Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté de Génie Electrique et Informatique
Département Automatique

MEMOIRE DE MAGISTER

En Automatique

Option : **Traitement d'images et reconnaissance de formes**

Présenté par :

GADA Saliha ép. BOUHEDDA

Ingénieur U.M.M.T.O

Thème :

Décomposition Modale Empirique: Application à l'analyse de la texture

Mémoire soutenu le : 31/11/2013 devant le jury d'examen composé de

Président :	**DIAF Moussa**	Professeur à l'UMMTO
Rapporteur :	**HAMMOUCHE Kamal**	Professeur à l'UMMTO
Examinateur :	**HADDAB Salah**	Maître de conférences A à l'UMMTO
Examinateur :	**AHMED OUAMAR Rachid**	Maître de conférences A à l'UMMTO
Examinateur :	**DIRAMI Ahmed**	Maître de conférences B à l'UMMTO

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire Robotique et Vision de la Faculté de Génie Electrique et Informatique de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Je tiens en premier lieu à adresser mes vifs remerciements à mon directeur de mémoire **Mr. K. HAMMOUCHE** (Professeur à l'UMMTO) pour m'avoir guidé tout le long de ce travail. Je lui exprime ma profonde gratitude pour m'avoir fait profiter de ses connaissances et surtout sa rigueur scientifique. Sans sa disponibilité permanente son soutien et ses conseils ce travail n'aurait pas pu aboutir.

Je ne manquerai pas de remercier Mr. **DIAF Moussa** (Professeur à l'UMMTO) pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier les membres de jury, **Mr. HADDAB Salah** (Maitre de conférences classe A à l'UMMTO), **Mr. AHMED OUAMAR Rachid** (Maitre de conférences classe A à l'UMMTO) et **Mr. DIRAMI Ahmed** (Maitre de conférences classe B à l'UMMTO) pour l'honneur qu'ils me font en participant au jury et qui ont pris la peine de lire avec soin ce mémoire pour juger son contenu.

Merci enfin, à ma très chère famille.

Sommaire

Introduction générale…….....1

Chapitre 1 : Analyse et segmentation d'images texturées

1.1 Introduction……..…….3
1.2 Classification des textures……3
1.2.1 Textures structurelles……..3
1.2.2 Textures aléatoires……..4
1.2.3 Textures directionnelles……..4
1.3 Un niveau de définition à fixer……...4
1.4 Perception et analyse visuelle d'une texture……5
1.4.1 Vision et perception par l'œil……..5
1.4.2 Analyse visuelle d'une image……...5
1.5 L'analyse de texture……8
1.5.1 Méthodes d'analyse de la texture……8
1.5.1.1 Approche structurelle……..8
1.5.1.2 Approche statistique……..8
1.5.1.3 Méthodes basées sur un modèle……...10
1.5.1.4 Morphologie mathématique.....….....10
1.5.1.5 Approche fréquentielle……13
a.Transformée de Fourier ……...14
b. Masques de Laws…...…….....15
c.Filtres de Gabor…….....16
d.La transformée en ondelettes……...17
1.6 Application de l'analyse de la texture….....22
1.6.1 Classification des textures ……22
1.7 Segmentation d'images texturées……..……23
1.7.1 Méthodes de Segmentation d'images…….……23

➢ Algorithme K-Means…….24
1.8 Conclusion…….26

Chapitre 2: Décomposition modale empirique monodimensionnelle

2.1 Introduction…….27
2.2 L'analyse temps-fréquence…….27
2.2.1 Transformée de Fourier sur fenêtre glissante……..27
2.2.2 Transformée en ondelettes (Wavelet Transform WT)…….28
2.2.3 Transformée de Hilbert-Huang……29
2.3 Décomposition modale empirique……..30
2.3.1 Principe de l'EMD…….30
2.3.2 Définition de l'Intrinsic Mode Function (IMF) ……...….31
2.3.3 Algorithme de la décomposition modale empirique……..32
2.3.4 Critère d'arrêt du processus de tamisage……...41
2.4 Transformée de Hilbert (TH)……..42
2.4.1 Définition de la TH……42
2.4.2 Signal analytique……43
2.4.3 Amplitude Instantanée et fréquence instantanée……44
2.5 Conclusion……..45

Chapitre 3 : Décomposition modale empirique bidimensionnelle

3.1 Introduction……46
3.2Décomposition modale empirique bidimensionnelle……..46
3.2.1 Calcul des extrema…….47
3.2.2 Calcul des enveloppes supérieures et inférieures……...48
3.2.3 Critère d'arrêt du processus de tamisage……....49
3.2.4 Illustration de la BEMD classique ……49
3.3 Méthodes BEMD rapides……51
3.3.1 Méthodes SREMD ……52

3.3.2 Méthodes WIEMD…….53
3.3.2.1 Méthode de décomposition modale empirique rapide et adaptative……..55
a. Calcul des enveloppes supérieures et inférieures…….56
b. Illustration de la méthode FABEMD……58
3.3.3 Méthodes 1D-EMD……60
3.3.3.1 Méthode basée sur le balayage de Hilbert-Peano……...62
a.Courbe de remplissage de l'espace (SFC : Space Filling Curves)…….……62
b. Algorithme de PHBEMD……..63
c.Illustration de la méthode PHBEMD…….64
3.4 Transformée de Hilbert bidimensionnelle……..65
3.5 Conclusion …….66

Chapitre 4 : Tests et résultats

4.1 Introduction…….……67
4.2 Segmentation d'images texturées basée sur la BEMD…….……..67
4.3 Critères d'évaluation…….……..67
4.4 Images synthétiques et réelles…….71
4.4.1 Images synthétiques……...71
4.4.2 Images réelles…….76
4.5 Conclusion…….79
Conclusion générale……...80
Bibliographie
Annexe

Introduction générale

Introduction générale

Nous vivons actuellement une véritable révolution de l'accès à l'information, dans tous les domaines de l'activité humaine. La possibilité de remplacer les supports traditionnels papiers, images, films,... par des supports numériques a complètement changé les possibilités d'accès à l'information: elle est maintenant facilement accessible partout via les réseaux de communication numérique. Cela s'est traduit par la numérisation pratiquement systématique de toutes les informations disponibles, avec des volumes en constante augmentation, et la numérisation de données très hétérogènes: textes, images, signaux, sons, vidéos... Dans ce contexte, il est devenu nécessaire de mettre à disposition des outils permettant de retrouver rapidement ou de traiter l'information désirée.

Le travail rapporté dans ce manuscrit a pour sujet central l'analyse d'images en général et plus particulièrement l'analyse d'images texturées. Dans une image, la texture est une répétition régulière ou aléatoire d'une (famille de) primitives de base.

L'analyse d'images texturées à pour but d'extraire des caractéristiques ou attributs de texture afin de classer ou de segmenter les images. La classification des images est utilisée dans différents domaines tels que la reconnaissance des empreintes, des visages, indexation, reconnaissance des tumeurs etc.… Quant à la segmentation, celle-ci constitue une étape importante dans un système de traitement d'images. Elle consiste à regrouper les pixels de l'image qui partagent une même propriété (texture) ou les mêmes attributs de texture. La segmentation des images est utilisée dans le diagnostique médical, en biométrie, en télédétection, etc.…

Plusieurs techniques d'analyse d'images ont été développées ces dernières années. Nous nous somme intéressés dans notre travail à une nouvelle méthode d'analyse de la texture basée sur la Décomposition Modale Empirique (DME) ou Empirical Mode Decomposition (EMD). L'EMD est une technique assez récente d'analyse temps-fréquence d'un signal. Elle permet de décomposer un signal non stationnaire et non linéaire en une somme de signaux mono composantes (une seule oscillation) dites « Intrinsic Mode Function » ou IMF. Cette

technique, dite aussi transformée de Huang est associée à la transformée dite transformée de Hilbert qui permet de calculer l'amplitude instantanée et la fréquence instantanée de chaque IMF. L'association de ces deux transformations est appelée transformée de Hilbert Huang (THH).

Séduisante par son aspect particulièrement intuitif, l'EMD est, cependant, définie par un algorithme complexe sans fondement théorique bien établi.

L'extension de l'EMD au cas des signaux bidimensionnels comme les images est théoriquement aisé. Cependant en pratique, cette extension soulève quelques problèmes et notamment le temps de calcul élevé. Plusieurs solutions ont été alors proposées.

Notre travail porte sur l'application de l'EMD sur les images et utiliser les IMF qui en résultent comme attributs afin de segmenter des images texturées.

Ce mémoire est scindé principalement en quatre chapitres.

Le premier chapitre est dédié à la notion de texture. Différents types de textures ainsi quelques méthodes d'analyse des images texturées sont présentées. Quelques méthodes d'analyse utilisées en traitement classique des images texturées telles que la classification et la segmentation sont également décrites.

Le deuxième chapitre expose la transformée de Hilbert Huang (THH) dans le cas des signaux monodimensionnels.

L'extension de l'EMD monodimensionnelle aux images bidimensionnelles est présentée dans le troisième chapitre et une étude assez exhaustive de ces méthodes y sera présentée.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation et la discussion des résultats de segmentation utilisant la décomposition modale empirique bidimensionnelle.

Chapitre I

Analyse et segmentation d'images texturées

1.1 Introduction

L'analyse d'images est un domaine très important du traitement de l'image. Les principales informations dans l'interprétation du message visuel pour un observateur humain sont les contours et/ou les textures.

L'analyse de l'image consiste souvent à extraire un certain nombre de propriétés caractéristiques et à les exprimer sous forme paramétrique. L'étape d'extraction des paramètres ou attributs précède souvent une étape de décision de manière à pouvoir répondre à des questions telles que: matériau normal ou défectueux? Tissu biologique sain ou pathologique? Types de défauts?...

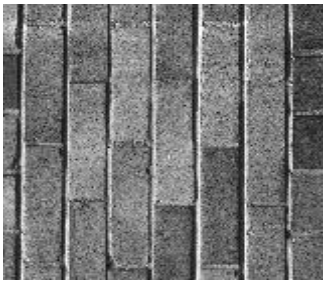
Les attributs calculés permettent donc de décrire, de caractériser, de segmenter et d'analyser les images en question. Selon le cas, l'analyse peut être globale ou locale, la notion de localité prenant toute son importance avec la complexité de l'image. Il est évident que le choix des attributs dépend surtout de l'application considérée, par exemple de lier ces attributs avec les propriétés physiques et biologiques réelles afin de les évaluer ou alors de trouver des similitudes avec des textures de référence afin de les identifier. [2].

1.2 Classification des textures

Il est possible de classer l'ensemble des textures en différentes catégories [12].

1.2.1 Textures structurelles

Encore appelées macro-textures, elles sont constituées par la répétition spatiale plus ou moins régulière d'un motif de base (appelé primitive ou Texel), dans différentes directions. Les textures périodiques constituent un sous-ensemble des textures structurées. L'exemple du mur de briques illustre bien ce type de texture (Fig.1.1).

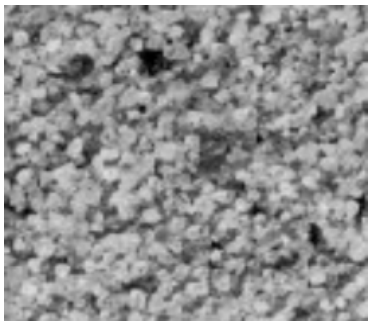


D94

Fig.1.1 : Exemple de textures structurées

1.2.2 Textures aléatoires

Dans ces textures, aucun motif particulier n'est localisable ou détectable. Elles ont un aspect anarchique et désorganisé, tout en restant homogène et ne répondent à aucune règle d'agencement particulière. La primitive est ramenée au niveau du pixel, ce qui vaut à ces textures le nom de micro-textures (ex: sable, laine tissée, herbe). (Fig.1.2).



D9

Fig.1.2 Exemple de texture aléatoire.

1.2.3 Textures directionnelles

Les textures directionnelles ne sont pas totalement aléatoires et ne présentent pas d'éléments structurants de base. Elles se caractérisent essentiellement par certaines orientations. La figure (1.3) montre un exemple de texture directionnelle.

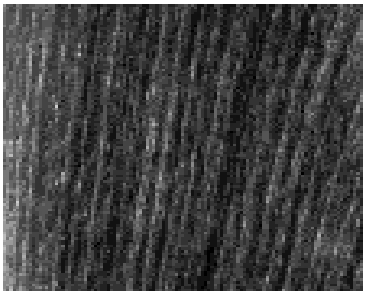


Fig.1.3 Une texture directionnelle

1.3 Un niveau de définition à fixer

Ces différentes catégories de textures montrent qu'il est difficile de donner une définition précise de la texture. Nous avons d'un côté une information structurelle et constructive, et d'un autre coté une information désordonnée et plus difficile à décrire (même visuellement d'ailleurs). Nous pouvons cependant dire que la texture est une information obtenue à partir d'un ensemble de mesures locales dans une région (fenêtre de visualisation) d'une image [13].

La définition littéraire de la texture est la suivante: "répétition spatiale d'un même motif dans différentes directions de l'espace". Cette définition est limitative car elle caractérise l'objet indépendamment d'un observateur humain. Elle manifeste aussi par une information visuelle qui permet de la décrire qualitativement à l'aide des adjectifs suivants: grossière, fine, lisse, tachetée, granuleuse, marbrée, régulière ou irrégulière… [2]. La notion de texture est utilisée pour traduire un aspect homogène de la surface d'un objet sur une image.

1.4 Perception et analyse visuelle d'une texture

1.4.1 Vision et perception par l'œil

L'œil humain distingue en moyenne 16 niveaux de gris différents du noir au blanc. Un œil peu exercé voit moins alors qu'un professionnel qui peut en distinguer jusqu'à 20. En revanche, il est capable d'apprécier des différences de niveaux voisins de 2% (contraste).
Une texture pourra être perçue de différentes façons suivant la manière dont le cerveau traitera les informations visuelles.

Il existe deux types de perception: celle qui ne demande pas d'effort et celle qui demande de scruter l'image plus longtemps. Sur la figure (1.4) ci-dessous, il est impossible de voir spontanément que l'image de gauche est formée d'une seule spirale alors que celle de droite en contient deux.

Fig.1.4 Exemple de la limite de la perception spontanée.

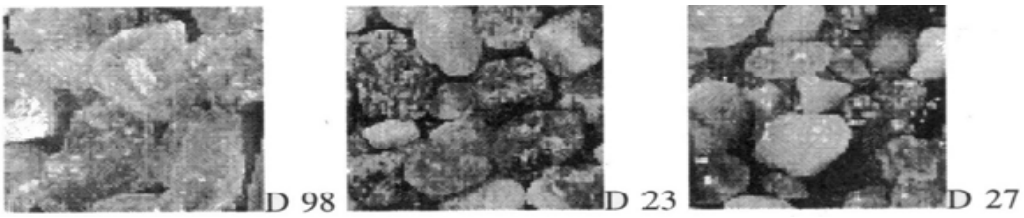
1.4.2 Analyse visuelle d'une image

Tout revient en fait à repérer et à discriminer différentes textures sur une image. Julesz ainsi que Martin et al [13] ont démontré que deux textures peuvent être distinguées principalement par leur statistique d'ordre deux. Si deux textures ont une même statistique d'ordre deux mais diffèrent par leur statistique d'ordre supérieur, l'œil ne pourra apprécier la différence.

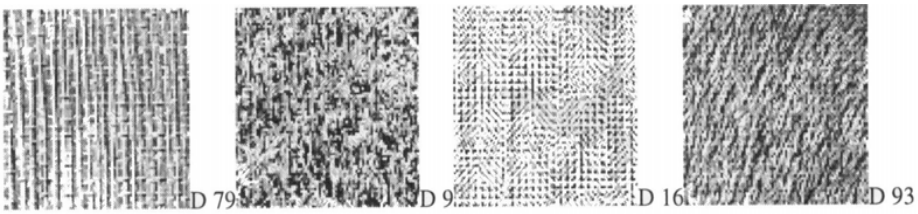
Chacun fait appel à son expérience et à ce qu'il a déjà vu. L'interprétation d'une image se fait donc en comparaison avec des images ou des formes déjà rencontrées; ceci permet de simplifier le travail de notre cerveau. Par exemple, pour l'analyse d'une image de cerveau, le

radiologue ne réagira pas de la même façon s'il connaît la pathologie ou s'il ne la connaît pas. Dans le premier cas, il cherchera le ou les points précis qui sont caractéristiques de la maladie déjà rencontrée alors que dans le deuxième cas, l'analyse sera plus globale. L'analyse d'une image par les radiologues variera en fonction de leur propre expérience. En fait l'observation des radiologues est "opérateur-dépendante". Comment le radiologue va t-il traduire en termes de texture ce qu'il voit sur l'image? Il doit rendre compte par des termes appropriés des variations de niveaux de gris présentes sur l'image. Les caractéristiques de base les plus utilisées sont le contraste, la complexité, de la grossièreté, de la forme, de la direction et de la force. Les figures ci-dessous illustrent quelques caractéristiques de la texture.

- **La grossièreté**: Une texture grossière possède des primitives larges: il existe alors peu de variations entre l'intensité d'un pixel et celle de ses pixels voisins (Fig.1.5)



a. Textures grossières



b. Textures non grossières

Fig.1.5 Exemple de textures grossières et non grossières

- **Le contraste :** Une texture possède un contraste élevé si les différences d'intensité entre primitives sont importantes (Fig.1.6).

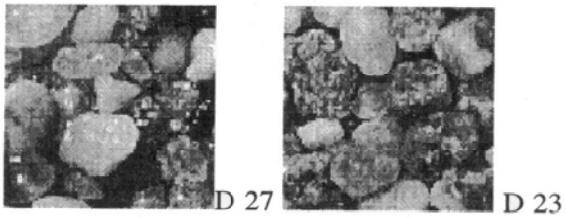


Fig.1.6 Exemple de textures contrastées

- **La complexité :** Une texture complexe possède plusieurs types de primitives (fig.1.7). Dans ce cas le contenu d'informations présent dans la texture est important.

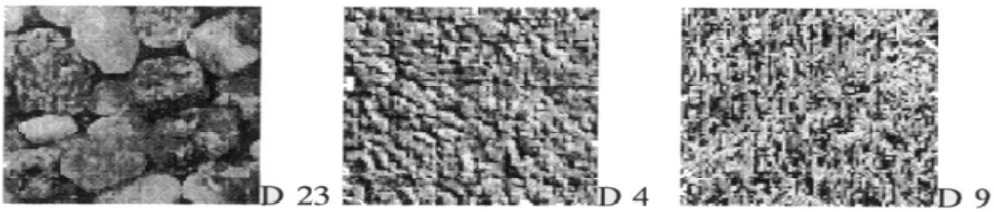
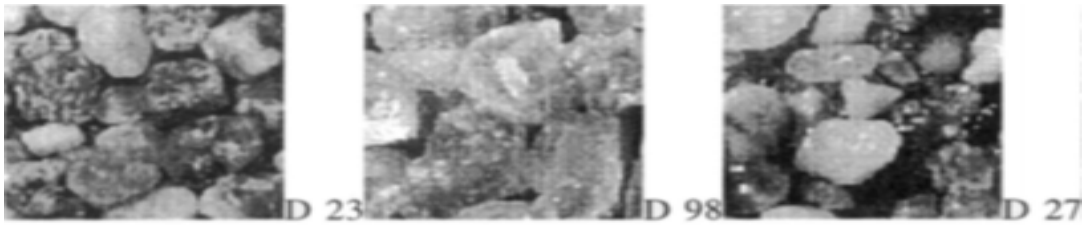
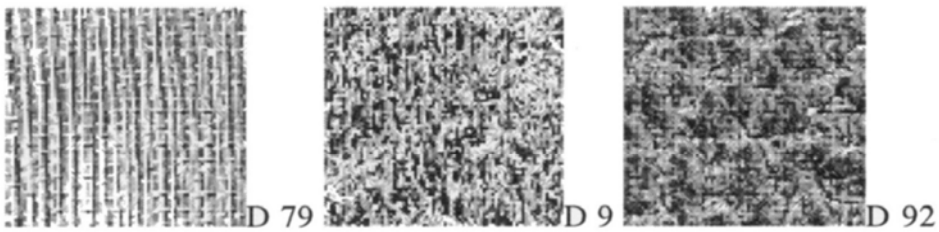


Fig.1.7 Illustration de la complexité des textures.

- **La force :** Plus la force est élevée plus les primitives sont facilement définissables et visibles.



a. Force élevée



b. Force faible

Fig.1.8 Illustration de la notion de force des textures

Remarque

Les textures présentées dans les figures précédentes sont tirées d'un catalogue d'images très populaire établit par Brodatz (1966). Ces textures correspondent à :

D4: liège, D9: gazon (herbe), D15 : paille, D16: tissage à chevron, D19 : étoffe de laine, D23: pierres (galets) de plage, D24 : Pressé de cuir de veau, D27: galets de plage et sable, D29 : Sable de plage, D38 : Eau, D68 :graine de bois, D79: tissu oriental fait de fibres de verre, D84 : Raffia, D92: peau de cochon, D93: fourrure, D94 Mur de brique, D98: quartz rose pressé, D112: Bulles en plastique etc.…

1.5 L'analyse de la texture

L'analyse de la texture regroupe un ensemble de techniques mathématiques permettant de quantifier les différents niveaux de gris présents dans une image en termes d'intensité et de distribution.

Cette analyse a d'abord été utilisée pour la segmentation des images satellitaires, ce n'est qu'au début des années soixante-dix que les premières applications biomédicales sont apparues.

L'extraction d'attributs caractéristiques a donné lieu à un certain nombre de méthodes d'analyse structurelle et statistique. Elles sont utilisées actuellement pour l'indexation, la classification et la segmentation d'images [5], [12].

1.5.1 Méthodes d'analyse de la texture

La diversité des images, ainsi que la complexité de donner une définition précise de la texture a permis l' émergence de plusieurs méthodes d'analyse de la texture. Ces méthodes ont pour but d'extraire un ensemble d'attributs ou paramètres pouvant décrire les caractéristiques de la texture. Ces attributs doivent être représentatifs, pertinents et discriminant de façon qu'on puisse discerner une texture parmi d'autres. Leurs extractions peuvent être classées essentiellement en cinq approches, l'approche structurelle, l'approche statistique, l'approche basée sur un modèle, celle basée sur la morphologie mathématique et l'approche fréquentielle [1], [4].

1.5.1.1 Approche structurelle

L'approche structurelle cherche à extraire et à localiser des primitives des textures. Principalement, les méthodes structurelles utilisent des techniques d'auto corrélation pour retrouver le placement dans la texture de la primitive initialement extraite, afin d'en déduire une règle de placement. Les techniques employées sont très liées à la nature de l'image. Le trait caractéristique de ces méthodes est que toutes se déroulent en deux étapes, l'extraction de la primitive puis la recherche de la règle de placement [4].

1.5.1.2 Approche statistique

Les méthodes statistiques consistent à étudier les relations entre chaque pixel et ses voisins. Ces méthodes sont adaptées à l'étude des structures fines sans régularité apparente.

Plusieurs méthodes appartenant à cette approche ont été proposées. Parmi elles, on peut citer les méthodes d'ordre un, d'ordre deux et celles d'ordre supérieur. L'ordre des méthodes est donné par le nombre de pixels mis en jeu dans le calcul des attributs. Les méthodes statistiques du premier ordre considèrent les pixels pris individuellement. Les attributs sont calculés à partir de l'histogramme des intensités (ou histogramme du premier ordre). La moyenne, la variance, le skewness et le kurtosis sont les attributs le plus souvent utilisés pour caractériser une texture.

Les méthodes statistiques d'ordre 1 permettent une extraction rapide des attributs de texture. Cependant elles ne permettent pas d'étudier les relations entre deux pixels. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes d'ordre supérieur pour une analyse plus précise [5], [9]. Parmi ces méthodes, on retrouve celle qui basée sur les matrices de cooccurrence. La matrice de cooccurrence de niveaux de gris ou GLCM (Gray Level Cooccurrence Matrix) a été initialement introduite par Haralick en (1973) [20]. Elle est considérée comme une méthode de référence dans le domaine de l'analyse de la texture. Les matrices de cooccurrence d'Haralick, encore appelées matrices de dépendance spatiale des niveaux de gris, utilisent les statistiques d'ordre 2 et permettent de déterminer la fréquence d'apparition d'un motif formé de deux pixels séparés par une certaine distance d dans une direction particulière θ par rapport à l'horizontale, [4], [9], [11]. La matrice de cooccurrence est riche en information mais reste toujours difficilement exploitable dans son intégralité. Une solution consiste à réduire le nombre de niveaux de gris afin d'utiliser les éléments de la matrice de cooccurrence comme attributs de texture [4]. L'autre démarche qui est la plus courante consiste à extraire plusieurs attributs afin de résumer toute l'information apportée par la matrice de cooccurrence. 14 attributs ont été définis par Haralick [20].

La Méthode LBP (Local Binary Pattern) est une autre méthode d'analyse de la texture qui a émergé ces dernières années. Elle considère un nombre de pixels voisins p et une distance d reliant le pixel central avec les pixels voisins, centré sur chaque pixel de l'image. Pour chaque pixel, on définit une matrice de taille $(p \times p)$. En codant ces matrices, on obtient un nombre appelé Local Binary Patterns ou (LBP) qui peut prendre 2^p valeurs. Cette méthode est utilisée avec succès dans divers domaines comme la détection ou la reconnaissance faciale [6]. En termes d'efficacité discriminante, cette méthode offre de bonnes performances et contient des informations structurelles et statistiques. L'opérateur LBP peut être invariant aux rotations et changements d'échelles et offre une grande tolérance face aux changements de

luminosité. De plus, c'est une méthode de faible complexité qui rend possible l'analyse d'images 2D en temps réel.

1.5.1.3 Méthodes basées sur un modèle

Les méthodes fondées sur un modèle décrivent la texture par un modèle probabiliste. Celle-ci est alors caractérisée par les paramètres de ce modèle. On distingue en général trois types de méthodes: les champs de Markov, les fractales et les modèles autorégressifs (AR) [6]. Les modèles de Markov traitent l'image comme une réalisation d'un champ aléatoire dans un contexte de voisinage. Ils considèrent que l'intensité en chaque pixel de l'image dépend seulement des intensités des pixels voisins. Le modèle le plus souvent utilisé est le champ de Markov Gaussien GMRF (Gaussien Markov Random Field) [6], [11], [13]. Les fractales permettent de caractériser la rugosité ou la texture à travers un attribut en l'occurrence la dimension fractale [6]. Quant aux modèles autorégressifs (AR), ils considèrent une interaction entre l'intensité de chaque pixel de l'image et la somme pondérée des intensités de ses voisins.

1.5.1.4 Morphologie mathématique

La morphologie mathématique est une théorie d'analyse d'images née dans les années soixante lorsque Matheron et Serra effectuèrent des travaux sur les milieux poreux. A la base, cette technique s'appliquait à des images binaires, qui étaient considérées comme des ensembles. La question était de savoir si une certaine forme était incluse dans tout ou partie de l'image. Une sonde possédant une certaine forme, appelée élément structurant, était utilisée pour parcourir l'image et permettait, en chaque point, de répondre à la question posée [14]. La morphologie mathématique fournit aujourd'hui des outils puissants à toutes les disciplines qui s'intéressent à l'analyse quantitative d'images. Elle est considérée comme une théorie de base pour l'analyse des structures spatiales, elle est appelée morphologie au sens où elle permet d'analyser les formes et les surfaces des objets, et mathématique au sens où l'analyse est basée sur la théorie des ensembles (topologie, etc.). La morphologie mathématique constitue une technique d'analyse d'images à part entière et peut être utilisée pour résoudre un grand nombre de problèmes de traitement d'images tels que le filtrage d'images, la mesure, la reconnaissance des objets, le rehaussement d'images et l'analyse de texture [19]. Le filtrage permet de conserver ou supprimer des structures d'une image possédant certaines caractéristiques, notamment de forme (morphologiques).

➢ **Dilatation**

Soit I une image, s le pixel courant de cette image, B un élément structurant (ensemble dans $\mathcal{R}^2$). On définit alors l'opérateur de dilatation par :

$$\delta_B(I) = I \oplus B^t \quad (1.1)$$

Avec B^t est la transposée de B, $\oplus$ est la somme de Minkowski (somme d'ensemble).

Dans le cas d'un élément structurant plan pour une image 2D :

$$\delta_B(I)_{(s)} = [\, I \oplus B]_{(s)} = \sup[f(y)] \;\; pour\; y \in B_s \,, \;\; avec\; s, y \;\in\; \mathcal{R}^2. \quad (1.2)$$

La figure (1.9) présente deux cas de dilatation, avec deux éléments structurants. Dans les deux cas, on observe qu'une dilatation élimine les trous isolés dans les objets et dilate le contour des objets en tenant compte de l'élément structurant.

