REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU.

Faculté des Sciences
Département de mathématiques

Thèse :
En vue d'obtention d'un

Master 2 en Recherche Opérationnelle.

THEME

Gestion de portefeuille

Présenté par : ***Melle BOULARIAS Souad.***

Encadré par : Mr OUANES MOHAND.

Membres du jury :

Président :	Mr	AIDENE Mohamed	Professeur.
Rapporteur :	Mr	OUANES Mohand	Maître de Conférences(A).
Examinateur :	Mr	MERAKEB Abdelkader	Maître de Conférences (B).
Examinateur :	Mr	OUKACHA Brahim	Maître de Conférences (A).

Soutenu le : 10/10/2011.

Année universitaire : 2010/2011.

Je tiens, avant toute chose, remercier mes parents, qui ont tant contribué à ce que je puisse poursuivre mes études et qui m'ont toujours soutenu. Je leur adresse toute mon affection et je leur dédie ce travail.

Après m'avoir fait l'honneur d'accepter l'encadrement de cette thèse, je remercie
Mr OUANES, qui m'a accordé sa confiance en me laissant une grande liberté de pensée et d'action tout en me faisant part de ses avis, conseils et suggestions.
Je lui dois notamment le sujet et le titre de la thèse.

Toute ma gratitude va également à ceux qui ont aimablement accepté d'être examinateurs : Monsieur le professeur : AIDENE MOHAMED, Messieurs : OUKACHA Brahim, et MERAKEB Abdelkader.

Enfin, je remercie, mes sœurs et frères qui m'ont toujours soutenue. Leurs présence a été pour moi salutaire dans les périodes de doute.

SOMMAIRE

Partie II : Approche linéaire; et intégration d'un modèle à facteurs - Le modèle diagonale de Sharpe -.

Chapitre 3 : Le modèle linéaire de Sharpe(1963).

Chapitre 4 : application au modèle d'évaluation des actifs financiers.

INTRODUCTION GENERALE

Le marché financier est un lieu de rencontre entre l'offre et la demande des actifs financiers où les investisseurs interviennent et ce par le biais de leurs portefeuilles. L'accès à ce marché les oblige à supporter un risque, sous l'évaluation de leurs actifs.

C'est, depuis le début des années 1952,à la suite des travaux pionniers d'Harry Markowitz, qui a fondé son célèbre modèle moyenne variance(M_V).L'argumentation de ce modèle se fonde principalement sur le fait qu'une règle d'espérance actualisée des rendements ne permet pas à un investisseur rationnel ayant l'aversion pour le risque de préférer un portefeuille plus diversifié à un qui ne l'est pas. Markowitz introduit alors une règle basée sur un critère *M-V*. Selon ce principe, il est possible d'identifier un portefeuille avec une variance minimale pour une espérance donnée ou inversement, avec une espérance maximale pour une variance donnée. L'ensemble de toutes ces combinaisons *M-V* est appelée la *frontière efficiente.*

Actuellement, des algorithmes rapides ont été développé pour mettre en pratique cette frontière ; avec un système fini d'égalité linéaire ou contraintes d'inégalités.

La version de ***l'algorithme de la ligne critique*** développé par Markowitz était le coup de pouce de ce dernier, on permettant aux investisseurs d'éviter la vente à découverte.

Les entrées de ces algorithmes sont outre que les paramètres des contraintes ; les moyennes et les variances des titres.

Au cours de ces dernières années, les praticiens ont reconnu les limites de ce modèle et ils ont développé, ainsi, d'autres pouvant modéliser le mieux possible la relation : **Risque/Rentabilité**.

C'est ainsi, et sur les bases des travaux de Markowitz ; Sharpe, met en ouvre son modèle linéaire, il suppose que le rendement de chaque titre est lié linéairement à un indice, qui l'a nommé ***« facteur »***. L'utilisation d'un modèle à facteur fait accélérer les calculs, il réduit également les entrées du modèle. Avec le modèle ainsi augmenté, la matrice de covariance devient diagonale, ou presque, et les équations deviennent plus facile à résoudre.

Une année plus tard(1964) ; Lintner et Mossin rejoint Sharpe, et développèrent un modèle à un seul facteur, ***« le modèle d'équilibre des actifs financiers »*** ou ***MEDAF*** qui aboutit, sous certaines hypothèses, à la rentabilité espérée d'équilibre d'un titre quelconque à celui de marché, et la découverte du facteur risque ***« bêta ».***

A cet effet notre travail est organisé essentiellement en quatre chapitres, le premier chapitre est un rappel de la théorie de portefeuille avec quelques définitions essentielles. Le deuxième chapitre est consacré (selon le modèle de Markowitz) au problème de la construction de la frontière efficiente; et les différentes méthodes de la mesure de performance d'un portefeuille .Le troisième chapitre fait apparaitre l'aspect linéaire de modèle de marché comme modèle à facteur; pour finir avec le quatrième chapitre qui nous donne une introduction au modèle des actifs financiers comme modèle d'équilibre à un seul facteur, et décrit le travail pratique effectué sous forme d'une application informatique.

Le langage de programmation utilisé est le logiciel Matlab qui est facile à apprendre et qui le langage par excellence dans le monde professionnel des ingénieurs financiers.

PARTIE I

Modèle de Markowitz et détermination de la frontière efficiente.

Introduction

Depuis Markowitz (1952), l'analyse mathématique sur la gestion du portefeuille s'est développée considérablement, et c'est avec sont célèbre quatorze page intitulé : ***"Portfolio sélection"*** qui a posé les bases de la théorie moderne du portefeuille, en introduisant dans la logique des investissements boursiers un raisonnement d'optimisation qu'il a importé de la recherche opérationnelle.

Cette théorie est purement normative, c'est-à-dire qu'elle décrit le comportement que devait suivre sous certaines hypothèses un investisseur rationnel pour construire un portefeuille, en combinant arbitrairement les titres disponibles sur le marché financier, dans un univers incertain.

Ce choix est obtenu a partir de la fonction d'utilité de l'investisseur, il inclut que ce dernier optimise le couple rentabilité - risque; (la moyenne et la variance de la distribution des rendements) inclut par le portefeuille d'une façon spécifique.

Ce critère de décision est le plus souvent employé ; encore une fois il renvoie évidement l'intérêt de la décision en incertitude nommé "approche moyenne -variance" ou " allocation quadratique".

Le choix de ces deux critères n'a rien d'évident comme le reconnait Markowitz lui même et repose en fait sur des hypothèses assez restrictives.

Malgré son fondement assez fragile, l'analyse de Markowitz a connue un grand succès car elle est intuitivement compréhensible, techniquement réalisable et donne à une profusion d'application en finance de marché et en théorie financière.

Chapitre 1 :

Rappels théoriques et place centrale du risque.

1.1- Définitions et notations :

***Rendement d'un portefeuille* :**

Le rendement (moyenne) espéré d'un portefeuille peut être calculé en utilisant la relation connue:

$$\mathbf{R_P = \sum_{i=1}^{n} R_i X_i = R' X} \qquad (1.1)$$

Où :

n : qui représente le nombre de titre inclus dans le portefeuille.

R_i : Le rendement de l'actif « i » au cours d'une période quelconque, avec

$R = [R_1, R_2, ..., R_n]'$ est la transposée d'une matrice ou vecteur.

$X = [X_1, X_2, ..., X_n]$ définit le vecteur des proportions de la richesse totale investis dans chaque titre i.

Ainsi, en passant à l'espérance mathématique, on obtient la rentabilité espérée du portefeuille.

$$E_P = E[R_P] = \sum_{i=1}^{n} X_i \, E[R_i]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, X_i = \mu' X$$

D'où : $\mathbf{E_P = \mu' X}$ **(1.2)**

<u>Remarque</u> : le taux de rendement espéré est cependant insuffisant pour caractériser une opportunité d'investissement et il faut tenir compte également du risque**.**

1.2- Mesures synthétique du risque :

« On dit que la fortune sourit aux audacieux, car pour gagner de l'argent, il faut prendre des risques ».

Définition :

Le risque peut être défini comme l'incertitude liée à la variabilité de la rentabilité autour de son espérance. L'une de ces mesures, très utilisée par les praticiens, est :

- ***La volatilité :***

Soit R le vecteur des rendements de l'actif ou de portefeuille considéré. La volatilité notée σ correspond à l'écart- type de ces rendements.

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\mathbf{E}\left[\mathbf{R} - \mathbf{E(R)}\right]^{2}} \qquad \textbf{(1.3)}$$

$R = \left[R_1, R_2, \ldots, R_n\right]$ vecteur des rendements.

$E(R)$: L'espérance mathématique des taux de rendement périodique.

- ***Coefficient de volatilité (Bêta) :***

–

La volatilité historique d'un titre ou d'un portefeuille, se mesure le plus souvent à travers un coefficient Bêta, défini par :

$$\boldsymbol{\beta_i} = \frac{\mathbf{cov(R_i, R_M)}}{\boldsymbol{\sigma}^2_{\mathbf{M}}} \qquad \textbf{(1.4)}$$

Où :

COV (R_i, R_M) représente la covariance entre le rendement du titre i et celle de marché M.

$\sigma_M{}^2$: représente la variance de la rentabilité du marché.

Remarques:

- Indicateur du risque par excellence, consiste à définir la variance comme mesure du risque, comme la initié Harry Markowitz.
- Il est difficile de déterminer précisément le portefeuille de marché. souvent, il est réduit à l'indice dans lequel est évalué l'actif ou le portefeuille.
- Dans cette étude, nous n'entrons pas dans la démonstration de ces deux indices, mais expliquons les conséquences et pratiques de cette modélisation dans les modèles fondé sur leurs bases.

1.3- Rappel de la théorie du portefeuille :

La théorie du portefeuille s'intéresse aux revenus qu'un investisseur peut se procurer en combinant arbitrairement les titres disponibles sur les marchés financiers.

Les hypothèses comportementales de cette théorie sont bien connues ; si l'on admet qu'il y a limitation du nombre du titres, chaque investisseur sélectionne ces derniers en fonction de deux critères: la rentabilité espérée et le risque, et que cet investisseur présente par ailleurs vis -a- vis du risque de l'aversion .Ce risque est mesuré a partir de l'écart autour de la valeur moyenne (variance ou écart type des rendements).

Rendant compte de ces comportements, la fonction d'utilités proposée par Markowitz, respecte les axiomes de Von_neumann Morgenstern(1944); ceci a déjà été illustré par le célèbre paradoxe de saint Petersbourg. Il s'agit de la fonction quadratique, qui présente le double désavantage, de n'être croissante avec la richesse que sur un intervalle (or, on peut penser que la satisfaction augmente toujours avec la richesse), et de traduire une aversion pour le risque croissante avec la richesse (ce qui est contraire au bon sens).

