RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : **Mathématiques**

Option : **Méthodes et modèles de Décision**

Encadré par :

Mr Y.TALEB

Mr M.KETAB

Présenté par :

Mr LOUNIS Abbes
Melle OUKACHA Fazia

Modélisation des séries chronologiques Application aux consommations budgétaires de la wilaya de Tizi Ouzou

Année 2015/2016

Remerciements

Nous ne saurons commencer sans remercier notre bon Dieu le tout puissant de nous avoir éclairé de son savoir, bonne santé et de nous avoir accordé la bonne volonté de réaliser ce travail.

Nous tenons à exprimer nos profondes gratitudes à monsieur le secrétaire général de la wilaya de Tizi Ouzou pour ses encouragements, sa compréhension et de l'intérêt qu'il a porté à notre travail.

Nos reconnaissances et nos sincères remerciements vont à M^{r} Taleb pour son encadrement, ses conseils, sa grande disponibilité et tous les efforts qu'il a déployés afin de mener à terme ce travail.

Nos remerciements les plus respectueux vont aussi à tout le corps enseignant du master pour leur encadrement et leur soutien. Enfin, nous remercions tous ceux qui ont collaboré de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction générale

Introduction générale

La prévision est un élément très important dans le suivi du programme d'investissement de la wilaya, elle permet d'anticiper l'évolution des indicateurs et d'adopter des stratégies visant à mesurer l'impact, dans le futur, des différentes interventions présentes. Pour faire la prévision il faut utiliser la modélisation qui est une démarche statistique qui consiste en la représentation simplifiée d'un ensemble d'observations. L'une des approches adoptée pour modéliser revient à étudier la variable d'intérêt, en fonction de son évolution au cours du temps sous forme d'une chronique (série chronologique) ; l'étude de cette dernière correspond à l'analyse statistique d'observations régulièrement espacées dans le temps. Donc dans le domaine de la statistique dénommée analyse des séries chronologiques, la dimension temporelle des observation devient primordiale. L'attention va se focaliser sur les propriétés évolutives d'une variable aléatoire, tant pour sa prévision que dans sa relation avec son passé. Suivre périodiquement l'évolution des consommations des projets de la wilaya de Tizi Ouzou relatifs aux différents programmes de développement, définir des stratégies de luttes concrètes et fiables en cas de déficit et retirer une synthèse exacte et détaillé de la situation financière pour chaque période est l'un des objectifs des sessions de l'Assemblé Populaire de Wilaya afin de rechercher l'efficacité des actions publiques dans le développement local. L'objectif de ce mémoire est de modéliser l'évolution des consommations au titre des programmes sectoriels déconcentrés (PSD) en vu de savoir si la wilaya de Tizi Ouzou atteindra son objectif dans la croissance économique à l'horizon 2017 avec les stratégies actuelles. Nous travaillerons avec les données allant de 2010 à 2015. Nous organisons ce travail en trois chapitre :

Dans le premier chapitre, nous faisons une présentation de la wilaya de Tizi Ouzou ainsi qu'une présentation et une description des données selon la session de l'Assemblé Populaire du 31 mars 2016 ; Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques notions de la théorie des séries chronologiques et des méthodes de prévision, expliqués par Michel Terraza, Régis Bourbonnais[1] ; Enfin, au chapitre trois, nous faisons une application aux données.

Présentation de la wilaya de Tizi Ouzou

Chapitre 1

Présentation de la wilaya de Tizi Ouzou

1.1 Présentation de la wilaya de Tizi Ouzou

1.1.1 Situation géographique

La wilaya de Tizi Ouzou s'étale sur une superficie de 2 958,01 Km^2,elle est caractérisée par un relief de hautes collines et de montagnes, traversées par deux vallées (vallée du Sébaou, Tizi Ouzou et la vallée de Draa El Mizan, située dans le sud-ouest de la wilaya). La wilaya de Tizi Ouzou est limitée par :

- La mer méditerranée au Nord ;
- La wilaya de Bouira au Sud ;
- La wilaya de Boumerdess à l'Ouest ;
- La wilaya de Bejaia à l'Est.

-Figure1.1 : Situation géographique-

1.1.2 Aspect administratif

A l'issue du dernier découpage administratif de 1984, la wilaya de Tizi Ouzou compte 67 communes et 21 daïras. Si l'État a consenti d'énormes efforts pour rapprocher l'administration des administrés avec la création de

29 nouvelles communes au dernier découpage administratif de 1984, il n'en demeure pas moins que la gestion et le suivi de 67 communes sont une lourde tâche pour pouvoir répondre aux besoins socio-économiques des populations de plus en plus exigeantes. Il est utile de souligner que la wilaya de Tizi-Ouzou compte actuellement le plus grand nombre de communes à l'échelle nationale.

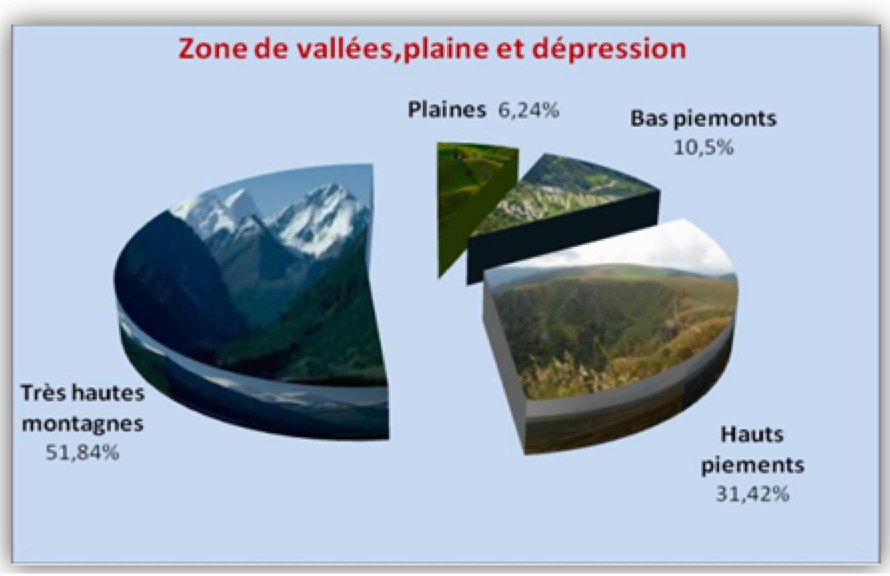
1.1.3 Situation démographique

La population totale de la wilaya est de 1171720 habitants au 30 décembre 2015, soit une densité de 396 Hab/km^2

1.1.4 Relief et morphologie

Ensembles physiques	Pente (en %)	Pourcentage par rapport à la superficie totale de la Wilaya
Plaines	0 à 3	6,24
Bas piemonts	3 à 12,5	10,50
Hauts piements	12,5 à 25	31,42
Très hautes montagnes	25	51,84
Total		100

-Figure1.2 : Relief et morphologie-



-Figure1.3 : Zone de vallées, plaine et dépression-

1.1.5 Hydrographie

L'hydrologie de la région est dominée par l'Oued Sébaou qui recueille à travers ses affluents l'essentiel des eaux en provenance du Djurdjura ; c'est le collecteur principal de la wilaya.

1.1.6 La Pluviométrie

Elle varie entre 600 et 1000 mm d'eau par an.

1.1.7 Les Ressources en eau

- Potentialités : 1 000 000 000 m^3/an
- Volume mobilisé : 191 930 000 m^3/an
- Barrage Taksebt : Volume régularisé : 181 Hm^3
- Mise en eau : Novembre 2001.
- Volume alloué à la Wilaya de Tizi-Ouzou : 65 Hm^3/an (y compris Flanc Nord).
- Barrage de Djebla : Volume régularisé : 3,00 Hm^3
- Barrage de Draâ El Mizan : Volume régularisé : 1,50 Hm^3
- Barrage de Ain Zaouia : Volume régularisé : 1,40 Hm^3
- Barrage de Tizi Ghenif : Volume régularisé : 0,53 Hm^3
- Retenues collinaires 83 : Volume régularisé : 4,50 Hm^3

Ce potentiel satisfait largement les besoins en AEP, en irrigation et industrie des wilayates de Tizi-ouzou, d'Alger et de Boumerdes.

1.1.8 I-8 Agriculture

Un potentiel foncier agricole limité à 98 800 ha de SAU (Surface Agricole Utile) dont 8000 ha en irrigué (04 barrages – 83 Retenues collinaires).

1.1.8.1 Population et emploi

1.200 000 habitants à majorité rurale (60%).

Population occupée : 348 142 dont 14 % dans l'agriculture (15 800 permanents et 34 800 temporaires).

1.1.8.2 Exploitations agricoles

66 650 exploitations dont le domaine privé de l'État est représentées par 130 EAC (Exploitation agricole collective) et 02 fermes pilotes détenant 8% de la SAU.

1.1.8.3 Occupation des sols

Cultures permanentes : 47 955 ha (49 % de la SAU) et terre labourable : 50 887 ha (51% SAU).

1.1.9 Ressources humaines

- Une université active avec 09 facultés pour un effectif de 48 430 étudiants dont 27 418 étudiants hébergés et nouveau pôle universitaire celui de Tamda (commune de Ouaguenoun)
- L'éducation avec 67 lycées, 180 CEM et 655 écoles primaires pour des effectifs respectivement de 39 417 élèves pour le secondaire, 63 468 élèves pour le moyen et 108574 élèves pour le primaire.
- La formation professionnelle avec 31 CFPA, 10 annexes de CFPA et 04 INSFP Toutes ces infrastructures universitaires, éducatives et de formation assurent un potentiel humain de moyenne et haute qualification.

1.1.10 Les infrastructures de base

Infrastructures sanitaires

Le secteur de la santé dans la wilaya de Tizi-Ouzou s'articule autour des dispositifs suivants :

Pour le Secteur Public

- Un (01) CHU pour 02 structures hospitalières totalisant 1013 lits.
- Trois (03) EHS (Etablissement hospitalier spécialisé), dotés d'un plateau technique de spécialisation et d'urgence dans respectivement les spécialités de :

1. Gynécologie Obstétrique pour l'EHS SBIHI Tassadit :82 lits;
2. Psychiatrie pour l'EHS FERNANE El Hanafi de Oued Aissi :330 lits;
3. Chirurgie Cardiaque pour l'EHS YACEF Omar de Draa Ben Kheda 80 lits.

- Sept (07) EPH (Etablissement Public Hospitalier) implantés aux Chef lieu des Daïras d'une capacité d'hospitalisation de 2745 lits (Azazga-Draa.El.Mizan- Boghni- Azeffoun- Tigzirt) pour un total de 1240 lits.

Ces structures totalisent :

- Huit (08) EPSP :Etablissements Publics de Sante de Proximité (Draa Ben Khedda-Azazga- Azeffoun- Iferhounene - Boghni - Ouacifs- Larbaa Nath.Irathen- Ouaguenoun) Recelant un dispositif de :

Cinquante Huit (58) Polycliniques dotées de :
- Seize (16) Maternités intégrées pour 158 lits.
- Vingt six (26) services d'UMC (Urgence Médico-chirurgicales) pour 108 lits d'observations.

295 Salles de soins ;

40 UDS(Unité de Semaine de Médecine) ;

08 CISM (Centres Intermédiaires de Santé Mentale) ;

07 UCTMR(Unité de Contrôle des Maladies Respiratoires et Tuberculose)

En termes d'établissements de formation, la Wilaya compte :
- Deux (02) écoles de formation paramédicale (Tizi-Ouzou et Ain El Hammam érigées respectivement en :

INFSSF (Institut Nationale de Formation Supérieure de Sages Femmes) ;

INFPM (Institut Nationale de Formation Paramédicale). Pour une capacité de 560 places pédagogiques et400 places d'internat.
- Quatre (04) Centres d'hémodialyse totalisant 42 Générateurs de Dialyse.

Pour le Secteur Privé :

- Seize (16) Etablissements Hospitaliers Privés (EHP), dispensant des prestations de soins dans plusieurs spécialités, sont implantés sur le territoire de la wilaya dont :

13 Etablissements Hospitaliers Privés pour une capacité globale de 302 lits (10 Implantés à Tizi Ouzou ville ; 01 Implanté à Draa Ben Khedda ; 01 Implanté à Mekla ; 01 Implanté à Boghni).

03 Cliniques Ambulatoires spécialisées dans l'ORL et l'Ophtalmologie (Tizi-Ouzou ville)
- Cinq (05) Centres d'hémodialyses totalisant 70 postes de dialyse (3 Implantés à Tizi-Ouzou ville, 01 à Azazga et 01 à Mekla).
- 09 Sociétés de transport sanitaire exploitant 27 ambulances et 31 Véhicules sanitaires légères (VSL).

Routes

Le réseau routier de la Wilaya est composé de 4.809,126 Km, sa densité de 1,625 Km/Km^2, est 4 à 5 fois supérieure à la moyenne Nationale.
- Les routes nationales n° 12, 24, 25, 30, 15, 68, 71 et 73 avec 621 Kms assurent les liaisons rapides entre les différentes wilayas limitrophes et agglomérations ;
- Les chemins de wilaya avec 632 kms et les chemins communaux avec 3 548 kms permettent de relier les différentes communes et villages de la

Wilaya.

L'état du réseau routier communal est :

AXE	En bon état	Etat moyen	Mauvais état	Total
Routes Nationales (Km)	356,098	160,905	104,210	621,213
Chemins de Wilaya (Km)	415,363	128,935	95,615	639,913
Chemins Communaux (Km)	1 774,00	710,00	1 064,00	3 548,00

-Tableau1.1 : L'état du réseau routier communal-

Le réseau ferroviaire

Il longe la vallée de Tadmaït vers Tizi-Ouzou sur 18 Kms et son extension à la zone industrielle de Oued Aissi sur une longueur de 14,2 kms.

