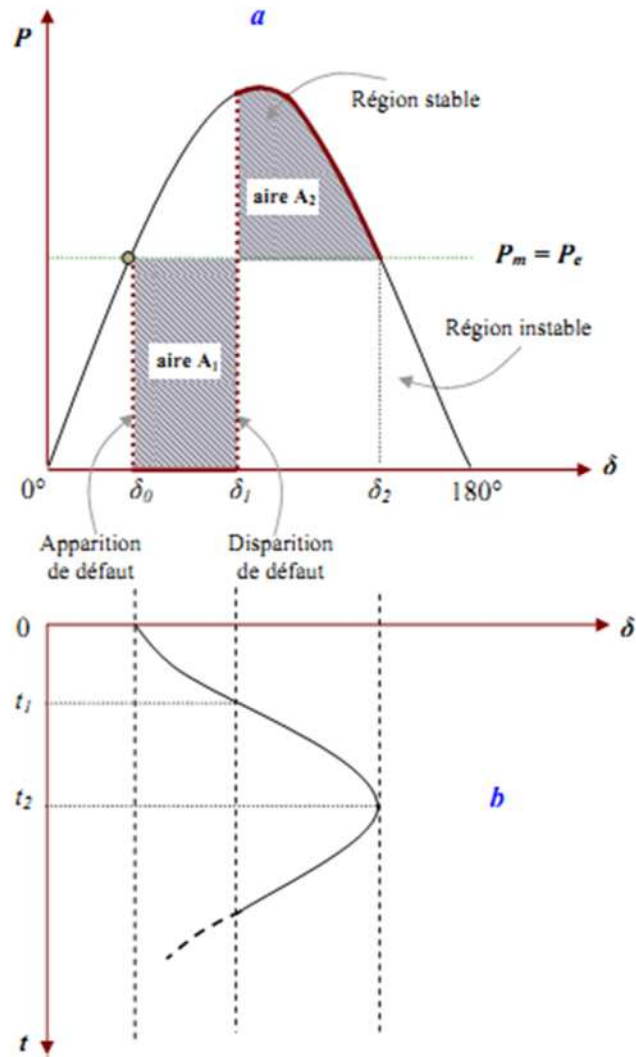


Figure 9 : Courbes du générateur suite à un défaut de transmission (cas a : puissance – angle, cas b : variation d’angle de rotor) [TOU12], [FAR01], [ESB10], [AND08], [SHA03]

Après l’élimination du défaut, l’angle δ va s’arrêter de varier et le générateur va retrouver sa vitesse de synchronisme, lorsque :

$$\frac{d\delta}{dt} = 0$$

Par conséquent, l’équation (9) s’écrit comme suit :

$$\int_{\delta_0}^{\delta_2} (P_m - P_e) \cdot d\delta = 0 \tag{10}$$

$$\Rightarrow \int_{\delta_0}^{\delta_1} (P_m - P_e) \cdot d\delta + \int_{\delta_1}^{\delta_2} (P_m - P_e) \cdot d\delta \tag{11}$$

Où : δ_1 : angle de rotor à l’instant de l’élimination du défaut

$$\Rightarrow A_1 - A_2 = 0 \tag{12}$$

Chapitre I : Généralités sur la stabilité

Ainsi, la limite de la restauration de la stabilité transitoire se traduit mathématiquement par l'égalité des aires de la zone A_1 et de la zone A_2 : cette condition est appelée critère d'égalité des aires (Equal Area Criterion).

Par conséquent, les contrôleurs de la stabilité transitoire peuvent améliorer la stabilité soit en diminuant la zone d'accélération (A_1), soit en augmentant la zone de décélération (A_2).

Cela peut être réalisé soit en augmentant la puissance électrique, soit en diminuant la puissance mécanique.

En outre, un système statique d'excitation avec une tension maximale élevée et un régulateur de tension possédant une action "puissante" et rapide représente un moyen très efficace et économique pour assurer la stabilité transitoire. Enfin, une amélioration remarquable de la stabilité transitoire est obtenue avec des systèmes très rapides de détection des défauts et de disjoncteurs [AND08].

I.3.1.2 - Stabilité angulaire aux petites perturbations - stabilité dynamique :

Elle se définit par la capacité du système de puissance de maintenir le synchronisme en présence des petites perturbations. L'instabilité résultante se manifeste sous forme d'un écart croissant, oscillatoire ou non-oscillatoire, entre les angles de rotor.

La stabilité aux petites perturbations dépend du point de fonctionnement d'équilibre initial du système ainsi que des caractéristiques dynamiques du système. Contrairement à la stabilité transitoire, elle ne dépend pas de niveaux de perturbations, car celles-ci sont arbitraires et infiniment petites.

La relation puissance-angle (7) est une relation non-linéaire en sinus. Mais pour des petites perturbations, la variation de puissance reste approximativement proportionnelle à la variation de l'angle δ . Des exemples typiques des petites perturbations peuvent être donnés par des variations de niveau de 10 % de la puissance mécanique appliquées à une machine du système ou sur sa charge,

La stabilité transitoire, comme nous l'avons vue, est associée à la présence d'un couple synchronisant suffisant, immédiatement après la perturbation. Si le système est transitoirement stable, la stabilité aux petites perturbations sera associée à la présence d'un couple d'amortissement à la suite de la première oscillation. Si ce couple est suffisant, les oscillations s'amortiront (amortissement positif). Par ailleurs, si l'amortissement n'est pas suffisant, les oscillations vont continuer, ou même vont augmenter (amortissement négatif, c'est-à-dire manque de couple d'amortissement) [TOU12], [SAD98], [SHA03], [BOU13].

Chapitre I : Généralités sur la stabilité

La perte de synchronisme peut avoir lieu entre une machine et le reste du système (provoquant une instabilité locale), ou bien entre des groupes de machines, où chaque groupe peut garder son synchronisme (désignant une instabilité globale).

L'instabilité aux petites perturbations se manifeste à court terme, la gamme de temps associée étant de l'ordre de 10 à 20 secondes.

I.3.2 - La stabilité de tension :

La stabilité de tension, par définition, se rapporte à la capacité d'un système de puissance, pour une condition de fonctionnement initiale donnée, de maintenir des valeurs de tensions acceptables à tous les nœuds du système après avoir subi une perturbation. La stabilité de tension dépend donc de la capacité de maintenir/restaurer l'équilibre entre la demande de la charge et la fourniture de la puissance à la charge. L'instabilité résultante se produit très souvent sous forme de décroissance progressive de tensions à quelques nœuds.

Suite à une perturbation, certaines charges ont tendance à restaurer la puissance consommée avant perturbation. C'est le cas des moteurs asynchrones, des charges dont la tension est contrôlée par un régulateur en charge automatique, des chauffages électriques commandés par thermostat, Il existe une puissance maximale transmissible entre les centres de production et ceux de consommation. Cette puissance maximale disponible dépend non seulement des caractéristiques du réseau de transport (distances électriques) mais également de celles des générateurs (possibilité de maintenir la tension grâce à une réserve de puissance réactive suffisante). Par conséquent, si la puissance que les charges tendent à restaurer devient supérieure à la puissance maximale transmissible, le mécanisme de restauration des charges va contraindre le réseau haute tension en augmentant la puissance réactive consommée et en faisant donc baisser progressivement la tension du réseau jusqu'à des valeurs inacceptables.

Généralement, l'instabilité de tension se produit lorsqu'une perturbation entraîne une augmentation de puissance réactive demandée au-delà de la puissance réactive possible [AND08], [BOU13].

Plusieurs changements dans le système de puissance peuvent contribuer à l'instabilité de tension, ce sont par exemple [TOU12] :

- ❖ une augmentation de charge
- ❖ des générateurs, des condensateurs synchrones ou des SVCs (Static Var Compensator systems) qui atteignent les limites de puissance réactive
- ❖ une tentative d'un régulateur automatique en charge ayant échoué de restaurer la tension de charge à son niveau initial avant la perturbation

Chapitre I : Généralités sur la stabilité

- ❖ une panne de générateur, une perte d'une charge importante ou un déclenchement de ligne
- ❖ une perte d'une source de puissance réactive : condensateurs, machines synchrones, ...

La plupart de ces changements ont des effets significatifs sur la production, la consommation et la transmission de puissance réactive, donc sur la stabilité de tension. Par conséquent, des mesures peuvent être utilisées pour améliorer la stabilité de tension, telles :

- ✓ un contrôle automatique des condensateurs shunts
- ✓ un blocage des régulateurs en charge automatique
- ✓ une nouvelle répartition de la génération
- ✓ une re planification du fonctionnement des générateurs et des nœuds de commande
- ✓ une régulation de tension secondaire
- ✓ un plan de délestage [JEA97].

Pour l'instabilité de tension à court terme l'effondrement de tension se produit immédiatement après la perturbation. Dans ce type d'instabilité, les charges et les dispositifs, qui ont des caractéristiques spéciales de puissance réactive, tels les moteurs asynchrones sont souvent impliqués. Les moteurs asynchrones consomment, juste après la perturbation, beaucoup de puissance réactive pour assurer leur stabilité vis-à-vis de leurs charges. D'autres éléments peuvent aussi participer à cette instabilité : les charges commandées électroniquement, les convertisseurs HVDC,

L'instabilité de tension à long terme se développe lors d'un manque graduel de puissance réactive d'un nœud ou une partie du système. Elle implique, quant à elle, des équipements ayant une action plus lente tels les régulateurs en charge automatique, les charges commandées thermostatiquement,

Il est aussi important de noter que l'instabilité de tension ne se produit pas toujours toute seule. Souvent, l'instabilité de tension et l'instabilité de l'angle de rotor se produisent ensemble, l'une pouvant entraîner l'autre.

Enfin, la stabilité de tension peut être classée en deux catégories :

- ❖ **Stabilité de tension aux grandes perturbations :** le souci dans ce cas est de maintenir des tensions normales aux nœuds du réseau électrique après une grande perturbation. La stabilité est déterminée ici par les caractéristiques du système et de charge, et par les interactions entre les différents dispositifs de commande de tension dans le système.

- ❖ **Stabilité de tension aux petites perturbations** : dans ce cas, les caractéristiques de la charge et des dispositifs de commande déterminent la capacité du système à maintenir les tensions équilibrées.

I.3.3 - La stabilité de fréquence :

La stabilité de la fréquence d'un système de puissance se définit par la capacité du système de maintenir sa fréquence proche de la valeur nominale suite à une perturbation sévère menant par conséquent à un important déséquilibre entre les puissances produites et consommées. Le maintien de la fréquence à une valeur nominale dans un système de puissance est lié à l'équilibre global entre les puissances actives produites et consommées (y compris les pertes). Autrement dit, suite à certaines perturbations, l'équilibre global des puissances produites-consommées peut être déséquilibré : ce déséquilibre entraîne alors une variation de fréquence. L'énergie cinétique stockée dans les pièces tournantes des machines synchrones et autres machines électriques tournantes peut éventuellement compenser ce déséquilibre. Si ce dernier n'est pas trop grand, les générateurs participant à la commande de fréquence régleront la puissance active fournie à travers leurs réglages secondaires fréquence-puissance et ramèneront ainsi l'écart de fréquence à des valeurs acceptables. Par ailleurs, si le déséquilibre est trop grand, l'écart de fréquence sera significatif avec des graves conséquences (effondrement complet du système) [AND08].

Lorsque la fréquence varie, les caractéristiques de temps des processus et des différents dispositifs activés vont varier de quelques secondes à quelques minutes. La stabilité de fréquence peut donc être classifiée en phénomènes à court terme et à long terme.

Dans un grand système de puissance et suite à un incident sévère et, après l'intervention des protections (par exemple, un déclenchement de plusieurs lignes de transmission), l'instabilité de la fréquence est généralement associée à l'îlotage où un scénario typique peut avoir lieu. Un ou plusieurs sous-réseaux se retrouvent isolés du reste du système. Les générateurs de chaque sous-réseau résultant essaient de garder le synchronisme entre eux, mais la réserve tournante est nettement insuffisante pour faire face à la charge connectée au sous-réseau. La fréquence décroît ainsi rapidement et l'instabilité produite est donc à court terme.

L'instabilité de fréquence peut également se manifester à long terme, lorsqu'elle provient d'une mauvaise réponse en puissance des centrales ou d'une mauvaise coordination entre des régulations et protections [TOU12], [BOU13].

I.4 - Conclusion :

Dans cette partie, nous avons présenté les définitions et les caractéristiques des différents types de stabilité d'un système de puissance. Le concept général de la stabilité peut se synthétiser en trois groupes : stabilité de l'angle de rotor, de la tension et de la fréquence.

Cette classification est nécessaire pour mieux comprendre les mécanismes :

- ❖ des phénomènes de l'instabilité du système
- ❖ des dispositifs nécessaires pour assurer la stabilité du système.

Historiquement, les chercheurs et les ingénieurs des systèmes de puissance mettaient l'accent sur la stabilité de l'angle de rotor. Or, les opérateurs des systèmes de puissance se trouvent actuellement souvent obligés de faire fonctionner leurs systèmes aux limites de la stabilité.

CHAPITRE II:

Théorie de la stabilité par la méthode des petites variations

II.1 - Introduction :

Les interactions de régulation se présentent sous forme d'apparition ou d'amplification d'oscillations dans le réseau pouvant engendrer une instabilité. Par conséquent, l'analyse de ces phénomènes d'interaction prend place dans le cadre de la stabilité dynamique, et donc de la théorie des petits signaux.

II.2 - Représentation d'état :

Le comportement dynamique d'un système de puissance peut être décrit par un jeu de 'n' équations différentielles non-linéaires du premier ordre [SIG05] :

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r, t) \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

f_i : i^{ème} fonction non-linéaire

x_i : i^{ème} variable d'état

n : nombre de variable d'état - ordre du système

u_j : j^{ème} variable d'entrée

r : nombre de variables d'entrée

t : temps

En écrivant cette équation sous une forme vectorielle :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, u, t) \quad (14)$$

$$\text{Avec : } f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix}$$

f : vecteur de fonctions non-linéaires

x : vecteur des variables d'état

u : vecteur des variables d'entrée

Si $\frac{\partial x}{\partial t}$ ne dépend pas explicitement du temps, alors le système est dit autonome :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, u) \quad (15)$$

Chapitre II : Théorie des petits signaux

De la même manière, les variables de sortie peuvent être exprimées suivant les variables d'état et les variables d'entrée :

$$y = g(x, u) \quad (16)$$

$$\text{Avec : } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_m \end{bmatrix}$$

y : vecteur des variables de sortie

y_k : $k^{\text{ième}}$ variable de sortie

g : vecteur de fonctions non-linéaires

g_k : $k^{\text{ième}}$ fonction non-linéaire

Cette représentation est la représentation exacte du système. Elle peut être utilisée par exemple dans le cas de l'étude de stabilité transitoire par traitement numérique. Cependant, dans le cas de la stabilité dynamique, les perturbations sont faibles, ce qui permet de linéariser le système.

II.3 - Linéarisation du système :

La quasi-totalité des systèmes dynamiques réels possède des caractéristiques non-linéaires. Le comportement dynamique d'un système de puissance peut être décrit par un ensemble d'équations différentielles et algébriques (EDA). Sachant que le système de puissance évolue généralement autour d'un point de fonctionnement donné, lors des petites perturbations, il est possible de linéariser ces EDA autour de ce point.

Le point de fonctionnement normal du système se définit comme un point d'équilibre ou une condition initiale. Les dérivées des variables d'état en ce point sont donc égales à zéro.