C'est ainsi; que l'attitude de l'investisseur face au risque conduit à l'approche moyenne variance par le biais des fonctions d'utilité quadratique; maximiser cette fonction revient a maximiser la fonction d'optimisation de moyenne variance, à ce niveau là , la question posée par Markowitz est la suivante:" si l'investisseur croit posséder de l'information relative aux rendements d'actifs , ainsi leurs risques , comment peut -il concevoir un portefeuille optimal en utilisant cette information ?

Nous allons voir par la suite comment déterminer le portefeuille optimal à partir du critère moyenne- variance.

Chapitre 2 :

Allocation efficiente Moyenne – Variance.

2.1-Le principe :

Il est très connu que tous les investisseurs préfèrent une rentabilité élevée ainsi qu'une variance faible.

Toute fois, pour un niveau de risque, on préfère une rentabilité élevée à une autre moins élevée.

A ce niveau là, Markowitz intervient, une fois encore, en introduisant la notion du portefeuille efficient, qui consiste à déterminer un niveau de rendement espéré et accepter le risque qui lui est associé ou bien; pour un niveau de risque fixe, on va déterminer le taux de rentabilité le plus élevé.

À ce propos, Markowitz admet comme cible la détermination des portefeuilles efficients en les traçant sur un plan (rendement espéré, risque).

L’ensemble de ses portefeuilles construit la " frontière efficiente" de Markowitz.

2.2-Construction d'un portefeuille optimal :

2.2.1- Le modèle mathématique :

Soit $\mathbf{R_p}$ le rendement d'un portefeuille composé de n titres ; caractérisés par leurs rendements respectifs $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

Nous posons, en outre, que chaque titre i entre pour une proportion X_i dans la composition du portefeuille.

Donc, l'espérance de rendement du portefeuille est donnée par :

$$\mathbf{E_P = \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i = \mu' X} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Et la variance est :

$$\mathbf{V_P = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} X_i X_j = X' C X} \qquad \textbf{(2.2)}$$

Avec $\mu = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]$ vecteur des rentabilités des titres.

C : matrice (σ_{ij}) de variance- covariance de rendement de chaque titre.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}.$$

Markowitz (1959) suppose que ; le choix des poids X_i est soumis aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{A\,X = b} & \textbf{(2.3)} \\ \mathbf{X \in \Re^n} & \textbf{(2.4)} \end{cases}$$

Où : A (m $\times$n) matrice.

b : et un vecteur de $\Re^m$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ainsi, il s'agit d'un problème d'optimisation. De fait, la recherche de la variance la plus faible possible qui permette d'atteindre une rentabilité espéré $\mathbf{E_P}$, qui s'écrit alors :

$$(\mathbf{P_1}) \begin{cases} \mathbf{\underset{X}{Min}} \quad \mathbf{V_P = X' \, C \, X} \\ \\ \mathbf{s.c} \quad \mathbf{E_P = \mu' \, X} \\ \qquad \mathbf{A\,X = b} \\ \qquad \mathbf{X \in \Re^n} \end{cases}$$

Qui est appelé le ***« programme d'optimisation de Markowitz »,*** ou problème générale ***« Moyenne- Variance ».***

<u>Remarque :</u>

- Il est essentiel, que la matrice C dans **(2.2)** d'être inversible, cela se traduit par le faite que X peut comprendre des titres *sans risque* (1).

[1] C'est un actif théorique qui rapporte le taux d'intérêt sans risque .Cet actif possède une variance nulle, son rendement est donc connu à l'avance et il n'est pas corrélé avec les autres actifs.

2.2.2- Résolution du programme :

La résolution du programme d'optimisation conduit à la construction de la frontière efficiente, ensuite à l'obtention des portefeuilles optimaux ***M-V efficace***.

a) <u>La frontière efficiente :</u>

Dans la multiplicité de choix proposés à l'investisseur en termes de rentabilité et variance de portefeuille, en introduisant la notion de portefeuille efficient ; l'ensemble des portefeuilles efficients de l'univers d'actifs considéré forme la frontière efficiente.

Nous allons distinguer deux méthodes pour déterminer cette frontière suivant la nature de l'investissement.

a.1. Résolution à l'aide de la méthode de Lagrange :

Résoudre ce problème de minimisation, nous permet de définir l'équation de la frontière efficiente définie par Markowitz.

Pour cela, nous déterminons le lagrangien :

$$L = X' C X + \lambda_E (E_P - X'\mu) + \lambda (b - A X)$$

$$\lambda = \left| \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \right|$$
$$\lambda_E = \left| \lambda_{E1}, \lambda_{E2}, \ldots, \lambda_{En} \right|$$

Avec λ_E et λ les multiplicateurs de Lagrange.

La condition d'optimalité du premier ordre s'écrit :

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 2\, C X - \lambda_E \mu - \lambda A = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$X = \frac{\lambda_E}{2} C^{-1} \mu + \frac{\lambda}{2} C^{-1} A \qquad (2.5).$$

En combinant avec les deux contraintes, nous avons :

$$\begin{cases} \mu' X = E_P \\ A' X = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_E \mu' C^{-1} \mu + \lambda \mu' C^{-1} A = 2 E_P \\ \lambda_E A' C^{-1} \mu + \lambda A' C^{-1} A = 2 b \end{cases}$$

Nous posons :

$$F = A' C^{-1} \mu = \mu' C^{-1} A.$$
$$G = \mu' C^{-1} \mu.$$
$$H = A' C^{-1} A.$$

Le système à résoudre en λ_E et λ devient :

$$\begin{cases} \lambda_E G + \lambda F = 2 E_P \\ \lambda_E F + \lambda H = 2 b \end{cases}$$

Nous obtenons finalement les expressions des multiplicateurs de Lagrange suivant :

$$\begin{cases} G H \lambda_E - F^2 \lambda_E = 2 H E_P - 2 Fb \\ F^2 \lambda - G H \lambda = 2 b F E_P - 2Gb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_E = 2 \dfrac{H E_P - Fb}{D} \\ \lambda = 2 \dfrac{Gb - b F E_P}{D} \end{cases}$$

Avec :

$$D = G H - F^2 > 0.^{(2)}$$

Enfin, en substituant les expressions des multiplicateurs dans l'équation **(2.5),** nous obtenons les poids du portefeuille de variance minimum $\mathbf{X_P}$ suivants :

[2] Pour déterminer le signe de D, on étudie la forme quadratique ($F\mu' - G 1'$) σ^{-1} ($F\mu - G 1$) celle-ci est positive puisque C^{-1} est définie positive et elle peut s'écrire $G^2 H - F^2 G = G (GH - F^2) = G D$, comme G D >0, et que G>0 ; D>0.

$$X_P = g + h\,E_P.$$

Avec :

$$g = \frac{1}{D}\left[G(C^{-1}A) - F(C^{-1}\mu)\right].$$
$$h = \frac{1}{D}\left[H(C^{-1}\mu) - F\,b(C^{-1}A)\right].$$

Il est commode de représenter la frontière efficiente, c'est-à-dire l'ensemble des portefeuilles efficients, dans le plan $(\boldsymbol{\mu_P}, \boldsymbol{\sigma_P})$; avec :

$$\sigma_P = \sqrt{X'\,C\,X_P} = \sqrt{\left(\frac{\lambda_E}{2}\mu'\,C^{-1} + \frac{\lambda}{2}A\,C^{-1}\right)C\,X_P}$$
$$= \sqrt{\frac{\lambda_E}{2}\,\mu'\,X_P + \frac{\lambda}{2}A'\,X_P} = \sqrt{\frac{\lambda_E}{2}\,E_P + \frac{\lambda}{2}\,b}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{D}(H\,E_P^{\,2} - 2\,F\,E_P + G)}.$$

Proposition : La frontière efficiente est la partie supérieure d'une parabole dont l'équation est :

$$\sigma_P^{\,2} = \frac{1}{D}(H\,\mu_P^{\,2} - 2\,F\,\mu_P + G). \qquad (2.6)$$

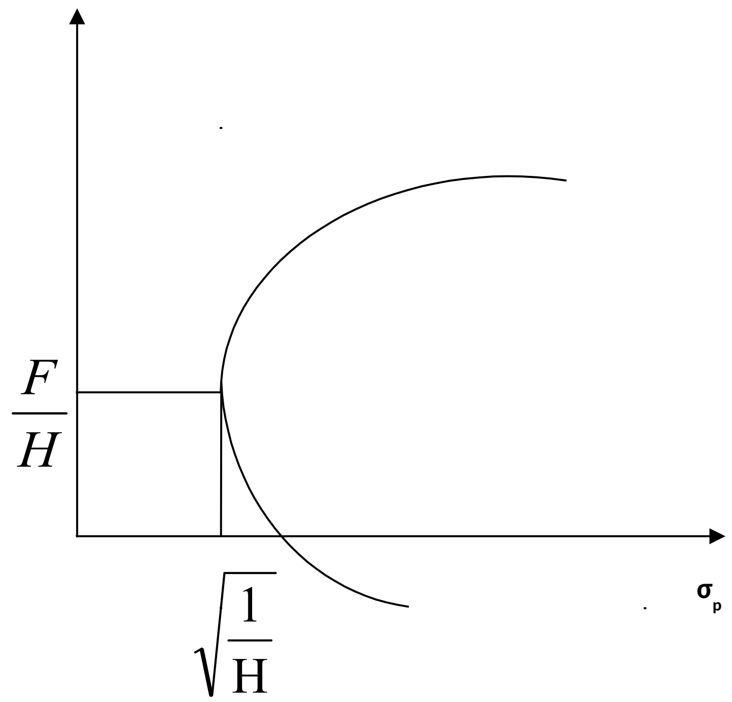

Figure 2.1 : la frontière des portefeuilles efficaces dans l'espace variance /espérance des rendements à variance minimale.

Comme le montrent la figure 2.1, l'équation de la frontière des portefeuilles efficients est une parabole dont la base est le portefeuille de variance minimale

Remarque :

On remarque que par construction, que l'ensemble définit par la frontière est convexe, ce qui prouve que le risque n'augmente pas linéairement en fonction des poids d'actifs dans le portefeuille.

Il est à noter que la région située au dessus de la frontière implique qu'un tel portefeuille est impossible à construire ; alors que la région situé au dessous de la frontière implique que ces portefeuilles sont sous optimaux et n'intéressant pas un investisseur rationnel.

Le problème ici se manifeste par la détermination de portefeuille optimal, en d'autre terme celui qui coïncide avec la courbe.

a.2. Algorithme de la ligne critique :

La frontière efficiente est la partie « nord ouest » de la courbe composée des portefeuilles définies par le principe, pour chaque valeur fixée $\mathbf{E_P}$, on détermine les proportions X_i (i=1…n) pour lesquelles σ_P^2 est minimal.

La méthode qui vient d'être présenté n'impose pas aux proportions d'être positives ; même si elle a pour avantage d'être simplicite, elle présente l'inconvénient de tolérer des valeurs négatives pour les proportions X_i ,(Une valeur négative pour une proportion correspond à *« une vente à découvert »* (3)).