Les ports

La wilaya compte deux (02) infrastructures portuaires :
- Le port mixte d'Azeffoun (pêche et commerce).
- Le port de Tigzirt (pêche et plaisance).

Patrimoine forestier

Estimé à 112 180 Ha notamment :
- chêne liège : Le chêne-liège, est un arbre à feuilles persistantes du genre Quercus, famille des Fagacées. Il est exploité pour son écorce qui fournit le liège. Il est parfois appelé le corcier, le surier ou suve. Le nom spécifique suber est le nom du chêne-liège, ou du liège ;
- chêne zeen : Le chêne zeen est une espèce caducifoliée, endémique de la Méditerranée occidentale, Présent à partir de 700 m jusqu'à 1000 m d'altitude et même d'avantage, son peuplement se caractérise par la présence d'espèces de l'étage supérieur humide et d'espèces humifères
- chêne afares : Le chêne afarès, est un arbre à feuillage caduc de la famille des Fagacées ;
- chêne vert : Le chêne vert est une espèce de chêne. C'est un arbre de taille modeste (un dizaine de mètres maximum). Ses feuilles sont petites, vernissées sur une face et ont un bordure piquante.

Electrification et gaz

En matière d'électrification et raccordement en gaz naturel, la wilaya enregistre respectivement un taux de 96,50% et 69%.

Habitat

La wilaya compte un parc de 319 134 logements avec un taux d'occupation de 5 individus/logement.

Tourisme

Le foncier littoral touristique de la wilaya de Tizi-Ouzou dispose de huit (08) ZEST (Zones d'Expansion touristique et Sites Touristiques) déclarées par le décret 88-232 du 05 novembre 1988 totalisant 1.973Ha

Ces zones à vocation balnéaire sont réparties tout le long du littoral (80 Kms).

- Zest de Sidi-Khalifa ; Commune : Ait Chaffa-Azeffoun
- Zest d'Azeffoun ; Commune : Azeffoun
- Zest de Blerouna ; Commune : Azeffoun
- Zest de Djemâa Nerbat ; Commune : Iflissen - Azeffoun
- Zest de Zegzou ; Commune : Iflissen-Tigzirt
- Zest d'Abéchar ; Commune : Iflissen-Tigzirt
- Zest de Feraoun ; Commune : Iflissen-Tigzirt
- Zest de Tigzirt Ouest (Tassalast).

Afin d'accroître le potentiel foncier touristique ainsi que sa préservation, des terrains ont été affectées pour de nouvelles ZEST dites ZEST de montagne qui concernent : Tala Guilef(boghni), Azrou N'Thor (Commune : Illiltène - Iferhounène), Tizi-Oudjaaboub(Commune : Bounouh - Boghni) et Yakourène

Services

La multitude de formation spécialisées dispensées au niveau de a wilaya (secteur public et privé) et dans l'hôtellerie en particulier font de ce secteur un pourvoyeur important de main d'œuvre qualifiée au niveau national.

1.1.11 Présentation administrative

Les organes et structures de l'administration générale de la wilaya ainsi que leurs missions sont fixés par le décret exécutif $N°$ 94-215 du 23/07/1994. Ainsi, l'administration de la wilaya est organisée en plusieurs structures et organes :

- Le secrétariat général ;
- L'inspection générale ;
- Le cabinet du Wali ;
- Daïras ;
- Les directions sectorielles.

Le secrétariat général

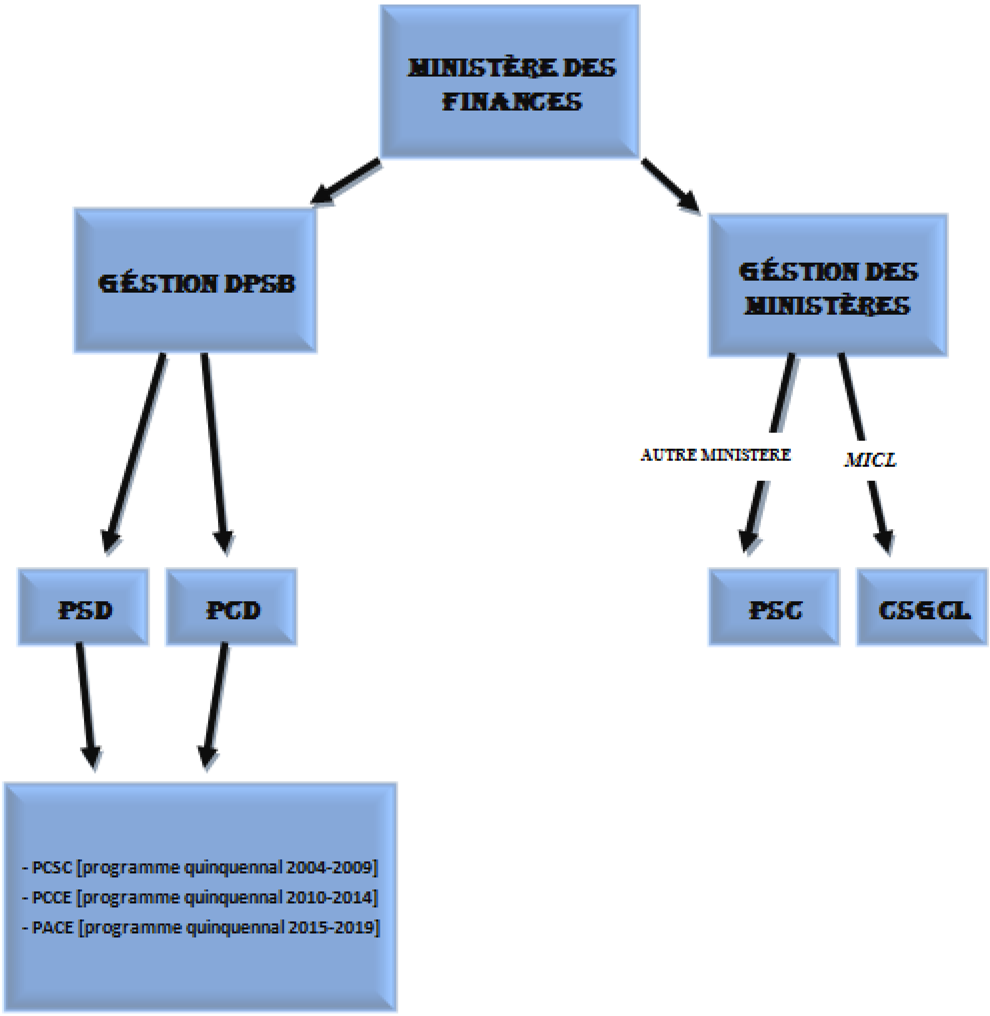
Il constitue la plus importante structure au niveau de l'administration générale de la wilaya ; cette importance émane des attributions conférées par la réglementation en vigueur, notamment en matière de coordination entre les différentes administrations du conseil de la wilaya.

Le secrétariat général est placé sous l'autorité du secrétaire général qu'a pour mission :

- d'animer et veiller à l'exécution de l'ensemble des programmes d'équipement et d'investissement de la wilaya ;
- coordonner les activités des directeurs du conseil de wilaya ;
- suivre l'exécution des délibérations de l'assemblé populaire de la wilaya et des décisions prises par le conseil de la wilaya ;

Le principal problème que rencontre chaque année, le secrétariat général est l'absence de rapports globaux concernant les projets en cours d'exécution, ainsi que la nécessité d'une évaluation précise des coûts de réalisation des différents programmes de développement , Afin d'informer l'Assemblée populaire de la Wilaya de Tizi Ouzou sur l'activité future à prendre en compte par ses différents secteurs, une étude s'est révélée nécessaire ; Cette démarche nous permet d'avoir une meilleure visibilité de l'état actuel des finances et d'ainsi, prévoir et estimer celles des prochains programmes de développement, ce qui réduira considérablement les déséquilibres et évitera l'apparition de pertes inutiles.

Pour un meilleur suivi des projets, l'état a répartit les investissements en un ensemble de programmes structurés selon le quinquennat correspondant qui sont illustrés selon le schéma suivant :



-Schéma1.1 Décomposition de programme d'investissement-

Les gestionnaires

- DPSB : Directions de la Programmation et du Suivi Budgétaires.
- MICL : Ministère de l'Intérieur et des Collectivités Locales.
- Les programmes :

1. PSD : Programme Sectoriel Déconcentré,
2. PCD : Programme Communaux de Développement,
3. PSC : Programme Sectoriel Centralisé,
4. CSGCL : Caisse de Solidarité et de Garantie des Collectivités Locales, (ex FCCL)
5. PCCE : Programme de Consolidation à la Croissance Economique,
6. PACE : Programme d'Appui à la Croissance Economique. Pour une meilleure poursuite des efforts d'investissements consentis dans les programmes antérieurs, à savoir :

- Le programme normal
- Le PSRE (Programme de Soutien à la Relance Economique)
- Et le programme de reconstruction (séisme 2003)

L'état les a intégrés désormais dans le programme PCSC, et a conçu le programme de consolidation à la croissance économique (PCCE) et ce, pour la redynamisation de l'économie et garantir un développement durable et harmonieux. L'activité menée au cours de l'exercice 2015 en matière d'appui à la croissance économique s'inscrit dans le cadre de la poursuite de la réalisation du plan quinquennal 2010-2014. A cet effet, nous allons donner un aperçu sur la consistance des programmes qui sont inscrits durant cette période. Cependant, il y a lieu de citer certains exemples de contraintes qui entravent toutes tentatives de maitrise, de prévision de lancement de projets en termes de délais et de couts de réalisation.

1.2 Les handicaps qui freinent le développement de la wilaya

- L'année 2015 a été marquée par la conjoncture de chute des cours de pétrole à l'échelle mondiale, les conséquences se sont fait sentir par l'Algérie, traduit par la restriction budgétaire dans les recettes qui proviennent quasi-totalement de la manne pétrolière.
- La wilaya s'étend sur une superficie dominée par des ensembles montagneux à forte déclivité et escarpés d'où la difficulté de prise en charge de cet espace accidenté.
- L'état du milieu physique ainsi que la dispersion de l'espace territorial en 1500 villages rendent pratiquement les voies de communications difficiles et engendrent des surcoûts d'investissements se rapportant aux réalisations et la réhabilitation des infrastructures et équipements socio-économiques.
- potentiel agricole cultivable est faible (La SAU ne représente que 33,42% de l'ensemble des terres de la wilaya).
- La nature juridique des terrains, en majorité propriétés privées et très morcelées.
- Les oppositions récurrentes.
- Le déficit en matière de BET(Bureau d'Etude Technique) et d'entreprises locales qualifiées.

Rappels sur les séries chronologiques

Chapitre 2

Rappels sur les séries chronologiques

2.1 Introduction

La statistique se préoccupe de porter des jugements sur une population à partir de l'observation d'un échantillon de cette population. Si l'on prend l'exemple des données d'enquête, l'ordre dans lequel sont échantillonnées les observations n'a pas d'importance. On peut quand même parfois accorder de l'importance aux unités qui sont échantillonnées comme par exemple les élèves d'une même classe ou d'un même établissement, les habitants d'un même quartier. La dimension temporelle prend de l'importance quand on décide de réinterroger les mêmes personnes. On peut alors étudier leur évolution dans le temps.

Dans le domaine de la statistique dénommée "analyse des séries temporelles (chronologique)" , la dimension temporelle des observation devient primordiale. Une série temporelle est définie comme une suite d'observations indexées par le temps. L'attention va se focaliser sur les propriétés évolutives d'une variable aléatoire, tant pour sa prévision que dans sa relation avec son passé. Les séries temporelles peuvent être observées de manière continue ou de manière discrète.

L'examen graphique d'une série temporelle montre que la valeur prise au temps t dépend fortement de la valeur prise au temps t-1. Le processus qui les engendre est dynamique. On voudra en construisant un modèle, acquérir de l'information sur ce processus théorique. Le problème est alors de trouver le modèle pratique qui approchera le plus possible le processus théorique et ensuite de l'estimer. Une fois cette étape franchie, on pourra faire de la prévision ou du contrôle avec ce modèle. Les types de modèles que l'on peut considérer sont nombreux. En statistique on va s'intéresser à modéliser une série univariée au moyen d'un modèle ARMA, ou ARIMA et SARIMA. La plupart des modèles supposent que les séries chronologiques étudiées sont stationnaires. Les propriétés des estimateurs reposent sur cette hypothèse. Cependant la plupart des séries chronologiques traitées croissent dans le temps, ou même si elles ne sont pas croissantes, ont des fluctuations qui ne sont pas régulières. Elles sont non-stationnaires. Il est en général possible de trouver une transformation ou un filtre qui puisse rendre stationnaire les séries non-stationnaires. Mais la détermination exacte de ce filtre n'est pas triviale. Faut-il différencier la série, faut il retirer une tendance et laquelle ? Et surtout ne perd-on pas de l'information par ces opérations ?

Ce chapitre a un but introductif. Il doit présenter dans un cadre univarie certains outils mathématiques et modèles simples employés par la statistique des séries temporelles. La branche de la statistique mathématique qui s'intéresse aux séries temporelles a développé plusieurs modèles de représentation des séries chronologiques dont nous allons très brièvement rappeler les plus simples. Il s'agira de préciser quelques notions sur les modèles ARMA et ARIMA et quelques outils mathématiques qui leurs sont reliés.

2.2 Variables aléatoires et processus stochastiques

Soit (Ω , Å, P) où Ω est l'espace des événements , Å une tribu adaptée à Ω et P une mesure de probabilité définie sur Å, un espace de probabilité.

