



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI OUZOU

FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

T H E S E D E D O C T O R A T

SPECIALITE : GENIE CIVIL

Option : Simulation numérique du déversement

Présenté par :

BOUDJEMIA Ahmed

THEME

**ETUDE ET SIMULATION NUMERIQUE (3-D) DES POUTRES
METALLIQUES A SECTIONS DISSYMETRIQUES SOUS L'ACTION
DU DEVERSEMENT**

Devant le jury composé de :

M. BOUAFIA Youcef	Professeur	(U.M.M.T.O)	Président
M. DAHMANI Lahlou	Professeur	(U.M.M.T.O)	Rapporteur
M. TAHAKOURT Abdelkader	Professeur	(U.A.M. Béjaia)	Examineur
M. KADRI Mohammed	Professeur	(U.M.B Boumerdes)	Examineur
M.ZERIZER Abdelatif	Professeur	(U.M.B Boumerdes)	Examineur
M. MEHADDENE Rachid	Professeur	(U.M.M.T.O)	Examineur

Remerciements

Cette étude a été effectuée sous la direction de M. DAHMANI Lahlou, Professeur à l'université Mouloud MAMMERI de Tizi Ouzou. Je lui suis reconnaissant et de façon particulière de m'avoir témoigné sa grande confiance et de m'encourager sans cesse à aller au bout de cette mission. Ses orientations ses conseils et son soutien continu furent très concluants.

Je remercie Mr SAAD Mohammed Maître de conférence A à l'université Mouloud MAMMERI de Tizi Ouzou (enseignant en retraite) pour ses encouragements continus à concrétiser ce travail.

J'exprime ici ma grande reconnaissance à Mr BOUAFIA Youcef, Professeur à l'université Mouloud MAMMERI de Tizi Ouzou et Doyen de la Faculté de Génie de la construction, pour l'honneur qu'il m'a fait de présider le jury de thèse.

Que messieurs les membres de jury trouvent ici mes plus vifs remerciements pour l'intérêt qu'ils ont exprimé pour examiner ce travail.

J'aimerais exprimer mes amitiés et remerciements à l'ensemble des collègues du département de génie civil et à tout le personnel de la Faculté de Génie de la construction.

Dédicaces

À la mémoire de mon père

à ma propre famille et à ma famille au sens large.

Résumé

Les profils à sections dissymétriques sont d'un usage courant dans la construction métallique. Le phénomène de torsion des poutres est profondément influencé par la forme de la section transversale. Dans le cas des profils minces à sections ouvertes, la torsion est non uniforme. Le gauchissement joue un rôle très important, il ne peut être négligé.

Les charges critiques de déversement des poutres à sections transversales dissymétriques sont déterminées par des méthodes analytiques et numériques.

La méthode analytique est obtenue à partir de la solution du système d'équations différentielles d'équilibre. Une formule générale sera proposée. La méthode numérique se base sur la méthode énergétique de Rayleigh-Ritz en tenant compte de la non linéarité matérielle et géométrique. Les charges critiques sont données pour différents chargements, en fonction du point d'application des charges transversales et de l'élancement de la poutre. Dans le but de la validation du modèle numérique, les résultats de simulation seront ensuite comparés aux résultats obtenus par la solution réglementaire (Eurocode 3).

Abstract

The unsymmetrical shaped sections are of current use in steel construction. The torsion phenomenon in beams is largely influenced by the shape of the cross section. In the case of thin-walled open cross sections, the torsion is not simply uniform, warping takes a large part in this torsion thus it should not be neglected.

The critical loads for lateral torsional buckling of beams with unsymmetrical cross sections are computed using analytical and numerical methods.

The analytical method is obtained from the resolution of the set of equilibrium equations. a general formula will be proposed. The numerical method is based upon the energy method of Rayleigh-Ritz which takes into account non linearities of the material as well as geometrical non linearity . The critical loads are then given for different loadings, depending upon the degree of dissymmetry, the position of the applied transverse load and the slenderness of the beam. [In aim to](#) validate the numerical model, the simulation results are then compared with the results obtained using calculations with Eurocode standards (Eurocode 3).

Mots-clés : Déversement; Stabilité latérale ; Gauchissement ; Poutre a section dissymétrique ; Modélisation ; Non linéarité géométrique ; Non linéarité matérielle.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS	I
DEDICACES	II
RESUME et ABSTRACT	III
TABLE DES MATIERES	IV
LISTE DES FIGURES.....	XI
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GENERALE	1
1.1. Introduction	1
1.2. Problématique et motivation	1
1.3. Objectif de la thèse et méthodologie	2
1.4. Organisation de la thèse	3
CHAPITRE 2 : ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LE COMPORTEMENT GENERAL DU MATERIAU ACIER	4
2.1. Introduction	4
2.2. Produits en acier	4
2.2.1. Formes de sections	5
2.2.2. Proportions géométriques.....	6
2.3. Caractéristiques de l'acier	6
2.3.1. Résistance à la traction.....	7
2.3.2. Résistance à la compression.....	8
2.3.3. Essai de résistance au choc par flexion ou essai de résilience	8
2.3.4. Essais de dureté	9
2.3.5. Conclusion.....	9
CHAPITRE 3 : ASPECT THEORIQUE	10
3.1. Introduction	10

3.2. Types de poutres	11
3.3. Dimensionnement des poutres soumises à la flexion simple	11
3.4. Dimensionnement des poutres à l'effort tranchant	14
3.5. Flèche	16
3.6. Flexion de sections non symétriques	16
3.7. Flexion biaxiale	17
3.8. Flexion et torsion.....	17
3.9. Comportement en flexion des poutres en acier	18
3.9.1. Poutres isostatiques	18
3.9.2. Poutres hyperstatiques.....	22
3.10. Flexion des sections en I	23
3.10.1. Flexion des sections mono-symétriques.....	24
3.10.2. Effet de l'effort tranchant.....	25
3.11. Comportement plastique sous sollicitations combinées	26
3.12. Aspect théorique des phénomènes d'instabilités.....	27
3.12.1. Introduction.....	27
3.12.2. Voilement local	27
3.12.2.1. Exemple d'application	32
3.12.2.2. Conclusion récapitulative	33
3.12.3. Flambement des poteaux par flexion	34
3.12.4. Déversement.....	36
3.12.4.1. Introduction	36
3.12.4.2. Notions sur la torsion	37
3.12.4.3. Torsion uniforme.....	38
3.12.4.4. Torsion non uniforme.....	38

3.12.4.5. Comportement des poutres élancées soumises à des charges verticales	40
3.12.4.6. Modèle physique simple.....	42
3.12.4.7. Facteurs influençant le déversement	42
3.12.4.8. Rôle favorable du contreventement.....	43
3.12.4.9. Procédure de vérification	44
3.12.4.10. Déversement des poutres à sections doublement symétriques.....	46
3.12.4.11. Poutres à sections dissymétriques	48
3.12.4.12. Poutres à sections mono-symétriques par rapport à l'axe yy	50
3.13. Établissement des équations fondamentales	50
3.13.1. Déversement d'une poutre simple de section doublement symétrique sollicitée en flexion pure	50
3.13.2. Déversement d'une poutre soumise à une charge verticale concentrée appliquée à mi-portée	53
3.14. Conclusion	54
CHAPITRE 4 : ASPECT REGLEMENTAIRE.....	56
4.1. Introduction	56
4.2. Voilement local	56
4.2.1. Comportement des éléments plats comprimés	57
4.2.2. Exemple d'application	57
4.2.3. Conclusion.....	64
4.3. Flambement.....	64
4.3.1. Introduction	65
4.3.2. Contrainte critique d'Euler.....	65
4.3.3. Les courbes Européennes de flambement	68
4.3.4. Calcul du coefficient de réduction χ	68
4.3.5. Détermination pratique de la longueur de flambement.....	70
4.3.6. Critères de dimensionnement	71
4.3.7. Vérification de la section à la résistance	71

4.3.8. Vérification de l'élément au flambement	71
4.3.9. Calcul du coefficient de réduction pour le flambement χ	72
4.3.9.1. Calcul à l'aide des tableaux	72
4.3.9.2. Calcul Analytique du coefficient de réduction χ	73
4.3.10. Exemples d'applications	73
4.3.10.1. Exemple n°1	73
4.3.10.2. Exemple n°2	75
4.3.10.3. Exemple n°3	78
4.3.11. Conclusions	80
4.4. Déversement.....	80
4.4.1. Introduction	80
4.4.2. Evaluation du moment critique du déversement élastique.....	81
4.4.3. Méthode de l'Eurocode3	84
4.4.4. Exemple d'application	86
4.4.5. Conclusion.....	90
 CHAPITRE 5 : APPLICATION NUMERIQUES - CALCUL REGLEMENTAIRE.....	91
5.1. Introduction	91
5.2. Poutres symétriques.....	91
5.2.1. Poutre simplement appuyée	91
5.2.2. Poutre encastrée.....	92
5.3. Poutre dissymétrique	94
5.3.1. Poutre encastrée (UAP 300).....	94
5.4. Conclusion.....	96
 CHAPITRE 6: CRITERES GENERAUX DE LA STABILITE ELASTIQUE	97
6.1. Introduction	97
6.2. Généralités.....	97
6.3. Principe du travail virtuel.....	100
6.4. Principe de l'énergie potentielle totale stationnaire.....	101
6.5. Stabilité de l'équilibre.....	103

6.6. Equilibre neutre - chargement critique	105
6.7. Illustration sur des exemples de base	108
6.7.1. Exemple 1.....	108
6.7.2. Exemple 2.....	109
6.8. Méthodes générales de détermination des charges critiques.....	113
6.8.1. Introduction	113
6.8.2. Application des méthodes énergétiques générales aux systèmes élastiques	114
6.8.3. Coefficient de Rayleigh.....	115
6.8.4. Méthode de Rayleigh-Ritz	117
6.8.5. Méthode de Galerkin	118
6.8.6. Méthode de numérique	120
6.8.6.1. Méthode des différences finies d'Euler	120
6.8.6.2. Méthode des éléments finis	120
6.8.7. Quelques énergies de déformation typiques.....	120
6.8.7.1. Eléments barres	121
6.8.7.2. Plaques minces	122
6.8.8. Exemple faisant appel aux différentes méthodes	122
6.8.8.1. Méthode du coefficient de Rayleigh	123
6.8.8.2. Méthode de Rayleigh-Ritz	124
6.8.8.3. Méthode de Galerkin.....	127

6.9. Méthodes itératives de résolution des problèmes de stabilité	128
6.9.1. Introduction	128
6.9.2. Méthode de Viganello	129
6.9.3. Examen de la méthode de Newark	130
6.9.3.1. Conventions de signe	131
6.9.3.2. Concepts	131
6.9.4. Méthode de Viganello-Newark	133
6.9.5. Configurations d'équilibre	134
6.10 Conclusion.....	135
 CHAPITRE 7 : Modélisation par éléments finis des phénomènes d'instabilités	137
7.1. Revue de l'analyse du déversement par la méthode des éléments finis	137
7.1.1. Généralités	137
7.1.2. Modèle d'Ingénierie.....	137
7.1.3. Modèle d'analyse par éléments finis.....	137
7.1.4. Procédure de Solution	138
7.1.5. La méthode des valeurs propres	138
7.1.5.1. Créer le modèle d'analyse.....	138
7.1.5.2. Obtenir la solution statique	138
7.2. Poutres à sections symétriques (IPE)	139
7.2.1. Poutre simplement appuyée	139
7.2.2. Poutre console	142
7.2.3. Validation	144
7.2.4. Discussion des résultats.....	145

7.3. Poutres à sections dissymétriques (UAP).....	145
7.3.1. Poutre en UAP 300 encastrée.....	145
7.3.2. Poutre en UAP 300 simplement appuyée.....	148
7.3.3. Poutre en UAP 300 doublement encastrée.....	150
7.3.4. Comparaison des résultats de simulation avec les valeurs théoriques	153
7.3.5. Validation.....	153
7.4. Conclusion.....	154
CHAPITRE 8 : Discussion des résultats et conclusion générale.....	155
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	160

LISTE DES FIGURES**CHAPITRE2 :**

Fig.2.1 : Profils laminés à chaud et profils reconstitués soudés.....	5
Fig.2.2 : Profils et tôles formés à froid.....	6
Fig.2.3 : Eprouvettes d'acier normalisées	7
Fig.2.4 : Courbes de traction	7
Fig.2.5 : Caractéristiques de l'éprouvette pour l'essai de résilience	8
Fig.2.6 : Essai de Vickers.....	9

CHAPITRE3 :

Fig.3.1a : Types de poutres métalliques	11
Fig.3.1b : Distribution des contraintes longitudinales élastique	11
Fig.3.2 : Propriétés relatives des différentes sections fléchies autour de l'axe de symétrie	12
Fig.3.3 : Distribution des contraintes plastiques pour les sections doublement symétriques ..	13
Fig.3.4 : Courbe charge/déplacement pour les poutres continues.....	15
Fig.3.5 : Distribution élastique des contraintes de cisaillements	14
Fig.3.6 : Flexion des poutres mono-symétriques	16
Fig.3.7 : Poutres travaillant à la flexion avec torsion.....	18
Fig.3.8 : Courbe charge/déflexion d'une poutre simplement appuyée.....	19
Fig.3.9 : Courbe idéalisée de contrainte déformation	19
Fig.3.10 : Courbe bilinéaire idéalisée de contrainte déformation	19
Fig.3.11 : Diagrammes des contraintes elasto-plastique d'une poutre en flexion.....	20
Fig.3.12 : Relation moment /courbure ($M-\phi$) d'une section rectangulaire en flexion.....	21
Fig.3.13 : Courbe charge-deplacement d'une poutre hyperstatique.....	22
Fig.3.14 : Section en I	23
Fig.3.15 : Moment de courbure ($M-\phi$)	23
Fig.3.16 : Plastification de la section mono symétrique en flexion	24
Fig.3.17 : Contrainte plastique de flexion et de cisaillement	26
Fig.3.18 : Courbes d'interaction (section en I).....	27
Fig.3.19 : Courbes d'interaction (section en L)	27
Fig.3.20 : Voilement de plaques.....	28
Fig.3.21 : Voilement de plaques d'éléments	29
Fig.3.22 : Représentation adimensionnelle de la contrainte de voilement.....	31
Fig.3.23 : Relation Flambement d'un poteau par flexion	33
Fig.3.24 : Modes de flambement.....	33
Fig.3.25 : Charge critique d'Euler N_{cr}	35
Fig.3.26 : Barres soumises à une torsion uniforme et non uniforme	36
Fig.3.27 : Décomposition des déformations et contraintes tangentiels correspondantes	37

LISTE DES FIGURES

Fig.3.28 : Déformations et contraintes résultant de la flexion des ailes	38
Fig.3.29 : Déversement d'une poutre console en I.....	40
Fig.3.30: Similarité entre flambement d'une colonne et Déversement d'une poutre.....	40
Fig.3.31: Analogie entre résistance des poteaux et résistance des poutres	41
Fig.3.33 : Approximation entre flambement d'un poteaux et déversement d'une poutre.....	42
Fig.3.34: Effet du moment non uniforme sur le déversement.....	42
Fig.3.35: Effet des appuis sur le déversement.....	43
Fig.3.36: Déversement d'une poutre contreventée.....	44
Fig.3.37: Comparaison des données expérimentales avec les valeurs théoriques	44
Fig.3.38: Sections à deux semelles égales et sections mono symétriques	45
Fig.3.39: Déversement d'une poutre de section symétrique sollicitée en flexion pure.....	46
Fig.3.40: Type de sections transversales mono-symétriques (par rapport à zz).....	48
Fig.3.41: Conditions d'appui et nature de charge	48
Fig.3.42: Type de sections transversales mono-symétriques par rapport à yy	49
Fig.3.43: Comparaison du moment critique élastique des sections en I et H	49

CHAPITRE4 :

Fig.4.1 : Voilement local d'un poteau	56
Fig.4.2: Parois internes et parois en saillie	56
Fig.4.3 : Modèle d'Euler	66
Fig.4.4 : Les modes de flambement	66
Fig.4.5: Courbe de flambement d'Euler	67
Fig.4.6 : Coefficient de réduction χ en fonction de l'élancement réduit $\bar{\lambda}$	68
Fig.4.7: Déversement des poutres	81
Fig.4.8: Schématisation d'une poutre déversée.....	82
Fig.4.9: Facteur de longueur effective k	83

CHAPITRE5 :

Fig.5.1 : Poutre simplement appuyée	91
Fig.5.2 : Poutre encastrée	92
Fig.5.3 : Poutre console	94

CHAPITRE6 :

Fig.6.1 : Coordonnées généralisées d'une poutre.....	98
Fig.6.2 : Poutre console	98
Fig.6.3 : Poteau doublement articulé.....	106
Fig.6.4 : Modèle idéalisé d'un poteau	106
Fig.6.5 : Déplacement latéral d'un poteau idéalisé	107
Fig.6.6 : Système à barres et ressorts	109
Fig.6.7: Déplacement de la barre et ressorts	110

Fig.6.8: Exemple de stabilité du système de la figure 6.7	113
Fig.6.9: Configuration d'équilibre stable pour $P < P_{cr1}$	113
Fig.6.10: Configuration d'équilibre stable pour $P > P_{cr2}$	114
Fig.6.11: Modèle numérique	121
Fig.6.12: Poteau doublement articulé.....	123
Fig.6.13: Mode de flambement fondamental	123
Fig.6.14: Poteau doublement articulé.....	125
Fig.6.15: Modèle numérique pour une poutre simplement appuyée.....	132

CHAPITRE7 :

Poutre en IPE simplement appuyée :

Fig.7.1: Modèle par éléments finis et conditions aux limites.....	139
Fig.7.2: Premier mode de déversement	140
Fig.7.3: Deuxième mode de déversement	140
Fig.7.4: Troisième mode de déversement	141
Fig.7.5: Quatrième mode de déversement.....	141

Poutre en IPE en console:

Fig.7.6: Modèle par éléments finis et conditions aux limites.....	142
Fig.7.7: Premier mode de déversement	142
Fig.7.8: Deuxième mode de déversement	143
Fig.7.9: Troisième mode de déversement	143
Fig.7.10: Quatrième mode de déversement.....	144

Poutre en UAP 300 encastrée :

Fig.7.11: Modèle par éléments finis et conditions aux limites.....	145
Fig.7.12: Premier mode de déversement	146
Fig.7.13: Deuxième mode de déversement	146
Fig.7.14: Troisième mode de déversement	147
Fig.7.15: Quatrième mode de déversement.....	147

Poutre en UAP 300 simplement appuyée :

Fig.7.16: Modèle par éléments finis et conditions aux limites.....	148
Fig.7.17: Premier mode de déversement	148
Fig.7.18: Deuxième mode de déversement	149
Fig.7.19: Troisième mode de déversement	149
Fig.7.20: Quatrième mode de déversement.....	150

Poutre en UAP 300 doublement encastrée :

Fig.7.21: Modèle par éléments finis et conditions aux limites.....	150
Fig.7.22: Premier mode de déversement	151
Fig.7.23: Deuxième mode de déversement	151
Fig.7.24: Troisième mode de déversement	152
Fig.7.25: Quatrième mode de déversement.....	152

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GENERALE

1.1 Introduction

Avec l'industrialisation au début du XIX^e siècle, qui a permis la fabrication de plaques laminées, suivi de l'utilisation du fer puis de l'acier, la construction métallique s'est dotée des moyens nécessaires pour fabriquer des poutres avec des sections optimisées pour la construction des bâtiments et des ponts. Ces sections peuvent avoir des formes standardisées comme les profilés laminés en I, L, tubulaires, et U largement utilisés dans le bâtiment, ou des formes sur mesures comme les profilés composés-soudés en caisson ou à âme pleine (en forme de I) plus adaptées pour les ponts.

En fonction des sollicitations dominantes dans un élément, l'ingénieur choisira une forme de section plutôt qu'une autre. Lorsqu'il s'agit d'un effort de flexion, les sections Ame-semelles (I ou H) sont particulièrement efficaces puisque qu'elles possèdent une grande inertie (selon l'axe fort) pour un minimum de matière. Cet avantage se fait au détriment d'une inertie moindre selon l'axe faible favorisant ainsi le phénomène d'instabilité en flexion de la poutre que l'on appelle déversement.

La position déformée générée par l'instabilité se caractérise par un mouvement de la partie comprimée qui entraîne toute la section. Pour cette raison, le déversement est également appelé flambement latéral en flexion notamment pour les profilés de grande hauteur.

1.2 Problématique et motivation

Les profils à sections dissymétriques sont d'un usage courant dans la construction métallique. Le phénomène de torsion des poutres est profondément influencé par la forme de la section transversale. Dans le cas des profils minces à sections ouvertes, la torsion est non uniforme. Le gauchissement joue un rôle très important, il ne peut être négligé.

Les charges critiques de déversement des poutres à sections transversales dissymétriques sont déterminées par des méthodes analytiques et numériques

La méthode analytique est obtenue à partir de la solution du système d'équations différentielles d'équilibre. Une formule générale sera proposée. La méthode numérique se base sur la méthode énergétique de Rayleigh-Ritz en tenant compte de la non linéarité matérielle et géométrique. Les charges critiques sont données pour différents chargements, en fonction du point d'application des charges transversales et de l'élancement de la poutre. Dans le but de validation du modèle numérique les résultats de simulation seront comparés aux résultats obtenus par la solution réglementaire (Eurocode 3) [6].

Le premier élément moteur de cette recherche découle des normes de construction métallique européennes (Eurocodes) pour lesquelles la vérification du déversement s'effectue en se basant sur les courbes de flambement. Ces courbes représentent le facteur de réduction noté: χ (**Qui**), à appliquer sur la capacité de résistance en section en fonction de l'élancement réduit $\bar{\lambda}$ (**Lamda barre**) qui tient compte d'un ensemble de caractéristiques de l'élément à vérifier.

Le deuxième élément moteur provient des origines des courbes de flambement [1], [6], [7], [8]. Celles-ci sont semi-empiriques et contiennent par conséquent deux origines.

Une origine expérimentale qui repose sur une vaste campagne d'essais de profilés laminés et quelques profilés composés-soudés dont les géométries correspondent à celles utilisées dans le bâtiment. Une origine théorique basée sur des considérations analytiques et des simulations numériques effectuées sur des profilés de type bâtiment. Par conséquent, il a été constaté au travers de l'examen de la littérature que peu d'études expérimentales et théoriques traitent le cas des poutres métalliques de sections dissymétriques.

Finalement, en comparaison avec les poutres de bâtiments, les poutres de sections dissymétriques ont des particularités qui forment un ensemble de paramètres susceptibles d'influencer, avec plus ou moins d'importance, la résistance au déversement. Ces paramètres constitueront les thèmes principaux d'investigations de la présente recherche et sont synthétisés dans les prochains chapitres.

1.3 Objectifs de la thèse et méthodologie

Le but principal de la présente thèse est de :

- Proposer une méthode de vérification au déversement adaptée pour les poutres dissymétriques compte tenu de leurs particularités.
- repartir sur la base des méthodes existantes et évaluer le degré de précision des normes par rapport aux résultats obtenus numériquement.
- Examinez le comportement des éléments en structure métallique vis-à-vis du phénomène du déversement en tenant compte des différents paramètres intervenant et de la nature de la section transversale.
- Elaboration du modèle numérique du phénomène de déversement en tenant compte de la non linéarité géométrique et matérielle de l'élément en question.
- Étude paramétrique pour mesurer l'influence des différents paramètres intervenant dans la formulation analytique du problème.
- Calibration du modèle numérique avec le modèle analytique existant (cas de sections symétriques)
- Comparaison des résultats de calcul numérique avec les résultats obtenus par les règlements en vigueur.

Les conséquences d'une méthode de vérification mieux adaptée aux poutres dissymétriques dans le contexte actuel sont doubles :

- Possibilité de projeter des nouveaux ouvrages plus économiques tout en étant aussi sûre.
- Acquisition d'une meilleure connaissance en termes de résistance au déversement des ouvrages existants.

1.4 Organisation de la thèse

La thèse est organisée en huit chapitres énumérés comme suit :

Le chapitre 1 présente une introduction portant la problématique et les objectifs de la thèse.

Le chapitre 2 présente la revue de la littérature dans les différents domaines abordés par la thèse et qui sont :

- Les bases scientifiques et normatives en matière de déversement des poutres métalliques en général et des poutres métalliques dissymétriques en particulier.

Le chapitre 3 traite des différents modes d'instabilités des poutres métalliques.

Le chapitre 4 traite de l'étude du déversement des sections symétriques selon le règlement en vigueur. L'approche est essentiellement numérique et se base sur des géométries de poutres réelles pour évaluer l'influence des différents paramètres, le type de chargement et le système statique sur la résistance au déversement.

Le chapitre 5 traite de l'étude au déversement des sections dissymétriques avec l'introduction de nouvelles lois de comportement de ces sections vis-à-vis du phénomène du déversement. Applications numériques.

Le chapitre 6 présente les critères généraux de la stabilité élastique et se base sur le chapitre 3 pour proposer une méthode de vérification au déversement adaptée aux poutres métalliques de sections dissymétriques. Une application numérique permet d'apprécier les conséquences de la proposition sur le dimensionnement d'une poutre typique.

Le chapitre 7 présente la modélisation par éléments finis en (3-D) de quelques exemples de poutres symétriques et dissymétriques avec différentes conditions d'appuis.

Le chapitre 8 présente une synthèse des principales conclusions de la thèse, mentionne les contributions majeures de la présente recherche et évalue les besoins de recherches futures.

CHAPITRE 2 : Analyse bibliographique sur le comportement général du matériau acier

2.1. Fabrication et composition de l'acier :

L'acier est l'alliage le plus commun du fer (Fe) ; Il est obtenu lors d'un chauffage répété d'un bloc de fer pur « débarrassé de ces impuretés » suite à une association accidentelle d'une faible proportion de carbone (C) à ce fer, un carbone qui provient du charbon de chauffage.

Depuis sa création l'acier n'a pas cessé d'être amélioré dans ses propriétés mécaniques (à froid ou à chaud) ou chimiques (résistance à la corrosion) en jouant sur le (%) des éléments d'addition et impuretés des aciers à savoir le Carbone (**C**), le manganèse (**Mn**), le Chrome (**Cr**), Le Nickel (**Ni**), le Molybdène (**Mo**), le Cuivre (**Cu**), le silicium (**Si**) et l'aluminium (**Al**), le Soufre (**S**) et le Phosphore (**P**) ...etc. Il n'a aussi cessé d'être amélioré dans ses caractéristiques à partir des traitements thermomécaniques qui lui sont effectués. Actuellement on compte plus de 200 types d'acier.

Dans le processus de fabrication à partir d'un minerai, il est obtenu d'abord la fonte dont sa composition est essentiellement constitué de fer (Fe) en proportion majoritaire (94 à 96%), de carbone C (3 à 4%) et (1 à 2%) d'éléments non ferreux (soufre, silicium, phosphore, etc..). l'acier est obtenu ensuite par transformation de la fonte liquide dans une cornue géante en brulant par l'oxygène presque totalement tous ces éléments indésirables (carbone, soufre, silicium, phosphore, etc..).

Selon le pourcentage de carbone contenu dans l'acier, son utilisation industrielle est arrêté, on distingue alors :

- les aciers de construction métallique $0.05 \leq C\% \leq 0.30$
- les aciers de construction mécanique $0.30 \leq C\% \leq 0.60$
- les aciers d'outillage industriel $0.75 \leq C\% \leq 1.20$

Certains éléments d'addition tels que le chrome Cr, l'aluminium Al, Le soufre S, le molybdène Mo, le Vanadium V, lui confèrent certaines propriétés additionnelles telle que par exemple la propriété inoxydable de certains aciers.