---

3 la vente à découvert est une opération boursière qui consiste à vendre un titre que l'on possède pas en espérant le racheter à un cours moins élevé, cette opération est un pari sur l'avenir et est considéré comme risquée dans la mesure où vous n'avez pas la totalité de l'argent disponible afin de financer une éventuelle perte.

Par ailleurs, l'algorithme de la ligne critique a traité le problème de choix de portefeuille d'une autre façon.

a.2.1- <u>Le principe</u> :

H.Markowitz a proposé une méthode algorithmique de résolution du problème avec les contraintes $X_i > 0$, pour chaque (i=1…n) .Il porte le nom d'algorithme de la ligne critique.

Celui-ci démarre avec le premier portefeuille coin qui est bien sûr constitué du seul titre ayant le rendement espéré le plus élevé.

Il parcourt alors les portefeuilles coins successifs en testant à chaque étape l'évolution de la fonction à minimiser lorsque l'on :

- Fait entrer un nouveau titre dans le portefeuille ; ou
- Fait sortir un titre du portefeuille ; ou
- Remplacer un titre du portefeuille par un qui n'y était pas déjà présent.

Cependant ; lorsque l'ensemble des portefeuilles efficients n'est pas unique, il est néanmoins « complet, non redondant ». Par un tel ensemble « complet, non redondants » nous entendons un ensemble de portefeuille efficients, avec un seul et unique **X** pour chaque combinaison moyenne- variance.

Ainsi ; l'algorithme de la ligne critique fournit un tel ensemble complet, non redondant de portefeuille efficient si il est unique.

a.2.2-<u>Reformulation du problème</u> :

On a vu plus haut que, l'unique portefeuille M-V efficace de rendement espéré $\mathbf{E_P}$ et de variance [4] minimale C (σ_{ij}) est donné par la solution du problème d'optimisation suivant [5] :

[4] Si la matrice C est non symétrique, on peut la transformé à une matrice symétrique, sans perdre ces caractéristique, avec $\frac{1}{2}[C'+C]$ les notations reste les même.

[5] Comme μ_p est fixé, minimiser V_p équivaut à minimiser ½ V_p ce qui simplifie les calculs.

$$(P_2)\begin{cases}\underset{X}{\mathbf{Min}} & \frac{1}{2}V_P = \frac{1}{2}X'CX \\ \mathbf{s.c} & E_P = \mu' X \\ & AX = b \\ & X \geq 0\end{cases}$$

Avec : $X = [X_1, X_2, \ldots, X_n]'$

Premièrement, se problème est convexe selon les conditions de Karush -Kuhn-Tucker [7].

Dans ce cas, la fonction lagrangien est :

$$L = \frac{1}{2}X' C X + \lambda_E(E_P - X'\mu) + \lambda(b - AX)$$

Avec : $\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \Re^m$

λ_E : est le multiplicateur Lagrangien pour la contrainte $\mathbf{E_P = \mu' X}$.

On annulant ses dérivés par apport aux $\mathbf{X_i}$, $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\lambda_E}$; qu'on peut formuler ainsi :

1) $\eta = \frac{\partial L}{\partial X} = CX + \lambda' A - \lambda_E \mu$

2) A X=b.

Sous forme matricielle, on peut l'écrire :

$$\begin{pmatrix} C & A' \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_E \qquad (2.7)$$

$$\eta = (C \quad A')\begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} - \lambda_E \mu$$

$$\eta = (C \quad A' \quad \mu)\begin{pmatrix} X \\ \lambda \\ -\lambda_E \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

a.2.3_<u>Recherche d'une solution :</u>

Supposons alors qu'on veuille résoudre le problème décrit ci-dessus, pour des valeurs **λ** particulières, pour toutes les valeurs possibles de $\mathbf{X_i}$ comprise entre 0 et $+\infty$, il est alors naturel qu'il investisse tout son avoir dans le titre qui a le rendement espéré le plus élevé.

Ce comportement va nous permettre d'attribuer un statut de départ à nos différentes variables $\mathbf{X_i}$.

Nous allons, en effet, donner un statut « IN » au titre dont le rendement espéré et le plus élevé ; et un statut « OUT » à toutes les autres.

$\mathbf{X_i}$: qui ont un statut IN.

$\mathbf{X_j}$: qui ont un statut OUT.

On prend comme :

- Chaque $X_i>0$, l'ensemble des variables IN.
- Chaque $X_j=0$, l'ensemble des variables OUT.

La matrice C, et le vecteur μ devront évidements être transformé pour tenir compte de ces modifications.

Si le statut des différentes variables a été correctement désigné, ainsi les conditions **KKT** sont également satisfaites on aura :

$$\begin{cases} \mathbf{X_i = 0} & \mathbf{, i \in OUT} \\ \boldsymbol{\eta}_\mathbf{i} \mathbf{= 0} & \mathbf{, i \in IN} \\ \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{E} \mathbf{> 0} & \end{cases} \qquad \mathbf{(2.9)}$$

Le système **(2.7)** subira alors quelque modification en fonction du statut des différentes variables de décision.

On aura :

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}} & \overline{\mathbf{A}}' \\ \overline{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{b}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{\mu}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{E}.$$

- $\overline{C}$: est la même que C, avec la i $^{\text{ième}}$ ligne sera remplacé par le vecteur e^i de la matrice identité pour $i \in$ OUT.

- $\overline{A}$: est la même que A, avec la i ième colonne sera remplacé par le vecteur 0, pour i$\in$ OUT.
- $\overline{\mu}$ est le vecteur μ , avec la valeur 0 pour chaque i$\in$ OUT.
- Le vecteur b, reste inchangé.

On pose :

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}} & \overline{\mathbf{A}}' \\ \overline{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.10)}$$

$$\forall \ i \in IN \ , \qquad X_i > 0$$

$$\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{IN}} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathbf{IN}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\mathbf{IN}} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{IN}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{E}} \qquad \textbf{(2.11)}$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathbf{IN}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{IN}} + \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{IN}} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{E}} \qquad \textbf{(2.12)}$$

Avec : $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{IN}} = \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{IN}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\mathbf{IN}} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{IN}} = \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{IN}}^{-1} \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{IN}} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

On substituant **(2.12)** et **(2.8)** on constate que η est linéaire par apport à λ_E :

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{IN}} + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{IN}} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{E}} \qquad \textbf{(2.13)}$$

a.2.4_Déroulement de l'algorithme de la ligne critique :

Notre objectif est de déterminer les portefeuilles efficients relatifs à chaque valeur λ_E , celle-ci varie de 0 à $+\infty$.

Si la valeur λ_E est égale à l'infini ; l'investisseur ne se préoccupe que du rendement espéré ; par conséquent, il va investir tout son avoir dans le titre le plus élevé.

Ce comportement implique :

- Le titre qui a le rendement espéré le plus élevé aura un statut IN.

- Les autres auront un statut OUT.
- On devra apporter les changements adaptés à cette situation et calculer ainsi les différentes proportions X_i.
- La solution trouvée cessera d'être admissible pour λ_E la plus élevée de toutes les variables X_i, on aura ainsi pour cette valeur de λ_E critique un portefeuille coin.
- On changera par la suite la valeur de λ_E et on adaptera les matrices : $\overline{\mathbf{M}}_{IN}$, $\overline{\mathbf{M}}_{IN}^{-1}$, $\boldsymbol{\beta}_{IN}$ et $\boldsymbol{\alpha}_{IN}$.

- Pour chaque X_i =0, qui peut rentrer dans l'ensemble IN, la valeur critique de λ_E s'obtient :

$$\eta = \gamma_{IN} + \delta_{IN} \lambda_E = 0 \Rightarrow \lambda_E = -\frac{\gamma_{IN}}{\delta_{IN}}.$$

- Si les X_i présentaient un statut IN, dans la solution, on trouvera l'équation suivante : $\mathbf{X}_{IN} = \boldsymbol{\alpha}_{IN} + \boldsymbol{\beta}_{IN} \lambda_E$, et c'est à partir de cette équation qu'on calculera le λ_E critique relatif au titre i.

- Si $\boldsymbol{\beta}_{IN}$ est positif, λ_E critique se calculera donc comme suit :

$$\lambda_{E,c} = \frac{-\alpha_{IN}}{\beta_{IN}}$$

- Si $\boldsymbol{\beta}_{IN}$ est négative, le λ_E critique relatif au titre i s'obtiendra alors de la manière suivante :

$$\lambda_{E,c} = \frac{\alpha_{IN}}{\beta_{IN}}.$$

- L'algorithme s'arrête lorsque $\lambda_E < 0$, pour un nombre finie d'itérations.

Exemple : illustration de l'algorithme de la ligne critique de Markowitz

Cet exemple est tiré à partir de [3].

Considérons 4 titres dont les espérances du rendement sont les suivantes :

E_1= 0.05 E_2= 0,06 E_3= 0,08 E_4= 0,11

Ainsi les covariances entres les différents titres sont données dans le tableau suivant :

titre \ \ titre	**1**	**2**	**3**	**4**

1	0,0300	0,0162	-0,0071	0,0123
2	0,0162	0,0350	0,0135	0,0089
3	-0,0071	0,0135	0,0420	0,0048
4	0,0123	0,0089	0,0048	0,0560

Sous forme matricielle, on aura :

$$E_P = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.06 \\ 0.08 \\ 0.11 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.0300 & 0.0162 & -0.0071 & 0.0123 \\ 0.0162 & 0.0350 & 0.0135 & 0.0089 \\ -0.0071 & 0.0135 & 0.0420 & 0.0048 \\ 0.0123 & 0.0089 & 0.0048 & 0.0560 \end{bmatrix}$$

La fonction objectif de ce problème d'optimisation est donnée par le programme (P2), et le lagrangien associé par la formule (2.7), nous avons donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{L} = &-\lambda_E(0.05\,X_1 + 0.06\,X_2 + 0.08\,X_3 + 0.11\,X_4) + 0.015X_1^2 + 0.0175X_2^2 + 0.021X_3^2 + 0.028X_4^2 + \\ &2(0.0081)X_1X_2 + 2(-0.0035)X_1X_3 + 2(0.0061)X_1X_4 + 2(0.0067)X_2X_3 + 2(0.0044)X_2X_4 + \\ &2(0.0024)X_3X_4 + \lambda(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - 1) \end{aligned}$$

Les dérivées $\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial X_i}$, i =1, 2, 3, 4, seront utilisées à plusieurs reprises, nous commencerons donc par les calculer

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial X_1} = -0.05\lambda_E + 0.03X_1 + 0.0162X_2 - 0.0071X_3 + 0.0123X_4 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial X_2} = -0.06\lambda_E + 0.0162X_1 + 0.035X_2 + 0.0135X_3 + 0.0089X_4 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial X_3} = -0.08\lambda_E - 0.0071X_1 + 0.0135X_2 + 0.042X_3 + 0.0048X_4 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial X_4} = -0.11\lambda_E - 0.0123X_1 + 0.0089X_2 + 0.0048X_3 + 0.0560X_4 + \lambda = 0$$

Quand à la dérivées de L par apport à λ , elle sera évidement identique à la contrainte :

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1$.