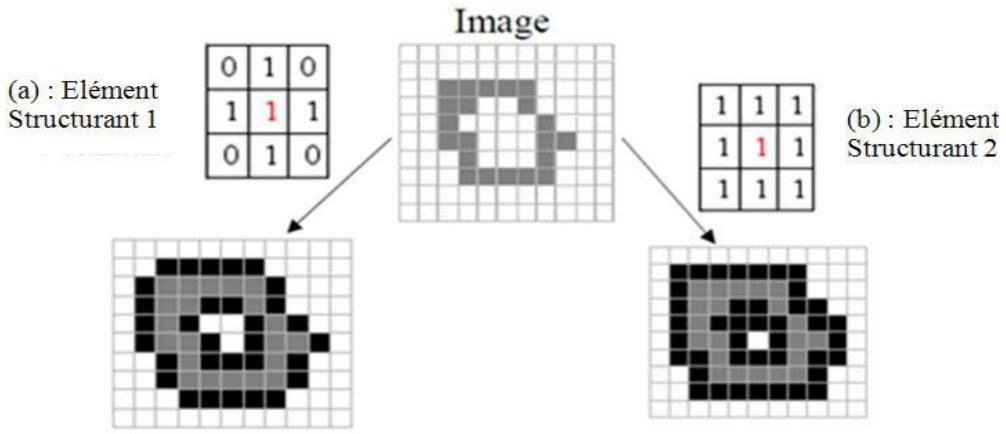


Fig.1.9 : Dilatation d'une image binaire

➢ **Erosion binaire**

Soit I une image, s le pixel courant de cette image, B un élément structurant. On définit alors l'opérateur d'érosion par :

$$\varepsilon_B(I) = I \ominus B^t \quad (1.3)$$

Avec B^test la transposée de B, $\ominus$ est la soustraction de Minkowski (différence d'ensemble).

Dans le cas d'un élément structurant plan pour une image 2D :

La figure (1.10) présente deux cas d'érosion, réalisés sur la même image de départ, mais avec deux éléments structurants différents. Dans les deux cas, on observe qu'une érosion élimine les pixels isolés sur le fond et érode le contour des objets.

$$\varepsilon_B(I)_{(s)} = [\, I \ominus B]_{(s)} = \inf[f(y)]\; pour\; y \in B_s, \quad avec\; s, y \;\in\; \mathcal{R}^2 \quad (1.4)$$

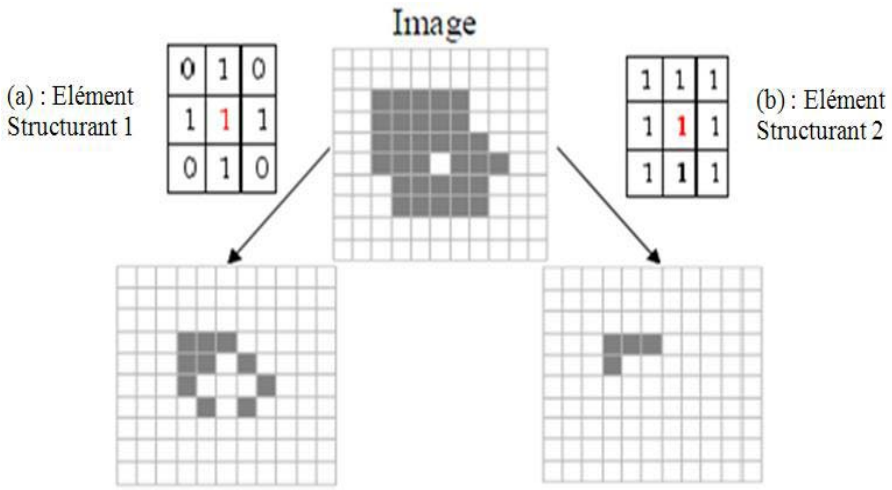


Fig.1.10 : Erosion d'une image binaire.

❖ **Ouverture et fermeture binaires**

L'érosion permet de supprimer d'une image toutes les structures ne contenant pas l'élément structurant tout en altérant les autres structures. Afin d'éviter cette altération, une possibilité est de dilater le résultat de l'érosion par le même élément structurant. Ainsi les structures éliminées par l'érosion auront disparu, tandis que les structures simplement altérées par l'érosion retrouveront de manière approximative leur forme originelle [14].

L'ouverture morphologique est fondée sur ce principe :

$$\gamma_B : X \longmapsto (X \ominus B) \oplus B = \delta_B[\varepsilon_B(X)] \qquad (1.5)$$

L'operateur γ_B est appelé l'ouverture morphologique de l'image X par l'élément structurant B.

De manière intuitive, le résultat de l'ouverture morphologique peut être vu comme la réunion des éléments structurants entièrement inclus dans l'objet.

$$\gamma_B = \bigcup_x \{B_x \subseteq X\} \qquad (1.6)$$

L'opérateur de fermeture morphologique de X par l'élément structurant B est défini par :

$$\phi_B : X \longmapsto (X \oplus B) \ominus B = \varepsilon_B[\delta_B(X)] \qquad (1.7)$$

La fermeture morphologique agit de manière duale à l'ouverture, c'est à dire qu'elle bouche les parties du fond de l'image ne contenant pas l'élément structurant.

❖ **Gradient morphologique binaire**

Le gradient morphologique est défini à partir de l'érosion et de la dilatation. On considère :

- ✓ Le gradient morphologique ou gradient de Beucher :

$$\rho_B = \delta_B(X) \tag{1.8}$$

- ✓ Le gradient morphologique interne :

$$\rho_{B^-}(X) = X - \varepsilon_B(X) \tag{1.9}$$

- ✓ Le gradient morphologique externe :

$$\rho_{B^+}(X) = \delta_B(X) - X \tag{1.10}$$

La morphologie mathématique a été appliquée avec succès en analyse d'images car les opérations morphologiques traitent directement la caractéristique géométrique des objets dans l'image. Une opération morphologique fondamentale est l'ouverture qui supprime les objets de taille inférieure à celle de l'élément structurant et conserve tous les autres. Elle peut s'employer en décomposition d'images texturées. Ainsi afin de séparer les primitives de différentes tailles dans une texture, un groupe B_i d'éléments structurants de différentes tailles est défini.

$$B_{i+1} = B_i \oplus B, \ \ avec \ \ i = 0,1, \dots, n-1 \tag{1.11}$$

Ici $\oplus$ désigne la dilatation, B_0= {(0, 0)} est l'origine et B est l'élément structurant élémentaire ayant une forme simple et régulière: carré, losange, croix etc. L'ouverture de l'image de texture $f(x, y)$ par l'élément structurant B_n le plus grand dans le groupe est d'abord calculée. Toutes les primitives de taille supérieure à celle de cet élément structurant sont extraites dans l'image $s(x, y)$ obtenue après ouverture, et toutes les primitives inférieures sont complètement supprimées. Les primitives un peu moins larges peuvent alors être extraites par ouverture sur l'image différentielle $f(x, y) - s(x, y)$ avec un élément structurant B_{n+1} un peu moins grand. Ensuite, de façon similaire les primitives de moins en moins larges sont extraites en utilisant des éléments structurants de plus en plus petits.

1.5.1.5 Approche fréquentielle

Les méthodes fréquentielles, souvent utilisées en traitement du signal, permettent d'analyser une texture en identifiant les différentes fréquences qui la composent. Parmi elles, on retrouve notamment la transformée de Fourier, les masques de Laws, les filtres de Gabor ainsi que la transformée en ondelettes.

a. Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est l'une des méthodes utilisée pour l'analyse linéaire des images, elle consiste à extraire les caractéristiques fréquentielles de la texture. Elle permet de passer d'une représentation de l'image dans le domaine spatial (coordonnées x et y) à sa représentation dans le domaine fréquentiel (coordonnées ou fréquence spatiale μ et ν) [2], [4], [9].

Pour une image numérique I de dimensions $M \times N$, on définit la Transformée de Fourier Discrète (TFD) par :

$$F(\mu,\nu) = \frac{1}{M \times N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} I(x,y) e^{-2\pi i \left(\frac{x}{N}\mu + \frac{y}{M}\nu\right)} \tag{1.21}$$

L'expression de la transformée inverse est :

$$I(x,y) = \frac{1}{M \times N} \sum_{\mu=0}^{N-1} \sum_{\nu=0}^{M-1} I(\mu,\nu) e^{2\pi i \left(\frac{\mu}{N}x + \frac{\nu}{M}y\right)} \tag{1.22}$$

Les termes de basse fréquence représentent les variations douces des niveaux de gris dans l'image, alors que les termes de hautes fréquences représentent les variations brutales.
La quantité $|F(\mu,\nu)|^2$ est appelée spectre de puissance.

On peut extraire des attributs de texture à l'aide de la transformée de Fourier comme par exemple l'énergie calculée dans une couronne ou bien en fonction de certaines directions [4].
Le domaine des fréquences est alors devisé en anneaux ou en secteurs angulaires et l'énergie calculée dans ces régions définit alors une caractéristique de la texture (fig.1.11).

$$f_{r1,r2} = \int_0^{2\pi} \int_{r2}^{r1} |F(\mu,\nu)|^2 dr\, d\theta \; avec \quad r = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \quad et \quad \theta = artan\left(\frac{\nu}{\mu}\right) \tag{1.23}$$

$$f_{\theta_1,\theta_2} = \int_{\theta 1}^{\theta 2} \int_0^{\infty} |F(\mu,\nu)|^2 dr\, d\theta \quad avec \quad r = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \;\; et \quad \theta = arctan\left(\frac{\nu}{\mu}\right) \tag{1.24}$$

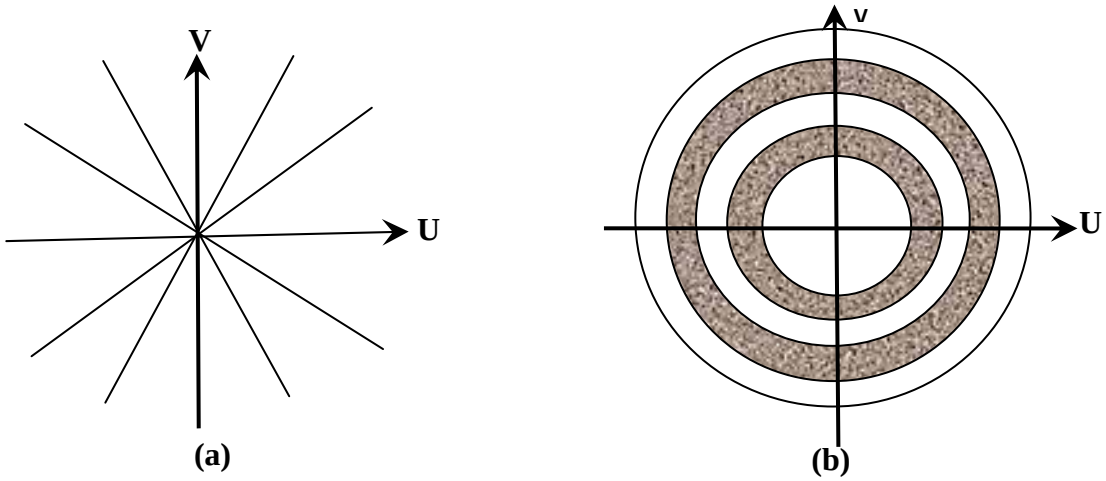


Fig.1.11 Exemples de partitions du plan fréquence en secteurs angulaires afin d'étudier les propriétés d'orientation (a), en anneaux concentriques afin d'étudier le contenu fréquentiel (b)

b. Masques de Laws

Laws a proposé un ensemble de masques de dimension (3×3) ou (5×5) pour caractériser les textures (tableau 1.1).

L'idée consiste à représenter les textures par des mesures d'énergie réalisées à la sortie d'un banc de filtres formées par ces masques. Ces filtres sont de type passe-bas, passe-bande ou coupe-bande, avec ou sans caractéristiques d'orientations.

L3L3 1 2 1 2 4 2 1 2 1	*L3E3* −1 0 1 −2 0 2 −1 0 1	*L3S3* −1 2 −1 −2 4 −2 −1 2 −1
E3L3 −1 −2 −1 0 0 0 1 2 1	*E3E3* 1 0 −1 0 0 0 −1 0 1	*E3S3* 1 −2 1 0 0 0 −1 2 −1
S3L3 −1 −2 −1 2 4 2 −1 −2 −1	*S3E3* 1 0 −1 −2 0 2 1 0 −1	*S3S3* 1 −2 1 −2 4 −2 1 −2 1

Tableau (1.1) : Les masques de Laws 3x3.

L'image originale $I(x,y)$ est convoluée par ces filtres, donnant lieu à plusieurs images résultats filtrées $I_f(x,y)$. Sur les images filtrées $I_f(x,y)$ est estimée une énergie locale pour chaque pixel sur une fenêtre de voisinage de largeur $(2w+1)$. Les caractéristiques spectrales détectées sont en haute fréquence et les orientations relevées sont les directions horizontales, verticales et obliques. Les propriétés statistiques locales (moyenne et variance) de l'énergie sont estimées pour caractériser les différentes textures [4], [7].

Moyenne

$$Vmoy(x,y) = \frac{1}{(2w+1)^2} \sum_{i=x-w}^{x+w} \sum_{j=y-w}^{y+w} I_f(i,j) \tag{1.16}$$

Variance

$$Var(x,y) = \frac{1}{(2w+1)^2} \sum_{i=x-w}^{x+w} \sum_{j=y-w}^{y+w} \left| I_f(i,j) - V_{moy}(x,y) \right| \tag{1.17}$$

L'intérêt de cette méthode est qu'elle est simple à mettre en œuvre, et qu'elle est directement exploitable pour réaliser une segmentation.

c. Filtres de Gabor

Les filtres de Gabor sont des filtres orientés passe bande qui présentent d'excellentes propriétés de localisation fréquentielles et spatiales.
Un filtre de Gabor h, à deux dimensions, peut être représenté comme une gaussienne modulée par une onde plane sinusoïdale [4], [8].

$$h(x,y) = exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right] \cos(2\pi(\mu_0 x + \nu_0 y) + \varphi) \tag{1.18}$$

Où μ_0, ν_0et φ sont respectivement la fréquence et la phase de l'onde plane sinusoïdale

$\sigma_x \; et \; \sigma_y$ caractérisent l'étendue spatiale du filtre.

Un filtre de Gabor d'orientation arbitraire θ peut être ensuite obtenu en faisant subir une rotation au système d'axes(x,y).

$$\begin{cases} x' = xcos\theta + ysin\theta \\ y' = -xsin\theta + ycos\theta \end{cases} \tag{1.19}$$

En faisant varier les différents paramètres $(\theta, \sigma_x, \sigma_y, \mu_0, \nu_0)$, plusieurs filtres de réponse impulsionnelle h_j sont obtenus.

Une image filtrée I_f est déterminée à la sortie de chacun de ces filtres :

$$I_{f_j}(x,y) = I(x,y) * h_j(x,y) \tag{1.20}$$

Plusieurs paramètres peuvent ensuite être extraits de ces images comme, par exemple, la moyenne absolue de la déviation.

$$m_j = \frac{1}{n^2} \sum_{x,y=0}^{n-1} \left| I_{f_j}(x,y) \right| \tag{1.21}$$

d. Transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes s'est imposée comme une technique de représentation temps échelle performante. Elle permet de décrire l'évolution temporelle des caractéristiques d'un signal relativement à une échelle d'observation donnée.

L'analyse est réalisée au moyen d'une fonction Ψ appelée ondelette de base (ou ondelette mère) qui permet de spécifier les caractéristiques du signal que l'on souhaite détecter. L'analyse en ondelettes consiste alors à positionner, dans le domaine temporel, l'ondelette mère en regard de la partie du signal à traiter, on parlera alors de translation. L'ondelette mère est ensuite dilatée ou contractée, par l'utilisation du facteur d'échelle notée (a), permettant de concentrer l'analyse sur une gamme donnée d'oscillations. Quand l'ondelette est dilatée, l'analyse explore les composantes du signal qui oscillent plus lentement, quand elle est contractée, l'analyse explore les oscillations rapides comme celles contenues dans une discontinuité du signal. Par ce changement d'échelle (contraction, dilatation), la transformée en ondelettes amène à une décomposition temporelle du signal [16], [35]. La transformée en ondelettes est formulée par:

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t).\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \tag{1.31}$$

Où $\Psi(t)$ représente l'ondelette mère, $\boldsymbol{b}$ le paramètre de translation et $\boldsymbol{a}$ le paramètre d'échelle *(a≠0).*

Le coefficient d'ondelette $W(a,b)$ d'un signal $s(t)$ dépend de la forme de celui-ci au voisinage du temps *b*. Quand $s(t)$ varie peu dans le temps, son produit par l'ondelette Ψ engendre une petite aire, autrement dit, $W(a,b)$ est petit. Quand, au contraire, la séquence du signal est irrégulière et que ses variations de fréquence sont comparables à celles de l'ondelette, l'aire du produit entre le signal et l'ondelette est importante.

L'ondelette peut être interprétée comme un filtre passe bande de fréquence centrale f_c.

La valeur des coefficients est d'autant plus grande que la fréquence du signal analysé coïncide avec celle de l'ondelette. La variation du paramètre 'a' permet de déterminer les modes du signal qui correspondent à la fréquence f_s avec $f_s = \frac{f_c}{a}$.

Une autre caractéristique de l'ondelette dilatée est d'être plus diffuse dans le temps et donc d'avoir un spectre plus concentré autour de sa fréquence centrale. L'inverse est constaté pour l'ondelette contractée.

La Figure (1.14) présente les propriétés temporelles (image de gauche) et fréquentielles (image de droite) de 3 échelles différentes d'une ondelette :

- ✓ **a=0.5** correspond à une ondelette contractée,
- ✓ **a=1** correspond à l'ondelette de base ou l'ondelette mère,
- ✓ **a=2** correspond à une ondelette dilatée.

Il est donc facile d'en conclure que la transformation en ondelettes (WT) favorise la résolution temporelle lors de l'analyse des composantes hautes fréquences et privilégie la résolution fréquentielle lors de l'analyse des composantes basses fréquences.

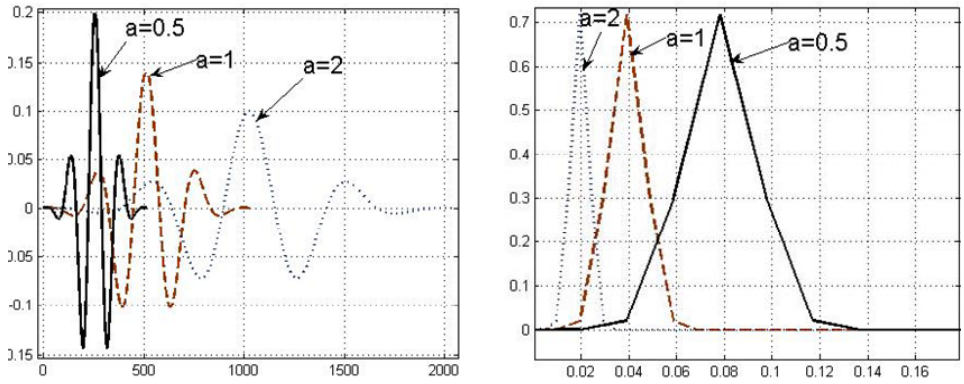


Fig.1.14 Propriétés d'une ondelette mère, contractée et dilatée.

➢ **Transformée en ondelette continue/discrète**

La transformée en ondelette est dite continue quand les paramètres de dilatation et de translation (a, b) varient continûment. La transformée en ondelettes discrète est une représentation multi-résolutions et multifréquences. C'est un outil qui découpe les données, les fonctions ou les opérateurs en composantes fréquentielles suivant une résolution adaptée à l'échelle. L'analyse multi-résolution consiste à analyser le signal à haute fréquences, pour en prélever les détails, ensuite elle analyse le signal à une résolution deux fois moins fine, et elle

réitère l'opération en grossissant son échelle d'un facteur deux, jusqu'à obtenir une description complète du signal [22], [35].

Différentes ondelettes peuvent être utilisées, les plus courantes sont:

- ✓ Ondelettes continues
  - ondelette de Morlet
  - ondelette Sombrero
- ✓ Ondelettes discrètes
  - Ondelettes orthogonales: Haar, Shannon, Meyer, Battle-Lemariè Daubechies, Coiflets, spline
  - ondelettes bi-orthogonales: Cohen-Daubechies-Feauveau, Chui
  - ondelettes semi-orthogonales: spline

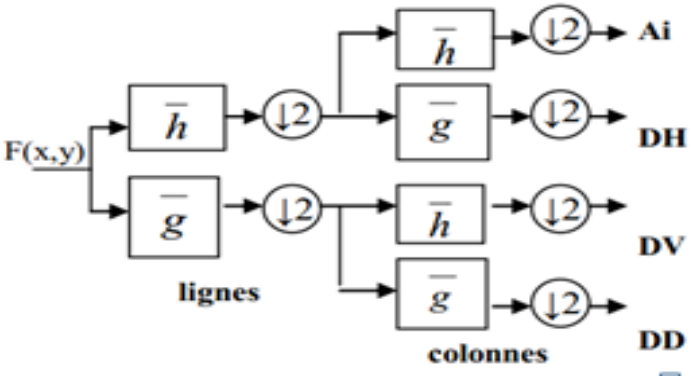
Le choix de l'ondelette dépend surtout de l'application. En traitement d'images, on préfère utiliser des ondelettes bi-orthogonales qui permettent d'allier les propriétés de linéarité en phase (symétrie du traitement droite-gauche) avec la compacité des supports des filtres utilisés. En effet, ce choix est basé sur le fait de trouver des bancs de filtres qui compactent le maximum d'énergie, tout en garantissant une bonne qualité de reconstruction de l'image [22].

- **Transformée en Ondelettes bidimensionnelle**

La transformée en ondelettes 2D découle directement de la transformée en ondelette 1D. Ainsi la méthode la plus simple pour obtenir les fonctions d'ondelettes et d'échelle en deux dimensions est de multiplier deux fonctions à une dimension. On obtient la fonction d'échelle 2D par multiplication de deux fonctions d'échelle $\phi(x,y) = \phi(x).\phi(y)$. L'obtention des fonctions d'ondelettes est réalisée par multiplication de deux fonctions d'ondelettes 1D ou d'une fonction d'ondelettes et d'une fonction d'échelles. Ainsi une transformée en ondelette 2D possède trois fonctions d'ondelettes $\psi(x,y)^H = \phi(x).\psi(y)$, cette première fonction d'ondelettes permet de récupérer les détails horizontaux, $\psi(x,y)^V = \psi(x).\phi(y)$, pour les détails verticaux; $\psi(x,y)^D = \psi(x).\psi(y)$, pour les détails diagonaux [22]. La TOD 2D peut être implémentée en utilisant un banc de filtres, illustrée par la figure (1.15) avec :

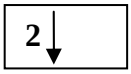
$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\phi\left(2^{-j}t - k\right); \tag{1.23}$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi\left(2^{-j}t - k\right); \ \ avec\ (j,k \in \mathbb{Z}) \tag{1.24}$$

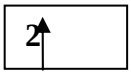


h Filtre passe bas

g Filtre passe haut



: Décimation d'une ligne (colonne) sur deux



: Interpolation des lignes (colonnes), c'est-à-dire mettre une ligne (colonne) de zéros entre deux

Fig.1.15 Analyse multi résolutions en deux dimensions

L'application d'une TOD 2D sur une image est illustrée sur la figure (1.16)

- **Extraction des attributs par la transformée en ondelette**

Comme toute méthode de segmentation d'images texturées, la transformée en ondelette commence par sélectionner un ensemble d'attributs caractérisant la texture locale. L'analyse multi-échelle est effectuée dans une fenêtre d'analyse représentant la texture locale. La figure (3.17) illustre cette démarche.

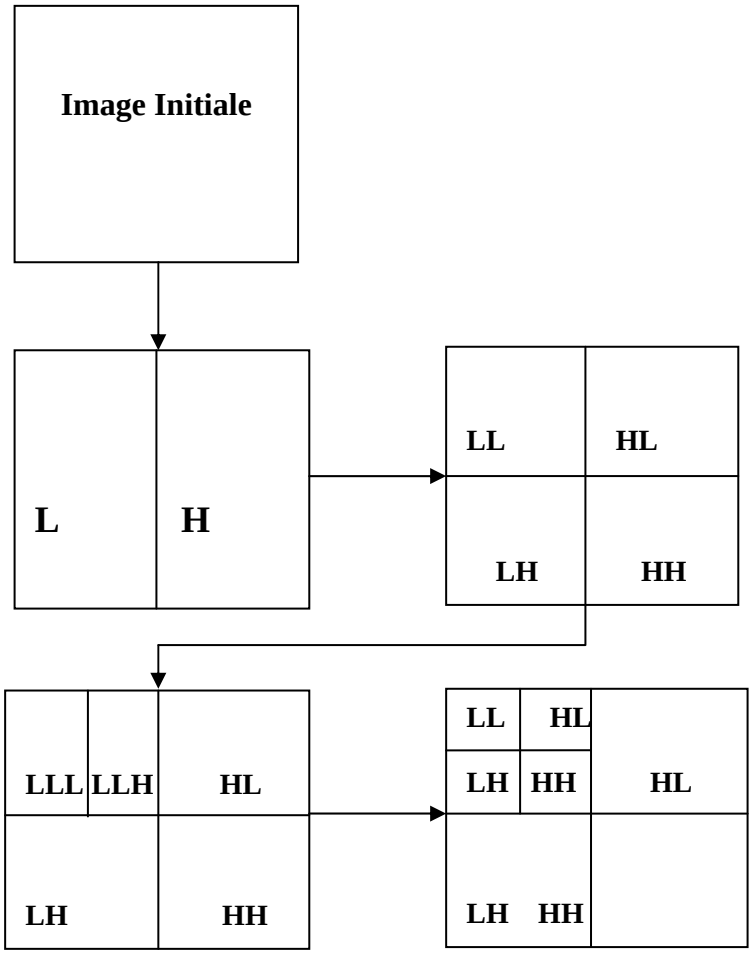


Fig.1.16 Décomposition pyramidale de Mallat d'une image

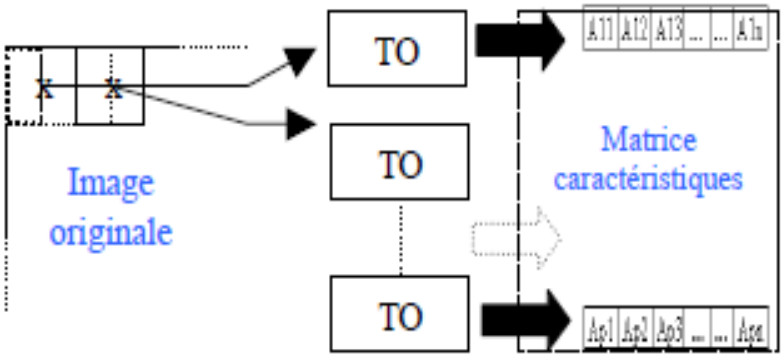


Fig. 1.17 : Phase d'extraction des attributs de l'image originale

L'extraction des attributs se fait par la transformée en ondelettes. Après avoir appliqué l'algorithme de décomposition de l'image discrète I[N, M] sur J niveaux, nous nous

retrouvons avec 3J+1 canaux de caractéristiques qui vont donner lieu à un vecteur d'attributs Y pour chaque pixel.

$$Y = \{a_J, (d_k^1, d_k^2, d_k^3), k = 1 \dots J\} \quad (1.34)$$

avec a_J est une approximation de basse résolution de l'image originale, et les d_k sont les sous-bandes contenant les détails de l'image à différentes échelles et orientations. Nous interprèterons les vecteurs transformés en ondelettes résultants comme une transformée linéaire locale des pixels d'entrées et nous pouvons ainsi caractériser une texture en regardant le comportement de ces vecteurs Y [16] .

1.6 Application de l'analyse de la texture

En imagerie, l'analyse de la texture a principalement pour but de classifier les textures ou de segmenter des images texturées.

1.6.1 Classification des textures

La classification de textures consiste à associer une classe ou un label, à une texture donnée, en fonction de ses caractéristiques. Une première étape importante est donc l'extraction des attributs de textures. Ces attributs sont calculés par l'une des méthodes présentées précédemment sur l'image entière. Ces caractéristiques sont regroupées sous forme de vecteurs numériques et sont, par la suite, directement utilisées par un classificateur. Une deuxième étape importante du processus de classification est donc le choix du classificateur par une approche supervisée

- ✓ **La classification supervisée** se pratique si les domaines des classes sont connus a priori. Toutes les méthodes supervisées comprennent deux phases: la phase d'apprentissage et la phase de classification. Lors de la première phase, à l'aide des images prototypes dont la classe d'appartenance est connue, on établit des zones ou domaine dans l'espace des attributs pour chaque classe. Dans la seconde phase, on classe une image dans l'une des classes de texture disponibles.

Elle consiste à affecter cette image à l'une des classes de texture en fonction de ses attributs de textures. Cela revient à identifier le type de la texture. Cette opération est effectuée en localisant le domaine de la classe de l'espace des attributs dans lequel cette image est située.

Il existe une multitude de méthodes supervisée les classiques sont la classification optimale de Bayes et la règle des K plus proches voisins, etc.… [4].

1.7 Segmentation d'images texturées

La segmentation d'images est un problème important dans le traitement numérique des images. La segmentation est une opération qui a pour objectif la description de l'information contenue dans l'image en donnant une représentation plus condensée et facilement exploitable. Elle consiste à détecter les régions homogènes qui sont formées des pixels adjacents ayant des attributs ou caractéristiques de texture proches. Il est difficile de définir d'une manière absolue, une bonne segmentation. La segmentation, souvent, n'est pas une fin en soi, sa qualité influe directement sur les résultats obtenus par les traitements situés en aval de l'étape de segmentation

1.7.1 Méthodes de Segmentation d'images

Il existe dans la littérature une très grande diversité de techniques de segmentation. Nous pouvons distinguer deux types d'approches: approche "contour" et approche 'région'. L'approche contours consiste à détecter les contours ou les frontières des objets ou régions homogènes qui composent l'image. Ces contours peuvent être détectés en utilisant soit des méthodes dérivatives qui font appel au calcul du gradient ou du Laplacien [10], soit en faisant évoluer une courbe appelée contour actif [10] ou « Snake » jusqu'à entouré l'objet.
Souvent présentée comme le dual de l'approche contour, l'approche région consiste à décomposer le support image en un ensemble de régions connexes les plus homogènes possibles.