2.2. Produits en acier :

Avec le développement de la construction métallique, les profils utilisés, peuvent être classés en trois principales catégories suivantes :

- Les profils laminés à chaud, apparus à la naissance de la construction métallique, constituent les gammes traditionnelles de profils. Ces profils sont généralement assemblés entre eux par soudage ou boulonnage pour constituer une ossature ou une structure. Ils constituent un rôle important dans la construction métallique compte tenu de leur grande capacité portante.
- Les profils reconstitués de plaques avec soudure, boulonnage ou rivetage, permettent d'obtenir de très grandes sections, avec des éléments pouvant résister à des efforts beaucoup plus importants.
- Les profils formés à froid par pliage ou profilage à partir de tôles: quoique récemment apparus, ils occupent une large place en construction métallique. Les formes abondantes et complexes des profils à parois minces leur permettent de participer à plusieurs états de sollicitations.

2.2.1. Formes de section :

La figure 2.1 montre les profils laminés à chaud et les profils reconstitués soudés les plus courants [6], [23], [41]. Plusieurs d'entre eux peuvent être classés comme éléments à parois minces, en fonction de l'élancement des parois et du type de sollicitation.

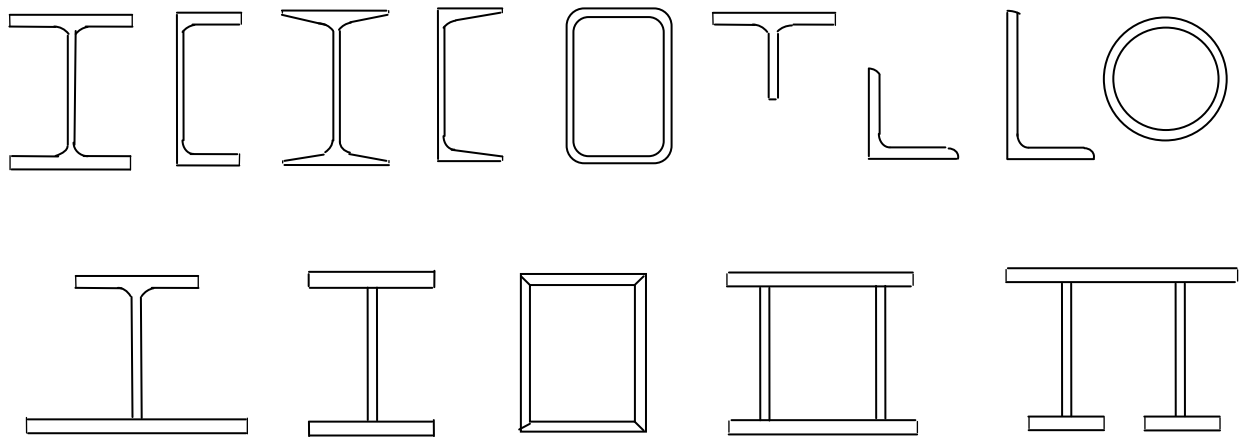
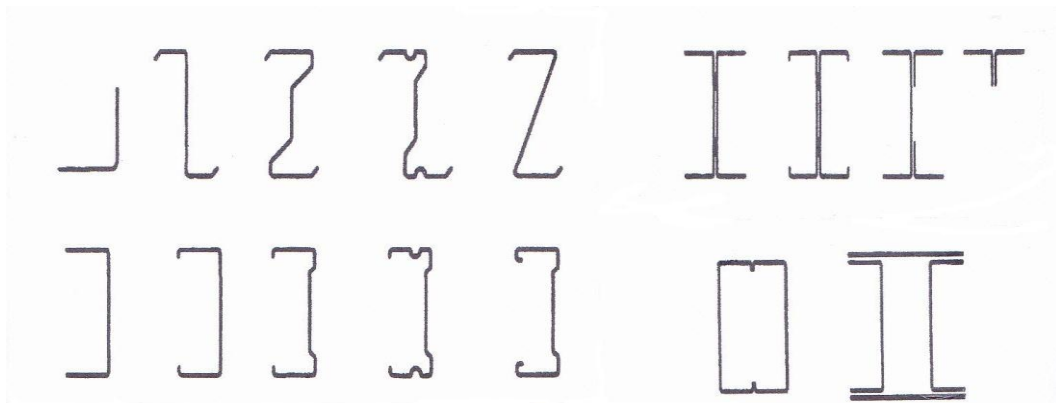
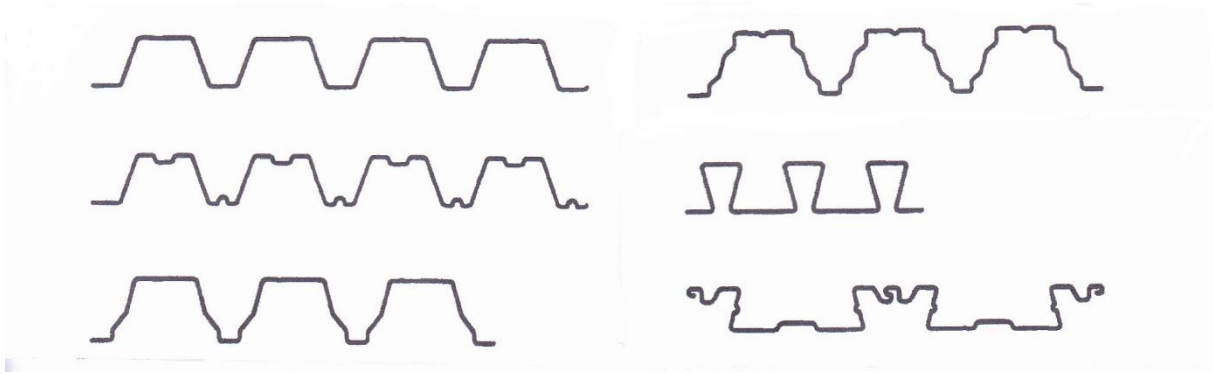


Fig.2.1 : Profils laminés à chaud et profils reconstitués soudés.

La figure 2.2 présente les profils et les tôles profilées à froid [42] avec comme tendance d'utiliser des sections de plus en plus hautement raidies.



a. Profils



b. Tôles

Fig.2.2 : Profils et tôles formés à froid.

Les règles de calcul limitent, en général, l'épaisseur t de la tôle de base des profils et tôles formés à froid en fonction du type d'élément.

$0.5 \leq t \leq 4$ mm, pour les tôles profilées à froid;

$1.0 \leq t \leq 8$ mm, pour les profils formés à froid.

2.2.2. Proportions géométriques

Soit t l'épaisseur des parois, b la largeur de la section et l la longueur d'un profil, selon beaucoup d'auteurs, lorsque les proportions satisfont les relations:

$$\frac{b}{t} \geq 10 ; \quad \frac{l}{b} \geq 10 \quad (2.1)$$

le profil considéré peut être classé comme barre à parois minces quelque soit la forme de sa section. Il est évident que ces limites inférieures couvrent de larges types de profils (formés à froid ou non). Cependant, il faut ajouter des limites supérieures pour les rapports largeur-épaisseur des parois minces afin d'empêcher des déformations exagérées de celles-ci. Ces limites supérieures sont toujours liées aux profils formés à froid. Elles sont données dans les divers codes et supposées représenter le champ pour lequel les expériences et les vérifications par tests sont suffisantes. Les règles de la partie 1.3, EUROCODE 3 [42] ne sont valables que si les limites suivantes sont respectées :

$$\frac{h}{t} < 500 ; \quad \frac{b}{t} \geq 60 ; \quad \frac{c}{t} < 50 \quad (2.2)$$

où h est la hauteur, b est la largeur de la section et c est la largeur du raidisseur.

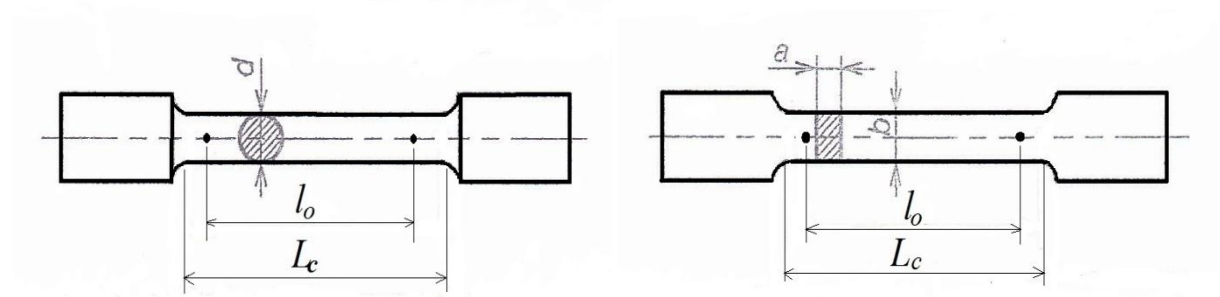
2.3. Caractéristiques de l'acier :

Les principales caractéristiques de l'acier utilisées dans les calculs de résistance sont celles à caractère mécanique ; on distingue essentiellement :

2.3.1. Résistance à la traction :

La résistance à la traction d'une barre d'acier est illustrée à travers un essai de traction enregistrant la variation de la déformation ε avec la variation de l'effort de traction (ou la contrainte de traction) allant de zéro jusqu'à l'effort de rupture (ou contrainte de rupture).

- La courbe de traction d'une éprouvette normalisée d'acier représentée sur la figure 2.3 ci-dessous, décrit plusieurs domaines, qui sont celui des déformations élastiques, celui de l'allongement réparti permanent et celui de la striction suivi de la rupture.



Eprouvette plate : $A_0 = a.b$ et $\frac{b}{a} < 8$

Eprouvette circulaire : $A_0 = \frac{\pi d^2}{4}$ avec $d > 4$

Une partie calibrée de longueur $l_0(mm)$ et de section $A_0(mm^2)$ est définie entre deux têtes d'amarrage : $l_0 = 5.65\sqrt{A_0}$ et $L_c \geq (l_0 + 1.5\sqrt{A_0})$

Fig. 2.3 : Epreuves d'acier normalisées.

Ces domaines sont représentés sur les courbes de la figure 2.4. Le tronçon OA de la courbe décrit le domaine élastique, le point A représente la limite d'élasticité à la traction notée (R_{eH} ou $R_{p,0.2}$) ou f_y . les déformations sont linéaires et réversibles suivant la loi de Hooke :

$$\sigma = \frac{P}{A_0} = E \cdot \frac{\Delta L}{L_0} = E \cdot \varepsilon$$

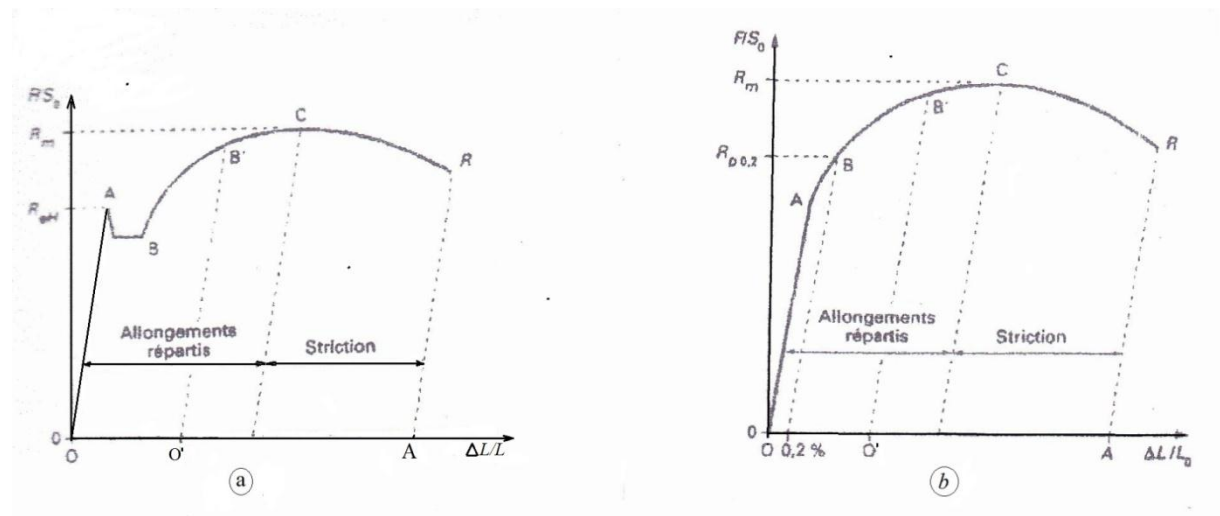


Fig.2.4 : courbes de traction.

Le domaine de l'allongement permanent réparti est décrit par le tronçon AC, à noter que lorsque la charge au point B' est supprimé le retour après déchargement se fait suivant le trajet B'O' (la pente de O'B' = La pente de OA). Si de nouveau on recharge la déformation est élastique mais suit le trajet O'B' ; il subsiste alors une déformation irréversible et permanente OO' qualifiée de « déformation plastique ».

- Le domaine de la striction suivi de la rupture est décrit par le tronçon CR où le point C représente la limite de résistance à la traction notée R_m ou f_u ; le métal continue de s'allonger avec une diminution de résistance.

L'essai de traction définit aussi une autre caractéristique fondamentale du matériau qui est la capacité de déformation plastique qui mesure l'aptitude du métal à subir des déformations

2.3.2. Résistance à la compression

Le comportement est quasiment symétrique de celui décrit pour la traction. Mais force est de reconnaître que la ruine par compression pure d'un élément métallique est peu susceptible de se rencontrer.

2.3.3. Essai de résistance au choc par flexion ou essai de résilience

Ces essais ont servi à l'étude du caractère fragile de certaines constructions soudées où l'acier pouvait être sensible à des ruptures brutales (ruptures fragiles). La caractéristique mesurée est la résilience qui mesure l'énergie absorbée par une éprouvette entaillée (ISO) à sa rupture ou bien, le rapport de l'énergie (en joules) absorbée par la rupture d'une éprouvette (ISO) à l'aire de sa section entaillée (en cm²), figure 2.5.

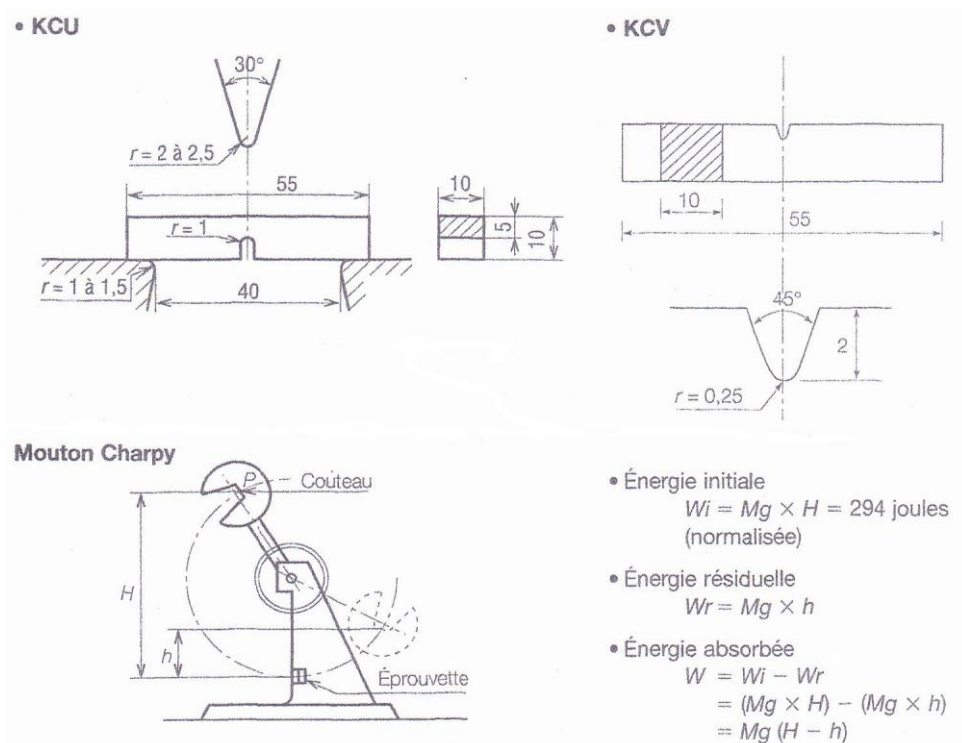


Fig.2.5 : Caractéristiques de l'éprouvette pour l'essai de résilience et sa position sur la machine appelée mouton de Charpy.

2.3.4. Essais de dureté :

Ces essais permettent de mesurer la résistance de l'acier à l'usure, il existe plusieurs types d'essais ; essai de Vickers, de Brinell, de Rockwell et l'essai par comparaison, on illustre ci-dessous le premier essai celui de Vickers.

Il consiste à imprimer dans la pièce un pénétrateur en forme de pyramide droite à base carrée et on mesure la diagonale " d " de l'empreinte comme sur la figure 2.6
La charge normale d'essai $F = 29.4 \text{ daN}$, appliquée pendant 10 à 15 secondes. D'autres charges à savoir : 4.9 9.8 – 19.6 – 49 – 78.4 et 98 daN peuvent être employées.
La dureté de Vickers est représentée par le nombre :

$$HV = \frac{F}{S} = \frac{2F \sin \frac{136^\circ}{2}}{d^2}$$

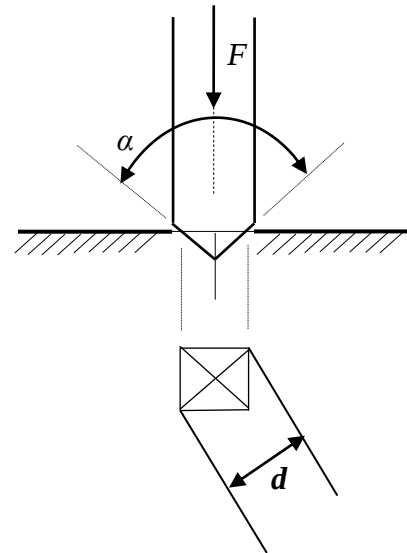


Fig. 2.6 : Essai de Vickers.

F désigne la charge d'essai (daN) et S la surface de l'empreinte (mm^2)

2.3.5. Conclusion :

- La plupart des propriétés des métaux dépendent de la structure cristallographique
- Les principales quantités définissant les propriétés mécaniques des métaux sous charges non répétitives sont :
 - le module de Young,
 - le coefficient de Poisson,
 - la limite d'élasticité ou limite conventionnelle pour les métaux ne présentant pas d'écoulement,
 - la résistance à la traction,
 - la dureté.
- Ces propriétés peuvent être influencées par :
 - la température,
 - la vitesse de déformation,
 - le caractère multiaxial des contraintes,
 - la géométrie.
- La combinaison optimale résistance-ténacité peut être obtenue en contrôlant :
 - la teneur en alliage,
 - le niveau d'impureté,
 - le traitement physique

CHAPITRE 3 : Aspect théorique

3.1. Introduction :

La poutre constitue l'élément structural de base de toute construction ; elle franchit la portée comprise entre ses deux appuis et transmet principalement par flexion les charges qui lui sont appliquées. Les poutres métalliques, que l'on peut réaliser à partir d'une grande diversité de formes et de sections structurales, peuvent souvent être dimensionnées en invoquant à peine plus que la théorie élémentaire de la flexion. Il est toutefois des situations où la poutre répond à sa mise en charge de manière plus complexe, avec pour résultat que d'autres modes de comportement doivent être examinés. La présente leçon est consacrée à l'étude des poutres, pour lesquelles la résistance des matériaux constitue la base de la méthode de dimensionnement. De telles poutres sont dites « poutres à section compacte tenues latéralement ». Pour appartenir à cette catégorie, une poutre ne peut présenter ni d'instabilité locale pour les poutres de Classe 4), ni d'instabilité spatiale par déversement. Une condition supplémentaire est que les poutres soient statiquement déterminées ou, si elles sont statiquement indéterminées, que la distribution des moments fléchissant ait été obtenue par une analyse élastique linéaire.

La première des conditions ci-dessus est satisfaite lorsque le rapport largeur/épaisseur de chacune des parois individuelles constituant la section transversale reste inférieur à une certaine valeur limite. Les sections pour lesquelles les rapports largeur/épaisseur de semelle, largeur/épaisseur d'âme... ont été limités de manière que leur plein moment de résistance plastique puisse être développé, appartiennent à la Classe 1 ou à la Classe 2, selon la terminologie utilisée dans l'Eurocode3[6]. La plupart des profilés laminés à chaud, en particulier les sections de type HE ou IPE répondent à cette exigence [23]. Il importe de se montrer prudent lorsqu'on a affaire à des sections reconstituées par soudage ; les règles correspondantes sont fournies dans les normes appropriées. La présente leçon postule que la section transversale de la poutre appartient à la Classe 2 ou à la Classe 3 et que, si elle satisfait les conditions de la Classe 1, l'analyse globale de la structure a été conduite selon une méthode élastique.

Le déversement est évité si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- l'élément est fléchi autour de son axe principal d'inertie faible ;
- la section est tenue latéralement de manière continue, par exemple en reliant la semelle supérieure d'une poutre sur appuis simples à une dalle en béton ;
- la poutre est munie d'entretoises discrètes, suffisamment rapprochées pour rendre suffisamment faible l'élancement d'axe faible (L/i_z) des divers tronçons de poutre ainsi définis ;
- la semelle comprimée est soumise à une restrainte torsionnelle appropriée, procurée par exemple par une couverture en tôle profilée ;
- la section transversale présente une grande raideur tant à la torsion qu'à la flexion transversale ; ainsi, les sections rectangulaires creuses fléchies autour de leur axe fort ne sont pas susceptibles d'atteindre la ruine par déversement.

Dans le cas particulier de poutres continues supportant une toiture ou un plancher, on devra assurer une stabilité spatiale adéquate dans les zones où la semelle inférieure est comprimée, à savoir : les régions voisines des appuis en cas de charges de gravité, celles voisines de la mi-portée des travées en cas de soulèvement dû au vent... Dans le cadre de la présente leçon, les poutres qui appartiennent à l'une quelconque des catégories ci-dessus sont dites « tenues latéralement ».

3.2. Types de poutres :

Plusieurs facteurs guident le choix du concepteur vers un type de poutre, en présence d'une situation donnée. Certains de ces facteurs peuvent par ailleurs avoir des effets contradictoires. De toute évidence, la poutre doit présenter une résistance adéquate tout en ne présentant pas une flèche excessive. Elle doit en outre pouvoir être reliée à des éléments adjacents de la structure. Ceci nécessite la réalisation, sur site, d'assemblages, dont la simplicité et la rapidité d'exécution sont des qualités essentielles ; on essayera dans la mesure du possible d'éviter l'intervention d'une main d'œuvre hautement qualifiée ou d'équipements trop spécialisés. Des préoccupations particulières, telles que le passage de gaines ou conduites sous le plancher d'un immeuble, peuvent requérir l'emploi de poutres à âme évidée, tandis que des considérations architecturales peuvent conduire à l'emploi d'éléments à profil variable. La Figure 3.1a présente les principaux types de poutres métalliques et fournit les domaines de portée pour lesquels chacun de ces types est le plus approprié ; il comporte en outre quelques indications d'ordre général.

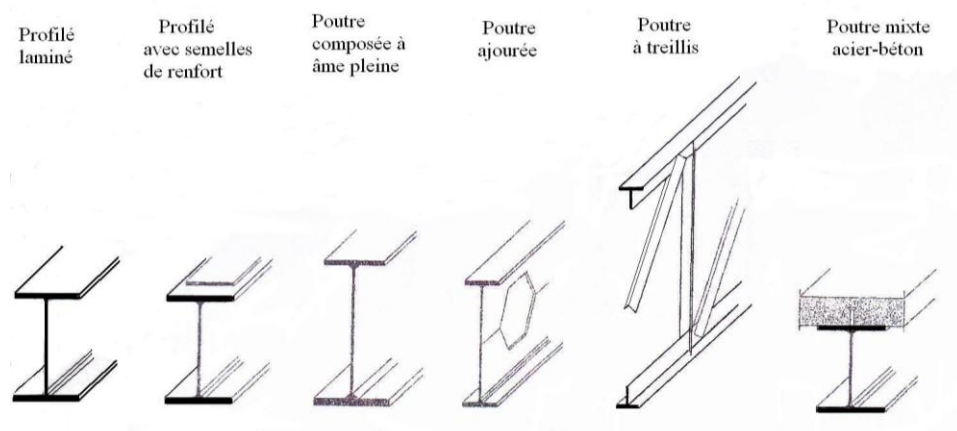


Figure 3.1a

3.3. Dimensionnement des poutres soumises à la flexion simple

La théorie élémentaire de la flexion élastique [34], [35] fournit la distribution des contraintes normales de flexion dans une section doublement symétrique ou dans une section simplement symétrique fléchie autour de l'axe de symétrie (figure 3.1b).

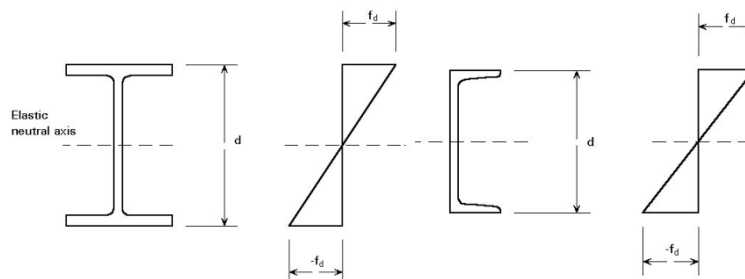


Fig.3.1b : Distribution des contraintes longitudinales élastiques.

La contrainte maximale σ_{max} est donnée par :

$$\sigma_{max} = M \frac{d/2}{I} \quad (3.1)$$

où :

M désigne le moment fléchissant dans la section transversale considérée ;

d la hauteur hors tout de la section ;

I le moment d'inertie pour la flexion autour de l'axe neutre (ligne de déformation axiale nulle).

En la limitant à une fraction de la limite d'élasticité du matériau, on obtient une condition de la forme :

$$W \geq \frac{M}{f_d} \quad (3.2)$$

où : $W = \frac{I}{d/2}$ et f_d la contrainte normale limite en flexion.

Lorsque M est considéré comme le moment fléchissant produit par les charges de service, cette méthode est dite « élastique » ou « aux contraintes admissibles » ; elle est encore en vigueur dans de nombreux codes. Selon la doctrine moderne des états limites, f_d est obtenu en divisant la limite d'élasticité nominale f_y du matériau par un coefficient approprié γ_M et M est le moment fléchissant produit par les charges pondérées, c'est-à-dire les charges de service majorées de façon adéquate pour assurer une marge de sécurité au calcul. L'équation (3.2), dans ce cas, correspond à la condition de première plastification. Les valeurs de W pour les profilés standardisés du commerce sont fournies dans les catalogues établis par les producteurs.

Le choix d'une section de poutre comporte donc :

- la détermination du moment fléchissant maximum sollicitant la poutre ;
- la détermination de la valeur appropriée f_d en accord avec le code en vigueur ;
- la sélection d'un profil de module de flexion W adéquat, eu égard à des considérations de poids minimum, de hauteur hors tout de la section, de rationalisation des dimensions de profils dans toute la structure...

Les sections pour lesquelles la plupart du matériau se trouve rejeté le plus loin possible de l'axe neutre sont de toute évidence les plus performantes en flexion élastique.

Section type	Rectangular	HE or UC (Typical)	IPE or UB (Typical)	RHS (Typical)
Section properties				
A: Area	1	1	1	1
W_y : Elastic section modulus	1	3,5	6,2	2,3
$W_{pl,y}$: Plastic section modulus	1,5	3,9	7,2	2,9

Fig.3.2 : Propriétés relatives des différentes sections fléchies autour de l'axe de symétrie.