On reprend le système sous forme matricielle :

$$\begin{array}{ccc} M & X & b \quad\quad E_P \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0.03 & 0.0162 & -0.0071 & 0.0123 & 1 \\ 0.0162 & 0.0350 & 0.0135 & 0.0089 & 1 \\ -0.0071 & 0.0135 & 0.0420 & 0.0048 & 1 \\ 0.0123 & 0.0089 & 0.0048 & 0.0560 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.06 \\ 0.08 \\ 0.11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans une première étape, nous attribuerons un statut «IN» au titre 4 puisque c'est lui qui a le rendement espéré le plus élevé, et un statut «OUT» aux trois autres titres.

IN= {4}
OUT= {1, 2,3}

La solution de départ sera obtenue par la résolution du système suivant :

$$\overline{M}_{IN}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.0123 & 0.0089 & 0.0048 & 0.0560 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En multipliant par l'inverse de la matrice $\overline{M}_{IN}$

$$\overline{M}_{IN}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0.0437 & 0.0471 & 0.0512 & 1 & -0.0560 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons :

$$\alpha_{IN} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0.0560 \end{bmatrix}, \beta_{IN} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.11 \end{bmatrix}.$$

D'où :

$X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 1$

$$\lambda = -0.0560 + 0.11\,\lambda_E$$

Les λ_E critiques des 4 titres considérées se calculent de la manière suivante :

- Pour $X_1 : \eta_1 = \dfrac{\partial L}{\partial X_1} = 0 \rightarrow -0.0437 + 0.06\,\lambda_E = 0 \rightarrow \lambda_{E,c1} = 0.7283$.
- Pour $X_2 : \eta_2 = \dfrac{\partial L}{\partial X_2} = 0 \rightarrow -0.0471 + 0.05\,\lambda_E = 0 \rightarrow \lambda_{E,c2} = 0.942$.
- Pour $X_3 : \eta_3 = \dfrac{\partial L}{\partial X_3} = 0 \rightarrow -0.0512 + 0.03\,\lambda_E = 0 \rightarrow \lambda_{E,c3} = 1.7066$.
- Pour X_4 : $X_4 = 1$, puisque $X_4 \in \{IN\}$; et $\eta_4 = 0 + 0\lambda_E$, il n'y aura pas de λ_E critique pour ce titre.

Le plus grand λ_E critique étant égal à 1.7066, nous pouvons en conclure que la première solution est valable dans l'intervalle $[1.7066, +\infty]$.

A cette dernière valeur de λ_E correspond un portefeuille coin [(6)] dont les performances sont identiques à celles du titre 4 puisque ce dernier est le seul à y être inclus.

A partir de $\lambda_{E,c3} = 1.7066$, la variable X_3 acquiert un statut « IN » tandis que celui des autres variables reste inchangé.

La matrice $\overline{M}_{IN}$ et vecteurs $\overline{b}_{IN}$ et $\overline{E}_{IN}$ deviennent maintenant :

$$\overline{M}_{IN} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0071 & 0.0135 & 0.0420 & 0.0048 & 1 \\ 0.0123 & 0.0089 & 0.0048 & 0.0560 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{b}_{IN} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{E}_{IN} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.08 \\ 0.11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En inversant la matrice $\overline{M}_{IN}$, nous obtenons :

---

6 Le passage d'un portefeuille coin à un autre consiste soit dans l'entré d'un titre supplémentaire, soit dans la sortie d'un titre soit dans l'entré de l'un et la sortie de l'autre au même temps.

$$\overline{M}_{IN}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3597 & -0.6312 & 11.3122 & -11.3122 & 0.5792 \\ -0.6403 & -0.3688 & -11.3122 & 11.3122 & 0.4208 \\ 0.0253 & 0.0148 & 0.5792 & 0.4208 & -0.0263 \end{bmatrix}$$

La multiplication de $\overline{M}_{IN}^{-1}$ par le vecteur $\overline{b}_{IN}$ et $\overline{\mu}_{IN}$ nous donne :

$$\alpha_{IN} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5792 \\ 0.4208 \\ -0.0263 \end{bmatrix}, \qquad \beta_{IN} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.3394 \\ 0.3394 \\ 0.0926 \end{bmatrix}.$$

La deuxième solution sera :

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0.5792 - 0.3394\,\lambda_E, \qquad X_4 = 0.4208 + 0.3394\,\lambda_E$$
$$\lambda = -0.0263 + 0.0926\,\lambda_E$$

Nous devons calculer les λ_E critiques pour nos différents titres :

- Pour X_1 : $\eta_1 = \dfrac{\partial L}{\partial X_1} = 0 \rightarrow -0.0253 + 0.0491\,\lambda_E = 0 \rightarrow \lambda_{E,c1} = 0.5153$.
- Pour X_2 : $\eta_2 = \dfrac{\partial L}{\partial X_2} = 0 \rightarrow -0.0148 + 0.0311\,\lambda_E = 0 \rightarrow \lambda_{E,c2} = 0.4759$.
- Pour X_3 : puisque $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{IN}}$ est négatif, nous aurons : $\lambda_{E,c3} = \dfrac{-0.5792}{0.3394} = -1.7065$.
- Pour X_4 : puisque $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{IN}}$ est positif, nous aurons : $\lambda_{E,c4} = \dfrac{0.4208}{-0.3394} = -1.2398.$.

La deuxième solution cesse d'être valable quand λ_E atteint 0.5153. A cette valeur de λ_E correspond le deuxième portefeuille coin.la structure de ce portefeuille est la suivante :

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0,$$
$$X_3 = 0.5792 - 0.3394\,(0.5153) = 0.4043,$$
$$X_4 = 0.4208 + 0.3394\,(0.5153) = 0.5957.$$

Et l'espérance et la variance de son rendement ont pour valeur :

$\mathbf{E_P} = 0.0978$, $\boldsymbol{\sigma_P}^2 = 0.0290$.

A partir de $\lambda_{E,c} = 0.5153$, X_1 change de statut et le premier titre entre dans le portefeuille.

La matrice $\overline{M}_{IN}$ et vecteurs $\overline{b}_{IN}$ et $\overline{E}_{IN}$ deviennent maintenant :

$$\overline{M}_{\text{IN}} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.0162 & -0.0071 & 0.0123 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0071 & 0.0135 & 0.042 & 0.0048 & 1 \\ 0.0123 & 0.0089 & 0.0048 & 0.0560 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{b}_{\text{IN}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \overline{E}_{P\,IN} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0 \\ 0.08 \\ 0.11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous inversant la matrice $\overline{M}_{IN}$ ainsi transformée :

$$M_{IN}^{-1} = \begin{bmatrix} 20.0158 & -0.6190 & -7.2002 & -12.8155 & 0.5060 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7.2002 & -0.4085 & 13.9023 & -6.7021 & 0.3971 \\ -12.8155 & 0.0276 & -6.7021 & 19.5176 & 0.0968 \\ 0.5060 & -0.0009 & 0.3971 & 0.0968 & -0.0136 \end{bmatrix}$$

La multiplication de $\overline{M}_{IN}^{-1}$ par le vecteur $\overline{b}_{IN}$ et $\overline{\mu}_{IN}$ nous donne :

$$\alpha_{IN} = \begin{bmatrix} 0.5060 \\ 0 \\ 0.3971 \\ 0.0968 \\ -0.0136 \end{bmatrix}, \qquad \beta_{IN} = \begin{bmatrix} -0.9849 \\ 0 \\ 0.0149 \\ 0.9700 \\ 0.0677 \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons une troisième solution qui s'écrit :

$$X_1 = 0.5060 - 0.9849\,\lambda_E, \qquad X_2 = 0,$$
$$X_3 = 0.3972 + 0.0149\,\lambda_E, \qquad X_4 = 0.0968 + 0.970\,\lambda_E$$
$$\lambda = -0.0136 + 0.0677\,\lambda_E$$

A partir de cette troisième solution, nous calculerons de nouveaux λ_E critiques pour nos différents titres.

- Pour X_1 : $\lambda_{E,c1} = \frac{-0.5060}{0.9849} = -0.5137.$.
- Pour X_2 : $\eta_2 = \frac{\partial L}{\partial X_2} = 0 \rightarrow -0.0086 + 0.0006\lambda_E = 0 \rightarrow \lambda_{E,c2} = -14.34.$.
- Pour X_3 : $\lambda_{E,c3} = \frac{0.3972}{-0.0149} = -26.6577.$.
- Pour X_4 : $\lambda_{E,c4} = \frac{0.0968}{-0.9700} = -0.10.$

Tous λ_E critique sont négatifs, la troisième solution restera donc valable jusqu'à $\lambda = 0$. A cette valeur de λ_E correspondra un troisième portefeuille coins dont la structure sera la suivante :

$$\mathbf{E_P} = 0.0677, \boldsymbol{\sigma_P}^2 = 0.0012.$$

Ce portefeuille sera celui qui présente la valeur la plus faible.

2.3-La diversification et les limites :

2.3.1- Le Principe de la diversification :

Plutôt que d'analyser les risques au niveau de titres individuels, la théorie moderne de portefeuille propose de mesurer les risques au niveau du portefeuille ; un portefeuille peut être défini comme un panier de titres(Actifs) qui présente – de manière complète –

un profil risque/rendement qui répond aux objectifs et à la tolérance au risque de l'investisseur.

Aussi, lorsque l'on considère le risque sous l'angle de la théorie moderne de portefeuille, une décision d'investissement ne repose pas sur l'évaluation du profil de risques du rendement individuel d'un titre, mais plutôt sur la façon dont l'investisseur affecte le risque global du portefeuille.

Souvenez-vous de la maxime qui affirme que "mettre tous ses œufs dans le même panier expose au risque de tout perdre d'un seul coup".

Un portefeuille investi dans plusieurs titres, dont les rendements ne sont pas corrélés, aura un rendement attendu qui correspond à la moyenne pondérée des rendements des titres individuels. Cependant, la volatilité du portefeuille sera inférieure à la moyenne pondérée des volatilités des titres individuels. En d'autres termes, le rendement général attendu pondéré reste le même et le risque diminue. En résumé, la théorie moderne de portefeuille propose que les investisseurs sélectionnent des portefeuilles et non des titres individuels et que la diversification améliore le profil risque/rendement accumulé du portefeuille.

Cela signifie qu'en se diversifiant, un investisseur peut réduire le risque du marché en investissant dans des titres financiers dont les rendements attendus ne sont pas corrélés.

2.3.2 –Limites de l'optimisation de Markowitz :

Comme pour tout modèle, les limites sont généralement focalisées autours de ces hypothèses ainsi sur l'estimation de ces paramètres.