De l'équation (15), on déduit :

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = f(x_0, u_0) = 0 \quad (17)$$

x_0 : vecteur d'état initial

u_0 : vecteur des variables d'entrée correspondant au point d'équilibre

Une perturbation dans le système peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$x = x_0 + \Delta x$$

Chapitre II : Théorie des petits signaux

$$u = u_0 + \Delta u$$

Si une petite perturbation se superpose aux valeurs d'équilibre, l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x_0}{\partial t} + \frac{\partial \Delta x}{\partial t} = f[(x_0 + \Delta x), (u_0 + \Delta u)] \quad (18)$$

Si cette dernière est sur l'ensemble des variables de faible amplitude, les fonctions non-linéaires $f(x, u)$ peuvent s'exprimer sous la forme de séries de Taylor. Si les termes supérieurs au premier ordre sont négligés, alors nous obtenons pour chaque variable d'état : pour $i = 1, \dots, n$

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{i0} + \Delta \dot{x}_i = f_i(x_0, u_0) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n + \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \cdot \Delta u_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_r} \Delta u_r \quad (19)$$

L'équation précédente peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \Delta x_i}{\partial t} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Delta x_n + \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \Delta u_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_r} \Delta u_r \quad i = 1, \dots, n \quad (20)$$

Nous pouvons appliquer les mêmes étapes de linéarisation sur l'équation de la sortie :

$$\Delta y_j = \frac{\partial g_j}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial g_j}{\partial x_n} \Delta x_n + \frac{\partial g_j}{\partial u_1} \Delta u_1 + \dots + \frac{\partial g_j}{\partial u_r} \Delta u_r \quad j = 1, \dots, m \quad (21)$$

Si le système fonctionne avec de petites perturbations au voisinage du point d'équilibre, nous pouvons supposer que toutes les dérivées premières ($\frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \dots$) sont constantes dans le domaine de fonctionnement [ALK08], [PAS98], [SNY99], [MEK02].

Par conséquent, le système linéarisé peut être représenté par les deux équations suivantes :

$$\Delta \dot{x}_i = a_{i1} \Delta x_1 + \dots + a_{in} \Delta x_n + b_{i1} \Delta u_1 + \dots + b_{ir} \Delta u_r \quad i = 1, \dots, n \quad (22)$$

$$\Delta y_j = c_{j1} \Delta x_1 + \dots + c_{jn} \Delta x_n + d_{j1} \Delta u_1 + \dots + d_{jr} \Delta u_r \quad j = 1, \dots, m \quad (23)$$

En écrivant ces deux équations sous forme matricielle, nous obtenons le modèle d'état linéaire final suivant [INT], [ORT13], [CHE], [BAY] :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta x_i}{\partial t} = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u \\ \Delta y = C \cdot \Delta x + D \cdot \Delta u \end{cases} \quad (24)$$

Chapitre II : Théorie des petits signaux

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}$$

A : matrice des variables d'état de dimension ' $n \times n$ '

Δx : vecteur des variables d'état de dimension ' n '

B : matrice des variables d'entrée de dimension ' $n \times r$ '

Δu : vecteur des variables d'entrée de dimension ' r '

C : matrice des variables de sortie de dimension ' $m \times n$ '

Δy : vecteur des variables de sortie de dimension ' m '

D : facteur de dépendance des variables d'entrée par rapport aux variables de sortie, matrice de dimension ' $m \times r$ '

Le nombre des variables d'état, n , définit : la longueur du vecteur d'état Δx , le nombre de lignes et de colonnes de la matrice A, le nombre de lignes de la matrice B et le nombre des colonnes de la matrice C.

Le nombre des variables d'entrée choisies, r , définit : la longueur du vecteur d'entrée Δu et le nombre de colonnes des matrices B et D.

Le nombre des variables de sortie choisies, m , définit : la longueur du vecteur de sortie Δy et le nombre de lignes des matrices C et D.

La matrice A est appelée matrice d'état ou matrice d'évolution, car elle contient la description du comportement dynamique du système. Elle rend compte aussi de l'évolution du système en régime libre, c'est-à-dire à commande nulle.

La matrice B est appelée matrice d'entrée ou matrice de commande. Elle rend compte du comportement dynamique du système en réponse à une commande.

La matrice C est appelée matrice de sortie ou matrice d'observation. Elle permet de relier la sortie à l'état.

La matrice D est appelée matrice d'action directe qui relie directement la commande à la sortie. Elle est en général nulle dans les systèmes physiques : le système est dit « strictement propre ».

Nous obtenons ainsi la représentation d'état linéarisée du système. Il est alors possible de calculer les valeurs propres de la matrice d'état et d'utiliser les propriétés liées à celle-ci [INT], [PAS98], [SNY99], [MEK02].

II.4 - Analyse du modèle linéaire :

L'analyse des valeurs propres et l'analyse modale du système de puissance linéarisé sont des outils « puissants » pour étudier les propriétés dynamiques du système. L'évaluation précise de la fréquence des oscillations électromécaniques et de l'amortissement de ces oscillations peut être déterminée à partir de l'analyse des valeurs propres, l'analyse modale permet quant à elle d'obtenir des informations supplémentaires plus approfondies telles que la nature des modes (dominants ou non, ...) [SIG05].

II.4.1 - Analyse des valeurs propres :

II.4.1.1 - Valeurs propres de la matrice d'état A :

Après avoir établi le modèle d'état linéaire A et ses valeurs propres (méthode indirecte de Liapounov), en utilisant la transformation de Laplace et depuis le système (24), il résulte les équations suivantes dans le domaine fréquentiel complexe :

$$\begin{cases} s \cdot \Delta x(s) - \Delta x(0) = A \cdot \Delta x(s) + B \cdot \Delta u(s) \\ \Delta y(s) = C \cdot \Delta x(s) + D \cdot \Delta u(s) \end{cases} \quad (25)$$

Si $\Delta x(0) = 0$, ce système peut se représenter par le schéma bloc ci-dessous :

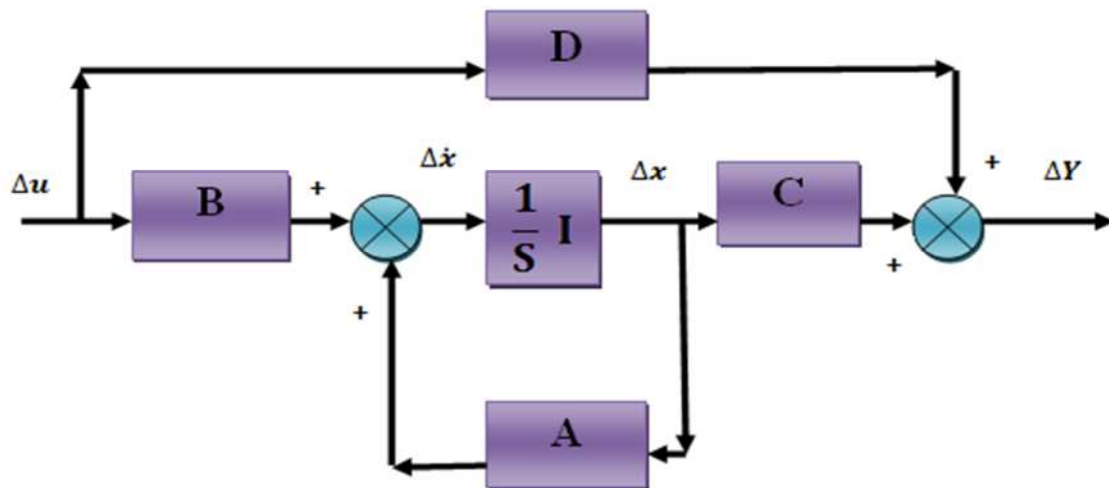


Figure 10 : Schéma bloc du système (25) [INT], [ALK08], [ORT13], [CHE], [PAS98]

Depuis le système (25), on obtient la solution explicite de cet ensemble d'équations qui est donnée comme suit :

$$\Delta x(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot [\Delta x(0) + B \cdot \Delta u(s)] \quad (26)$$

Chapitre II : Théorie des petits signaux

Avec : I : matrice identité d'ordre n

$$\Delta x(s) = \frac{\text{adj}(s.I-A)}{\det(s.I-A)} [\Delta x(0) + B. \Delta u(s)] \quad (27)$$

De même, on obtient :

$$\Delta y(s) = C. \frac{\text{adj}(s.I-A)}{\det(s.I-A)} [\Delta x(0) + B. \Delta u(s)] + D. \Delta u(s) \quad (28)$$

Les transformées de Laplace, Δx et Δy , ont deux composantes : l'une dépendant des conditions initiales et l'autre des variables d'entrée.

Les pôles de $\Delta x(s)$ et $\Delta y(s)$ sont les racines de l'équation :

$$\det(s.I - A) = 0 \quad (29)$$

Les valeurs de 's' satisfaisant cette équation sont les valeurs propres de la matrice A.

Les valeurs λ sont appelées les valeurs propres du système. Elles définissent le mouvement du système lié à une fréquence propre.

Une valeur propre est caractérisée par une fréquence d'oscillation et un amortissement. Elle est représentée généralement par le nombre complexe suivant [PAS98] :

$$\lambda = \sigma \pm j\omega \quad (30)$$

σ : partie réelle de la valeur propre (abscisse de convergence)

ω : pulsation propre d'oscillation (rad/s)

Cette relation est équivalente à la relation définissant les valeurs propres d'un système du deuxième ordre qui est donnée comme suit [MEK02] :

$$\lambda = -\omega_n \zeta \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (31)$$

ω_n : pulsation naturelle d'oscillation (rad/s)

ζ : facteur d'amortissement d'oscillation

Une matrice d'état de dimension 'n×n' est associée à n valeurs propres. L'analyse des valeurs propres permet d'obtenir tout d'abord la fréquence d'oscillation et le facteur d'amortissement.

La fréquence naturelle d'oscillation est donnée par la relation suivante :

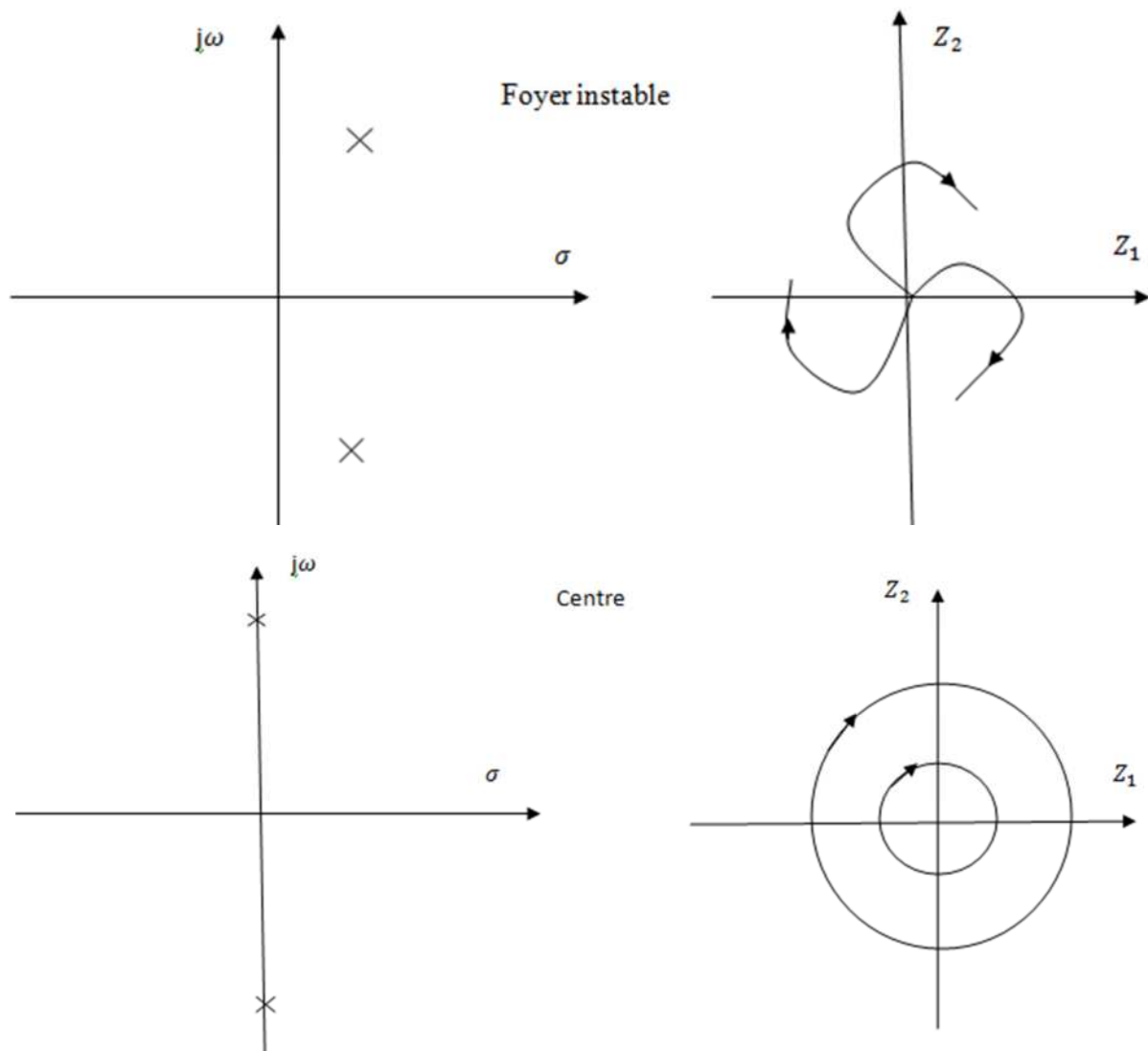
$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (32)$$

Chapitre II : Théorie des petits signaux

Le facteur d'amortissement détermine la décroissance de l'amplitude d'oscillation. Il est donné par la relation suivante :

$$\zeta = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} \quad (33)$$

Dans un modèle linéaire, la solution des équations linéaires du système décrit l'évolution exponentielle au cours du temps de la perturbation. Ainsi, cette solution peut être représentée par une combinaison de fonctions d'exponentielles $e^{\lambda_i t}$ représentant les caractéristiques temporelles associées à chaque valeur propre λ_i . Les constantes de temps $\tau = \frac{1}{|\sigma_i|}$ caractérisent de façon générale l'amortissement du système.



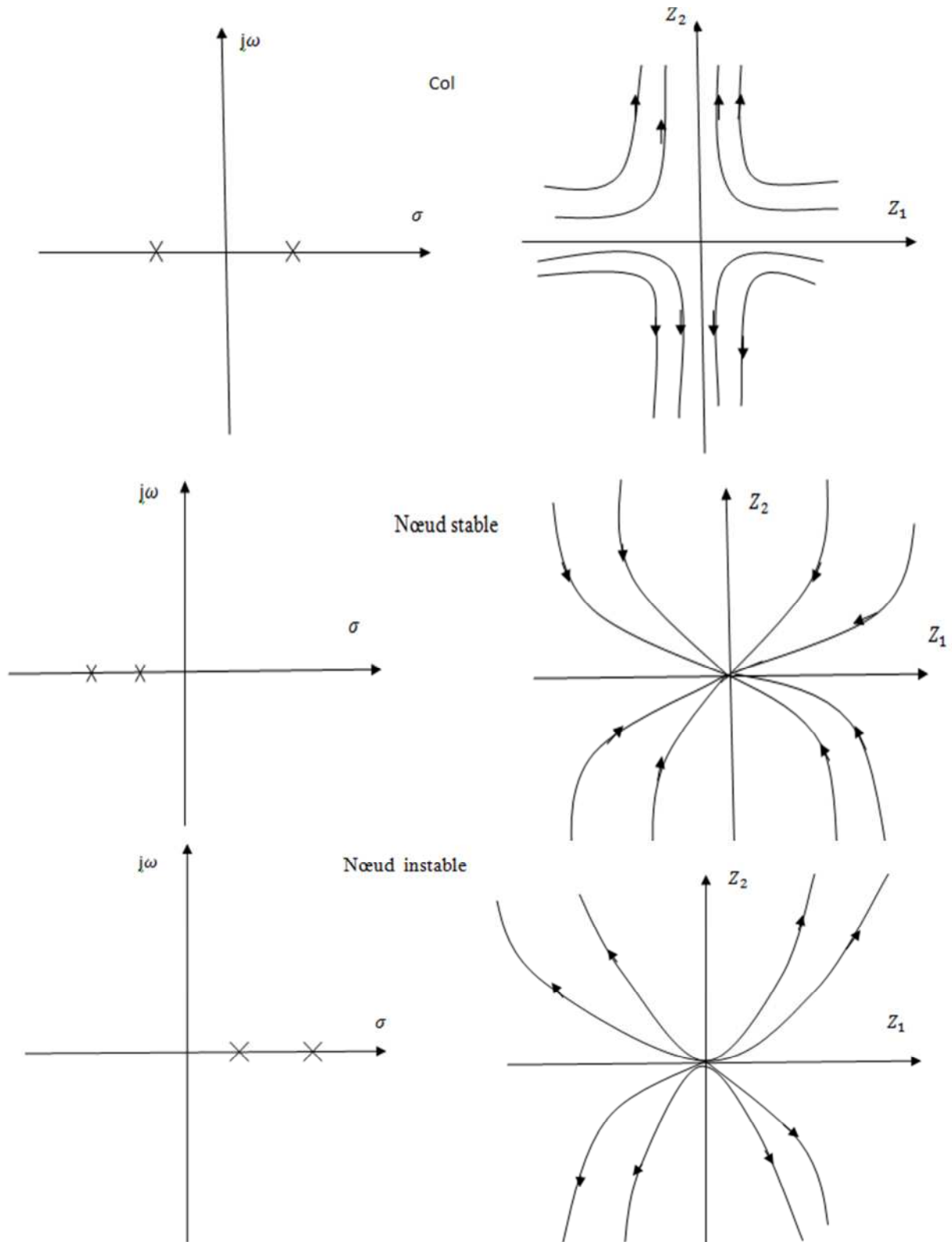


Figure 11 : Représentation des points singuliers correspondant aux **six** combinaisons possibles de valeur propre [SIG05]

Chapitre II : Théorie des petits signaux

L'interprétation physique des signaux correspondants aux fonctions dont la forme est simple est illustrée par la Figure 12 qui représente dans le plan complexe l'allure des variations de tels signaux en fonction du temps, suivant la position du point représentatif de λ_i .