La figure 3.2 fournit, à cet égard, diverses indications quantitatives pour quelques-unes des sections structurales les plus couramment utilisées. Les sections en double té servent fréquemment comme poutres en raison de leur efficacité structurale ; leur assemblage à des éléments structuraux adjacents s'effectue sans difficulté majeure en raison de leur section dite « ouverte ».

En exploitant la partie plastique de la relation contrainte-déformation de l'acier, on peut faire supporter, à une section donnée, des moments fléchissant dépassant celui pour lequel on développe la première plastification. Lorsque la section a atteint un état de plastification complète, la distribution des contraintes de flexion dans une section doublement symétrique devient celle illustrée à la figure 3.3.

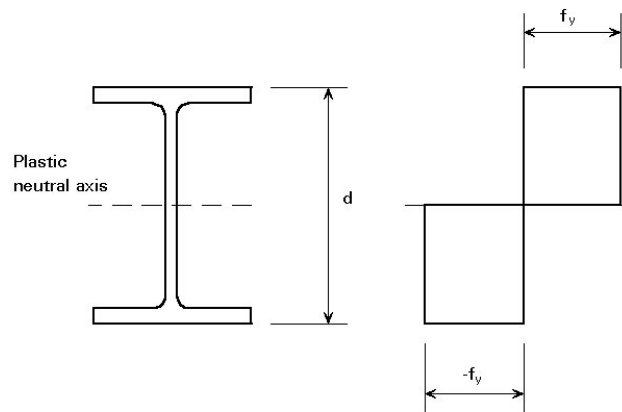


Fig.3.3 : Distribution des contraintes plastiques pour les sections doublement symétriques.

La moitié de la section y est plastifiée en compression tandis que l'autre moitié est plastifiée en traction. Le moment fléchissant correspondant est appelé le « plein moment plastique M_{pl} ». Sa valeur est obtenue en exprimant l'équilibre de rotation autour de l'axe neutre, ce qui donne :

$$M_{pl} = f_y W_{pl} \quad (3.3)$$

où : f_y est la limite d'élasticité du matériau (admise la même en traction et en compression) ;

W_{pl} est le module de flexion plastique.

Baser le dimensionnement sur l'équation (3.3) revient à exploiter la pleine résistance en flexion de la section transversale, ce qui conduit à :

$$W_{pl} \geq \frac{M}{f_{yd}} \quad (3.4)$$

où : M est le moment fléchissant dans la section considérée ;

f_{yd} est la résistance de calcul (limite d'élasticité du matériau divisée par un coefficient de pondération approprié).

Lorsque M résulte de l'action des charges pondérées, l'équation (3.4) traduit la condition de dimensionnement à la résistance ultime en flexion ; l'Eurocode3[6] s'y réfère pour les poutres

dont la section transversale rencontre au moins les exigences de la Classe 2. Dans les codes tels que l'Eurocode3[6], il est de pratique courante d'adopter pour f_{yd} une valeur légèrement minorée de la limite d'élasticité, de manière à se prémunir contre d'éventuelles variations de la valeur nominale.

Dans les structures statiquement indéterminées, l'atteinte de M_{pl} dans la section courante où le moment fléchissant atteint sa valeur maximale n'est nullement synonyme de ruine. Pour autant que rien ne précipite un déchargement de cette section - par exemple si un voilement local ne survient pas - la raideur rotationnelle locale y a virtuellement disparu et la section se comporte désormais à la manière d'une rotule. La distribution élastique des moments va progressivement s'altérer au fur et à mesure que, sous charges croissantes, des rotules plastiques vont successivement se former. Cette redistribution des moments va permettre à la structure de supporter des charges supérieures à celles associées à la formation de la première rotule plastique. La ruine est atteinte lorsque des rotules plastiques en nombre suffisant se sont formées, ce qui transforme la structure en un mécanisme plastique, tel celui indiqué à la figure 3.4.

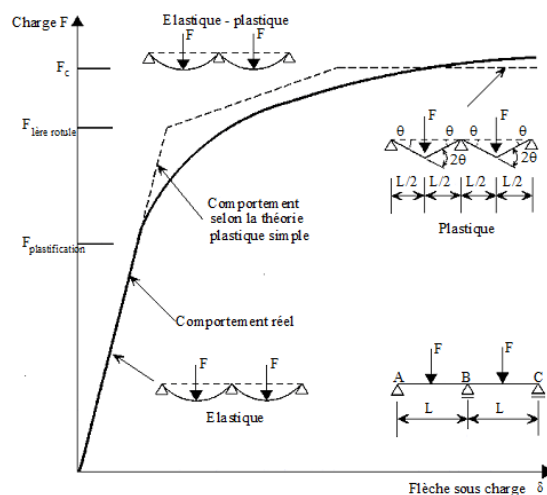


Fig.3.4 : Courbe charge - déplacement pour les poutres continues.

Exploiter la propriété de redistribution plastique revient à effectuer ce que l'on appelle une « analyse plastique » de la structure. Une telle analyse n'est possible que pour les structures statiquement indéterminées répondant en outre à certaines conditions quant à la géométrie des sections transversales, à l'élancement des éléments structuraux.

3.4. Dimensionnement des poutres à l'effort tranchant

Bien que la flexion gouverne le dimensionnement de la plupart des poutres, il est des cas où l'effort tranchant est tellement élevé qu'il devient le facteur déterminant. Cette situation se rencontre en particulier dans les poutres courtes soumises à des forces concentrées importantes.

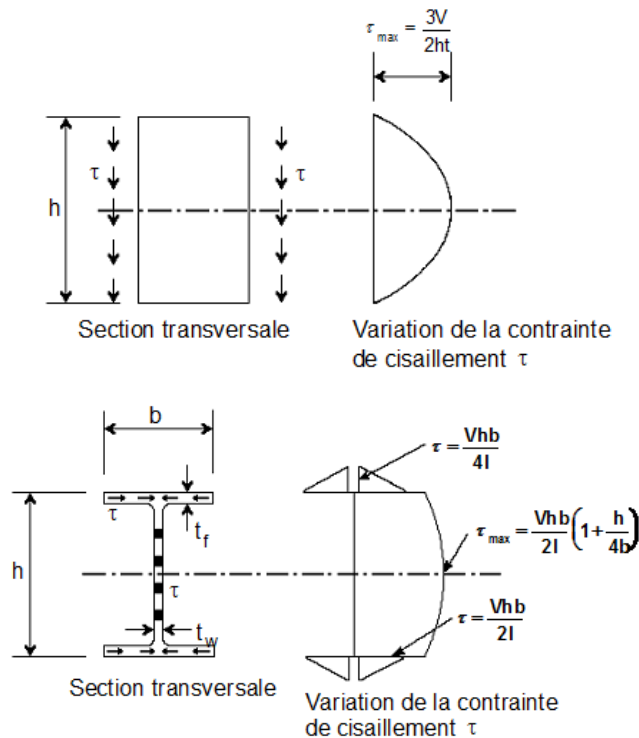


Fig.3.5 : Distribution élastique des contraintes de cisaillements.

La figure 3.5 montre la distribution élastique des contraintes de cisaillement obtenue dans une section rectangulaire et dans une section en double té. Dans les deux cas, la contrainte de cisaillement varie paraboliquement sur la hauteur ; elle atteint sa valeur maximale au droit de l'axe neutre. Toutefois, dans la section en double té, la différence entre les valeurs minimale et maximale de la contrainte de cisaillement dans l'âme - celle-ci supportant pratiquement l'entière de l'effort tranchant - est suffisamment faible pour que le dimensionnement puisse être simplifié et être fondé sur la contrainte moyenne de cisaillement ; celle-ci s'obtient en divisant l'effort tranchant par l'aire de la section transversale de l'âme. Puisque la limite d'élasticité en cisaillement de l'acier vaut sensiblement $1/\sqrt{3}$ de la limite d'élasticité en traction, on peut raisonnablement, en cas de calcul élastique, adopter une contrainte admissible en cisaillement, égale à $1/\sqrt{3}$ de la contrainte admissible en traction.

La contrainte ultime en cisaillement (basée sur les principes de la plasticité) selon l'Eurocode3[6] est $f_{yd}/\sqrt{3}$. Elle est utilisée conjointement à une section cisailée A_v , donnée par exemple comme suit :

- profil laminé en I, charge parallèle à l'âme : $A_v = A - 2b t_f + (t_w + 2r) t_f$
- plats et sections pleines : $A_v = A$
- sections circulaires creuses : $A_v = 2A/\pi$

Lorsque des valeurs élevées de l'effort tranchant et du moment fléchissant agissent concomitamment - par exemple aux appuis intérieurs d'une poutre continue -, il est parfois nécessaire de tenir compte de l'interaction des effets. Une telle interaction reste toutefois assez limitée. En effet, on peut observer que la pleine résistance à l'effort tranchant peut être développée en présence de moments fléchissant relativement importants et vice versa ; ainsi,

l'Eurocode 3[6] n'impose une réduction de la capacité portante en flexion que si l'effort tranchant dépasse 50 % de la résistance ultime à l'effort tranchant.

3.5. Flèche

Même si elles n'entraînent normalement pas de ruine structurale, des flèches excessives peuvent néanmoins affecter l'aptitude au service de la structure.

Elles sont par exemple susceptibles de produire :

- une fissuration des plafonds en plâtre,
- un défaut d'alignement des rails de pont-roulant,
- des difficultés d'ouverture des portes de grandes dimensions.

Puisque les flèches peuvent affecter l'aptitude au service des constructions, il est de règle de les évaluer sous charges de service. Dans l'Eurocode3[6], [20], [21] il est proposé de limiter au $1/300$ de la portée, la flèche maximale, sous charges de service, des poutres supportant des planchers. De telles limites doivent toutefois être comprises comme des valeurs recommandées ; des limites moins sévères ou plus draconiennes peuvent en effet être requises dans des situations spécifiques. Autant que possible, on s'entourera de l'avis de spécialistes ; par exemple, les fabricants de ponts roulants et portiques de levage doivent être à même de fournir des prescriptions détaillées en ce qui concerne les flèches admissibles pour les poutres de roulement.

3.6. Flexion de sections non symétriques

Dans une section ne présentant qu'un seul axe de symétrie et fléchié autour de l'axe perpendiculaire à ce dernier, la distribution des contraintes de flexion présente l'allure indiquée à la figure 3.6.

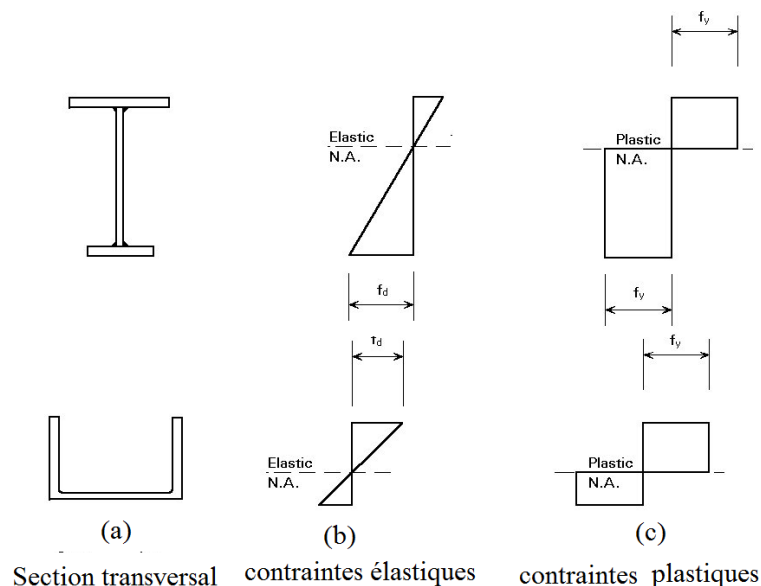


Fig.3.6 : Flexion des poutres mono-symétriques.

En raison du défaut de symétrie par rapport à l'axe neutre, les contraintes dans les semelles supérieure et inférieure ne sont pas égales. Ainsi, la contrainte dans la plus petite des semelles

d'une poutre en double té à semelles inégales sera supérieure à la contrainte existant dans la plus grande des semelles. C'est pourquoi il est nécessaire, dans un calcul élastique, de se référer au plus petit des deux modules de flexion élastique, W_{min} .

A l'état de plastification complète, la ligne de contrainte nulle doit diviser l'aire de la section transversale en deux parts égales, comme indiqué à la figure 3.6c.

En vertu de l'équation (3.3), le module de flexion plastique W_{pl} est défini comme le rapport M_{pl}/f_y ; la valeur de W_{pl} est donc univoque. Lorsqu'on exploite la résistance plastique de la section, la condition de dimensionnement reste donc donnée par l'équation (3.4).

3.7. Flexion bi-axiale

Lorsque les sections doublement ou simplement symétriques sont soumises à des moments fléchissant M_y et M_z agissant autour des axes principaux, on peut traiter ce cas comme la somme de deux problèmes de flexion mono-axiale. En calcul élastique, il est nécessaire de respecter la condition :

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq f_d \quad (3.6)$$

où: W_y et W_z sont les modules de flexion élastique de la section transversale pour la flexion autour des axes y et z respectivement

f_d est la contrainte normale limite en flexion.

Cette condition revient à limiter la contrainte maximum résultante dans la section à la valeur de calcul. Une attention particulière doit être portée aux sections telles que les cornières, pour lesquelles les axes principaux ne sont pas parallèles aux ailes de la cornière.

L'étude de la résistance plastique de la section transversale montre que la forme de l'interaction entre les moments dépend de la géométrie de la section. Il faut par ailleurs déterminer la position de l'axe neutre plastique. L'Eurocode3 indique diverses manières sécuritaires de tenir compte d'une telle interaction ; elles se présentent sous la forme :

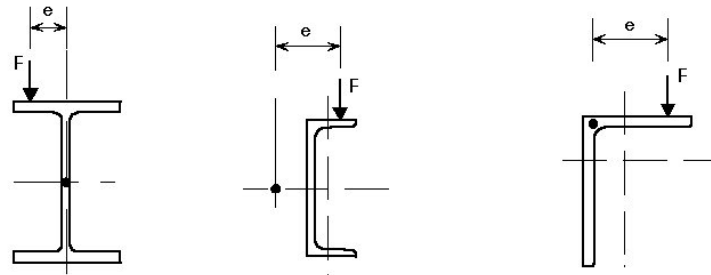
$$\left(\frac{M_y}{M_{ply}} \right)^\alpha + \left(\frac{M_z}{M_{plz}} \right)^\beta \leq 1 \quad (3.7)$$

où: $M_{pl,y}$ et $M_{pl,z}$ sont les résistances plastiques en flexion autour des axes y et z respectivement et les valeurs des exposants α et β dépendent du type de section considérée. Adopter $\alpha = \beta = 1$ place en sécurité.

3.8. Flexion et torsion

Les charges qui n'agissent pas au centre de cisaillement de la section (voir figure 3.7) entraînent de la torsion (rappelons que le centre de cisaillement coïncide avec le centre de gravité dans une section doublement symétrique et se situe sur l'axe de symétrie dans une section mono-symétrique). Cela a pour effet de faire naître des contraintes de cisaillement, dues à la torsion, et, dans le cas de sections ouvertes, d'importantes contraintes normales longitudinales additionnelles, en raison du phénomène structural appelé « gauchissement ». Un examen détaillé de cette

question complexe requerrait de se référer à la théorie de la torsion - en particulier de la torsion non uniforme ou torsion de gauchissement -. Dans de nombreux cas, les effets de la torsion peuvent être minimisés par une conception soignée des détails, visant à transmettre les charges dans les éléments structuraux avec des excentricités aussi faibles que possible.



- Position du centre de torsion

Fig.3.7 : Poutres travaillant à la flexion avec torsion.

3.9. Comportement en flexion des poutres en acier

Lorsqu'une poutre en acier à section compacte tenue latéralement est soumise à des charges croissantes produisant une flexion verticale, son comportement comporte plusieurs stades. Au début, elle se comporte de manière élastique et les flèches verticales croissent proportionnellement à l'intensité des charges appliquées. A un certain moment, les zones les plus sollicitées vont subir des déformations supérieures à la déformation limite élastique ; il en résulte une perte de raideur. Les flèches de la poutre dans son ensemble présentent dès lors un taux de croissance plus élevé. Tout accroissement ultérieur des charges alimente ce processus jusqu'à ce qu'une section atteigne un état de complète plastification. Pour une poutre simplement appuyée, cet état correspond à la capacité portante en l'absence d'écrouissage ; dès cet instant, les flèches deviennent très grandes. Pour les structures hyperstatiques, des accroissements ultérieurs des charges restent possibles en raison de la redistribution des moments.

L'objet de la présente partie est d'examiner le concept de plasticité à la lumière de son influence sur le dimensionnement des poutres et de montrer comment les principes développés ci-dessus peuvent être aménagés en conséquence.

3.9.1. Poutres isostatiques

La figure 3.8 montre la relation existant entre la charge appliquée et la flèche à mi-portée, relevée lors d'un essai de mise en charge de poutre en acier simplement appuyée de Classe 2 ou mieux. On distingue clairement trois stades de comportement :

- OA : élastique : la relation charge-flèche est linéaire,
- AB : élastique-plastique : le taux d'accroissement des flèches grandit,
- BC : plastique : les flèches deviennent particulièrement grandes sous charge sensiblement constante.

Les stades 2 et 3 comportent une progression de la plasticité dans les zones où les contraintes sont élevées ; aussi, une parfaite compréhension du comportement de la poutre est-elle subordonnée à celle du comportement du matériau.

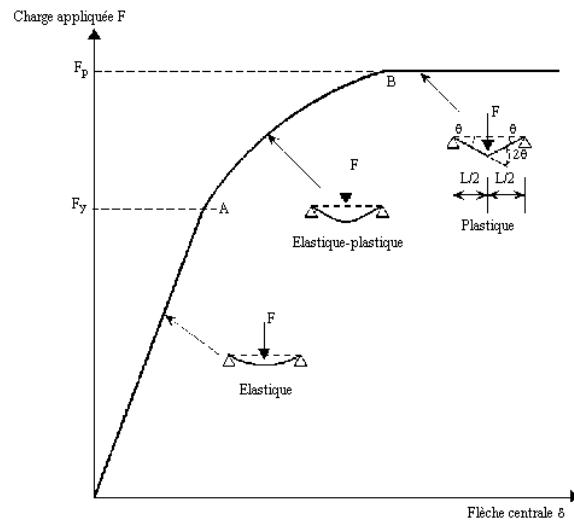


Fig.3.8 : Courbe charge/déflexion d'une poutre simplement appuyée.

La courbe contrainte-déformation de la figure 3.9 est représentative d'un essai de traction sur une éprouvette du matériau, appelé « coupon ».

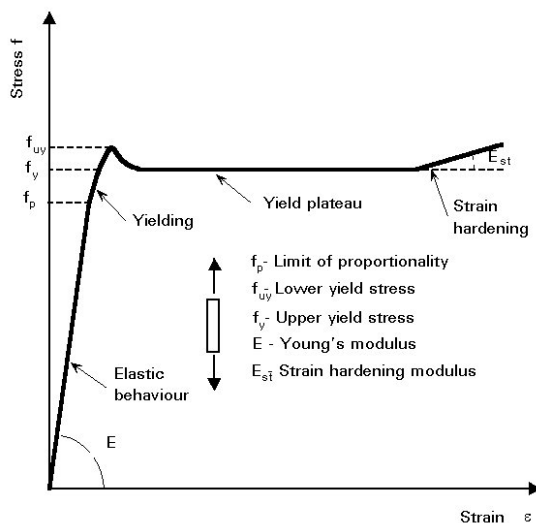


Fig.3.9 Courbe idéalisée de contrainte - déformation.

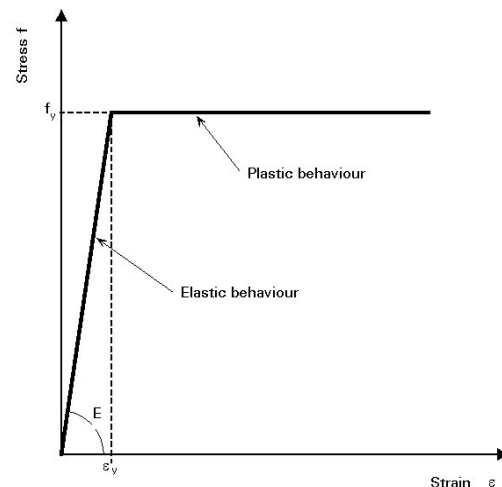


Fig.3.10 Courbe bilinéaire idéalisée de contrainte - déformation.

Pour les calculs, il est beaucoup plus simple de substituer à cette courbe réelle, une loi idéalisée. Celle-ci se présente sous la forme d'une réponse bilinéaire, telle que représentée à la figure 3.10, comportant une partie purement élastique suivie d'une partie parfaitement plastique représentée par l'horizontale. Ce comportement idéalisé du matériau néglige donc un certain nombre de facteurs : la limite d'élasticité supérieure, l'écrouissage... La prise en compte de ceux-ci affecterait très peu les résultats de l'analyse tout en rendant les calculs beaucoup plus complexes.

En se reportant à la figure 3.10, on peut établir la relation entre le moment fléchissant (M) et la courbure (ϕ) dans une section donnée en considérant les distributions des contraintes et des déformations au cours des différents stades précités. On obtient ainsi la courbe de la figure 3.9.

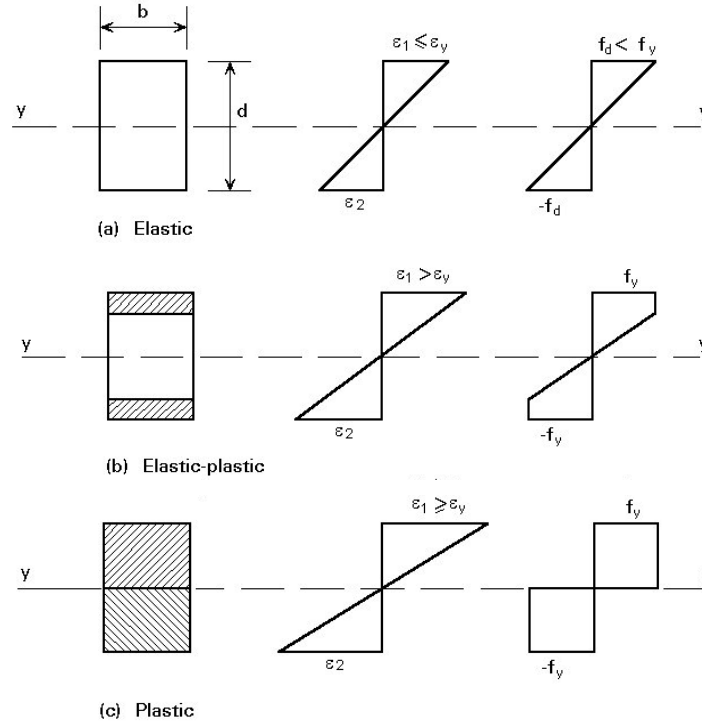


Fig.3.11 : Transition de l'état élastique à l'état plastique de la section transversale.

Aussi longtemps que la déformation maximum dans la fibre extrême (ε_1) ne dépasse pas la déformation limite élastique (ε_y), la distribution des contraintes reste linéaire (figure 3.11a). En désignant par d la hauteur de la poutre, la courbure ϕ est donnée par :

$$\phi = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{d} \quad (3.8)$$

Le moment fléchissant résistant associé est obtenu en exprimant que la distribution des contraintes est en équilibre de rotation autour de l'axe neutre (yy). Pour une section rectangulaire de largeur b , on obtient :

$$M = \sigma \left(\frac{bd^2}{6} \right) \quad (3.9)$$

où $(bd^2/6)$ représente le module de flexion élastique (W).

Dès que ε_1 dépasse ε_y , alors que σ ne peut excéder f_y , la forme de la distribution des contraintes se modifie (figure 3.11b) et ϕ croît désormais plus vite. La relation M - ϕ devient non linéaire, ainsi qu'indiqué à la figure 3.12.

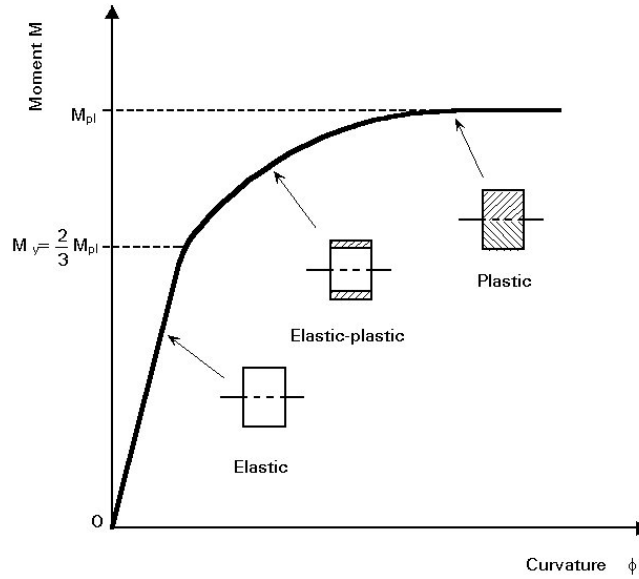


Fig.3.12 : Relation moment - courbure ($M-\phi$) d'une section rectangulaire en flexion.

ϕ peut toujours être obtenue à partir de l'équation (3.8) tandis que M se détermine, comme dit plus haut, à partir de la figure 3.11b. Pour de grandes courbures, on tend vers la situation de la figure 3.11c. (substituer à la distribution réelle deux blocs rectangulaires de contraintes constitue une approximation qui permet de simplifier considérablement les calculs pour une perte de précision négligeable) ; le moment associé vaut :

$$M = f_y \left(\frac{bd^2}{4} \right) \quad (3.10)$$

Cette dernière valeur fournit le « plein moment plastique » (M_{pl}) de la section transversale. Elle représente la limite supérieure théorique de la résistance en flexion, basée sur la loi contrainte-déformation de la figure 3.10. La quantité $W_{pl} = bd^2/4$ est appelée « module de flexion plastique » et le rapport W_{pl}/W qui mesure l'accroissement de moment supporté au-delà de la première plastification, est connue sous le nom de « facteur de forme ». Pour la section rectangulaire, on a :

$$s = \frac{W_{pl}}{W} = \frac{bd^2/4}{bd^2/6} = 1.50 \quad (3.11)$$

Puisque la pente de la courbe $M-\phi$ s'annule pour $M = M_{pl}$, on dit qu'une rotule plastique s'est formée dans la section transversale. En effet, la raideur flexionnelle dans cette zone s'est totalement érodée et la poutre se comporte désormais comme si elle y comportait une vraie rotule, à la différence toutefois que le moment dans ladite rotule vaut M_{pl} . Dans une poutre simplement appuyée, la capacité portante maximum est bien davantage déterminée par la formation d'une rotule plastique que par l'apparition de la première plastification. Une manière simple de calculer la charge correspondante consiste à assimiler les portions de poutre restées élastiques à des éléments rigides et à exprimer que le travail développé par les forces extérieures est égal à l'énergie de déformation dissipée dans la rotule plastique. Ainsi, pour l'exemple de la figure 3.8 , on obtient :

$$\frac{FL}{2}\theta = M_{pl} 2\theta \quad (3.12)$$

$$F = \frac{4M_{pl}}{L}$$

Cette manière de faire se fonde sur le fait que la structure se ruine par formation d'un mécanisme.

3.9.2. Poutres hyperstatiques

Si la poutre en acier est hyperstatique (poutre continue) et si sa section est de Classe 1, la formation de la première rotule plastique dans la section de moment maximal - ce dernier étant obtenu au terme d'une analyse globale élastique - ne constitue pas la limite de sa capacité portante (voir figure 3.13).