Definition1

Une variable aléatoire réelle X est une application définie par :

X : $\Omega \longrightarrow R$ telle que pour tout réelle c , A_c =$\{$w $\in \Omega$ / X(w) $\leq$ c $\}$ $\in$ Å. En d'autre termes, A_c est un événement ; F étant la fonction de répartition de X définie par :

$\mathcal{F} : \Re \longrightarrow [0\ ,\ 1]$

$c \rightarrow \mathcal{F}(c) = P(\ X(w) \leqslant c)$

Définition 2

un processus aléatoire ou encore stochastique est une famille X = $\{$ X_t ,t $\in$T$\}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω , Å,P) .

C'est une fonction à valeur réelles X : T $\times$ $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout t $\in$ T données ,X_t soit une variable aléatoire, appelée état de processus à l'instant t.

2.3 Classification des processus stochastiques

Les processus stochastiques sont généralement classés selon la dimension de leur espaces d'états et la dénombrabilité de leur espaces d'indices T.

- Lorsque T est discret (fini ou dénombrable), on dit que le processus est à temps discret.
- Lorsque T est fini non dénombrable, le processus est dit à temps continu.
- Lorsque T est de dimension n=1, on dit que le processus est univarié.
- Lorsque T est de dimension $n \geq 2$, le processus est dit multivarié.

2.3.1 Processus du second ordre

Définition

Soit X := $(\mathrm{X}_t)_{t\in T}$ un processus stochastique (une suite de variable aléatoire), le processus X est dit de second ordre si pour t∈T , X_t est une variable aléatoire à carré intégral i.e $\mathrm{E}(|\ \mathrm{Xt}|^2) < +\infty$.

Pour un tel processus on peut définir les fonctions de moyenne et d'autocovariance :

Moyenne : $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$; μ (n) = $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$ $\quad \forall$ n $\in \mathbb{Z}$

Auto covariance : $\gamma : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{R}$

$\gamma(m,n) = E[(X_m - \mu(m))(X_n - \mu(n))]$ $\forall m, n \in \mathbb{Z}$. Le processus est dit centre si $\mu = 0$.

2.3.1.1 Les processus stationnaires

La notion de stationnarité joue un rôle capital dans la théorie des processus aléatoires, particulièrement en analyse des séries chronologiques. Dans de très nombreux cas, on ne peut pas renouveler la suite des mesures dans les conditions identiques (par exemple le taux de chômage mensuel) ; alors pour que le modèle déduit à partir d'une suite d'observations ait un sens, il faut que toute portion de la trajectoire observée fournisse des informations sur la loi du processus et que des portions différentes, mais de même longueur, fournissent les mêmes indications, d'où la notion de stationnarité. Deux types de stationnarité sont généralement considérés, la stationnarité stricte (ou stationnarité forte) et la stationnarité faible (ou second ordre).

Processus stationnaires au sens strict

(stationnarité forte) Le processus $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$est dit strictement (ou fortement) stationnaire si :

$\forall$ ($t_1\ t_2 \ldots\ t_n$) $\in\mathbb{Z}^n$, $t_1 < t_2 < \ldots\ t_n$ et $\forall$ h $\in \mathbb{Z}$, $\forall$n$\in \mathbb{N}^\star$

alors la suite (X_{t_1+h},...,(X_{t_n+h}) a la même loi que la suite ((X_{t_1},...,(X_{t_n})) autrement dit :

$P(X_{t_1} \leq x_1, ..., X_{t_n} \leq x_n)=P(X_{t_{1+h}} \leq x_1, ..., X_{t_{n+h}} \leq x_n)$ $\forall$n$\in N^\star$,$\forall$(t_1,t_2,...,t_n)$\in\mathbb{Z}^\star$, $t_1<t_2<...<t_n$, $\forall$(X_1,X_2,...,X_n)$\in\mathbb{R}^n$ et $\forall$h$\in \mathbb{Z}$.

De cette définition, il ressort que tous les moments (s'ils existent), d'un processus stochastique strictement stationnaire sont invariants pour toute translation dans le temps, or cette définition est rarement vérifiée en pratique, c'est ainsi qu'on a recours à un concept de stationnarité moins forte, dit stationnarité du second ordre.

Processus stationnaire du second ordre (stationnarité faible)

Un processus est stationnaire au second ordre (ou faiblement stationnaire) si sa moyenne et son auto-covariance sont invariantes par translation dans le temps.

Définition

Le processus $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ est dit faiblement stationnaire si :

1. $\forall$t$\in \mathbb{Z}$, E(X_t^2) $<\infty$
2. $\forall$t$\in \mathbb{Z}$, E(X_t) $= \mu$ indépendante de t.
3. $\forall$(t,h)$\in\mathbb{Z}^2$, cov(X_t,X_{t+h}) $= \gamma$(h) indépendante de t. γ(h) est la fonction d'autocovariance de processus (X_t, t $\in \mathbb{Z}$). ie $\forall$h,s,t$\in \mathbb{Z}$, $Cov(X_{s+h}, X_{t+h}) =$ $=\gamma(s,t)=\gamma(|s-t|)$.

Remarques

1. La fonction d'autocovariance d'un processus faiblement stationnaire dépend seulement de la différence entre les instants.
2. Dans les processus stochastiques du seconde ordre, la stationnarité stricte implique la stationnarité faible (la réciproque n'est pas vraie en général).

processus bruit blanc (white noise)

Parmi la classe des processus stationnaires il existe des processus particuliers dont la structure est la plus simple, appelés Bruit Blanc (BB) ou White Noise(WN).

Un processus BB est un processus stationnaire, il est très souvent utilisé en analyse des séries temporelles car il constitue en quelques sorte " les briques élémentaires" d'une grande classe de processus stationnaire.

Définition

Un bruit blanc $\{\epsilon_t \, , \, t \in \mathbb{Z} \}$ est une suite de variables aléatoires non corrélées de moyenne nulle et de variance finie et constante σ^2 , un processus bruit blanc vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} E(\epsilon_t) = 0 & \forall t \in \mathbb{Z} \\ Var(\epsilon_t) = E(\epsilon_t^2) = \sigma_\epsilon^2 \end{cases}$$

Et par conséquent sa fonction d'autocovariance est donnée par :

$$\gamma(\mathrm{h}) = \mathrm{Cov}(\epsilon_t \, , \, \epsilon_{t+h}) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$

Remarque

Les bruits blancs sont des processus stationnaires sans "mémoire" c'est-à-dire l'état de la série considéré aujourd'hui n'a aucune incidence sur son état de demain ; tout comme l'état d'hier n'a aucune incidence sur l'état d'aujourd'hui.

2.4 Fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire

La fonction d'autocovariance du processus stationnaire $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ notée $\gamma(h)$ est définie par :

$$\gamma(\mathrm{h}) = \mathrm{cov}(X_t, X_{t-h}) = E[(X_t - E(X_t)(X_{t-h} - E(X_{t-h}))] \quad \forall t, h \in \mathbb{Z} \, .$$

Nous remarquons que pour h=0 ; $\mathrm{Var}(X_t) = \gamma(0)$ et que :

1. γ(- h)= γ(h) $\forall$ h $\in \mathbb{Z}$ (la fonction d'autocovariance est symétrique).
2. $|\gamma($ h$)| \leq \gamma(0)$ = Var(X_t) $\forall$t, h $\in \mathbb{Z}$

Estimateur empirique

Considérons la série chronologique($X_1, \ldots, X_t$), l'estimateur de la fonction d'autocovariance, noté γ(h) , obtenu pour un échantillon de T réalisations du processus $\{X_t$, t $\in \mathbb{Z}\}$ est donnée par :

$$\hat{\gamma}(h)=\frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h}(X_t-\overline{X_t})$$

$$\text{Avec } \overline{X_T}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_t$$

2.5 Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation au pas h, (h $\in \mathbb{Z}$), d'un processus stationnaire du second ordre de moyenne E(X_t) = μ, notée ρ(h) est définie par :

$$\rho(h) = \frac{Cov(X_t,X_{t-h})}{\sqrt{Var(X_t)\sqrt{Var(X_{t-h})}}}=\frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

Propriétés

$\rho(0) = 1$ $\forall$ h $\in \mathbb{Z}$

$|\rho(h)| \leq 1$ $\forall$h $\in \mathbb{Z}$

Estimateur :
$\hat{\rho}(h)=\frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$ $\forall h \in \mathbb{Z}$

Remarques

- La représentation graphique de ρ(h) est appelée corrélogramme.
- Si la fonction d'autocorrélations ρ(h) décroit rapidement quand le nombre de retards augmente, cela signifie que la série est stationnaire.

2.6 Fonction d'autocorrélation partielle

Définition

La fonction d'autocorrélation partielle d'ordre h désigne la corrélation entre X_t et X_{t-h} lorsque l'influence des variables X_{t-h-i}, avec i<h, a été retirée. Notons ρ(h) et θ(h) les fonctions respectivement d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle de X_t au retard h .

De façon générale, la fonction d'autocorrélation partielle d'un processus stationnaire $\{X_t \ , \ t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait la relation :

$\theta(h) = \frac{|R_h^*|}{|R_h|} \ \forall h \in \mathbb{N}$

Avec

$$R_h = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{h-2} & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & . & \dots & \rho_{h-3} & \rho_{h-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{h-4} & \rho_{h-3} \\ .. & . & . & \dots & . & . \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & . & \dots & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_h^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{h-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & . & \dots & \rho_{h-3} & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{h-4} & \rho_3 \\ .. & . & . & \dots & . & . \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & . & \dots & \rho_1 & \rho_h \end{bmatrix}$$

La matrice R_h^* est la matrice $R_h$dans laquelle on a remplacé la dernière colonne par le vecteur $[\rho_1,...,\rho_n]^t$. Les trois premières autocorrélations partielles sont donc déterminées par les relations suivantes :

$$\theta_1 = \rho_1$$

$$\theta_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\theta_3 = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2-\rho_2) + \rho_3(1-\rho_1^2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(2-\rho_2)}$$

2.7 Séries chronologiques

Definition

- une série chronologique (temporelle) dite aussi chronique est une réalisation d'un processus stochastique (X_t, t∈T) ou T est un ensemble dénombrable et totalement ordonné.

– Une série chronologique est une suite d'observation x_{t_1}, x_{t_2}, x_{t_3} ..., x_{t_n} en des instants t_1, t_2,..., t_n ordonnées dans le temps.

2.7.1 Analyse d'une série chronologique

L'analyse des séries chronologiques a pour objectif de décrire les principales caractéristiques du processus générateur de la série, l'ajustement du modèle adéquat, la prévision et le contrôle.

2.7.1.1 Les composantes d'une série chronologique

Une règle générale en statistique descriptive consiste à commencer par regarder les données, avant d'effectuer le moindre calcul. Ainsi, l'examen du graphe de la série peut mettre en évidence :

une tendance : le phénomène étudiée a-t-il tendance à croître ou à décroître ? y'a t-il un phénomène périodique lié par exemple aux saisons ? y'a t-il des variations exceptionnelles et peut-on les expliquer ? En définitive, il s'agit de déterminer les éléments constitutifs de l'évolution globale d'une chronique : ils portent le nom de composantes.

Les premières études sur les séries chronologiques ont amené a considérer que la chronique peut se mettre sous la forme fonctionnelle suivante : $Y_t = f(C_t, S_t, \epsilon_t)$: donc on considère qu'une série Y_t est la résultante de différentes composantes fondamentales suivantes :

La tendance de la chronique (C_t)

Représente l'évolution à long terme de la série Y_t étudiée. Elle traduit le comportement "moyen" de la série.

La composante périodique ou saisonnalité (S_t)

Correspond à un phénomène qui se répète à intervalles de temps réguliers (périodique). En général, c'est un phénomène saisonnier d'ou le terme de variations saisonnières. La composante saisonnière est donc périodique de période p c'est-à-dire qu'il existe un entier p, appelé période, tel que $S_i = S_{i+p}$; pour tout i $\geqslant$1. Cette composante est donc entièrement déterminée par ses p premières valeurs S_1, S_2... S_p.

La composante résiduelle ou bruit ou résidu (ϵ_t)

Ce sont des fluctuations irrégulières, en particulier accidentelles, dont le caractère est exceptionnel et imprévisible (catastrophes naturelles, grèves, guerres ....). en général de faible intensité mais de nature aléatoire. On parle aussi des aléas.

2.7.1.2 Modèles de Décomposition Déterministes

Le modèle Additif

(A) $\quad Y_t = C_t + S_t + \epsilon_t \quad t = 1 \ldots n$

Dans le modèle additif, l'amplitude de la composante saisonnière et du bruit reste constante au cours du temps. Ceci se traduit graphiquement par des fluctuations autour de la tendance d'amplitude constante.

Hypothèses

pour des raisons d'unicité d'écriture de la décomposition (A), on suppose que :

$$\sum_{j=1}^{p} S_j = 0 \text{ et } \sum_{t=1}^{n} \epsilon_t = 0$$

Le modèle Multiplicatif

(B) $\quad Y_t = C_t \times S_t + \epsilon_t \quad t = 1 \ldots n$

Dans ce modèle, l'amplitude de la composante saisonnière et du bruit n'est plus constante au cours du temps : elles varient au cours du temps proportionnellement a la tendance (C_t) .