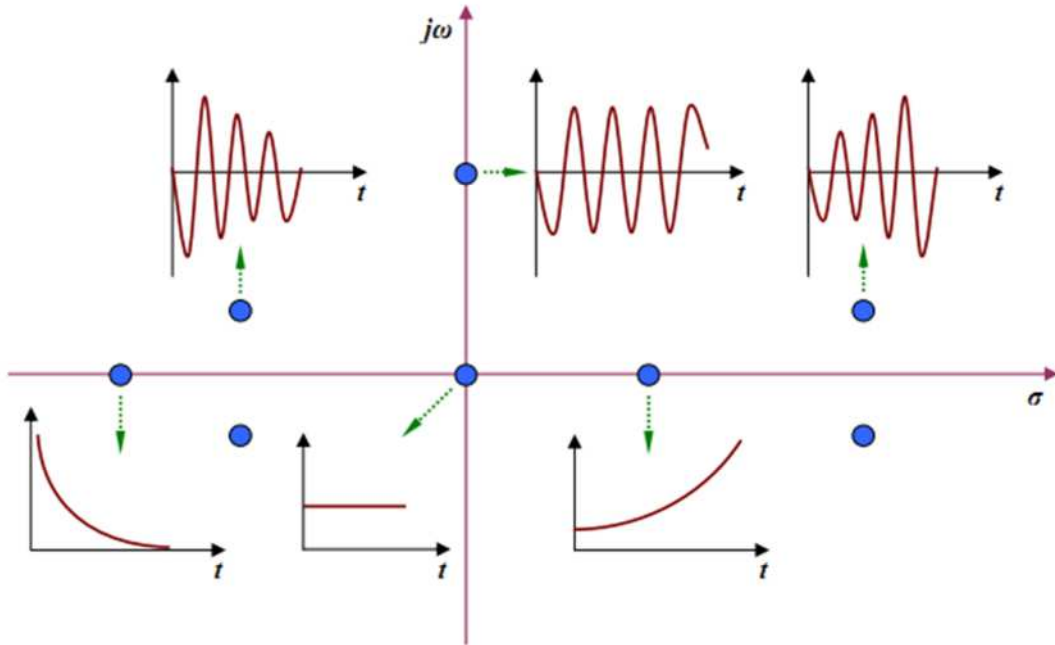


Figure 12 : Exemple de représentation des valeurs propres dans le plan complexe et analyse par lieu des pôles de la stabilité d'un système [ALK08]

Dans l'exemple ci-dessus, une valeur propre réelle correspond à un mode non-oscillatoire.

Si la valeur propre réelle est négative, les exponentielles apparaissant dans la réponse temporelle sont des fonctions décroissantes du temps. La rapidité de décroissance est liée à la constante de temps d'amortissement. Plus la valeur de l'abscisse de convergence σ est grande, plus la constante de temps est faible et l'amortissement rapide.

Par contre, si la valeur propre réelle est positive, le mode présente une instabilité aperiodique.

Une valeur propre complexe, en paire conjuguée, correspond à un mode oscillatoire.

Si la partie réelle de la valeur propre est négative, le mode oscillatoire est amorti : il est donc stable. Si la partie réelle de la valeur propre est positive, le mode oscillatoire est divergent ; il est donc instable.

Cette analyse révèle qu'il est possible de déterminer la nature (stable ou instable) d'un système linéaire à partir d'une « inspection » de la position des pôles de la fonction de transfert du système dans le plan complexe. En outre, la connaissance de la position des pôles peut fournir des renseignements sur le comportement du système lors de régimes transitoires typiques tels que la réponse à une impulsion, à un échelon,

Chapitre II : Théorie des petits signaux

Des modes instables ou mal amortis peuvent être dominants : leurs contributions déterminent alors l'allure de la réponse temporelle globale du système.

Dans les réseaux électriques, il est évidemment nécessaire que tous les modes du système soient stables, c'est-à-dire placés dans la partie gauche du plan complexe.

Il existe une solution non-triviale (autre que $\Phi = 0$) pour les valeurs propres :

$$A \cdot \Phi = \lambda \cdot \Phi \quad (34)$$

A : matrice 'n×n'

Φ : vecteur 'n×1'

L'équation (34) est l'équation caractéristique de la matrice A.

En la factorisant par Φ , on obtient :

$$(A - \lambda \cdot I) \Phi = 0 \quad (35)$$

Pour une solution non-triviale, voici le théorème de Caley-Hamilton [CHE] :

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0 \quad (36)$$

Les valeurs propres peuvent être réelles ou complexes. Si les coefficients de la matrice A sont réels (cas des systèmes physiques et donc des grands réseaux électriques), les valeurs complexes sont conjuguées. Une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres.

II.4.1.2 - Vecteurs propres associés à une valeur propre :

Le modèle linéaire d'un système de puissance peut être représenté par un modèle d'état décrit par le système (24). Pour chaque valeur propre λ_i , le vecteur Φ_i satisfaisant l'équation (34) est le vecteur propre à droite de A associé à la valeur propre λ_i . Ces vecteurs peuvent être calculés par les équations suivantes :

$$A \cdot \Phi_i = \lambda_i \cdot \Phi_i \quad i = 1, \dots, n \quad (37)$$

λ_i : i^{ème} valeur propre - toutes les valeurs propres étant supposées distinctes

Φ_i : i^{ème} vecteur propre à droite de A associé à λ_i

De même, le vecteur Ψ_i satisfait l'équation :

$$\Psi_i \cdot A = \lambda_i \cdot \Psi_i \quad i = 1, \dots, n \quad (38)$$

Ψ_i : i^{ème} vecteur propre à gauche de A associé à λ_i

Chapitre II : Théorie des petits signaux

Pour une matrice d'état de dimension ' $n \times n$ ' :

Le vecteur propre à droite est un vecteur colonne de dimension ' $n \times 1$ ' :

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Phi_{1i} \\ \dots \\ \Phi_{ni} \end{bmatrix}$$

Le vecteur propre à gauche est un vecteur ligne de dimension ' $1 \times n$ ' :

$$\Psi_i = |\Psi_{i1} \quad \dots \quad \Psi_{in}|$$

Les vecteurs propres à gauche et à droite correspondant aux différentes valeurs propres sont orthogonaux. La relation caractéristique entre les vecteurs propres à gauche et à droite est déterminée par leur produit matriciel.

Le produit matriciel entre deux vecteurs propres, à gauche et à droite, associés à deux valeurs propres différentes vaut zéro :

$$\Psi_j \cdot \Phi_i = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (39)$$

Par contre, lorsque les deux vecteurs propres, à gauche et à droite, correspondent à la même valeur propre, leur produit matriciel normalisé vaut un :

$$\Psi_j \cdot \Phi_i = 1 \quad \text{si } i = j \quad (40)$$

II.4.1.3 - Matrices modales :

L'ensemble des vecteurs propres, à droite, du système forme la matrice modale à droite, donné :

$$\Phi = |\Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_n| : \text{matrice } 'n \times n' \quad (41)$$

Le vecteur propre à droite Φ_i montre l'influence relative de chaque variable d'état dans un mode excité donné. Ainsi, pour un vecteur propre à droite complexe, l'amplitude relative des éléments du vecteur indique le degré de participation des variables d'état au mode considéré. Quant à la phase des éléments du vecteur, elle donne le déphasage des variables d'état dans le mode donné [ALK08], [PAS98], [SNY99].

De même, la matrice modale à gauche est formée de l'ensemble des vecteurs propres à gauche :

$$\Psi = |\Psi_1^T \quad \dots \quad \Psi_n^T|^T : \text{matrice } 'n \times n' \quad (42)$$

Chapitre II : Théorie des petits signaux

En ce qui concerne le vecteur propre à gauche Ψ_i , il détermine l'ensemble des variables d'état participant relativement à la composition du $i^{\text{ème}}$ mode. Il indique également la contribution de chaque variable d'état dans l'évolution du mode considéré.

Dans le plan complexe, le diagramme représentant les composantes d'un vecteur propre à droite Φ_i relatives aux différentes variables d'état est appelé le « mode shape ».

Dans un système de puissance multi-machines, le mode shape indique la façon dont les générateurs oscillent les uns par rapport aux autres. Les deux cas limites étant : les oscillations cohérentes et les oscillations en opposition de phase. Ainsi, les modes shapes du système peuvent identifier les groupes cohérents des générateurs. En outre, le mode shape peut confirmer le type de chaque mode.

Posons [ORT13], [PAS98], [SNY99] :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Λ : matrice diagonale de dimension 'n×n' dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Il est alors possible d'écrire :

$$A \cdot \Phi = \Phi \cdot \Lambda \quad (43)$$

$$\text{Or : } \Psi \cdot \Phi = I$$

$$\text{Soit : } \Psi = \Phi^{-1} \quad (44)$$

La matrice carrée Φ est bien inversible : donc Φ^{-1} existe.

$$\Phi^{-1} \cdot A \cdot \Phi = \Lambda \quad (45)$$

La réponse libre est donnée par :

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial t} = A \cdot \Delta x \quad (46)$$

Soit la variable z telle que :

$$\Delta x = \Phi \cdot z \quad (47)$$

Depuis les équations (46) et (47), on obtient :

Chapitre II : Théorie des petits signaux

$$\Phi \frac{\partial z}{\partial t} = A. \Phi. z \quad (48)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \Phi^{-1}. A. \Phi. z \quad (49)$$

De l'équation (45), on en déduit :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \Lambda. z \quad (50)$$

Cette dernière équation a l'avantage sur l'équation (45) de voir une matrice Λ diagonale.

Elle représente n équations du premier ordre non-couplées :

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \lambda_i. z_i \quad i = 1, \dots, n \quad (51)$$

Ces équations ont pour solution avec $z_i(0)$, valeur initiale de z_i :

$$z_i(t) = z_i(0). e^{\lambda_i t} \quad (52)$$

$$\text{Or : } \Delta x(t) = \Phi. z(t)$$

$$\text{Soit : } \Delta x(t) = [\Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_n]. \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \dots \\ z_n(t) \end{bmatrix} \quad (53)$$

Donc, depuis l'équation (52) :

$$\Delta x(t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i . z_i(0). e^{\lambda_i t} \quad (54)$$

D'où :

$$z(t) = \Phi^{-1}. \Delta x(t) = \Psi. \Delta x(t)$$

Et donc :

$$z_i(t) = \Psi_i. \Delta x(t) \quad (55)$$

Pour $t = 0$:

$$z_i(0) = \Psi_i. \Delta x(0)$$

À partir de l'équation (54) :

$$\Delta x(t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i . C_i. e^{\lambda_i t} \quad (56)$$

Chapitre II : Théorie des petits signaux

C_i : produit scalaire $\Psi_i \cdot \Delta x(0)$

La réponse temporelle de la $i^{\text{ème}}$ variable d'état est donnée par :

$$\Delta x_i(t) = \Phi_{i1} \cdot C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \dots + \Phi_{in} \cdot C_n \cdot e^{\lambda_n t} \quad (57)$$

L'équation précédente donne l'expression de la réponse libre dans le temps suivant les valeurs propres et les vecteurs propres. Ainsi, la réponse libre est donnée par une combinaison linéaire de n modes dynamiques correspondant aux n valeurs propres de la matrice d'état. Le produit scalaire $C_i = \Psi_i \cdot \Delta x(0)$ représente l'amplitude d'excitation du $i^{\text{ème}}$ mode. La caractéristique temporelle d'un mode correspondant à une valeur propre λ_i est donnée par $e^{\lambda_i t}$.

- ❖ Une valeur propre réelle négative correspond à un mode non-oscillatoire. Une valeur propre réelle positive représente une instabilité aperiodique. Les valeurs de C et les vecteurs propres associés aux valeurs propres réelles sont aussi réels.
- ❖ Les valeurs propres complexes viennent par paires, et chaque paire correspond à un mode d'oscillation. Les valeurs de C et des vecteurs propres sont telles que $x(t)$ soit réelle à tout instant t .

Par exemple : $(a + jb) \cdot e^{(\sigma - j\omega)t} + (a - jb) \cdot e^{(\sigma + j\omega)t}$ a la forme $e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t + \theta)$

La partie réelle de la valeur propre donne l'amortissement.

La partie imaginaire donne la pulsation d'oscillation.

Une partie réelle négative représente une oscillation amortie, alors qu'une partie réelle positive représente une oscillation d'amplitude croissante et donc une instabilité.

II.4.2 - Analyse modale :

Comme nous l'avons vu, les valeurs propres du système déterminent les caractéristiques dynamiques du système (fréquences et facteurs d'amortissement), ainsi que l'état de stabilité du système.

L'analyse des vecteurs propres, qui découle de l'analyse des valeurs propres, peut aussi fournir d'autres informations importantes.

Lorsqu'une instabilité ou un mode mal amorti prend naissance dans un système de puissance, il est très intéressant d'examiner les points suivants :

- les variables d'état liées aux modes dominants
- les éléments du système permettant d'agir efficacement pour le stabiliser

Chapitre II : Théorie des petits signaux

- les groupes cohérents de générateurs présentant des oscillations couplées
- les signaux les plus efficaces à appliquer aux contrôleurs
- les paramètres des contrôleurs réalisant un « meilleur » amortissement.

Nous voyons donc ici que les valeurs propres de la matrice d'état nous permettent d'identifier les différents modes d'oscillation présents dans le réseau [PAS98], [SNY99], [MEK02].

II.5 - Commandabilité et observabilité :

Le système a été représenté précédemment par l'équation (24) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta x_i}{\partial t} = A. \Delta x + B. \Delta u \\ \Delta y = C. \Delta x + D. \Delta u \end{cases}$$

En utilisant la variable z définie par l'équation (47), on obtient :

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial z}{\partial t} = A. \Phi. z + B. \Delta u \\ \Delta y = C. \Phi. z + D. \Delta u \end{cases} \quad (58)$$

Ces équations peuvent être réécrites sous une forme plus classique :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = A. z + B_m. \Delta u \\ \Delta y = C_m. z + D. \Delta u \end{cases} \quad (59)$$

Avec les matrices B_m et C_m définies par $B_m = \Phi^{-1}. B$ et $C_m = C. \Phi$.

En examinant l'équation (59), si la $i^{\text{ième}}$ ligne de la matrice B_m est composée de valeurs nulles, alors les entrées n'ont aucune action sur le $i^{\text{ième}}$ mode. Dans un tel cas, le $i^{\text{ième}}$ mode est dit incommandable.

Toujours depuis l'équation (59), on peut observer que la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice C_m montre si la variable z_i intervient sur les variables de sortie. Si les valeurs de ce vecteur colonne sont nulles, le mode correspondant est inobservable.

La matrice B_m , de dimension ' $n \times r$ ', est appelée matrice de commandabilité. L'élément $B_m(i,j)$ de la matrice B_m est le facteur de commandabilité du mode λ_i par le signal u_j .

La matrice C_m , de dimension ' $m \times n$ ', est appelée matrice d'observabilité. L'élément $C_m(j,i)$ de la matrice C_m est le facteur d'observabilité du mode λ_i par le signal y_j .