La segmentation d'une image I en regard d'un prédicat ou critère d'homogénéité P est définie comme une partition de I en N régions $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ telles que :

- $\forall i\ R_i \neq \emptyset$
- $\bigcup_{i=1}^{N} R_i = I, \forall\ i \in [1, N]$
- $R_i \cap R_j = \emptyset\ \ \forall i \neq j$
- $P(R_i)\ est\ vrai: la\ région\ R_i est\ homogène$
- $\forall (R_i, R_j)\ deux\ régions\ voisines, P(R_i, R_j)\ est\ faux$

Cette définition conduit à deux remarques très importantes. Tout d'abord, une segmentation dépend du critère employé. Le choix du critère est donc primordial. Ensuite, cette définition n'assure pas l'unicité de la décomposition. Pour un critère donné, il peut exister plusieurs solutions.
L'approche région regroupe quatre grandes familles de méthodes: fusion, division, division-fusion et celles basées sur la classification non supervisée.

L'idée des techniques de fusion est d'exploiter une partition initiale de l'image constituée de petites régions. Puis ces régions sont fusionnées successivement jusqu'à ce que le critère de fusion ne soit plus vérifié. Les méthodes de division procèdent par partitionnement. Elles divisent l'image, qui constitue la région initiale, en régions de plus en plus petites et homogènes. Le processus est réitéré pour chacune des régions produites jusqu'à ce qu'une certaine homogénéité soit atteinte. L'homogénéité d'une région est souvent contrôlée par sa variance ou son contraste.

Une région est divisée en sous-régions de niveaux inférieurs, les frontières d'une région sont alors représentées sur différents niveaux. Pour remédier à ce problème, les méthodes division fusion procèdent en deux étapes. L'image initiale peut être une première partition résultant d'une analyse grossière ou bien l'image brute. Dans la première étape, ou division, on analyse individuellement chaque région R_i. Si celle-ci ne vérifie pas le critère d'homogénéité, alors on divise cette région en blocs (le plus généralement en 4 quadrants) et l'on réitère le processus sur chaque sous-région prise individuellement. Le découpage arbitraire peut conduire à ce que cette partition ne soit pas maximale. Dans la deuxième étape, ou fusion, on étudie tous les couples de régions voisines (R_k, R_i). Si l'union de ces deux régions vérifie le critère d'homogénéité, alors, on fusionne les régions.

Quant aux méthodes de classification non supervisées, celles-ci ont été abondamment utilisées pour la segmentation d'images texturées. Ces méthodes considèrent une région comme un ensemble de pixels connexes ayant des caractéristiques texturales similaires et forment un nuage de points dans l'espace des attributs. Etant donné que chaque pixel est caractérisé par un ensemble d'attributs, sa classification consiste alors à retrouver de groupes de points qui forment des clases [4]. Pour atteindre cet objectif, plusieurs techniques ont été proposées. Parmi elles, on peut citer l'algorithme K-means que nous avons choisi d'utiliser dans notre travail pour sa simplicité d'implémentation.

- **Algorithme K-means**

La méthode K-means fait partie d'un ensemble de techniques métriques de partition dont le principe consiste à choisir initialement K représentants $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots, R_K$ de K classes $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K$, définissant ainsi une représentation $R = \{R_1, R_2, \dots, R_k, \dots, R_K\}$ et une partition $C = \{C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_K\}$. Chacune des observations à classer (pixel) est affectée à l'une des C_k selon une mesure de similarité entre chaque représentant R_k et l'observation considérée. La partition C ainsi obtenue est utilisée pour redéfinir une nouvelle

représentation R. Ce processus itératif, qui inclut les deux phases de définition de la partition C et la réactualisation de la représentation R, prend fin lorsqu'un critère mesurant l'adéquation entre la représentation R et la partition C est optimisé.

La méthode des K-means, connue également sous le nom de procédure de minimisation de l'erreur quadratique, fonctionne suivant l'algorithme (1.1). Les Q observations (pixels) à classer sont définis dans un ensemble $X = (X_1, X_2, \dots, X_q, \dots, X_Q)$ où chaque observation est caractérisée par un ensemble de D attributs (texturaux) $X_q = (X_{q1}, X_{q2}, \dots, X_{qD})$. La représentation R_k de chaque classe C_k est définie par son centre $\overline{X_k}$. La mesure de similarité utilisée est la distance euclidienne $d_k(X_q) = d(X_q, \overline{X_k}) = \|X_q - \bar{X}_k\|$ de chacune des observations X_q aux différents centres $\overline{X_k}$ choisis initialement. Le critère à optimiser est défini par:

$$J(C) = \sum_{l=1}^{K} \sum_{\substack{q=1 \\ q \in C_k}}^{Q_K} d(X_q, \overline{X_k})^2 \tag{1.26}$$

Où Q_K représente le nombre d'observations de la classe C_k.

La matrice C^* qui optimise ce critère est définie par :

$$J(C^*) = \min_{c} J(C) \tag{1.27}$$

La minimisation de ce critère revient à déterminer les centres des classes $\overline{X_k}(k = 1, .., K)$

L'algorithme K-means nécessite, dans sa version de base, la spécification du nombre de classes K et la partition de départ. Les performances de cette procédure dépendent fortement des valeurs de ces paramètres prédéfinis par l'operateur. Nous avons donc donné au paramètre K la valeur correspondant au nombre exact de classes constituant chacune une texture. Les K centres sont choisis manuellement.

Etape 1 : Fixer le nombre de classe de texture (K)
Etape 2 : Initialisation des centres de classes $\bar{X}_k(k = 1, \dots, K)$
Etape 3 : Affectation
Affecter chaque observation X_q à une classe C_k. L'observation X_q appartient à la classe C_k du centre $\bar{X}_k$ si et seulement si $d_k(X_q, \bar{X}_k) = \|X_q - \bar{X}_k\|$ est minimum pour tout $k = 1, \dots, K$.
Etape 4 : Mise à jour des centres de classes $\bar{X}_k$

$$\bar{X}_k = \frac{1}{Q_k} \sum\nolimits_{q \in C_k} X_q$$

Répéter à chaque fois l'étape 3 si les nouveaux centres ont changés.

Algorithme 1. 1 : Algorithme K-Means

1.8 Conclusion

L'analyse des textures est extrêmement répandue dans le traitement d'images 2D. Nous avons présenté dans ce chapitre un aperçu sur les méthodes permettant de caractériser les textures dans le but de traiter des problèmes de classification et de segmentation d'images texturées. Ces méthodes d'analyse de la texture sont basées sur des concepts différents, parmi lesquelles on retrouve les méthodes d'analyse de la texture empruntées au domaine du traitement du signal. Ces méthodes sont basées sur la transformée en ondelette, les filtre de Laws, les filtres de Gabor.

Une autre méthode d'analyse temps-fréquence qui est la décomposition modale empirique (EMD) à été récemment développée. Cette méthode à laquelle nous nous sommes particulièrement intéressés fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre II

Décomposition Modale Empirique monodimensionnelle

2.1 Introduction

La très grande majorité des signaux physiques qui nous entourent sont complexes et difficilement exploitables. De nombreux outils ont été alors développés pour analyser de tels signaux : les principaux sont la transformée de Fourier, les distributions temps-fréquence, parmi lesquelles on retrouve la transformée en ondelettes et une méthode plus récente qui est la décomposition modale empirique (EMD).

On s'intéressera dans ce chapitre à ces techniques et plus précisément à l'EMD qui sera présentée d'une manière plus détaillée.

2.2 L'analyse temps-fréquence

L'analyse spectrale, basée sur la Transformée de Fourier (TF), fournit une bonne description des signaux stationnaires et pseudo stationnaires, mais présente de nombreuses limitations quand les signaux à analyser ne sont pas stationnaires. Pour étudier de tels signaux plusieurs techniques ont été développées. Parmi ces techniques, on peut citer la transformée de Fourier sur fenêtre glissante, la transformée en ondelettes et la transformée de Hilbert-Huang.

2.2.1 Transformée de Fourier sur fenêtre glissante

L'idée de la transformée de Fourier sur fenêtre glissante (**STFT** : Short Time Fourier Transform) est d'analyser le signal sur des fractions supposées stationnaires. La transformée de Fourier est appliquée à chaque fraction du signal, permettant ainsi une détermination pas à pas des propriétés fréquentielles du signal (Fig.2.1).

Le signal est analysé sur une fenêtre g sur laquelle le signal est supposé stationnaire. La longueur de la fenêtre est donc choisie afin de vérifier l'hypothèse de stationnarité. Ce choix a une influence directe sur la résolution de la décomposition. Si la fenêtre g est petite, la résolution temporelle est grande mais la résolution fréquentielle est faible, et inversement. Ainsi, si une grande résolution fréquentielle est nécessaire, alors il faut utiliser une fenêtre d'analyse grande [35]. La forme et la longueur de la fenêtre, ainsi que le pas de déplacement, sont des paramètres qui doivent être fixés au début de l'analyse, ce qui suppose une bonne connaissance, à priori, du signal à analyser. La STFT est donnée par la formule suivante :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).g(t-\tau).e^{-j2\pi f(t-\tau)dt} \qquad (2.1)$$

Où x(t) est le signal à analyser, τ représente le paramètre de localisation de la fenêtre g(t), $X(f)$ correspond au spectre du signal x(t) autour de τ.

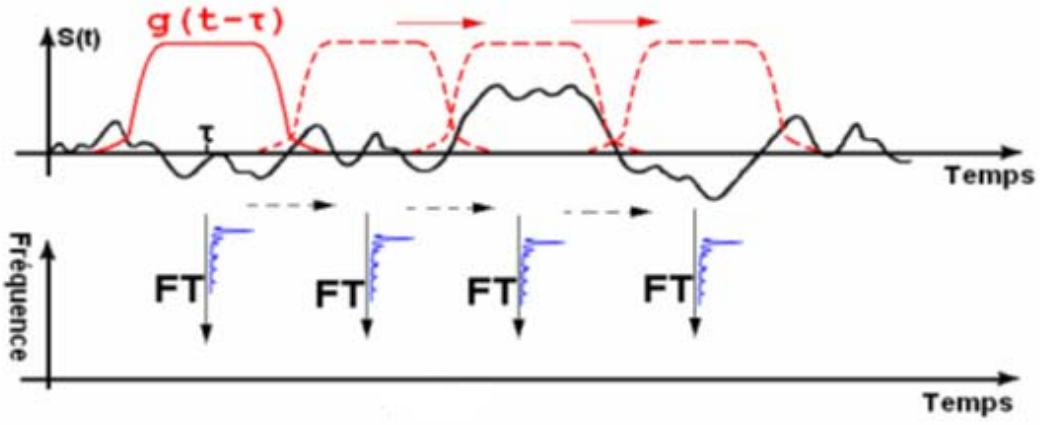


Fig.2.1 : Transformée de Fourier sur une fenêtre glissante (STFT).

La procédure de calcul de la STFT consiste à calculer la transformée de Fourier du produit $x(t).g(t-\tau)$ de la même manière que la TF d'un signal quelconque (stationnaire) puisque la durée de g(t) est petite. Donc en décalant g et en répétant la même procédure, nous obtenons une idée du contenu fréquentiel du signal x(t) tout au long de temps.
L'inconvénient majeur de cette technique est, évidemment, que la taille de la fenêtre d'analyse fixe ne correspond pas nécessairement à la nature variable des signaux.

2.2.2 Transformée en ondelettes (Wavelet Transform WT)

La transformée de Fourier sur fenêtre glissante est utile dans certaines applications car elle offre un compromis entre localisation en temps et en fréquence. Elle ne permet, cependant, pas d'analyser des signaux transitoires quelconques car la taille de la fenêtre est fixe.

Pour avoir une représentation temps-fréquence adaptée à la fois pour les grandes et les basses variations, on utilise les ondelettes. Une ondelette est une fonction continue, qui s'annule au voisinage de $\pm\infty$. On dit que les ondelettes sont des ondes localisées, cette propriété de localisation lui permet d'agir localement. On la désigne souvent par la lettre $\psi(t)$. Deux opérations importantes appliquées à la fonction d'ondelette nous permettent de générer une infinité de variations de celle-ci. La translation qui correspond au déplacement de l'ondelette le long de l'axe des temps, la deuxième opération est la dilatation (aussi dite compression en temps ou espace) [22], [35]. Un aperçu sur la WT a été déjà donné au chapitre précédent.

Si les transformées de Fourier à fenêtre glissante ou en ondelette ont permis des avancées dans l'analyse temps-fréquence des signaux, aucune de ces méthodes n'est adaptée pour traiter correctement des signaux non stationnaires et non linéaires dont on ne connait pas à priori les caractéristiques. De plus, ces méthodes n'exploitent pas ou peu les caractéristiques intrinsèques du signal (même si, pour les ondelettes par exemple, il existe de nombreuses bases plus ou moins adaptées à tel ou tel signal).

Partant des limitations citées ci-dessus, Huang et al [25] ont récemment introduit une méthode qui traite la problématique de l'analyse des signaux non-stationnaires dite transformée de Huang ou décomposition modale empirique (EMD). L'EMD décompose d'une façon adaptative un signal en une somme de composantes oscillantes ; chacune ayant une forme d'onde de moyenne nulle, modulée en amplitude et en fréquence. Contrairement à la STFT ou à la transformée en ondelettes, la base de la EMD est intrinsèque au signal. L'EMD a montré ses capacités d'analyse adaptative multi-échelle des signaux non-stationnaires.

2.2.3 Transformée de Hilbert-Huang

L'EMD fait partie d'une méthode de traitement du signal plus générale appelée transformée de Hilbert Huang. La transformée de Hilbert Huang (T.H.H) a été introduite pour la première fois en 1998, par Huang et al [25] afin d'analyser des signaux provenant des systèmes non linéaires et non stationnaires. Elle est composée de deux transformées : la transformée de Huang et la transformée de Hilbert (TH).

La transformée de Huang ou EMD consiste à décomposer, de façon adaptative, le signal en une somme de composantes oscillantes qui possèdent une seule fréquence (monomodale). La fréquence et l'amplitude instantanée $(\mathrm{FI}, \mathrm{AI})$ de chacune des composantes sont ensuite calculées en utilisant la transformée de Hilbert.

Contrairement à la transformée de Fourier à fenêtre glissante ou en ondelettes, la base de la décomposition de l'EMD est propre au signal. Une des motivations du développement de l'EMD est la recherche d'une estimation de la fréquence instantanée du signal. En effet, l'approche classique de l'estimation de la FI basée sur la TH est strictement limitée aux signaux mono composantes. Le tableau (2.1) donne quelques éléments de comparaison entre la TF, la WT et la THH [24], [25], [31], [33].

	FT	WT	HHT
Base	A priori	A priori	adaptative
Fréquence	Convolution : globale, incertaine	Convolution : régionale, incertaine	Différenciation : locale, certaine
Présentation	Energie-fréquence	Energie-temps-fréquence	Energie-temps-fréquence
Non linéarité	Non	Non	Oui
Non stationnarité	Non	Oui	Oui
Base théorique	Théorie complète	Théorie complète	Empirique

Tableau2.1 : Quelques éléments de comparaison entre la TF, WT et la HHT

Nous allons expliquer plus en détails les deux étapes de la transformée de Hilbert-Huang.

2.3 Décomposition modale empirique

L'idée de base de l'EMD est de décomposer un signal en une somme de composantes notées IMF (Intrinsic Mode Function) plus un résidu. L'addition de toutes les IMF avec le résidu permet de reconstruire le signal original sans perte d'information. L'extraction des IMF est une opération non linéaire, mais leur recombinaison pour la reconstruction du signal est linéaire.

L'EMD décompose un signal d'une façon auto-adaptative en une somme de composantes oscillantes. Le principe de l'EMD est défini par un algorithme qui ne possède pas de fondement théorique. Cette méthode à été appliquée dans des domaines très variés tels que l'océanographie, la sismologie, la biologie et plus généralement à des signaux non stationnaires [24].

2.3.1 Principe de l'EMD

Dans son principe, l'EMD considère les signaux à l'échelle de leurs oscillations locales, sans que celles-ci soient nécessairement harmoniques au sens de Fourier. D'une manière plus

précise, si l'on cherche à décrire un signal $x(t)$ entre deux extrema consécutifs (par exemple, deux minima situés aux temps t_- et t_+), on peut définir de façon heuristique une contribution (haute fréquence) local $\{d_1[x](t),\ t_- \leq t \leq t_+\}$, ou détail local, qui correspond à l'oscillation se terminant aux deux minima considérés et passant par le maximum qui existe nécessairement entre eux. Pour que la description du comportement local soit complète, il suffit d'identifier la contribution (basse fréquence) locale correspondante $r_1[x](t)$, ou tendance locale, de telle sorte que l'on ait [38] :

$$x(t) = r_1[x](t) + d_1[x](t) \quad pour \quad t_- \leq t \leq t_+ \tag{2.2}$$

Si ce point de vue est adopté pour l'ensemble des oscillations constituant le signal, la procédure peut alors être appliquée sur le résidu $r_1[x](t)$ formé par l'ensemble des tendances locales et considéré comme un nouveau signal, conduisant à un nouveau détail $d_2[x](t)$ et à un nouveau résidu $r_2[x](t)$.

On obtient ainsi une décomposition dont les différents modes ou IMF $d_j[x](t)$ sont extraits itérativement, conduisant à une représentation du type :

$$x(t) = r_j[x](t) + \sum_{j=1}^{N} d_j[x](t) \tag{2.3}$$

$$x(t) = r_j[x](t) + \sum_{j=1}^{N} IMF_j[x](t), \qquad N \in \mathcal{N}^* \tag{2.4}$$

Où $IMF_j[x](t)$ est la j^{eme} oscillation, r(t) le résidu de la décomposition et N le nombre d'IMF (ou modes).

L'approche proposée repose entièrement sur les caractéristiques oscillatoires de x(t). Cette décomposition est entièrement pilotée par les données du signal (data driven) et adaptée à celui-ci. C'est pourquoi le nom de fonction modale intrinsèque (IMF) a été retenu, principalement car il associe naturellement l'idée de décrire un signal x(t) suivant ses différents modes d'oscillations naturelles. La méthode est par construction, une décomposition complète, N étant fini. En effet, si l'on additionne toutes les IMF ainsi que le résidu alors, on reconstruit linéairement le signal original sans perte ou déformation de l'information initiale.

2.3.2 Définition de l'Intrinsic Mode Function (IMF)

Une IMF, pour Intrinsic Mode Function ou mode empirique, est une fonction : $IMF: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ qui doit être :

a) de moyenne locale nulle

b) dont les nombres d'extrema et de passages à zéro diffèrent au plus de un (en d'autres termes, cela signifie qu'entre un minimum et un maximum successif, une IMF passe par zéro)

c) qui suit une loi de modulation en amplitude et en fréquence (comportement oscillant) naturellement de type mono-composante.

Le point (a) est lié à la contrainte d'estimation de la FI d'un signal mono-composante avec la TH. Le point (b) repose sur la définition de bande étroite d'un signal mono-composante et le dernier point (c) est plus une conséquence dû au processus d'estimation de l'IMF [24].

2.3.3 Algorithme de la décomposition modale empirique

La décomposition en mode empirique peut être décrite par l'organigramme de la figure (2.2). Les étapes durant lesquelles les IMF sont extraits forment un processus dit tamisage (Sifting Process). Il est important de noter qu'une condition d'arrêt est nécessaire pour arrêter le processus du tamisage [36].

Conceptuellement, la mise en place de cette méthode est assez simple :

♦ Il suffit de considérer le signal à l'échelle de ses oscillations locales, de soustraire l'oscillation la plus rapide et de réitérer le processus sur le résidu de manière à écrire le signal x(t) comme une combinaison finie d'oscillations.

Pour illustrer la décomposition par EMD, on considère le signal $x(t)$ qui est représenté sur la figure (2.3).

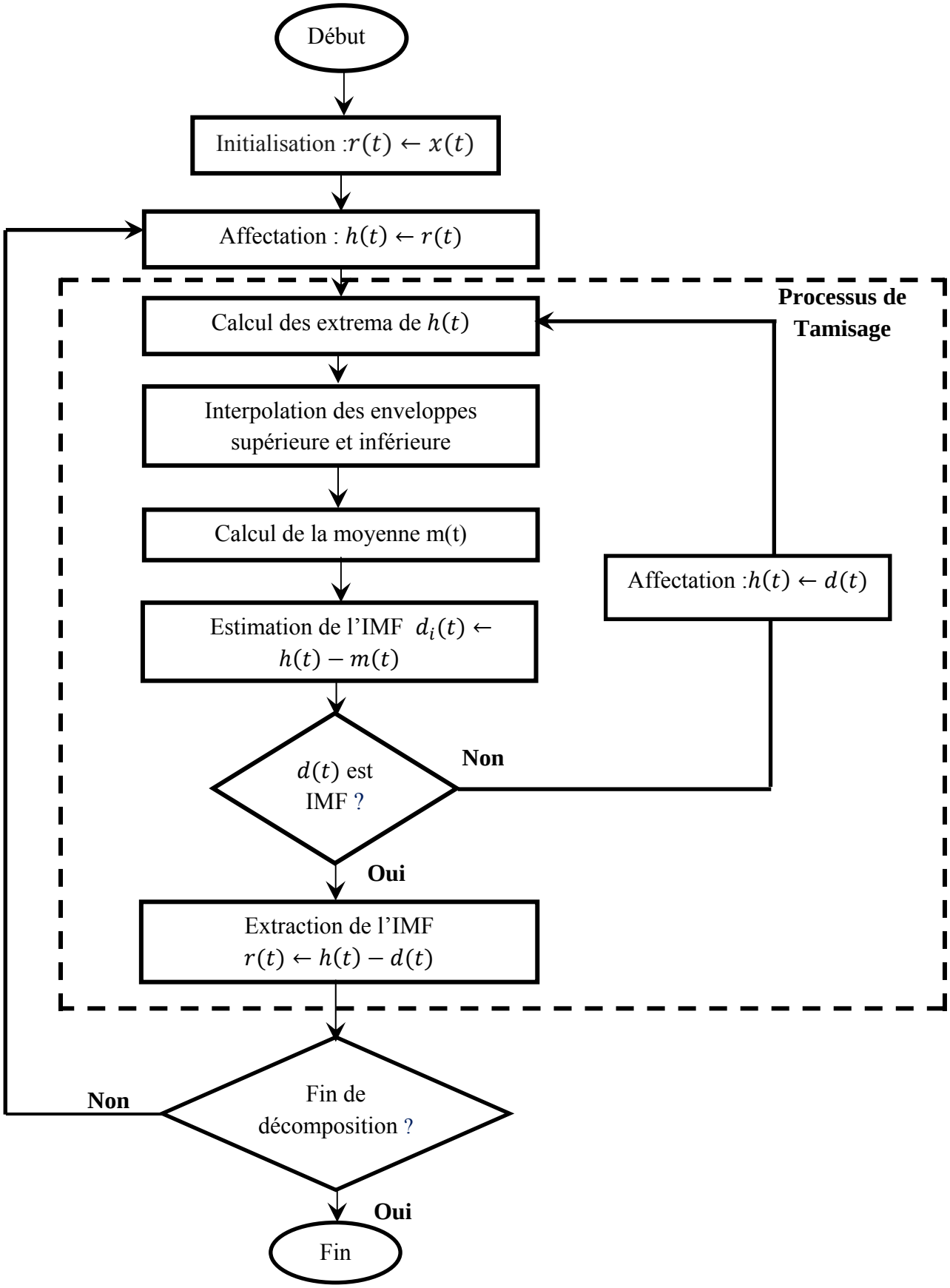


Fig.2.2 Organigramme de l'EMD

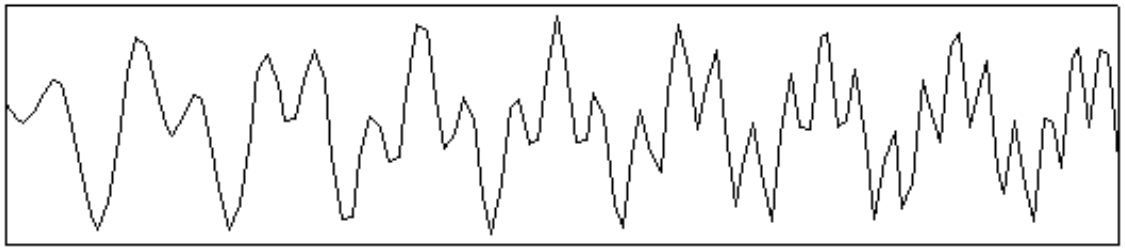


Fig.2.3 Représentation du signal $x(t)$

Les étapes permettant d'extraire les IMF sont :

Etape 0 : On initialise le signal $h_0(t)$ par $x(t)$ et le signal résidu $r(t) = x(t)$.

Etape 1 : Le premier pas de la décomposition consiste à identifier les extrema locaux du signal $h_0(t)$. C'est le début du processus de tamisage. On interpole ensuite tous les maxima avec la méthode des splines cubiques par exemple pour construire l'enveloppe supérieure env_{sup}et on fait de même avec les minima pour construire l'enveloppe inférieure env_{inf}. Notons que l'interpolation est une étape très importante dans le processus de décomposition car elle conditionne la forme des IMF. Plusieurs méthodes d'interpolation peuvent être utilisées. La méthode des splines cubiques reste cependant la plus utilisée (Annexe A) [35].
La figure (2.4) montre les deux courbes d'interpolation des minimas et maximas locaux du signal de la figure (2.3).

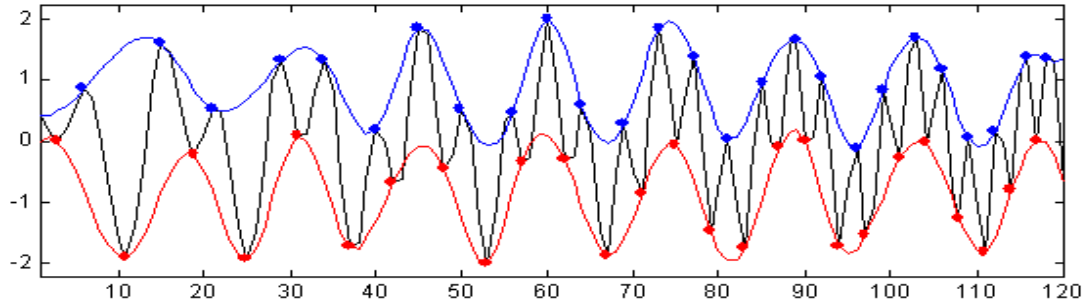


Fig.2.4 Enveloppe supérieure et inférieure obtenues par interpolation des maxima et minima locaux.

Etape 2 : On calcule la moyenne $m_1(t) = \left(\text{env}_{sup} + \text{env}_{inf}\right)/2$ (Fig.2.5).

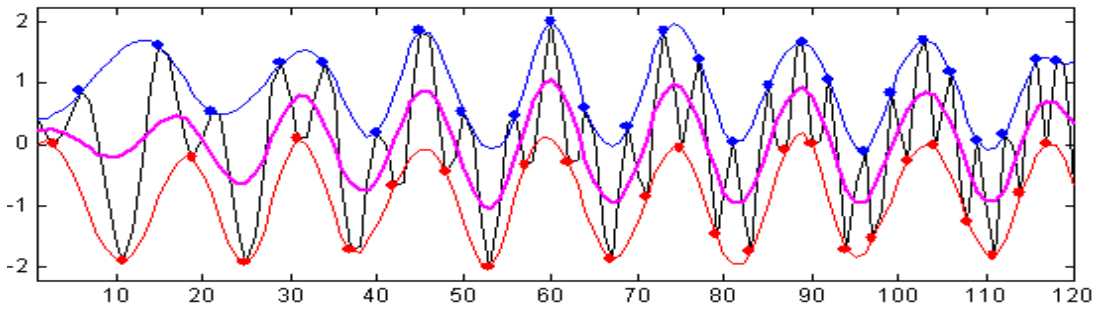


Fig.2.5 Moyenne locale du signal $x(t)$

Etape 3 : On calcule la différence entre le signal et le moyenne $m_1(t)$ afin de déterminer la première composante IMF notée $h_1(t)$.

$$h_1(t) = h_0(t) - m_1(t) \tag{2.5}$$

La figure (2.6) montre le résultat de cette différence. On remplace ensuite le signal $h_0(t)$ par le signal $h_1(t)$ et on refait les étapes de 1 à 3 jusqu'à satisfaire un critère donné.