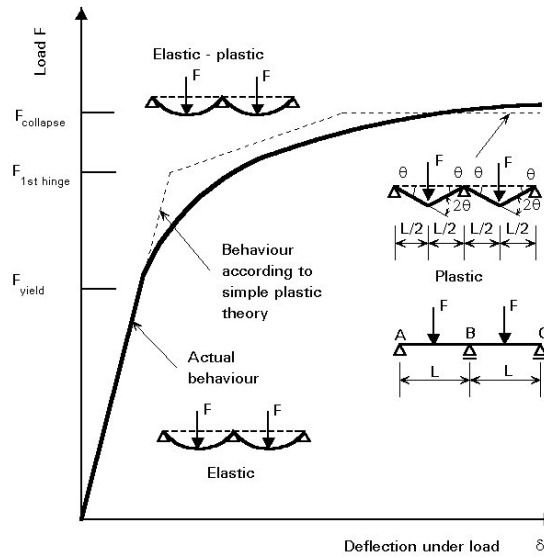


Fig.3.13 : Courbe charge-déplacement d'une poutre hyperstatique.

Elle est plutôt l'état à partir duquel la poutre modifie son mode de résistance à tout accroissement ultérieur des charges. Dans la poutre à deux travées de la figure 3.13, l'introduction d'une rotule réelle au droit de l'appui intermédiaire (*B*) fait en sorte que chaque travée se comporte comme si elle était simplement appuyée. Ainsi, chacune des deux travées peut continuer à supporter des charges additionnelles jusqu'à ce qu'une rotule plastique se forme à mi-portée. La formation d'une rotule plastique en *B* génère un comportement qualitativement similaire. Ainsi, les poutres continues ne se ruinent pas avant que ne se soit formé un nombre de rotules plastiques suffisant pour transformer la structure en un mécanisme. A la ruine, la poutre présente l'aspect indiqué à la figure 3.13. En égalant, comme précédemment, le travail des forces extérieures et l'énergie interne de déformation, respectivement associés au mécanisme de ruine, on obtient :

$$2 F \frac{L}{2} \theta = M_{pl} (2\theta + 2\theta + 2\theta) \quad (3.13)$$

$$F = \frac{6M_{pl}}{L}$$

On a reporté à la figure 3.13 la courbe charge-flèche relative de la poutre continue à deux travées ; elle a été obtenue au terme d'une analyse élastique-plastique. Chaque changement de pente correspond à la formation d'une rotule plastique qui entraîne un « adoucissement » progressif de la structure. La ruine survient pour une valeur des charges appliquées donnée par l'équation (3.13) lorsque les rotules sont en nombre suffisant pour transformer la poutre en un mécanisme dépourvu de toute raideur flexionnelle ; il y correspond le segment terminal horizontal de la courbe. Lorsqu'on conduit ce type d'analyse, il est d'usage d'admettre que les rotules plastiques se forment brusquement ; ceci revient à considérer que la section transversale est caractérisée par un facteur de forme unitaire, à savoir $W_{pl} = W$. La comparaison de la courbe charge-déplacement correspondante et de la courbe réelle relevée lors d'un essai révèle que l'étalement de la plastification a une incidence relativement faible sur le comportement global.

Alors que l'analyse élastique-plastique de poutres hyperstatiques est assez complexe, la détermination de la charge de ruine, fondée sur le concept de mécanisme de ruine, relève d'une procédure directe pour la plupart des poutres continues. Une méthode similaire peut être utilisée pour le calcul plastique des portiques plans.

Lorsqu'on passe de l'état élastique, correspondant à des charges qui ne dépassent pas F_{plast} , à l'état plastique, correspondant à la charge de ruine F_{ruine} , une redistribution des moments fléchissant se produit dans la poutre de la figure 3.12. Dès lors, la forme du diagramme des moments à l'état limite plastique diffère de celle du diagramme correspondant à l'état élastique. Le premier diagramme (plastique) est tel que $M = M_{pl}$ au droit des trois rotules plastiques, tandis que le second diagramme (élastique) atteint sa valeur maximum au droit de l'appui intermédiaire.

3.10. Flexion des sections en I

Si l'on utilise la courbe contrainte-déformation de la figure 3.8 pour étudier le comportement en flexion autour de l'axe yy d'une section en I (figure 3.14a), idéalisée en concentrant la moitié de la section transversale à mi-épaisseur de chacune des semelles, on obtient la courbe bilinéaire $M-\phi$ de la figure 3.15.

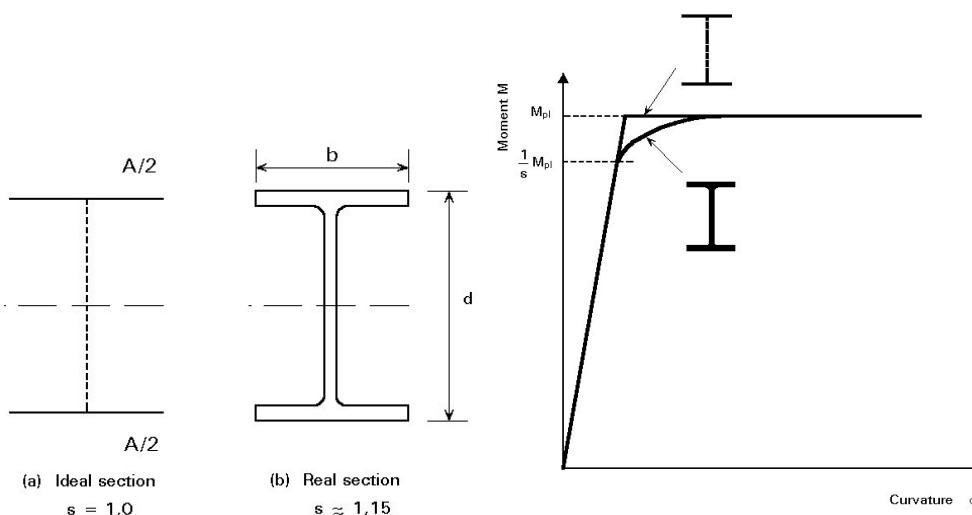


Fig.3.14 : Section en I

Fig.3.15 : Moment de courbure ($M-\phi$)

Ainsi, pour cette section hypothétique, la charge de pleine plasticité et celle de première plastification sont identiques et le facteur de forme vaut l'unité.

En utilisant une représentation plus réaliste de la section (figure 3.14b), on obtient une courbe $M-\phi$ présentant un « coude », comme indiqué à la figure 3.15. Puisque ce « coude » correspond à la progression de la plastification, il débute pour un moment fléchissant égal à M_{pl}/s . Pour une section en I, s vaut environ 1,15 pour la flexion autour de l'axe fort ; pour la flexion de cette même section autour de son axe faible, $s \approx 1,50$.

On peut se servir de l'approche développée précédemment à propos de la section rectangulaire, pour entreprendre l'étude élastique-plastique de toute section fléchiée autour de son axe de symétrie. Au besoin, on peut envisager d'utiliser une représentation plus précise de la loi contrainte-déformation mais cela compliquerait évidemment la mathématique du phénomène.

3.10.1. Flexion des sections mono-symétriques

L'étude élastique-plastique d'une section transversale qui n'est pas fléchiée autour d'un axe de symétrie est rendue plus compliquée par le déplacement de la position de l'axe neutre lorsque la plastification se développe. Au départ, l'axe neutre élastique passe par le centre de gravité de la section (figure 3.16a).

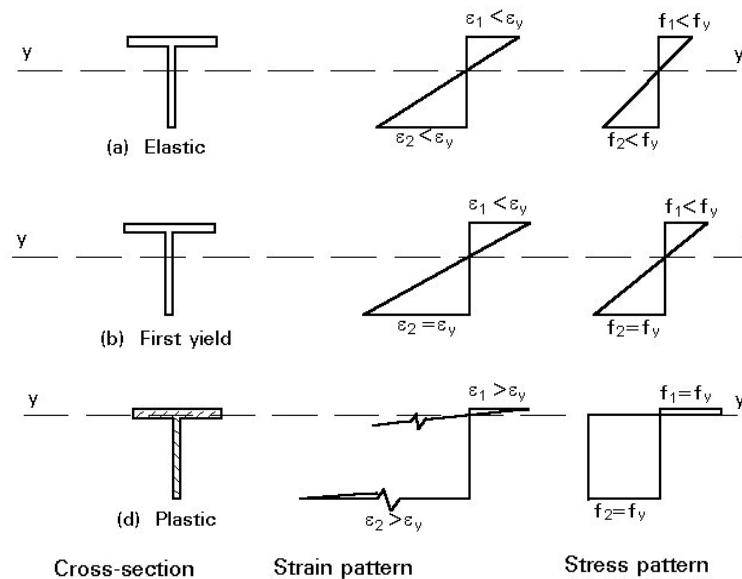


Fig.3.16 : Plastification de la section mono symétrique en flexion

Toutefois, en raison des déformations inégales des faces supérieure et inférieure de la section, la plastification apparaît d'abord sur l'une des faces (figure 3.16b). Elle progresse ensuite d'une manière non symétrique (figure 3.16c). L'équilibre de translation exige qu'à tout moment la résultante des contraintes de compression soit équilibrée par la résultante des contraintes de traction. Afin de respecter cette condition, la ligne de contrainte nulle doit s'éloigner de la zone plastifiée de la section puisque l'effort résultant dans cette partie croît moins rapidement. Lorsqu'on atteint l'état de plastification complète de la section (figure 3.16d), l'axe neutre coïncide avec l'axe d'égalité des aires, c'est-à-dire la ligne partageant la section en deux parties de même aire. La détermination de M_{pl} pour une section non symétrique requiert donc la

détermination de la position de cet axe d'égalité des aires ; au contraire, en calcul élastique, on se réfère à l'axe passant par le centre de gravité.

Les sections mono-symétriques sont caractérisées par deux valeurs distinctes du module de flexion élastique, relatives respectivement aux deux fibres extrêmes ; celles-ci se trouvent en effet à des distances différentes de l'axe neutre élastique. Ces mêmes sections sont toutefois caractérisées par une seule valeur du module de flexion plastique ; celui-ci est égal à M_{pl}/f_y . Selon la fibre extrême considérée, on aura à distinguer entre deux valeurs du facteur de forme. Celles-ci peuvent être différentes - avec l'une d'entre elles moindre que l'unité - pour les sections en té, particulièrement dissymétriques. Bien que cela n'affecte bien sûr en rien la relation fondamentale entre M_y et M_{pl} pour la section considérée, ce peut être une source de confusion dans les cas où l'on doit précisément examiner la plastification en compression (en traction).

3.10.2 Effet de l'effort tranchant

Lorsqu'on étudie l'effet de l'effort tranchant sur la résistance plastique en flexion d'une section, il importe avant tout de formuler une hypothèse sur la manière dont l'acier plastifie sous l'action combinée de contraintes normales et tangentielles. On admet normalement :

$$\left(\frac{\sigma}{f_y}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_y}\right)^2 = 1 \quad (3.14)$$

où : τ_y est la limite d'élasticité en cisaillement (prise égale à $f_y/\sqrt{3}$ selon le critère de Von Mises), arrondie à $0,6 f_y$.

En appliquant cette interaction à une section rectangulaire pour laquelle on postule des distributions plastiques des contraintes de flexion et de cisaillement, on obtient une relation approchée entre l'effort tranchant sollicitant (V_s), le moment plastique réduit ($M_{pl,v}$), l'effort tranchant plastique (V_{pw}) et M_{pl} :

$$M_{plv} = \left\{ 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{V_s}{V_{pw}} \right)^2 \right\} M_{pl} \quad \text{pour} \quad \frac{V_s}{V_{pw}} > \frac{2}{3} \quad (3.15)$$

Utilisons maintenant l'expression (3.14) pour l'étude d'une section en I complètement plastifiée (figure 3.17). Si l'on suppose, d'une part, que les contraintes de cisaillement dans l'âme sont uniformément réparties et que, d'autre part :

$$V_{pw} = 0,6 d.t_w f_y \quad (\text{avec : } \tau_y = 0,6 f_y)$$

on obtient :

$$M_{plv} = \left\{ 1 - \left(2 \frac{V_s}{V_{pw}} - 1 \right)^2 \right\} M_{pl} \quad \text{pour} \quad 0,5 V_{pw} \leq V_s \leq V_{pw} \quad (3.16)$$

$$M_{plv} = M_{pl} \quad \text{pour} \quad V_s \leq 0,5 V_{pw}$$

Ainsi, pour des sections en I fléchies dans le plan de l'âme, des efforts tranchants n'excédant pas 50 % de l'effort tranchant plastique restent sans effet significatif sur la valeur de M_{pl} . Pour la flexion de la section autour de son axe faible, le comportement est similaire à celui d'une section rectangulaire ; il est représenté par l'équation (3.15).

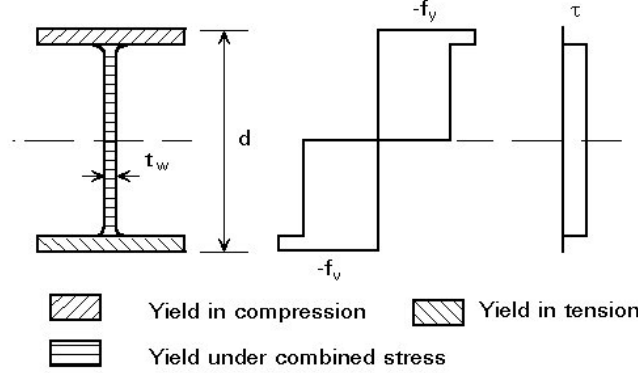


Fig.3.17 : Contrainte plastique de flexion et de cisaillement.

3.11. Comportement plastique sous sollicitations combinées

La résistance de plusieurs types de sections transversales soumises à l'action combinée de moments fléchissant et d'efforts tranchants, a été étudiée selon diverses variantes de la théorie de la plasticité. A des fins de dimensionnement, les résultats sont habituellement fournis sous forme soit de tables, soit de formules approchées d'interaction. Dans le cas d'une section en I fléchie autour de son axe fort, la valeur M_{pl} n'a pas à être réduite en présence d'efforts tranchants inférieurs à 50 % de V_{pw} .

En flexion bi-axiale, l'axe neutre plastique est oblique sur les axes principaux de la section, dans une mesure qui dépend du rapport entre les moments fléchissant appliqués et de la forme exacte de la section. On peut établir une relation entre les deux moments plastiques réduits ($M_{plr,y}$ et $M_{plr,z}$) et les moments plastiques de référence ($M_{pl,y}$ et $M_{pl,z}$) en faisant des hypothèses sur les distributions de contraintes et en calculant les moments résistants correspondants. Au besoin, de tels calculs peuvent aussi incorporer l'effet d'efforts axiaux (N). Ces développements laborieux ont été conduits pour une variété de formes structurales (voir figures 3.18 et 3.19), comprenant des sections non-symétriques, telles les cornières par exemple. Pour les sections en I soumises à flexion bi-axiale, on peut relier $M_{plr,y}$ à $M_{plr,z}$ selon :

$$\left(\frac{M_{plry}}{M_{ply}} \right)^2 + \left(\frac{M_{plrz}}{M_{plz}} \right) = 1 \quad (3.17)$$

Pour autant que la section présente au moins un axe de symétrie et que le problème soit posé en termes d'axes principaux, on se place en sécurité en substituant à l'équation (3.17) par la forme linéarisée suivante :

$$\frac{M_{pl.Ry}}{M_{ply}} + \frac{M_{plrz}}{M_{plz}} = 1 \quad (3.18)$$

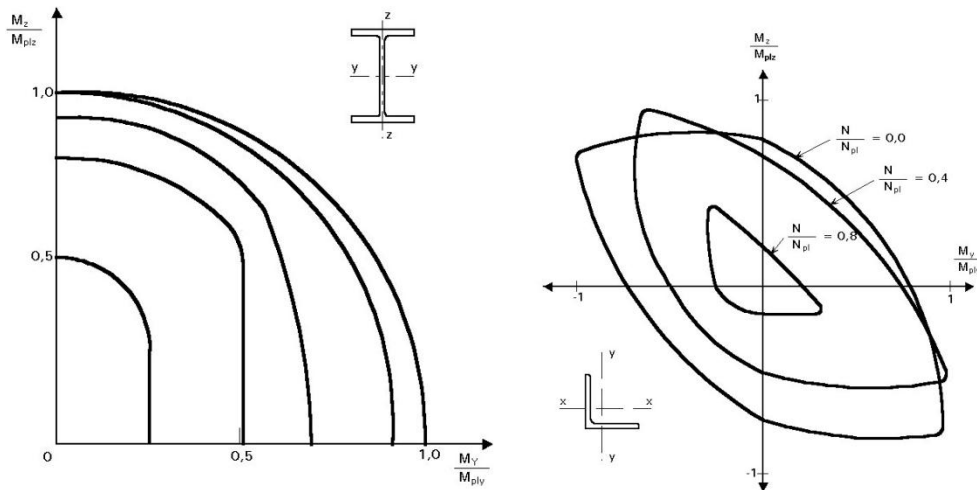


Fig.3.18 : Courbes d'interaction (section en I) **Fig.3.19 :** Courbes d'interaction (section en L)

3.12. Aspect théorique des phénomènes d'instabilités

3.12.1. Introduction

Les éléments structuraux de type « barre » lorsqu'ils sont comprimés, sur toute ou partie de leur section transversale, sont susceptibles de voir leur capacité portante affectée par les phénomènes d'instabilité [15], [18]. S'agissant d'un élément comprimé axialement (poteau), un tel phénomène est désigné « flambement ». Pour un élément soumis à flexion (poutre) autour de l'axe de forte inertie de sa section transversale, sous l'action de moments d'extrémité et/ou de charges transversales, on parle plutôt de « déversement ». L'instabilité se manifeste d'autant plus que l'élancement de la barre est important. Lorsque les parois des éléments sont minces il ya risque de voilement local [17], [25].

3.12.2 Voilement local

L'exemple le plus simple de ce phénomène est celui d'une plaque rectangulaire à quatre côtés articulés, chargée en compression comme le montre la figure 3.20. Comme pour les éléments en compression, la plaque reste plane jusqu'à ce que la charge appliquée atteigne une valeur critique, au-delà de laquelle elle voile avec déplacements latéraux

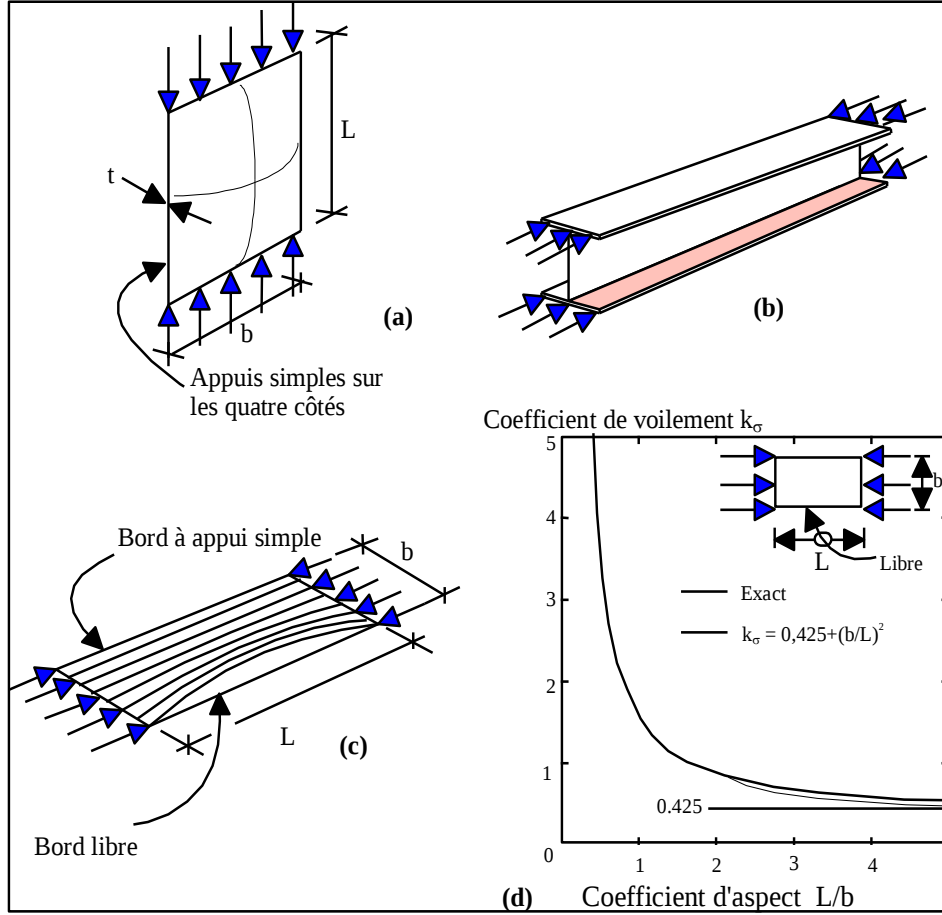


Fig 3.20 : Voilement de plaques.

L'équation différentielle de voilement d'une plaque pour le cas représenté sur la figure 3.20 selon [11], [12], [22], [27] et [40] , peut s'écrire par :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 2 \frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{N_x}{D} \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.19)$$

où :

w : déformation de la plaque $\perp$ à son plan.

N_x : effort normal par unité de longueur ($N_x = \sigma_x \cdot bt$)

D : rigidité flexionnelle de la plaque par unité de largeur ($b=1$) : $D = \frac{E.t^3}{12(1-\nu^2)}$

t : épaisseur de la plaque,

ν : coefficient de Poisson

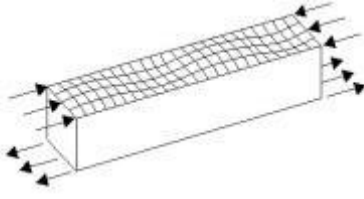
L'équation différentielle (3.19) a été déjà établie par Bryan en 1891.

En supposant que la plaque se déforme suivant une surface de forme sinusoïdale (sinusoïde sphérique) décrite par l'équation

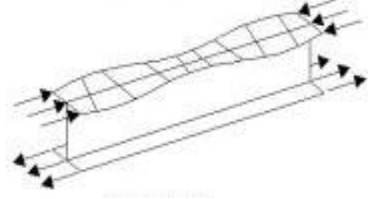
$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.20)$$

m : nbre de demi-ondes (cloques) dans le sens x , et

n : nbre de demi-ondes (cloques) dans le sens y



a) Plaques de section en caisson



b) Plaques de section en I

Fig. 3.21 : Voilement de plaques d'éléments.

La charge critique de voilement élastique N_{cr} peut être calculée en substituant w dans (3.21) ; par intégration et en tenant compte des conditions aux limites de la plaque, on obtient :

$$N_x = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \cdot \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \quad (3.21)$$

La valeur N_{cr} recherchée correspond à la valeur minimale de N_x , soit pour $n=1$ ce qui correspond à une seule cloque suivant y (Fig. 3.21), en remplaçant D par sa valeur et en posant $\alpha = \frac{a}{b}$, la charge critique de voilement élastique s'écrit :

$$N_{cr} = \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot t}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (3.22)$$

$$\text{d'où la contrainte critique : } \sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{t} = \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (3.23)$$

$$\text{En définissant le coefficient de voilement } k_\sigma \text{ par : } k_\sigma = \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2 \quad (3.24)$$

Une plaque (paroi) plane rectangulaire mince simplement appuyée sur son pourtour soumise à des efforts de compression exercés sur ses petits côtés, a une contrainte critique de voilement élastique (σ_{cr}) donnée par :

$$\sigma_{cr} = \frac{k_\sigma \cdot \pi^2 \cdot E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (3.25)$$

où :

k_σ : représente le coefficient de voilement (équation 3.24) de la plaque qui prend en compte les conditions d'appui aux bords, la distribution des contraintes et le coefficient d'aspect de la plaque (fig. 3.20).

ν : coefficient de Poisson

E : module de Young

en notant la contrainte de référence d'Euler par
$$\sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (3.25a)$$

la contrainte critique de voilement élastique s'écrit :
$$\sigma_{cr} = k_\sigma \cdot \sigma_E \quad (3.26)$$

La contrainte de voilement critique élastique (σ_{cr}) est donc inversement proportionnelle à $(b/t)^2$ qui est l'analogue à l'élancement $(L/i)^2$ pour le flambement des poteaux.

Les profils de construction ouverts comprennent un certain nombre de parois qui sont libres le long d'un bord longitudinal (fig.3.20b) et tendent à être très longues par rapport à leur largeur. La déformation de voilement pour ces parois est illustrée dans la figure 3.20c. La relation entre le coefficient d'aspect et le coefficient de voilement pour une paroi en console longue et mince de ce type est illustrée dans la figure 3.18d, d'où il ressort clairement que le coefficient de voilement tend vers une valeur limite de 0,425 au fur et à mesure que l'élancement de la paroi augmente. Pour qu'une section soit classifiée en classe 3 ou mieux, la contrainte de voilement critique élastique (σ_{cr}) doit être supérieure à la contrainte élastique f_y . Selon l'expression (3.25) (en substituant $\mu = 0.3$ et en réorganisant) cela est le cas si :

$$\frac{b}{t} < 0.92 \sqrt{k_\sigma \frac{E}{f_y}} \quad (3.27)$$

Cette expression est générale car l'effet du gradient de contraintes, les conditions aux limites et l'élancement sont tous compris dans le coefficient de voilement k_σ . Le Tableau 2 donne des valeurs du coefficient de voilement k_σ pour des valeurs élevées d'élancement de parois internes et en console sous diverses distributions de contraintes élastiques.

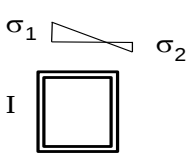
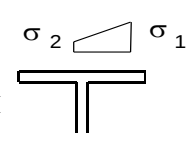
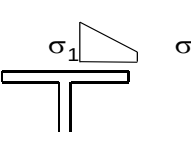
 I  II  III σ_1 = contrainte maximale de compression (positive)					
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	+1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1
Cas I Paroi interne	4,0	<u>8,02</u> $1,05 + \psi$	7,81	$7,81 + 6,29\psi + 9,78\psi^2$	
Cas II Paroi en console	0,43	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$	0,57	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$	0,85
Cas III Paroi en console	0,43	<u>0,578</u> $\psi + 0,34$	1,70	$1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2$	23,8

Tableau 2 : Coefficient de voilement k_σ en fonction de la distribution des contraintes

Le comportement élastique - plastique d'une paroi parfaitement plate soumise à une compression uniforme peut être utilement représenté par un diagramme charge ultime normalisée - élancement réduit où la charge ultime normalisée, $\bar{N}_p$, et l'élancement réduit de paroi, $\bar{\lambda}_p$, sont donnés par :

$$\bar{N}_p = \sigma_{ult} / f_y \quad (3.28)$$

$$\bar{\lambda}_p = (f_y / \sigma_{cr})^{0.5} \quad (3.29)$$

En substituant l'expression (3.25) pour σ_{cr} dans (3.29), et en remplaçant f_y par $235/\varepsilon^2$ (pour que l'expression puisse être utilisée pour une nuance d'acier quelconque) l'élancement réduit de paroi $\bar{\lambda}_p$ peut être exprimé sous la forme :

$$\bar{\lambda}_p = \left(\frac{f_y}{\sigma_{cr}} \right)^{0.5} = \left(\frac{\bar{b}/t}{28,4\varepsilon \sqrt{k_\sigma}} \right) \quad (3.30)$$

où $\bar{b}$ représente la largeur appropriée pour le type de paroi et le type de section transversale.