Nous allons présenter 4 limites ; qui nous semblent essentielles :

1. la première concerne le modèle moyenne – variance : effectivement, réduire les actifs à leur moment d'ordre 1 (moyenne) et 2 (variance) revient à modéliser le portefeuille optimal par une loi gaussienne. or certaines actifs ne le sont pas et peuvent avoir des profils de distribution très différents ; nous pensons aux actions risquées, mais aussi aux titres de créances qui devraient être modélisées plus précisément.
2. la deuxième est la dépendance de l'optimisation de Markowitz à l'espérance des rendements moyens. Ces rendements estimés pour une période d'allocation peuvent évoluer à court-terme : or un changement très faible de la moyenne des rendements aura des conséquences démesurément importantes sur l'allocation est donc relativement instable.
3. la troisième survient lorsque le nombre d'actifs à profils similaires est très important. Alors la caractéristique définie positive de la matrice de variance-covariance peut être mise à mal. Des méthodes d'extraction de facteurs communs, peuvent alors déterminer ces facteurs et calculer une matrice de variance-covariance plus facile à utiliser.

4. la dernière limite est opérationnelle : en effet, les optimisations étudiées précédemment donnent des solutions simples mais dans la réalité les contraintes sur les poids sont plus nombreuses et rendent l'optimisation difficile.
   En effet, régulièrement, un investisseur peut mettre des limites d'achat ou de vente sur certaines classes d'actifs (on peut penser par exemple aux pays émergents qui sont plus risquées et dont on peut vouloir limiter l'allocation). Les contraintes vont alors influencer fortement les allocations qui ne seront alors plus si optimales que prévus.

PARTIE II

Approche linéaire; et intégration d'un modèle a facteurs Le modèle diagonale de Sharpe

Introduction

L'utilisation du modèle de Markowitz, tel qu'il le proposait dans son ouvrage de 1959, soulevait de nombreux problèmes dès qu'il s'agissait d'utiliser des algorithmes à partir d'une liste de base comportant un nombre élevé de valeurs. Ces problèmes étaient de deux ordres:

1. L'ampleur des matrices requérait à l'époque un calculateur de grande capacité et un temps de calcul assez long.
2. L'utilisation du modèle de base requérait que l'on connaisse dans sa totalité la matrice des covariances.

Si nous voulons que l'approche proposée par Markowitz puisse entrer dans le domaine de l'application, il faut de toute évidence trouver le moyen d'alléger notablement la procédure tout en perdant le moins possible de la rigueur de la méthode.

En 1963, William Sharpe a proposé une solution dont le principe est une diagonalisation de la matrice de variance- covariance ; et la caractéristique essentielle consiste à faire l'hypothèse que les rentabilités des différents titres sont toutes reliées entre elles par un seul intermédiaire " d'un facteur commun sous-jacent" ;(indice boursiers), qui a permis de déterminer un coefficient appelé le bêta (corrélation entre le rendement d'un titre et celui du portefeuille de marché).

Cette hypothèse, appelée "modèle unifactoriel", a revêtu par la suite une importance considérable, car elle a été, comme on le verra dans les développements ultérieurs la base qui a permis de construire le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF).

Chapitre 3 :

Le modèle linéaire de Sharpe(1963)

Introduction :

Le déroulement de l'algorithme de la ligne critique entraine de fréquentes inversions de la matrice de variances- covariances, ce qui nécessite un temps de calcul non négligeable. Par ailleurs, et chose plus importantes encore, les estimations à effectuer pour constituer cette matrice sont très nombreuses.

C'est pour remédier à ces inconvénients que les modèles à indices ont été élaborés.

Nous présenterons dans cette partie le modèle linéaire de Sharpe.

3.1-Contribution de ce modèle :

En 1963, William Sharpe [1] publie dans « Management Science » l'article intitulé ***A Simplified Model for Portfolio Analysis***.

Cet article complète l'analyse de Markowitz (la détermination d'un portefeuille optimal) :l'analyse de portefeuille présente un modèle simplifié, en montrant comment cette simplification facilite la résolution du modèle du choix des titres, par l'adjonction de quelques hypothèses. Mais quelles hypothèses retenir ?

Sharpe reprend donc le partitionnement de Markowitz entre la cause commune et les causes propres de la rentabilité des titres.

Il postule sans démonstration que le rendement de tout titre i est lié linéairement à un indice de marché noté $\mathbf{R_M}$:

La relation postulée par Sharpe en 1963 s'écrit :

$$\mathbf{R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \mu_i} \qquad (\mathbf{3.1})$$

Où : $\mathbf{R_i}$ est le rendement du titre i.

$\mathbf{R_M}$: Rendement du marché mesuré par un indice général.

$\boldsymbol{\beta_i}$: Paramètre propre à chaque titre i ; on l'appelle coefficient de volatilité $\boldsymbol{\beta}$.

$\boldsymbol{\mu_i}$: Paramètre spécifique de l'action i.

$\boldsymbol{\alpha_i}$: Paramètre dont la valeur est telle que la valeur espéré de $\boldsymbol{\mu_i}$ est nulle (Ou valeur espérée de $\mathbf{R_i}$).

Ce dernier résume un effet d'incertitude concernant la distribution entre les différents titres et celui de marché en termes de rendement.

Cependant, il est difficile de décrire l'évolution des actifs et de leurs matrices de covariance comme une fonction d'un nombre limite de caractéristiques, lorsque le nombre de variables devient considérablement grand.

C'est ainsi que vient l'idée d'un modèle factoriel.

[1] William.F.Sharpe, est un économiste américain, lauréat du prix Nobel d'économie, il a travaillé sur la théorie financière de portefeuille.

3.2-Une introduction au modèle factoriel :

L'idée d'un modèle factoriel de portefeuille est d'expliquer les revenus procurés par les titres financiers par un petit nombre de variables faciles à observer(les facteurs). Ces facteurs peuvent être eux-mêmes assimilables à des titres (par exemples des indices boursiers).

L'objectif principal de cette classe de modèles est la réduction massive du nombre de paramètres, ensuite l'estimation de la matrice de covariance à partir de n'importe quel modèle linéaire.

Le calcul de la matrice de covariance par un modèle factoriel est donc très contraignant dans la mesure où la matrice n'incorpore pas de modélisation temporelle.

Ce qui implique que :
« La classe des modèles factoriels consiste à exprimer l'évolution d'une variable en fonction d'une fonction linéaire choisie ».

Nous allons noter :

n : le nombre d'actifs à modéliser.
K : facteurs observables utilisés dans la régression linéaires.

Le modèle linéaire générale (modèle de Sharpe) s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{R_i} = \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{i} + \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{\beta}_\mathbf{ik}\, \mathbf{f_k} + \boldsymbol{\mu}_\mathbf{i} \qquad (\mathbf{3.2})$$

Avec :

$\mathbf{f_k}$: est le k ième facteur commun.

$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{i}$: Est le terme idiosyncratique assume la non corrélation avec $\mathbf{f_k}$, k=1, . . ., K ;

et tous les $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{i}$ pour $i \neq j$.

On suppose également que :

- $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{i}$ doit être d'espérance nulle, de covariance constante $E[\mu_i] = 0$, $\sigma^2(\mu_i) = \sigma^2$.
- $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{i}$ ne doit pas présenter aucune corrélation il faut donc : $\mathrm{cov}(\mu_i, \mu_j) = 0$

La notation matricielle :

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\,\mathbf{F} + \mathbf{U} \qquad (\mathbf{3.3})$$

Où :

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]'$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \cdots & \beta_{1k} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \\ \beta_{n1} & & & & \beta_{nk} \end{bmatrix}$$

$$F = [f_1, f_2, \ldots, f_K]'.$$

$$U = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]'.$$

De (3.3) et (2.1) ; on aura :

$$\mathbf{R_P} = \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X} + \mathbf{F}'\mathbf{B}'\mathbf{X} + \mathbf{U}'\mathbf{X} \qquad (\mathbf{3.4})$$

D'autre part :

$$\sigma^2(r_i) = E\,[(\alpha + BF + U) - E(\alpha + BF + U)]^2$$

Puisque :

$$E(\alpha_i) = \alpha_i\,.$$
$$E(\beta_i) = \beta_i\,.$$
$$\mathrm{E}(\mu_i) = 0\,.$$

On aura :

$$\begin{aligned} \sigma^2(r_i) &= \mathrm{E}\,[\mathrm{B}(\mathrm{F} - \mathrm{E}(\mathrm{F})) + \mathrm{U}]^2 \\ &= \mathrm{E}\,[\mathrm{B}^2(\mathrm{F} - \mathrm{E}(\mathrm{F}))^2 + 2\mathrm{B}'(\mathrm{F} - \mathrm{E}(\mathrm{F}))\mathrm{U} + \mathrm{U}^2] \\ &= \mathrm{E}\,[\mathrm{B}^2(\mathrm{F} - \mathrm{E}(\mathrm{F}))]^2 + 2\mathrm{B}'\mathrm{E}[(\mathrm{F} - \mathrm{E}(\mathrm{F}))\mathrm{U}] + \mathrm{E}\,[\mathrm{U}^2]\,. \end{aligned}$$

Par hypothèses, la covariance entre $\mathrm{f_k}$ et $\mu_\mathbf{i}$ sont nulles, on a donc :

$$\mathrm{E}\,[(\mathrm{F} - \mathrm{E}(\mathrm{F}))\mathrm{U})] = 0$$

On obtient donc finalement :

$$\boldsymbol{\sigma^2(r_i) = B'Q_f\,B + Q_U} \qquad (\mathbf{3.5})$$

De (3.5) et (2.2) :

$$\mathbf{V_P = X'B\,Q_f B'X + X'Q_U\,X} \qquad \mathbf{(3.6)}$$

Avec $\mathbf{Q}_f$ et $\mathbf{Q}_U$ sont les matrices de covariances de F et U respectivement.

Par hypothèse :

- $\mathbf{Q}_U$ avec $\mathbf{Q_U = Var(\mu_i)}$; i ième terme diagonal.
- $\mathbf{Q}_f$ n'est pas nécessairement diagonal.

On se met dans le cas d'un seul facteur : $f_k = F$ =constante.

On a : $R_P = \alpha' X + F' B' X + U' X$

On suppose $X_{n+1} = B' X = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n$.

Le rendement de portefeuille devient : $R_P = \alpha' X + F' X_{n+1} + U' X$.

L'espérance de rendement est : $E[R_P] = E[\alpha' X + F' X_{n+1} + U' X]$; comme $E(U_i) = 0$.

$$\mathbf{E[R_P] = \alpha' X + F' X_{n+1}} \qquad \mathbf{(3.7)}$$

De même $\mathbf{V_{RP} = X' Q_F X + X'_{n+1}\, Q_U\, X_{n+1}}$ **(3.8)**

On se met dans le cas le plus courant, où X_i vérifie la contrainte budgétaire : $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$.

Le modèle mathématique :

$$(\mathbf{P_3})\begin{cases} \mathbf{\underset{X}{Min}\ \frac{1}{2} V_{Rp} = \frac{1}{2} X' Q_F X + \frac{1}{2} X'_{n+1} Q_u X_{n+1}} \\ \mathbf{s.c \quad E_P = \alpha' X + F' X_{n+1}} \\ \mathbf{I' X = 1} \\ \mathbf{X \geq 0} \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2} X' \, Q_F X + \frac{1}{2} X'_{n+1} Q_U X_{n+1} - \lambda_E (\alpha' X + F' X_{n+1}) + \lambda (1 - I' X).$$

De plus, il faut imposer que : $X_{n+1} = B' X = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n$.