Hypothèses

pour assurer la cohérence de l'écriture de la décomposition (B), on suppose que :

$$\sum_{j=1}^{p} S_j = p \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \epsilon_t = 1$$

Par analogie avec le modèle additif, ces hypothèses induisent une autre écriture du modèle par un simple changement de variable :

En posant $S_j = 1 + \widetilde{S_j}$ et $\epsilon_t = 1 + \widetilde{\epsilon_t}$, le modèle multiplicatif peut également être défini par :

(B′) Y_t=C_t×(1+$\widetilde{S}_t$)+ (1+$\widetilde{\epsilon_t}$) avec t = 1...n

Avec les hypothèses :

$\sum_{j=1}^{p}\widetilde{S}_j$=0 et $\sum_{t=1}^{n}\widetilde{\epsilon}_t$=0

2.8 Opérateurs sur les chroniques

2.8.1 Les opérateur retard

L'opérateur retard B (Backward) décale le processus d'une unité de temps vers le passé. On introduit l'operateur retard B comme l'application
B : $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \longrightarrow (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}} \quad (Y_t) = BX_t = X_{t-1}$
Nous pourrons alors établir une relation de récurrence selon :
B^nX_t=B(B(...BX_t))=X_{t-n}

2.8.2 Opérateurs de différence

L'opérateur de différence Δ fait la différence entre le processus et sa version décalée d'une unité de temps. Cet operateur se construit en utilisant l'operateur précédent :
$\forall t \in \mathbb{Z},\ \Delta X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t$
$\Longleftrightarrow \Delta = 1 - B$

Elimination de la tendance

L'operateur différence Δ élimine les tendances linéaires. Par exemple, pour un processus de la forme :
X_t= a+bt+e_t

On a $\Delta X_t = b + e_t - e_{t-1}$

Et par conséquent, nous obtiendrons l'opérateur de la d ieme différence noté Δ^d tel que :

$\forall t \in \mathbb{Z},\ \Delta^d X_t$=(1-B)$^d X_t$

Elimination de la composante saisonnière

L'operateur de différence saisonnière noté Δ_s élimine une saisonnalité de période s.

L'opérateur Δ_s associé au processus $\{X_t, t \in T\}$est tel que :

$\forall t \in \mathbb{Z}$, $\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s} = (1-B^s)X_t$

2.9 Séries non stationnaires

Les chroniques économiques sont rarement des réalisations de processus aléatoires stationnaires. La non stationnarité des processus peut concerner aussi bien le moment du premier ordre (espérance mathématique) que celui du second ordre (variance et covariance du processus). Celle ci peut être repérée graphiquement (tendance, cycle long, saisonnalité,...) ou encore au moyen de la fonction d'autocorrélation (fonction d'autocorrélation lentement décroissante). Mais la plupart des résultats et des méthodes utilisées dans l'analyse des séries temporelles repose sur la notion de stationnarité du second ordre, ce qui nous méne à appliquer à la chronique non stationnaire certaines transformations (différence ordinaire, différence saisonnière,...) pour la rendre stationnaire. Parmi les processus aléatoires non stationnaires; nous pouvons distinguer deux grandes classes, à savoir les processus TS et les processus DS.

Définition et description des processus TS et DS

Définition 1

Un processus TS (trend stationnary) s'ecrit : $X_t = f_t + \epsilon_t$ ou f_t est une fonction polynomiale qui dépend du temps, linéaire ou non linéaire, et ϵ_t est un processus stationnaire. Le processus TS le plus simple est représenté par une fonction polynomiale de degré 1. Ce processus s'écrit : $X_t = a_0 + a_1\ t + \epsilon_t$

Si ϵ_t est un bruit blanc, les caractéristiques de ce processus sont alors :

$$\begin{cases} E[X_t] = a_0 + a_1 t + E[\epsilon_t] = a_1 t + a_0 \\ Var[X_t] = 0 + Var[\epsilon_t] = \sigma_s^2 \\ Cov(X_t, X_t') = 0 & Pour\, t \neq t' \end{cases}$$

Ce processus TS est non stationnaire car $E[X_t]$ dépend du temps. Comme cette espérance est égale à $a_0 + a_1$ t, il s'agit à l'instant t d'un chiffre certain. Dans ce cas, nous pouvons estimer de façon efficace les paramètres $a_0$et $a_1$de la tendance, en utilisant la méthode des moindres carrés ordinaires(MCO) sur les couples (X_t, t).

Définition 2

Les processus DS (Differency Stationnary) sont des processus non stationnaires que l'on peut rendre stationnaire par l'utilisation d'un filtre aux différence : $(1\text{-B})^d\mathrm{X}_t=\beta+\epsilon_t$

Où ϵ_t est un processus stationnaire ou encore bruit blanc, β une constante réelle et d l'ordre du filtre aux différences. Ces processus sont souvent représentés en utilisant le filtre aux différences premieres (d=1) . Le processus est dit alors processus du premier ordre. Il s'écrit :

$$(1\text{-B})\mathrm{X}_t = \beta + \epsilon_t,$$

$$\mathrm{X}_t = X_{t-1} + \beta + \epsilon_t$$

Ou ϵ_t est un processus stationnaire de type bruit blanc.

2.10 Analyse de la saisonnalité

Une série chronologique saisonnière est une série dont les données relatives à une même période de différentes années ont tendance à se situer de façon analogique par rapport à la moyenne annuelle. L'étude da la saisonnalité est un préalable au traitement d'une série chronologique. En effet, lorsque cette composante existe, il convient de l'isoler afin de pouvoir analyser les autres caractéristiques, il est possible de détecter cette saisonnalité par un examen graphique de la série, qui se manifeste par la répétition d'un certain phénomène dans chaque période. Lorsque qu'une série chronologique est structurée par une saisonnalité, les comparaisons inter-temporelles du phénomène nécessitent une chronique corrigée des variations saisonnières notée CVS ou encore désaisonnalisé. Désaisonnaliser une chronique, c'est éliminer la saisonnalité sans modifier les autres composantes de la chronique. C'est une opération délicate ce qui explique le grand nombre de méthodes de désaisonnalisation. Le choix de la technique la mieux appropriée dépend de la nature déterministe ou aléatoire (stochastique) de la saisonnalité de la chronique :

- les méthodes de régression et l'emploi de coefficients saisonniers identiques sur la période historique sont adaptés ;
- les méthodes de filtrage par moyenne mobiles.

2.11 Modèle autorégressif moyenne mobile ARMA (p,q)

Le modèle ARMA (Auto Regressive Movinig Average) a été introduit par

Box et Jenkins en 1970, l'objectif est de Modéliser les mouvements de la série temporelle à partir de son histoire et des valeurs présentes et passés d'un Bruit Blanc. Avant de passer au cas général des processus ARMA, nous nous intéressons à deux classes de processus ARMA particuliers : les processus à moyenne ajustée (MA) et les processus autorégressifs (AR).

Modèle mixte ARMA

Définition

Soit $(\mathrm{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire au second ordre et centré. $(\mathrm{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA(p,q), s'il existe un bruit blanc ϵ_t défini sur (Ω , Å ,P)et des nombres réels ϕ_j (avec ϕ_0=1),ϕ_1,...,ϕ_p et θ_j (avec θ_0=1), θ_1,...θ_q tels que

$$\sum_{i=0}^{p}\phi_i X_{t-i}=\sum_{j=0}^{q}\theta_j\epsilon_{t-j} \qquad (2.1)$$

Avec ϵ_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_ϵ^2 .

Modèle autorégressif AR(p)

On dit qu'un processus $(\mathrm{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus autorégressif ou encore processus AR d'ordre p noté AR(p), s'il verifie (2.1) avec q=0 i.e.

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ \epsilon_t = \sum_{i=0}^{p}\phi_i X_{t-i} \qquad (2.2)$$

où ϵ_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_ϵ^2 .

Modèle moyenne mobile MA(q)

On dit qu'un processus $(\mathrm{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus à moyenne mobil d'ordre q, noté MA(q), s'il vérifie (2.1) avec p=0 i.e.

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t = \sum_{J=0}^{q}\theta_j\epsilon_{t-j} \qquad (2.3)$$

où ϵ_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_ϵ^2 .

Ce processus est toujours stationnaire. nous allons caractériser les processus AR(p) et donner, sans démonstration, quelques résultats sur les processus ARMA(p,q).

Les processus AR(p) jouent un rôle important dans les applications car ce sont ceux qui, à tout instant t, peuvent être extrapolés linéairement à partir des p valeurs précédentes $\mathrm{X}_{(t-1)}$,... ;$\mathrm{X}_{(t-p)}$ à un bruit blanc prés. si A désigne le polynôme unitaire (A(0)=1) de degré p :

A(z)=1+$\sum_{i=1}^{p}\phi_i z^i$

L'équation (2.2) peut alors s'écrire, à l'aide de l'operateur retard B, sous la forme A(B)X$_t$=ϵ_t $\forall$t$\in$ $\mathbb{Z}$.

2.12 Processus ARIMA (AUTO REGRESSIVE INTEGRATED AVERAGE MOBILE)

Les modèles ARIMA sont des modèles non stationnaires et ont une structure proche des modèles ARMA, ils sont intégrés et modélisables par des processus ARMA.

Définition 1

Un processus intégré est un processus qui est peut être rendu stationnaire par différenciation. Si un processus doit être différencié d fois pour un atteindre la stationnarité, il est dit intégré d'ordre d ou I(d) ; par conséquent les processus stationnaire sont I(0) ;

Définition 2

(X$_t$)$_{t\in\mathbb{N}}$ un processus ARIMA (p, d, q) s'il existe un entier d tel que le processus Y$_t$ =(1-B)^d X$_t$ est un processus ARMA (p, q)

2.13 Test de non stationnarité

2.13.1 Test de Dickey-Fuller

Il teste si la tendance est déterministe pour cela :

Y$_t$ = ρY_{t-1}+ϵ_t

Dans ce cas, $|\rho| < 1$, le pocessus est stationnaire, explosif si $|\rho| > 1$, intégré dans le cas contraire.

2.13.2 Test de Dickey-Fuller augmenté

Ce test prend en compte l'auto-corrélation possible de la série differenciée, pour cela on effectue le test suivant :

$$\begin{cases} H_0 : Y_t \quad est\, I_1 \\ H_1 : Y_t \quad n'est\, pas\, I_1 \end{cases}$$

On effectue la régression suivante :

$$\triangle Y_t = \beta' D_t + \pi Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \phi_j \triangle Y_{t-j} + \mu_t$$

La statistique de ce test est :

$$\text{ADF}=\frac{T\hat{\pi}}{1-\hat{\phi}_1-...-\hat{\phi}_p}$$

2.13.3 Test de Phillips-Perron

Le test de Phillips et Perron est construit sur une correction non paramétrique des statistiques de Dickey-Fuller pour prendre en compte hétéroscédasticité et/ou auto-corrélées. Pour cela on effectue la régression suivante :

$\Delta \mathrm{Y}_t=\beta'\mathrm{D}_t+\pi \mathrm{Y}_{t-1}+\mu_t p$

La statistique de ce test est :

$\mathrm{PP}=\mathrm{T}\hat{\pi}-\frac{1}{2}\ \mathrm{T}^2\ \frac{SE(\hat{\pi})}{\hat{\sigma}^2}(\hat{\lambda}^2-\hat{\sigma}^2)$

$\mathrm{SE}(\hat{\pi}\ )$: l'ecart type de $\hat{\pi}$;

$\hat{\lambda}^2=\hat{\sigma}^2+2\sum_{j=1}^{q}(1-\frac{j}{q+1})\hat{\gamma}(\mathrm{j})$

Avec

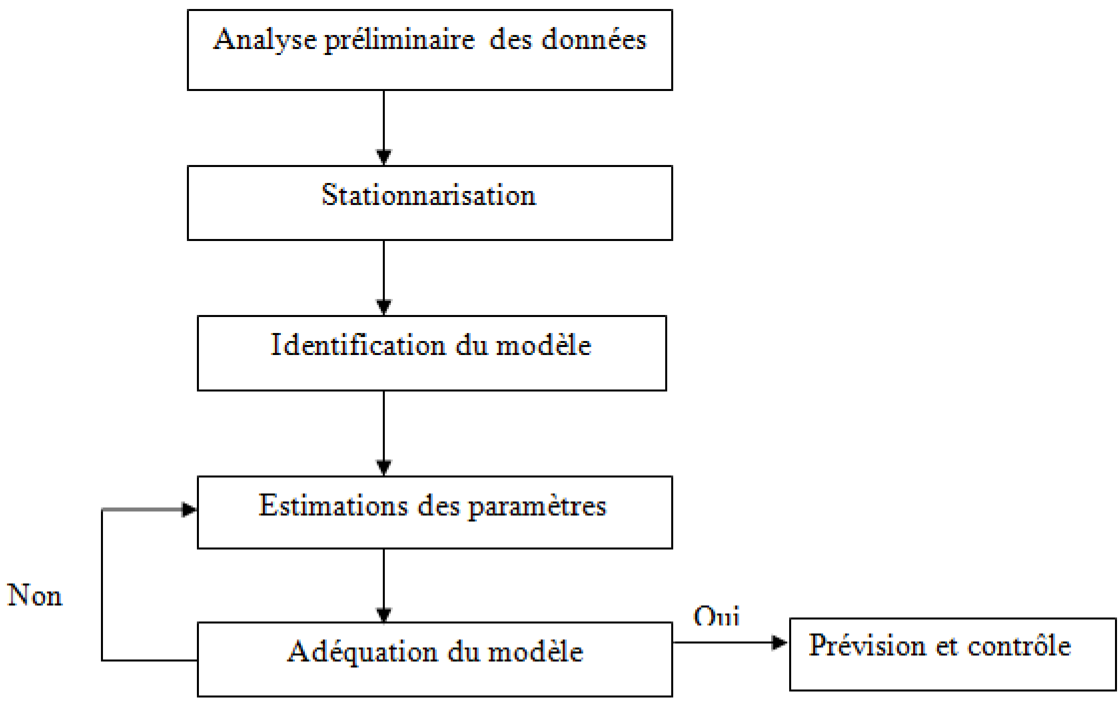
$\hat{\gamma}(\mathrm{j})=\frac{1}{2}\sum_{t=j+1}^{T}\hat{\mu}_t\hat{\mu}_{t-j}$

Puis on calcule la probabilité : $\mathrm{P}(\mathrm{ADF}<\mathrm{c})=\alpha$.