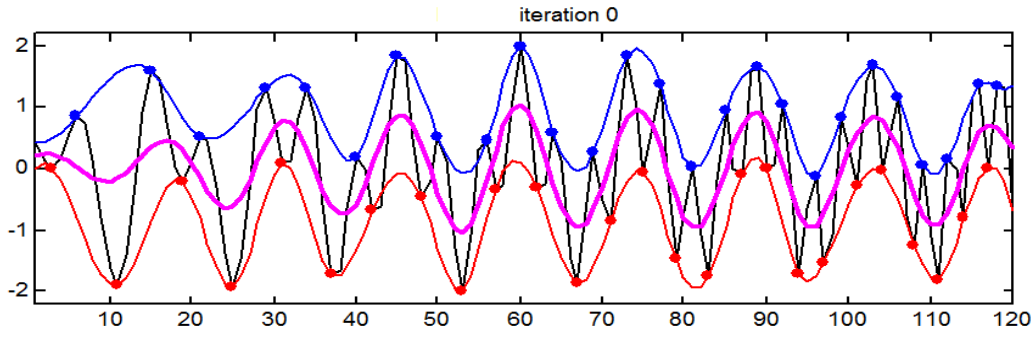
Etape 4 : A l'issu de l'étape 3 qui indique la fin du processus de tamisage, on recueille la première composante IMF $d_1(t) = h_1(t)$ et on calcule le signal résidu

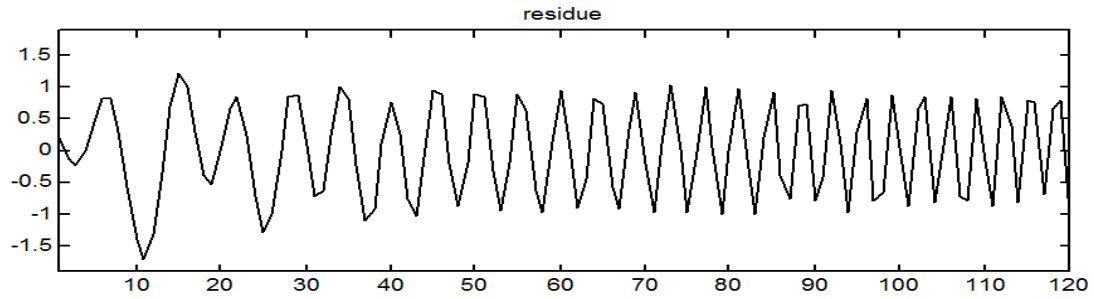
$$r_1(t) = r_0(t) - d_1(t) \tag{2.6}$$

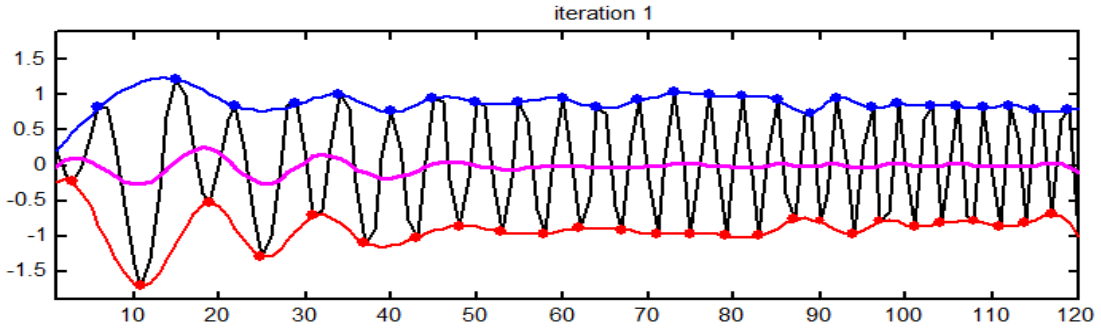
Cette première IMF forme la composante haute fréquence du signal et le résidu $r_1(t)$ contient les composantes des plus basses fréquences.

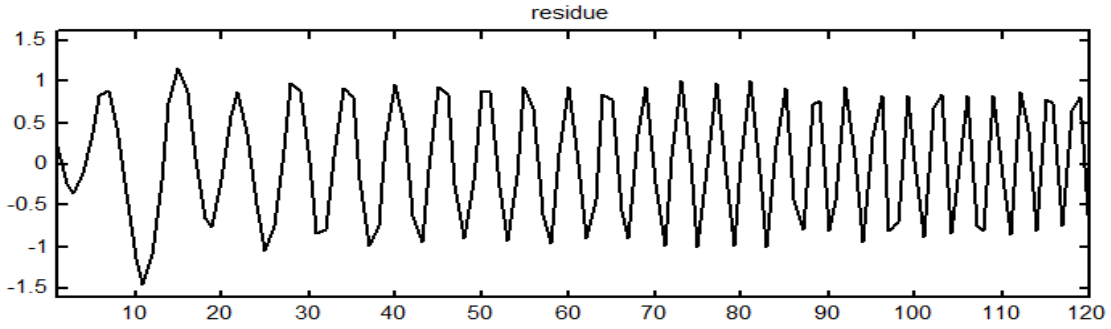
La figure (2.7) montre la première composante $h_1(t)$ et le premier résidu $r_1(t)$

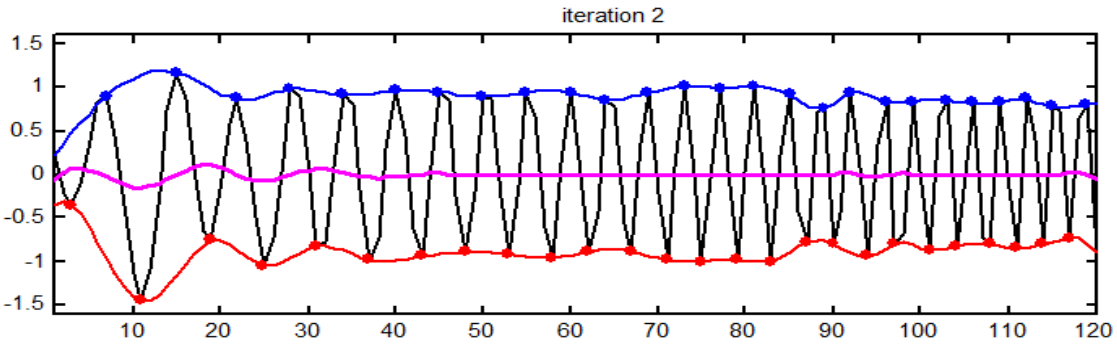
Etape 5 : On remplace $r_0(t)$ par $r_1(t)$ et $h_0(t)$ par $r_1(t)$ et on refait les étapes 1 à 5 afin d'extraire les autres composantes IMF. Ces étapes sont réitérées jusqu'à atteindre le nombre d'IMF désiré ou le nombre d'extrema de $r_0(t)$ est inférieur à 2. La figure (2.7) montre les autres composantes IMF et leurs résidus.

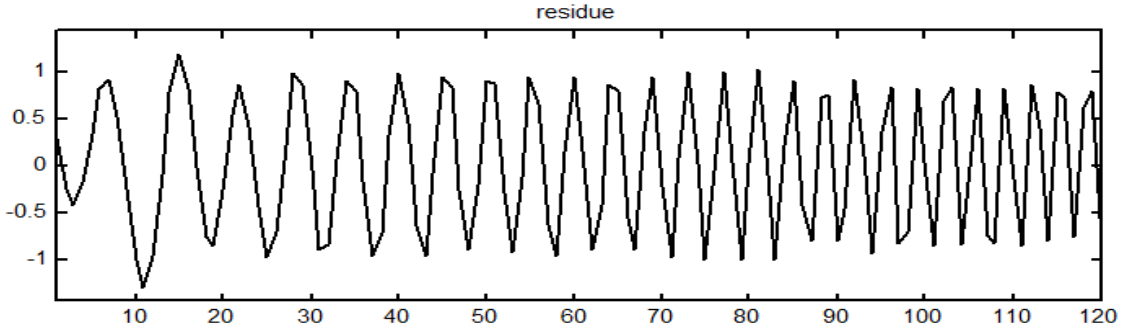


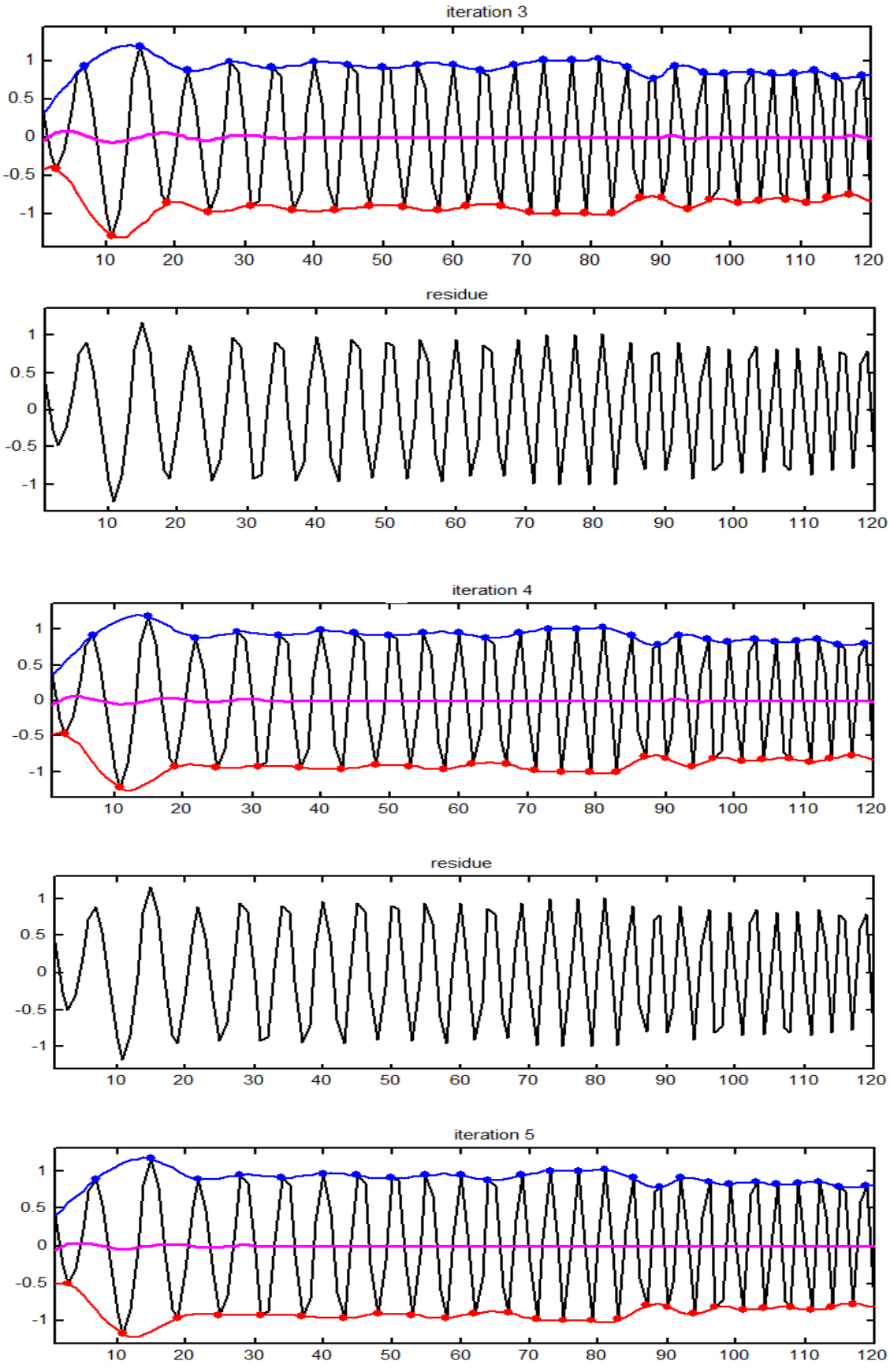

residue
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120

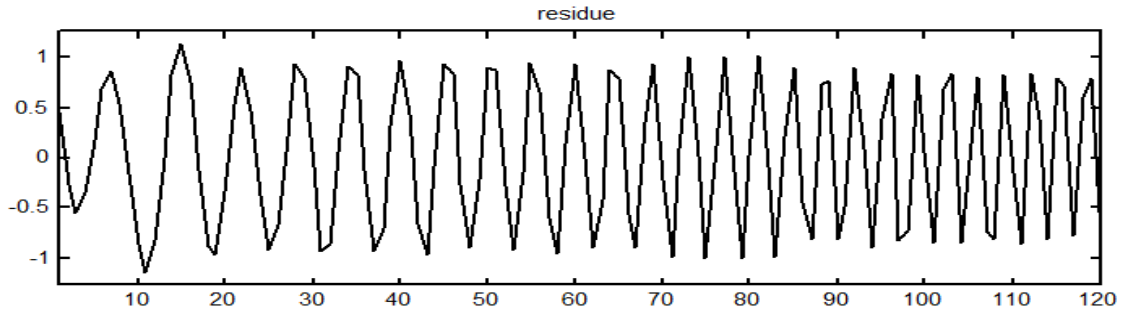

iteration 1
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120

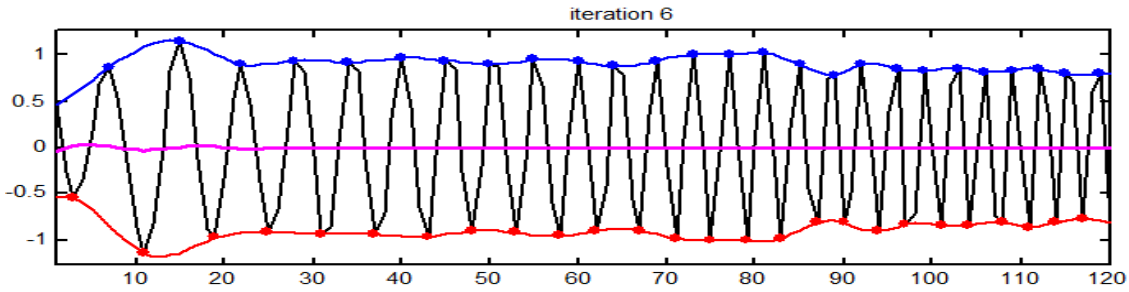

residue
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120

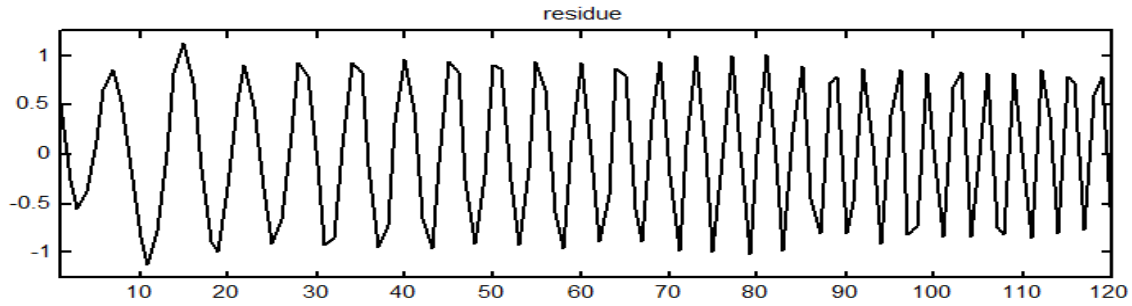

iteration 2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120

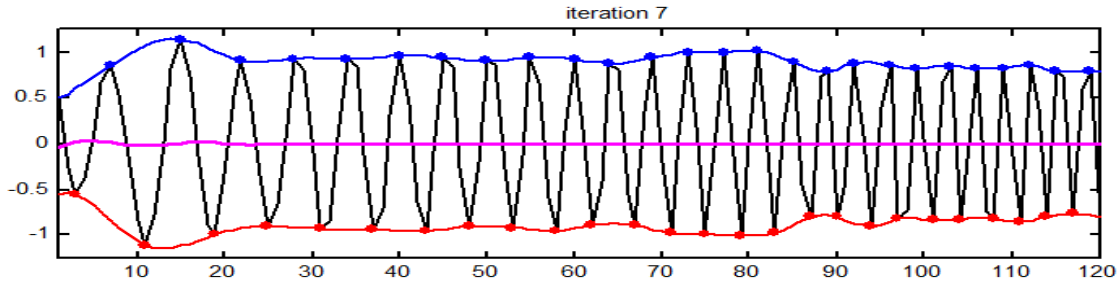

residue
1
0.5
0
-0.5
-1
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120

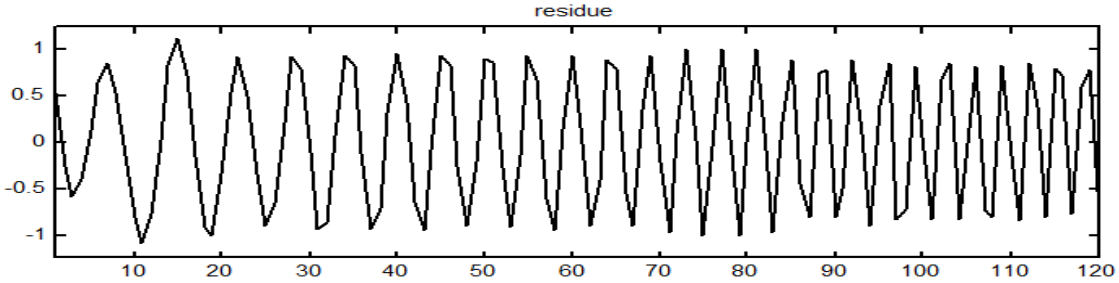

iteration 3
residue
iteration 4
residue
iteration 5

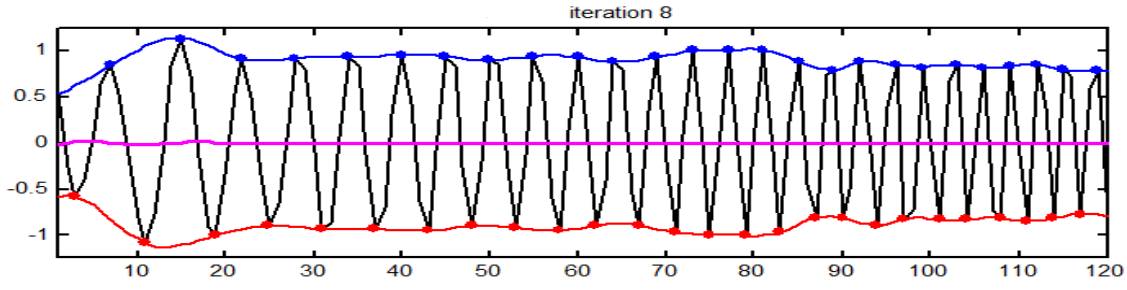

residue
1
0.5
0
-0.5
-1
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120


iteration 6
1
0.5
0
-0.5
-1
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120


residue
1
0.5
0
-0.5
-1
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120


iteration 7
1
0.5
0
-0.5
-1
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120


residue
1
0.5
0
-0.5
-1
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120


iteration 8
1
0.5
0
-0.5
-1
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120

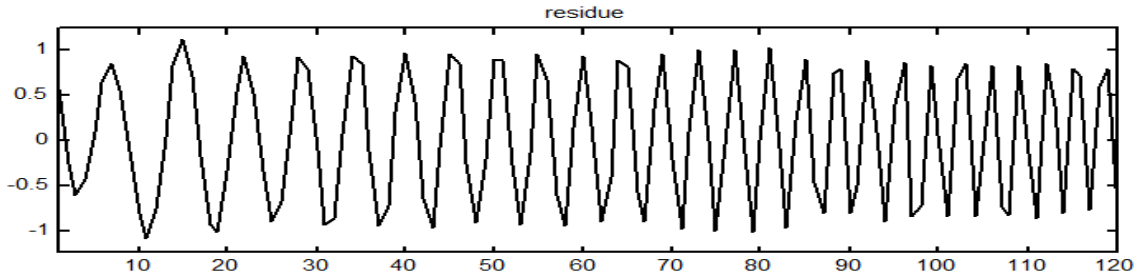
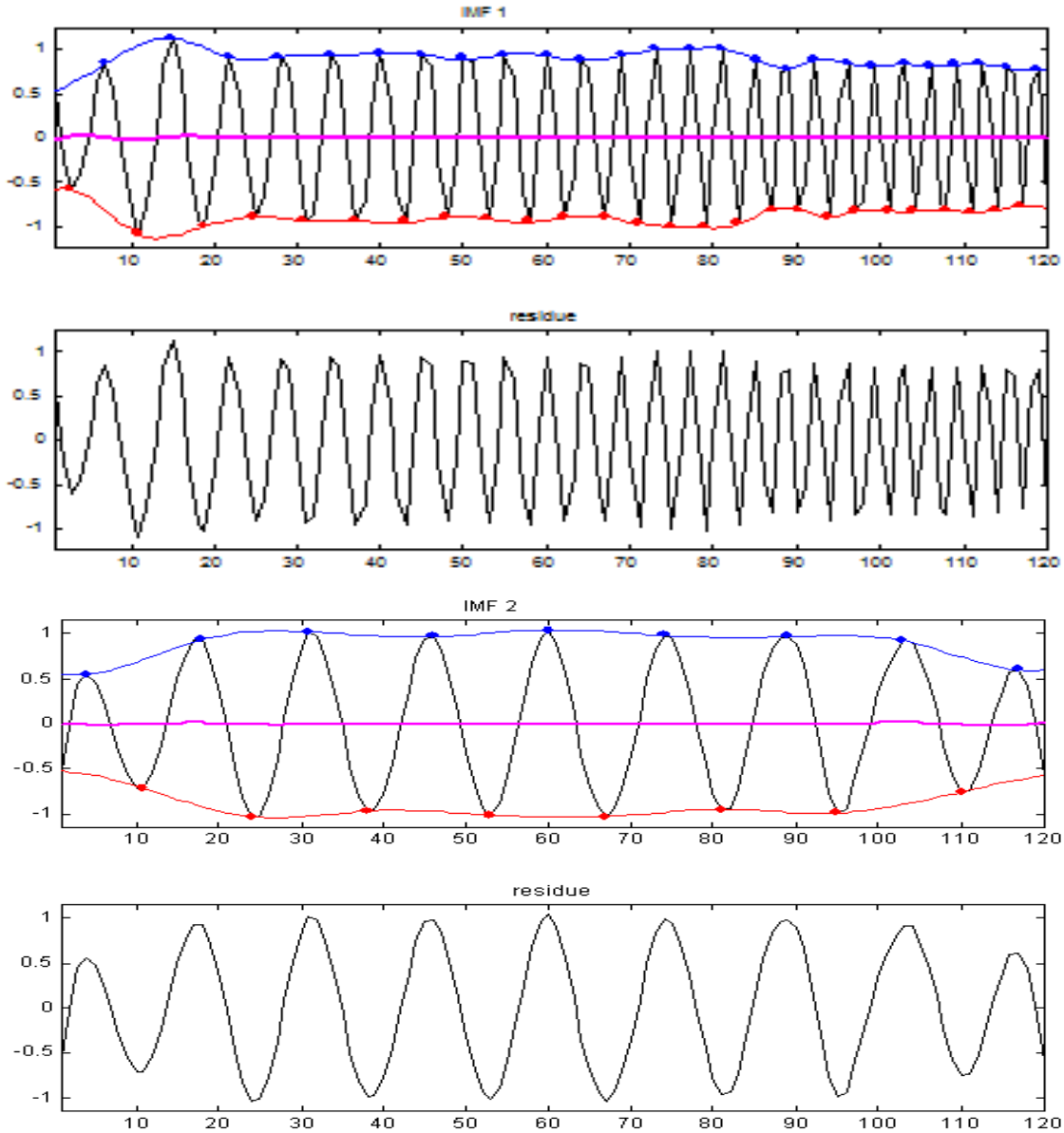


Figure 2.6 : Processus du tamisage pendant l'extraction de l'IMF_1



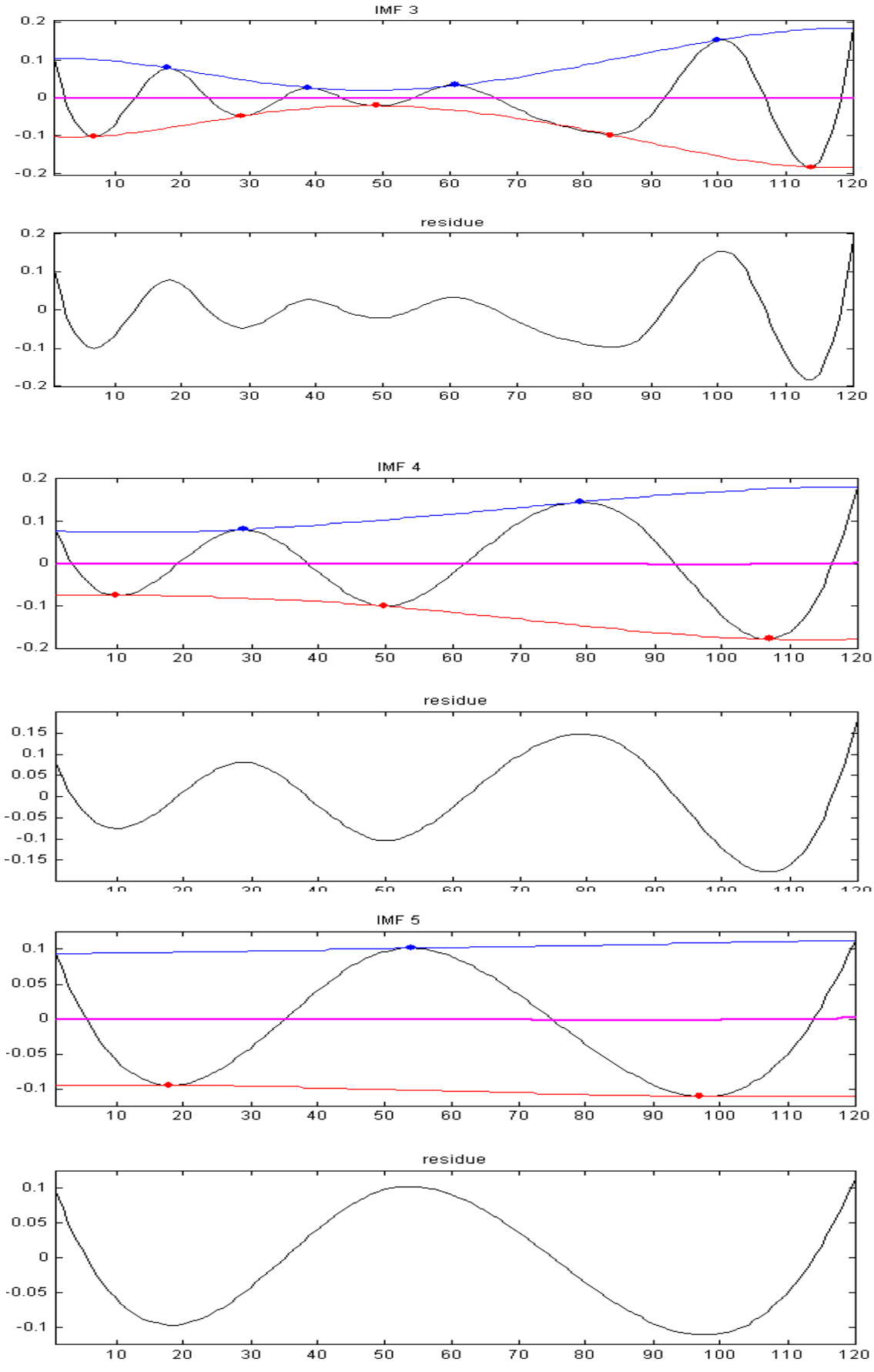


Fig.2.7 Différentes composantes IMF et résidu du signal x(t)

Remarque

A chaque itération du processus de tamisage, la moyenne se rapproche de zéro (Fig.2.7).

En sommant toute les IMF ainsi le résidu, on retrouve le signal d'origine.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} IMF_k + r_k \tag{2.7}$$

2.3.4 Critère d'arrêt du processus de tamisage

Dans l'étape 3 de l'algorithme EMD, un critère d'arrêt doit être défini pour assurer que le signal obtenu vérifie bien les propriétés d'une IMF, tout en limitant le nombre d´itérations. Le critère proposé par Huang est basé sur le calcul de la variation relative du signal entre 2 itérations consécutives de l'algorithme [35].

$$SD(j) = \sum_{t=0}^{T} \left[\frac{\left| h_{j-1}(t) - h_j(t) \right|^2}{h_{j-1}^2(t)} \right] \tag{2.8}$$

Lorsque la différence entre deux tamisages consécutifs est inferieure à un seuil prédéfini ε. La valeur de ε permettant d'arrêter le processus de tamisage est comprise entre 0,2 et 0,3. Cette valeur (ajustée empiriquement) réalise un certain compromis : si ε est trop grand, alors l'EMD ne permet pas de séparer correctement les modes, inversement, si ε est trop petit, le principe risque d'aboutir à des composantes dont l'amplitude sera quasiment constante et modulées par une seule fréquence. De plus, SD permet de limiter l'écart-type entre deux itérations consécutives de tamisage.

Un autre critère local proposé par Rilling et al. [52] est défini par :

$$\sigma(t) = \frac{|m(t)|}{|a\,(t)|} \tag{2.9}$$

avec $a(t) = (env_{\max}(t) - env_{min}\,(t))/2$

On définit alors le critère d'arrêt par ces trois conditions :

1. La différence entre le nombre de zéros de $h_i(t)$ et le nombre de maxima de $h_i(t)$ est inferieure ou égale en valeur absolu à 1
2. $\sigma(t) \leq \theta_1, \forall t$.
3. la quantité $t^*\sigma(t)$ doit être comprise entreθ_2 et α.

La première condition revient à dire qu'une IMF doit être une fonction oscillante. Les deux dernières conditions exigent que le paramètre $\sigma(t)$ soit faible.

Les auteurs dans [52] proposent comme exemple de valeurs de seuils : $\theta_1 = 0.05$, $\theta_2 \approx 10\theta_1$ et $\alpha = 0.05$.