En la substituant avec la contrainte budgétaire ; les deux contraintes peuvent être combinées comme suit :

$$X_n = 1 - X_1 - X_2 - \ldots - X_{n-1}.$$

$$X_{n+1} = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_{n-1} X_{n-1} + \beta_n - \beta_n X_1 - \beta_n X_2 - \ldots - \beta_n X_{n-1}.$$

La fonction objectif devient alors:

$$L = \frac{1}{2} V_{Rp} - \lambda_E E_{Rp} + \lambda \left[X_1(\beta_1 - \beta_n) + X_2(\beta_2 - \beta_n) + \cdots + X_{n-1}(\beta_{n-1} - \beta_n) + \beta_n - X_{n-1} \right].$$

On annulant les dérivées de L par apport à $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ et λ, on arrive au système d'équations suivant :

$$\frac{\partial L}{X_1} = X_1 \sigma_{F1}^2 - \lambda_E \alpha_1 + \lambda(\beta_1 - \beta_n) = 0$$

$$\frac{\partial L}{X_2} = X_2 \sigma_{F2}^2 - \lambda_E \alpha_2 + \lambda(\beta_2 - \beta_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{X_{n-1}} = X_{n-1} \sigma_{F\,n-1}^2 - \lambda_E \alpha_{n-1} + \lambda(\beta_{n-1} - \beta_n) = 0$$

$$\frac{\partial L}{X_n} = X_n \sigma_{F\,n}^2 - \lambda_E \alpha_n = 0$$

$$\frac{\partial L}{X_{n+1}} = X_{n+1} \sigma_{U\,(n+1)}^2 - \lambda_E F - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\lambda} = X_1(\beta_1 - \beta_n) + X_2(\beta_2 - \beta_n) + \cdots + X_{n-1}(\beta_{n-1} - \beta_n) + \beta_n - X_{n+1} = 0$$

Ce qui revient à écrire, sous sa forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma^2_{F1} & 0 & 0 & 0 & \beta_1 - \beta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \sigma^2_{F(n-1)} & 0 & 0 & \beta_{n-1} - \beta_n \\ 0 & 0 & \sigma^2_{F\,n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2_U & -1 \\ \beta_1 - \beta_n & \beta_{n-1} - \beta_n & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_{n+1} \\ X_n \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda_E \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \\ F \\ -\beta_n \end{bmatrix}.$$

La résolution de ce système passe alors par l'inversion d'une matrice beaucoup plus simple à inverser que précédemment.

Ainsi avec le modèle ici augmenté, la matrice de covariance devient diagonale, ou presque, et les équations deviennent beaucoup plus facile à résoudre.

L'algorithme de la ligne critique est particulièrement rapide, puisque notre modèle est décrit par un modèle à facteur.

Chapitre 4 :

Le modèle d'équilibre des actifs financiers.

Résumons ce qui vient d'être dit. Nous sommes en 1963. A la suite des travaux de Markowitz, puis Sharpe, le modèle linéaire vient de pénétrer par effraction dans la finance moderne, on liant l'indice de marché à celui de portefeuille.

Mais il reste à assembler ces deux perspectives pour parvenir à créer une gestion professionnelle indicée. Cela sera le coup de force de Sharpe un an plus tard, qui va rapidement s'apercevoir que l'on peut dire beaucoup mieux, et beaucoup plus, que le modèle de marché, et forger le modèle d'équilibre des actifs financiers, ou CAPM.

4.1- L'origine du MEDAF :

Le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) appelé aussi « ***Capital Asset Pricing Model (CAPM),*** en anglais » a été développé par *Sharpe (1964), Lintner (1965),* et *Mossin (1966).* Il vise, en premier lieu, à déterminer le prix d'équilibre des actifs financiers.

4.2- Les principales hypothèses du MEDAF :

Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes :

1. les investisseurs exigent une rentabilité d'autant plus forte que le risque est élevé : il existe donc une relation croissante entre rendement et risque.
2. un actif sans risque est disponible.
3. les anticipations sont identiques pour tous les investisseurs.

4.3- Principe général :

On considère la même hypothèse que dans le modèle de Markowitz, à savoir un portefeuille dont le rendement espéré $\mathbf{R_P}$ est définie par :

$$\mathbf{R_P = \sum_{i=1}^{n} R_i X_i}$$

Sous la contrainte budgétaire : $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X_i} = 1$.

On suppose au départ la possibilité de ventes à découvert sans limites ; ainsi que le rendement R_i de chaque titre vérifie le modèle linéaire de Sharpe 1963.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de s'arrêter sur la notion de l'actif sans risque. En fait, celle-ci joue un rôle important entre le modèle classique et le modèle de marché pour aboutir au MEDAF.
En théorie l'actif sans risque est un actif qui à un écart-type nul est qui dispose par la même occasion d'une corrélation nulle avec les actifs risqués.

Maintenant, voyons voir que va-t-il se passer si on constitue un portefeuille qui combine entre l'actif risqué en proportion X, et un actif sans risque en proportion $(1 - X)$.

Résumons ce qui vient d'être dit :

$X \rightarrow$ Proportion à investir dans le titre (portefeuille) risqué.

$(1 - X) \rightarrow$ Proportion à investir dans l'actif sans risque.

Le rendement espéré de ce portefeuille égale à : $R_P = (1 - X)\, R_f + X R_R$.

$$\mathbf{R_P = R_f + X(R_i - R_f)} \qquad \textbf{(4.1)}$$

$\mathbf{R_P}$: Rendement espérée du portefeuille.

$\mathbf{R_f}$: Rendement de l'actif sans risque.

$\mathbf{R_R}$: Rendement de l'actif risqué.

Maintenant, nous allons déterminer le risque de ce portefeuille, pour simplifier nous allons commencer par le calcul de la variance :

$$\sigma_p^2 = (1-X)^2\sigma_f^2 + X^2\sigma_R^2 + 2X(1-X)\sigma_{R,f}$$
$$= (1-X)^2\sigma_f + X^2\sigma_R^2 + 2X(1-X)\rho_{R,f}\sigma_f\sigma_R$$

Puisque l'actif sans risque a une variance nulle ($(1-X)^2\sigma_f^2 = 0$) et que sa corrélation $\rho_{R,f}$ avec les actifs risqués est également nulle $(2X(1-X)\sigma_f\sigma_R\rho_{R,f} = 0)$.

La variance du portefeuille devient donc égale à :

$$\sigma_p^2 = X^2\sigma_R^2$$

Et par conséquent, l'écart type sera comme suite :

$$\boldsymbol{\sigma_p = X\,\sigma_R} \qquad \textbf{(4.2)}$$

Par ailleurs, en prenant l'espérance de **(4.1)** et en tirant X de **(4.2)** on obtient :

$$E[R_P] = R_f + \frac{(E[R_i] - R_f)}{\sigma_R}\sigma_p$$

D'où : $$\boldsymbol{\mu_P = R_f + \frac{(\mu_R - R_f)}{\sigma_R}\sigma_p} \qquad \textbf{(4.3)}$$

$\frac{(\mu_R - R_f)}{\sigma_R}$ S'appelle le Ratio de Sharpe du titre ″ risqué ″.

$\frac{(\mu_R - R_f)}{\sigma_p}$ S'appelle le Ratio de Sharpe du ″ portefeuille ″.

A l'équilibre le portefeuille a le même Ratio de Sharpe que le titre risqué qu'il le contient.

Si on combine tous les titres risqués disponibles de toutes les manières, on obtient l'ensemble des portefeuilles possibles, parmi eux figure le portefeuille de marché.

Pour résumer : **A l'équilibre tout titre risqué fait parti d'un portefeuille risqué s'interprète comme étant le portefeuille de marché**.

Cette équation montre qu'il existe à équilibre une relation linéaire et croissante entre le rendement anticipé et le risque des portefeuilles efficients.

4.3.1- La droite de marché:

L'investisseur cherche la plus grande diversification jusqu'à atteindre cette limite qu'on a appelé frontière efficiente.

Insérons maintenant dans notre analyse la frontière efficiente de Markowitz.
On constate que l'introduction d'un actif sans risque transforme la frontière efficiente en une droite partant par le niveau de l'actif sans risque $\mathbf{R_f}$, de façon à toucher la pente la plus élevé autrement dit, la pente de la tangente avec la frontière définie par Markowitz , et cette droite représente l'ensemble des combinaisons possible entre l'actif sans risque et l'actif risqué(marché) .

Cette droite est connue sous le nom de ***« droite de marché financier »*** (***Capital Market Line, CML ;*** en anglais)**.**

Et qui a comme équation :

$$\mathbf{E\left[R_P\right] = R_f + \frac{(E[R_i] - R_f)}{\sigma_R}\ \sigma_p} \qquad \textbf{(4.4)}$$

- La pente est : $\mathbf{(E[R_M] - R_f)}$.
- L'ordonnée à l'origine est : $\mathbf{R_f}$.

Sa représentation dans le plan (E_{Rp}, σ^2), nous donne la figure suivante :

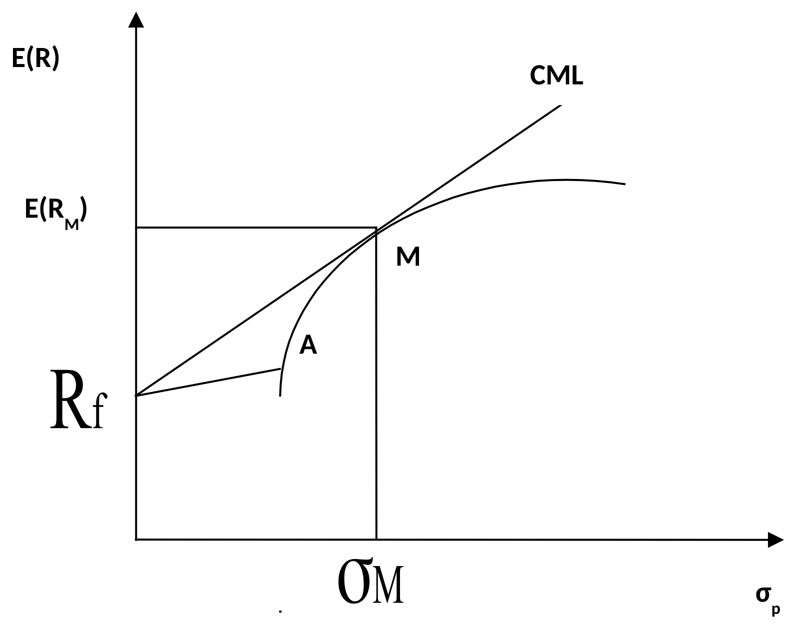

Figure 4.1 : Relation entre la frontière efficiente et l'actif sans risque.