La Figure 3.22 montre la relation qui existe entre $\bar{N}_p$ et $\bar{\lambda}_p$. Pour un élancement réduit de paroi inférieur à unité, la charge ultime normalisée est égale à l'unité, ce qui signifie que la paroi peut développer sa charge d'écrasement. Pour des valeurs de $\bar{\lambda}_p$ supérieures, $\bar{N}_p$ diminue au fur et à mesure que l'élancement de paroi augmente, la contrainte limite soutenue étant limitée à la contrainte σ_{cr} de voilement critique élastique.

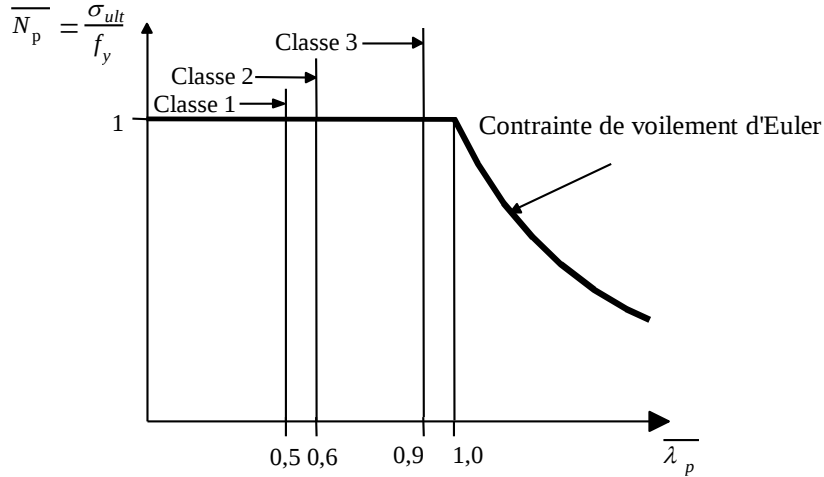


Fig.3.22 : Représentation adimensionnelle de la contrainte de voilement élastique - plastique d'une paroi parfaitement plate.

3.12.2.1. Exemple d'application :

Calcul de l'élancement réduit de paroi

- Soit $\bar{\lambda}_p = (f_y / \sigma_{cr})^{0.5}$
- Tracer la relation de $\bar{N}_p$ en fonction de $\bar{\lambda}_p$
- En prenant le coefficient $\varepsilon = (235 / f_y)^{0.5}$ (pour introduire l'influence de la limite d'élasticité de l'acier), en utilisant l'expression (3.25)

$$\sigma_{cr} = \frac{k_{\sigma} \cdot \pi^2 \cdot E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \text{ pour obtenir l'expression (3.30) .}$$

Les parois des profils ne sont pas parfaitement planes, et l'acier n'est pas élastique -parfaitement plastique (il subit un écrouissage). Ces facteurs, combinés avec la capacité des plaques de supporter des charges au-delà du niveau provoquant le voilement élastique (comportement post-voilement), exigent que l'on minore les valeurs $\bar{\lambda}_p$ afin de retarder l'apparition du voilement local jusqu'à ce que la nécessaire distribution des contraintes dans la section - plastification au niveau de la fibre extrême ou distribution plastique sur la section entière- ait été atteinte. L'EC3 utilise les élancements réduits suivants des parois comme limites pour les classifications :

Classe 1 : $\bar{\lambda}_p < 0,5$

Classe 2 : $\bar{\lambda}_p < 0,6$

Classe 3 : a) $\bar{\lambda}_p < 0,90$ pour les parois sous gradient de contraintes; et
b) $\bar{\lambda}_p < 0,74$ pour les éléments totalement comprimés.

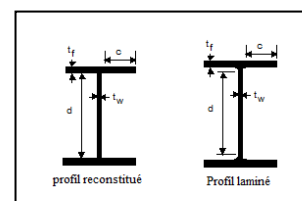
En substituant les valeurs appropriées de k_{σ} et la valeur appropriée de $\bar{\lambda}_p$ pour chaque classe dans l'expression (3.30), on peut calculer les rapports largeur/épaisseur b/t , (et hauteur / épaisseur d/t) limites.

En substituant les valeurs appropriées de k_{σ} et la valeur appropriée de $\bar{\lambda}_p$ pour chaque classe dans l'expression (3.30), on peut calculer les rapports largeur / épaisseur b/t (et hauteur / épaisseur d/t) limites.

Le tableau 3 [6], [19] donne les valeurs limites pour un profil laminé comprimé ou fléchi selon l'axe de forte inertie. Les profils reconstitués soudés sont traités de façon similaire avec des limites identiques en assimilant les cordons de soudure comme raidisseurs d'extrémités des parois qui se substituent aux congés dans les profilés laminés.

Elément	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Semelle	$c / t_f = 9 \varepsilon$	$c / t_f = 10 \varepsilon$	$c / t_f = 14 \varepsilon$
Âme comprimée	$d / t_w = 33 \varepsilon$	$d / t_w = 38 \varepsilon$	$d / t_w = 42 \varepsilon$
Âme fléchie	$d / t_w = 72 \varepsilon$	$d / t_w = 83 \varepsilon$	$d / t_w = 124 \varepsilon$

Tableau 3 : Valeurs limites pour un profilé laminé.



3.12.2.2. Conclusion récapitulative

- Les profilés de construction peuvent être considérés comme être constitués d'un ensemble de parois distinctes.
- Des parois peuvent être *internes* (par exemple les âmes de poutres ouvertes ou les semelles de caissons) et d'autres sont *en console* (par exemple les semelles des profils ouverts et les ailes des cornières).
- Lorsqu'elles sont chargées en compression ces parois peuvent *se voiler localement*.
- Le voilement local au sein de la section transversale peut limiter la capacité de résistance aux sollicitations du profil en l'empêchant d'atteindre sa limite élasticité.
- La ruine prématurée (provoquée par les effets du voilement local) peut être évitée en limitant le rapport largeur / épaisseur - ou *élancement* - des parois individuelles au sein de la section transversale.
- Ceci constitue la base de l'approche par *classification des sections transversales*
- L'EC3 définit quatre classes de section transversale. La classe à laquelle appartient une section transversale particulière dépend de *l'élancement* de chaque paroi et de la *distribution des contraintes* de compression.

3.12.3. Flambement des poteaux par flexion

L'instabilité se produit dans tous les systèmes ou éléments soumis à des contraintes de compression. Le type le plus simple de flambement est celui d'une barre initialement rectiligne soumise à de la compression sous l'effet de deux forces axiales opposées (fig.3.23). La théorie linéaire du flambement simple est établie par Euler en 1744 [11].

A la charge critique, l'équilibre stable du poteau rectiligne se trouve à sa limite et il existe une configuration légèrement déformée du poteau qui peut aussi satisfaire l'équilibre (fig.3.24). Pour cette configuration, le moment de flexion, à chaque position de la section droite et pour une barre bi-articulée, est donné par :

$$M = N \cdot y \quad (3.31)$$

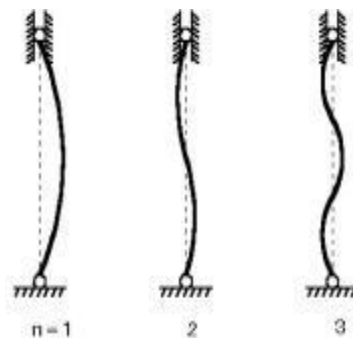
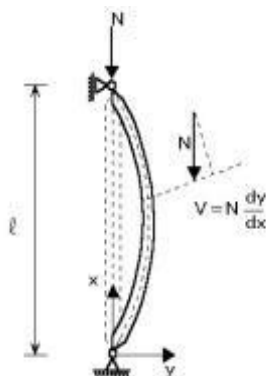


Fig.3.23 : Flambement d'un poteau par flexion.

Fig. 3.24 : Modes de flambement.

Si l'on utilise l'équation différentielle donnée par la théorie de la flexion simple [11] et en considérant de grands déplacements, on écrit :

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt[3]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = -\frac{M}{EI_z} \quad (3.32)$$

ou encore son approximation :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI_z} \quad (3.33)$$

qui se révèle suffisamment précise pour des charges voisines de la charge critique et pour de petits déplacements ; on obtient alors, en introduisant l'équation (3.31) dans (3.33), l'équation différentielle du second ordre suivante:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{N \cdot y}{EI_z} = 0 \quad (3.34)$$

où, $E I_z$ représente la rigidité de flexion du poteau dans le plan de flambement.

La solution générale de cette équation est :

$$y = A \sin kx + B \cos kx \quad (3.35) \quad \text{avec : } k^2 = \frac{N}{EI_z} \quad (3.36)$$

(seules les solutions positives, soit les forces de compression, présentent ici un intérêt).

A et B sont des constantes d'intégration qui sont déterminées de manière à satisfaire les conditions aux limites :

$$y = 0 \text{ pour } x = 0 \quad (3.37a)$$

et $y = 0 \text{ pour } x = l \quad (3.37b)$

La première condition aux limites donne $B = 0$;

la seconde donne : $A \sin kl = 0 \quad (3.38)$

qui impose : soit $A = 0$ (pas de flambement dans ce cas)

soit $\sin kl = 0$, ou autrement $kl = n\pi$ avec n entier quelconque (3.39)

Finalement, la charge critique s'obtient de la manière suivante: $N_{cr,n} = \frac{n^2 \pi^2 EI_z}{l^2}$ (3.40)

La figure 3.24 montre les trois premiers modes de flambement (n = 1, 2 et 3 respectivement).

Normalement, la plus petite valeur de kl et donc de la charge critique N_{cr} qui satisfait l'équation (3.40) est obtenue en prenant $n = 1$; cette charge critique est appelée charge d'Euler. Dans le cas où on utilise un entretoisement, des modes de flambement plus élevés peuvent être déterminants.

La charge critique d'un poteau bi-articulé a été calculée par Leonhard Euler, en 1744 [11]. D'un point de vue historique, il s'agit de la première solution qui ait été donnée d'un problème de

stabilité. La même procédure peut être utilisée pour des cas où les conditions aux limites sont différentes.

La charge critique donnée ci-dessus et représentée sur la figure 3.25, ne prend pas en compte les effets des efforts de cisaillement ; ceci peut se faire en rajoutant la déformation de cisaillement donné par :

$$\gamma = \frac{V}{G \cdot A_v} \quad (3.41)$$

où V est l'effort tranchant donné par : $V = N \frac{dy}{dx}$ (3.42)

et A_v la section réduite à prendre en compte pour le cisaillement.

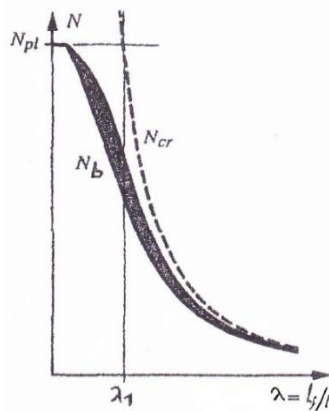


Fig.3.25 : Charge critique d'Euler N_{cr} .

Si on ajoute la variation de pente de la déformée due à l'effort tranchant, l'équation différentielle prenant en compte les phénomènes de flambement devient :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{N}{GA_v} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{N \cdot y}{EI_z} \quad (3.38)$$

ce qui donne la charge critique : $N^* = \frac{N_{cr}}{\left[1 + \frac{N_{cr}}{GA_v}\right]}$ (3.39)

De ce fait, à cause de l'action des forces de cisaillement, la charge critique se trouve réduite par rapport à la charge d'Euler. Pour des éléments à sections pleines on néglige généralement l'influence du cisaillement ; cependant, pour des éléments en treillis ou à traverses de liaison, cet effet peut prendre une importance pratique et doit alors être considéré.

3.12.4. Déversement :

3.12.4.1. Introduction :

En résistance des matériaux [16], [39], le **déversement** est un phénomène d'instabilité affectant une poutre subissant un moment de flexion.

Lorsqu'une poutre est fléchie, l'une de ses faces est tendue et l'autre est comprimée. Lorsque cet effort de compression atteint une valeur critique — dépendant notamment des conditions d'appui et de la distribution du moment de flexion —, le côté comprimé va voiler, à la manière d'une colonne comprimée qui flambe. Ce phénomène est appelé **déversement** et, en fonction des rigidités torsionnelles et flexionnelles des différentes parties de la section, il s'accompagne d'une rotation (torsion) de la section droite de la poutre, d'où l'expression « flambage latéral torsionnel ».

Ce phénomène concerne principalement les profilés en acier, d'habitude très élancés, au contraire des sections de bois ou de béton armé, généralement plus massives et plus rigides en torsion. Pour cette raison, la majorité des études précises sur le déversement se concentrent sur les sections en acier, en particulier sur les sections simplement ou doublement symétriques en H ou en I, les plus sujettes au déversement.

3.12.4.2. Notions sur la torsion :

D'une manière générale la résistance à la torsion dépend de la géométrie de la section et du matériau qui la compose. Le moment de torsion T_x agissant sur une barre, est équilibré par des efforts intérieurs qui sont de deux types bien distincts :

- le premier, qui prépondère dans les sections fermées (fig. 3.26 a), est un flux de contraintes de cisaillement (τ_t) fermé à l'intérieur de la section.
- le second, qui est prépondérant dans les sections ouvertes (fig. 3.26 b), est composé de contraintes normales (σ_w) et de contraintes tangentielles (τ_w) induites par la variation de ces mêmes contraintes normales.

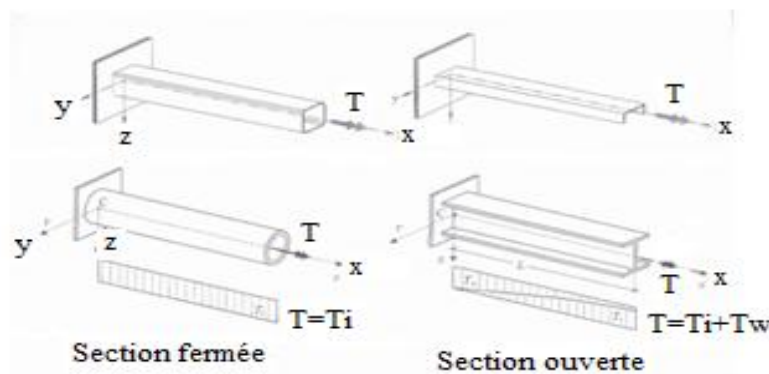


Fig. 3.26 : Barres soumises à une torsion uniforme et barres soumises à une torsion non uniforme

La résistance T à un moment de torsion se décompose donc en deux modes de résistance :

La résistance de torsion uniforme ou de Saint Venant notée : T_t

La résistance de torsion non uniforme notée : T_w (gauchissement - en anglais: warping).

Observation : dans la torsion uniforme, les sections conservent leur forme (principe de saint Venant). Dans la torsion non uniforme les sections ne restent pas planes, elles gauchissent.

3.12.4.3. Torsion uniforme :

Dans le cas des barres soumises essentiellement à la torsion uniforme (sections fermées), la déformation de la barre est caractérisée par l'angle de rotation $\varphi(x)$ d'une section située à l'abscisse x de la section d'origine ; on écrit alors :

$$\varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{T_t(x)}{GI_t} \quad \text{où} \quad T_t(x) = GI_t \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (3.40)$$

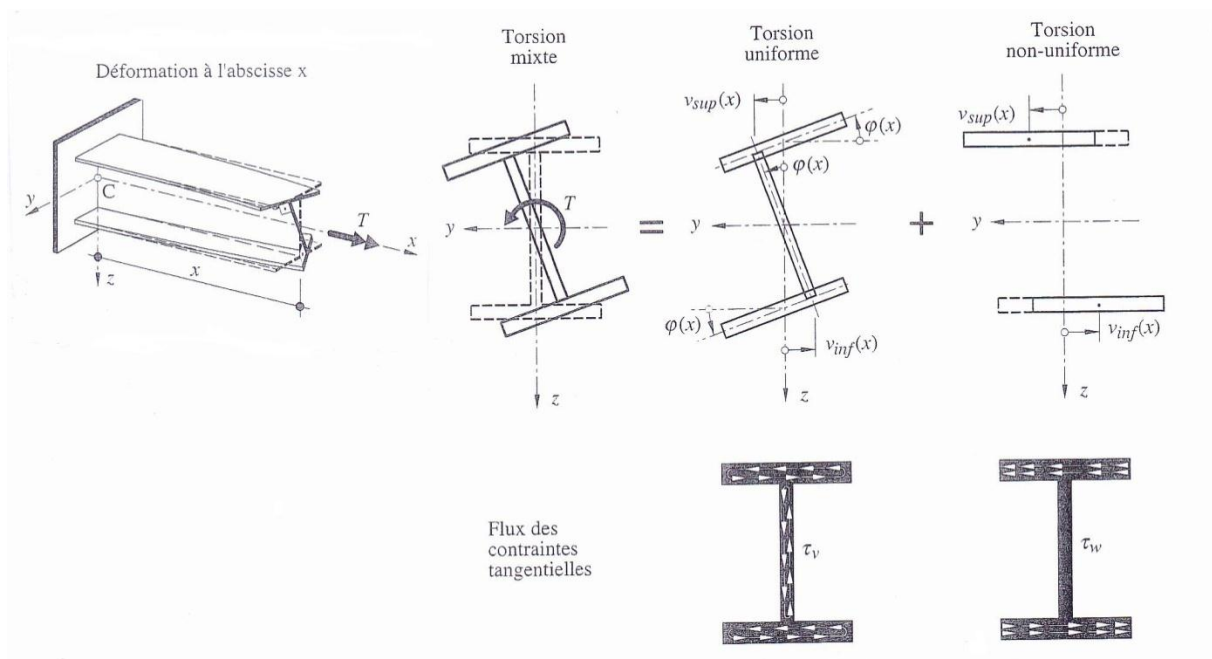


Fig.3.27 [43]: Décomposition des déformations de la section et contraintes tangentielles correspondantes

3.12.4.4 : Torsion non uniforme :

Les efforts correspondants à ce mode de torsion ne se développent que si la section transversale qui aimerait gauchir se trouve empêchée de le faire par des conditions d'appui adéquates. Ce phénomène de torsion non uniforme s'observe sur le comportement des barres en I ou en U encastrées à une extrémité et à l'autre extrémité libre soumise à un moment de torsion $T(x)$. Comme l'encastrement limite le gauchissement de l'ensemble des sections de la barre, la barre résistera donc en torsion non uniforme. La rotation de la section d'abscisse x peut être décomposée en :

- une rotation propre $\varphi(x)$ des parois constituant la section, engendrant un flux de contraintes tangentielles (τ_t) fermé dans chaque paroi, qui constitue le moment de torsion uniforme T_t (fig.3.27).
- Une translation $v_{sup}(x)$, $v_{inf}(x)$ des semelles supérieure et inférieure respectivement de la section correspondant à la déformation de flexion dans leur propre plan dues à la torsion non uniforme (fig.3.27).

Les contraintes normales σ_w et tangentielles τ_w (fig.3.28) qui sont liées aux translations des semelles représentent l'état de contraintes dû à la torsion non uniforme ; Le couple engendré par les contraintes τ_w constitue le moment de torsion non uniforme T_w dont l'expression est examinée ci-dessous.

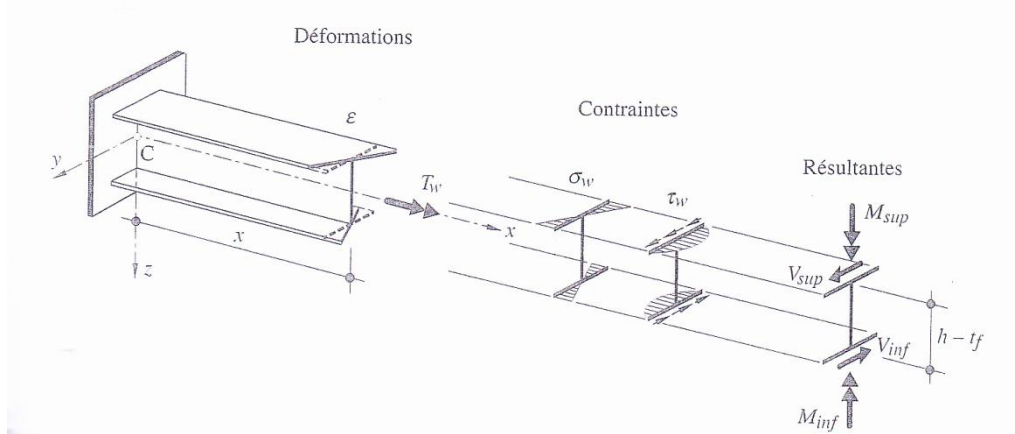


Fig. 3.28 : Déformations et contraintes résultant de la flexion des ailes.

La résistance d'une barre en double té peut être étudiée en tant que flexion des semelles de la section dans leur propre plan. La figure 3.28 montre que la résultante des contraintes normales σ_w et de cisaillement τ_w correspondent à un moment de flexion M_{sup} et M_{inf} ainsi qu'à un effort de cisaillement V_{sup} et V_{inf} s'appliquant respectivement sur les semelles supérieure et inférieure.

Les relations correspondant à cette flexion de semelles accompagnée d'un cisaillement (en l'occurrence la semelle supérieure) s'expriment alors ainsi :

$$\frac{d^2 v_{sup}(x)}{dx^2} = -\frac{M_{sup}}{EI_{fz}} \quad \text{avec} \quad v_{sup}(x) = \varphi(x) \times \frac{h}{2} \quad (\sin \varphi \approx \varphi)$$

$$V_{sup} = \frac{dM_{sup}}{dx} = -\frac{d}{dx} \left[\frac{d^2 v_{sup}(x)}{dx^2} EI_{fz} \right]$$

I_{fz} le moment d'inertie de la semelle par rapport à l'axe zz , avec $I_{fz} = \text{constante}$ on a :

$$M_{\text{sup}} = -\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} EI_{fz} \frac{h}{2} \quad V_{\text{sup}} = -\frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} EI_{fz} \frac{h}{2}$$

La torsion non uniforme T_w correspond au couple d'efforts tranchants V_{sup} et V_{inf} soit :

$$T_w = V_{\text{sup}} \times h_s = (V_{\text{inf}} \times h_s) = -\frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \cdot EI_{fz} \cdot \frac{h_s}{2}$$

Comme l'inertie de l'âme $I_{z\text{âme}}$ est négligeable, on écrit ainsi pour la section totale $I_z \approx 2I_{fz}$ ou

alors $I_{fz} = \frac{I_z}{2}$ on a donc :

$$T_w = -\frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \cdot EI_z \cdot \frac{h_s}{4} \quad \text{ou encore} \quad T_w = -\frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \cdot EI_w$$

avec $I_w = I_z \cdot \frac{h_s}{4}$ qui désigne le moment d'inertie de gauchissement.

La torsion mixte dans le cas des sections ouvertes s'écrit donc :

$$T = T_t + T_w = GI_t \frac{d\varphi(x)}{dx} - EI_w \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \quad (3.41)$$

3.12.4.5. Comportement des poutres élancées soumises à des charges verticales :

On sait, par l'étude des barres comprimées, qu'un élément structural élancé chargé dans son plan de grande raideur (axialement dans le cas d'une barre comprimée) présente une tendance à la ruine par instabilité dans un plan de moindre raideur (en prenant une flèche transversale, dans le cas de la barre comprimée). Le comportement d'une poutre console chargée d'une charge verticale à son extrémité libre est illustré à la figure 3.29; ce phénomène est appelé « déversement ».

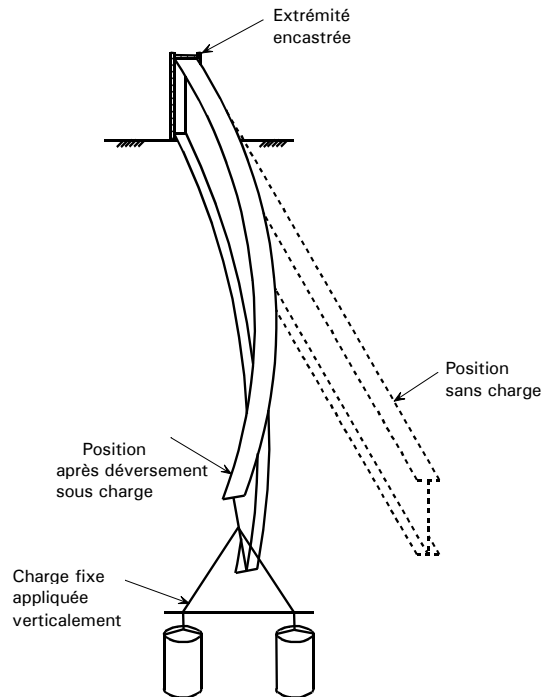


Fig. 3.29 : Déversement d'une poutre console en I.

Bien que celui-ci implique à la fois un déplacement latéral (u) et une distorsion autour d'un axe vertical passant par l'âme (ϕ), ainsi qu'indiqué à la figure 3.30, ce type d'instabilité est tout à fait similaire à celui, plus simple, du flambement par flexion d'une barre chargée axialement. La mise en charge de la poutre dans son plan de grande raideur (le plan de l'âme) entraîne une ruine par instabilité dans une direction de moindre raideur (produisant un déplacement latéral et une torsion).

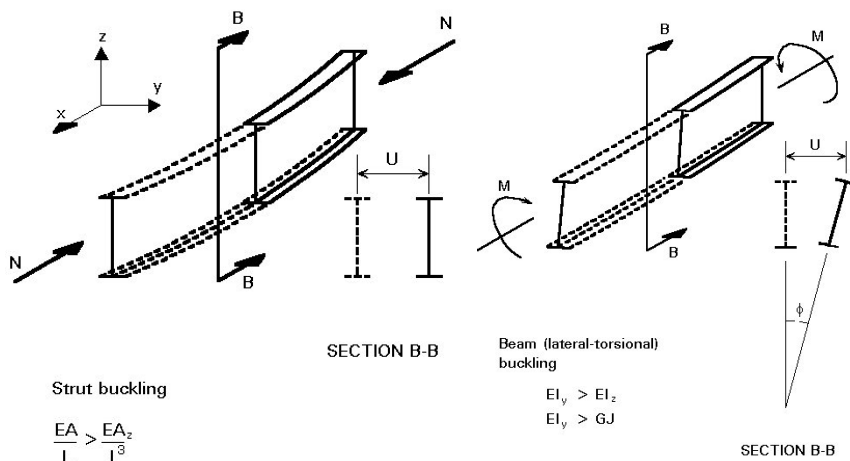


Fig. 3.30 : Similarité entre flambement d'une colonne et déversement d'une poutre.

Certes, de nombreuses constructions ne sont pas sujettes à cette forme d'instabilité ; ceci permet notamment de dimensionner les poutres de manière plus économique lorsqu'elles sont tenues

latéralement de manière efficace. Dans ce contexte, il importe de garder à l'esprit qu'en cours de construction de la structure, certaines poutres présentent un support latéral nettement moindre que celui assuré par les planchers, les couvertures, les contreventements... dès que ceux-ci sont en place. Les contrôles de stabilité sont donc primordiaux dans les phases de construction.

Le déversement influence le dimensionnement des poutres non tenues latéralement, de la même manière que le flambement par flexion gouverne celui des poteaux. Dès lors, la résistance à la flexion dépend de l'élancement de la poutre (voir figure 3.31) ; sa détermination est l'objet d'une démarche itérative qui s'apparente à l'utilisation des courbes de flambement pour le calcul des poteaux. Toutefois la nature des effets structuraux du déversement complique sérieusement l'étude du phénomène. Cela se traduit par une méthode de calcul quelque peu plus complexe.