II.6 - Forme des modes et sensibilité :

On a vu précédemment, équations (53) et (55), que la réponse du système est donnée par :

Chapitre II : Théorie des petits signaux

$$\Delta x(t) = \Phi \cdot z(t) = [\Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_n] \cdot z(t) \quad (60)$$

$$Z(t) = \Psi \cdot \Delta x(t) = [\Psi_1^T \quad \dots \quad \Psi_n^T]^T \cdot \Delta x(t) \quad (61)$$

Les variables $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ sont les variables d'état d'origine représentant les performances dynamiques du système. Les variables z_1, \dots, z_n sont les variables d'état transformées telles que chaque variable représente une seule et unique valeur propre.

L'équation (60) montre que le vecteur propre de droite donne la forme du mode, c'est-à-dire l'activité relative des variables d'état lorsqu'un mode est excité. Ainsi, le degré d'activité de la variable d'état x_k pour le $i^{\text{ème}}$ mode est fourni par l'élément Φ_{ki} du vecteur propre à droite Φ_i .

Les normes des éléments de Φ_i donnent l'étendue de l'activité des 'n' variables d'état pour le $i^{\text{ème}}$ mode, et les angles de ces éléments donnent les déplacements de phase des variables d'état par rapport au mode.

L'équation (61) montre que le vecteur propre à gauche Ψ_i donne quelle combinaison des variables d'état d'origine active le $i^{\text{ème}}$ mode uniquement.

Ainsi, le $k^{\text{ème}}$ élément du vecteur propre à droite Φ_i quantifie l'activité de la variable x_k pour le $i^{\text{ème}}$ mode, alors que le $k^{\text{ème}}$ élément du vecteur propre à gauche Ψ_i pèse la contribution de cette activité sur le $i^{\text{ème}}$ mode.

Maintenant, il s'agit d'examiner la sensibilité des valeurs propres aux éléments de la matrice d'état.

Pour cela, il est possible d'utiliser l'équation (37) :

$$A \cdot \Phi_i = \lambda_i \cdot \Phi_i \quad i = 1, \dots, n$$

Soit a_{kj} élément de la matrice A se situant à la $k^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne. En différenciant l'expression précédente :

$$\frac{\partial A}{\partial a_{kj}} \cdot \Phi_i + A \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_{kj}} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kj}} \cdot \Phi_i + \lambda_i \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_{kj}} \quad (62)$$

En multipliant les deux termes de l'égalité par Ψ_i , et en rappelant que $\Psi_i \cdot \Phi_i = 1$ et que $\Psi_i \cdot (A - \lambda_i \cdot I) = 0$:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kj}} = \Psi_{ik} \cdot \Phi_{ji} \quad (63)$$

Ainsi, la sensibilité de la valeur propre λ_i à l'élément a_{kj} de la matrice d'état est égale au produit de l'élément du vecteur propre de gauche Ψ_{ik} par l'élément du vecteur propre de droite Φ_{ji} .

Les concepts de commandabilité, d'observabilité et de sensibilité peuvent être appliqués par exemple afin de déterminer l'influence qu'aurait l'insertion dans le réseau d'un dispositif FACTS **ce** sur chaque mode d'oscillation.

II.7 - Facteurs de participation :

L'approche standard, habituellement employée pour évaluer la participation d'une variable d'état x_k dans le $i^{\text{ième}}$ mode, étudie les éléments correspondants du vecteur propre à droite Φ_i . Bien que cette méthode soit simple à employer, elle présente un défaut **très sérieux**, à savoir les valeurs numériques des éléments des vecteurs propres à droite dépendent des unités des variables d'état correspondantes. Il est donc difficile de comparer les valeurs obtenues pour des variables d'état différentes. Par conséquent, cette méthode est seulement exploitable pour des variables d'état ayant les mêmes unités et jouant les mêmes rôles.

Rappelons qu'un vecteur propre à droite Φ_i mesure l'influence relative de chaque variable d'état x_k dans un $i^{\text{ième}}$ mode et qu'un vecteur propre à gauche Ψ_i indique la contribution de l'activité de x_k dans le $i^{\text{ième}}$ mode. Par conséquent, une "quantité" caractéristique d'un mode donné peut être obtenue par produit, élément par élément, d'un vecteur propre à droite et d'un vecteur propre à gauche correspondant. Cette quantité, appelée le facteur de participation, est calculée par la relation suivante :

$$P_{ki} = \Phi_{ki} \cdot \Psi_{ik} \quad (64)$$

Il permet de mesurer la participation relative de la $k^{\text{ième}}$ variable d'état au $i^{\text{ième}}$ mode d'oscillation, et vice-versa.

Alors que Φ_{ki} mesure l'activité de x_k dans le $i^{\text{ième}}$ mode d'oscillation et que Ψ_{ik} pèse la contribution de son activité sur ce mode, le facteur de participation mesure la participation "nette" ou effective.

Le produit des éléments des vecteurs propres de gauche et de droite rend le facteur de participation sans dimension, c'est-à-dire indépendant du choix des unités.

Chapitre II : Théorie des petits signaux

Ainsi, le facteur de participation peut fournir des informations fines sur le problème : il représente une mesure relative de la participation de la $k^{\text{ième}}$ variable d'état dans le $i^{\text{ième}}$ mode, et vice-versa.

Etant donné que les matrices modales, à droite et à gauche, Φ et Ψ sont inverses, le facteur de participation est donc une grandeur sans dimension. Ceci veut dire que le facteur de participation, au contraire du vecteur propre à droite, est indépendant des unités des variables d'état.

Depuis l'équation (63), il apparait que le facteur de participation P_{ki} correspond à la sensibilité de la valeur propre λ_i à l'élément diagonal a_{kk} de la matrice d'état A :

$$P_{ki} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kk}} \quad (65)$$

Les facteurs de participation fournissent donc la participation relative des variables d'état sur les différents modes. Et par conséquent, de connaître quelles sont les variables d'état les plus impliquées dans chaque mode d'oscillation.

Ils pourront donc être utilisés pour la caractérisation des différents modes d'oscillation :

$$P = |P_1 \quad \dots \quad P_n| \text{ avec } = \begin{vmatrix} P_{1i} \\ \dots \\ P_{ni} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi_{1i} \cdot \Psi_{i1} \\ \dots \\ \Phi_{ni} \cdot \Psi_{in} \end{vmatrix} \quad (66)$$

Φ_{ki} : élément de la $k^{\text{ième}}$ ligne et de la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice modale Φ

Ψ_{ik} : élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne de la matrice modale Ψ

Dans la matrice de participation P , comme le montre l'équation (66), la $j^{\text{ième}}$ colonne indique comment un $j^{\text{ième}}$ mode participe relativement à l'évolution des variables d'état du système, tandis que la $i^{\text{ième}}$ ligne indique comment les différents modes participent relativement à l'évolution de la $i^{\text{ième}}$ variable d'état.

$$P_i = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & \dots & p_{1m} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & \dots & p_{nm} \end{bmatrix} \begin{matrix} X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{matrix} \quad (67)$$

$\lambda_1 \quad \dots \quad \dots \quad \lambda_m$

Une autre propriété intéressante du facteur de participation p_{ij} s'interprète souvent comme la sensibilité du $j^{\text{ième}}$ mode aux changements des termes diagonaux a_{ji} de la matrice d'état A du système.

Chapitre II : Théorie des petits signaux

Pour les études de stabilité aux petites perturbations, l'influence d'une source d'amortissement appliqué à un générateur peut être déterminée par les facteurs de participation, comme suit :

- Si, pour n'importe quel mode, le facteur de participation correspondant à la vitesse du générateur est nul, l'introduction d'une source d'amortissement au générateur n'aura aucun effet sur le mode.
- Si le facteur de participation est réel positif, l'ajout d'amortissement à ce générateur augmentera l'amortissement du mode.
- En revanche, si le facteur de participation est réel négatif, l'amortissement ajouté au générateur réduira l'amortissement du mode.

Les facteurs de participation, par leur propriété de pouvoir déterminer les variables d'état responsables des modes indésirables, peuvent être employés pour trouver les points les plus efficaces pour installer des contrôleurs de stabilisation.

La matrice de participation peut montrer aisément les variables d'état les plus impliquées dans le mode indésirable : les termes de la matrice P de plus grande amplitude de la colonne relative au mode considéré indiqueront la participation en question.

II.8 - Résidus :

L'efficacité du signal d'entrée d'un contrôleur de stabilisation ou l'emplacement optimal de ce dernier dans un système de puissance multimachines peuvent être identifiés par la méthode des résidus. Cette méthode est dérivée de la relation entre la fonction de transfert et le modèle d'état.

Le modèle d'état d'un système représente à la fois les propriétés d'entrée/sortie du système et le comportement interne du système. À l'inverse, la fonction de transfert du système ne concerne que la relation entrée-sortie du système.

Pour déterminer la relation entre la fonction de transfert et le modèle d'état, nous prenons les équations (24) pour un système monovariante (Single Input - Single Output system), et nous considérons la fonction de transfert entre les variables y et u .

Supposons que $D = 0$, les équations d'état s'écrivent comme suit :

$$\Delta \dot{x} = A. \Delta x + B. \Delta u \quad (68)$$

$$\Delta y = C. \Delta x \quad (69)$$

La fonction de transfert $\frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)}$ s'écrit de la façon suivante :

Chapitre II : Théorie des petits signaux

$$G(s) = \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B \quad (70)$$

Pour un système en boucle ouverte, la fonction $G(s)$ peut être décomposée en éléments simples comme suit :

$$G(s) = \frac{R_1}{(s-s_1)} + \frac{R_2}{(s-s_2)} + \dots + \frac{R_n}{(s-s_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{(s-s_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{(s-\lambda_i)} \quad (71)$$

Où :

s : opérateur de Laplace

s_1, s_2, \dots, s_n : pôles de $G(s)$ - les valeurs propres du système

R_i : résidu de $G(s)$ au pôle s_i

Le résidu peut s'exprimer par la relation suivante :

$$R_i = C\Phi_i\Psi_iB \quad (72)$$

D'après cette relation, nous remarquons que le résidu R_i pour un mode λ_i donné mesure la sensibilité de ce mode à un signal de contre-réaction sortie-entrée. Ainsi, les résidus peuvent déterminer les modes les plus affectés par un signal de retour.

La Figure 13 montre un système $G(s)$ équipé d'un contrôleur $H(s)$ en contre-réaction de fonction de transfert.

Lorsqu'on ferme la boucle par un régulateur $H(s)$, les valeurs propres du système initial $G(s)$ vont se déplacer. Le déplacement de ces valeurs propres peut être calculé par l'équation suivante :

$$\Delta\lambda_i = R_i H(\lambda_i) \quad (73)$$

Cette équation montre que le déplacement des valeurs propres, créé par le contrôleur, est proportionnel aux amplitudes des résidus correspondants.

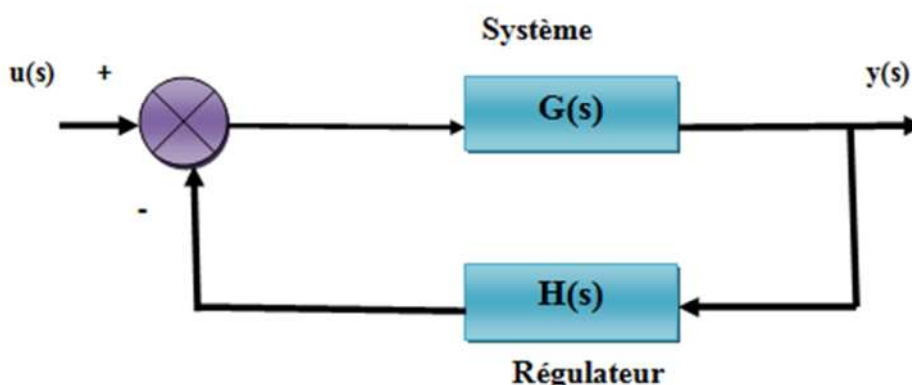


Figure 13 : L'ensemble système-contrôleur en boucle fermée

II.9 - Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté la modélisation du système de puissance pour les études de la stabilité aux petites perturbations. Nous avons aussi présenté la linéarisation du système avec l'analyse modale du modèle linéaire du système.

Les points d'étude principaux de ce chapitre sont présentés ci-dessous :

- Le système de puissance est souvent soumis à des petites perturbations qui se produisent continuellement sous l'influence de faibles variations de charges et des sources. Ces perturbations sont considérées comme suffisamment petites pour permettre de linéariser les équations du modèle général du système. La représentation d'état du système est ensuite déduite.
- La stabilité du système est uniquement définie par le lieu des pôles, dans le plan complexe, de sa fonction de transfert.
- L'analyse modale du système donne des informations importantes concernant les caractéristiques des modes d'oscillations, les variables d'état participant à l'évolution de ces modes,

La théorie des petits signaux nous fournit donc des outils d'étude des phénomènes d'interaction de régulation. Les valeurs propres de la matrice d'état, provenant de la représentation linéarisée du système, fournissent un outil d'étude de ces oscillations en termes de fréquence et d'amortissement. De plus, l'utilisation de propriétés liées à ces valeurs propres permet, entre autres, de mesurer la participation des différentes variables d'état à chaque mode d'oscillation.

CHAPITRE III:

Application de la

théorie à un exemple

mathématique

III.1 - Introduction :

Afin de mettre en évidence la méthode de stabilité aux petites variations, nous avons proposé dans le chapitre III une courte étude d'un modèle mathématique donné par les équations différentielles linéaires suivantes.

III.2 - Exemple de calcul :

On considère le système de trois différentielles linéaires d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x_1}{dt} = 0 \Delta x_1 + 1 \Delta x_2 + 0 \Delta x_3 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} = 0 \Delta x_1 + 0 \Delta x_2 + 1 \Delta x_3 \\ \frac{d\Delta x_3}{dt} = -6 \Delta x_1 - 11 \Delta x_2 - 6 \Delta x_3 \end{cases} \quad (74)$$

$$[\Delta \dot{x}] = [A] \cdot [\Delta x]$$

$$\text{Avec : } [A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad (75)$$

On cherche la solution $\Delta x(t)$ de ce système.

Il faut d'abord déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$$

$$(A - \lambda \cdot I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & -11 & -6 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & -11 & -6 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (-\lambda)[(-\lambda)(-6 - \lambda) - (-11) * 1] + (-1) * 1[0 * (-6 - \lambda) - (-6) * 1]$$

$$P_A(\lambda) = (-\lambda)[6\lambda + \lambda^2 + 11] - 1 [0 + 6]$$

$$P_A(\lambda) = -6\lambda^2 - \lambda^3 - 11\lambda - 6$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

Ceci est le polynôme caractéristique de A. Il permet de déterminer les valeurs propres de A.