On peut facilement déduire qu'il existe une relation linéaire entre le risque du marché et le risque de l'actif sans risque.

Le segment $\mathbf{R_f - A}$ dans la figure renseigne sur les possibilités d'investissements résultant, d'une combinaison entre l'actif sans risque et le portefeuille risqué **A.**

En cela, $\mathbf{R_f - A}$ ligne de possibilité d'investissement.

En comparant $\mathbf{R_f - A}$ et $\mathbf{R_f - M}$, on constate qu'à chaque niveau de risque (mesuré par σ) la rentabilité offerte par le second dépasse le premier, on dira donc que $\mathbf{R_f - M}$ domine $\mathbf{R_f - A}$.

Prenant un exemple pour mettre au clair cette idée.

Supposons que l'on à : $R_f = 6\ \%$, $E[R_M] = 12\,\%$.

Supposons aussi que l'investisseur va prêter 50% de sa richesse, $\Rightarrow (1 - X)$ va être négative.

En faisant le calcul nous allons trouver : $E[R_P] = -0.5\,R_f + 1.5\,E[R_M]$

Le risque de ce portefeuille va être égale à : $\sigma_p = -0.5\,\sigma_M$.

C'est ainsi, pour obtenir une rentabilité de 150% ($1.5\,E[R_M]$).
Cela dit, l'investisseur doit rembourser son emprunt, d'où le positionnement de 1.5% sur la frontière efficiente.

4.3.2- La relation d'équilibre du MEDAF:

Le MEDAF en tant que modèle d'équilibre du marché des actifs financiers doit permettre d'exprimer la valeur des rendements d'équilibre des actifs risqués.
On peut montrer que la relation **(4.3)** peut s'écrire :

$$\mu_P = R_f + \frac{(\mu_M - R_f)}{\sigma^2_M} COV(R_M, R_P) \qquad (4.5)$$

$\mathbf{COV(R_M, R_P)}$ Est la covariance entre le rendement espéré de marché et celui de portefeuille.

En posant : $\beta_p = \dfrac{COV(R_M, R_P)}{\sigma^2_M}$

La relation devient :

$$\mu_P = R_f + (\mu_M - R_f)\,\beta_p \qquad (4.6)$$

Ou de manière équivalente

$$\mathbf{E[R_P] - R_f = (E[R_M] - R_f)\,\beta_p} \qquad \mathbf{(4.7)}$$

Cette relation constitue la relation fondamentale du MEDAF. Elle est valable aussi bien pour un portefeuille que pour un titre individuel.
Ainsi la rentabilité espéré d'un titre i est égale à :

$$\mathbf{E[R_i] - R_f = (E[R_M] - R_f)\,\beta_i} \qquad \mathbf{(4.8)}$$

La relation **(4.8)** qui n'est autre que la droite de marché, décrit la relation entre l'espérance de rendement du titre et sa quantité de risque (le bêta), elle contient beaucoup d'informations :

- $\mathbf{(E[R_M] - R_f)}$ représente la ***prime de risque du marché***, c'est-à-dire le surplus de rentabilité exigé par les investisseurs lorsque ses derniers placent leurs argents, plutôt que dans un actif sans risque.
- $\mathbf{(E[R_M] - R_f)\,\beta_i}$ représente la ***prime de risque du titre i***.

4.3.3- Le rôle de Bêta dans le MEDAF:

Le modèle d'évaluation des actifs financiers postule que la prime de risque attendue pour un actif est proportionnelle à son bêta.
Cela implique que chaque titre doit se trouver sur la droite du MEDAF, reliant l'actif sans titre au portefeuille de marché.

Remarque :

La relation **(4.8)** ne doit pas être confondue avec celle dans le modèle linéaire de Sharpe, dont elle est pourtant proche ; en effet :

$$E[R_i] - R_f = (E[R_M] - R_f)\,\beta_i \qquad \mathrm{i} = 1, \mathrm{n}$$

Comme il vient de cette l'équation :

$$R_i = R_f(1 - \beta_i) + R_M\,\beta_i + u_i$$

Où : u_i est un terme aléatoire tel que $E[u_i] = 0$.

Soit : $R_i = \alpha_i + b_i R_M + u_i$

Avec : $\alpha_i = R_f(1 - \beta_i)$

$b_i = \beta_i$.

On trouve presque le modèle linéaire de Sharpe(1963).
De cette manière, le MEDAF de 1964 fournit une justification économique, et donc fonde économiquement le modèle linéaire de 1963, qui n'avait été introduit dans le seul but de simplifier les calculs de la matrice de variance-covariance.

Conclusion :

En résumé, le MEDAF essaie d'expliquer le rendement d'un actif (titre) financier. Celui-ci est composé du taux de rentabilité sans risque, et d'une prime de risque de marché qui est fonction de la variance du rendement de l'actif avec le rendement du marché.

Il nous a permet, ainsi de déterminer le portefeuille optimal, en analysant, les conséquences du marché financier composé de l'ensemble des actifs risqués.

4.4-Application : mise en œuvre du MEDAF sur un ensemble d'actions

Dans cette section, nous étudions deux cas simple qui nous permettront, en plus de tester notre modèle, de comprendre son intérêt dans la finance.

4.4.1- Données:

1 ier cas : on reprend les données illustrées dans l'exemple de deuxième chapitre :

avec : un taux sans risque de 6%.

2 ième cas :

L'application informatique proposée dans ce cas, porte sur un sous ensemble de société du CAC40 [1] dans sa composition du mois de Décembre 2007.

On sélectionne un panier de titres appartenant à des secteurs industriels différents :

- Banque_ BNP, Ste général
- Automobile _ Peugeot, Renault
- Distribution _ Carrefour
- Industrie _ Vallourec
- Alimentation_ Danone

nom d'Actions	Code	rendement 10^{-3}	variance 10^{-3}	σ
BNP	BNP	0.8	0.46656	0.0216
Ste général	GLE	0.8	0.49284	0.0222
Danone	BN	0.6	0.256	0.0160
Carrefour	CA	0.2	0.37249	0.0193
Vallourec	VK	1.4	0.58565	0.0242
Renault	RNO	0.9	0.56644	0.0238
Peugeot	UG	0.6	0.38809	0.0197

1 Le CAC40 est le principal indice boursier de la place de Paris. Il est déterminé à partir des cours de quarante actions cotées en continu sur le premier marché parmi les cent sociétés dont les échanges sont les plus abondants, c'est la première Bourse européenne.

Avec un taux sans risque de 50%.

4.4.2- Programme:

```
    %les entrées ......................................
n=input('donner le nombre de titre')
R=input('le vecteur des rendements espéré')
C=input('écart type moyen')
rendfree=input('taux de rendement sans risque')
Rf=rendfree;
%generer la frontière efficiente........................
numports=10;
[riskport,rendport,poidsport]=portopt(R,C,10)
[riskopt,rendopt,poidsopt]=portopt(R,C,10)
riskAversionMin = .01;
riskAversionMax = 3;
riskAversion = logspace(riskAversionMin,riskAversionMax,numports);
[riskyReturn,riskyFraction,overallRisk,overallReturn] = deal(nan(numports,1));
for i=1:numports
  [riskyrisk,riskyrend(i),poidsrisky,riskfraction(i),riskglobal(i),rendglobal(i)]=...
    portalloc(riskport,rendport,poidsport,rendfree,Rf,riskAversion(i));
end
%affichage graphique des resultats....................
figure
plot(riskglobal,rendglobal,'r--'),hold on
plot(riskport,rendport, 'm-',riskopt, rendopt, 'x',...
   0,rendfree, 'k:square',riskyrisk,riskyrend, 'k:diamond')
xlabel('risque de portefeuille,\sigma_{p}');
ylabel('rendement espéré de portefeuille,R_{p}');
title('frontière efficiente');
legend('droite des actifs financiers','frontière efficiente','portefeuille risqué','actif sans
risque','portefeuille optimal')
set(gcf,'color','white')
grid on
```

4.4.3- Résultats et interprétations:

1 ier cas :

donner le nombre de titre4
4

n =

4

le vecteur des rendements espéré[0.05 0.06 0.08 0.11]

R =

0.0500 0.0600 0.0800 0.1100

écart type moyen[0.03 0.0162 -0.0071 0.0123;0.0162 0.035 0.0135 0.0089;-0.0071 0.0135 0.042 0.0048;0.0123 0.0089 0.0048 0.056]

C =

```
    0.0300    0.0162   -0.0071    0.0123
    0.0162    0.0350    0.0135    0.0089
   -0.0071    0.0135    0.0420    0.0048
    0.0123    0.0089    0.0048    0.0560
```

taux de rendement sans risque0.06

rendfree =

0.0600

riskport =	rendport =	poidsport TITRE//POR	Titre1	Titre2	Titre3	Titre4
0.1164	0.0677	P1	0.5060	0	0.3971	0.0968
0.1215	0.0762	P2	0.3640	0	0.3993	0.2367
0.1358	0.0846	P3	0.2220	0	0.4015	0.3765
0.1566	0.0931	P4	0.0800	0	0.4036	0.5163
0.1848	0.1015	P5	0	0	0.2818	0.7182
0.2366	0.1100	P6	0	0	0	1.0000

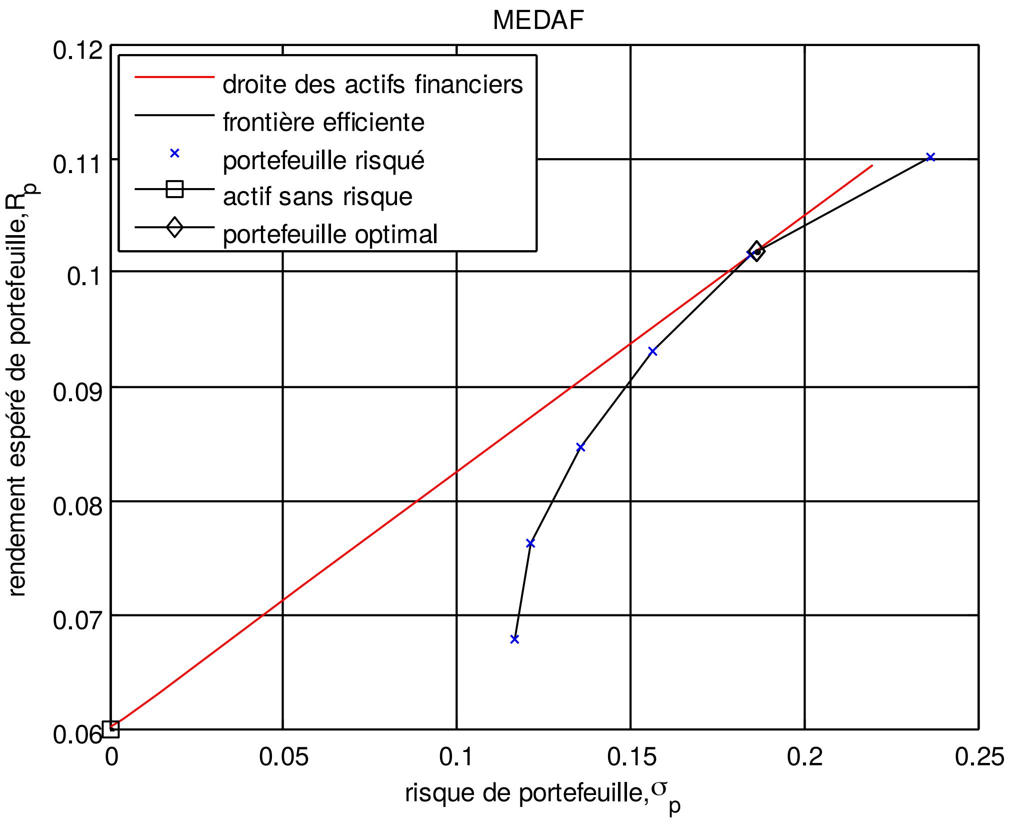

Figure 4.2 :l'effet d'un actif sans risque sur le portefeuille de marché.