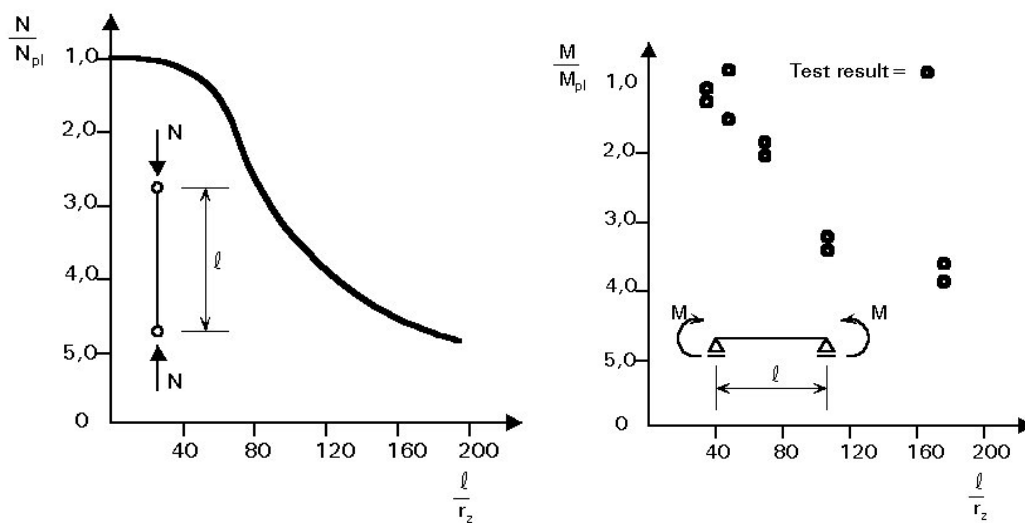


Fig. 3.31 : Analogie entre résistance des poteaux et résistance des poutres.

3.12.4.6. Modèle physique simple :

Avant d'aborder l'étude du déversement, il est sans doute judicieux d'essayer de dégager les aspects physiques du phénomène en ramenant le problème à un modèle simplifié. Puisque la flexion d'une poutre à section en double té revient essentiellement à transférer respectivement des efforts de traction et de compression dans les semelles (voir figure 3.33), la semelle comprimée peut dès lors être considérée comme un poteau. Les barres comprimées présentent une tendance au flambement. En l'espèce, la direction de faible raideur pour la semelle serait celle perpendiculaire à son plan ; la présence de l'âme suffit toutefois à empêcher un tel flambement. Dès lors, la semelle ne peut que flamber latéralement, c'est-à-dire dans son plan ; ceci entraîne néanmoins une certaine rotation de la section en raison de la continuité entre âme et semelles. Une telle approche du phénomène omet l'influence réelle de la torsion et le rôle de la semelle tendue ; il permet toutefois de décrire, de manière simplifiée, le comportement d'une poutre à âme élancée de grande hauteur, ainsi que celui des treillis et des poutres à âme constituée d'un fer plié en zigzag. Les premières tentatives faites pour traiter le problème du déversement se sont d'ailleurs fondées sur ce modèle physique simple.

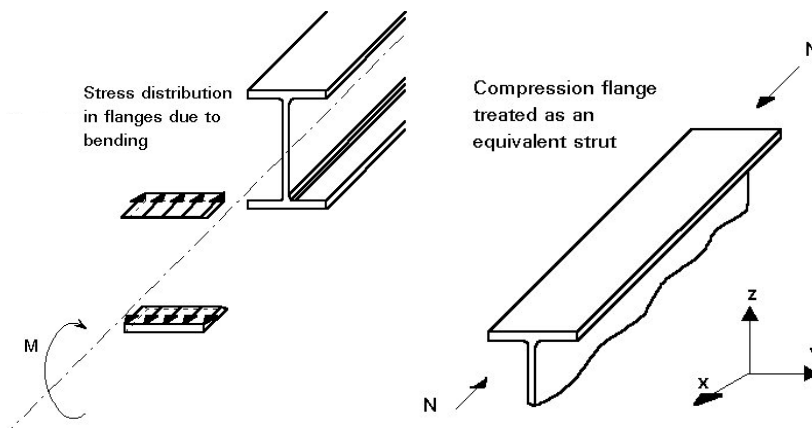


Fig. 3.33 : Approximation entre flambement d'un poteau et déversement d'une poutre.

3.12.4.7. Facteurs influençant le déversement :

L'analogie faite précédemment entre la semelle comprimée d'une poutre fléchie et le poteau permet aussi de mieux comprendre ce qui suit :

La charge d'instabilité de la poutre dépend principalement de la portée non contreventée, c'est-à-dire de la distance entre points où le déplacement latéral est empêché et de la raideur flexionnelle transversale (EI_z), puisque la charge de flambement est proportionnelle à la quantité EI_z/L^2 .

On peut imaginer que la forme de la section transversale joue un rôle. Une âme et une semelle tendue ont un effet plus important dans les sections relativement trapues que dans les sections élancées de grande hauteur. Dans le premier cas, la proximité de la semelle tendue, stable et de la semelle comprimée, instable, améliore la stabilité et produit une plus grande torsion de la section transversale. Dès lors le comportement en torsion devient également déterminant.

Dans les poutres soumises à un moment fléchissant variable sur la longueur, l'effort de compression dans la semelle comprimée n'est pas constant (figure 3.34). La stabilité de telles poutres est donc vraisemblablement plus grande que celle de ces mêmes poutres soumises à flexion pure.

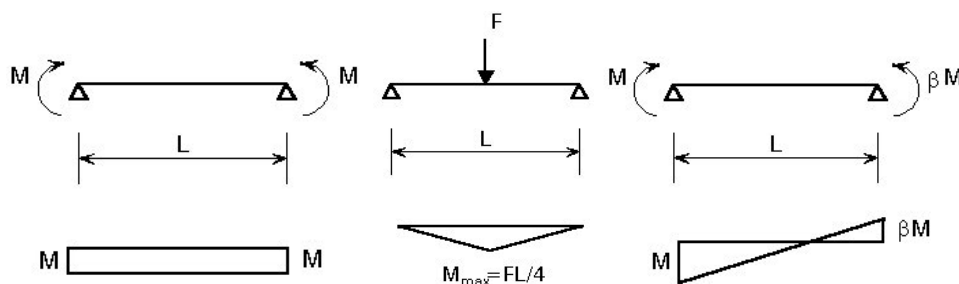


Fig. 3.34 : Effet du moment non uniforme sur le déversement.

Les restraints d'extrémité qui agissent sur l'allure de la forme de déversement (voir figure 3.35), sont susceptibles d'améliorer la stabilité de la poutre. Il s'agit des restraints torsionnelles en plan, c'est-à-dire autour de l'axe zz , (voir à nouveau les figures 3.30 et 3.32) dès lors que les déplacements caractérisant le déversement sont u et ϕ . Les empêchements de rotation dans le plan vertical influencent le diagramme des moments fléchissant dans la poutre (et peuvent donc aussi

contribuer à accroître la stabilité) mais ne modifient pas directement la forme de déversement, comme le montre la figure 3.35.

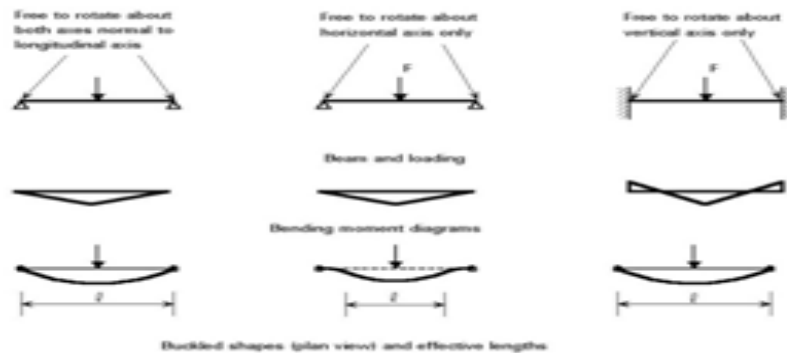


Fig. 3.35 : Effet des appuis sur le déversement.

3.12.4.8. Rôle favorable du contreventement :

La résistance d'une poutre en danger de déversement peut être très sensiblement améliorée si l'on dote cette poutre d'un contreventement approprié. Deux conditions sont toutefois nécessaires :

- Le contreventement doit être suffisamment raide pour empêcher le déplacement latéral des points tenus (ceci se réalise sans difficulté majeure) ;
- Le contreventement doit résister en toute sécurité aux efforts qui lui sont transmis par la membrure principale (ces efforts sont normalement évalués comme un certain pourcentage de l'effort existant dans la semelle comprimée de la poutre contreventée).

Sous réserve que ces deux conditions soient remplies, la pleine résistance d'une poutre fléchie dans le plan de l'âme peut être mobilisée entre les points de contreventement, si ceux-ci sont suffisamment rapprochés. A la figure 3.36, on a représenté les formes de déversement de poutres munies de contreventements en travée ; on découvre combien l'instabilité concerne la poutre tout entière. En principe, le contreventement devrait empêcher l'apparition de déplacements soit latéraux, soit de torsion. En pratique, l'examen de la déformée de la section transversale de la poutre donne à penser que le contreventement est le plus efficace lorsqu'il est disposé pour résister aux composantes les plus importantes de la déformation ; en d'autres termes, une entretoise attachée à la semelle supérieure de la poutre constitue une meilleure solution que cette même entretoise fixée à la semelle inférieure.

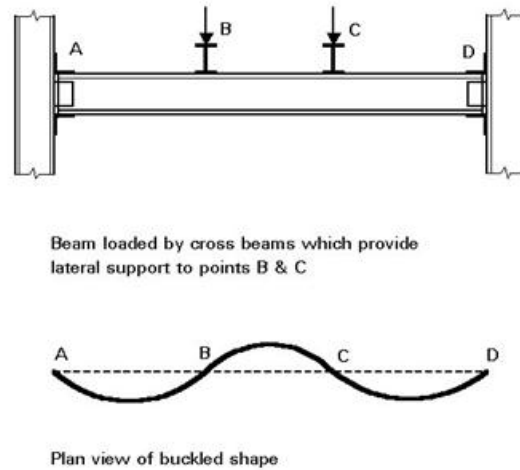


Fig. 3.36 : Déversement d'une poutre contreventée.

3.12.4.9. Procédure de vérification:

L'emploi direct de la théorie mathématique du déversement à des fins de calcul n'est pas indiqué pour les raisons suivantes :

- Les formules sont trop complexes pour un usage systématique.
- Les différences significatives existent entre les hypothèses qui sont à la base de la théorie et les caractéristiques des poutres réelles. Puisque la théorie postule un comportement élastique, elle fournit une borne supérieure à la valeur de la résistance.

À la figure 3.37, les valeurs expérimentales des charges de ruine par déversement d'un ensemble de poutres laminées sont comparées aux valeurs théoriques des moments critiques élastiques, calculés à l'aide de l'équation (3.47) de la deuxième partie de ce travail.

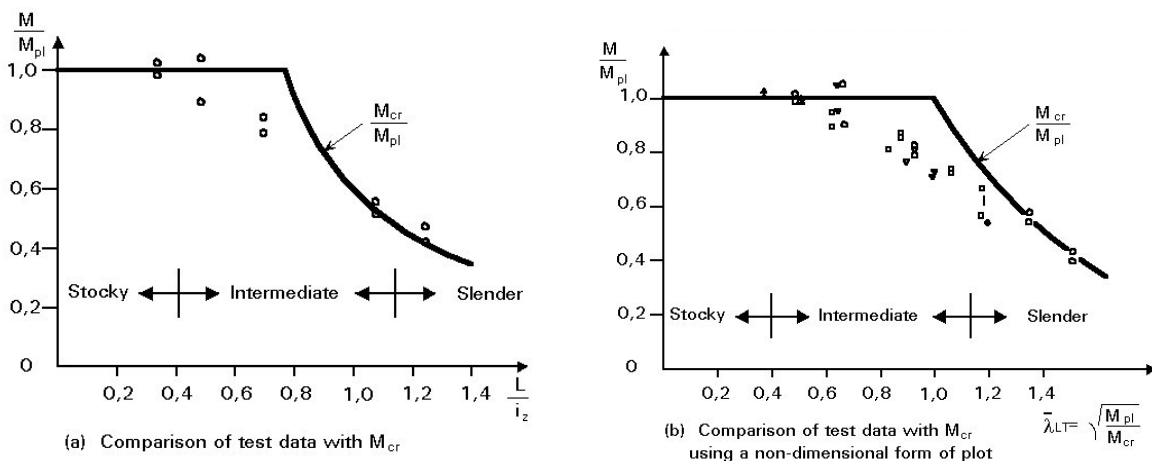


Fig. 3.37 : Comparaison des données expérimentales avec les valeurs théoriques.

La figure 3.37a ne reprend que les données relatives à des sections à ailes étroites. L'emploi, à la figure 3.37b, de la caractéristique sans dimension $\bar{\lambda}_{LT}$ présente l'avantage de pouvoir comparer directement les résultats de plusieurs séries d'essais (différent par le type de section transversale et la résistance du matériau).

Dans les deux figures, on peut distinguer trois régions :

- Les poutres trapues qui supportent M_{pl} , pour des valeurs de $\bar{\lambda}_{LT}$ inférieures à 0,4 (figure 3.37a) ;
- Les poutres élancées qui périssent pour des valeurs de moments sollicitant proches de M_{Cr} , pour des valeurs de $\bar{\lambda}_{LT}$ supérieures à 1,2 (figure 3.37b) ;
- Les poutres d'élancements moyens qui n'atteignent ni M_{pl} , ni M_{Cr} , dans le domaine $0,4 < \bar{\lambda}_{LT} < 1,2$ (figure 3.37b).

La stabilité latérale reste sans incidence sur le dimensionnement des poutres de la seule région 1 ; de telles poutres peuvent donc être étudiées selon les méthodes exposées dans la partie de poutres maintenues latéralement. La région 2 concerne une majorité des poutres dépourvues de support latéral ; il faudra se référer à l'instabilité inélastique, en prenant soin de tenir compte des imperfections géométriques, des contraintes résiduelles. Ainsi, que théorie et essais doivent jouer un rôle conjoint paraît évident. La complexité inhérente au problème est toutefois telle que les règles de dimensionnement ne savent qu'être empreintes d'un certain degré d'empirisme.

Ce paragraphe présente les spécifications de l'Eurocode3[6] relatives au calcul des divers types de poutres représentés aux figures 3.38a et 3.38b. Les sections de la figure 3.38b, telles les sections en U, présentent un seul axe de symétrie ; la méthode exposée ne s'applique que si la section est fléchie autour de l'axe de symétrie, ce qui revient à exiger que les charges soient appliquées, parallèlement à l'âme, au centre de cisaillement de la section.

Les sections à un seul axe de symétrie, fléchies dans l'autre plan (par exemple une section en double té à semelles inégales, fléchie autour de son axe fort, telle que représentée à la figure 3.38c ne peut être étudiée qu'en étendant la théorie développée dans les poutres maintenues latéralement ; en effet, le centre de cisaillement de la section n'est plus situé sur l'axe neutre de flexion.

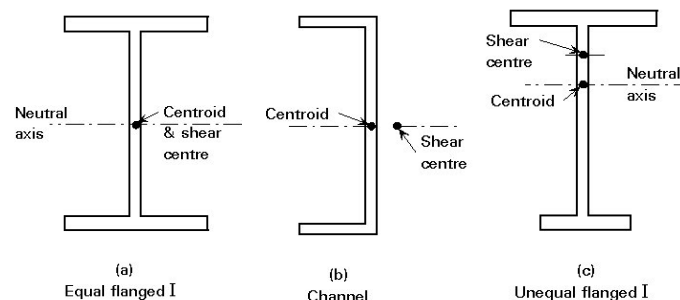


Fig. 3.38 : Sections à deux semelles égales et sections mono symétriques.

3.12.4.10. Déversement des poutres à sections doublement symétriques :

Le cas d'une poutre simple de section doublement symétrique sollicitée en flexion pure (fig.3.39) constitue le cas fondamental pour l'étude du déversement résolu par Timoshenko [11], [40] en considérant les hypothèses suivantes :

- barre parfaitement rectiligne constante sur toute sa longueur.
- barre idéale sans imperfections (déformation initiale, contraintes résiduelles, etc...)
- section de la barre indéformable,
- appuis de type « à fourche », voir fig.3.35

- matériau infiniment élastique linéaire,
- inertie I_z de la section faible vis à vis de l'inertie I_y ,
- petites déformations ($\sin\varphi = \varphi$ et $\cos\varphi = 1$)

N.B : l'appui à fourche est un appui simple à la flexion, qui empêche la rotation φ autour de l'axe x et le déplacement latéral v des sections d'appuis.

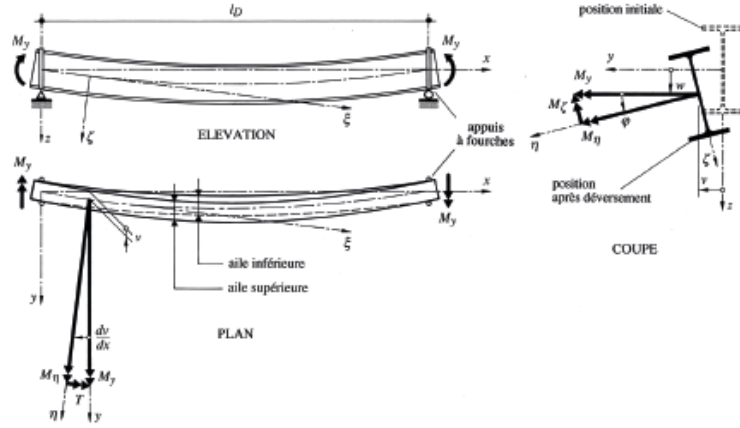


Fig. 3.39 [43] : Déversement d'une poutre de section symétrique sollicitée en flexion pure.

La poutre simple à l'état déformée (déversée) subit 3 déformations notées v , w et φ , ainsi les équations d'équilibre par rapport au système de coordonnées locales (ζ , η , ξ) ou bien (x , y , z) sont comme suit :

Flexion selon l'axe η , en tenant compte du fait que : $M_\eta = M_y = M_y \cos \varphi \approx M_y$

$$EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + M_y = 0 \quad (3.42)$$

Flexion selon l'axe ζ , en tenant compte du fait que : $M_\zeta = M_y \sin \varphi \approx \varphi M_y$

$$EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \varphi(x) M_y = 0 \quad (3.43)$$

Torsion autour de l'axe $\xi(x)$, en tenant compte du fait que $T = M_y \sin \frac{dv}{dx} \approx M_y \frac{dv}{dx}$,

$$\text{l'équation (3.41) s'écrit : } EI_w \frac{d^3 \varphi(x)}{dx^3} - GI_t \frac{d\varphi(x)}{dx} + M_y \frac{dv(x)}{dx} = 0 \quad (3.44)$$

La relation (3.42) est indépendante des deux autres. En dérivant une fois (3.44) et en remplaçant $\frac{d^2 v(x)}{dx^2}$ sa valeur tirée de (3.43), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$EI_w \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} - \frac{M_y^2}{EI_z} \varphi(x) = 0 \quad (3.45)$$

Cette expression a été établie pour la première fois par Prandtl, en 1899. La solution générale de cette équation est de la forme :

$$\varphi(x) = A_1 \cosh(\alpha x) + B_1 \sinh(\alpha x) + A_2 \sin(\beta x) + B_2 \cos(\beta x),$$

où $\varphi(x)$ désigne la rotation autour de l'axe longitudinale x .

A_1 , B_1 , A_2 et B_2 des constantes déterminées par les conditions aux limites qui sont :

$$\varphi = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } \varphi = 0 \text{ pour } x = l$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 0 \text{ pour } x = l \text{ donc la rotation de torsion nulle}$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \neq 0 \text{ le gauchissement d'extrémités est libre .}$$

ceci permet d'obtenir $A_1 = B_1 = B_2 = 0$

Le moment critique de déversement élastique M_{cr} , pour lequel le système idéalisé est en équilibre indifférent, s'écrit comme suit :

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 GI_t}{\pi^2 EI_z}} \quad (3.46)$$

où :

L : longueur de deversement (distance entre appuis latéraux empêchant le deversement)

E : module d'élasticité

I_z : moment d'inertie de flexion /zz (EI_z sa rigidité)

I_w : moment d'inertie de gauchissement

EI_w : rigidité de gauchissement.

G : module de cisaillement

I_t : moment d'inertie de torsion (GI_t sa rigidité)

3.12.4.11 Poutres à sections dissymétriques

On distingue une dissymétrie de la section par rapport à son axe yy , la section est alors mono-symétriques par rapport à l'axe zz , et une dissymétrie de la section par rapport à son axe zz , la section est alors mono-symétrique par rapport à l'axe yy

Poutres à sections mono-symétriques par rapport à l'axe zz

Le cas de poutre simple en flexion pure ne se rencontre pratiquement jamais en structure. Les appuis d'une poutre sont souvent des encastremements élastiques à la flexion et à la torsion, les charges extérieures ne se réduisent pas à un simple moment de flexion et par ailleurs la section de la barre peut être dissymétrique.

Plusieurs chercheurs ont étudié le déversement afin de trouver une méthode de calcul plus générale applicable à de nombreux cas pratiques. Parmi eux Clark and Hill (1960) ainsi que Djalaly (1974) qui ont proposé sur une base empirique la formule généralisée (3.47) suivante qui tient compte du type de section qui peut être mono-symétrique par rapport à zz (fig.3.40), des conditions d'appui et du type de chargement (fig.3.41).

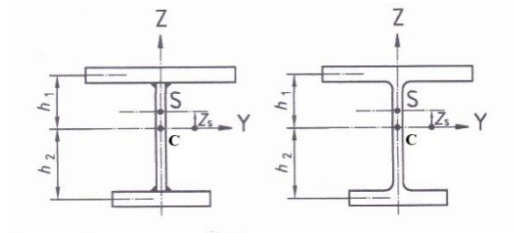


Fig. 3.40 : Sections transversales mono-symétriques (par rapport à zz).

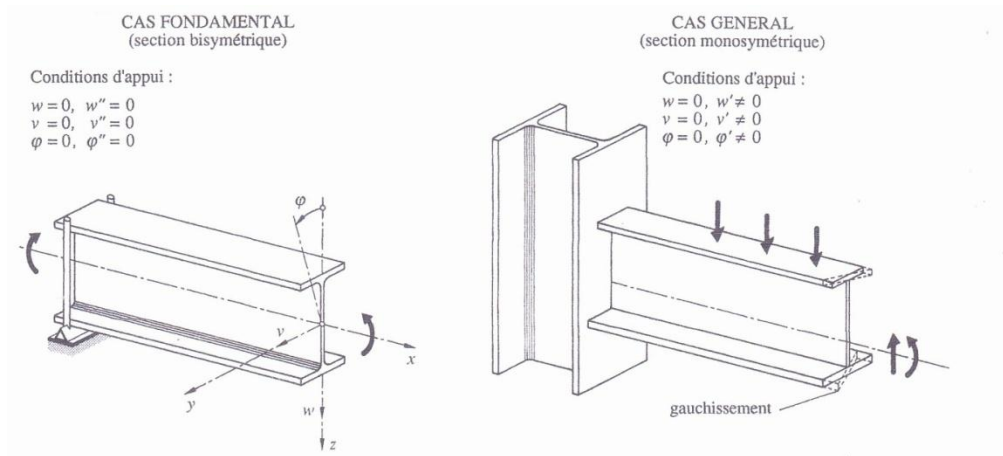


Fig. 3.41[43] : Conditions d'appui et nature de charge.

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left[\sqrt{\left(\frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_t}{\pi^2 EI_z}} + (C_2 Z_g - C_3 Z_j)^2 - (C_2 Z_g - C_3 Z_j) \right] \quad (3.47)$$

où : C_1 , C_2 et C_3 des facteurs dépendant du type de chargement et des conditions d'appui.

k : facteur analogue à celui de flambement en compression simple (variant de 0.5 à 1).

k_w : facteur de gauchissement de sections d'extrémités (variant de 0.5 à 1), sans mesures spéciales permettant d'empêcher ce gauchissement ce qui est difficile à réaliser en pratique on prend par sécurité $k_w = 1$.

$Z_g = (Z_a - Z_s)$ = distance entre le point d'application de la charge (coordonnée Z_a / yy) et le centre de cisaillement C (coord. Z_s), Z_g est positive lorsque la charge agit vers le centre de cisaillement à partir de son pt d'application, négative dans le cas contraire.

La distance Z_j est donné par :

$$Z_j = Z_s - \left[0.5 \int_A (y^2 + z^2) \left(\frac{z}{I_y} \right) dA \right] \quad (3.48)$$

(Z_j est positive lorsque la semelle ayant I_{zmax} est comprimée au point de moment max).

Cas particuliers

L'expression du moment critique de déversement élastique prend la forme suivante dans le cas d'une poutre à section transversale constante doublement symétrique (soit $Z_j = 0$) :

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left[\sqrt{\left(\frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_t}{\pi^2 EI_z}} + (C_2 Z_g)^2 - (C_2 Z_g) \right] \quad (3.49a)$$

Et quand cette poutre à section doublement symétrique, est chargée par moments d'extrémité soit : $(C_2 Z_g = 0)$, ou bien soumise à des charges transversales appliquées au centre de cisaillement soit : $(Z_g = 0)$, M_{cr} s'écrit encore par :

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left[\sqrt{\left(\frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_t}{\pi^2 EI_z}} \right] \quad (3.49b)$$

Dans les cas d'une poutre à section transversale en I monosymétrique et à semelles inégales (fig.3.40), les grandeurs géométriques suivantes peuvent être utilisées :

$$I_w = \beta_f (1 - \beta_f) I_z h_s^2 \quad \text{où : } \beta_f = \frac{I_{fc}}{(I_{fc} + I_{ft})}$$

Avec :

I_{fc} : moment d'inertie de la semelle comprimée /zz

I_{ft} : moment d'inertie de la semelle comprimée /zz

h_s : distance entre centres de cisaillement des semelles

$$Z_j = 0.8(2\beta_f - 1) \frac{h_s}{2} \quad \text{lorsque } \beta_f > 0.5$$

$$Z_j = 1.0(2\beta_f - 1) \frac{h_s}{2} \quad \text{lorsque } \beta_f < 0.5$$

3.12.4.12. Poutres à sections mono-symétriques par rapport à l'axe yy:

Ce type de sections (fig.3.42) [2], [3], [4], [5] constitue de façon particulière notre champ d'investigation en vue de proposer une formulation théorique qui concordera avec les résultats d'analyse numérique.

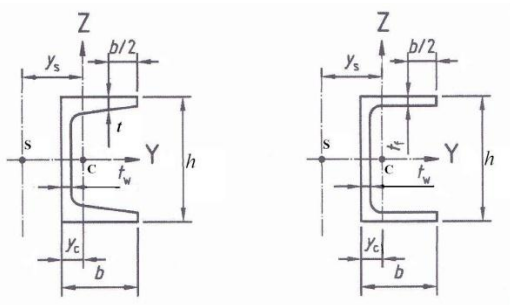


Fig. 3.42 : Sections transversales mono-symétriques par rapport à yy.