Chapitre III : Application de la théorie à un exemple mathématique

En effet, on a l'équivalence selon laquelle : λ appartient au spectre de A, ensemble des valeurs propres de A, si et seulement si le polynôme caractéristique de A est nul.

$$\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$$

$$\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

On en déduit les trois valeurs propres (racines) de la matrice A :

$$sp(A) = \{ \lambda_1 = -1 \ ; \ \lambda_2 = -2 \ ; \ \lambda_3 = -3 \ }$$

On obtient alors la matrice diagonale des valeurs propres qui a la forme suivante :

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (76)$$

➤ Les matrices des vecteurs propres :

❖ Calcul des vecteurs propres de droite $[U_1]$, $[U_2]$, $[U_3]$:

- Calcul de $[U_1]$:

Les composantes du vecteur propre de droite associé à la valeur propre λ_1 sont obtenues à partir de la relation :

$$[A] \cdot [U_1] = \lambda_1 \cdot [U_1]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix}$$

$$\text{Or } \lambda_1 = -1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix}$$

Il résulte les relations :

$$u_{11} = u_{11}$$

$$u_{21} = -u_{11}$$

$$u_{31} = -u_{21} = -(-u_{11}) = u_{11}$$

Chapitre III : Application de la théorie à un exemple mathématique

On choisit comme base 1 la composante ayant la plus grande valeur absolue. Ici, on peut indifféremment choisir l'une des trois, car leurs valeurs absolues sont égales à 1. On obtient alors le vecteur propre de droite $[U_1]$:

$$[U_1] = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On calcule de façon similaire les composantes des deux autres vecteurs propres de droite :

- Calcul de $[U_2]$:

$$[A] \cdot [U_2] = \lambda_2 \cdot [U_2]$$

$$\text{Or } \lambda_2 = -2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{bmatrix}$$

Il résulte les relations :

$$u_{12} = u_{12}$$

$$u_{22} = -2 u_{12}$$

$$u_{32} = -2 u_{22} = -2 * (-2 u_{12}) = 4 u_{12}$$

On choisit comme base 1 la composante ayant la plus grande valeur absolue. Ici, on choisit donc u_{32} comme base 1 ($4 > 2 > 1$). On obtient alors le vecteur propre de droite $[U_2]$:

$$[U_2] = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Calcul de $[U_3]$:

$$[A] \cdot [U_3] = \lambda_3 \cdot [U_3]$$

$$\text{Or } \lambda_3 = -3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = -3 \cdot \begin{bmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix}$$

Chapitre III : Application de la théorie à un exemple mathématique

Il résulte les relations :

$$u_{13} = u_{13}$$

$$u_{23} = -3 u_{13}$$

$$u_{33} = -3 u_{23} = -3 * (-3 u_{13}) = 9 u_{13}$$

On choisit comme base 1 la composante ayant la plus grande valeur absolue. Ici, on choisit donc u_{33} comme base 1 ($9 > 3 > 1$). On obtient alors le vecteur propre de droite $[U_3]$:

$$[U_3] = \begin{bmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donc, la **matrice des vecteurs propres de droite** est :

$$[U] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/9 \\ -1 & -1/2 & -1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

❖ Calcul des vecteurs propres de gauche $[V_1], [V_2], [V_3]$:

- Calcul de $[V_1]$:

Les composantes du vecteur propre de gauche associé à la valeur propre λ_1 sont obtenues à partir de la relation :

$$[A]^t[V_1] = \lambda_1[V_1]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix}$$

$$\text{Or } \lambda_1 = -1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix}$$

Il résulte les relations :

$$v_{11} = 6 v_{31}$$

$$v_{21} = 5 v_{31}$$

$$v_{31} = 1 v_{31}$$

Chapitre III : Application de la théorie à un exemple mathématique

Les composantes du vecteur propre de gauche sont choisies de telle manière que :

$$[V]^t[U] = [I]$$

Avec : $[I]$ matrice identité d'ordre 3

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (78)$$

Donc pour les composantes de $[V_1]$:

$$v_{11}u_{11} + v_{21}u_{21} + v_{31}u_{31} = 1 \quad (79)$$

$$v_{11} * 1 + v_{21} * (-1) + v_{31} * 1 = 1$$

$$\Rightarrow v_{11} - v_{21} + v_{31} = 1$$

On obtient alors :

$$[V_1] = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

On calcule de façon similaire les composantes des deux autres vecteurs propres de gauche :

- Calcul de $[V_2]$:

$$[A]^t[V_2] = \lambda_2[V_2]$$

$$\text{Or } \lambda_2 = -2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix}$$

Il résulte les relations :

$$v_{12} = 3 v_{32}$$

$$v_{22} = 4 v_{32}$$

$$v_{32} = 1 v_{32}$$

$$\Rightarrow v_{32} = \frac{1}{3} v_{12} \quad \text{et} \quad v_{22} = \frac{4}{3} v_{12}$$

$$[V]^t[U] = [I]$$

$$v_{12}u_{12} + v_{22}u_{22} + v_{32}u_{32} = 1 \quad (80)$$

$$v_{12} * 1/4 + v_{22} * (-1/2) + v_{32} * 1 = 1$$

$$\Rightarrow 1/4 v_{12} - 1/2 v_{22} + v_{32} = 1$$

On obtient alors :

$$[V_2] = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -16 \\ -4 \end{bmatrix}$$

- Calcul de $[V_3]$:

$$[A]^t[V_3] = \lambda_3[V_3]$$

$$\text{Or } \lambda_3 = -3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = -3 \cdot \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix}$$

Il résulte les relations :

$$v_{13} = 2 v_{33}$$

$$v_{23} = 3 v_{33}$$

$$v_{33} = 1 v_{33}$$

$$\Rightarrow v_{33} = \frac{1}{2} v_{13} \quad \text{et} \quad v_{23} = \frac{3}{2} v_{13}$$

$$[V]^t[U] = [I]$$

$$v_{13}u_{13} + v_{23}u_{23} + v_{33}u_{33} = 1 \quad (81)$$

$$v_{13} * 1/9 + v_{23} * (-1/3) + v_{33} * 1 = 1$$

$$\Rightarrow 1/9 v_{13} - 1/3 v_{23} + v_{33} = 1$$

On obtient alors :

$$[V_3] = \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 27/2 \\ 9/2 \end{bmatrix}$$

Chapitre III : Application de la théorie à un exemple mathématique

Donc, la matrice des vecteurs propres de gauche est :

$$[V] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 9 \\ 5/2 & -16 & 27/2 \\ 1/2 & -4 & 9/2 \end{bmatrix} \quad (82)$$

Les valeurs des composantes de ces vecteurs vérifient les relations :

$$[V]^t[U] = [I] \quad \text{et} \quad [V]^t[A][U] = [\Lambda]$$

On détermine la solution libre du système d'équations différentielles.

On effectue la substitution :

$$[U][\Delta z] = [\Delta x]$$

Et il résulte le système des équations découplées :

$$\Delta \dot{z}_1 = \lambda_1 \cdot \Delta z_1$$

$$\Delta \dot{z}_2 = \lambda_2 \cdot \Delta z_2$$

$$\Delta \dot{z}_3 = \lambda_3 \cdot \Delta z_3$$

qui ont les solutions :

$$\Delta z_1(t) = \Delta z_1(0) \cdot e^{\lambda_1 t}$$

$$\Delta z_2(t) = \Delta z_2(0) \cdot e^{\lambda_2 t}$$

$$\Delta z_3(t) = \Delta z_3(0) \cdot e^{\lambda_3 t}$$

De la relation :

$$[U]^{-1}[\Delta x] = [V]^t[\Delta x] = [\Delta z]$$

on obtient les conditions initiales $[\Delta z(0)]$ en fonction des conditions initiales de $[\Delta x(0)]$:

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1(0) \\ \Delta x_2(0) \\ \Delta x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z_1(0) \\ \Delta z_2(0) \\ \Delta z_3(0) \end{bmatrix}$$

Dans un premier cas, on considère les conditions initiales de $\Delta x_i(0)$:

$$\Delta x_1(0) = 1$$

$$\Delta x_2(0) = 0$$

$$\Delta x_3(0) = 0$$

$$[V]^t[\Delta x] = [\Delta z]$$

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z_1(0) \\ \Delta z_2(0) \\ \Delta z_3(0) \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\Delta z_1(0) = v_{11} = 3$$

$$\Delta z_2(0) = v_{12} = -12$$

$$\Delta z_3(0) = v_{13} = 9$$

On détermine la solution du système d'équations différentielles pour la variable d'état $\Delta x_1(t)$

$$[U][\Delta z] = [\Delta x]$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta z_1(t) \\ \Delta z_2(t) \\ \Delta z_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \\ \Delta x_3(t) \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$\Delta x_1(t) = u_{11} \cdot \Delta z_1(t) + u_{12} \cdot \Delta z_2(t) + u_{13} \cdot \Delta z_3(t) \quad (84)$$

$$\Delta x_1(t) = u_{11} \cdot v_{11} \cdot e^{\lambda_1 t} + u_{12} \cdot v_{12} \cdot e^{\lambda_2 t} + u_{13} \cdot v_{13} \cdot e^{\lambda_3 t}$$

$$\Delta x_1(t) = 1 * 3 e^{-t} + 1/4 * (-12) e^{-2t} + 1/9 * 9 e^{-3t}$$

La solution est :

$$\Delta x_1(t) = 3 e^{-t} - 3 e^{-2t} + e^{-3t}$$

Les grandeurs sont les coefficients de participation :

$$[p_1] = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} \cdot v_{11} \\ u_{12} \cdot v_{12} \\ u_{13} \cdot v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ils donnent la contribution des modes $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$, $e^{\lambda_3 t}$ pour la formation de la grandeur d'état $\Delta x_1(t)$, dans des conditions initiales données ($\Delta x_1(0) = 1$; $\Delta x_2(0) = 0$; $\Delta x_3(0) = 0$).

Dans le deuxième cas, on considère les conditions initiales de $\Delta x_i(0)$:

$$\Delta x_1(0) = 0$$

$$\Delta x_2(0) = 1$$

$$\Delta x_3(0) = 0$$

$$[V]^t[\Delta x] = [\Delta z]$$

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z_1(0) \\ \Delta z_2(0) \\ \Delta z_3(0) \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\Delta z_1(0) = v_{21} = 5/2$$

$$\Delta z_2(0) = v_{22} = -16$$

$$\Delta z_3(0) = v_{23} = 27/2$$

On détermine la solution du système d'équations différentielles pour la variable d'état $\Delta x_2(t)$

$$[U][\Delta z] = [\Delta x]$$

$$\Delta x_2(t) = u_{21} \cdot \Delta z_1(t) + u_{22} \cdot \Delta z_2(t) + u_{23} \cdot \Delta z_3(t) \quad (85)$$

$$\Delta x_2(t) = u_{21} \cdot v_{21} \cdot e^{\lambda_1 t} + u_{22} \cdot v_{22} \cdot e^{\lambda_2 t} + u_{23} \cdot v_{23} \cdot e^{\lambda_3 t}$$

$$\Delta x_2(t) = (-1) * 5/2 e^{-t} + (-1/2) * (-16) e^{-2t} + (-1/3) * 27/2 e^{-3t}$$

La solution est :

$$\Delta x_2(t) = -5/2 e^{-t} + 8 e^{-2t} - 9/2 e^{-3t}$$

Les grandeurs sont les coefficients de participation :

$$[p_2] = \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{21} \cdot v_{21} \\ u_{22} \cdot v_{22} \\ u_{23} \cdot v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 8 \\ -9/2 \end{bmatrix}$$

Dans le troisième cas, on considère les conditions initiales de $\Delta x_i(0)$:

$$\Delta x_1(0) = 0$$

$$\Delta x_2(0) = 0$$

$$\Delta x_3(0) = 1$$

$$[V]^t[\Delta x] = [\Delta z]$$

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z_1(0) \\ \Delta z_2(0) \\ \Delta z_3(0) \end{bmatrix}$$

Chapitre III : Application de la théorie à un exemple mathématique

On obtient :

$$\Delta z_1(0) = v_{31} = 1/2$$

$$\Delta z_2(0) = v_{32} = -4$$

$$\Delta z_3(0) = v_{33} = 9/2$$

On détermine la solution du système d'équations différentielles pour la variable d'état $\Delta x_3(t)$

$$[U][\Delta Z] = [\Delta x]$$

$$\Delta x_3(t) = u_{31} \cdot \Delta z_1(t) + u_{32} \cdot \Delta z_2(t) + u_{33} \cdot \Delta z_3(t) \quad (86)$$

$$\Delta x_3(t) = u_{31} \cdot v_{31} \cdot e^{\lambda_1 t} + u_{32} \cdot v_{32} \cdot e^{\lambda_2 t} + u_{33} \cdot v_{33} \cdot e^{\lambda_3 t}$$

$$\Delta x_3(t) = 1 * 1/2 e^{-t} + 1 * (-4) e^{-2t} + 1 * 9/2 e^{-3t}$$

La solution est :

$$\Delta x_3(t) = 1/2 e^{-t} - 4e^{-2t} + 9/2 e^{-3t}$$

Les grandeurs sont les coefficients de participation :

$$[p_3] = \begin{bmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{31} \cdot v_{31} \\ u_{32} \cdot v_{32} \\ u_{33} \cdot v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -4 \\ 9/2 \end{bmatrix}$$

La matrice des coefficients de participation, dans les trois cas des conditions initiales, a la forme suivante :

$$[p] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5/2 & 8 & -9/2 \\ 1/2 & -4 & 9/2 \end{bmatrix}$$

Le coefficient p_{ij} représente le degré de participation du mode j pour la formation de la grandeur d'état i , quand on considère une condition initiale $\Delta x_i(t)$.

Chapitre III : Application de la théorie à un exemple mathématique

Pour pouvoir vérifier les résultats ci-dessus, on calcule la solution indépendante $x_1(t)$ du système d'équations différentielles par l'application de la transformation de Laplace dans des conditions initiales non-nulles ($x_1(0) = 1$; $x_2(0) = 0$; $x_3(0) = 0$).

On obtient :

$$s \cdot x_1(s) - x_1(0) = x_2(s)$$

$$s \cdot x_2(s) = x_3(s)$$

$$s \cdot x_3(s) = -6 x_1(s) - 11 x_2(s) - 6 x_3(s)$$

Par des calculs algébriques, on élimine les variables $x_2(s)$ et $x_3(s)$. On obtient :

$$x_1 = \frac{s^2 + 6s + 11}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} x_1(0) = \frac{s^2 + 6s + 11}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)} x_1(0)$$

Avec :

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = -3$$

On applique la méthode de décomposition et on obtient :

$$x_1(s) = \left[\frac{A}{s - \lambda_1} + \frac{B}{s - \lambda_2} + \frac{C}{s - \lambda_3} \right] x_1(0)$$

Par identification :

$$A = 3$$

$$B = -3$$

$$C = 1$$

L'original $x_1(t)$ de la transformation de Laplace $x_1(s)$ est de la forme suivante :

$$x_1(t) = [Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + Ce^{\lambda_3 t}] x_1(0)$$

Soit :

$$x_1(t) = 3 e^{-t} - 3 e^{-2t} + e^{-3t}$$

III.3 - Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la théorie des petits signaux à un exemple mathématique. Dans notre travail, le système de puissance est soumis à des petites perturbations : cela permet de linéariser le système.

Le calcul des valeurs propres nous permet d'étudier les propriétés dynamiques, car elles définissent le mouvement du système. Aussi, il nous permet de calculer l'amortissement.

Les solutions des équations décrivent l'évolution exponentielle au cours du temps de la perturbation.

Les valeurs propres sont réelles négatives. Le mode associé à cet exemple est donc non oscillatoire, avec une forme d'exponentielle décroissante.

Le facteur de participation découvre quelle variable d'état est responsable du mode indésirable.

CHAPITRE IV:

Application de la

théorie à un circuit

RLC comme système

du second degré

IV.1 - Introduction :

Le chapitre IV est dévolu à l'étude d'un circuit RLC comme filtre passe-bas. Aussi, nous procéderons à l'étude du filtre par Matlab/Simulink en utilisant la fonction de transfert. Et pour finir, la dernière partie de ce chapitre portera sur l'étude du circuit RLC par la méthode des équations d'état en appliquant la théorie de stabilité par petites variations.

IV.2 - Etude d'un circuit RLC comme filtre passe-bas :

Un filtre est un quadripôle transmettant un signal sans atténuation ou avec une atténuation de valeur donnée dans une bande de fréquence déterminée.

On distingue deux familles de filtres :

Les filtres passifs : réalisés à partir de composants passifs (résistance, inductance et capacité). Ils ne permettent pas d'amplifier (la puissance de sortie est nécessairement inférieure à la puissance d'entrée).

Les filtres actifs : réalisés à partir d'un ou plusieurs amplificateurs opérationnels, transistors et composants passifs. Ils nécessitent une alimentation spécifique. En contrepartie, ils permettent d'amplifier le signal.

Exemples d'applications des filtres :

- Filtres correcteurs audio : augmenter ou diminuer l'amplitude des sons graves ou aigus
- Filtres pour sélectionner la gamme de fréquence hertzienne désirée.

Rôle :

La fonction de filtrage de fréquences est de :

- supprimer les fréquences indésirables.
- laisser passer les fréquences désirées [BAR12].

IV.2.1 - Définition d'un filtre passe-bas :

C'est un filtre qui laisse passer toutes les fréquences entre la fréquence nulle et la fréquence de coupure f_c et atténue toutes les fréquences supérieures à celle-ci. Avec un filtre passe-bas, les fréquences comprises entre la fréquence nulle et f_c forment la bande passante du filtre (PB). Il est très utilisé en audio pour atténuer les aigus.