2.14 Les étapes de modélisation d'une série chronologique

Box et Jenkins(1970) ont proposé une méthodologie de modélisation d'une série chronologique uni variée basée sur les modelés linéaires ARMA, ARIMA. Cette méthodologie possède trois étapes : identification, estimation et validation. Il s'agit tout d'abord d'étudier la courbe représentative pour repérer la saisonnalité et la tendance éventuelle. Dans la phase d'identification, on doit identifier les ordres de différenciation et de saisonnalité puis les paramètres p et q en faisant appel à des outils tels que les fonctions d'auto-corrélations. A la fin de cette méthode on a plusieurs modèles parmi lesquels il faudra choisir lors des phases suivantes. Puis la phase d'estimations des différents modèles retenus pour les valeurs de p,q, d. Plus précisément on estime les coefficients. Dans certains cas on utilise la méthode de maximum de vraisemblance. Enfin, on soumet les différents ajustements à un certains nombre de tests et on applique un certains nombre de critères(Critères d'Akaike (AIC) et le critère bayesien (BIC) pour choisir le modèle final retenu.

L'intérêt de cette approche est qu'une modélisation ARMA conduit à des prévisions optimales si la variance de l'erreur de prévision est minimale. Cette approche se schématise comme suit :



-Organigramme de méthode de Box-Jenkins-

2.14.1 Stationnarisation

L'opérateur de différentiation Δ=1-B tel que B opérateur retard élimine les tendances, d est estimé en effectuant des tests de stationnarité sur la série brute puis sur les séries résiduelles .cette opération rend la série stationnaire et donne une estimation du nombre d . La série résiduelle supposé stationnaire sera modélisé par un ARMA(p, q).

2.14.2 Identification du modèle

En premier lieu, on examine le graphe représentatif de la série chronologie, ceci peut donner une idée préliminaire sur le comportement de la série (stationnarité, tendance, saisonnalité ,...).Si la série présente une tendance et/ou une saisonnalité , des transformations adéquates doivent être appliquées afin de stationnariser la série. L'idée générale de l'identification dans la méthodologie Box-Jenkins, consiste à comparer la structure des corrélations estimées que présente la série à travers le corrélogramme (diagramme représentatif des auto corrélations estimées) avec la structure de corrélation théorique exhibée par des modèles bien connus. Ainsi l'étude du corrélogramme est très utile pour la détermination des ordres p et q, puisque les fonctions d'auto corrélation simples et partielle peuvent indiquer la présence d'un modèle moyenne mobile ou autorégressif respectivement.

Plus précisément si la fonction d'autocorrélation simple décroit rapidement vers 0 et la fonction d'autocorrélation partielle présente un cut-off après p retard, on peut conclure que la série provient d'un processus AR d'ordre p(AR(p)).

si la fonction d'autocorrélation simple présente un cut-off après q retards et que la fonction d'autocorrélations partielles décroit rapidement vers 0, alors on peut conclure que la série est générée à partir d'un modèle moyenne mobile d'ordre q (MA(q)). On note que si les fonctions d'autocorrélations simples et partielles présentent une forme exponentielle ou sinusoïdale, on constate que on est en présence d'un processus autorégressif moyenne mobile ARMA(p ,q).

Cette étape n'est pas aisée et demande beaucoup d'expertise, il existe cependant des méthodes d'identifications automatiques, basées sur le critère d'information.

Critère d'information

Ils existent des critères d'informations qui sont utilisées, comme guide, dans le choix du modèle, ce qui nous permet d'éviter la sélection arbitraire des paramètres p et q du modèle. Parmi ces critères, ils existent les critères d'information qui mesurent l'écart entre la vraie loi inconnu et celle du modèle proposé ; les estimations de la qualité d'information qui ont été proposés sont :

– Critère d'Akaike (1969) appelé aussi AIC tel que :
AIC= $\log\sigma^2+\frac{2(p+q)}{N}$
– Critère bayesien (1977) appelé aussi BIC tel que :
BIC= $\log\sigma^2+(p+q)\frac{Log(N)}{N}$

Remarque

Il y a d'autres critères qui sont orientés surtout vers la mesure de la performance prévisionnelle des modèles. Ces critères sont appelés critères de pouvoir prédictifs. On peut citer :
– Le coefficient de détermination R^2

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{V}$$

Avec V la variance de la série initiale

– La statistique de Fisher F

$$F=\frac{\frac{V-\sigma^2}{(p+q)}}{\frac{\sigma^2}{(N-p-q)}}$$

Ces critères doivent être maximisés et le modèle qui a la meilleure performance prévisionnelle est celui qui rend maximum l'un ou les critères considérés.

2.14.2.1 Estimation des paramètres

Une fois que l'étape de l'identification terminée, il faut estimer les paramètres qui sont les coefficients des polynômes AR et MA et la variance des résidus ϵ_2. La méthode d'estimation la plus utilisée est celle du maximum de vraisemblance ou la méthode des moindres carrés .Le principe consiste à construire une fonction appelée fonction de vraisemblance et par la suite à maximiser son logarithme par rapport aux paramètres θ_i, θ_j (avec i=1...p,j=1...q), permettent ainsi de trouver la valeur numérique la plus vraisemblable pour ces paramètres. L'étape d'estimation achevée, l'étape suivante va nous permettre de valider le modèle estimé.

2.14.2.2 Validation

Au début de cette étape on dispose de plusieurs processus ARMA dont on a estimé les paramètres. Il faut maintenant valider ces modèles afin de les départager. Pour cela, on applique des tests sur les paramètres et sur les résidus. Si plusieurs modèles sont validés, l'étape de validation doit se poursuivre par une comparaison de qualité de ces derniers.

2.14.2.3 Prévision

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, un processus au second ordre réel est centré dont la fonction d'autocovariance est noté γ(i,j)=E(X_iX_j). Soit (X_1,X_2,...,X_n) un échantillon de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, On note H_n =[X_1,X_2,...X_n] le sous espace fermé de $L^2(\Omega$, Å, P) engendré par $(X_j)_{1\leq j\leq n}$

on pose que $\hat{X}$=0 et $\hat{X}_j$=$H_{n_{-1}}$ (X_j)

On suppose que la matrice K(i ,j) est définie positive on montre que

H(n)=[($X_1 - \hat{X}_1$),...,($X_n - \hat{X}_n$)] et on déduit que

$\hat{X}_{n+1}$=$\sum\limits_{j=1}^{n}\theta_{n,j}(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j})$ Pour n$\geq$ 1.

(prévision d'horizon d'ordre 1)

Pour des prévisions d'ordre h$\geq$1

$$\hat{X}_{n+h} = \sum_{h=1}^{n+h-1}\theta_{n+h-1,j}(X_{n+h-j} - \hat{X}_{n+h-j})$$

Si on écrit (X_t) sous forme d'une moyenne mobile infinie :

$$X_t = \epsilon_t+\sum_{j=1}^{+\infty}(b_j\epsilon_{t-j})$$

On a l'intervalle de confiance au niveau α=5% d'ou :

$$X_t\in[\hat{X}_{t+h}\text{-}1.96\sigma_\epsilon\left(\sum_{j=0}^{h-1}b_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \hat{X}_{t+h}+1.96\sigma_\epsilon\left(\sum_{j=0}^{h-1}b_j^2\right)^{\frac{1}{2}}]$$

Mesure de la qualité de prévision

Dans l'échantillon initial (X_1,X_2,...X_T), on considère seulement T_1 =(1-ϵ)T observations avec ϵ>0. Les L=T-(1-ϵ)T seront à prévoir par le modèle .

On peut alors considérer plusieurs critères :

1-Mean Absolute Percentage Error

MAPE=$\frac{1}{L}\sum_{r=1}^{L}\frac{|X_{T1+r}-\hat{X}_{T1+r}|}{X_{T_1+r}}$

2-Mean Square Error

MSE=$\left(\sum_{r=1}^{L}\frac{(X_{T1+r}-\hat{X}_{T1+r})^2}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$

2.14.2.4 Lissage Exponentiel

Les méthodes de lissage exponentiel sont des méthodes de prévision à court terme;

- constituent un outil permettant de réaliser les prévisions à partir de l'observation d'une série temporelle;
- La technique de lissage exponentiel est utilisé dans le cas d'une chronique affectée d'une tendance aléatoire;
- Elles supposent que le phénomène étudié ne dépend que ses valeurs passées;
- Se sont des méthodes d'extrapolation qui donnent un poids prépondérant aux valeurs récentes : les coefficients de pondération décroissent en remontant dans le temps :

Prévoir par extrapolation consiste à prolonger l'évolution passée, il faut choisir :

•Jusqu'à quelle date on remonte;

•Quelles sont les observations les plus importantes (pondération des observations).

- Chacune des méthodes dépond d'un ou plusieurs paramètres (paramètres de lissage) compris entre 0 et 1;
- Le poids de chacune des valeurs passées se calcule à partir de ces paramètres.
- Ces méthodes sont largement diffusées et utilisées. Leur succès est dû à la fois à leur simplicité et à la qualité des prévisions obtenues.

Nous présentons trois types de lissage exponentiels :

Le lissage exponentiel simple (LES)

Qui consiste à ajuster localement à la série temporelle une constante, il dépend d'un seul paramètre de lissage. cette méthode a été introduite par Brown en 1962 ; elle a ensuite été généralisée par Holt et Winters.

Le lissage exponentiel double(LED)

Qui ajuste quant à lui une droite, comme son nom l'indique la technique du LED consiste à effectuer un lissage de la série déjà lissée. Il dépend de deux paramètres : l'un relatif au niveau,l'autre à la tendance ;

Le lissage exponentiel de Holt-Winters

Qui considère des fonctions plus complexes (polynomiales, périodiques. . .), dans cette technique on commence par choisir le modele de composition, car ya une méthode de lissage pour les chronique avec saisonnalité additive et une autre méthode de lissage pour les chronique avec saisonnalité multiplicative. Ildépend de trois paramètres : l'un relatif au niveau, un autre relatif à la tendance, et le dernier à la saisonnalité.

1. Lissage exponentiel Simple

Disposant d'une série temporelle x_1, x_2,. . . x_n l'objectif du lissage exponentiel est d'estimer la valeur de x_{n+h} non encore observée, nous noterons que $\hat{x}_{n,h}$ cette prévision. Etant donnée une constante de lissage $0 \leq \alpha \leq 1$, on définit la prévision par lissage exponentiel simple :

$$\hat{x}_{n,h} = \alpha \sum_{j=0}^{n-1} (1\text{-}\alpha)^j x_{n-j} \qquad (2.3)$$

Cette expression signifie que : la prévision est une moyenne de toutes les observations passées, pondérée de sorte que les observations plus anciennes aient moins d'importance.

Remarque

- Une constante de lissage α proche de 0 (≤ 0.3) donne une importance significative aux observations éloignées, tandis qu'un proche de 1 ($\alpha \geq 0.7$) tend à négliger ces observations éloignées.
- Prévision $\hat{x}_{n,h}$ ne dépend pas de h !

Formules récursives de mise à jour

La définition (2.3) vérifiant la formule récursive suivante :

$$\hat{x}_{n,h} = \alpha x_n + (1 - \alpha)\hat{x}_{n-1,h}$$

La prévision $\hat{x}_{n,h}$ peut être obtenue immédiatement à partir de la connaissance de :

1. la prévision $\hat{x}_{n-1,h}$basée sur les n - 1èmes premières observations,
2. l'observation x_n.

L'utilisation de cette récurrence permet de réaliser des algorithmes très rapides d'estimation de la prévision par lissage exponentiel (en initialisant à $\hat{x}_{1,h}= x_1$)

Choix de la constante de lissage

Pour choisir la constante de lissage, une solution pragmatique consiste à tester plusieurs valeurs et à choisir celle minimisant un critère d'erreur minimale. Pour cela on partage l'échantillon d'observations en un échantillon d'apprentissage (les 80% premières observations : (x_1,..., x_m)où m est par exemple l'entier le plus proche de $\frac{8}{10}$ n et un échantillon test (les 20% dernières : (x_{m+1}, ... , x_n), on estime le modèle de lissage exponentiel à partir de l'échantillon d'apprentissage , et on évolue l'erreur sur l'échantillon test :

$$\text{erreur}=\sum_{h=1}^{n-m}(\hat{x}_{t,h}-x_{t,h})^2$$

On répète cette opération pour plusieurs valeurs de la constante de lissage α, et on choisit celle conduisant à l'erreur la plus petite.

2. Lissage exponentiel double

On ajuste au voisinage de l'instant n une droite d'équation $y_t= a_1+a_2(t - n)$. La prévision par lissage exponentiel double est :

$$\hat{x}_{n,h}=\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2 h$$

Où $\hat{\alpha}_1$ *et* $\hat{\alpha}_2$ sont solutions de :

$$\text{Min}_{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}}\sum_{j=0}^{n-1}(1\text{-}\alpha)^j(x_{n-j}-(\alpha_1+\alpha_2 j))^2$$

Les solutions de cette équation sont :

$$\hat{\alpha}_1=2L_1(n)-L_2(n) \text{ et } \hat{\alpha}_2=\frac{\alpha}{1-\alpha}(L_1(n)-L_2(n))$$

Où :

$\mathrm{L}_1(n) = \alpha\sum_{j=0}^{n-1}(1\text{-}\alpha)^j \mathrm{x}_{n-j}$ et $\mathrm{L}_2(n) = \alpha\sum_{j=0}^{n-1}(1\text{-}\alpha)^j \mathrm{L}_1(n-j)$

Sont deux lissages exponentiels simples successifs.