Les différentes étapes de l'EMD sont résumées avec plus de détails dans l'algorithme suivant :

Etape1) : Fixer $\varepsilon, j \longleftarrow 1$ (j^{eme} IMF)
Etape2) : Initialisation : $r_{j-1} \longleftarrow x(t)$(résidu)
Etape 3) : Extraire la j^{eme} IMF

- **a)** $h_{j,i-1}(t) \longleftarrow r_{\text{j-1}}(\text{t}), \text{i} \longleftarrow 1$ (i, itération de la boucle de tamisage)
- **b)** Extraire les maxima et minima locaux de $h_{j,i-1}(t)$
- **c)** Calculer les enveloppes supérieure et inférieure par interpolation (Splines cubiques)
- **d)** Calculer l'enveloppe moyenne $m(t) = \left(env_{sup} + env_{inf}\right)/2$
- **e)** Mise à jour $h_{j,i-1}(t) \longleftarrow h_{j,i-1}(t)$- $m_{j,i-1}(t)$ et $i \longleftarrow i + 1$
- **f)** Calcul du critère d'arrêt :

$$SD(i) = \sum_{t=0}^{T} \frac{\left|h_{j,i-1}(t) - h_{j,i}(t)\right|^2}{\left(h_{j,i-1}(t)\right)^2}$$

Où T représente le nombre d'échantillons du signal.

- **g)** Répétition des étapes b-f tant que $SD(i) < \varepsilon$

Etape4) : Affecter $IMF_j(t) \leftarrow h_{j,i}(t)$ et mettre à jour le résidu :

$$r_j(t) \leftarrow r_{j-1}(t) - IMF_j(t)$$

Etape5) : Répéter l'étape 3 avec $j \leftarrow j + 1$ jusqu'à ce que le nombre d'extrema dans $r_j(t)$ soit inférieur à 2

Tableau 2.2 : Pseudo code de l'algorithme EMD

2.4 Transformée de Hilbert (TH)

2.4.1 Définition de la TH

La TH est un outil mathématique très utilisé en théorie du signal pour décrire l'enveloppe complexe d'une grandeur réelle modulée par un signal. La transformée de Hilbert tient son nom du mathématicien David Hilbert [30], [32], elle est définie par :

$$\hat{x}(t) = TH[x(t)] = vp\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} vp\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau\right\} \quad (2.10)$$

Où vp : étant l'abréviation de valeur principale de Cauchy telle que :

$$vp\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right\} = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} x(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right\} \quad (2.11)$$

La TH est définie plus simplement par une convolution

$$\hat{x}(t) = H[x(t)] = x(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (2.12)$$

Elle peut être interprétée comme la réponse du système linéaire invariant dans le temps de réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ à un signal d'entrée $x(t)$ sa TF s'exprime comme suit :

$$\hat{X}(f) = TF\{\hat{x}(t)\} = H(f) \times X(f) \quad (2.13)$$

avec $$\mathcal{H}(f) = T\mathcal{F}\{h(t)\} = -jsgn(f) \quad (2.14)$$

Où $sgn(f)$ est la fonction «signe» telle que

$$sgn(f) = \begin{cases} 1, & si\ f > 0 \\ 0, & si\ f = 0, \\ -1, & si\ f < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

La transformée de Hilbert a pour effet de tourner de +90° la composante de fréquence négative de $x(t)$ et de −90° la composante de fréquence positive.

La Transformée de Hilbert inverse est définie par :

$T\mathcal{H}^2(f) = -1$ et si on multiplie l'équation (2.13) par $-T\mathcal{H}(f)$ on obtient :

$$X(f) = -T\mathcal{H}(f) \times \hat{X}(f) \quad (2.16)$$

La transformée de Hilbert inverse apparait clairement comme étant :

$$x(t) = -h(t) * \hat{x}(t) = -T\mathcal{H}\{\hat{x}(t)\} \quad (2.17)$$

Quelques propriétés de la TH sont données en annexe B.

2.4.2 Signal analytique

Un signal analytique, est un signal qui n'a pas de composantes fréquentielles négatives contrairement à un signal sinusoïdal réel comme $\cos(wt)$ dont le spectre présente des pics à $f\ et - f$ [25], [30], [32].

Le signal analytique peut être obtenu par la formule suivante :

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad \text{avec} \quad y(t) = TH[x(t)] \tag{2.18}$$

La manière la plus facile pour calculer la fréquence instantanée (FI) et l'amplitude instantanée (AI) d'un signal $x(t)$ consiste à calculer l'amplitude et la phase du signal analytique correspondant à $x(t)$.

2.4.3 Amplitude Instantanée et fréquence instantanée

Soit $z(t) = x(t) + iy(t) = a(t)e^{i\theta(t)}$ un signal analytique, $avec \;\; y(t) = T\mathcal{H}[x(t)]$.

L'amplitude instantanée est définie par :

$$AI = a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \tag{2.19}$$

La phase instantanée est définie comme :

$$\theta(t) = artan\frac{y(t)}{x(t)} \tag{2.20}$$

et la fréquence instantanée est obtenue par :

$$FI = f(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \tag{2.21}$$

L'estimation de l'amplitude et la fréquence instantanée d'un signal $x(t)$ est illustrée dans la figure (2.8).

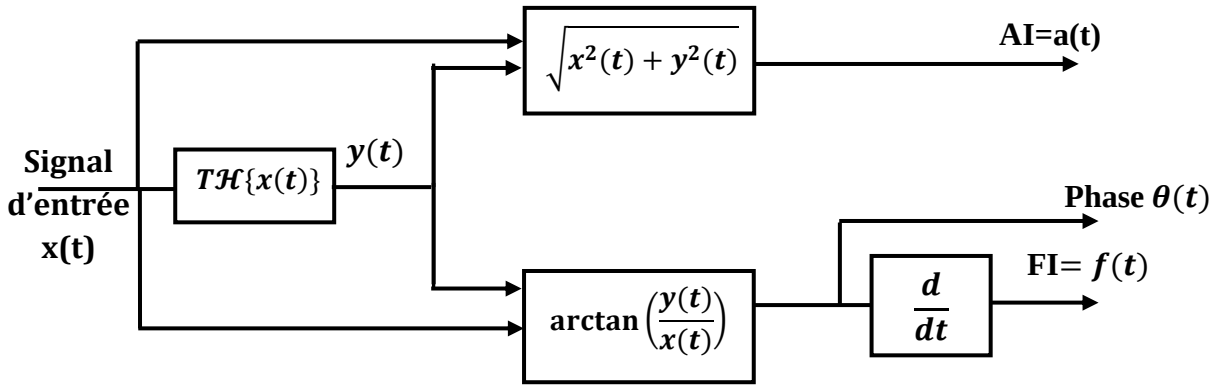


Fig.2.8 Principe d'estimation de la FI et AI via le signal analytique.

Pour résumer, l'analyse par THH d'un signal multi-composantes comporte essentiellement deux étapes : la décomposition temporelle (EMD) et l'estimation des FI et AI par la TH (Fig. 2.9) [24].

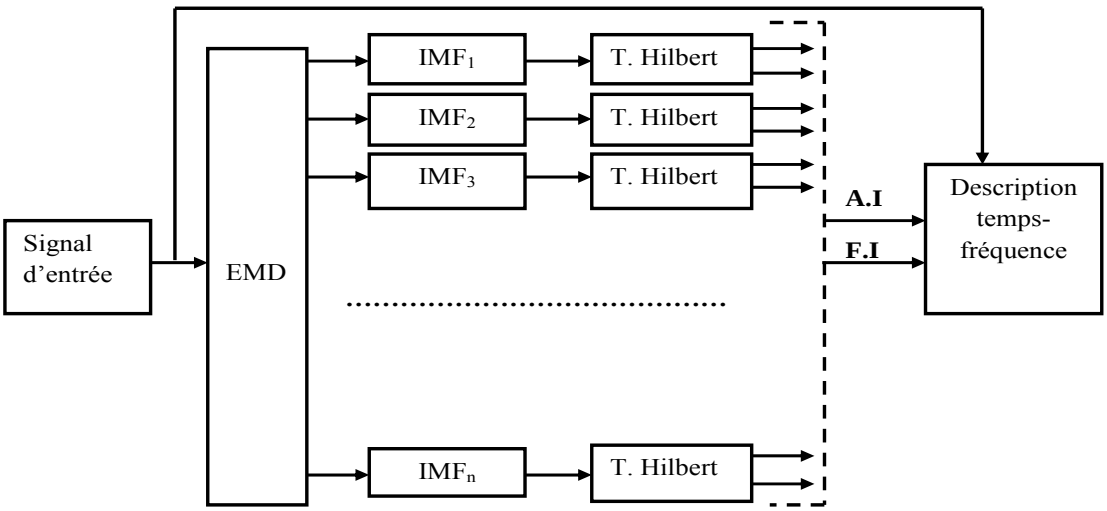


Fig.2.9 Organigramme de la THH

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode assez récente d'analyse d'un signal non linéaire et non stationnaire qui est la transformée de Hilbert-Huang (H.H.T). Cette technique d'analyse temps-fréquence est composée de deux types de transformées. La première dite de Huang ou de décomposition modale empirique permet de décomposer un signal multi-composante en un ensemble de signaux mono-composante dites IMF. La deuxième qui est la transformée de Hilbert permet d'estimer l'amplitude et la fréquence instantanée de chaque composante. Les IMF reflètent les différentes composantes fréquentielles mono oscillantes qui composent le signal d'origine.

La décomposition modale empirique est une technique simple et plus avantageuse par rapport aux autres méthodes d'analyse de signaux non stationnaires telles que la transformée en ondelettes. Cependant, L'EMD classique présente beaucoup de problèmes, comme l'ont d'ailleurs faits remarquer beaucoup d'auteurs [28], [52], [63], [64]. Il y a notamment ceux liées à l'interpolation des enveloppes, les problèmes concernant l'interpolation aux bords du signal, le choix du critère d'arrêt du (SP). Tous les problèmes de l'EMD proviennent du fait que les IMF doivent être des signaux AM-FM mono composantes. Malheureusement, il s'avère que pour beaucoup de signaux, les critères que doivent remplir une IMF sont insuffisants pour garantir la notion de signal AM-FM mono composant. Beaucoup de travaux ont été menées en ce sens pour résoudre ces problèmes en améliorant l'EMD classique.

Dans le chapitre prochain, nous allons voir comment étendre la décomposition modale empirique pour l'analyse des images texturées.

Chapitre III

Décomposition Modale Empirique bidimensionnelle (BEMD)

3.1 Introduction

La décomposition modale empirique développée par Huang et al [25] est un outil efficace pour décomposer des signaux non linéaires et non stationnaires. Les bases de cette décomposition AM-FM (Modulée en Amplitude et en Fréquence), appelées IMF sont générées de façon adaptative. Comme méthode axée sur des données, l'EMD est largement utilisée dans le traitement de signal. Récemment, cette technique a été étendue à l'analyse des images. En effet, la décomposition modale empirique bidimensionnelle ou Bidimensional Empirical mode Decomposition (BEMD) a été appliquée au domaine du traitement d'images pour la première fois en 2003 par Nunes [54]. Cette décomposition, permet d'extraire des structures à différentes échelles et fréquences spatiales, comportant des modulations en amplitude et en fréquence. L'EMD dans sa version 2D, ouvre une voie prometteuse pour la réduction de bruit, l'extraction d'attributs de textures et d'autres types d'application de traitement d'images [24].

3.2 Décomposition modale empirique bidimensionnelle classique

La décomposition modale empirique monodimensionnelle à été étendue pour l'analyse des signaux bidimensionnels (images). Comme pour les signaux monodimensionnels, la BEMD suit les mêmes étapes pour l'extraction des IMF et du résidu. Ces composantes sont également bidimensionnelles et la notion d'IMF reste toujours la même.
Notons qu'une fonction f est une IMF 2D ou BIMF (Bidimensional Intrinsic Modal function) si seulement si les conditions suivantes sont réalisées [36].

- ✓ La moyenne locale de f est nulle
- ✓ f s'annule entre deux extrema consécutifs.

Les méthodes EMD et BEMD dépendent toutes les deux du processus de tamisage (Sifting) où les extrema locaux sont d'abord définis et une interpolation ultérieure de ces points est effectuée pour déterminer des enveloppes. A chaque itération, l'enveloppe moyenne est construite puis soustraite au signal original pour obtenir des candidates BIMF. A partir des BIMF candidates, des BIMF réelles sont extraites en se basant sur certaines caractéristiques bien définies et le processus est ainsi répété jusqu'à ce que toutes les BIMF soient toutes générées.

Comme pour le cas 1D, une condition d'arrêt est nécessaire pour arrêter le processus du tamisage

L'algorithme de la BEMD d'une image discrète $I(x,y)$ de taille $M \times N$ est résumé par l'algorithme (3.1) [36] [43].

Etape1) : Fixer ε, $j \longleftarrow 1$ (j^{eme} BIMF)
Etape2) : Initialisation : $r_{j-1}(x,y) \longleftarrow I(x,y)$ (résidu), i $\longleftarrow$ 1 (i: itération de la boucle de tamisage)
Etape 3): Extraction du j^{eme} mode

- **a)** Affectation : $h_{j,i-1}(x,y) \longleftarrow r_{j-1}(x,y)$
- **b)** Calculer les extrema de $h_{j,i-1}(x,y)$
- **c)** Calculer les enveloppes supérieure et inférieure $U_{j,i-1}(x,y)$ et $L_{j,i-1}(x,y)$ par interpolation des maximas locaux et minimas locaux de $h_{j,i-1}(x,y)$
- **d)** Calculer de la moyenne locale $m_{j,i-1}(x,y) = \left(U_{j,i-1}(x,y) + L_{j,i-1}(x,y)\right)/2$
- **e)** Mise à jour $h_{j,i-1}(x,y) \longleftarrow h_{j,i-1}(x,y)$- $m_{j,i-1}(x,y)$ et $i \longleftarrow i+1$
- **f)** Calcul du critère d'arrêt :

$$SD(i) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N} \frac{\left|h_{j,i-1}(x,y) - h_{j,i}(x,y)\right|^2}{\left|h_{j,i-1}(x,y)\right|^2}$$

- **g)** Répétition des étapes b-e tant que $SD(i) < \varepsilon$

Etape4): $BIMF_j(x,y) \leftarrow h_{j,i}(x,y)$

Etape5) : Mettre à jour le résidu : $r_j(x,y) \leftarrow r_{j-1}(x,y) - BIMF_j(x,y)$
Etape6) : $j \leftarrow j+1$ et répéter l'étape 3 jusqu'à ce que le nombre d'extrema dans $r_j(x,y)$ soit inférieur à 2

Algorithme (3.1): Algorithme de la BEMD classique.

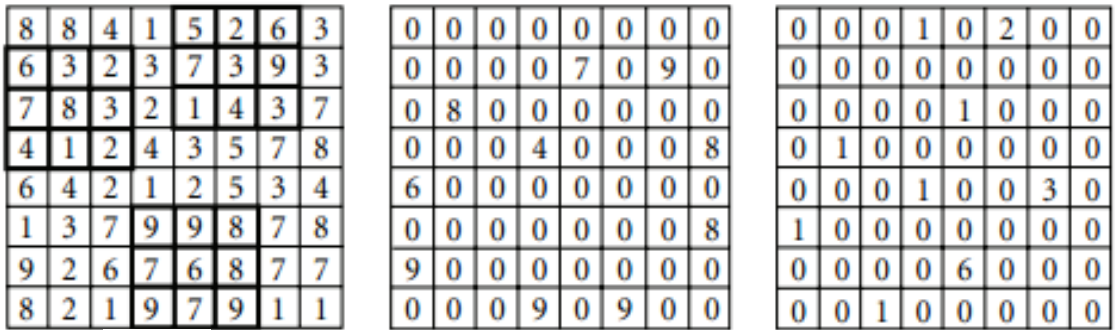
3.2.1 Calcul des extrema

Dans le processus de tamisage, des maximums et des minimums locaux d'une image sont extraits à chaque itération. Le critère le plus simple pour déterminer si un pixel est un maximum (minimum) local est de le comparer à ses voisins. L'extrema doit être strictement plus élevé (ou plus bas) que tous ses voisins. Ainsi, un pixel de niveau de gris $I(x,y)$ est un maximum (minimum) local si :

$$\forall\,(x',y') \in \mathrm{V}(x,y) \text{ alors } \; I(x,y) > I(x',y')\,, \left(I(x,y) < I(x',y')\right) \qquad (3.1)$$

Où $\mathrm{V}(x,y)$ représente le voisinage du pixel de coordonnées (x,y)
La figure (3.1) montre un exemple de calcul des extrema locaux.

Une autre méthode de calcul d'extrema proposée dans [54] est basée sur la reconstruction morphologique. Des opérateurs géodésiques de dilatation et d'érosion sont à la base de cette technique.



(a) **(b)** **(c)**

Fig.3.1 : (a) Image de taille 8×8, (b) Matrice des maximums locaux, (c) Matrice des minimums locaux.

D'autres manières de définir les extrema locaux sont décrites dans Guanlei et al. [78]. Celles-ci tiennent en compte du voisinage utilisé avec ou sans bruit. En présence d'un bruit, le nombre d'extrema peut être très élevé. Pour éviter ce problème, on utilise un seuil T tel que :

$$\sum_{x'}\sum_{y'} sgn\big(I(x,y) - I(x',y')\big) \geq T \quad (Maximum) \tag{3.2}$$

$$\sum_{x'}\sum_{y'} sgn\big(I(x',y') - I(x,y)\big) \geq T \quad (Minimum) \tag{3.3}$$

$$\text{Où : } sgn(\alpha) = \begin{cases} 1 \; si \; \alpha \geq 0 \\ 0 \; sinon \end{cases} \tag{3.4}$$

3.2.2 Calcul des enveloppes supérieures et inférieures

Dans le cas bidimensionnel, les extrema sont répartis de manière anarchique (répartition non régulière). Le calcul des enveloppes supérieures et inférieures est alors abordé dans le cadre de l'interpolation de données dispersées (scattered data interpolation). Huang [25] a proposé d'employer les splines cubiques sur des données non équidistantes pour le cas des signaux monodimensionnels, mais son application dans le cas 2D entraine des discontinuités aux bords dans l'image reconstruite. Pour résoudre ce problème Linderhed a proposé dans ses travaux de thèse [53] d'ajouter des données (points extrema) supplémentaires aux bords du signal 2D. Nunes ainsi que la majorité des travaux sur la BEMD utilisent les fonctions à base radiale (RBF : Radial Basis Function) [43], [50], [54]. Cette méthode est plus simple à étendre aux données bidimensionnelles.

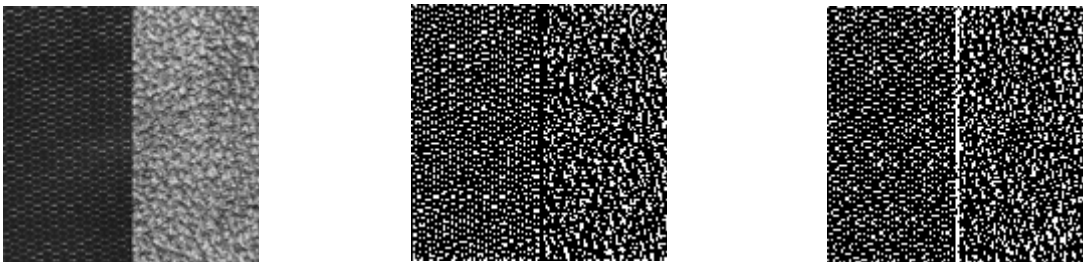
3.2.3 Critère d'arrêt du processus de tamisage

Le processus du tamisage est répété plusieurs fois jusqu'à ce que $h_j(x,y)$ soit une BIMF, c.à.d. vérifiant les conditions de la définition d'une BIMF [24], [52], [59].
Le test d'arrêt du processus de tamisage le plus utilisé reste celui qui est basé sur l'écart-type (Standard Deviation SD).

$$SD(j) = \sum_{t=0}^{T} \left[\frac{\left| h_{j-1}(x,y) - h_j(x,y) \right|^2}{h_{j-1}^2(x,y)} \right] \tag{3.5}$$

3.2.4 Illustration de la BEMD classique

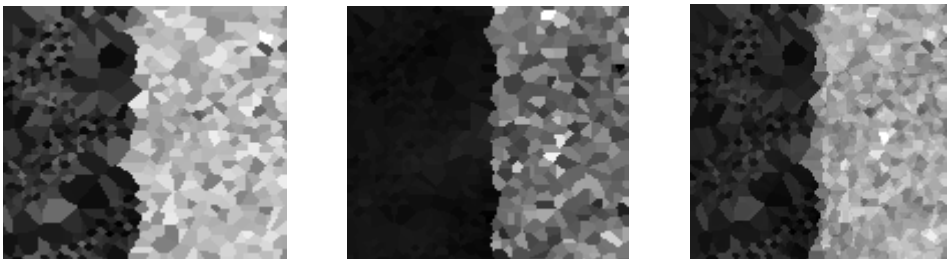
Le principe de la BEMD classique est de décomposer un signal 2D ou une image en une somme de composantes, décrivant localement le signal 2D comme une somme de contribution d'oscillations rapides (hautes fréquences) et d'oscillations plus lentes (basses fréquences).
Dans le processus de la décomposition BEMD, des maximums locaux et des minimums de l'image sont extraits. La figure (3.2) montre les maxima et les minima locaux extraits sur une image composée de deux textures différentes.



(a) **(b)** **(c)**

Fig.3.2: Extraction des extrema : (a) Image originale, (b) Extrema max, (c) Extrema min

Les extrema sont ensuite interpolés pour former les enveloppes supérieures et inferieurs. La figure (3.3) illustre les enveloppes supérieures et inférieures obtenues avec les points max et min de la figure (3.2)
Sur cette même figure, est affichée l'image des valeurs moyennes des deux enveloppes.



(a) **(b)** **(c)**

Fig.3.3:(a) Enveloppe supérieure, **(b)** Enveloppe inferieure, **(c)** Enveloppe moyenne

L'enveloppe moyenne est soustraite de l'image résidu initiale pour déterminer la nouvelle image résidu. Si le critère d'arrêt du processus de tamisage n'est pas respecté, on refait les étapes de calcul des extrema, d'enveloppes et de résidu sinon la nouvelle image résidu est considérée comme une BIMF.

L'image BIMF est soustraite alors de l'image résidu initiale et le processus de tamisage est appliqué sur cette nouvelle image résidu.

La figure (3.4) montre les 5 images BIMF obtenues ainsi que l'image résidu (3.4.f). La somme de ces 5 images BIMF avec l'image résidu permet de reconstruire l'image d'origine (Fig.3.2.a).

Cependant la BEMD classique telle, elle a été décrite précédemment dépend de la méthode d'interpolation utilisée. Les méthodes d'interpolation de surface obéissent à un processus itératif et sont excessivement gourmandes en temps de calcul [24], [43], [55]. De plus les BIMF ainsi produites peuvent être incorrectes à cause du bruit introduit par le calcul des extrema et à cause de l'effet de bords. Par conséquent plusieurs méthodes BEMD rapides et plus efficaces ont été proposées dans la littérature.

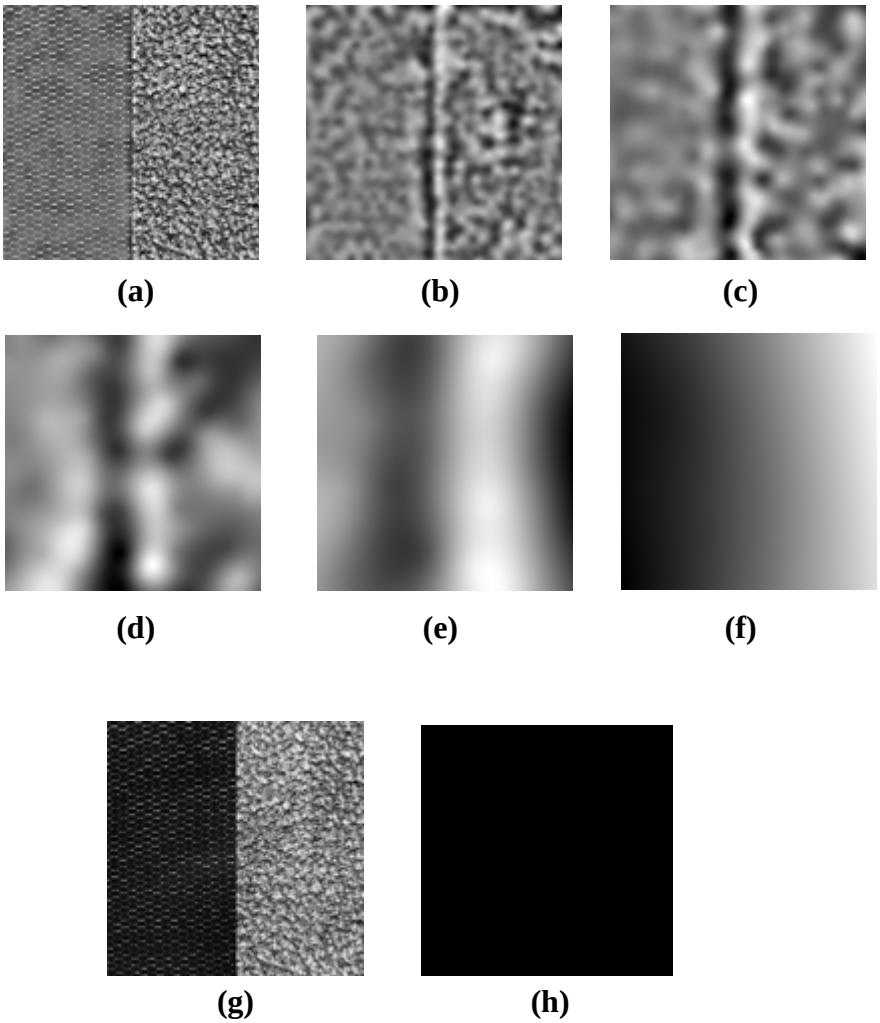


Fig.3.4 : BEMD classique de l'image de la Fig. (3.2.a): (a), (b), (c), (d), (e) sont les BIMF correspondantes, (f) est le résidu, (g) Image reconstruite et (h) la différence en valeurs absolues entre l'image originale et l'image reconstruite

3.3 Méthodes BEMD rapides

La BEMD classique souffre de quelques difficultés. La première est liée à la définition des extrema. En effet, dans une image bidimensionnelle, on trouve souvent des structures comme les intersections, les bords etc. Ces structures peuvent être considérée comme des extrema ou non. Par conséquent, les BIMF produites peuvent être différentes. La deuxième difficulté est la sensibilité au bruit. Ce problème est généralement appelé «mode mixing» ou «scale mixing». Il est illustré sur la figure (3.5) dans le cas monodimensionnel. Si un bruit est présent sur une portion du signal, ce bruit va être présent sur toute la durée d'une IMF correspondant à la composante de ce bruit. Pour éviter ce problème, Wu and Hang ont proposé une méthode dite «Ensemble Empirical Mode Decomposition» (EEMD) [68]. Cette méthode à été exploitée en 2D [69].

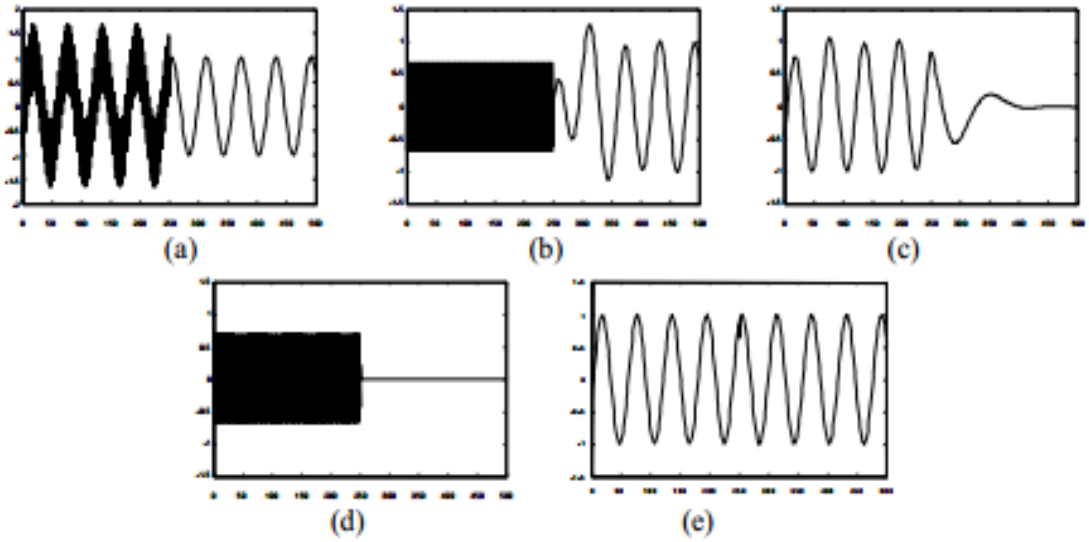


Fig. 3.5: Illustration du phénomène scale mixing (a)Signal original, (b) et (c) imf1 et imf2 obtenus par l'EMD classique, (d) et (e) imf1et imf2 idéals

La troisième difficulté est surtout liée au processus du tamisage et notamment à la méthode d'interpolation utilisée pour déterminer les enveloppes supérieures et inférieures ainsi que la moyenne de ces enveloppes. En effet, la plupart de ces méthodes sont très gourmandes en terme de temps de calcul et peuvent ignorées certains extrema et fournir des surfaces approximatives. De plus, les problèmes de bords peuvent apparaître.