IV.2.2 - Calcul de l'impédance Z totale d'un filtre passe-bas :

$$Z = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \quad (87)$$

Sous la forme RLC :

$$Z = \frac{1}{jC\omega} (1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC) \quad (88)$$

On pose : $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\zeta = \frac{R/2}{\sqrt{L/C}}$

Nous avons : $RC = R\sqrt{C}\sqrt{C} = R\sqrt{C} \cdot \frac{1}{\omega_n\sqrt{L}}$

Sous la forme ω_n et ζ :

On remplace :

$$Z = \frac{1}{jC\omega} \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_n} R \sqrt{\frac{C}{L}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)$$

$$Z = \frac{1}{jC\omega} \left(1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) \quad (89)$$

➤ **Calcul de la fonction de transfert :**

$$G = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} (1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC)}$$

Sous sa forme RLC on obtient :

$$G = \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC} \quad (90)$$

Avec Laplace :

$$G(p) = \frac{1}{1 + RCP + LCP^2} = \frac{\frac{1}{LC}}{P^2 + \left(\frac{R}{L}\right)P + \frac{1}{LC}} \quad (91)$$

$$G = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} \left(1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)}$$

$$G = \frac{1}{\left(1 + 2J\zeta \frac{\omega}{\omega_n} + \left(\frac{J\omega}{\omega_n}\right)^2\right)} \quad (92)$$

- Lorsque $\omega \rightarrow 0$, la fonction de transfert $G \rightarrow 1$; aussi $g \rightarrow 0$ et $\varphi \rightarrow 0$.
- Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, la fonction de transfert $G \rightarrow 0$; aussi $g \rightarrow -\infty$ et $\varphi \rightarrow -\pi$.

Les asymptotes :

$$G(J\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta J \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{J\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$G(J\omega) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + 2\zeta \frac{J\omega}{\omega_n}}$$

$$|G(J\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (93)$$

$$\text{Arg}(G(J\omega)) = -\arctg \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (94)$$

Si $\omega \ll \omega_n$:

$$G = \frac{1}{1 + 2\zeta J \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{J\omega}{\omega_n}\right)^2} \rightarrow 1$$

Avec $|G(J\omega)| = 1$

La pente est de 0 ou 0 dB/déc et $\text{Arg}(G(J\omega)) = 0$.

Si $\omega \gg \omega_n$:

$$G = \frac{1}{1 + 2\zeta J \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{J\omega}{\omega_n}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{\left(\frac{J\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Avec $|G(J\omega)| = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$

La pente est de (-2) ou -40dB/déc et $\text{Arg}(G(J\omega)) = -\pi$.

IV.3 - Etude du filtre passe-bas par Matlab/Simulink en utilisant la fonction de transfert :

Nous voulons étudier un circuit RLC sous forme de filtre passe-bas et analyser les repères temporels et fréquentiels en fonction des paramètres R, L et C. En utilisant l'outil informatique Matlab/Simulink.

IV.3.1 - Fonction de transfert :

La fonction de transfert, $G(p)$, caractérise complètement un système linéaire. En effet, la fonction de transfert n'a pas de sens pour un système non linéaire. De plus, la fonction de transfert est indépendante de l'entrée du système V_i [BAR12].

$$G(P) = \frac{1}{P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC}} \quad (95)$$

IV.3.2 - Analyse de la réponse fréquentielle du circuit :

IV.3.2.1 - Diagramme de Bode :

C'est une représentation graphique d'une fonction complexe utile à l'étude des filtres.

On appelle représentation dans le plan de Bode d'une fonction de transfert $H(j\omega)$ l'ensemble des deux diagrammes suivants :

- une courbe donnant le gain en décibels g_{dB} de la fonction de transfert en fonction de la pulsation ω en échelle logarithmique (l'intérêt de l'échelle logarithmique réside dans certaines propriétés de la fonction logarithme qui rendent l'expression du gain en décibel plus facile à manipuler facilitant ainsi la construction du diagramme) [BAR12], [BAY].

$$g_{dB} = f(\log_{10} \omega) = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

- une courbe donnant l'argument $\varphi(\omega)$ de la fonction de transfert, en échelle linéaire en fonction de la pulsation ω en échelle logarithmique, appelée courbe de phase [BAY] :

$$\varphi(\log_{10} \omega) = \arg |H(j\omega)|$$

Pour visualiser l'effet du filtre, on représente sa fonction de transfert sous la forme d'un diagramme de Bode.

Accordons le filtre à la fréquence : $f = 1$ rad/s

Donnons des valeurs aux paramètres R, L et C du circuit :

Nous écrirons sur le « command window » du logiciel Matlab les instructions suivantes :

```
% R=L=C=1;
```

```
R=1, L=1, C=1
```

```
G=tf([1/L*C 0], [1 R/L 1/(L*C)])
```

Et puis nous obtenons la fonction de transfert suivante :

$$\frac{s}{s^2 + s + 1}$$

L'instruction qui donne le tracé de Bode est :

```
bode(G);grid
```

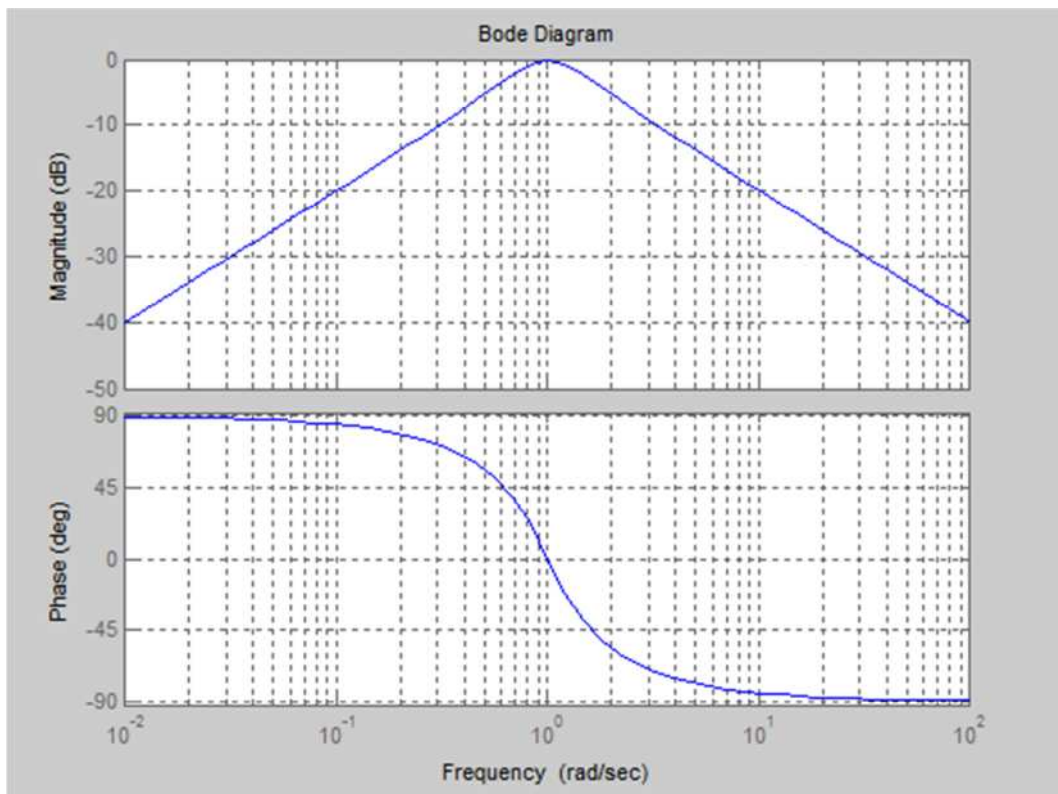


Figure 14 : Tracé du diagramme de Bode (G) à l'aide de l'outil informatique Matlab

➤ **Interprétation des courbes :**

On voit bien que le filtre est accordé à la fréquence 1 rad/s, puisque le gain maximum est pour une fréquence de 1 rad/s, cependant l'atténuation est de 20 dB/décade.

Augmentons R pour avoir une bande passante plus étroite.

Donnons alors à R les valeurs : R = 5 puis R = 20

R1=5 ; G1=tf([1/(L*C) 0], [1 1/(R1*C) 1/(L*C)]);

R2=20 ; G2=tf([1/(L*C) 0], [1 1/(R2*C) 1/(L*C)]);

bode(G,'b', G1,'r', G2,'g'),grid

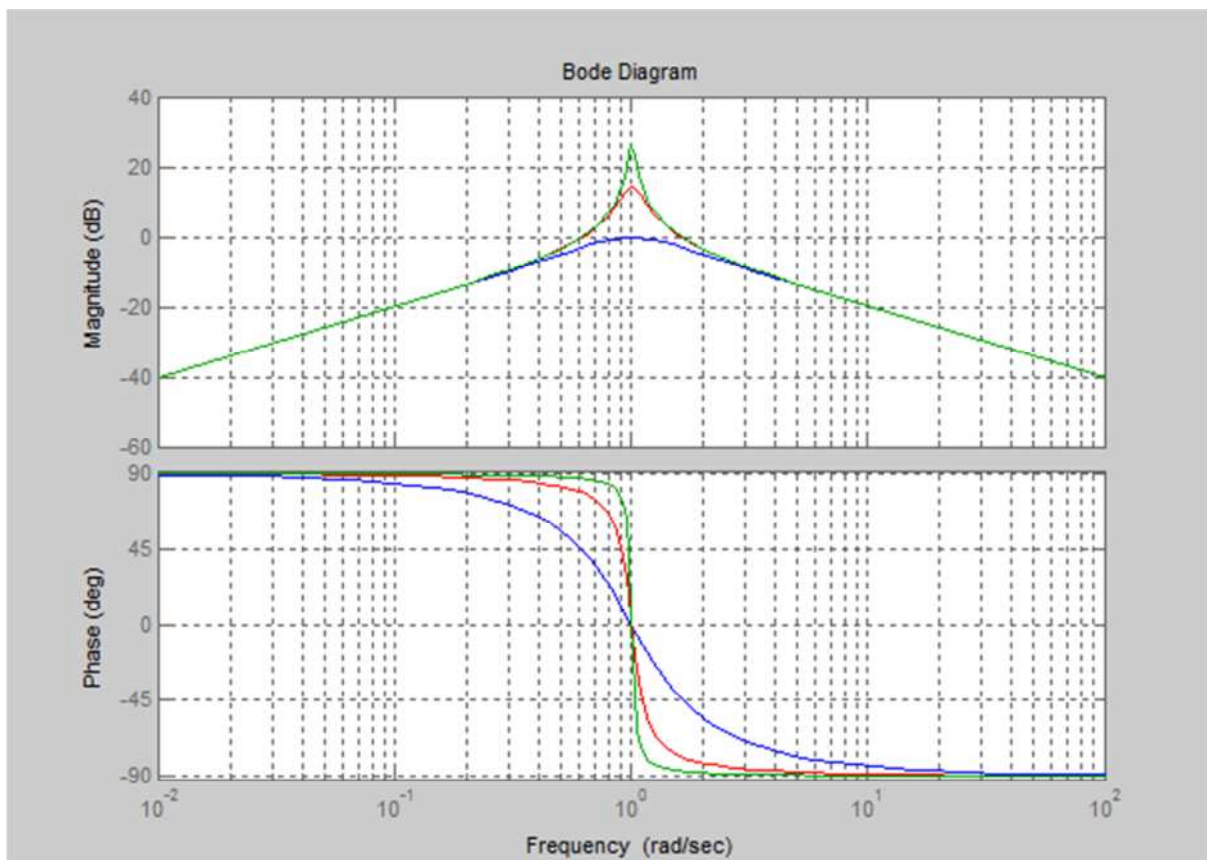


Figure 15 : Représentation de trois diagrammes de Bode avec des résistances de plus en plus grandes (R=1, R=5, R=20)

➤ **Interprétation des courbes :**

À chaque fois que la valeur de la résistance augmente, de 1 jusqu'à 20, les courbes d'amplitudes deviennent de plus en plus étroites. On voit bien que pour R=20, le filtre est étroitement accordé par la fréquence visée de 1 rad/s. On constate qu'au-delà de la fréquence de coupure, la pente des courbes est de -40 dB/décade.

Quant à la courbe de phases, une fois la fréquence de coupure est atteinte la phase est égale à 0° , au-delà de cette fréquence toutes ces courbes sont confondues et sont égales à $-\pi$.

ξ est le coefficient d'amortissement réduit, réglable en changeant la valeur de la résistance R. À mesure que R augmente, ξ augmente aussi, en passant de 0.5 à 2.5, jusqu'à 10.

IV.3.2.2 - Analyse de la réponse temporelle du circuit :

Nous pouvons maintenant confirmer les propriétés d'atténuation du circuit pour G2 avec $R=20$ en simulant la transformation d'un signal sinusoïdal 0.9, 1 et 1.1 rad/s :

➤ **Commandes à donner au logiciel Matlab :**

```
t=0:0.05:250;
```

```
subplot(311);lsim(G2, sin(0.9*t),t); title('w=0.9')
```

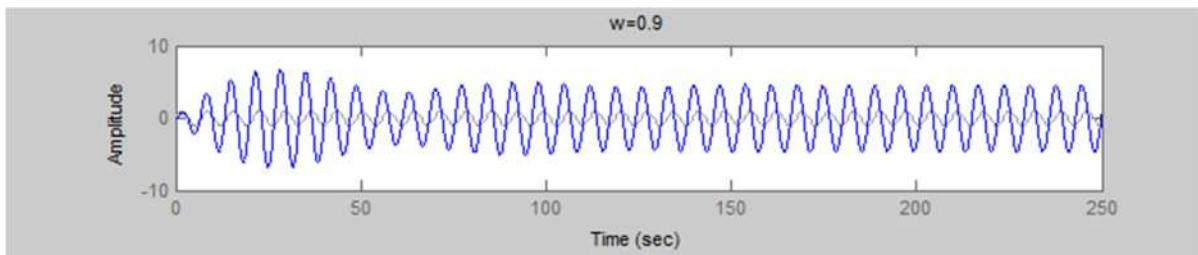


Figure 16 : Courbe qui illustre une onde avec une fréquence 0.9 rad/s

```
subplot(312);lsim(G2, sin(t),t); title('w=1')
```

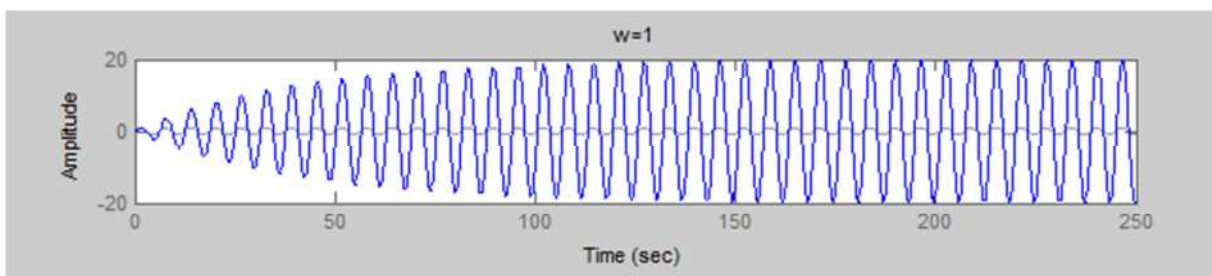


Figure 17 : Courbe qui illustre une onde avec une fréquence 1 rad/s

```
subplot(313);lsim(G2, sin(1.1*t),t); title('w=1.1')
```

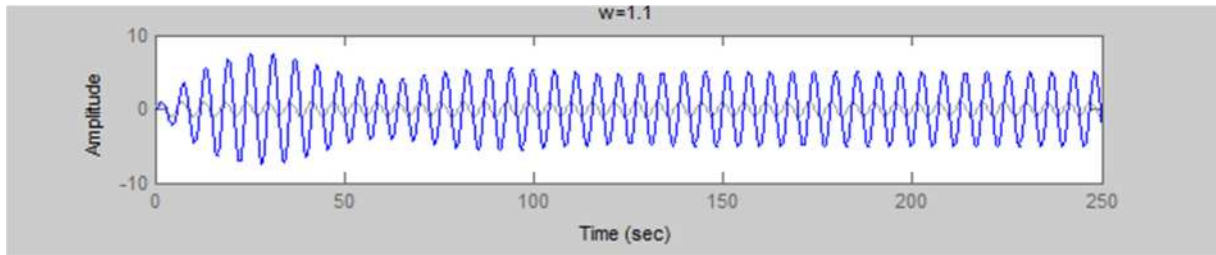


Figure 18 : Courbe qui illustre une onde avec une fréquence 1.1 rad/s

➤ **Interprétation des courbes (16, 17, 18) :**

On remarque sur les courbes que les ondes pour 0.9, 1 et 1.1 rad/s sont considérablement atténuées. L'onde de fréquence 1 rad/s devient inchangée dès que les transitoires sont dépassés. La longueur des transitoires résulte de la mauvaise qualité d'amortissement du filtre exigé pour une bande passante étroite.