Remarque

comme pour le lissage exponentiel simple, l'estimateur de la prévision est la meilleure approximation au sens des moindres carrés pondérés.

Formules récursives de mise à jour

$$\hat{\alpha}_1(n) = \hat{\alpha}_1(n-1) + \hat{\alpha}_2(n-1) + \alpha(2-\alpha)(x_n - \hat{x}_{n-1,1})$$

$$\hat{\alpha}_2(n) = \hat{\alpha}_2(n-1) + \alpha(2-\alpha)(x_n - \hat{x}_{n-1,1})$$

Où $\hat{\alpha}_1$(n) et $\hat{\alpha}\,_2$(n) sont les estimateurs des paramètres a_1 et a_2 lorsque l'on a observé la série jusqu'à la n-ième observation. Les valeurs initiales étant :

$\hat{\alpha}_1(0) = \mathrm{x}_1$ et $\hat{\alpha}_2(\mathrm{n}) = \mathrm{x}_2 - x_1$

3. Méthode de Holt-Winters

3.1 Méthode non saisonnière

Comme la méthode de lissage exponentiel double celle de Holt-Winters non saisonnière revient à estimer au voisinage de l'instant n une droite

$\mathrm{y}_t = \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2(\mathrm{t} - \mathrm{n})$

La prévision prend la forme :

$\hat{x}_{n,h} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2\mathrm{h}$

La variante par rapport à la méthode de lissage exponentiel double est au niveau des formules de mise à jour dans l'estimation des paramètres a1 et a2. Soient deux constantes de lissages $0 \le \alpha \le 1$ et $0 \le \beta \le 1$. Les formules de mise à jour sont :

$\hat{\alpha}_1(\mathrm{n}) = \alpha x_n + (1-\alpha)[\hat{\alpha}_1(\mathrm{n\text{-}1}) + \hat{\alpha}_2(\mathrm{n\text{-}1})]$

$\hat{\alpha}_2(\mathrm{n}) = \beta[\hat{\alpha}_1\text{-}\hat{\alpha}(\mathrm{n\text{-}1})] + (1\text{-}\beta)\hat{\alpha}_2(\mathrm{n\text{-}1})$

Remarque

- L'introduction de deux constantes rend la méthode plus souple que le lissage exponentiel double : la constante α joue un rôle dans l'estimation de l'ordonnée à l'origine de la droite, a_1, et la constante β dans celle de la pente de la droite, a_2.
- si αet β sont petits le lissage est important car on tient compte du passé lointain.

3.2 Méthode saisonnière additive

On cherche maintenant à ajuster au voisinage de l'instant n une droite d'équation y_t= a_1 + a_2(t - n)+s_t où $s_t$est une composante périodique de période T.

soient trois constantes de lissage 0<α<1 et 0<β<1,< 0<γ <1 . Les formules récursives de mise à jour sont :

$$\hat{\alpha}_1(\text{n})=\alpha(x_n - \hat{s}_{n-T}) + (1-\alpha)[\hat{\alpha}_1(\text{n-1})+\hat{\alpha}_2(\text{n-1})]$$

$$\hat{\alpha}_2(\text{n})=\beta[\hat{\alpha}_1(\text{n})-\hat{\alpha}_1(\text{n-1})]+(1\text{-}\beta)\alpha_2(\text{n})$$

$$\hat{s}_n=\gamma[x_n\text{-}\hat{\alpha}_1(\text{n})+(1\text{-}\gamma)\hat{s}_{n-T}]$$

Les prévisions seront de la forme :

$$\hat{x}_{n,h}=\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2\text{h}+\hat{s}_{n+h-T} \quad \text{Pour } 1\leq h \leq T$$

$$\hat{x}_{n,h}=\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2\text{h}+\hat{s}_{n+h-2T} \quad \text{Pour T+1}\leq h \leq 2T$$

et ainsi de suite pour h $\geq$2T. Les trois constantes de lissages, α, β, γ ont le même effet que précédemment,plus elles sont petites et plus l'importance des données éloignées est significative. Elles agissent respectivement sur les paramètres a_1 , a_2 et s_t.

3.3 Méthode saisonnière multiplicative

On ajuste au voisinage de l'instant n une droite d'équation y_t= [a_1+a_2(t - n)]×s_t , où st est une composante périodique de période T. Les formues récursives de mise à jour sont :

$\hat{\alpha}_1$(n)=$\alpha\frac{x_n}{\hat{s}_{n-T}} + (1-\alpha)[\hat{\alpha}_1$(n-1)+$\hat{\alpha}_2$(n-1)]

$\hat{\alpha}_2$(n)=$\beta[\hat{\alpha}_1$(n)-$\hat{\alpha}_1$(n-1)]+(1-β)$\hat{\alpha}_2$(n-1)

$\hat{s}_n$=$\gamma\frac{x_n}{\hat{\alpha}_1(n)}$+(1-$\gamma$)$\hat{s}_{n-T}$]

Les prévisions sont de la forme :

$\hat{x}_{n,h}$=[$\hat{\alpha}_1$+$\hat{\alpha}_2$h]×$\hat{s}_{n+h-T}$ Pour 1≤ $h \leq T$

$\hat{x}_{n,h}$=[$\hat{\alpha}_1$+$\hat{\alpha}_2$h]×$\hat{s}_{n+h-2T}$ Pour T+1≤ $h \leq 2T$

Application

Chapitre 3

Application

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous appliquons quelques outils mathématiques sur la consommation budgétaire concernant le développement économique de la wilaya de Tizi-Ouzou afin de modéliser notre chronique et calculer les prévisions.

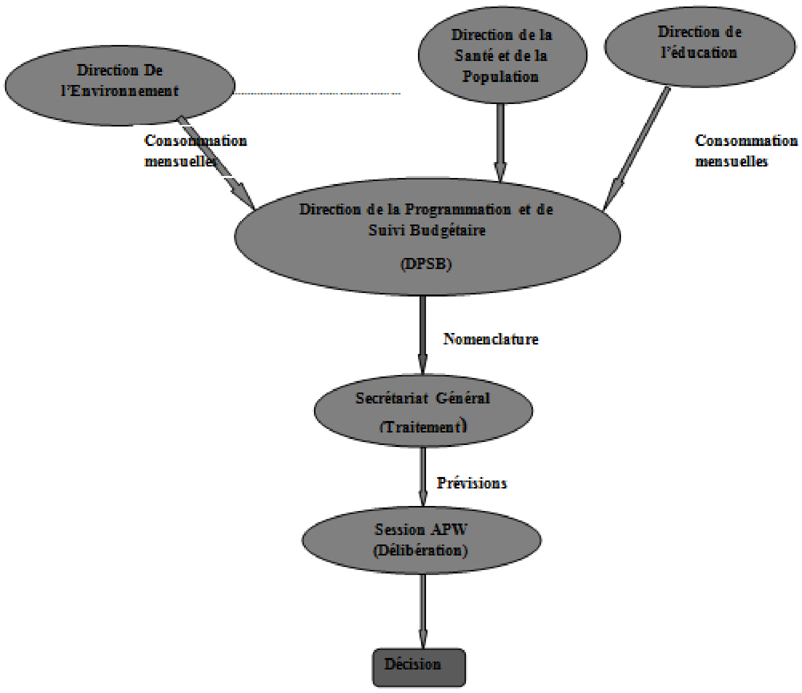
3.2 Présentation de la chronique

Consommation budgétaire dans le cadre du développement de la wilaya de Tizi-Ouzou de 2009-2015

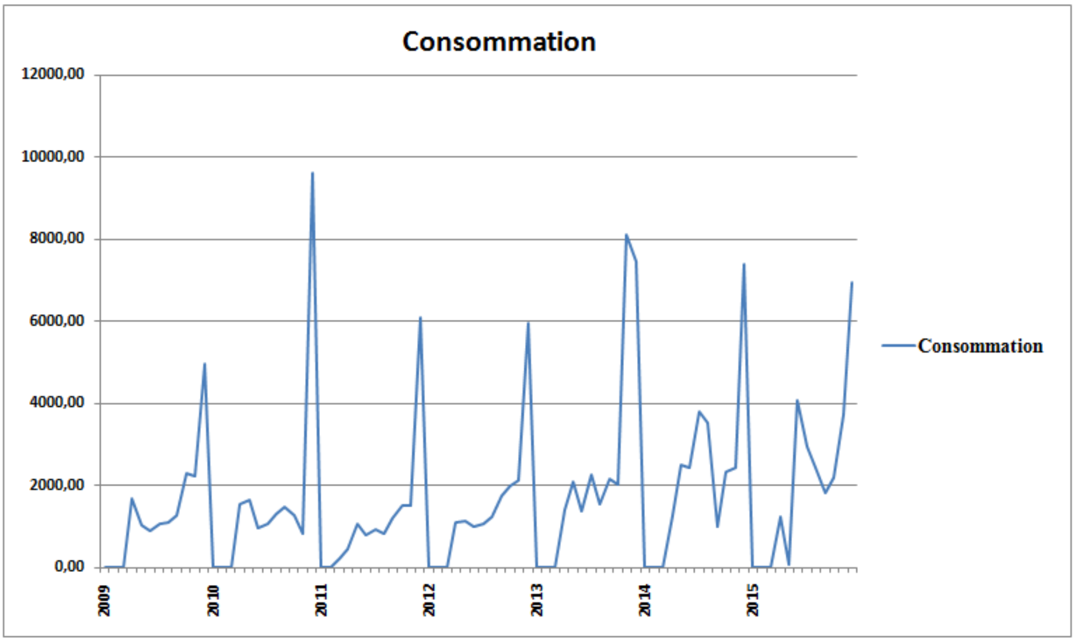
Unité : Million DA

Mois Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	Total Mois
Janvier	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Février	0,00	0,00	0,52	0,00	0,00	0,00	0,00	0,52
Mars	0,00	0,00	217,04	0,00	0,00	0,00	0,00	824,31
Avril	1671,63	1525,69	452,86	1078,74	1393,44	1268,16	1237,78	8728,31
Mai	1031,02	1627,31	1051,91	1115,44	2097,90	2516,09	67,73	9607,39
Juin	901,50	962,60	803,87	986,68	1373,10	2428,33	4081,10	10635,68
Juillet	1051,10	1061,09	938,33	1070,03	2259,48	3788,43	2944,49	12061,85
Août	1102,77	1301,66	808,50	1242,95	1550,36	3533,04	2434,65	10871,16
Septemebre	1272,16	1477,40	1183,15	1756,22	2153,03	995,85	1800,10	9365,75
Octobre	2306,64	1257,09	1491,08	1972,86	2008,67	2330,82	2190,34	11250,86
Novembre	2221,57	816,90	1502,56	2115,74	8121,85	2422,57	3731,86	18711,47
Décembre	**4968,00**	9620,88	6083,38	5968,00	7472,88	7408,75	6962,96	43516,85
Total Année	**16526,38**	**19650,62**	**14533,19**	**17306,65**	**28430,72**	**26692,03**	**25451,01**	**135574,15**

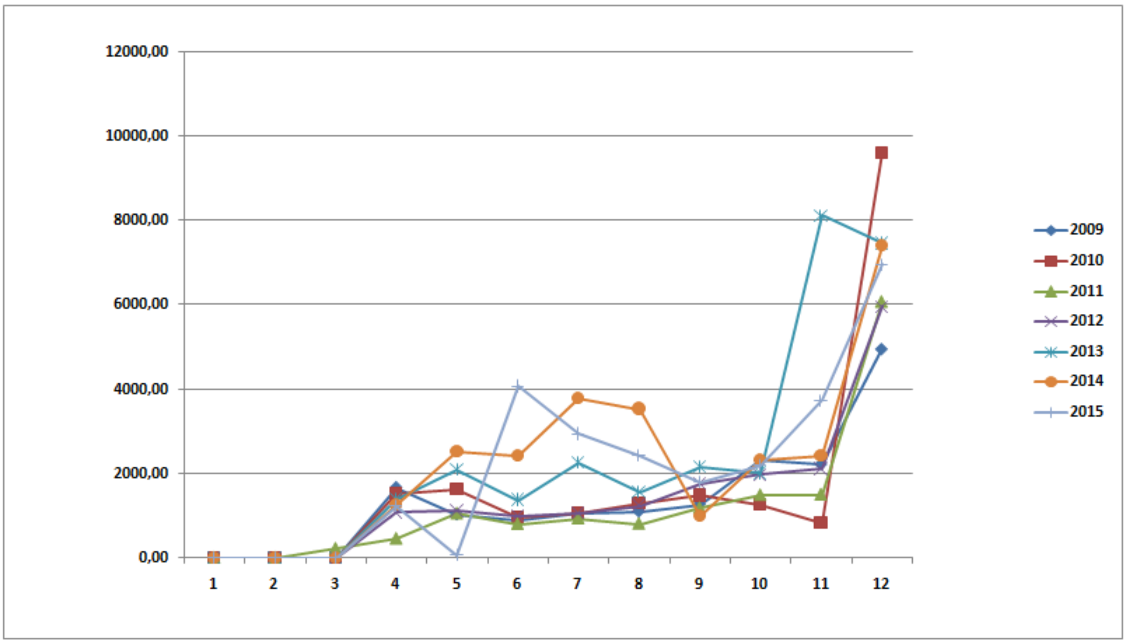
-Tableau 1 : Consommation budgétaire dans le cadre du développement de la wilaya-



-Figure 3.1 : Flux d'informations à l'intérieur de la Wilaya-



-Figure 3.2 :Série brute de consommations-



-Figure 3.3 :Consommations par année -

3.3 Décomposition de la série

Visuellement notre série présente une tendance et une saisonnalité de période 12. Les droites de régressions de minimums et des maximums de notre chronique ne sont pas parallèles et les courbes représentant les consommations de chaque année les sont aussi donc cette dernière est modélisable par une modèle multiplicatif de la forme :

$X_t = C_t \times S_t + \epsilon_t$ avec $1 \leq t \leq 84$

Tels que :

•C_t : Tendance (Trend) de la chronique de la forme linéaire :

$C_t = at + b$ (a,b) à déterminer .