Plusieurs travaux ont été consacrés à accélérer les calculs. Nous pouvons classer ces méthodes en trois catégories. Dans la première catégorie, la BEMD est appliquée sur une image de taille réduite. Nous les appelons méthodes S.R.E.M.D (Size Reduced Empirical Mode Decomposition). La deuxième regroupe les méthodes qui traitent l'image comme un signal monodimensionnel ou composé d'un ensemble de signaux monodimensionnels. Elles sont donc basées sur l'EMD monodimensionnelle (1D-EMD). Quant à la dernière catégorie, elle est formée de méthodes qui calculent directement l'enveloppe moyenne sans passer par la détermination des enveloppes supérieures et inférieures. Elles évitent donc d'utiliser les méthodes d'interpolations qui sont consommatrices de temps de calcul. Nous les appellerons méthodes sans interpolation ou WIEMD (Without Interpolation Empirical Mode Decomposition).

3.3.1 Méthodes SREMD

Pour accélérer les calculs Teo and Lau [70] réduisent la taille de l'image lors du processus du tamisage en utilisant la technique pyramidale. Celle-ci consiste à appliquer

successivement un filtre gaussien avant de sous échantillonner l'image. A la fin du processus du tamisage, l'IMF et le résidu bidimensionnels sont ramenés à la taille originale en appliquant la technique pyramidale inverse.

Dans [79] l'image est décomposée en blocs non chevauchants et la BEMD est appliquée sur chaque bloc séparément puis les BIMF de tous les blocs sont regroupées pour reconstituer les BIMF de l'image originale.

Cette technique a été améliorée en éliminant les effets de bords entre les blocs [71].

3.3.2 Méthodes WIEMD

Zhang [80] propose de remplacer dans le processus de tamisage de la BEMD classique le calcul de la moyenne des deux enveloppes par celui de la moyenne locale telle que la taille de la fenêtre de voisinage $(M \times N)$ est déterminée en fonction des extrema.

$$m(x,y) = \frac{1}{M \times N} \sum_{i=-N/2}^{N/2} \sum_{j=-M/2}^{M/2} I(x+i, y+j) \tag{3.6}$$

Cette taille est donnée par :

$\max(Adj_{max})$ pour le max et $\min(Adj_{min})$ pour le min

Où $Adj_\max$ (Adj_min) sont des vecteurs qui regroupent les valeurs des distances de chaque point maximum (minimum) à son plus proche voisin.

Lin et al. [72], [81] proposent également d'utiliser directement un filtre moyen pondéré, local et adaptatif pour calculer l'enveloppe moyenne sans passer par le calcul des extrema et la détermination des enveloppes supérieures et inférieures.

Cette moyenne est déterminée selon la formule suivante :

$$m(x,y) = \sum_{i=-a}^{a} \sum_{j=-b}^{b} w(i,j) I(x+i, y+j) \tag{3.7}$$

$$avec \qquad w(i,j) = \frac{(a+b) - |i+j| + 2}{a+b+2}, \quad \begin{pmatrix} i = -a, \dots, a \\ j = -b, \dots, b \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Cette méthode a été notamment proposée pour la segmentation d'images filtrée correspondant à l'image résidu [72].

Guanlu et al. [73] évitent également l'utilisation de l'interpolation et le calcul des enveloppes supérieures et inférieures en procédant au calcul de la moyenne locale. Cependant, contrairement aux méthodes précédentes le processus de tamisage est itéré une seule fois. La

taille de la fenêtre de voisinage utilisée pour le calcul de la moyenne locale est déterminée en fonction des extrema. La particularité de cette méthode est que la distance entre deux extrema voisins est limitée à une distance T_s d'où le nom de la méthode « Neighborhood Limited Empirical Mode Decomposition (NLEMD)». L'algorithme (3.2) donne un aperçu sur cette méthode.

(1) Initialisation : $r_0(x,y) = I(x,y)$ et i=1
(2) Fixer la valeur N de largeur maximale de la fenêtre de voisinage $(N \times N)$
(3) Déterminer les points max (min) de $r_{i-1}(x,y)$
(4) Pour chaque point max (min)
  (4.1) Déterminer ses deux points adjacents
  (4.2) Si la distance entre ces deux points est supérieure à N insérer alors un pixel entre ces deux points et considérer ce pixel comme un max (min)
  (4.3) Répétez les étapes (4.1) à (4.3) jusqu'à ce que la distance entre deux points adjacents soit inférieure ou égale à N.
(5) Calculer l'enveloppe moyenne $h_{i-1}(x,y)$ de $r_{i-1}(x,y)$ selon l'algorithme ci-dessous
(6) calculer la i^{ème} BIMF : $BIMF_i(x,y) = r_{i-1}(x,y) - h_{i-1}(x,y)$
  Poser $r_i(x,y) = h_{i-1}(x,y)$
(7) $i = i + 1$ et aller à 2 si le critère d'arrêt n'est pas satisfait

Algorithme (3.2) : Méthode NLEMD

Le calcul de l'enveloppe moyenne dans la 5eme étape de l'algorithme NLEMD suit les étapes suivantes:

(1) Initialisation : Fixer la largeur M de la fenêtre de voisinage de taille $(M \times M)$, le pas « *step* » et le seuil « *thrd* ». $(M < N)$
  $K = M$
(2) Pour chaque pixel de $r_{i-1}(x,y)$
  (2.1) Si c'est un point max (min) alors :
    a. Si le nombre de points max (min) à l'intérieur d'une fenêtre de voisinage de taille $(M \times M)$ est supérieur à *thrd* calculé alors la valeur moyenne $h_{i-1}(x,y)$ avec touts les pixels situés à l'intérieur de cette fenêtre et aller à l'étape (2.2)
    b. sinon $K = K + step$
    si $K < N$ aller à l'étape (a)

  (2.2) sinon calculer la valeur moyenne $h_{i-1}(x,y)$ avec tous les pixels situés dans la fenêtre $(K \times K)$

Algorithme (3.3): Calcul de l'enveloppe moyenne dans l'algorithme NLEMD

Suivant le même principe que la méthode NLEMD, Liang et al. proposent une procédure plus simple pour le calcul de l'enveloppe moyenne [74]. Cette méthode appelée WEMD « Window Empirical mode Decomposition » se déroule selon les étapes de l'algorithme (3.4)

1) Initialisation :
   $r_0(x,y) = I(x,y)$, i = 1
2) Calculer tous les points max et min de $r_{i-1}(x,y)$.
3) Calculer la surface moyenne $m_{i-1}(x,y)$ comme suit
   a. Fixer la taille maximale d'une fenêtre maximale (N×N), (N>0) et la largeur M de la fenêtre de voisinage avec M=3.
   b. Pour chaque pixel si le nombre de pixels max est égale au nombre de pixels min dans la fenêtre (M×M) alors calculer la moyenne de tous les pixels de la fenêtre (M×M) et aller vers (d).
   c. Sinon M=M+2, si M< N on retourne vers (b) sinon on calcul la moyenne avec tous les pixels de la fenêtre (N×N)
   d. Passer au pixel suivant. M=3, on retourne vers (b) et on répète jusqu'à parcourir tout les pixels de l'image.
4) Calculer $BIMF_{i-1}\ (x,y) = r_{i-1}(x,y) - m_{i-1}(x,y)$, i= i+1
5) Répéter toutes les étapes de 2 à 5 jusqu'à atteindre le nombre désiré de BIMF.

Algorithme (3.4) : Méthode WEMD

La taille maximale N de la fenêtre de voisinage est calculée par

$$N = min\left\{\sum_{i=1}^{n} {}^{p_i}/_{n}, \sum_{j=1}^{m} {}^{p'_j}/_{m}\right\} \tag{3.9}$$

Où $p_i\ ou\ (p'_j)$ sont respectivement la distance d'un maximum (minimum) avec son plus proche voisin. $n\ et\ m$ représentent respectivement le nombre de points max (min).

Cette méthode, combinée avec la transformée de Hilbert a été notamment utilisée pour la segmentation d'images texturées [74]

3.3.2.1 Méthode de décomposition modale empirique rapide et adaptative

Egalement appelée FABEMD (Fast and Adaptive Bidimensional Empirical mode Decomposition), cette méthode consiste à éviter l'étape d'interpolation en la remplaçant par un traitement spatial suivi par une opération de lissage. Le traitement utilise deux opérateurs:

un filtre max pour estimer l'enveloppe supérieure et un filtre min pour estimer l'enveloppe inferieure. La taille des filtres est déterminée à partir des extrema de l'image. La FABEMD suit les mêmes étapes que la BEMD sauf que la construction des enveloppes est différente de celle de la BEMD classique [24], [55], [59]. Elle est illustrée par l'algorithme (3.5) ci-dessous :

Etape 1): Initialisation : $r_{j-1}(x,y) \longleftarrow I(x,y)$ (résidu)
Etape 2): Extraction du j^{eme} mode (étape de tamisage)

a. Initialisation $h_j(x,y) = I(x,y)$
b. Extraire les minima et les maxima locaux
c. Calcul des enveloppes supérieures et inférieures $U_j(x,y)\ et\ L_j(x,y)$
   - Détermination de la taille des filtres.
   - Application des filtres max et min
   - Lissage des enveloppes $U_j(x,y)\ et\ L_j(x,y)$ par un filtre moyenneur.
d. Calculer de la moyenne locale $m_j(x,y) = \big(U_j(x,y) + L_j(x,y)\big)/2$
e. Mise à jour $h_j(x,y) \longleftarrow h_j(x,y)$- $m_j(x,y)$
f. Affecter $BIMF_j(x,y) \longleftarrow h_{j,i}(x,y)$

Etape 3): Mettre à jour le résidu : $r_j(x,y) \leftarrow r_{j-1}(x,y) - BIMF_j(x,y)$
Etape 5): $j \leftarrow j+1$ et répéter l'étape 3 jusqu'à ce que le nombre d'extrema dans $r_j(x,y)$ soit inférieur à 2

Algorithme 3.5 : Méthode FABEMD

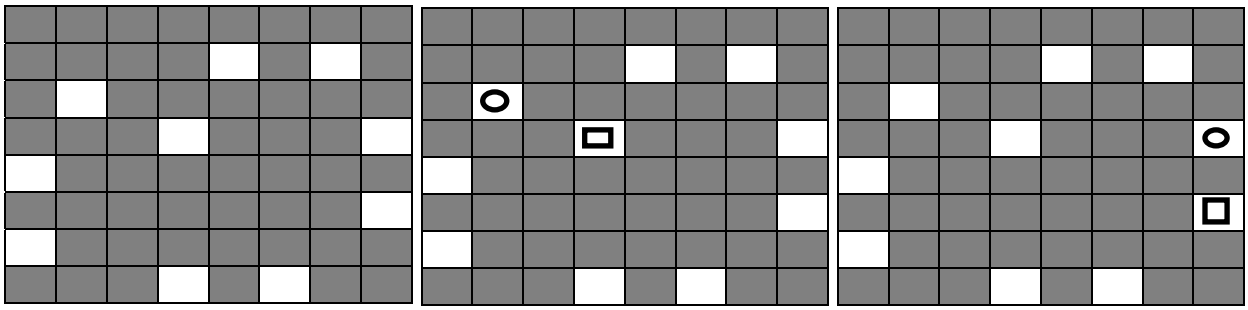
a. Calcul des enveloppes supérieures et inférieures

Les enveloppes supérieures et inférieures sont déterminées par des opérateurs morphologiques de dilatation et d'érosion avec des éléments structurants dont la taille est définie en fonction du contenu de l'image. Les opérateurs de dilatation et d'érosion correspondent à des filtre max et min respectivement. Le point crucial de cette méthode est la détermination de la taille des éléments structurants utilisés pour l'évaluation des deux enveloppes en se basant sur les propriétés des extrema.

➢ Détermination de la taille des opérateurs morphologiques

Pour chaque élément non nul dans la matrice des extrema max, on calcule sa distance euclidienne avec l'élément non nul le plus proche. On obtient alors un tableau de distances appelé tableau de distance de maximum adjacent (TdmaxA). La figure (3.6.a) montre la matrice des maxima de la (Fig.3.1.a) où les maxima non nul sont représentés par des

rectangles blancs tandis que les autres points sont représentés comme des rectangles sombres. Les figures (3.6.b) et (3.6.c) montrent deux exemples de points maximum marqués par(O) et leurs voisins les plus proches marqués par (▭)



(a) **(b)** **(c)**

Fig.3.6: Illustration du calcul du plus proche voisin d'un point max **(a)**Matrice des maximums de la figure (3.1.a) où les rectangles blancs représentant l'emplacement des points dd maximums, **(b)** et **(c)** montrent deux points maximums marqués avec 'O' et leurs voisins les plus proches marqués avec (▭)

De la même manière, on calcule le tableau de distance des minimums appelé tableau de distance de minimums adjacent noté (TdminA)

La taille du filtre notée($F_{Ta} \times F_{Ta}$) est déterminée en utilisant les valeurs des tableaux des distances. On a quatre choix pour calculer la taille F_{Ta} de la fenêtre de voisinage [24]:

$$F_{Ta} = d_1 = min\{min\{TdmaxA\}, min\{TdminA\}\} \quad (3.10)$$

$$F_{Ta} = d_2 = max\{min\{TdmaxA\}, min\{TdminA\}\} \quad (3.11)$$

$$F_{Ta} = d_3 = min\{max\{TdmaxA\}, min\{TdminA\}\} \quad (3.12)$$

$$F_{Ta} = d_4 = max\{max\{TdmaxA\}, min\{TdminA\}\} \quad (3.13)$$

L'utilisation de l'une ou l'autre équation permet d'aboutir à des résultats de décomposition différents.

- **Opérateurs morphologiques**

Pour calculer les enveloppes supérieure et inférieure, la FABEMD utilise des filtres morphologiques de dilatation et d'érosion sur les images $h_{j,i-1}(x, y)$.

$$U_{j,i-1}(x,y) = \max_{(s,t)\in Z_{xy}}\{h_{j,i-1}(s,t)\} \quad (3.14)$$

$$L_{j,i-1}(x,y) = \min_{(s,t)\in Z_{xy}}\{h_{j,i-1}(s,t)\} \quad (3.15)$$

Z_{xy} est la région carrée de taille ($F_{Ta} \times F_{Ta}$) centrée sur le point (x, y) de $h_{j,i-1}(x,y)$. La taille des filtres ($F_{Ta} \times F_{Ta}$) est déterminée en utilisant l'une des formules précédentes.
Il est à noter que les filtres max et min produisent des nouvelles images 2D sans modifier les valeurs existantes.

La figure (3.7) montre les deux enveloppes supérieures et inférieures obtenues sur les images max et min locaux de la figure (3.1).

8	8	8	7	7	9	9	9
8	8	8	7	7	9	9	9
8	8	8	7	7	9	9	9
8	8	8	4	5	7	8	8
6	7	9	9	9	9	8	8
9	9	9	9	9	9	8	8
9	9	9	9	9	9	9	8
9	9	9	9	9	9	9	7

(a)

3	2	1	1	1	2	2	3
3	2	1	1	1	1	2	3
1	1	1	1	1	1	3	3
1	1	1	1	1	1	3	3
1	1	1	1	1	2	3	3
1	1	1	1	1	2	3	3
1	1	1	1	6	1	1	1
2	1	1	1	6	1	1	1

(b)

Fig.3.7 : (a) Enveloppes supérieures, (b) Enveloppes inférieures.

- **Lissages des enveloppes supérieures et inférieures**

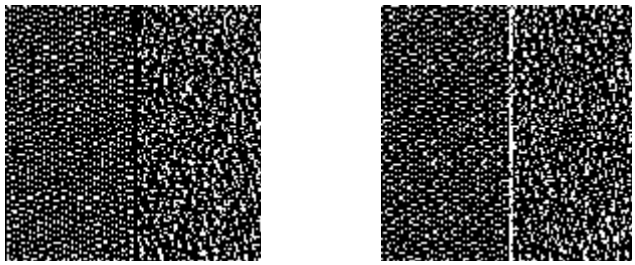
Les enveloppes obtenues peuvent présenter de fortes discontinuités. Le traitement est donc terminé par un filtrage moyenneur, pour lisser les deux enveloppes [24], [55], [59].

$$U_{j,i-1}(x,y) = \frac{1}{F_{Ta} \times F_{Ta}} \sum_{(s,t)\in Z_{xy}} U_{j,i-1}(s,t) \quad (3.16)$$

$$L_{j,i-1}(x,y) = \frac{1}{F_{Ta} \times F_{Ta}} \sum_{(s,t)\in Z_{xy}} L_{j,i-1}(s,t) \quad (3.17)$$

b. Illustration de la méthode FABEMD

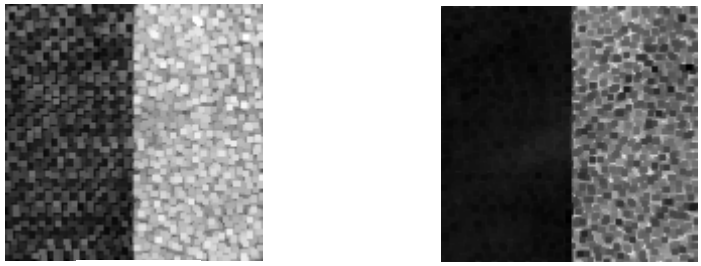
La figure (3.8) montre sous forme d'images les maximas et les minimas locaux de l'image texturée de la figure (3.2.a)



(a) **(b)**

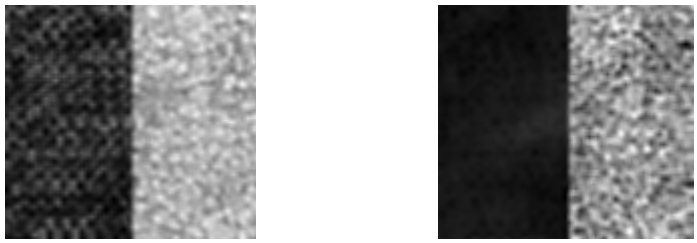
Fig.3.8 : (a) Image des maxima locaux **(b)** Image des minima locaux

Les enveloppes supérieures et inférieures obtenues par les filtres max et min sont affichées sur la figure (3.9). Leurs lissages sont représentés sur la figure (3.10). La figure (3.11) montre les 5 images BIMF ainsi que le résidu final obtenu par la méthode de FABEMD.



(a) **(b)**

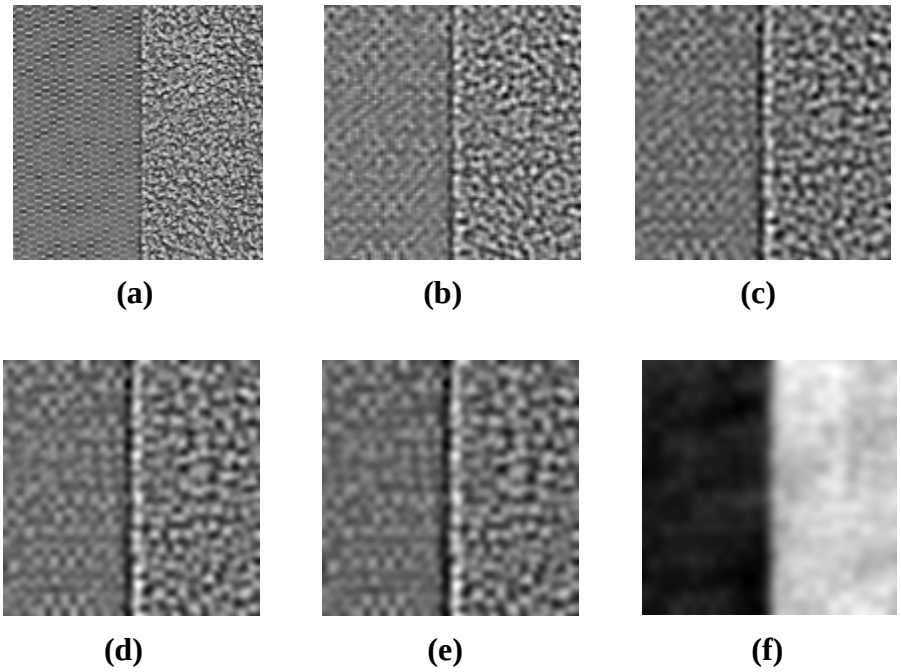
Fig.3.9 : (a) Enveloppe max, **(b)** Enveloppe min



(a) **(b)**

Fig.3.10 : (a) Enveloppe max lissée, **(b)** Enveloppe min lissée

Nous pouvons remarquer que les BIMF obtenues par la FABEMD sont plus faciles à interpréter que celles de la BEMD et les contours aux différentes échelles sont plus visibles sur les BIMF obtenues par la FABEMD.



(a) **(b)** **(c)**

(d) **(e)** **(f)**

Fig.3.11 : Décomposition obtenue par la FABEMD: (a, b, c, d, e) sont les BIMF et (f) est le résidu.

3.3.3 Méthodes 1D-EMD

Shen et al. [75] considèrent d'abord chaque ligne de l'image comme un signal 1D. Ils appliquent alors les opérateurs de détection d'extrema et d'interpolation monodimensionnelles pour déterminer les enveloppes supérieures $U_r(x,y)$ et inférieures $L_r(x,y)$. Ensuite, ils appliquent les même opérateurs sur les colonnes de l'image pour déterminer les enveloppes $U_c(x,y)$ et $L_c(x,y)$. L'enveloppe moyenne est alors calculée comme suit :

$$m(x,y) = \frac{U_r(x,y) + L_r(x,y) + U_c(x,y) + L_c(x,y)}{4} \tag{3.18}$$

Cette méthode est résumée dans l'algorithme (3.6) ci-dessous.

Quant à Li et al. [76], ils appliquent le processus de tamisage monodimensionnel pour chaque ligne de l'image. Ils obtiennent ainsi une BIMF ayant la même taille que l'image originale. Sur chaque colonne de cette de cette BIMF est appliquée ensuite le processus de tamisage monodimensionnel, le résultat donne une BIMF de l'image. Ce processus est répété pour déterminer les autres BIMF. L'algorithme (3.7) décrit cette méthode

Etape 1) : Initialisation

j=1, $r_{j-1}(x,y) = i(x,y)$

Etape 2) : Extraction du j^{eme} mode

- **a.** $h_{j,i-1}(x,y) \leftarrow r_{j-1}(x,y)$
- **b.** Calculer les extrema de $h_{j,i-1}(x,y)$
- **c.** Interpoler par la méthode des splines cubiques monodimensionnelle les points max et le long des lignes pour construire les enveloppes supérieures U_r et les enveloppes inférieures L_r.
- **d.** construire les enveloppes supérieures U_c et les enveloppes inférieures L_c en interpolant de la même manière les points max et min le long des colonnes
- **e.** Calculer l'enveloppe moyenne par :

$$m(x,y) = \frac{U_r(x,y) + L_r(x,y) + U_c(x,y) + L_c(x,y)}{4}$$

- **f.** Mettre à jour $h_{j,i-1}(x,y) = h_{j,i-1}(x,y) - m(x,y)$, i=i+1
- **g.** Répéter les étapes (f) à (g) si $m(x,y) = 0$, $BIMF_j(x,y) = h_j(x,y)$

Etape 3) : Mettre à jour le résidu $r_j(x,y) = r_{j-1}(x,y) - BIMF_j(x,y)$

Etape 4) : Répéter les étapes 2-4 si le nombre de BIMF n'est pas atteint.

Algorithme 3.6 : Méthode de Shen et al.

Etape 1) : Initialisation (j=0)

- $r_j(x,y) = I(x,y)$
- $h_j(x,y) = r_j(x,y)$

Etape 2) : $x = 1$

2.a) Définir le signal monodimensionnel I^{x} correspondant à la x^{ieme} ligne de l'image $I^{\mathrm{x}} = I(x, y = 1{:}M)$

2.b) Calculer la 1^{ere} IMF (IMF(I^{x})) du signal I^{x}

2.c) $r_j(x, y = 1{:}M) = r_j(x, y = 1{:}M) - \mathrm{IMF}(I^{\mathrm{x}})$

2.d) $si\ x < N$ alors $x = x + 1$ et retourner vers (2.a) sinon aller à l'étape 3

Etape 3) : y=1

3.a) Définir le signal 1D $I_y = r_j(x = 1:N, y)$ le long des colonnes

3.b) Calculer la 1^{ere} IMF (IMF(I_y)) du signal I_y

3.c) $r_j(x = 1:N, y) = r_j(x = 1:N, y) - \mathrm{IMF}(I_y)$

3.d) $si\ y < M$ alors $y = y + 1$ et retourner vers (3.a) sinon aller à l'étape 4

Etape 4) : j=j+1, $BIMF_j(x,y) = r_{j-1}(x,y)$

$$r_j(x,y) = h_{j-1}(x,y) - r_{j-1}(x,y)$$

$$h_j(x,y) = r_j(x,y)$$

Répéter les étapes (1) à (4) si le nombre de BIMF n'est pas atteint

Algorithme 3.7 : Méthode de Li et al.

Z. Yang and L. Yang [77] utilisent la transformée de Radon pour transformer le signal image d'un angle $\propto$ en une séquence monodimensionnelle pour ensuite lui appliquer l'EMD 1D. Les BIMF et le résidu obtenus sont transformés en images 2D (BIMF) via la transformée de Radon inverse lors du processus du tamisage.

3.3.3.1 Méthode basée sur le balayage de Hilbert-Peano

Le principe de cette méthode est de transformer l'image bidimensionnelle en une séquence monodimensionnelle puis appliquer l'EMD monodimensionnelle sur cette séquence. Les signaux IMF et résidus ainsi obtenus sont finalement transformés en image BIMF et résidu 2D. Cette méthode que nous avons développée a été en même temps proposée par Costa et al. [67] en utilisant l'EEMD à la place de l'EMD. Cette dernière est nommée PHEEMD (Peano–Hilbert Ensemble Empirical Mode Decomposition).

La transformation d'une image bidimensionnelle en une représentation vectorielle (monodimensionnelle) se fait généralement en concaténant les lignes ou les colonnes. Cependant, d'autres manières d'obtenir cette transformation est d'utiliser la notion de courbes de remplissage d'espace (SFC).

a. Courbe de remplissage de l'espace (SFC : Space Filling Curves)

Une SFC est un balayage continu qui passe à travers chaque pixel de l'image une fois seulement afin de transformer une image (2D) en un signal (1D). La SFC doit réserver au mieux les propriétés de voisinage du pixel.
Plusieurs courbes de remplissage peuvent être utilisées (Fig.3.12). Cependant, celle qui respecte le plus le voisinage est la courbe de Peano-Hilbert.

Les courbes de Peano-Hilbert sont des SFC abondamment étudiées et souvent utilisées en traitement d'images pour permettre un parcours efficace du plan d'image. Ces courbes présentent une propriété essentielle : le passage d'un point de la courbe à son voisin (sur la courbe) ne s'accompagne jamais d'un déplacement important dans l'espace des composantes, d'où la préservation de la topologie et de l'information spatiale [45], [67].
La figure (3.13) montre un exemple de construction de la courbe de Peano-Hilbert.

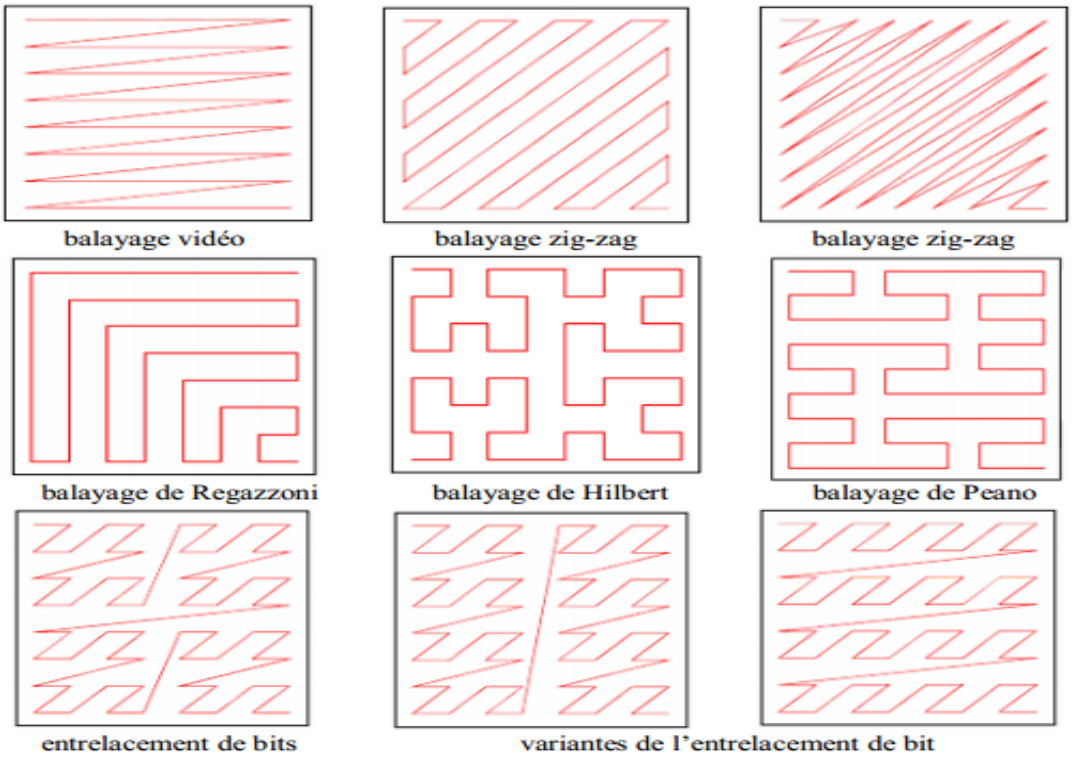


Fig.3. 12: Représentation géométriques des SFC

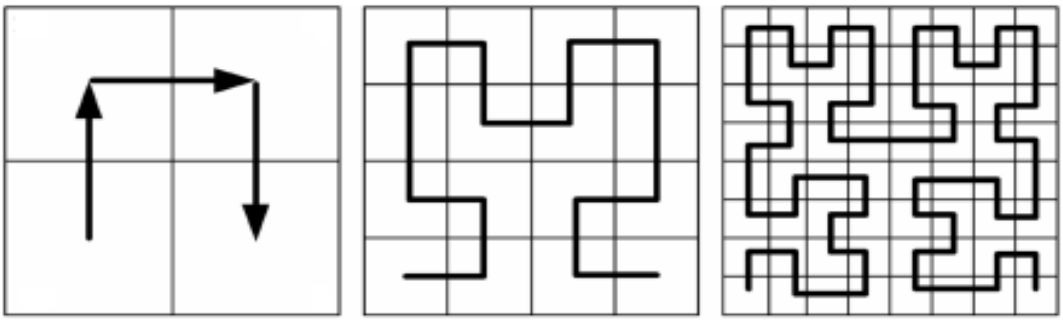


Fig.3.13 : Exemple de construction de courbe de Peano-Hilbert

Etant donnée ce type de balayage utilisé, la méthode BEMD que nous proposons portera le nom de PHBEMD (Peano-Hilbert Bidimensional Empirical Mode Decomposition)

b. Algorithme de PHBEMD

La méthode BEMD rapide que nous proposons suit les étapes suivantes

1. Effectuer la transformation de l'image en utilisant la courbe de Peano-Hilbert pour obtenir le signal équivalent 1D qui conserve les relations spatiales des pixels locaux et ses voisins

2. Appliquer l'EMD-1D au signal monodimensionnel afin de déterminer les IMF-1D

3. Appliquer la procédure de la transformation inverse du balayage de Peano-Hilbert sur les signaux IMF-1D afin de construire les images BIMF.