Comme conséquence, on remarque que plus le niveau du rendement espéré est élevé plus le risque, qui est mesuré par la variance, est grande. Par exemple, pour une espérance égale à 18.48%, on a une variance équivalente à 10.15%. Par contre, en augmentant le taux de rendement espéré à une valeur 23.66%, le risque accroît également pour atteindre une valeur de 11%.

Pour bien marquer cette relation, on remarque que l'introduction d'un actif sans risque a augmenté considérablement le rendement de portefeuille optimal de 6.77% à 18.63%, ainsi son risque.

En conséquent le MEDAF, fait apparaitre la relation entre les portefeuilles risqués (marché) et l'actif sans risque, sans perdre de vue que se dernier n'a jamais était sure puisque il peut augmenter le risque global de portefeuille, par le biais de facteur du risque bêta.

2 ième cas :

```
donner le nombre de titre7
7

n =

     7

le vecteur des rendements espéré[0.8 0.8 0.2 0.6 0.9 1.4 0.6]
[0.8 0.8 0.2 0.6 0.9 1.4 0.6]

R =

    0.8000    0.8000    0.2000    0.6000    0.9000    1.4000    0.6000

écart type moyendiag([0.46656 0.49284 0.37249 0.38809 0.56644 0.58564 0.256])
diag([0.46656 0.49284 0.37249 0.38809 0.56644 0.58564 0.256])

C =

    0.4666         0         0         0         0         0         0
         0    0.4928         0         0         0         0         0
         0         0    0.3725         0         0         0         0
         0         0         0    0.3881         0         0         0
         0         0         0         0    0.5664         0         0
         0         0         0         0         0    0.5856         0
         0         0         0         0         0         0    0.2560

taux de rendement sans risque0.5

rendfree =

    0.5000

riskport =
```

0.2439
0.2512
0.2718
0.3041
0.3516
0.4104
0.4789
0.5626
0.6565
0.7653

rendport =

0.6985
0.7765
0.8544
0.9323
1.0103
1.0882
1.1662
1.2441
1.3221
1.4000

poidsport =

0.1275	0.1207	0.1597	0.1533	0.1050	0.1016	0.2323
0.1375	0.1302	0.0978	0.1415	0.1215	0.1570	0.2145
0.1476	0.1397	0.0359	0.1298	0.1379	0.2124	0.1967
0.1540	0.1458	0	0.1046	0.1544	0.2826	0.1586
0.1552	0.1470	0	0.0611	0.1709	0.3732	0.0926
0.1565	0.1482	0	0.0175	0.1874	0.4639	0.0266
0.1217	0.1152	0	0	0.1834	0.5797	0
0.0625	0.0592	0	0	0.1657	0.7126	0
0.0034	0.0032	0	0	0.1480	0.8454	0
0	0	0	0	0	1.0000	0

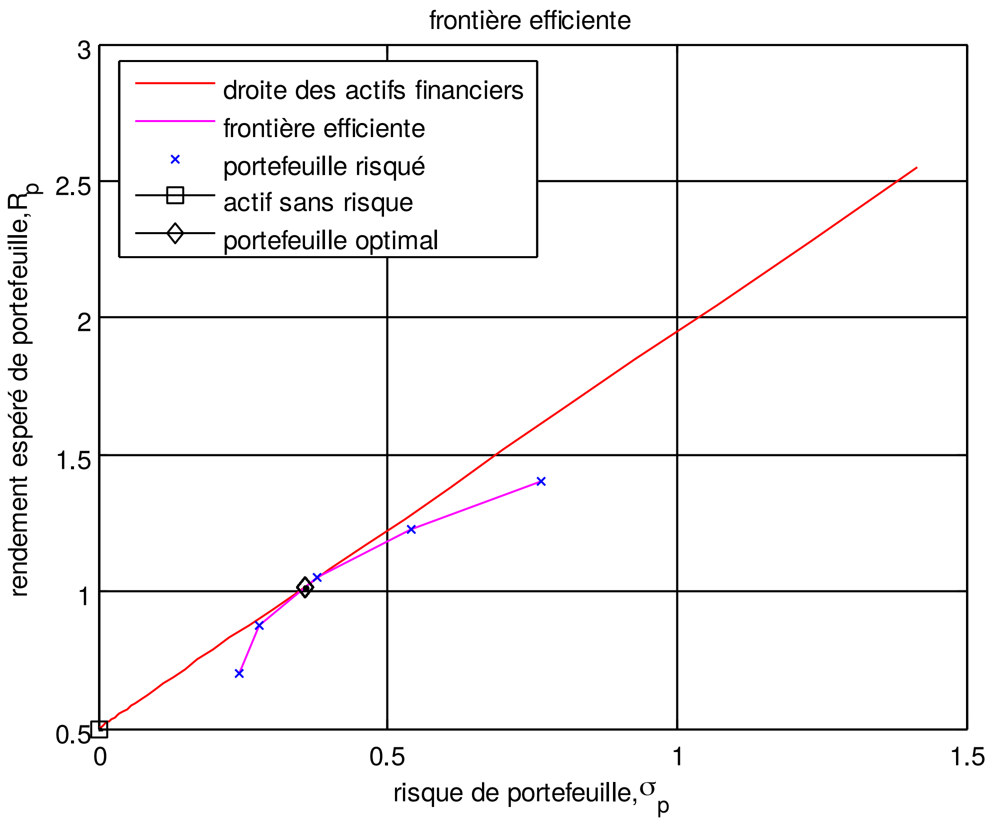

Figure 4.3 : le modèle d'équilibre des actifs financiers appliqué aux actions de CAC40

On remarque qu'à l'équilibre de marché, les portefeuilles risqués sont presque confondue avec la droite de marché ; dans ce cas le coefficient béta n'est pas assez significatif.

Les indices utilisés (CAC40) ne reflètent pas le portefeuille de marché théorique (qui devait englober tous les actifs risqués).

De manière générale, on peut aussi considérer que les investisseurs prennent acte de l'existence de ce type d'investissement .La question qui se pose jusqu'à quel critique ce modèle reste valide.

Bibliographie

[1]-**ABDELADIM ENNAHAL**, *les comportements boursiers des investisseurs sur le marché financiers marocain : cas des investisseurs individuels.*

Mémoire de fin d'études, 2007-2008.Université Abdelmalek Essâdi, Tanger.

[2]- **AHMED MAHI ; MOHAMED EZZAHDI** ; *Analyse de risque du marché des actions,*

Mémoire de fin d'études, 2003-0004. Université Mohammed V-Agdal, Rabat.

[3]- **BROQUET.C, COBBAUT.R, GILLET.R, VAN DEN BERG.A**, *gestion de portefeuille*,

Ed. DE BOECK, 4 ième édition, 1997.

[4]- **BOUINE.M ; OUCHEM.S** ; *gestion de portefeuille application sur la BVMT,*

Mémoire de fin d'études, Institut des hautes études commerciales (IHEC) ,2001.

[5]-**BRUCE I.JACOBS, KENNETH N.LEVY, H.MARKOWITZ; Portfolio** *optimization with factors, scenarions, and realistic short positions: OPERATION RESEARCH, Vol.53, N°.4, 2005.*

[6]- **CHRISTIAN WALTER**, *la gestion indicielle et la théorie des moyennes,*

Les cahiers JP Morgan sur l'histoire de la gestion d'actifs. n°2, Mars 2005.

[7]- **HARRY.MARKOWITZ,** *The journal of finance, Vol.7, N°.1(Mar.1952), PP.77-91.*

[8]- **H.MARKOWITZ, G.Peter Todd,** *Mean-Variance analysis in portfolio choice and capital market*,

Ed. Frank.J.Fabozzi, 2000.

[9]- **PHILIPPE BERNARD,** la théorie de portefeuille : une introduction,

Université Paris Dauphine, Avril 2006.

[10]-**PIERRE CLAUSS**, *Gestion d'actifs : une approche quantitative,*

Université Paris Dauphine, Novembre 2009.

http://id.erudit.org/iderudit/601443ar

www.wikipédia.org

www.vernimmen.net

www.étudionet.com

CONCLUSION GÉNÉRALE

Au terme de ce modeste travail, on a essayé de présenter les fondements et les apports du modèle initiateur de la gestion de portefeuille dans la finance moderne.

De nos jours, la problématique de chaque investisseur est de maximiser son profit, par le biais d'un portefeuille bien diversifié.

En effet, sa maitrise contribuera d'une manière très significative dans l'optimisation du portefeuille final. Ainsi l'analyse des différents modèles mathématiques a permis de préciser les différents paramètres dans le champ d'application.

Mais, les essais de modélisation ont pu quand même intégrer la dimension des portefeuilles ; c'est le cas de l'algorithme de la ligne critique (Markowitz), et le MEDAF(Sharpe).

Nous avons vu que les travaux de Markowitz se basent essentiellement sur l'arbitrage entre le risque et le rendement espéré, sans oublier l'effet de la diversification.

Par la suite, les travaux de Sharpe, Lintner et Mossin aboutissent à une présentation simplifiée du modèle de H.Markowitz sous forme d'un modèle d'équilibre des actifs financiers et la découverte de bêta économique.

Même si le MEDAF (Sharpe 1964) a révolutionné la finance moderne en donnant une expression simple de la rentabilité d'un titre en fonction du risque bêta, et de nombreuses études ont été consacrée à son évaluation ; de là apparaisse la difficulté d'estimation du ce coefficient, et ce dans la mesure où ce dernier est lié directement au marché qui lui-même instable.
Ainsi dans ce contexte de l'instabilité ; il est devenu impossible de se tenir à l'hypothèse de facteur bêta constant ; puisque ce dernier n'est pas représentatif de la réalité.

Certaines questions restent posées, ce qui va décomposer le facteur bêta en plusieurs facteurs de risque pour qu'ils puissent refléter mieux la réalité de risque de marché, ce qui a donné naissance à d'autres modèles (APT…).

C'est vrai que chacun des modèles est venu pour contredire ou compléter son antécédent, mais tous se basent sur la rentabilité de l'avenir.