•S_t :Fonction Saisonnière (Coefficient Saisonnier de la saison numéro t).

• ϵ_t : Résidu ou la composante aléatoire (erreur) de la chronique.

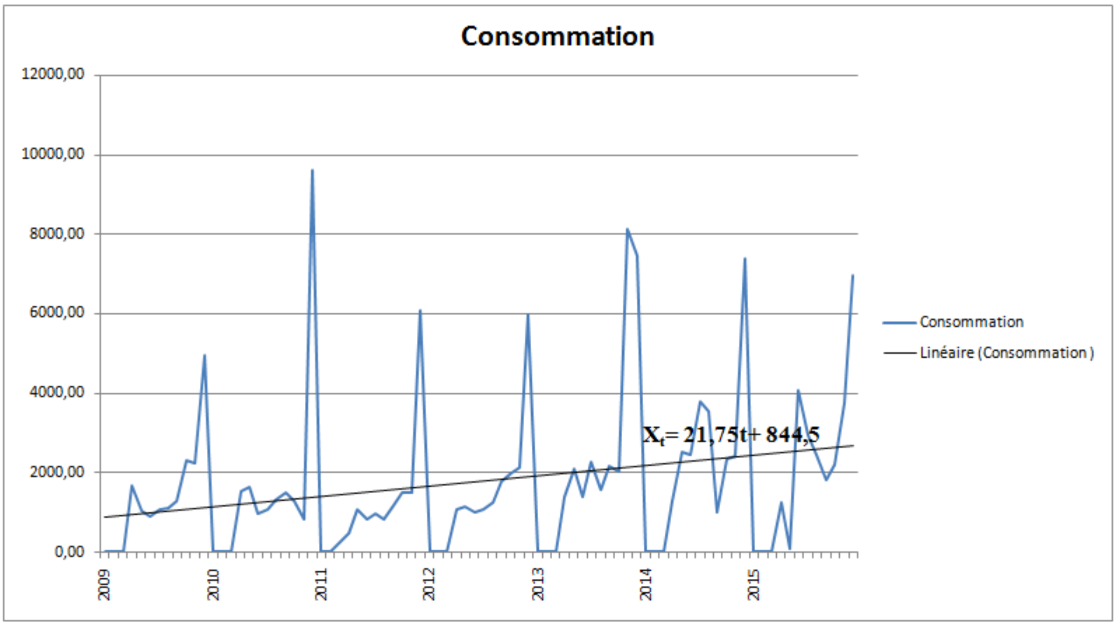
3.3.1 Détermination de la tendance

La tendance de notre chronique est obtenue par régression linéaire simple effectuée sur les variables t et X_t ; t : est la variable indépendante et X_t :la variable dépendante. En utilisant la méthode des moindres carrées ordinaire (MCO), les paramètres a et b sont estimés par les formules suivantes :

$$\begin{cases} a = \overline{X}_t - b\bar{t} \\ b = \frac{\sum_{t=1}^{t=84} (t-\bar{t})(X_t-\overline{X}_t)}{\sum_{t=1}^{t=84} (t-\bar{t})^2} \end{cases}$$

Tels que ($\overline{X}_t$) (resp $\bar{t}$) est la moyenne arithmétique de X_t (resp t) avec $1 \leq t \leq 84$

donc : C_t=21,75t+844,5 avec $1 \leq t \leq 84$



-Figure 3.4 : Tendance de la chronique-

3.3.2 Détermination de la composante saisonnière

Le coefficient saisonnier est donnée par la formule suivante :

$$s^t = \frac{1}{Card(T_i)} \sum_{t \in T_i} \frac{X_t}{C_t}$$

tel que

T_i={t, t désigne mois N° i de chaque année}, i∈{1,. . . ,12} Par conséquent on a 12 coefficients à calculer :

$$\begin{cases} s^1 = \frac{1}{Card(T_1)} \sum\limits_{t \in T_1} \frac{X_t}{C_t} & avec\, T_1 = \{1, 13, 25, 37, 49, 61, 73\} \\ \vdots & \vdots \\ s^t = \frac{1}{Card(T_i)} \sum\limits_{t \in T_i} \frac{X_t}{C_t} & \\ \vdots & \vdots \\ s^{12} = \frac{1}{Card(T_{12})} \sum\limits_{t \in T_{12}} \frac{X_t}{C_t} & avec\, T_{12} = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84\} \end{cases}$$

Donc la composante saisonnière est :

$S_t = s^i$, $t \in T_i$

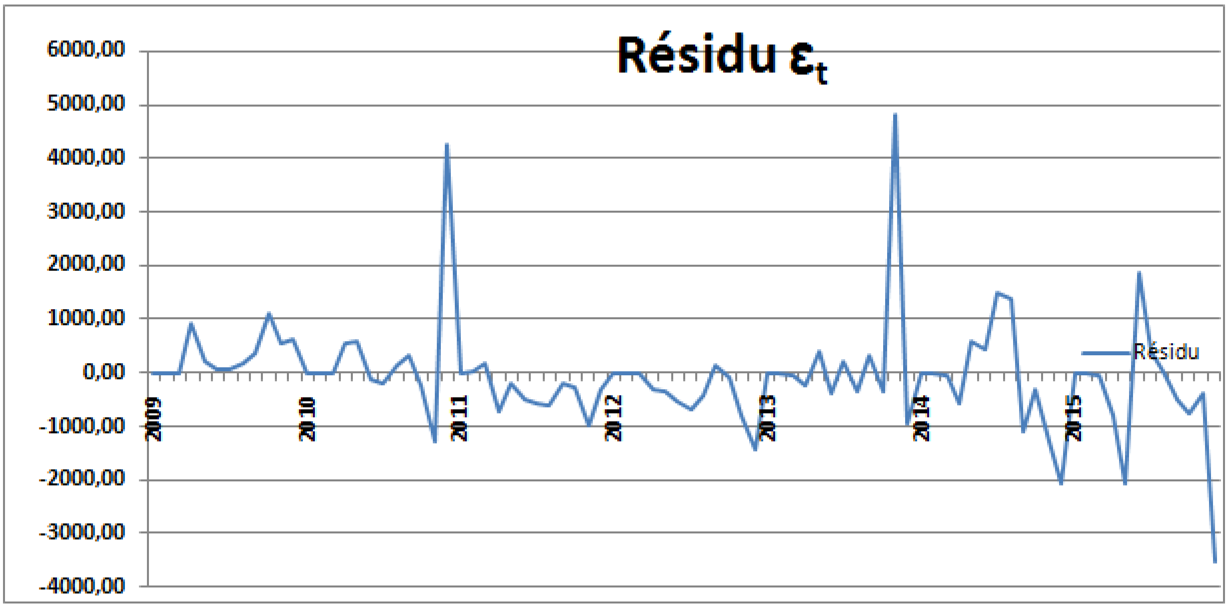
3.3.3 Détermination de la composante aléatoire

$\epsilon_t = X_t - C_t \times S_t$, $1 \leq t \leq 84$

Le processus ϵ_t vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} E(\epsilon_t) \simeq 0 \\ \forall (t, \bar{t}),\, t \neq \bar{t} :\ Cov(t, \bar{t}) = 0 \\ Var(\epsilon_t) = \hat{\sigma}^2 < \infty \end{cases}$$

Le processus ϵ_t est bruit blanc : $\epsilon_t \sim (0, \sigma^2)$

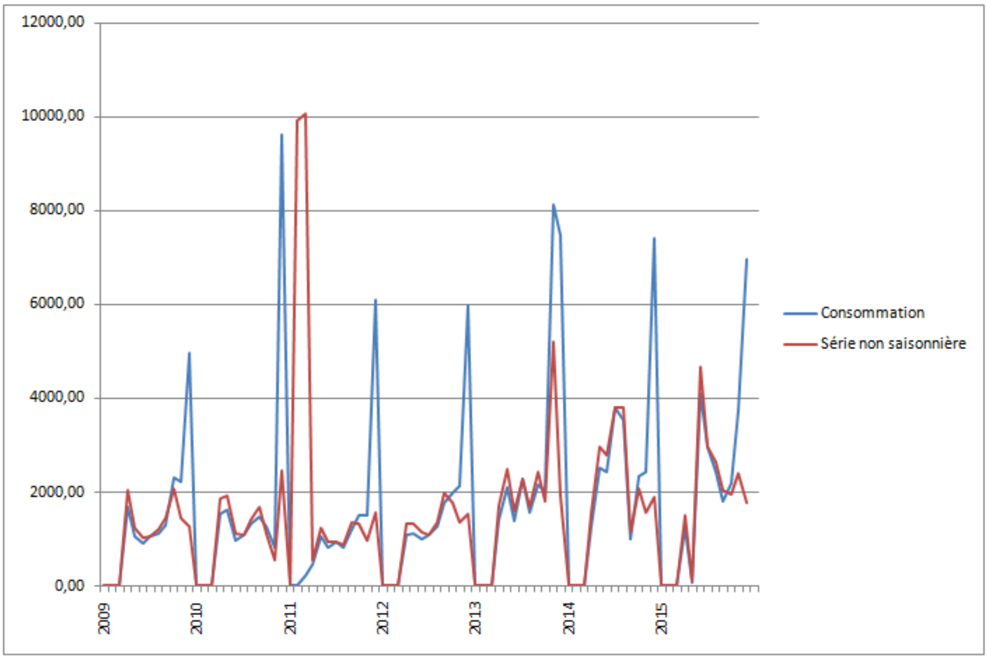


-Figure 3.5 : Variations des Résidus-

3.4 Suppression de la composante saisonnière

Certains méthodes de prévision (lissage exponentiel simple LES) ne sont pas applicables sur les chroniques présentant une saisonnalité, d'ou la nécessité de supprimer cette composante pour obtenir en sortie une série non saisonnière, la série obtenue est appelé la Série corrigée des variations saisonnières (CVS). Cette série est donnée par la formule suivante :

$$X_{CVS,t}=\frac{X_t}{S_t}\ , \quad 1\leq t\leq 84$$



-Figure3.6 : Chronique non saisonnière-

3.5 Prévisions

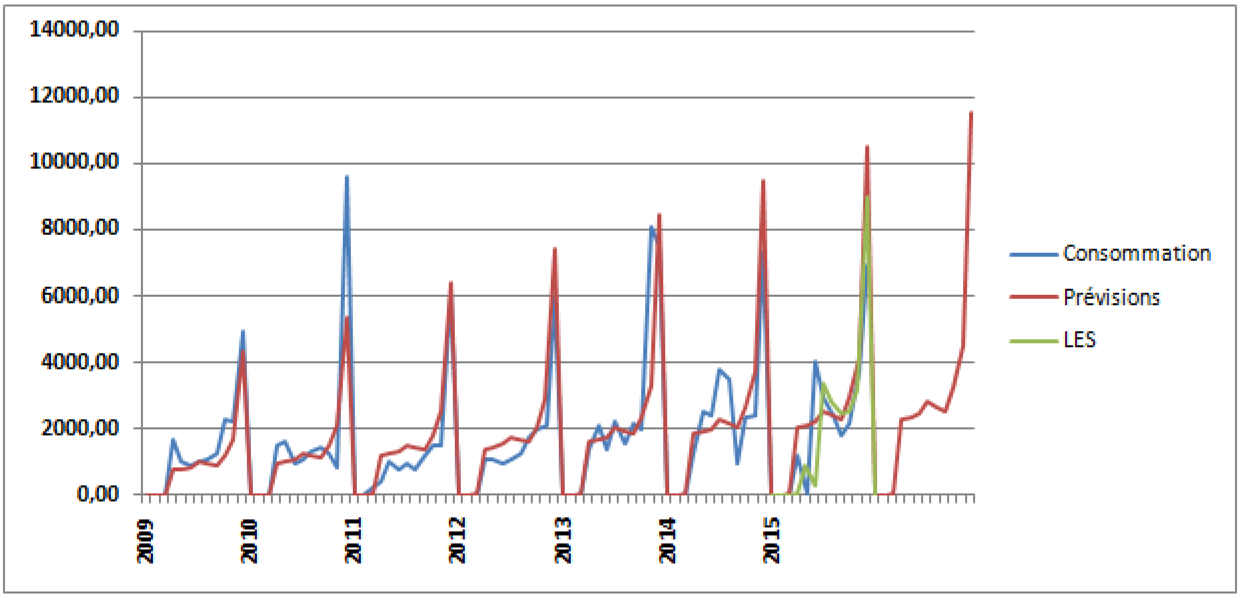
3.5.1 Prévision à long terme

La prévision à long terme se calcule par la formule suivante :

$$\hat{X}_t = C_t \times S_t \quad t>84$$

3.5.2 Prévision à court terme

La prévision à court terme s'obtient en utilisant le lissage exponentiel simple LES avec une constante de lissage α=0,7