Algorithme (3.7) : Méthode PHBEMD

c. Illustration de la méthode PHBEMD

La figure (3.14) montre les 5 images BIMF ainsi le résidu final obtenu par l'application de notre méthode PHBEMD sur l'image texturée de la figure (3.2.a). Les résultats ainsi obtenu montrent que notre méthode conduit à une amélioration sur ce qui concerne la clarté des BIMF ainsi une évaluation plus précise des BIMF par rapport aux méthodes BEMD classique et la FABEMD.

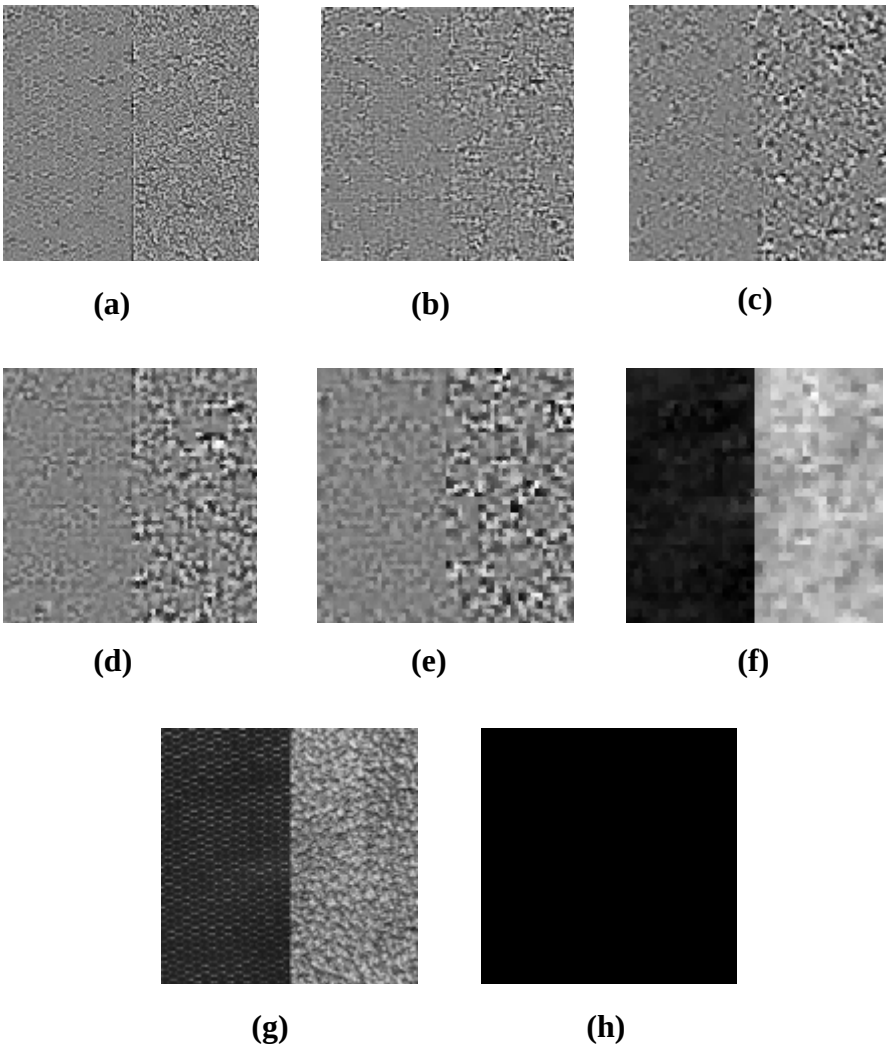


Fig. 3.14 : Illustration de la méthode PHBEMD

3.4 Transformée de Hilbert bidimensionnelle

Comme pour les signaux monodimensionnels, la transformée de Hilbert accompagne souvent l'EMD. Elle est appliquée sur les images BIMF, supposées mono composantes afin de déterminer leurs amplitudes et fréquences instantanées.

Le signal analytique d'une image I est défini comme suit :

$$I_A(x,y) = I(x,y) + i \times I_H\{I(x,y)\} \tag{3.19}$$

avec $I_H(x,y) = TH\{I(x,y)\}$ la transformée de Hilbert de l'image bidimensionnelle I.

$I(x,y)$ et $I_H(x,y)$ représentent la partie réelle et la partie imaginaire du signal analytique 2D, Nous pouvons ainsi définir les amplitudes, phases et fréquences instantanées par :

$$A(x,y) = \sqrt{I^2(x,y) + I_H^2(x,y)} \tag{3.20}$$

$$\theta(x,y) = arctg\frac{I_H(x,y)}{I(x,y)} \tag{3.21}$$

$$f(x,y) = \frac{d\theta(x,y)}{dxdy} \tag{3.22}$$

La TH bidimensionnelle peut être obtenue d'une manière simple par extension de la TH à 1D au cas 2D [82].

Rappelons que la TH d'un signal 1D $x(t)$ est

$$y(t) = TH\{x(t)\} = x(t) * \frac{1}{\pi t} \tag{3.23}$$

$$\text{avec} \qquad Y(f) = X(f) \times H(f) \text{ où } H(f) = -jsgn(f) \tag{3.24}$$

Pour une image $I(x,y)$ 2D, la TH peut s'écrire :

$$TH\{I(x,y)\} = I_{TH}(x,y) ** \frac{1}{\pi^2 xy} \tag{3.25}$$

Sa transformée de Fourier est :

$$I_{TH}^F(u,v) = -sgn(u)sgn(v)I^F(u,v) \tag{3.26}$$

où $I^F(u,v)$ est la TF de l'image $I(x,y)$

La transformée de Fourier du signal analytique est alors :

$$I_A^F(u,v) = [1 - i\ sgn(u)sgn(v)]I^F(u,v) \tag{3.27}$$

3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une étude assez exhaustive sur l'analyse d'images texturée basée sur la décomposition modale empirique.

Nous avons décrit en premier lieu l'algorithme standard de décomposition modale empirique d'une image (BEMD) qui est conçu comme l'extension de l'EMD 1D au cas bidimensionnelle. Nous avons relevé les inconvénients de cet algorithme qui se manifestent principalement par un temps de calcul élevé. Par la suite, nous avons établit un état de l'art assez original sur les méthodes BEMD rapides. Trois de ces méthodes ont été détaillées et illustrées sur une image texturée. Il s'agit de l'algorithme de la méthode FABEMD qui permet d'éviter les procédures d'interpolation bidimensionnelles gourmandes en terme de temps de calcul et la méthode PHBEMD qui est basée sur la transformation de l'image 2D en signal 1D sur lequel l'EMD 1D est appliquée plus rapidement. Notons que cette dernière méthode que nous avons conçue est apparue très récemment dans la littérature.

Chapitre IV

Tests et résultats

4.1 Introduction

Nous allons présenter dans ce chapitre les résultats de la segmentation d'images texturées basée sur trois méthodes de décomposition modale empirique bidimensionnelle décrites dans le chapitre précédent. Ces trois méthodes correspondent à la BEMD classique, la FABEMD et la PHBEMD.

Les résultats de ces méthodes seront confrontés entre eux en se basant sur la qualité de la segmentation et sur le temps de calcul.

Notons que toutes les méthodes présentées dans notre travail ont été implémentées sous l'environnement Matlab 9, sur un micro ordinateur hp, ayant un microprocesseur Intel core i3-3110 M, une fréquence de 2.40 GHz, une mémoire vive (RAM) de 4 Go et un disque dur de 500 Go.

4.2 Segmentation d'images texturées basée sur la BEMD

La segmentation d'images texturées basée sur la décomposition modale empirique se déroule en deux étapes. La première étape dite, "étape de caractérisation", consiste à déterminer un ensemble d'attributs pour chaque pixel de l'image à segmenter en utilisant l'une des trois techniques BEMD. La deuxième étape consiste à regrouper en classes les pixels ayant des attributs similaires en utilisant la méthode de classification non supervisée K-means décrite dans le premier chapitre.

Dans la première étape, les attributs de texture de chaque pixel correspondent aux valeurs extraites à partir des images BIMF issues de l'une des techniques BEMD. Les images BIMF ainsi obtenues sont moyennées en utilisant un filtre moyen local avec une fenêtre de voisinage de taille $(2w+1)^2$. A l'issu de chaque étape, chaque pixel de l'image sera caractérisé par un ensemble de Nimf attributs où le ième attribut correspond la valeur prise par le pixel à la ième image BIMF.

4.3 Critères d'évaluation

Afin d'évaluer d'une manière objective les performances des différentes méthodes BEMD dans le cadre de la segmentation, nous avons utilisé le taux de classification et le temps d'exécution comme critères d'évaluation.

Le taux de classification est basé sur des connaissances a priori disponibles sur l'image à savoir le nombre de régions de textures contenues dans l'image et la classe d'appartenance de chaque pixel à une classe de texture. Il est déterminé par le rapport entre le nombre de pixels

bien classés et le nombre total des pixels de l'image. Dans ce cas, nous avons utilisé une image synthétique.

Le temps d'exécution est utilisé comme critère de comparaison des procédures d'extraction des attributs de texture utilisant la technique BEMD classique ainsi que les deux techniques FABEMD et PHBEMD.

Nous allons présenter, en premier lieu, les résultats d'évaluation des trois techniques BEMD obtenus sur une image synthétique composée des deux textures tirées de l'album de BRODATZ à savoir D34 et D92 . La taille de cette image est de (256*256) codée en 8 bits (Fig.4.1). La texture D92 est plus au moins fine, par contre, la texture D34 est plus régulière, elle possède un motif de base bien apparent (maille) qui se répète d'une manière assez régulière. Les BIMF obtenus par chaque technique BEMD à savoir BEMD classique, FABEMD et PHBEMD ont été présentées dans le chapitre précédent.

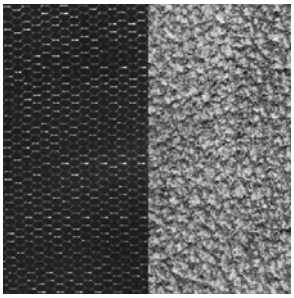


Fig. 4.1: Image Test

Le tableau (4.1) regroupe les valeurs du taux de classification et du temps de calcul des attributs de texture de l'image test obtenus à partir des trois méthodes BEMD en fonction du nombre d'attributs (Nimf) et en fonction de la taille de la fenêtre de voisinage (w). La figure (4.2) montre quelques images segmentées obtenues à partir des attributs de la BEMD classique.

Nimf	Taille de la fenêtre de voisinage (w)	Temps de calcul des attributs de texture			Taux de Classification en %		
		BEMD	FABEMD	PHBEMD	BEMD	FABEMD	PHBEMD
2	1	39m10s	2m12s	1,70s	95,57	95,26	96,43
	2	43m12s	3m00s	2,64s	95,11	95,07	96,60
	3	49m5s	4m10s	1,86s	94,23	94,18	96,49
	4	51m30s	4m56s	1,96s	93,46	93,30	95,81
3	1	55m00s	5m02s	4,20s	94,66	94,97	95,60
	2	60m14s	5m51s	3,86s	93,45	94,47	96,54
	3	69m50s	6m10	3,80s	93,27	93,80	96,38
	4	75m17s	4m49s	3,79s	92,65	92,85	96,59
4	1	100m00s	6m00s	4,12s	93,84	94,61	96,17
	2	110m10	6m14s	4,54s	93,15	94,00	96,78
	3	117m21s	6m50s	3,87s	92,34	93,23	96,28
	4	120m10s	7m05s	3,86s	91,50	92,45	95,54
5	1	125m20s	7m58s	4,79s	93,68	94,25	97,20
	2	132m30	8m30s	4,42s	92,94	93,46	97,13
	3	141m10s	9m02s	4,32s	92,26	92,73	96,60
	4	158m00s	9m35s	4,27s	91,40	91,89	95,78
6	1	165m00s	10m01s	4,48s	94,43	93,72	97,74
	2	170m30	10m40s	4,47s	93,23	92,98	97,31
	3	179m22s	11m10s	4,30s	92,70	92,21	96,77
	4	182m00s	11m50s	4,56s	91,71	91,30	95,88

Tableau (4.1): Résultants de la segmentation de l'image test en utilisant les attributs de textures extrait par les trois technique d de la BEMD

w=2, w=1 w=4

Nimf=2

w=1 w=3 w=3

Nimf=3

w=1 w=3 w=3

Nimf=4

w=2 w= 3 w=2

Nimf=5

w=1 w=3 w=2

Nimf=6

Fig. (4.2) : Images segmentées en utilisant les attributs de texture extraits à partir des techniques BEMD. Colonne 1: BEMD classique. Colonne 2: FABEMD. Colonne 3: PHBEMD

Interprétation

Concernant le temps de calcul, les résultats montrent clairement que quelque soit le Nimf et la taille de la fenêtre d'exécution la méthode de PHBEMD reste la plus rapide par rapport aux méthodes BEMD classique et la FABEMD. La méthode BEMD classique consomme un temps assez important pour le calcul des attributs de textures. Notons que la méthode de FABEMD ce temps dépend de nombre des IMF (Nimf) ainsi que la taille de la fenêtre de voisinage ($2w + 1)^2$.

On constate également, que la taille de la fenêtre de voisinage joue un rôle dans la segmentation d'image par les attributs de texture. Le tableau (4.1) montre que, plus la taille de voisinage augmente plus le taux de classification diminue. Cependant, pour cette image test, le taux de classification maximal est obtenu avec la méthode PHBEMD.

En ce qui concerne la qualité de la segmentation, quelque soit le Nimf et la taille de la fenêtre de voisinage les résultats obtenus avec la méthode de PHBEMD sont beaucoup meilleurs par rapport aux deux autres méthodes.

4.4 Images synthétiques et réelles

Nous avons également évalué le pouvoir discriminatoire des attributs de texture fournis par les techniques BEMD classique, FABEMD et PHBEMD sur d'autres images synthétiques et sur des images réelles.

4.4.1 Images synthétiques

La figure (4.3) montre les images synthétiques utilisées. Ces images diffèrent par le nombre de textures, le type de la texture ainsi que la forme des régions texturées présentes.

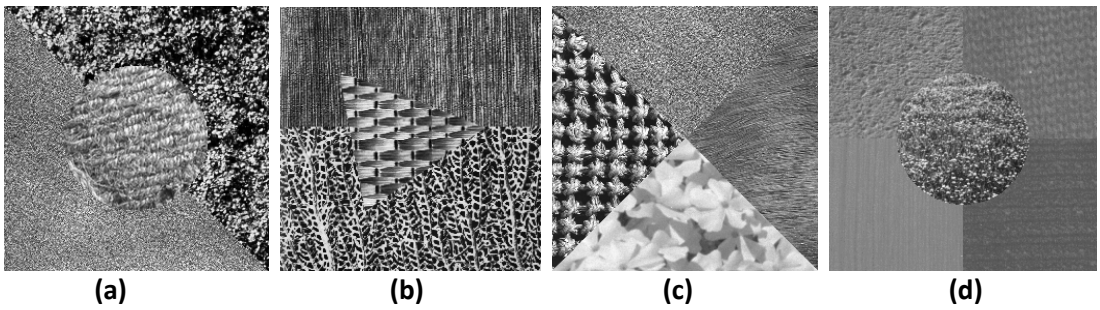


Fig. 4.3 : Images synthétiques

Les figures (4.4) à (4.7) montrent les différentes images segmentées obtenues sur ces images synthétiques par les trois méthodes de BEMD.

Nimf=2, w=4

Nimf=3, w=4

Nimf=4, w=4

Nimf=5, w=4

Fig.4.4 : Image synthétique (1) segmentée par les différentes méthodes BEMD (BEMD classique : colonne 1, FABEMD : colonne 2, PHBEMD : colonne 3).

Nimf=2, w=3

Nimf=3, w=3

Nimf=4, w=3

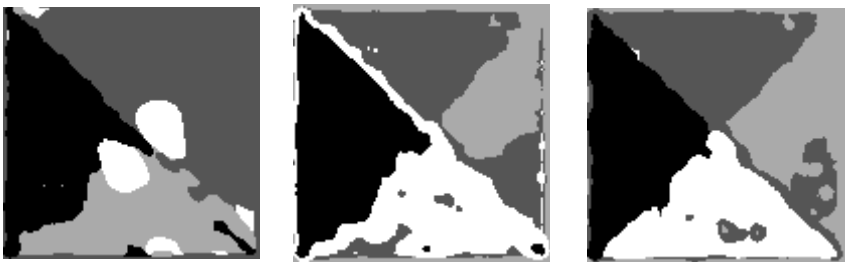
Nimf=5, w=3

Fig.4.5 : Image synthétique (2) segmentée par les différentes méthodes BEMD (BEMD classique : colonne 1, FABEMD : colonne 2, PHBEMD : colonne 3).

Nimf=2, w=4

Nimf=3, w=4

Nimf=4, w=4



Nimf=5, w=4

Fig.4.6 : Image synthétique (3) segmentée par les différentes méthodes BEMD (BEMD classique : colonne 1, FABEMD : colonne 2, PHBEMD : colonne 3).

Nimf=2, w=4

Nimf=3, w=4

Nimf=4, w=4

Nimf=5, w=4

Fig.4.7 : Image synthétique (4) segmentée par les différentes méthodes BEMD (BEMD classique : colonne 1, FABEMD : colonne 2, PHBEMD : colonne 3).

Interprétation

Les figures (4.4) à (4.7) montrent que les résultats de segmentation obtenus par la méthode PHBEMD sont généralement meilleurs par rapport aux résultats obtenus avec les méthodes BEMD classique et FABEMD.

En effet, hormis la première image, la BEMD classique n'arrive pas à distinguer les différentes textures. La FABEMD donne de bons résultats sur les deux premières images mais moins bons sur les deux dernières images. Par contre la PHBEMD arrive à ressortir les différences entre les différentes textures dans toutes les images.

4.4.2 Images réelles

Nous avons également appliqué les différentes techniques BEMD sur des images réelles en vue de leurs segmentations (Fig. 4.8).

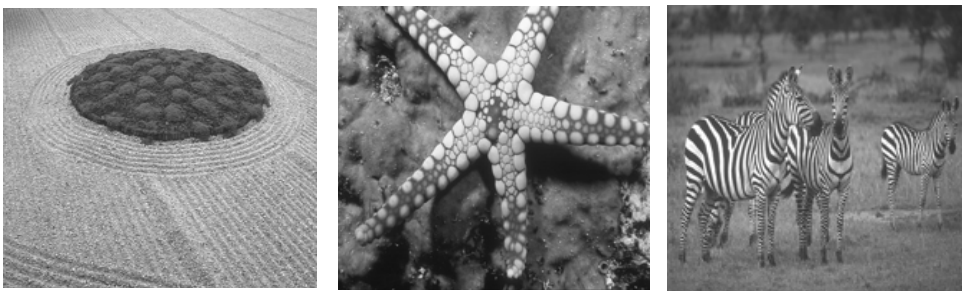
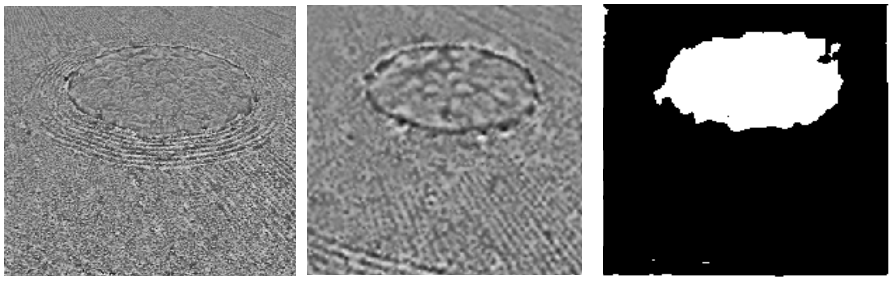


Fig. 4.8 : Images réelles

Les figures (4.9) à (4.11) montrent les BIMF et les images segmentées obtenues avec les trois méthodes BEMD.

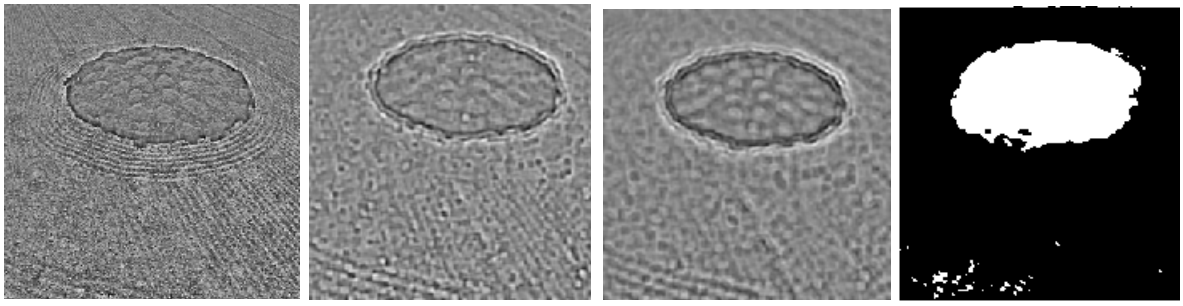


Nimf=2, w=4

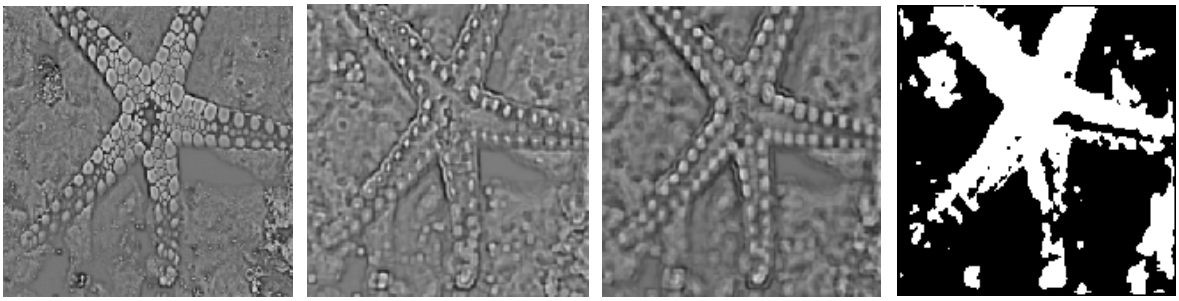
Nimf=2, w=3

Nimf=2, w=3

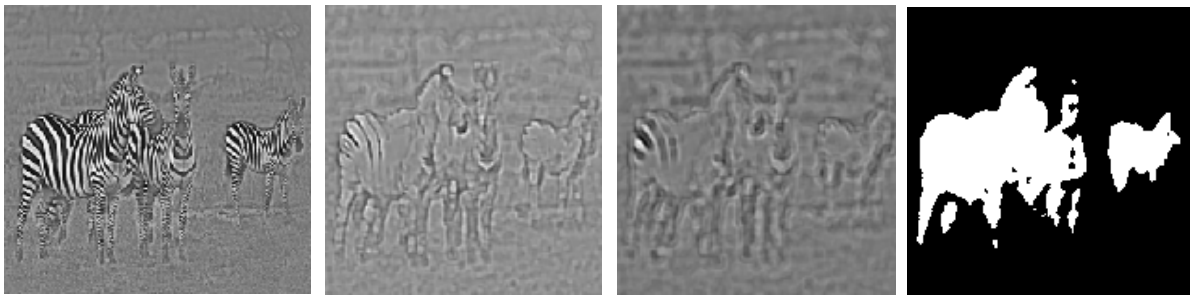
Fig. (4.9): images réelles segmentées par la méthode BEMD classique et ces différentes BIMF.



Nimf=3, w=3

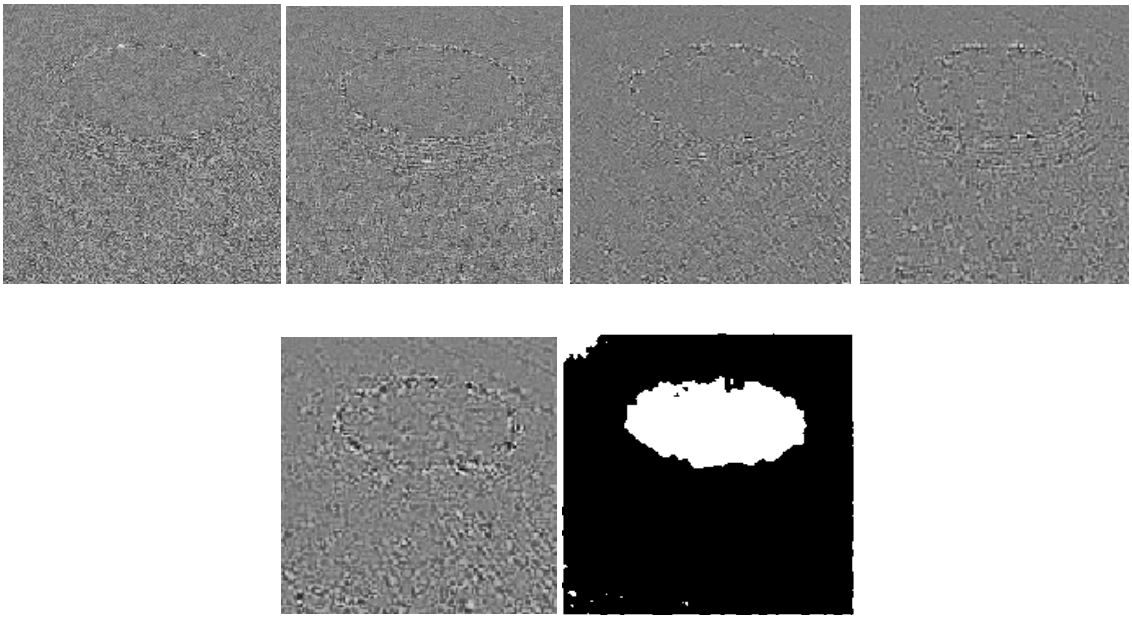


Nimf=3, w=3

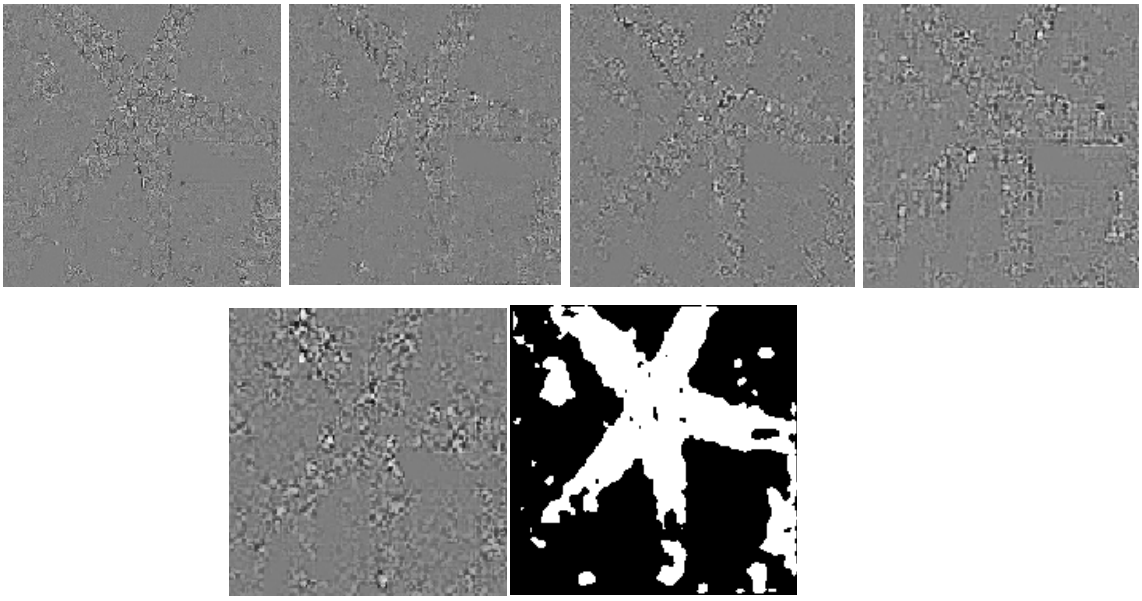


Nimf=3, w=3

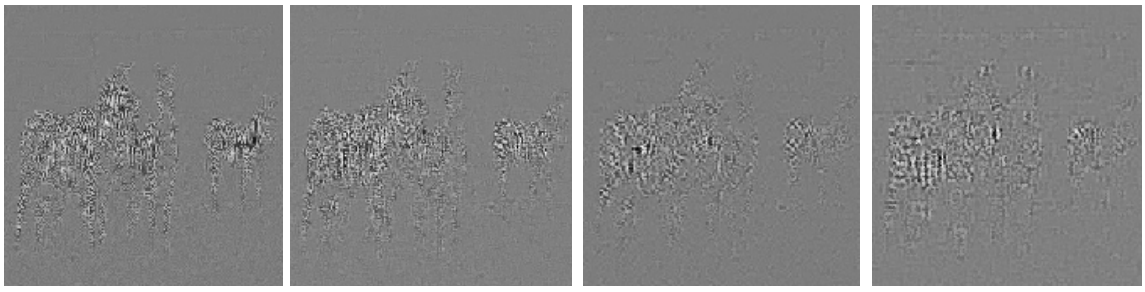
Fig. (4.10): images réelles segmentées par la méthode FABEMD et ces différentes BIMF.