3.13 Établissement des équations fondamentales

3.13.1 Déversement d'une poutre simple de section doublement symétrique sollicitée en flexion pure

L'état déformé de la poutre est représenté à la figure 3.39 ; on y distingue les déplacements (u) et (v) et la rotation (φ). On y a aussi indiqué un nouveau système de coordonnées ξ η ζ qui est lié à la poutre et se déplace donc avec celle-ci. La flexion dans les plans $\xi\zeta$ et $\eta\zeta$, et la rotation autour de l'axe ζ sont régies par :

$$E I_y \frac{d^2 y}{dx^2} = M_\xi \quad (3.50)$$

$$E I_z \frac{d^2 u}{dx^2} = M_\eta \quad (3.51)$$

$$G I_t \frac{d\varphi}{dx} - E I_w \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = M_\zeta \quad (3.52)$$

Dans les expressions (3.50) et (3.51), les raideurs flexionnelles et les courbures dans les plans $\xi\zeta$ et $\eta\zeta$ ont été remplacées par les mêmes quantités pour les plans yx et zx , parce que l'angle φ reste faible. L'expression (3.52) fait intervenir les deux modes de résistance à la torsion d'une section à parois minces ; le premier terme correspond à la part du moment de torsion qui est transmise sous la seule forme de contraintes de cisaillement tandis que le second tient compte du gauchissement. Ce dernier phénomène est lié à la déformation axiale que subissent les semelles (fig. 3.41) lorsque la poutre à section en I ou en H est soumise à ses extrémités à des moments de torsion égaux mais opposés. Les deux semelles tendent à fléchir dans des directions opposées autour d'un axe vertical passant par l'âme, avec la conséquence que les sections droites de la poutre ne restent pas planes. Par ailleurs, il est clair que les déformations de gauchissement d'une poutre console (fig.3.41) doivent décroître à partir de l'extrémité libre, puisqu'elles sont totalement empêchées à l'encastrement. Ceci a pour effet de faire naître des contraintes normales dans les semelles ; la paire de couples, appelés bimoments, due à ces contraintes normales additionnelles, constitue la deuxième contribution de la résistance de la section à la torsion. Dans le cas de déversement, les restrictions au gauchissement résultent du fait que des sections transversales voisines ne subissent en général pas un gauchissement de même amplitude. Pour une section en I ou en H, les valeurs relatives de l'inertie de torsion de gauchissement I_w et de l'inertie de torsion uniforme I_t sont :

$$I_w = I_z \frac{h_f^2}{4} \quad \text{et} \quad I_t = \frac{2 b t^3}{3} + \frac{d t_w^3}{3}$$

On voit qu'elles sont principalement gouvernées par l'épaisseur des parois constituant la section transversale et par la hauteur de la section. Pour des sections trapues - utilisées habituellement comme poteaux - le premier terme de l'expression (3.52) procure la majeure partie de la résistance en torsion ; au contraire, le second terme est déterminant dans le cas de poutres à âme élancée, donc de grande hauteur.

On peut exprimer les composantes des moments sollicitant, respectivement dans les plans $\xi\zeta$ et $\eta\zeta$ et autour de l'axe ξ , en examinant la configuration déformée (fig.3.39) ; on peut écrire :

$$M_\xi = M \cos \varphi, \quad M_\eta = M \sin \varphi, \quad M_\zeta = M \sin \alpha \quad (3.53)$$

Puisque φ est petit, on a $\cos \varphi \approx 1$ et $\sin \varphi \approx 0$, tandis que, sur base de la figure 3.39, la quantité $\sin \alpha$ peut être assimilée à $\frac{du}{dx}$. Dès lors, les expressions (3.50) - (3.52) deviennent :

$$E I_y \frac{d^2 v}{dx^2} = M \quad (3.54)$$

$$E I_z \frac{d^2 u}{dx^2} = M \varphi \quad (3.55)$$

$$G I_t \frac{d\varphi}{dx} - E I_w \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = M \frac{du}{dx} \quad (3.56)$$

Puisque l'expression (3.54) ne contient que le seul déplacement (v), elle est indépendante des deux autres déplacements (u) et (φ). Dans les expressions (3.55) et (3.56), il y a un couplage entre les déplacements (u) et (φ) ; la solution des équations correspondantes fournit la valeur du moment critique élastique (M_{cr}) pour laquelle la poutre devient instable. En les combinant, on a :

$$EI_w \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{M_y^2}{EI_z} \varphi = 0 \quad (3.57)$$

Solution :

La résolution de l'équation différentielle (3.57) devient très simple si l'on pose nulle la constante de gauchissement I_w . Le résultat obtenu dans ces conditions s'applique directement aux poutres à section rectangulaire de faible largeur mais est sécuritaire pour les sections en I ou en H habituellement utilisées. Dans ce cas, l'équation (3.57) se réduit à :

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{M_y^2}{GI_t \cdot EI_z} \varphi = 0 \quad (3.58)$$

En posant $\mu^2 = \frac{M_y^2}{EI_z G I_t}$, la solution de (3.58) s'écrit :

$$\varphi = A \cos \mu x + B \sin \mu x \quad (3.59)$$

Les conditions aux limites aux deux extrémités sont les suivantes :

$$x = 0, \varphi = 0 \text{ d'où } : A = 0 \quad (3.60)$$

$$x = L, \varphi = 0 \text{ d'où } : B \sin \mu L = 0 \quad (3.61)$$

La condition (3.61) entraîne :

$$B = 0 \quad (3.62)$$

$$\sin \mu L = 0 \quad (3.63)$$

La condition (3.62) correspond à une configuration non déformée de la poutre, tandis que (3.63) fournit :

$$\mu L = 0, \pi, 2\pi, \dots \quad (3.64a)$$

La première solution non triviale de (3.63) est :

$$\mu L = \pi \quad (3.64b)$$

à laquelle correspond :

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{E I_z G I_t} \quad (3.65)$$

Puisque la forme de l'équation (3.58) est identique à celle de l'équation d'Euler pour le flambement des barres, on peut transposer au déversement tout le raisonnement développé à l'occasion du flambement.

Quant à l'équation générale (3.57), sa solution s'écrit :

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{E I_z G I_t} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 E I_w}{L^2 G I_t}} \quad (3.66)$$

On constate que la prise en compte des effets de gauchissement a pour résultat d'accroître la valeur de M_{cr} , dans une mesure qui dépend des valeurs relatives de $E I_w$ et $G I_t$.

3.13.2 Déversement d'une poutre soumise à une charge verticale concentrée appliquée à mi-portée :

On utilise l'approche développée à la section 3.13.1. On remarque, sur la figure 3.43, que la charge verticale produit un moment de torsion autour de l'axe x - x , valant $W/2 (u_o - u)$, lorsque la poutre se trouve en position déversée. Dès lors, les expressions (3.53) s'écrivent :

$$\begin{aligned} M_\xi &= \frac{W}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right) \\ M_\eta &= \frac{W}{2} \left(\frac{L}{s} - x \right) \sin \phi \\ M_\zeta &= \frac{W}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right) \sin \alpha + \frac{W}{2} (u_o - u) \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.67)$$

Substituant alors aux expressions (3.54) à (3.56) les formes aménagées en conséquence et éliminant (u) entre les deuxième et troisième expressions de (3.67), on obtient :

$$E I_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} - G I_t \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{W^2}{4 E I_z} \left(\frac{L}{2} - x \right)^2 \phi = 0 \quad (3.68)$$

dont la solution W_{cr} est :

$$E I_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} - G I_t \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{W^2}{4 E I_z} \left(\frac{L}{2} - x \right)^2 \phi = 0 \quad (3.69)$$

Le moment correspondant à mi-portée vaut :

$$M_{cr} = \frac{4,24}{L} \sqrt{E I_z G I_t} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 E I_w}{L^2 G I_t}} \quad (3.70)$$

Une autre manière de déterminer les charges critiques élastiques consiste à utiliser la méthode énergétique [36], [37], [38] ; on égale alors le travail effectué par la force appliquée au cours du phénomène de déversement à la variation d'énergie interne de déformation résultant des déformations de déversement. Considérons ainsi, au point C, un élément de longueur dx , sur l'axe longitudinal de la poutre ; la flexion dans le plan $\xi\zeta$ entraîne une rotation de l'extrémité B de la poutre dans le plan $\xi\zeta$ valant :

$$\frac{d^2u}{dx^2} \left(\frac{L}{2} - x \right) dx \quad (3.71)$$

La composante verticale de cette dernière est :

$$\varphi \frac{d^2u}{dx^2} \left(\frac{L}{2} - x \right) dx \quad (3.72)$$

Par sommation de tous les éléments entre $x = 0$ et $x = L/2$, on obtient le déplacement du point d'application de la charge W , d'où le travail :

$$W \int_0^{L/2} \varphi \frac{d^2u}{dx^2} \left(\frac{L}{2} - x \right) dx \quad (3.73)$$

L'énergie de déformation emmagasinée en résultat de la flexion latérale, de la torsion uniforme et de la torsion de gauchissement s'écrit :

$$\frac{E I_z}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2u}{dx^2} \right]^2 dx + \frac{E I_w}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right]^2 dx + \frac{G I_t}{2} \int_0^L \left[\frac{d\varphi}{dx} \right]^2 dx \quad (3.74)$$

Admettons une déformée de déversement du type :

$$\varphi = a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{3\pi x}{L} \quad (3.75)$$

L'égalité de (3.73) et (3.74) permet d'obtenir la valeur critique de la charge W .

L'emploi de cette méthode énergétique permet de traiter aisément le cas de la charge appliquée à un niveau autre que le centre de gravité de la section. Si l'on admet que W agit à une distance verticale a du centre de gravité, le travail additionnel est :

$$W a (1 - \cos \varphi_0) = \frac{W a \varphi_0^2}{2} \quad (3.76)$$

où φ_0 est la valeur de φ dans la section d'application de la force. Cette quantité doit être ajoutée à celle donnée par l'expression (3.73).

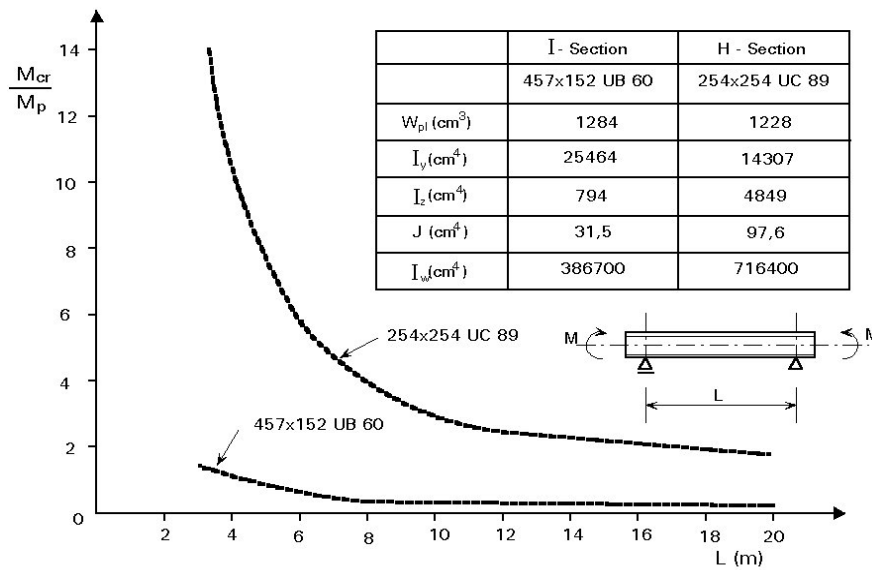


Fig.3.43: Comparaison du moment critique élastique des sections en I et H.

3.14. Conclusion :

- Sous réserve que les phénomènes d'instabilité puissent être exclus, les poutres en acier peuvent supporter des moments fléchissant supérieurs à ceux produisant tout juste la première plastification. La redistribution des contraintes dans la section peut s'opérer jusqu'à atteindre une distribution pleinement plastique des contraintes de flexion, à laquelle correspond le plein moment plastique M_{pl} .
- Les poutres hyperstatiques atteignent leur état de ruine par formation d'un mécanisme de ruine plastique lorsqu'un nombre suffisant de zones se sont entièrement plastifiées. Ces zones sont dites « rotules plastiques ».
- La valeur de M_{pl} est fournie par le produit de la limite d'élasticité (f_y) et d'une propriété géométrique de la section, appelée « module de flexion plastique » W_{pl} ; le rapport W_{pl}/W est désigné sous le nom de « facteur de forme ». M_{pl} est réduit en présence d'un effort tranchant, mais, dans la plupart des cas, cette réduction reste peu significative.
- Les poutres non tenues latéralement sur leur longueur et fléchies autour de leur axe fort présentent un danger de déversement.
- La portée non contreventée, l'élancement latéral (L/i_z), la forme de section transversale (rigidité torsionnelle et rigidité de gauchissement), la distribution des moments fléchissant et les conditions aux limites sont les facteurs essentiels influençant la résistance au déversement.
- Un contreventement suffisamment raide et suffisamment résistant qui empêche soit les déplacements latéraux, soit les déplacements de torsion permet d'améliorer la résistance au déversement.

- La charge critique élastique constitue le fondement pour la compréhension du comportement des poutres non tenues latéralement ; elle doit toutefois être l'objet de simplifications et de modifications de nature empirique avant de pouvoir servir de base à une méthode de calcul.
- L'élancement réduit de poutre $\bar{\lambda}_{LT}$ doit être déterminé préalablement à toute vérification au déversement d'une section d'essai.
- On tient respectivement compte, dans le calcul, de diverses conditions de support latéral ou de divers types de chargement au moyen de coefficients k et C qui modifient soit l'élancement de poutre $\bar{\lambda}_{LT}$, soit le moment critique élastique de référence M_{Cr} .
- La valeur du moment critique élastique de déversement d'une poutre élancée est déterminée sur la base d'une étude présentant de nombreuses analogies avec celle du flambement des poteaux.
- Le simple examen de l'expression du moment critique élastique de déversement, relative au cas fondamental, met bien en lumière :
 - l'influence de la forme de la section transversale qui agit sur la raideur à la flexion latérale (EI_Z), à la torsion uniforme (GI_t) et à la torsion de gauchissement (EI_W),
 - le rôle de la longueur non contreventée de la poutre.
- Des aménagements peuvent être apportés à la théorie fondamentale pour traduire l'influence du type de mise en charge, des contraintes aux extrémités et du niveau d'application des charges.
- Les mises en charges qui entraînent une distribution non-uniforme des moments peuvent être comparées au cas fondamental de la flexion pure à l'aide du coefficient C_1 . Elles sont pour la plupart moins sévères, ce qui justifie l'introduction, dans les normes, de valeurs de C_1 supérieures à l'unité.

CHAPITRE 4 : Aspect réglementaire des phénomènes d'instabilités

4.1. Introduction

L'étude des phénomènes d'instabilité élastique est particulièrement importante en construction métallique, car ils sont très fréquents du fait de l'utilisation des éléments minces et de grand élancement.

Le Flambement qui affecte les barres simplement comprimées (Flambement simple) ou comprimées et fléchies (Flambement en flexion composée), le déversement qui affecte les semelles comprimées des pièces fléchies et le voilement qui affecte les âmes des pièces fléchies.

4.2. Voilement local

Le voilement local des parois d'une section est un phénomène d'instabilité géométrique analogue dans son principe à celui du flambement : à partir d'un certain niveau de contrainte, une paroi de la section fléchit brutalement. À la différence du flambement, cette instabilité n'affecte qu'une petite partie de l'élément comme le montre la figure 4.1.

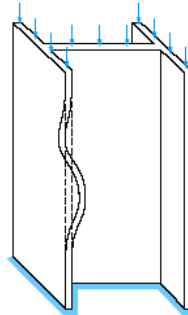


Fig.4.1 : Voilement local d'un poteau.

Les profilés de construction, qu'ils soient laminés ou soudés, peuvent être considérés comme être constitués d'un ensemble des parois distinctes, dont certaines sont *internes* (par exemple les âmes de poutres ouvertes ou les semelles de caissons) et d'autres sont *en console* (par exemple les semelles des profils ouverts et les ailes des cornières) (fig.4.2). Comme les parois des profilés de construction sont relativement minces comparées à leur largeur, lorsqu'elles sont sollicitées en compression (par suite de l'application de charges axiales sur la totalité de la section et / ou par suite de flexion) elles peuvent se voiler localement. La disposition d'une paroi quelconque de la section transversale au voilement peut limiter la capacité de résistance aux charges axiales ou la résistance à la flexion de la section, en l'empêchant d'atteindre sa limite élasticité. On peut éviter une ruine prématurée provoquée par les effets du voilement local en limitant le rapport largeur / épaisseur des parois individuelles au sein de la section transversale. Ceci constitue la base de l'approche par classification des sections transversales.

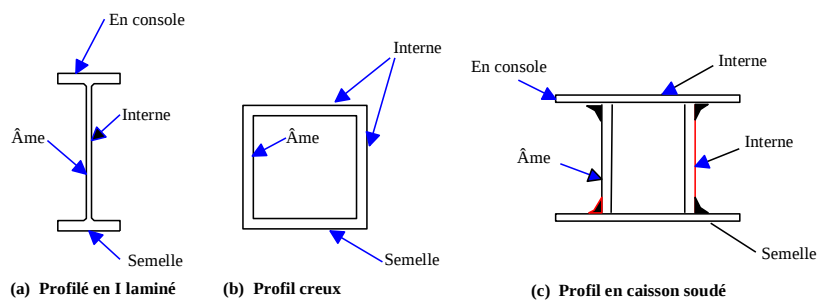


Fig.4.2 : Parois internes et parois en saillie.

4.2.1. Comportement des éléments plats comprimés :

Une plaque (paroi) plane rectangulaire mince soumise à des efforts de compression exercés sur ses petits côtés a une contrainte de voilement critique élastique (σ_{cr}) donnée par :

$$\sigma_{cr} = \frac{k_{\sigma} \cdot \pi^2 \cdot E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (4.1)$$

où :

k_{σ} : représente le coefficient de voilement (équation 3.24) de la plaque qui prend en compte les conditions d'appui aux bords, la distribution des contraintes et le coefficient d'aspect de la plaque.

ν : coefficient de Poisson

E : module de Young

La contrainte de voilement critique élastique (σ_{cr}) est donc inversement proportionnelle à $(b/t)^2$ qui est l'analogue à l'élancement $(L/i)^2$ pour le flambement des poteaux.

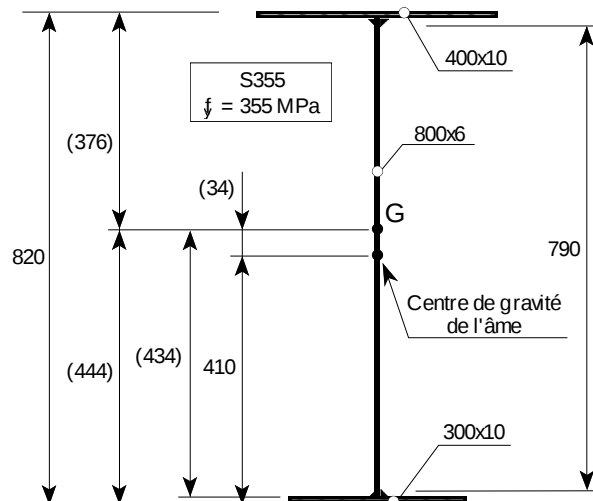
4.2.2. Exemple d'application :

Trois tôles en acier sont assemblées par soudage pour constituer une section en I simplement symétrique (mono-symétrique) par rapport à l'axe vertical de l'âme. La section transversale, représentée ci-dessous, peut être soumise soit à un effort axial, soit à un moment fléchissant.

Tous les composants sont réalisés en acier S355. La limite d'élasticité de calcul est prise égale à la limite d'élasticité minimale, c'est-à-dire $f_y = 355$ MPa.

Le coefficient ε a alors pour valeur : $\varepsilon = \sqrt{235 / f_y} = 0,813$.

Il s'agit de déterminer les propriétés de la section efficace nécessaires pour la vérification de la résistance en compression simple ou en flexion.

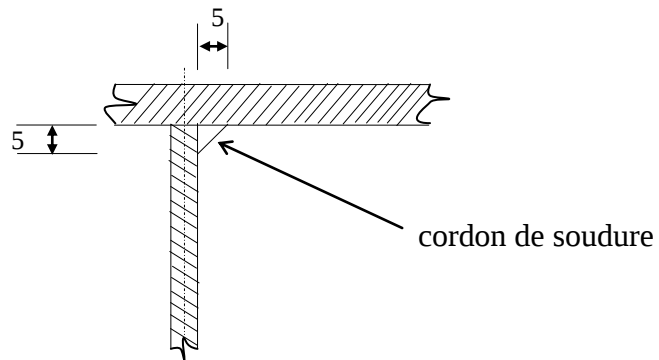


Nota : Les nombres entre parenthèses sur cette figure correspondent aux résultats des calculs présentés dans le paragraphe 3.

Hypothèses :

Les hypothèses suivantes sont adoptées :

- Les cordons de soudure qui assemblent l'âme aux deux semelles sont négligés dans le calcul des caractéristiques de la section, c'est-à-dire pour le calcul de l'aire de la section transversale, de l'inertie, etc.
- Les cordons de soudure à la jonction âme-semelle sont idéalisés par des triangles rectangles isocèles comme le montre la figure ci-dessous. Par conséquent, la hauteur libre de l'âme, d , mesurée entre les pieds de ces cordons, est de 790 mm.
- Les proportions limites b/t , correspondent à celles de l'Eurocode 3 [6].
- Le critère de calcul s'appuie sur l'atteinte de la limite d'élasticité de calcul au centre de gravité de la semelle la plus chargée et non pas au niveau de la fibre extrême; en conséquence, le module de la section sera calculé selon ce principe.



Caractéristiques de la section brute :

La section brute est constituée de plaques dont les dimensions sont prises égales à leurs valeurs nominales. Les calculs sont menés pour la section transversale (mono-symétrique) représentée sur la page 57 et ils fournissent les caractéristiques qui suivent.

Aire de la section brute A_g :

$$A_g = (400 \times 10) + (300 \times 10) + (800 \times 6) = 11\,800 \text{ mm}^2$$

Position z_g du centre de gravité :

La position du centre de gravité est définie par rapport à la fibre extrême inférieure :

$$z_g = [(4\,000 \times 815) + (4\,800 \times 410) + (3\,000 \times 5)] / 11\,800 = 444 \text{ mm}$$

Moment d'inertie selon l'axe y-y :

$$I_{yy} = \{[(400 \times 10^3) + (6 \times 800^3) + (300 \times 10^3)] / 12 + [4\,000 \times (376 - 5)^2] + [4\,800 \times (444 - 410)^2]\}$$

$$\begin{aligned} &+ [3\,000 \times (444 - 5)^2] \} 10^{-4} \\ &= 139\,033 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Modules de la section :

Par rapport au centre de gravité de la semelle supérieure :

$$W_s = 139\,033 / 37,1 = 3\,747 \text{ cm}^3$$

Par rapport au centre de gravité de la semelle inférieure :

$$W_i = 139\,033 / 43,9 = 3\,167 \text{ cm}^3$$

Section efficace en compression simple :

Détermination de la classe de la section transversale :

Les rapports b/t des plats (parois) sont déterminés en fonction de la demi-largeur c des semelles et de la hauteur nette d de l'âme entre les pieds des cordons de soudure supérieurs et inférieurs, c'est-à-dire :

- pour une aile de semelle supérieure : $c = 0,5 \times (400 - 6) - 5 = 192 \text{ mm}$
 $c/t = 192/10 = 19,2$
- pour une aile de semelle inférieure : $c = 0,5 \times (300 - 6) - 5 = 142 \text{ mm}$
 $c/t = 142/10 = 14,2$
- pour l'âme : $d = 800 - 5 - 5 = 790 \text{ mm}$
 $d/t = 790/6 = 131,7$

Pour les sections de Classe 3, les valeurs des proportions limites b/t sont :

- pour les semelles : $(c/t)_{lim} = 14 \varepsilon = 11,4$
- pour l'âme : $(d/t)_{lim} = 42 \varepsilon = 34,2$

La limite de référence est dépassée dans chaque paroi. Par conséquent, la section appartient à la Classe 4 et il faut réduire les largeurs de chaque paroi pour déterminer les dimensions de la section efficace.

Détermination des largeurs efficaces :

Le coefficient de réduction ρ de la zone comprimée de chaque paroi est obtenu selon la relation :

$$\rho = (\bar{\lambda}_p - 0,22) / \bar{\lambda}_p^2 \leq 1 \quad \text{pour les parois internes simplement comprimées.}$$

$$\rho = (\bar{\lambda}_p - 0,188) / \bar{\lambda}_p^2 \leq 1 \quad \text{pour les parois comprimées en consoles.}$$

où l'élancement réduit $\bar{\lambda}_p$ de la paroi est donné par:

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \frac{(c/t)}{28,4 \varepsilon \sqrt{k_\sigma}}$$

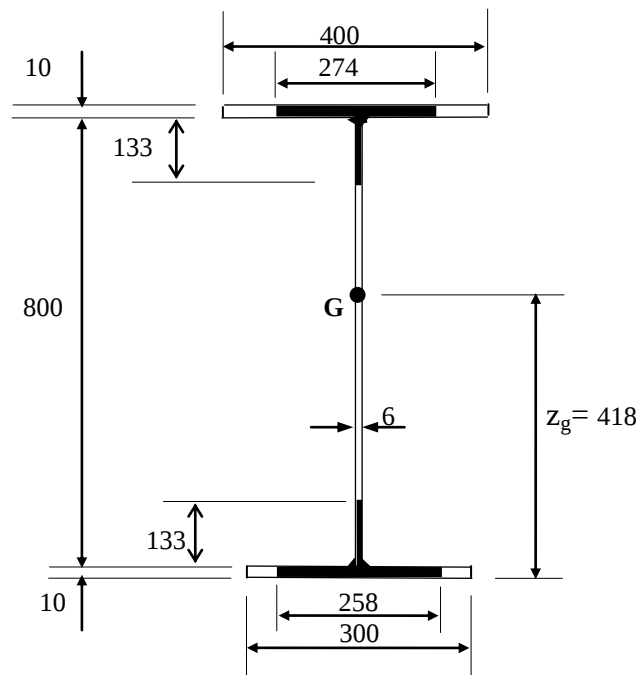
- pour la semelle supérieure : $c/t = 19,2$; $k_\sigma = 0,43 \Rightarrow \bar{\lambda}_p = 1,268$
 $\rho = 0,672$
 $b_{eff} = 0,672 \times 192 \times 2 + 5 \times 2 + 6 = 274 \text{ mm.}$

- pour la semelle inférieure : $c/t = 14,2$; $k_\sigma = 0,43 \Rightarrow \bar{\lambda} = 0,938$
 $\rho = 0,852$
 $b_{eff} = 0,786 \times 142 \times 2 + 5 \times 2 + 6 = 258 \text{ mm.}$

- pour l'âme : $d/t = 131,7$; $k_\sigma = 4 \Rightarrow \bar{\lambda} = 2,85$
 $\rho = 0,324$
 $h_{eff} = (0,324 \times 790) + 5 + 5 = 266 \text{ mm.}$
 (répartis en deux zones égales de 133 mm de chaque côté)

Propriétés de la section :

La section efficace est représentée à la figure ci-dessous, en accord avec les valeurs trouvées précédemment.



Section transversale efficace en compression axiale

Aire de la section transversale efficace $A_{eff,N}$:

$$A_{eff,N} = (274 \times 10) + (266 \times 6) + (258 \times 10) = 6\,916 \text{ mm}^2$$

Position du centre de gravité :

$$z_{g,N} = [(2\,740 \times 815) + (133^2 \times 3 + 133 \times 6 \times 743.5) + (2\,580 \times 5)] / 6\,916 = 418 \text{ mm}$$

Décalage du centre de gravité :

$$e_N = z_g - z_{g,N} = 444 - 418 = 26 \text{ mm.}$$

Ce décalage engendre un moment de flexion secondaire :

$$\Delta M = N_{Sd} e_N$$

qui se superpose avec M_{Sd} .

Section efficace en flexion :

Détermination de la classe de la section transversale :

Les rapports b/t des parois ont été calculés au paragraphe 4.1.

La proportion limite pour qu'une semelle comprimée soit de Classe 3 est :

$$(c/t)_{lim} = 14 \varepsilon = 11,4$$

La valeur trouvée étant supérieure, la section appartient à la Classe 4.