IV.3.2.3 - Valeurs propres et coefficients d'amortissement :

L'instruction ci-dessous nous permettra d'avoir les valeurs propres, la fréquence ainsi que l'amortissement :

damp(pole(G2))

Valeur propre	Amortissement	Fréquence (rad/s)
$-2,5 \cdot 10^{-2} + 1$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	1
$-2,5 \cdot 10^{-2} - 1$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	1

Tableau 1 : Tableau représentant les valeurs propres, l'amortissement et la fréquence

➤ **Interprétation du tableau :**

Les valeurs propres sont à partie réelle négative : cela nous apprend donc que le système de puissance est stable.

IV.3.2.4 - Analyse du circuit :

On peut utiliser RLC circuit _gui pour l'analyse du circuit RLC pour différentes valeurs de R, L et C, grâce à cette commande nous obtiendrons le diagramme de Bode, la réponse du système, le diagramme de Nyquist et la courbe des pôles. Toutes ces courbes évolueront en fonction des paramètres du système :

rlc_gui

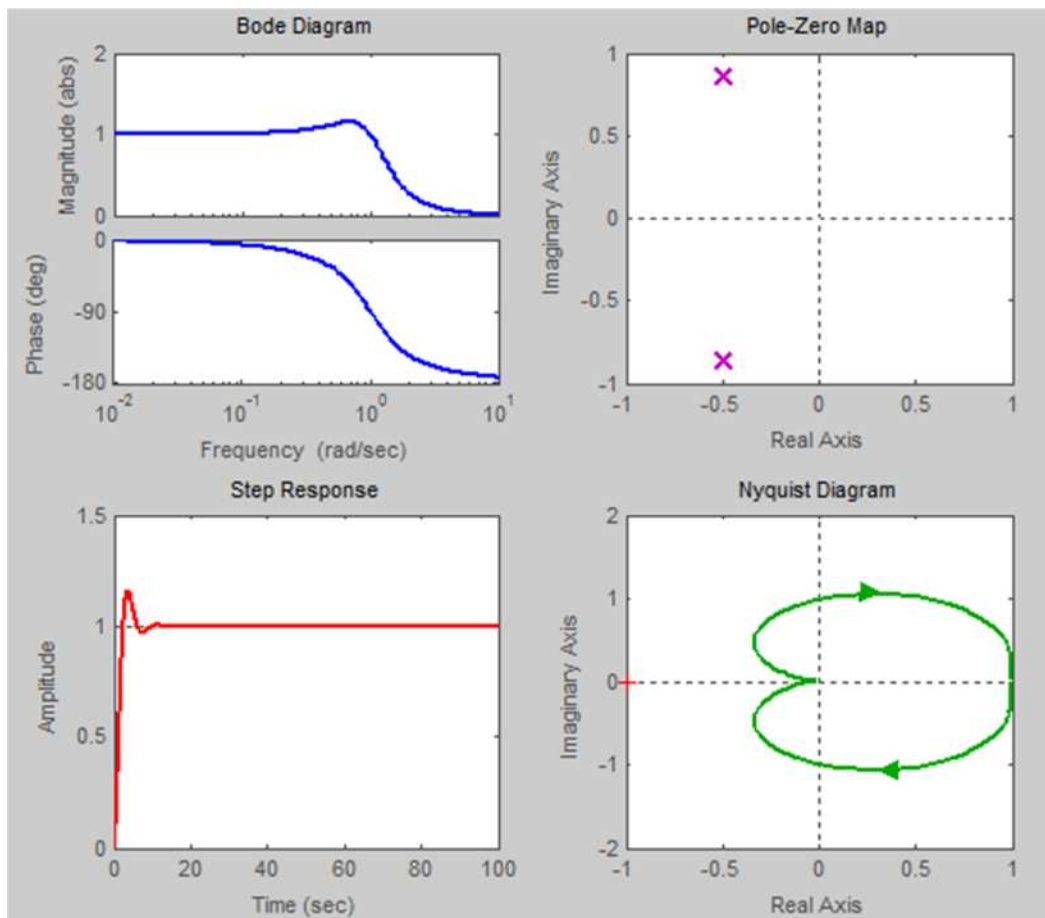


Figure 19 : Représentation du diagramme de Bode, la réponse du système, le diagramme de Nyquist, la courbe des pôles, avec une résistance $R=1$

➤ **Interprétation des courbes :**

La fonction de transfert admet deux pôles (croix violettes) de : $-0.5 + j0.866$ et $-0.5 - j0.866$ pour une fréquence de 1 rad/sec et un amortissement de 0.5.

Le lieu de Nyquist (courbe verte) n'entoure pas le point critique (croix rouge) $-1 + j0$, et est à droite de ce point. Or, le critère de revers stipule que si le lieu de Nyquist de la fonction de transfert passe à droite du point critique, alors le système asservi est stable. Le système de puissance présent est donc stable.

La courbe de réponse atteint un dépassement de $D=1.15$. Puis elle devient stationnaire au bout de 11.83 secondes à une amplitude de valeur 1.

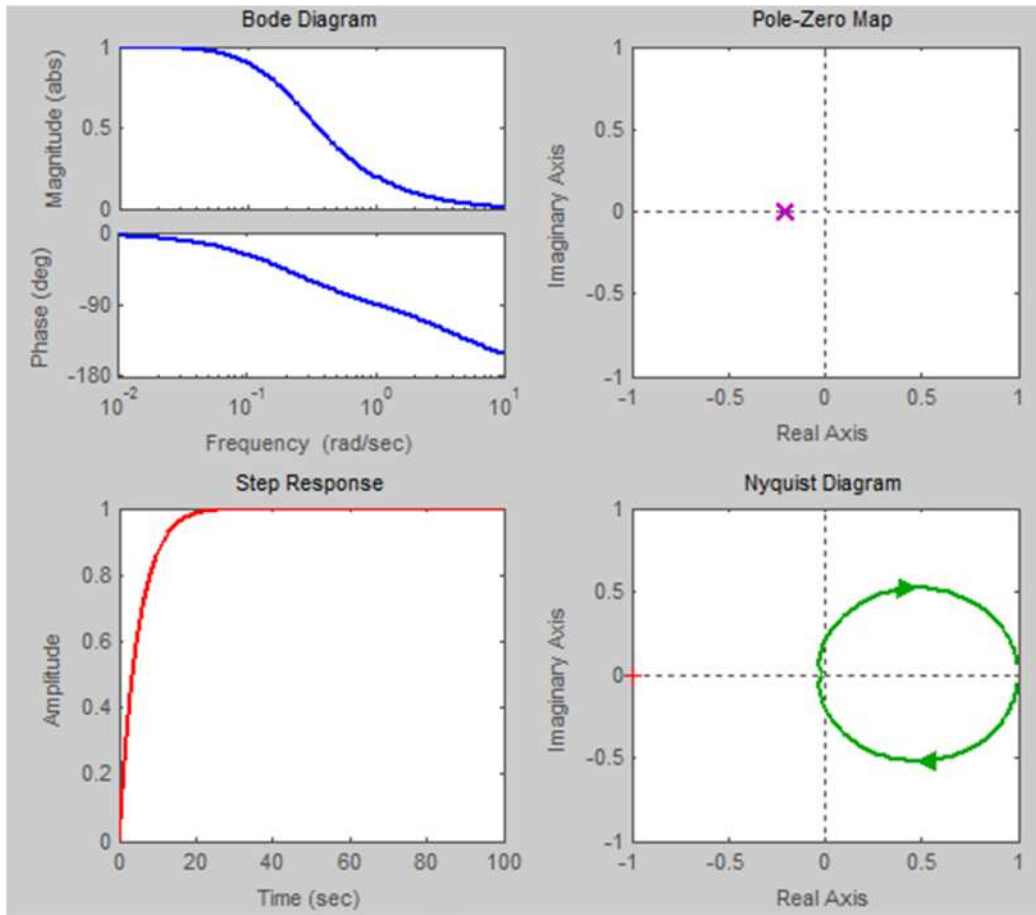


Figure 20 : Représentation du diagramme de Bode, la réponse du système, le diagramme de Nyquist, la courbe des pôles, avec une résistance de $R=5$

➤ **Interprétation des courbes :**

La fonction de transfert admet un seul pôle (croix violette) de -0.209 pour une fréquence de 0.209 rad/sec et un amortissement de 1. Le système est stable, car cette racine est négative.

Le lieu de Nyquist (cercle vert) est à droite et n'entoure pas le point critique (croix rouge) $-1 + j0$: le système de puissance est donc stable. Aussi, le lieu de Nyquist de la fonction de transfert est plus loin du point critique avec une résistance de valeur 5 : cela confirme que le système est loin de l'instabilité.

La courbe de réponse n'atteint aucun dépassement. Aussi, elle devient stationnaire au bout de 26.76 secondes à une amplitude de valeur 1.

IV.4 - Etude du circuit RLC par la méthode des équations d'état en appliquant la théorie de stabilité par petites variations :

Dans cette partie du chapitre IV, nous étudierons un système linéaire de second ordre. Ce dernier est facile à analyser et est utile pour une bonne compréhension du comportement des systèmes d'ordre supérieur. L'exécution des systèmes d'ordre élevé est souvent perçue en termes d'ensemble dominant de pôles de second ordre ou de valeurs propres. Donc, une compréhension complète des caractéristiques d'un système de second ordre est primordiale avant de passer à des systèmes complexes.

La Figure 21 montre le circuit RLC, qui représente un système du second degré.

On fera l'étude des propriétés propres des matrices d'état du système et on examinera leurs caractéristiques modales.

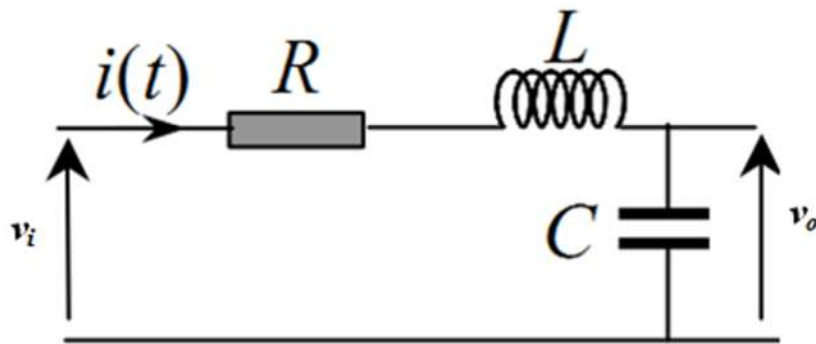


Figure 21 : Schéma du circuit RLC

IV.4.1 - Solution de l'équation avec les paramètres RLC ainsi que ζ et ω_n :

L'équation différentielle reliant v_o à v_i est :

$$LC \frac{d^2 v_o}{dt^2} + RC \frac{dv_o}{dt} + v_o = v_i \quad (96)$$

Ceci peut être écrit sous la forme standard :

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + (2\zeta\omega_n) \frac{dv_o}{dt} + \omega_n^2 v_o = \omega_n^2 v_i \quad (97)$$

Là où :

$\omega_n = 1/\sqrt{LC}$: fréquence naturelle

$\zeta = (R/2)/\sqrt{L/C}$: constante d'amortissement

Afin de développer la représentation de l'espace d'état, nous définissons les variables d'état d'entrée et de sortie :

$$x_1 = v_o$$

$$x_2 = \frac{dv_o}{dt} \quad (98)$$

$$u = v_i$$

$$y = v_o = x_1$$

En utilisant les quantités ci-dessus, l'équation (98) peut être exprimée en termes de deux équations de premier ordre :

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = x_2 = \frac{dv_o}{dt} \quad (99)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\omega_n^2 x_1 - (2\zeta\omega_n)x_2 + \omega_n^2 u \quad (100)$$

Sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} u \quad (101)$$

En remplaçant ζ et ω_n par leurs valeurs, le résultat est le suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u \quad (102)$$

La variable de sortie est donnée par :

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot u \quad (103)$$

Ceux-ci ont la forme standard de l'espace d'état :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Les valeurs propres de A sont données :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (104)$$

A peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (105)$$

Par conséquent :

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (106)$$

Le déterminant est égal à zéro. Voici l'équation équivalente à la 106^{ième} :

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad (107)$$

Résolvant pour les valeurs propres, nous avons :

$$\lambda_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (108)$$

$$\lambda_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

En remplaçant ω_n et ζ par leurs valeurs, on obtient :

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{1}{C}}$$

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2L\sqrt{C}} \sqrt{CR^2 - 4L} \quad (109)$$

$$\lambda_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{1}{C}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2L\sqrt{C}} \sqrt{CR^2 - 4L} \quad (110)$$

Matrice diagonale des valeurs propres :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2L\sqrt{C}} \sqrt{CR^2 - 4L} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2L\sqrt{C}} \sqrt{CR^2 - 4L} \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres sont donnés par :

$$(A + \lambda I)\Phi = 0$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{1i} \\ \Phi_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (111)$$

Cette équation peut prendre la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{1i} \\ \Phi_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (112)$$

Ceci peut être réécrit comme :

$$\begin{cases} -\lambda_i \Phi_{1i} + \Phi_{2i} = 0 \\ -\omega_n^2 \Phi_{1i} - (2\zeta\omega_n + \lambda_i) \Phi_{2i} = 0 \end{cases} \quad (113)$$

Elle est égale à :

$$\begin{cases} -\lambda_i \Phi_{1i} + \Phi_{2i} = 0 \\ -\frac{1}{LC} \Phi_{1i} - (\frac{R}{L} + \lambda_i) \Phi_{2i} = 0 \end{cases} \quad (114)$$

Si nous essayons de résoudre les équations ci-dessus pour Φ_{1i} et Φ_{2i} , nous nous rendrions compte qu'elles ne sont pas indépendantes. Comme nous l'avons dit tout à l'heure, il est vrai qu'en général pour le $n^{\text{ième}}$ système d'ordre, l'équation $(A + \lambda I)\Phi = 0$ donne seulement

$n-1$ des équations indépendantes pour les n composants des vecteurs propres. Un composant du vecteur propre peut être fixé arbitrairement et alors les autres composants peuvent être déterminés à partir des $n-1$ équations indépendantes.

On devrait cependant prendre en considération que les vecteurs propres eux-mêmes sont linéairement indépendants, si les valeurs propres sont distinctes.

Pour le système du second ordre, on peut fixer $\Phi_{1i} = 1$, et déterminer Φ_{2i} pour chaque valeur propre.

Le vecteur propre correspondant à λ_1 est :

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{bmatrix} \quad (115)$$

Le vecteur Φ_1 correspond à :

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2L\sqrt{C}}\sqrt{CR^2 - 4L} \end{bmatrix} \quad (116)$$

Et le vecteur propre correspond à λ_2 :

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{bmatrix} \quad (117)$$

Le vecteur Φ_2 est équivalent à :

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2L\sqrt{C}}\sqrt{CR^2 - 4L} \end{bmatrix} \quad (118)$$

La nature de la réponse du système dépend presque entièrement de la constante d'amortissement ζ .

La valeur de ω_n a l'effet d'ajuster simplement l'échelle de temps.

Si ζ est supérieure à 1, les deux valeurs propres sont réelles et négatives.

Si ζ est égale à 1, les deux valeurs propres sont égales à $(-\omega_n)$.