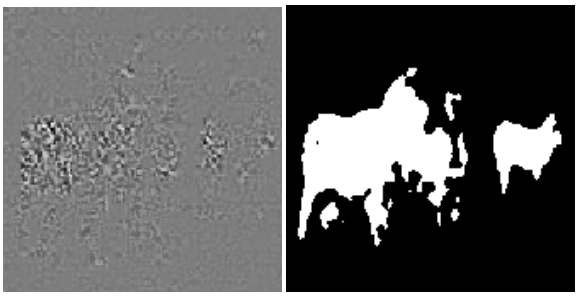


Nimf=5, w=2



Nimf=5, w=3





Nimf=5, w=3

Fig. (4.11): images réelles segmentées par la méthode PHBEMD et ces différentes BIMF.

Interprétation

Les résultats obtenus montrent que les trois méthodes sont comparables d'un point de vue qualité de l'image segmentée.

Nous pouvons constater que les BIMF obtenus avec la BEMD classique et la FABEMD sont plus facile à interpréter que celles obtenus avec la PHBEMD, par contre le temps de calcul de la PHBEMD reste très réduit par rapport aux deux autres méthodes.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques résultats de segmentation des images réelles et synthétiques basées sur les trois méthodes de décomposition modale empirique bidimensionnelles à savoir la BEMD classique, FABEMD et PHBEMD.

Ces résultats montrent clairement que la segmentation d'une image texturée dépend de la technique de décomposition modale empirique employée pour caractériser la texture. En effet, d'un point de vue temps de calcul, la PHBEMD est la plus rapide car elle traite l'image comme un signal à une seule dimension. La FABEMD malgré qu'elle évite d'utiliser des procédures d'interpolations bidimensionnelles est un peu moins rapide à cause de la procédure de calcul de la taille de la fenêtre de voisinage. Cependant, cette méthode reste largement plus rapide que la BEMD classique.

En ce qui concerne la qualité de la segmentation, la PHBEMD et la FABEMD donnent des meilleurs résultats que la BEMD classique. Cependant, nous avons remarqué que la PHBEMD est meilleure pour certaines images que la FABEMD.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le travail que nous avons réalisé dans le cadre de ce mémoire porte essentiellement sur l'analyse d'images texturées basées sur une méthode assez récente qui est la décomposition modale empirique.

Cette méthode qui porte le nom de son créateur est appelée transformée de Huang à été proposée récemment comme une nouvelle méthode d'analyse temps fréquence du signal. Elle est associée à une autre transformation dite de Hilbert. Cette association constitue la transformée de Hilbert-Huang (THH). La décomposition modale empirique permet de décomposer un signal multi-composantes en un ensemble de signaux mono-composantes dites IMF. La transformée de Hilbert permet d'estimer l'amplitude et la fréquence instantanée de chaque composante. La décomposition modale empirique est une technique simple et plus avantageuse par rapport aux autres méthodes d'analyse de signaux non linaires et non stationnaires telles que la transformée en ondelettes.

L'extension de cette méthode aux images bidimensionnelles pose beaucoup de problèmes, notamment celui du temps de calcul. Afin d'éviter cet inconvénient, plusieurs techniques ont été proposées dans la littérature. Ainsi nous avons établit dans ce mémoire un état de l'art assez originale sur ces techniques. En effet, le troisième chapitre de ce mémoire présente une étude assez exhaustive sur l'analyse d'images texturée basée sur la décomposition modale empirique. Nous avons par la suite choisis d'étudier et d'implémenter trois méthodes BEMD. La première dite classique n'est rien d'autre qu'une extension au cas bidimensionnelle de l'EMD monodimensionnelle. Cette méthode s'est malheureusement avérée très gourmande en temps de calcul.

La deuxième dite FABEMD consiste à éviter les procédures d'interpolation 2D qui sont à l'origine du temps élevé. La troisième dite PHBEMD que nous avons proposée dans ce mémoire, utilise l'EMD monodimensionnelle plus rapide que l'EMD 2D.

Des tests effectués sur plusieurs images synthétiques et réelles montrent que la FABEMD et la PHBEMD sont largement plus rapide que la BEMD classique avec un plus grand gain de temps pour la PHBEMD. Ils montrent également que ces deux techniques

fournissent une meilleure segmentation par rapport à la BEMD classique avec un net avantage pour la PHBEMD.

Finalement, le travail présenté dans ce mémoire montre clairement que la segmentation d'images texturées basée sur la décomposition modale empirique dépend de la manière avec laquelle les images mono composantes sont obtenues.

Bibliographie

[1] O. Hibon. Analyse d'image : caractérisation de textures d'images de gels lactés. Rapport de stage INRA, Université de Nantes, 2010.

[2] A. Barré et Lilian Dollet. Analyse de texture par Fourier. Illustrations des cours de traitement des images, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, promotion 1999.

[3] P. Poudiougo. Analyse quantitative des formes (SATFORM) : texture: un état de l'art. Journées Télédétection, BONDY, pp.167-177, du 14 au 17 novembre 1988.

[4] Z. Haliche. Segmentation d'images texturées en niveau de gris à base de la matrice Aura. Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou, 2010.

[5] K. Albeau. Analyse à grande échelle des textures des séquences protéiques via l'approche Hydrophobic Cluster Analysis (HCA). Thèse de doctorat, Ecole Pratique Des Hautes Etudes Université, Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines, 2005.

[6] L. Paulhac. Outils et méthodes d'analyse d'images 3D texturées : Application à la segmentation des images échographiques. Thèse de Doctorat, Université François Rabelais de Tours, 2009.

[7] A. Boyer. Applicabilité de la texture couleur à la différentiation des classes d'occupation du territoire sur des images satellitales multi spectrales. Mémoire de Master, Université de Montréal, 2010.

[9] A. Hafiane. Caractérisation de textures et segmentation pour la recherche d'images par contenu. Thèse de Doctorat, université de Paris Sud XI, 2005.

[10] S. Samir. Environnement de segmentation d'image à base d'une approche biomimétique. Mémoire d'Ingénieur, Oued-Smar, Alger, 2008.

[11] L. Risser. Analyse multi-échelles des textures. Rapport DEA Informatique pour l'Image et le Langage, specialié : Analyse d'Image, Universit´e Paul Sabatier, Toulouse, 2003.

[12] O. D'hondt. Analyse spatiale de texture non stationnaire dans les images SAR. Thèse doctorat, université de Rennes I, 2006.

[13] S. Mavromatis. Analyse de texture et visualisation scientifique. Thèse Doctorat, Université de la Méditerranée, 2001.

[14] B. Naegel. Outils pour le traitement et l'analyse d'images, introduction à la morphologie mathématique. Polycopié de cours CET47, 2008.

[15] I. Moalla et G. Joutel. L'analyse multi-résolution, Rapport Projet ANR Graphem, Livrable N°8, 2011.

[16] S. M. Hela, K. Hamrouni. Segmentation d'images texturées par transformée en ondelettes et classification C-moyenne floue. SETIT, pp. 27-31,2005.

[17] S. Mallat. Une exploration des signaux en ondelettes, les éditions de l'école polytechnique, ISBN : 2-7302-0733-3, 2000.

[19] A. Oukil. Analyse variographique, modélisation et synthèse de textures appliquées aux images numériques. Thèse Doctorat, USTHB, Alger, 2007.

[20] R. M. Haralick K. Shanmugamand I. Dinstein. Textural features for image classification. IEEE Transaction on System, Man and cybernetics. Vol. SMC-3, No.6, pp. 610-621. November1973.

[21] Z-E. Baarir et A. Ouafi. Etude de la Transformée en ondelettes dans La compression d'images fixes. Courrier du Savoir – N°05, pp. 69-74,2004.

[22] S. Oukali. Compression d'images par bandelettes : Application à des images de télédétection. Mémoire de Magister, UMMTO, 2011.

[23] G. Peyré. Géométrie multi-échelles pour les images et les textures. Thèse doctorat. Ecole Polytechnique, 2005.

[24] S. J. Andaloussi. Indexation de l'information médicale : Application à la recherche d'images et de vidéos par le contenu. Thèse doctorat, Université européenne de Bretagne, 2010.

[25] N. E. Huang, S. S. P. Shen: Hilbert Huang Transform and its applications. Interdisciplinary Mathematical Sciences, vol.5, ISBN 981-256-376-8, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998.

[26] B. M. Battista, C. Knapp, T. McGee and V. Goebel. Application of the empirical mode decomposition and Hilbert-Huang transform to seismic reflection data. Geophysics, Vol.72, N°2 P. H29–H37, 2007.

[27] S. Jai-Andaloussi, M. Lamard, G.Cazuguel, H.Tairi, M. Meknassi, B.Cochener and Ch.Roux. Recherche d'images médicales par leur contenu numérique : Utilisation de signatures construites à partir de la BEMD et la transformée de Hilbert. Manuscrit auteur, publié dans : Les Premières Journées Doctorales en Technologies de l'Information et de la Communication, Rabat, 2009.

[28] Peel, M. C., Amirthanathan, G. E., Pegram, G. G. S., McMahon, T. A. & Chiew. Issues with the application of empirical mode decomposition analysis. In Proc. MODSIM 2005 International Congress on Modeling and Simulation, Melbourne, Australia, 12–15 December, pp. 1681–1687, 2005.

[29] J.C. Nunes, Y. Bouaoune, E. Delechelle, O. Niangand Ph. Bunel. Image analysis by bidimensional empirical mode decomposition. Image and Vision Computing 21, Elsevier, pp.1019-1026, 2003.

[30] F. R. Kschischang. The Hilbert transform. Supplementary Notes for ECE 316, Communication Systems, University of Toronto, Department of Electrical and Computer Engineering, Oct. 2006.

[31] N. Huang and Nii O. Attoh-Okine. The Hilbert-Huang Transform in Engineering. CRC Press, ISBN: 10: 0-8493-3422-5, 2005.

[32] Mathias Johansson, "The Hilbert transform", Master thesis, Mathematics/Applied Mathematics, Vaxjo University, 1999.

[33] J. M. Rousset. Contribution à l'étude des écoulements générés par la houle au travers d'une paroi perforée. IXème Journées Nationales Génie Civil–Génie Côtier, Brest, septembre 2006.

[34] G. Rilling : Décompositions Modales Empiriques, Contributions à la théorie, l'algorithme et l'analyse de performances. Thèse doctorat, Université de Lyon, 2007.

[35] H. Sharabaty. Diagnostic de La Somnolence d'un Operateur: Analyse automatique de signaux physiologiques. Thèse doctorat, Université de Toulouse. 2007.

[36] H S. Diop. Modèles AM-FM et approche par équations aux dérivées partielles de la décomposition modale empirique pour l'analyse des signaux et des images. Thèse doctorat, université de Rennes1, 2009.

[37] J.C. Cexus. Analyse des signaux non-stationnaires par Transformation de Huang, Opérateur de Teager-Kaiser et Transformation de Huang-Teager (THT). Thèse Doctorat, Université de Rennes 1, 2005.

[38] G. Rilling, P. Flandrin. Sur la décomposition modale empirique. Colloque GRETSI-05 - Traitement du Signal et des Images, pp. 755-758, Louvain-la-Neuve (B), 2005

[39] A. Mosabber Uddin D.P. Mandic. Image fusion based on fast and adaptive bidimensional empirical mode decomposition. Information Fusion (FUSION), 13th Conference on. IEEE. pp.1-6, 2010

[40] J. C. Nunes, E.Delechelle. Empirical mode decomposition, applications on signal and image processing. Advances in Adaptive Data Analysis, Vol.1, N°.1, pp. 125–175, 2009.

[41] A. Linderhed. Image empirical mode decomposition: A new tool for image processing. Advances in Adaptive Data Analysis Vol. 1, N°. 2, pp. 265–294, 2009.

[42] S. Meignen. Différentes approches non linéaires multi-échelles pour l'analyse des signaux et des images. HDR, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2011.

[43] J.C. Nunes and S. Guyot, E. Deléchelle. Texture analysis based on local analysis of the Bidimensional Empirical Mode Decomposition. Machine Vision and Applications Vol. 16, pp. 177–188, 2005.

[44] A.Manzanera.Cours de morphologie mathématique, ENSTA/LEI.

[45] N.ARKOUB. Reconstruction de données manquantes dans une image. Memoire de Magister, Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou. 2012.

[46] D.Yongjun, W. Wei, Q. Chengchun, W. Zhong and D. Dejun. Boundary processing-technique in EMD method and Hilbert transform. Chinese Science Bulletin Vol. 46, No. 1, January 2001.

[47] Z.Wu and N. E. Huang.A Study of the Characteristics of White Noise Using the Empirical Mode Decomposition Method. Center for Ocean-Land-Atmosphere Studies 4041 Powder Mill Rd, Calverton, MD 20705. NASA Goddard Space Flight Center Greenbelt, January 2003.

[48] A. Linderhed. Variable sampling of the empirical mode decomposition of two-dimensional Signals. IJWMIP, pp.435-452, 2005.

[50] J.C. Nunes, O. Niang, Y. Bouaoune, E. Deléchelle, and Ph. Bunel. Décomposition Empirique Multimodale Bidimensionnelle Modifiée pour l'analyse d'images. GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images, 19° Colloque sur le traitement du signal et des images. pp. 100-103, 2003.

[51] M. Unser. Spline: A perfect fit for signal and image processing. IEEE Signal Processing Magazine, Vol.16, Issue: 6, pp. 22-38, November 1999.

[52] G. Rilling, P. Flandrin and P. Gonçalvès. On Empirical Mode Decomposition and its algorithms. IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing NSIP-03, Grado (I), 2003.

[53] A. Linderhed, "Adaptive image compression with wavelet packets and empirical mode decomposition", PhD thesis, Linköping University, Sweden, 2004.

[54] J.C. Nunes, Y. Bouaoune, E. Delechelle, O. Niang, Ph. Bunel. Image analysis by Bidimensional empirical mode decomposition. Image and Vision Computing, vol. 21, pp. 1019–1026, 2003.

[55] C. Damerval, S. Meignen, and V. Perrier. A Fast algorithm for bidimensional EMD. IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, N°. 10, Octobre, 2005.

[56] Z. Liu, H. Wang and S. Peng. Texture segmentation using directional empirical mode decomposition. IEEE International Conference on Image Processing,ICIP'04, vol.1, pp.279-282, 2004.

[57] A. Linderhed. Image compression based on empirical mode decomposition. Proc. of SSAB Symposium Image Analysis, Uppsala, pp. 110-113, 2004.

[58] O.Niang. Décomposition Modale Empirique, Contribution à la Modélisation Mathématique et Application en Traitement du Signal et de l'image. Thèse Doctorat, Université Paris Xii-Val de Marne, septembre 2007.

[59] S. M. A. Bhuiyan , R. R. Adhami and J. F. Khan. Fast and adaptive bidimensional empirical mode decomposition using order-statistics filter based envelope estimation. EURASIP J. Adv. Signal Process., vol : 3, pp.1 -18, 2008.

[60] A. Benkuider and A. Aarab. Content based image retrieval using the generalized gamma density to model BEMD's IMFs. Journal of Computers, Vol. 6, N°. 6, June 2011

[61] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. L. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N. C. Yen, C. C. Tung, and H. H. Liu. The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis. Proc. R. Soc. London A, vol. 454, pp.903 -995, 1998.

[62] P. Flandrin,G. Rilling and P. Gonçalvès. Empirical Mode Decomposition as a Filter Bank. IEEE Signal Processing Letters, vol.11 issue:2, pp.112-114, 2003.

[63] N. E. Huang, Z. Shen, and S. R. Long. A new view of nonlinear water waves: the Hilbert spectrum. Annu. Rev. Fluid Mech. Vol. 31, pp. 417-57, 1999.

[64] G.Rilling and P.Flandrin. One or Two Frequencies? The Empirical Mode Decomposition Answers. IEEE Trans, on signal processing, vol.56, issue: 1, pp.85-95, janvier 2008.

[65] A. Linderhed, "2D empirical mode decompositions in the spirit of image compression", Proc. SPIE Wavelet Independent Compon. Anal. Appl., vol. 4738, pp.1 -8, 2002.

[66] Z. Liu and S.Peng. Boundary Processing of Bidimensional EMD Using Texture Synthesis. IEE signal processing letters, vol. 12, N°. 1, January 2005.

[67] P. Costa, J. Barroso, H.Fernandes and L. J Hadjileontiadis.Using Peano-Hilbert space filling curves for fast bidimensional ensemble EMD realization. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing a Springer Open Jornal, 2012.

[68] Z. WU and N E. HUANG. Ensemble Empirical Mode Decomposition. A Noise-Assisted Data Analysis Method. Advances in Adaptive Data Analysis Vol. 1, N°.1,pp. 1-41,2009.

[69] Z. Wu, N.E. Huang and X. Chen.The Multi-Dimensional Ensemble Empirical Mode Decomposition Method.Advances in Adaptive Data Analysis Vol. 1, N°3,pp. 339-372, 2009.

[70] T. A Teo and C. C. Lau. Pyramid-based image empirical mode decomposition for the fusion of multispectral and panchromatic images. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2012.

[71] A. Sabri, M. Karoud, H. Tairi, and A. Aarab. Fast Bidimensional Empirical Mode Decomposition Based on an Adaptive Block Partitioning. International Journal of Computer Science and Network Security(IJCSNS), vol.8 N°.11, November 2008.

[72] J. Harikiran, D. RamaKrishna, M.L.Phanendra, P.V.Lakshmi, and R. K. Kumar. Fuzzy C-means with Bi-dimensional Empirical Mode Decomposition for Segmentation of Microarray Image.International Journal of Computer Science Issues (IJCSI), Vol. 9, Issue 5, N° 3, September 2012.

[73] X. Guanlei, W. Xiaotong and X. Xiaogang. Neighborhood Limited Empirical Mode Decomposition and Application in Image Processing. Fourth International Conference on Image and Graphics IEEE, 2007.

[74] L. Liang,J.Puand Z.Ping. Texture Segmentation Using Window Empirical Mode Decomposition. Proceeding of the IEEE International Conference on Automation and Logistics Zhengzhou, China, August 2012.

[75] Chen Shao-hui, Su Hongbo, Zhang Renhua, Tian Jing. "Fusing remote sensing images using à trous wavelet transform and empirical mode decomposition". Pattern Recognition Letters 29,pp. 330-342, 2008.

[76] H. Li, S. Xu, L. Li: Dim target detection and tracking based on empirical mode decomposition. Signal Processing, Image Communication N°23 pp. 788–797, 2008.

[77] Z. Yang and L. Yang: A new two-dimensional empirical mode decomposition based on classical empirical mode decomposition and radon transform. Proceedings of the International Multi Conference of Engineers and Computer Scientists, Vol. I, IMECS, Hong Kong, March 2009

[78] X. Guanlei, W. Xiaotong and X. Xiaogang. Improved bi-dimensional EMD and Hilbert spectrum for the analysis of textures. Pattern recognition, vol. 42, pp.718-734, 2009

[79] M. Karoud, M. A. Sabri, S, J. Andalousi, H. Tairi and A Arab. Block image analysis using empirical mode decomposition. Journal WSEAS Trans. On computers. Vol. 5, Issue 12, pp. 2903-2911, 2003

[80] D. Zhang. Image analysis based on the local features of 2D intrinsic mode functions. Post Graduate Resarch Symposium, Department of Computer Science, Hong Kong Baptist University, Sept. 2009.

[81] L. Lin, Y. Wang and H. Zhau. Iterative filtringe as an alternative for empirical mode decomposition. Advances in Adaptive data Analysis. Vol. 1, n° 4, pp. 543-560, 2009

[82] J. V. Lorenzo-Ginori. An Approach to the 2D Hilbert Transform for Image Processing Applications.M. Kamel and A. Campilho (Eds.): ICIAR 2007, LNCS 4633, pp. 157–165, 2007.

Annexes

Spline Cubique

En introduisant les fonctions splines dans les années 40, Schoenberg apporta plus de souplesse dans l'approximation polynomiale. Il permit de diminuer le degré du polynôme approchant une fonction à interpoler en considérant des fonctions polynomiales par morceaux appelées splines. Nous envisageons ici le cas des splines cubiques.

Soit $(x_0,\ldots,x_n)$, $n+1$ nœud distinct de l'intervalle $[a,b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ .On note $f_i = f(x_i) = y_i$. Sur chaque intervalle élémentaire $[x_i, x_{i+1}]$, on cherche un polynôme p_i vérifiant les conditions d'interpolation $p_i(x_i) = f_i = y_i$

La forme générale de l'interpolation par des splines cubiques s'écrit :

$$S(x) = \begin{cases} p_0(x) & si \quad x_0 \le x < x_1 \\ p_1(x) & si \quad x_1 \le x < x_2 \\ \vdots & \quad\quad \vdots \\ p_{n-1}(x) & si \quad x_{n-1} \le x < x_n \end{cases}$$

Où $p_i(x)$ est un polynôme de degré inferieur ou égale à 3 tel que:

$$p_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_{i.} \quad i = 0,\ldots,n-1. \qquad \text{(A.1)}$$

Les dérivées premières et secondes de ces n équations s'écrivent de la manière suivant, pour $i = 0,\ldots,n-1$:

$$p_i'(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i. \qquad \text{(A.2)}$$

$$p_i''(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i \qquad \text{(A.3)}$$

La fonction interpolatrice $S(x)$ est constituée de morceaux de polynôme de degré 3 qui se raccordent, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, aux points connus. $S(x)$ respecte alors les propriétés suivantes :

- $S(x)$ doit passer par tous les points connus : $S(x_i) = y_i$ (A.4)

- $S(x)$ doit être continue sur l'intervalle $[x_0, x_n]$: $p_i(x_i) = p_{i-1}(x_i)$ (A.5)

  $S'(x)$ doit être continue sur l'intervalle $[x_0, x_n]$: $p_i'(x_i) = p_{i-1}'(x_i)$ (A.6)

- $S''(x)$ doit être continue sur l'intervalle $[x_0, x_n]$: $p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i)$ (A.7)

Le problème consiste alors à déterminer les coefficients $(a_i, b_i, c_i, d_{i.})$ du polynôme $p_i(x)$. $x_i = [x_i, x_{i+1}]$ donc $S(x_i) = p_i(x_i)$.

D'après les équations (A.1) et (A.4), on a pour $i = 0, \ldots, n-1$:

$$y_i = d_i \tag{A.8}$$

Sachant que $y_i = d_{i.} = p_i(x_i)$ et en combinant les équations (A.1) et (A.5), on obtient pour $i = 0, \ldots, n-1$:

$$d_i = a_{i-1}h^3 + b_{i-1}h^2 + c_{i-1}h + d_{i-1} \qquad \text{avec} \quad h = (x_i - x_{i-1}) \tag{A.9}$$

D'après les équations (A.2) où $p_i'(x_i) = c_i$ et (A.6), on a :

$$c_i = 3a_{i-1}h^2 + 2b_{i-1}h + c_{i-1} \tag{A.10}$$

De même, d'après les équations (A.3) où $p_i''(x_i) = 2b_i$ et (A.7), on a :

$$2b_{i+1} = 6a_i h + 2b_i \tag{A.11}$$

Les expressions précédentes peuvent être simplifiées en posant $M_i = p_i''(x_i)$:

$$d_i = y_i \text{ et } b_i = \frac{M_i}{2}$$

Les coefficients a_i et c_i sont calculés à partir des équations (A.9) et (A. 11) respectivement, ce qui donne après simplification :

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{M_{i+1} - M_i}{6h} \\ b_i &= \frac{M_i}{2} \\ c_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - (\frac{M_{i+1} + 2M_i}{6})h \\ d_i &= y_i \end{aligned} \tag{A.12}$$

En remplaçant ces coefficients dans l'équation (A.10), on déduit une équation plus générale

$$M_i + 4M_{i+1} + M_{i+2} = 6(\frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^2}) \tag{A.13}$$

Cette équation peut s'écrire sous une forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & & . & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ . \\ . \\ M_{n-4} \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_0 - 2y_1 + y_2 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ . \\ . \\ y_{n-5} - 2y_{n-4} + y_{n-3} \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{(A.14)}$$

Ce système comporte (n-1) lignes et (n+1) colonnes, il est par conséquent sous dimensionné. Pour générer une unique solution, l'ajout de deux conditions aux limites est nécessaire.

On suppose que les dérivées secondes sont nulles aux extrémités en x_0 et x_n ($M_o = M_n = 0$). Une matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ est ainsi obtenue.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & & . & . & . & . \\ 0. & 0 & 0 & . & . & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ . \\ . \\ M_{n-4} \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_0 - 2y_1 + y_2 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ . \\ . \\ y_{n-5} - 2y_{n-4} + y_{n-3} \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{(A.15)}$$

La résolution de ce système permet de déterminer les valeurs des Mi pour en déduire ensuite les valeurs des coefficients $(a_i, b_i, c_i, d_{i.})$ recherchés.

Quelques propriétés de base de la TH [30]

- **Linéarité :** la TH est linéaire, c.à.d. si $a_1\ et\ a_2$ sont des scalaires arbitraires (complexes) et $x_1(t)\ et\ x_2(t)$ sont des signaux alors [34]:

$$\mathcal{TH}[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1\mathcal{TH}[x_1(t)] + a_2\mathcal{TH}[x_2(t)] \quad (B.1)$$

- **Signal constant**

La TH d'un signal constant $x(t) = c$ est $\mathcal{TH}[x(t)] = \mathcal{TH}[c] = 0$ $(B.2)$

De la propriété précédente découle :

$$\mathcal{TH}[x(t) + c] = \mathcal{TH}[x(t)] + \mathcal{TH}[c] = \mathcal{TH}[x(t)] \quad (B.3)$$

- **Décalage et Dilatation**

Si $\mathcal{TH}[x(t)] = \hat{x}(t)$ alors $x(t - t_0)$ a aussi une TH qui est $\hat{x}(t - t_0)$ et la TH du signal $x(at)\ \ est\ \ \mathcal{TH}[x(at)] = sgn(a) \times \mathcal{H}[x(t)]\ \ \ avec\ \ \ a \neq 0.$ (B.4)

- **Convolution**

La TH d'un produit de convolution de deux signaux $x_1(t) et\ x_2(t)$ est

$$\mathcal{TH}[x_1(t) * x_2(t)] = \mathcal{TH}[x_1(t)] * x_2(t) = x_1(t) * \mathcal{TH} \quad (B.5)$$

Cette propriété peut être démontrée à partir des propriétés associativité et commutativité de la convolution.

$$[x_1(t) * x_2(t)] * \frac{1}{\pi t} = \left[x_1(t) * \frac{1}{\pi t}\right] * \ x_2(t) = x_1(t) * \left[x_2(t) * \frac{1}{\pi t}\right] \quad (B.6)$$

- **la TH de la dérivée d'un signal**

La TH de la dérivée d'un signal est la dérivée de la TH du signal

$$\mathcal{TH}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = \frac{d}{dt}\mathcal{TH}[x(t)] = \frac{d}{dt}[\hat{x}(t)] \quad (B.7)$$

- **Energie**

L'énergie d'un signal $x(t)$ est étroitement liée à l'énergie de sa transformée de Fourier $X(f)$ [37].

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad \ avec\ x \in L^2(\mathcal{R}) \quad (B.8)$$

Ce qui signifie que E_x est finie.

Le même théorème est utilisé pour définir l'énergie de la TH.

$$E_{\hat{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |-sgn(f)X(f)|^2 df \quad \text{(B. 9)}$$

Ici $|sgn(f)|^2$=1 excepté pour $f = 0$. Mais, $X(f)$ ne contient aucune impulsion à l'origine

Nous obtenons $E_{\hat{x}} = E_x$.

Le tableau (B.1) ci-dessous donne quelques exemples de la transformée du Hilbert [43]**:**

Signal x(t)	**Transformée de Hilbert** $\mathcal{H}\{x(t)\}$
$sin(t)$	$-cos(t)$
$cos(t)$	$sin(t)$
$\frac{1}{t^2+1}$	$\frac{t}{t^2+1}$
Sinus cardinal : $\frac{\sin(t)}{t}$	$\frac{1-cos(t)}{t}$
Fonction porte :$\Pi(t)$	$\frac{1}{\pi} ln \left\|\frac{t+1/2}{t-1/2}\right\|$
Impulsion de Dirac : $\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$

Tableau (B.1) : La TH de quelques signaux