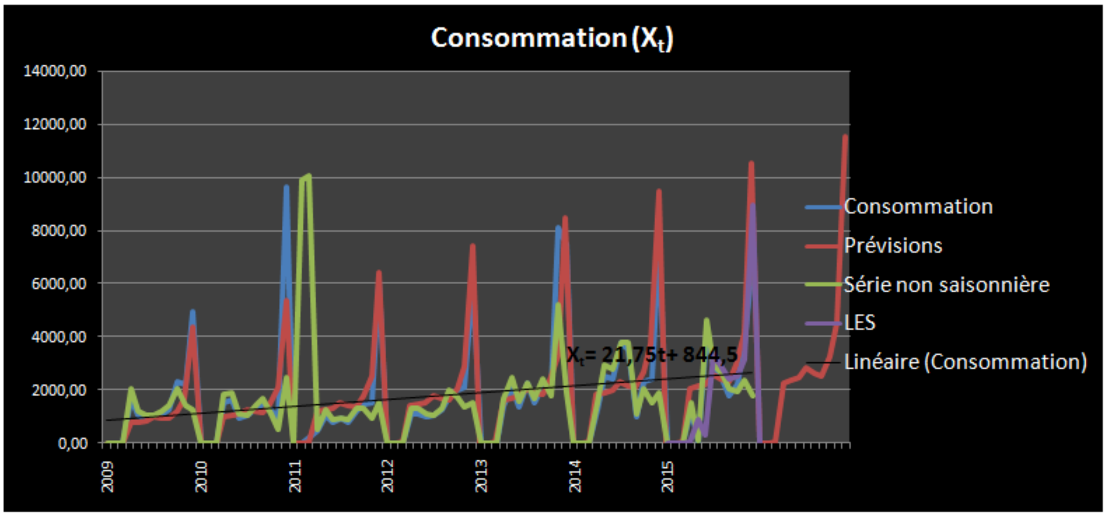
-Figure3.7 : Prévisions-

3.6 Tableau récapitulatif de traitement de la série

Année	N°:Mois	Consommation(X_t)	Trend (C_t)	Rapport (X_t/C_t)	Coèff. Saisonnier	Résidu ε_t	Prévisions	Série corrigée des variations saisonnière CVS	Prévisions par LES
2009	1	0,00	866,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
	2	0,00	888,00	0,00	0,00	-0,05	0,05	0,00	
	3	0,00	909,75	0,00	0,02	-19,63	19,63	0,00	
	4	1671,63	931,50	1,79	0,82	904,78	766,85	2030,54	
	5	1031,02	953,25	1,08	0,85	221,02	810,00	1213,36	
	6	901,50	975,00	0,92	0,88	47,45	854,05	1029,18	
	7	1051,10	996,75	1,05	1,00	55,07	996,03	1051,86	
	8	1102,77	1018,50	1,08	0,93	156,07	946,70	1186,41	
	9	1272,16	1040,25	1,22	0,89	349,96	922,20	1435,01	
	10	2306,64	1062,00	2,17	1,13	1111,52	1195,11	2049,72	
	11	2221,57	1083,75	2,05	1,56	529,65	1691,92	1423,02	
	12	4968,00	1105,50	4,49	3,93	625,99	4342,01	1264,88	
2010	13	0,00	1127,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
	14	0,00	1149,00	0,00	0,00	-0,06	0,06	0,00	
	15	0,00	1170,75	0,00	0,02	-25,27	25,27	0,00	

	16	1525,69	1192,50	1,28	0,82	543,97	981,72	1853,27	
	17	1627,31	1214,25	1,34	0,85	595,54	1031,77	1915,11	
	18	962,60	1236,00	0,78	0,88	-120,07	1082,67	1098,93	
	19	1061,09	1257,75	0,84	1,00	-195,76	1256,84	1061,85	
	20	1301,66	1279,50	1,02	0,93	112,36	1189,30	1400,38	
	21	1477,40	1301,25	1,14	0,89	323,81	1153,59	1666,51	
	22	1257,09	1323,00	0,95	1,13	-231,74	1488,83	1117,07	
	23	816,90	1344,75	0,61	1,56	-1282,48	2099,38	523,26	
	24	9620,88	1366,50	7,04	3,93	4253,76	5367,12	2449,53	
	25	0,00	1388,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
	26	0,52	1410,00	0,00	0,00	0,44	0,07	9904,27	
	27	217,04	1431,75	0,15	0,02	186,14	30,90	10057,05	
	28	452,86	1453,50	0,31	0,82	-743,72	1196,58	550,10	
	29	1051,91	1475,25	0,71	0,85	-201,64	1253,55	1237,95	
2011	30	803,87	1497,00	0,54	0,88	-507,42	1311,29	917,71	
	31	938,33	1518,75	0,62	1,00	-579,33	1517,66	939,01	
	32	808,50	1540,50	0,52	0,93	-623,40	1431,90	869,82	
	33	1183,15	1562,25	0,76	0,89	-201,82	1384,97	1334,60	
	34	1491,08	1584,00	0,94	1,13	-291,47	1782,54	1325,00	
	35	1502,56	1605,75	0,94	1,56	-1004,29	2506,85	962,46	
	36	6083,38	1627,50	3,74	3,93	-308,85	6392,24	1548,86	
	37	0,00	1649,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
2012	38	0,00	1671,00	0,00	0,00	-0,09	0,09	0,00	
	39	0,00	1692,75	0,00	0,02	-36,53	36,53	0,00	
	40	1078,74	1714,50	0,63	0,82	-332,71	1411,45	1310,36	
	41	1115,44	1736,25	0,64	0,85	-359,89	1475,33	1312,71	
	42	986,68	1758,00	0,56	0,88	-553,23	1539,91	1126,41	
	43	1070,03	1779,75	0,60	1,00	-708,44	1778,47	1070,80	
	44	1242,95	1801,50	0,69	0,93	-431,55	1674,50	1337,22	
	45	1756,22	1823,25	0,96	0,89	139,87	1616,35	1981,03	
	46	1972,86	1845,00	1,07	1,13	-103,40	2076,26	1753,12	
	47	2115,74	1866,75	1,13	1,56	-798,57	2914,31	1355,23	
	48	5968,00	1888,50	3,16	3,93	-1449,36	7417,35	1519,49	
	49	0,00	1910,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
	50	0,00	1932,00	0,00	0,00	-0,10	0,10	0,00	
	51	0,00	1953,75	0,00	0,02	-42,16	42,16	0,00	
	52	1393,44	1975,50	0,71	0,82	-232,87	1626,32	1692,63	
	53	2097,90	1997,25	1,05	0,85	400,79	1697,10	2468,93	
2013	54	1373,10	2019,00	0,68	0,88	-395,43	1768,53	1567,57	
	55	2259,48	2040,75	1,11	1,00	220,20	2039,28	2261,11	
	56	1550,36	2062,50	0,75	0,93	-366,75	1917,10	1667,94	
	57	2153,03	2084,25	1,03	0,89	305,30	1847,73	2428,63	
	58	2008,67	2106,00	0,95	1,13	-361,30	2369,97	1784,94	
	59	8121,85	2127,75	3,82	1,56	4800,07	3321,78	5202,41	
	60	7472,88	2149,50	3,48	3,93	-969,58	8442,47	1902,64	
	61	0,00	2171,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
2014	62	0,00	2193,00	0,00	0,00	-0,11	0,11	0,00	
	63	0,00	2214,75	0,00	0,02	-47,80	47,80	0,00	

	64	1268,16	2236,50	0,57	1,51	-2100,64	3368,80	841,91	
	65	2516,09	2258,25	1,11	1,31	-431,74	2947,83	1927,51	
	66	2428,33	2280,00	1,07	1,18	-255,47	2683,81	2062,96	
	67	3788,43	2301,75	1,65	1,31	769,16	3019,28	2888,12	
	68	3533,04	2323,50	1,52	1,23	673,39	2859,65	2870,64	
	69	995,85	2345,25	0,42	1,22	-1854,72	2850,57	819,32	
	70	2330,82	2367,00	0,98	1,57	-1381,43	3712,25	1486,18	
	71	2422,57	2388,75	1,01	1,93	-2177,03	4599,60	1258,13	
	72	7408,75	2410,50	3,07	5,05	-4770,91	12179,66	1466,28	
2015	73	0,00	2432,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	74	0,00	2454,00	0,00	0,00	-0,18	0,18	0,00	0,00
	75	0,00	2475,75	0,00	0,03	-72,27	72,27	0,00	3,84
	76	1237,78	2497,50	0,50	1,51	-2524,15	3761,93	821,75	57,99
	77	67,73	2519,25	0,03	1,31	-3220,79	3288,53	51,89	768,63
	78	4081,10	2541,00	1,61	1,18	1090,06	2991,03	3467,05	250,56
	79	2944,49	2562,75	1,15	1,31	-417,15	3361,64	2244,73	3262,73
	80	2434,65	2584,50	0,94	1,23	-746,22	3180,88	1978,18	2851,76
	81	1800,10	2606,25	0,69	1,22	-1367,70	3167,80	1481,00	2537,94
	82	2190,34	2628,00	0,83	1,57	-1931,24	4121,58	1396,60	2607,43
	83	3731,86	2649,75	1,41	1,93	-1370,31	5102,17	1938,10	2848,41
	84	6962,96	2671,50	2,61	5,05	-6535,47	13498,43	1378,05	9087,10
2016	85		2693,25		0,00		0,00		0,00
	86		2715,00		0,00		0,20		
	87		2736,75		0,03		79,89		
	88		2758,50		0,82		2270,92		
	89		2780,25		0,85		2362,43		
	90		2802,00		0,88		2454,40		
	91		2823,75		1,00		2821,72		
	92		2845,50		0,93		2644,90		
	93		2867,25		0,89		2541,88		
	94		2889,00		1,13		3251,12		
	95		2910,75		1,56		4544,17		
	96		2932,50		3,93		11517,81		



-Figure 3.8 :Traitement final de la série-

Conclusion générale

Les cycles financières sont très courts, les fluctuations des marchés sont fortes et la conjecture nationale instable. Dans ce contexte il devient hasardeux de parier à la stabilité des marches financières. Or la volatilité est une variable clé qu'on retrouve dans la plupart des instruments financiers et il est extrêmement important de modéliser avec soin les variations temporelles, afin d'éviter la prise de mauvaise décisions qui engendreront des risques importants pour les établissements financiers tel que la wilaya de Tizi Ouzou.

Dans le but de savoir si la wilaya de Tizi Ouzou atteindra ses objectifs dans le développement à l'horizon 2017, une modélisation de l'évolution des consommations budgétaires a été nécessaire. Pour cela nous avons utilisé une modélisation qui traduit une analyse de l'évolution de ces consommations budgétaires sous forme de séries temporelles.

Le domaine des séries chronologiques est en pleine expansion et les notions présentées dans ce travail quoique largement utilisées, ne constituent qu'une petite part des connaissances actuelles sur le sujet.

Dans un premier temps, nous avons commencé par connaitre la structure de notre série de données étudiée. Au départ cette série présente une tendance linéaire avec saisonnalité, pour la dessaisonalisation de cette chronique, il a été question d'appliqué la formule illustré par Régis Bourbonnais & Michel Terraza [1].

Dans un second temps nous avons appliqué la méthode de lissage exponentiel simple (LES) sur la chronique traité afin de calculer les prévisions.

Apres avoir analysé le graphique des prévisions (à long terme et à court terme) obtenu [figure 3.6], on constate que les prévisions effectuées sont raisonnables vu le passé de la série.

Bibliographie

[1] Regis Bourbannis, Michel Terraza. Analyse des series temporelles : applications à l'économie et à la gestion.Ed Dunod, Paris 2004.

[2] J.Brokwell, Richard A.Davis. Time Series : Theory and Methods.Second ed Springer,1991.

[3] Bresson, G et A Pirotte (1995), « Econométrie des Séries Temporelles : Théorie et Application »,1ére édition.

[4] Bentarzi, M.(1995), « Modèles des Séries Chronologiques à Coefficients Périodiques », Thése de Doctorat Es-Scinces , Institut de Mathématiques ,(U.S.T.H.B),Alger, Algérie.

[5] Medjdoub, A. et SS. Maloum, « Modélisation et prévision de la consommation de l'énergie électrique et optimisation du cout de production des centrales électriques », Mépoire d'Ingnieur en Recherche Opérationnelle,(U.S.T.H.B).

[6] Lind, Marchal, Mason, Gupta ,Kabadi, Singh, Chomé,l Aroque, Ouellet. Méthodes Statistiques pour les sciances de la gestion. Cheneliére McGraw-Hill, Montréal.

Résumé

La prévision est un élément très important dans l'étude de l'évolution financière de la wilaya de tizi ouzou, elle permet d'offrir un outil fondamental de la prise de décision optimale. Prévoir le comportement futur d'une série chronologique, nécessite l'utilisation d'une ou plusieurs méthodes de prévision. L'objectif de la modélisation de la série temporelle observée est de prédire son comportement futur à travers la détermination d'un lisseur approprié de la série des données observées.
Dans ce travail un modèle de prévision des consommations budgétaires au titre des programmes sectoriels déconcentrés (PSD) de la wilaya de Ttizi Ouzou est proposé, en vu de savoir si la wilaya de Tizi Ouzou atteindra son objectif dans la croissance économique à l'horizon 2017 avec les stratégies actuelles.
Les données mensuelles traitées couvrent la période de janvier 2009 à Décembre 2015. L'ensemble des résultats a permis de faire la prévision à un horizon donnée après le calage et validation de modèle de prévision par lissage exponentiel simple (LES) et de fournir quelques éléments de réponse sur la forme de la série à long terme et sur la série des résidus obtenue (série observée – série lissée).