Si ζ est inférieure à 1, les valeurs propres sont les complexes conjugués, donnés comme suit :

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (119)$$

$$\lambda = \sigma \pm j\omega$$

La localisation des valeurs propres dans le plan complexe en respectant ζ et ω_n est indiquée dans la Figure 22 :

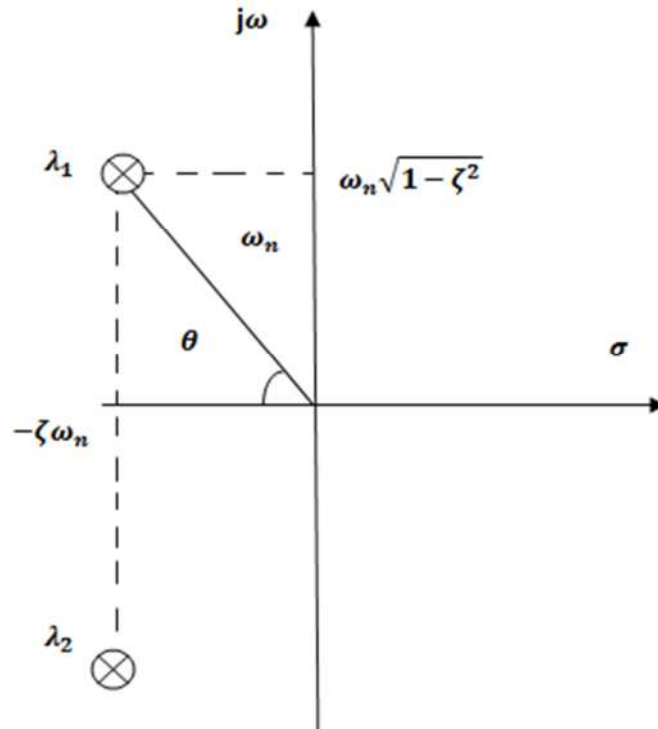


Figure 22 : Représentation des valeurs propres λ_1 et λ_2 dans le plan complexe

Angle d'amortissement θ :

$$\theta = \cos^{-1} \zeta$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

Pour commencer nous examinerons les singularités du système de second ordre et discuterons par la suite la forme de la trajectoire d'état près de la singularité. Nous étudierons alors en détails le cas où les deux valeurs propres sont réelles et négatives, aussi λ_2 supérieure à λ_1 , mais avec λ_1 et λ_2 ne sont pas très différents l'un de l'autre.

Les équations d'état dans leurs formes normales sont données par :

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \tag{120}$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 \tag{121}$$

Par conséquent :

$$\frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1} = \frac{dz_2}{dz_1} = \frac{\lambda_2 z_2}{\lambda_1 z_1} \tag{122}$$

Par l'intégration :

$$z_2 = c z_1^{\lambda_2/\lambda_1} \quad (123)$$

Là où est c la constante arbitraire dépendant des conditions initiales. Les courbes représentent ce qui précède $z_1 - z_2$ dans le plan est généralement parabolique, avec la forme exacte déterminée par le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ et la constante c , la pente des courbes, est donnée par :

$$\frac{dz_2}{dz_1} = c \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1^{\lambda_2/\lambda_1 - 1} \quad (124)$$

Près de l'origine, $\frac{dz_2}{dz_1} \rightarrow 0$, $z_1 \rightarrow 0$ depuis $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$.

Les trajectoires typiques dans le plan de phase avec des coordonnées normales sont montrées dans la Figure 23.

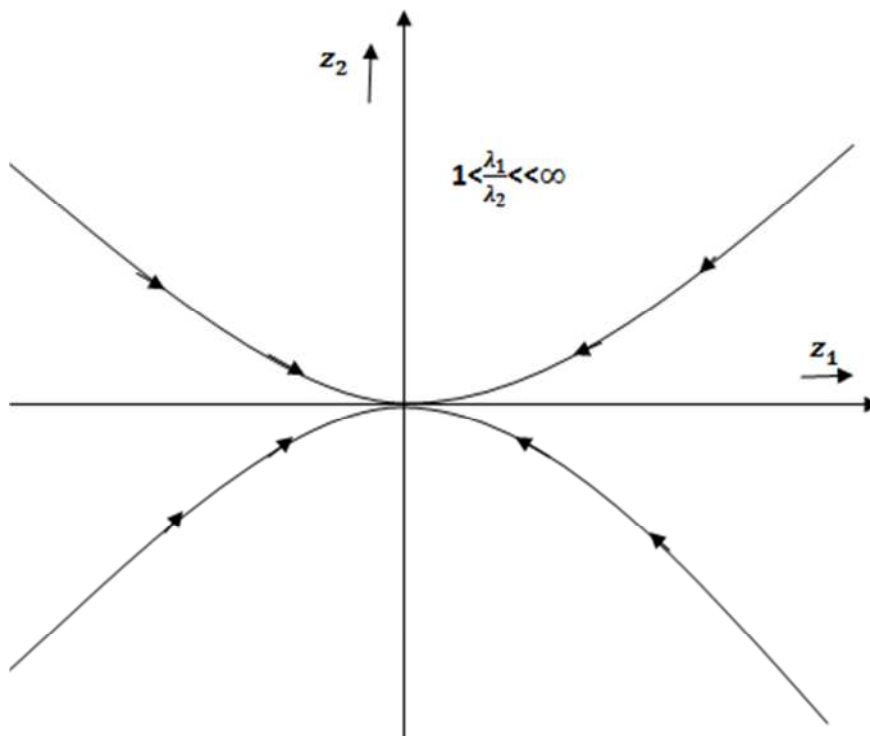


Figure 23 : Courbe représentative des points z_1 et z_2

Les courbes représentent les lieux des points déterminés par les valeurs correspondantes de z_1 et z_2 . Comme la variable indépendante t augmente aussi, le point reliant des valeurs instantanées de z_1 et z_2 se déplace le long de la courbe dans la direction des pointes de flèche.

Les conditions initiales déterminent la valeur de « c », et le quart du cercle dans lequel une solution particulière se trouve.

Puisque les racines sont négatives, z_1 et z_2 diminuent et atteignent zéro, lorsque t augmente : ceci désigne un nœud stable.

Si les conditions initiales sont telles qu'une des variables z_1 ou z_2 est égale à zéro, cette variable demeure à zéro, et la courbe de solution est sur l'un ou l'autre axe (celui de z_1 ou de z_2). Les axes représentent alors les cases spéciales des courbes de solution, correspondant aux conditions initiales spéciales.

La trace correspondante dans le plan x_1-x_2 est montrée dans la Figure 24. Les lignes correspondantes à z_1 et z_2 sur ce plan sont de travers selon la transformation $x = \Phi z$.

Si l'entrée v_i est zéro, et si les conditions initiales sont telles que (x_1, x_2) est sur un des vecteurs propres, le vecteur d'état demeurera dans la même direction mais changera dans la grandeur par le facteur $e^{\lambda_1 t}$, ou $e^{\lambda_2 t}$ selon les circonstances.

Si le vecteur représentant l'état initial n'est pas un vecteur propre, il peut être représenté par une combinaison linéaire des deux vecteurs propres.

La réponse du circuit sera la somme des deux réponses, à mesure que le temps augmente, le composant dans la direction du vecteur propre Φ_2 , devient moins significatif parce que $e^{\lambda_2 t}$ se délabre plus rapidement que $e^{\lambda_1 t}$. Ainsi les trajectoires approchent toujours l'origine le long de Φ_1 la direction à moins que le composant de ce vecteur propre ait été au commencement zéro. Si les vecteurs propres ne sont pas réels, une simple interprétation physique des vecteurs propres n'est pas possible.

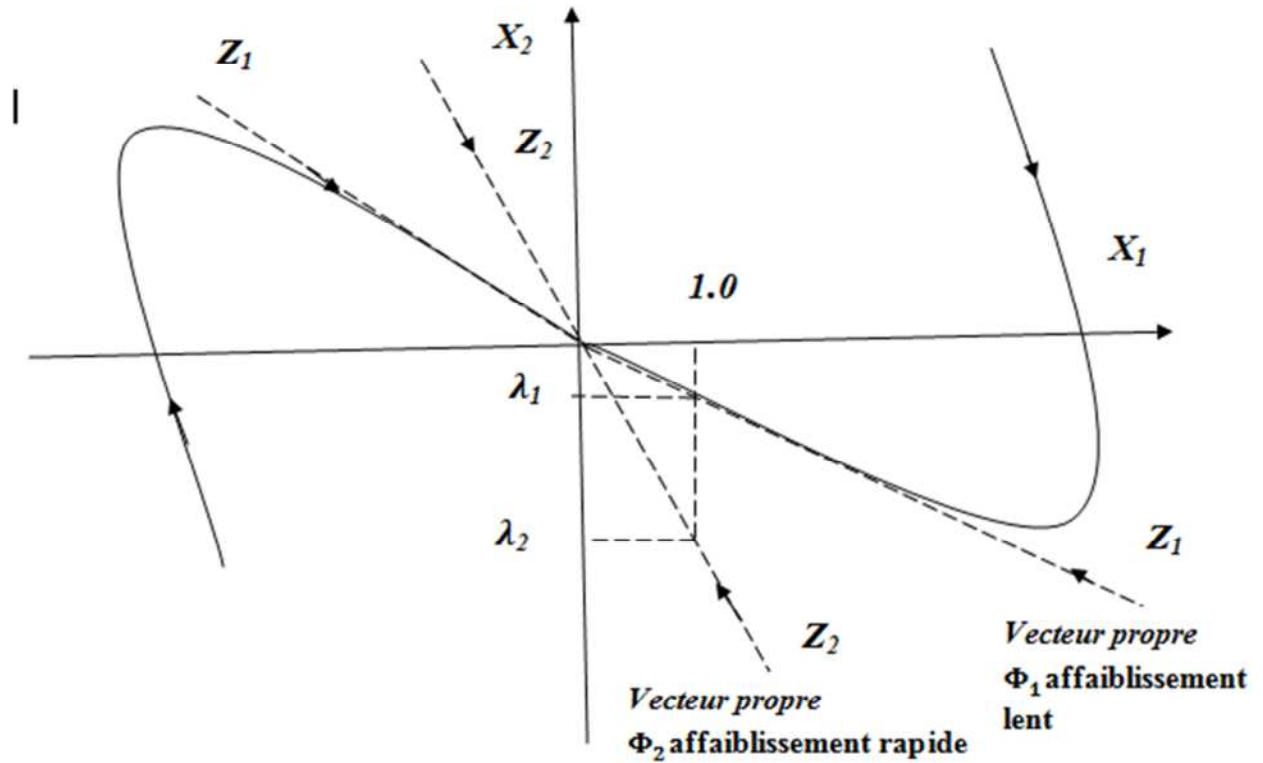


Figure 24 : Schéma des courbes correspondantes à z_1 et z_2 dans un plan

IV.4.2 - Calcul des valeurs propres :

Dans le chapitre précédent, nous avons calculé les valeurs propres en résolvant l'équation caractéristique du système. C'était possible parce que nous analysons un système simple du second degré. Pour des systèmes d'ordre plus élevé avec des valeurs propres de grandeurs largement différentes, cette approche échoue.

IV.5 - Conclusion :

L'outil informatique est d'un apport certain dans l'étude et l'analyse des circuits électriques.

L'exemple d'un filtre passif dont les paramètres sont R, L et C nous donne un aperçu sur l'efficacité des logiciels de calcul et de simulation dans l'analyse des circuits électriques. Grace au logiciel Matlab/Simulink nous avons pu obtenir plusieurs diagrammes tel que le diagramme de Bode et de Nyquist, ces derniers nous informe de manière très précise sur la stabilité du système.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté d'une façon générale les différents types de stabilité. Nous avons également présenté une analyse fine sur la stabilité aux petites perturbations. Enfin, nous avons illustré notre étude par deux exemples de calcul dans lesquels nous avons mis en application toutes les étapes de la méthode des « petits signaux ».

Cette étude nous a permis de mettre en évidence les points importants suivants :

- ❖ Il est possible de déterminer la nature (stable ou instable) d'un système linéaire à partir d'une « inspection » de la position des pôles de la fonction de transfert dans le plan complexe.
- ❖ En outre, la connaissance de la position des pôles peut fournir des renseignements sur le comportement du système lors de régimes transitoires typiques tels que les réponses à impulsion, à échelon,
- ❖ Un système doit présenter un point d'équilibre stable dans les conditions de fonction normales. Ce système est dit stable s'il retrouve un état d'équilibre acceptable après avoir été soumis à une perturbation.

L'analyse des valeurs propres et l'analyse modale du système linéarisé sont des outils « puissants » pour étudier les propriétés dynamiques du système. L'évaluation précise de la fréquence des oscillations électromécaniques et de l'amortissement de ces oscillations peut être déterminée à partir de l'analyse des vecteurs propres.

Enfin, il faut noter que la méthode des petites variations dans l'étude de stabilité reste limitée en raison de la nature des perturbations relativement brusques et de fortes amplitudes (courts circuit, perte d'un ouvrage, perte d'un groupe de production, ...). Par conséquent, il faut avoir recours à d'autres méthodes comme les méthodes d'intégration numérique, les méthodes directes (ou énergétiques) ou bien les méthodes dites hybrides.

Bibliographie

[JEA97] : B. DE METZ-NOBLAT et G. JEANJEAN, « Stabilité dynamique des réseaux électriques industriels ». Cahier technique n°185, Groupe SCHNEIDER, janvier 1997.

[ALK08] : H. ALKHATIB, « Étude de la stabilité aux petites perturbations dans les grands réseaux électriques : optimisation de la régulation par une méthode métaheuristique ». Thèse de doctorat présentée à l'Université Aix-Marseille III, soutenue le 05/12/2008.

[TOU12] : M.Y. TOUAFEK, « Amélioration de la stabilité transitoire des réseaux électriques par un contrôle neuro-flou des systèmes FACTS ». Thèse de magister présentée à l'Université Ferhat Abbas, soutenue le 11/01/2012.

[SAD98] : S.M. SADEGHZADEH, « Amélioration de la stabilité transitoire et de l'amortissement des oscillations d'un réseau électrique à l'aide de SMES et de SSSC ». Thèse de doctorat présentée à l'institut national polytechnique de Grenoble, soutenue le 13/03/1998.

[HAM12] : Z. HAMADOU, « Optimisation des paramètres d'un FACTS shunt pour l'amélioration de la stabilité transitoire d'un système électrique ». Thèse de magister présentée à l'Université de Sétif, soutenue le 20/06/2012.

[ALI09] : A. ALIBI, « Contrôle des Réseaux Électriques par les Systèmes FACTS : (Flexible AC Transmission System) ». Thèse de magister présentée à l'Université de Batna, soutenue le 13/06/2009.

[BAR12] : L. BARTHÈS, « Cours d'Électronique systèmes ». Université de Versailles Saint-Quentin 01/09/2012.

[FAR01] : R.G. FARMER, « Power System Dynamics and Stability ». Université d'Arizona 2001.

[ESB10] : Z. ELESCHOVA, M. SMITKOVA, A. BELAN, « Evaluation of Power System Transient Stability and Definition of the Basic Criterion ». Journal international d'énergie, vol.4, 2010.

[AND08] : G. ANDERSSON, « Modelling and Analysis of Electric Power Systems ». ETH Zürich, 09/2008.

[SHA03] : E. GHOLIPOUR SHAHRAKI, « Apport de l'UPFC à l'amélioration de la stabilité transitoire des réseaux électriques ». Thèse de doctorat présentée à l'Université Henri Poincaré Nancy-I, soutenue le 13/10/2003.

[BOU13] : Z. BOUCHAMA, « Stabilisateurs Synergétiques des Systèmes de Puissance ». Thèse de doctorat présentée à l'Université Ferhat Abbas, soutenue le 12/12/2013.

[SIG05] : H. SIGUERDIDJANE, « Systèmes non linéaires ». École supérieure d'électricité, Supélec, 2005.

[INT] : « Introduction à la représentation d'état ». UV Automatique, cours 8, INSA de Rouen.

[ORT13] : J.J. ORTEU, « Analyse et commande des systèmes linéaires dans l'espace d'état ». Mines Albi-Carmaux, 10/10/2013.

[CHE] : J.P. CHEMLA, « Représentation d'état ». Cours de systèmes asservis.

[BAY] : B. BAYLE, « Systèmes et Asservissements à Temps Continu ». Télécom Physique Strasbourg, <http://eavr.u-strasbg.fr/~bernard>

[RIC12] : J.P. RICHARD, « Systèmes Dynamiques ». École Centrale de Lille 2012, jean-pierre.richard@ec-lille.fr.

[PAS98] : J.C. PASSELERGUE, « Interactions des dispositifs FACTS dans les grands réseaux électriques ». Thèse de doctorat présentée à l'Institut Nationale Polytechnique de Grenoble, soutenue le 26/11/1998.

[SNY99] : A.F. SNYDER, « Les mesures synchronisées par GPS pour l'amortissement des oscillations de puissance dans les grands réseaux électriques interconnectés ». Thèse de doctorat présentée à l'Institut Nationale Polytechnique de Grenoble, soutenue le 18/10/1999.

[MEK02] : K. MEKKI, « Mesures synchronisées par GPS pour une meilleure stabilité des réseaux ». Thèse de doctorat présentée à l'Institut Nationale Polytechnique de Grenoble, soutenue le 29/03/2002.