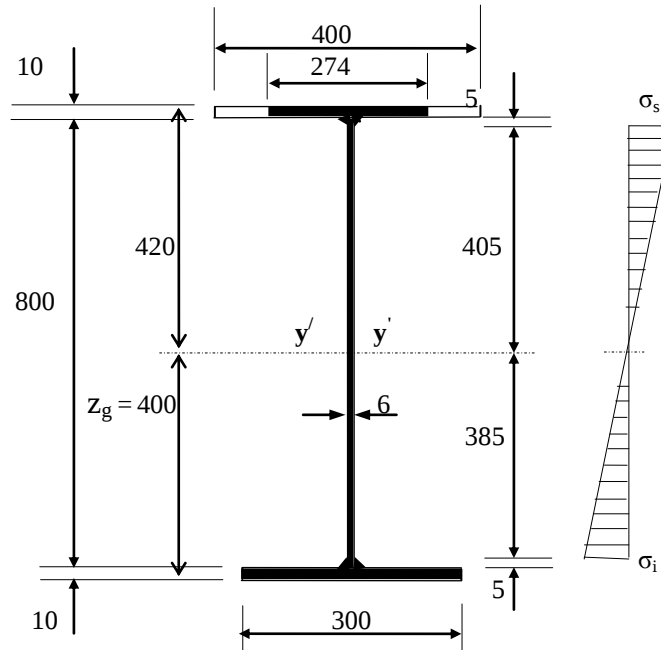
Puisque la plus grande partie de la rigidité à la flexion dépend des semelles, il est conseillé de déterminer d'abord la largeur efficace de la semelle comprimée. Ensuite, à partir de la section ainsi obtenue, il est possible de calculer la distribution de contraintes suivant la hauteur de la section, et plus particulièrement le rapport de contraintes ψ dont dépend le rapport $(d/t)_{lim}$.

La largeur effective de la semelle comprimée a été calculée au paragraphe 4.2 :

$$b_{eff} = 274 \text{ mm}$$

La section transversale à considérer pour estimer le rapport de contraintes dans l'âme est donnée à la figure ci-dessous. Son aire est $10\,540 \text{ mm}^2$ et son centre de gravité est situé à 400mm de la fibre extrême inférieure. Les valeurs des contraintes σ_i et σ_s , représentées sur cette figure, sont proportionnelles à la distance du centre de gravité. Ainsi, le rapport ψ des contraintes dans l'âme est :

$$\psi = \frac{\sigma_i}{\sigma_s} = -\frac{385}{405} = -0,951$$



Section brute utilisée pour estimer le rapport de contraintes dans l'âme (section fléchie)

Pour cette valeur de ψ , la proportion limite pour qu'une âme soit de Classe 3 $(d/t)_{\text{lim}}$ est :

$$\frac{42 \varepsilon}{0,67 + 0,33 \psi} = 96$$

Puisque nous avons $d/t = 131,7$, cette limite est largement dépassée.

En conséquence, l'âme appartient à la Classe 4, elle doit aussi être réduite.

Détermination des largeurs efficaces :

La largeur efficace de la semelle comprimée a été calculée au paragraphe précédent. La semelle tendue est pleinement efficace (le traînage de cisaillement est négligeable).

Considérons maintenant l'âme soumise à une flexion composée caractérisée par un rapport de contraintes ψ pris égal, en première approximation, à $\psi = -0,951$.

Le coefficient de flambement de l'âme est :

$$k_{\sigma} = 7,81 - 6,29 \psi + 9,78 \psi^2 = 22,6$$

$$\text{d'où l'élancement réduit : } \bar{\lambda} = \frac{(d/t)}{28,4 \varepsilon \sqrt{k_{\sigma}}} = \frac{(790/6)}{28,4 \times 0,813 \sqrt{22,6}} = 1,20$$

$$\text{et le coefficient de réduction : } \rho = \frac{\lambda - 0,055(3 + \psi)}{\bar{\lambda}} = [1,20 - 0,055(3 - 0,951)] / 1,20^2 = 0,755$$

Cette réduction s'applique à la portion d_c de la hauteur d , supportant les contraintes de compression. La zone comprimée possède donc la hauteur effective :

$$(d_c)_{\text{eff}} = 0,755 \times 405 = 286 \text{ mm} \quad (\text{perte} = 405 - 286 = 119 \text{ mm})$$

qui a été distribuée par rapport aux fibres les plus et les moins comprimées selon :

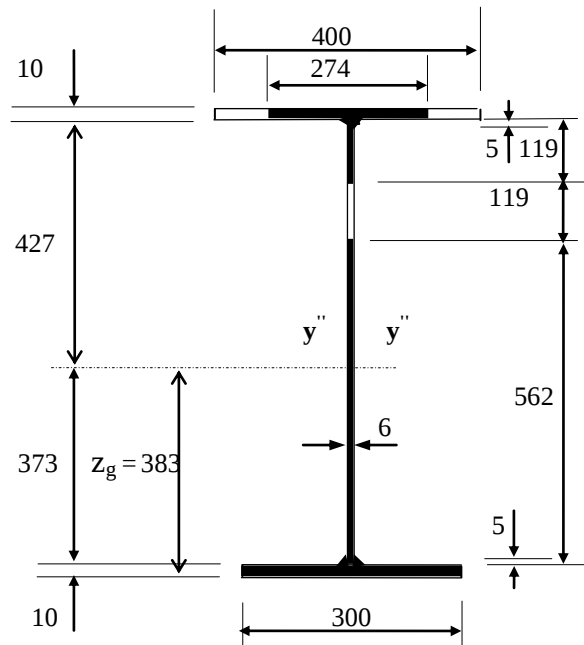
$$(d_c)_{\text{eff},s} = 0,4 \times 286 = 114 \text{ mm}$$

$$(d_c)_{\text{eff},i} = 0,6 \times 286 = 172 \text{ mm}$$

La distance $(d_c)_{\text{eff},s}$ est mesurée à partir du pied des cordons de soudure supérieurs.

Propriétés de la section :

La section efficace est représentée sur la figure ci-dessous, en accord avec les résultats obtenus au paragraphe précédent.



Section efficace en flexion

Aire de la section transversale $A_{\text{eff},M}$:

$$A_{\text{eff},M} = (274 \times 10) + [(119 + 562) \times 6] + (300 \times 10) = 9\,826 \text{ mm}^2$$

Position du centre de gravité :

$$\begin{aligned} z_{g,M} &= [(2\,740 \times 815) + (714 \times 750.5) \\ &\quad + (3\,372 \times 291) + (3\,000 \times 5)] / 9\,826 = 383 \text{ mm} \end{aligned}$$

Moment d'inertie selon l'axe $y''-y''$:

$$\begin{aligned}
 I_{y''y''} &= \{[(274 \times 10^3) + (6 \times 119^3) + (6 \times 562^3) + (300 \times 10^3)] / 12 \\
 &\quad + [2\,740 \times 432^2] + [714 \times (427 - 59.5)^2] \\
 &\quad + [3\,372 \times (373 - 281)^2] + (3\,000 \times 367^2)\} \cdot 10^{-4} \\
 &= 115\,278 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

Modules de la section :

Par rapport au centre de gravité de la semelle supérieure :

$$W_s = 115\,278 / 43,2 = 2\,668 \text{ cm}^3$$

Par rapport au centre de gravité de la semelle inférieure :

$$W_i = 115\,278 / 37,8 = 3\,050 \text{ cm}^3$$

Amélioration possible du calcul :

La distribution de contraintes qui correspond à la section efficace déterminée au paragraphe précédent, fournit une seconde approximation pour le rapport de contraintes ψ :

$$\psi = \frac{373 - 5}{427 - 5} = 0,872$$

Cette valeur affinée provient de :

$$k_\sigma = 20,7$$

$$\bar{\lambda} = 1,25$$

$$\rho = 0,723$$

$$(d_c)_{\text{eff}} = 0,723 \times 422 = 305 \text{ mm}$$

La faible différence avec la valeur précédente (286 mm) ne mérite pas d'être prise en compte dans d'éventuels calculs ultérieurs.

4.2.3. Conclusion :

Les profilés de construction peuvent être considérés comme être constitués d'un ensemble de parois distinctes.

- Des parois peuvent être *internes* (par exemple les âmes de poutres ouvertes ou les semelles de caissons) et d'autres sont *en console* (par exemple les semelles des profils ouverts et les ailes des cornières).
- Lorsqu'elles sont chargées en compression ces parois peuvent *se voiler localement*.
- Le voilement local au sein de la section transversale peut limiter la capacité de résistance aux sollicitations du profil en l'empêchant d'atteindre sa limite élasticité.

- La ruine prématurée (provoquée par les effets du voilement local) peut être évitée en limitant le rapport largeur / épaisseur - ou *élancement* - des parois individuelles au sein de la section transversale.
- Ceci constitue la base de l'approche par *classification des sections transversales*.
- L'EC3 définit quatre classes de section transversale. La classe à laquelle appartient une section transversale particulière dépend de *l'élancement* de chaque paroi et de la *distribution des contraintes* de compression.

4.3. Flambement :

4.3.1. Introduction :

Le flambement est le mode de ruine prépondérant et le plus dangereux des composants comprimés. Il se traduit par une déformation de flexion brutale du composant à partir d'un niveau donné de l'effort de compression.

Le cas le plus simple de flambement est celui du poteau articulé à ses deux extrémités et soumis à un effort de compression pure (figure 4.3). Le poteau est supposé parfaitement droit à l'état initial.

Le caractère stable ou instable du poteau se manifeste lorsque l'on applique au poteau une petite perturbation sous la forme d'un petit déplacement transversal y . L'équilibre est stable lorsque le poteau revient à sa position initiale dès que l'on supprime la perturbation.

Le flambement se produit lorsque, en augmentant N , on atteint un niveau de l'effort où le poteau ne revient pas à son état initial après la suppression de la perturbation ; l'équilibre est devenu instable, rendant le poteau impropre à sa fonction.

4.3.2. Contrainte critique d'Euler :

Euler a été le premier au XVIIIe siècle à formaliser le problème du flambement et à déterminer la valeur frontière de N qui sépare les deux régimes de comportement du poteau. Cette valeur frontière théorique de l'effort de compression est appelée charge critique d'Euler. La charge critique d'Euler pour un composant comprimé, articulé aux deux extrémités (figure 4.3) est donnée par l'expression :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \quad (4.2)$$

avec

E module d'Young,
 I moment d'inertie de la section de l'élément pour le plan de flambement considéré,
 l_0 longueur de l'élément.



Fig.4.3 : Modèle d'Euler.

De façon plus générale, pour des conditions aux limites quelconques, on démontre la charge critique d'Euler de la façon suivante :

Expression du moment fléchissant : $M(x) = -N \cdot y(x)$

Relation déplacement - sollicitation : $y''(x) = \frac{M(x)}{EI}$

Donc $y''(x) = \frac{-N \cdot y(x)}{EI} \Leftrightarrow y''(x) + \frac{N}{EI} y(x) = 0$

On pose $k^2 = \frac{N}{EI}$

d'où $y''(x) + k^2 \cdot y(x) = 0$

La solution de cette équation différentielle du 2nd ordre est :

$y(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$

Détermination des constantes avec les conditions aux limites :

- Pour $x = 0$ $y(0) = 0$ donc $A = 0$,
- Pour $x = l$ $y(l) = 0$

Donc $B \sin(kl) = 0$

Soit : $B = 0$: pas de flambement

Soit : $\sin(kl) = 0 \Leftrightarrow kl = n\pi$ avec $n = 1, 2, 3, \dots$

$n = 1$: 1^{er} mode de flambement : $k = \frac{\pi}{l}$

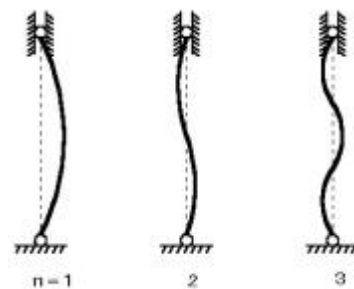
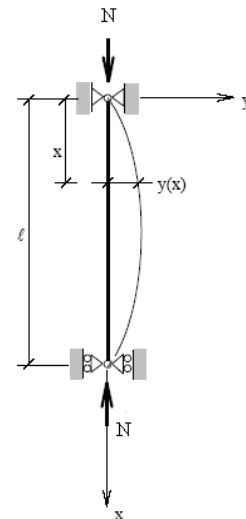


Fig.4.4 : Les modes de flambement.

soit : $k^2 = \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{N}{EI}$

On note N_{cr} la force critique d'Euler : $N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

On pose habituellement : $l = k.l_0$

avec l longueur de flambement de la barre,
 l_0 longueur réelle de la barre.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(kl_0)^2} \quad (4.3)$$

où k est un coefficient permettant de définir une longueur de flambement équivalente à celle d'une poutre simplement appuyée.

Les essais effectués sur des profilés réels montrent que le flambement se produit toujours pour des charges inférieures à la charge critique d'Euler. Ce résultat s'explique par la présence d'imperfections géométriques et de contraintes résiduelles résultant du processus de fabrication et de montage. La théorie d'Euler a cependant le mérite de mettre en évidence le paramètre géométrique essentiel du phénomène : l'élancement λ ou l'élancement réduit $\bar{\lambda}$. En effet, la contrainte critique d'Euler déduite de la relation ci-dessus fait apparaître λ .

Si A est l'aire de la section du poteau, la contrainte critique d'Euler s'écrit :

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{l^2} \frac{I}{A} = \frac{\pi^2 E}{l^2} i^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (4.4)$$

avec $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ rayon de giration de la section pour le plan de flambement considéré,
 $\lambda = \frac{l}{i}$ élancement de l'élément.

Afin de comparer les résultats des différents essais, on rend la relation (4.4) sans dimension en introduisant une valeur particulière λ_1 de λ , qui donne une contrainte critique d'Euler égale à la limite élastique :

$$f_y = \frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2} \quad (4.5)$$

En divisant membre à membre la relation (4.4) par la relation (4.5), on obtient :

$$\chi = \frac{\sigma_{cr}}{f_y} = \frac{\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}{\frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2}} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} \quad (4.6) \quad \text{soit: } \bar{\lambda} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \frac{1}{\sqrt{\chi}} \quad (\text{comme pour le voilement local})$$

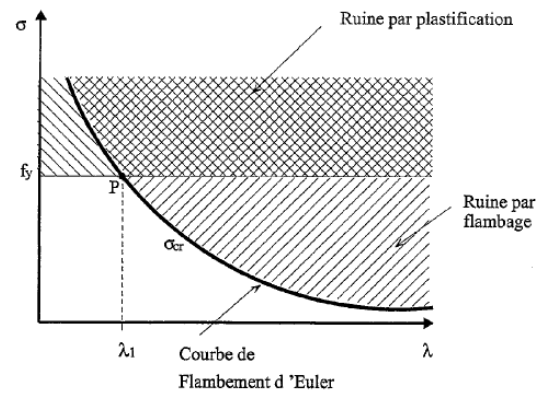


Fig.4.5 : Courbe de flambement d'Euler.

$\chi = \frac{\sigma_{cr}}{f_y}$ désigne la contrainte critique d'Euler réduite et $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$ l'élancement réduit du composant dans le plan de flambement considéré. Les résultats des essais effectués sur les éléments comprimés sont alors représentés sous forme de courbes dans le plan $(\bar{\lambda}, \chi)$ (Fig.4.6)

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93.9\varepsilon \quad \text{où :} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

4.3.3. Les courbes Européennes de flambement :

Les nombreux essais réalisés sous l'égide du CECM (Convention européenne de la construction métallique) ont été rassemblés par l'Eurocode 3 sous la forme de cinq courbes différentes a_0 , a, b, c et d (figure 4.6). Ces courbes montrent très clairement que la contrainte critique d'Euler rend assez bien compte de la réalité pour des élancements réduits supérieurs à 1,6. En dessous de cette valeur, dans le domaine d'utilisation courant des profils, la contrainte critique réelle est nettement plus faible que celle donnée par Euler.

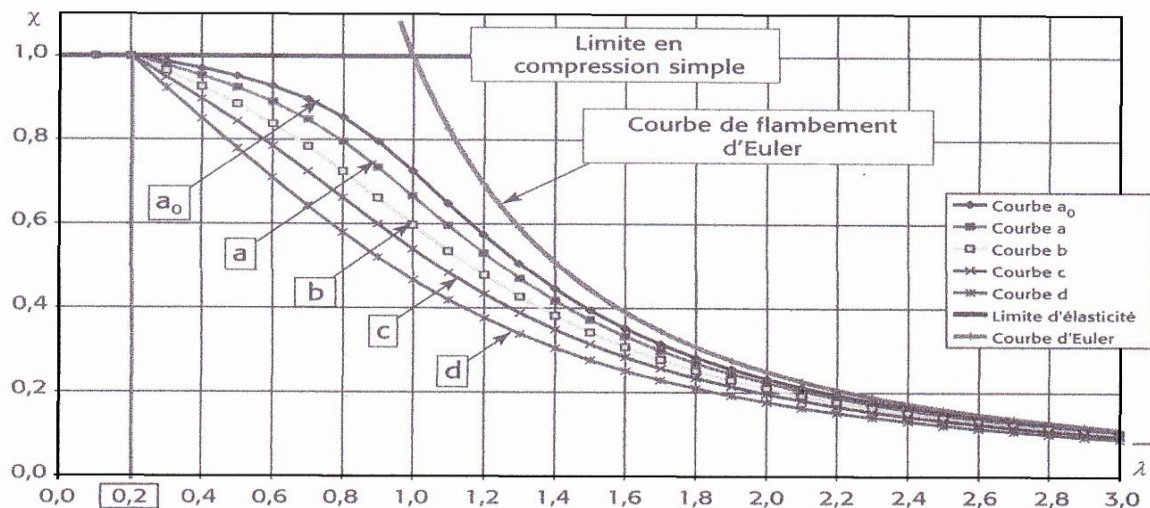


Fig.4.6 : Coefficient de réduction χ en fonction de l'élancement réduit $\bar{\lambda}$.

- La courbe a_0 : profilés en I et creux laminés à chaud, avec une limite élastique $=460 \text{ N/mm}^2$
- La courbe a : profilés quasiment parfaits,
- La courbe b : profilés possédant un degré moyen d'imperfection,
- La courbe c : profilés possédant de nombreuses imperfections,
- La courbe d : profilés dont les imperfections sont extrêmement importantes.

4.3.4. Calcul du coefficient de réduction χ :

La résistance caractéristique d'un profilé à l'état limite ultime de flambement est complètement définie par le coefficient de réduction χ à appliquer à la limite élastique. Conformément à l'EC3, χ est déterminé comme suit :

- le tableau 4.1 permet de choisir la courbe de flambement appropriée ;
- le tableau 4.2 donne la valeur du facteur d'imperfection α correspondant à la courbe de flambement retenue ;
- l'expression analytique des courbes de flambement de la figure 4.6 permet alors de calculer le coefficient de réduction χ :

$$\chi = \frac{1}{\phi + [\phi^2 - \bar{\lambda}^2]^{0.5}} \quad (4.7)$$

avec :

$$\phi = 0.5 \left[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2 \right] \quad (4.8)$$

La section d'un profilé ayant deux plans de flambement possibles, χ doit être déterminé pour chacun des deux plans et la valeur la plus faible des deux sera retenue pour le dimensionnement de l'élément.

Tableau 4.1 : Choix de la courbe de flambement.

SECTION TRANSVERSALE		Limites (cotes en mm)		Flambement suivant l'axe	Courbe de flambement	
					S235 S275 S355 S420	S460
Sections en I laminées		h / b > 1,2	$t_f \leq 40$	y-y z-z	a b	a ₀ a ₀
			$40 < t_f \leq 100$	y-y z-z	b c	a a
		h / b ≤ 1,2	$t_f \leq 100$	y-y z-z	b c	a a
			$t_f > 100$	y-y z-z	d d	c c
Sections en I soudées		$t_f \leq 40$		y-y z-z	b c	b c
		$t_f > 40$		y-y z-z	c d	b c
Sections creuses		Finies à chaud		Quelconque	a	a ₀
		Finies à froid		Quelconque	c	c
Sections en caisson soudé		En général (sauf comme indiqué ci-dessous)		Quelconque	b	b
		Soudures épaisses a > 0,5 t _f b / t _f < 30 h / t _w < 30		Quelconque	c	c

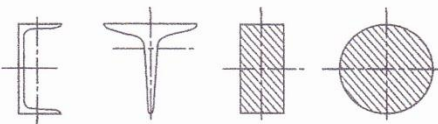
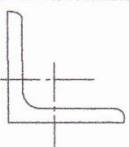
SECTION TRANSVERSALE		Limites (cotes en mm)	Flambement suivant l'axe	Courbe de flambement	
				S235 S275 S355 S420	S460
Sections en U, T et pleines			Quelconque	c	c
Sections en L			Quelconque	b	b

Tableau 4.2 : Facteur d'imperfection α

Courbe de flambement	a_0	a	b	c	d
Facteur d'imperfection α	0.13	0.21	0.34	0.49	0.76

4.3.5. Détermination pratique de la longueur de flambement :

La détermination de la longueur de flambement du composant constitue l'étape la plus délicate de son dimensionnement. La longueur de flambement d'un composant dépend des conditions de déplacements et de rotations à ses deux extrémités. Le tableau 4.3 illustre quelques modes d'instabilité à nœuds fixes.

Tableau 4.3 : Valeurs de K pour le calcul de la longueur de flambement

Mode propre fondamental de flambement				
 rotation et translation fixes  rotation libre et translation fixe  rotation et translation libres				
Valeurs théoriques	0,5	0,7	1,0	2,0

4.3.6. Critères de dimensionnement :

Pour dimensionner un élément comprimé, il faut faire le choix d'une section et des conditions aux limites de l'élément, déterminer la valeur de calcul de l'effort de compression N_{sd} et vérifier que :

$$N_{sd} \leq N_{c,Rd} \quad (4.9)$$

La résistance de calcul d'un composant comprimé $N_{c,Rd}$ dépend de l'élancement réduit et de la classe de la section retenue. Selon l'EC3 deux cas peuvent se présenter.

4.3.7. Vérification de la section à la résistance :

Cas où : $\bar{\lambda} \leq 0.2$

Section transversale de classe 1, 2 et 3

Il n'y a ni risque de flambement, ni risque de voilement local. Toute la capacité de résistance élastique de la section peut être utilisée. La résistance de calcul de la section est donnée par le seuil de plastification :

$$N_{c,Rd} = N_{pl,Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M0}} \quad (4.10)$$

Section transversale de classe 4

Il n'y a pas de risque de flambement simple mais risque de voilement local. Il en résulte que :

$$N_{c,Rd} = \frac{A_{eff} \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (4.11)$$

avec

A : aire de la section brute,

A_{eff} : aire efficace de la section déterminée selon le paragraphe 5.3.5 de l'EC3,

f_y : limite élastique du matériau,

γ_{M0} : coefficient partiel de sécurité du matériau, $\gamma_{M0} = 1.0$ si l'acier utilisé bénéficie de la marque NF (Norme française) acier sinon $\gamma_{M0} = 1.1$.

γ_{M1} : coefficient partiel de sécurité de résistance des sections de classe 4, $\gamma_{M1} = 1.1$.

4.3.8. Vérification de l'élément au flambement :

Cas où : $\bar{\lambda} > 0.2$

Section transversale de classes 1,2 et 3 :

Il n'y a pas de risque de voilement local mais risque de flambement simple. La résistance de calcul de la section est alors donnée par la relation :

$$N_{c.Rd} = N_{b.Rd} = \frac{\chi \cdot \beta_A \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (4.12)$$

$\beta_A = 1.0$: pour les sections transversales de classe 1, 2 ou 3.

Section transversale de classe 4 :

Il y a à la fois risque de voilement local et risque de flambement simple et :

$$N_{c.Rd} = \frac{\chi \cdot \beta_A \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{\chi \cdot A_{eff} \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (4.13)$$

$$\beta_A = \frac{A_{eff}}{A} : \text{pour les sections transversales de classe 4.}$$

avec :

χ : coefficient de réduction pour le mode de flambement considéré.

γ_{M1} : coefficient partiel de sécurité de résistance des éléments aux instabilités, $\gamma_{M1} = 1.1$

Remarque :

Il convient de noter qu'il n'y a pas lieu de déduire les trous de fixation dans les éléments comprimés sauf si ces trous sont des trous surdimensionnés (diamètres supérieurs aux diamètres normaux définis au § 1.3.2.2) ou des trous oblongs. On suppose ainsi implicitement que les boulons remplissent les trous normaux des éléments en compression.

4.3.9. Calcul du coefficient de réduction pour le flambement χ :

4.3.9.1. Calcul à l'aide des tableaux :

Le coefficient de réduction pour le flambement χ est déterminé de la façon suivante :

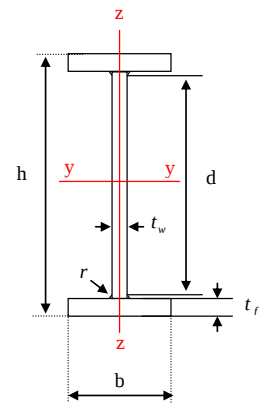
- Choix de la courbe de flambement (tableau 1) en fonction du type de section et de l'axe de flambement,
- Calcul de l'élancement réduit $\bar{\lambda}$.

$$\bar{\lambda} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right) [\beta_A]^{0.5}$$

$$\lambda_1 = \pi \left[\frac{E}{f_y} \right]^{0.5} : \text{élancement critique d'Euler}$$

$$\lambda = \text{Max}(\lambda_y, \lambda_z) : \text{élancement maximale de l'élément.}$$

$$\lambda_y = \frac{l_y}{i_y} ; \quad \lambda_z = \frac{l_z}{i_z}$$



l_y : longueur de flambement par rapport à l'axe yy

l_z : longueur de flambement par rapport à l'axe zz

i_y : rayon de giration par rapport à l'axe yy

i_z : rayon de giration par rapport à l'axe zz

- On trouve alors χ à l'aide du tableau 4 en fonction de $\bar{\lambda}$.

4.3.9.2. Calcul Analytique du coefficient de réduction χ :

Flambement par rapport à l'axe fort yy

$$\bar{\lambda}_y = \left(\frac{\lambda_y}{\lambda_1} \right) [\beta_A]^{0.5} ; \quad \varphi_y = 0.5 [1 + \alpha_y (\bar{\lambda}_y - 0.2) + \bar{\lambda}_y^2]$$

$$\chi_y = \frac{1}{\varphi_y + [\varphi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2]^{0.5}}$$

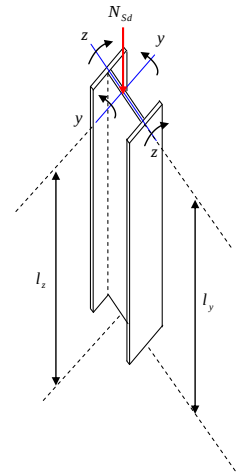
α : facteur d'imperfection correspondant à la courbe de flambement appropriée, donné par le tableau 2 ou bien par le tableau 5.5.1 de l'Eurocode 3.

Flambement par rapport à l'axe faible zz

$$\bar{\lambda}_z = \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_1} \right) [\beta_A]^{0.5} ; \quad \varphi_z = 0.5 [1 + \alpha_z (\bar{\lambda}_z - 0.2) + \bar{\lambda}_z^2]$$

$$\chi_z = \frac{1}{\varphi_z + [\varphi_z^2 - \bar{\lambda}_z^2]^{0.5}}$$

$$\chi = \text{Min}(\chi_y; \chi_z) ; \quad N_{c,Rd} = N_{b,Rd} = \chi \cdot \beta_A \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_M}$$



4.3.10. Exemples d'applications :

4.3.10.1. Exemple n°1 :

Vérification à la sécurité de la poutre en **(IPE 160)** de 5.0 m de longueur, simplement appuyée soumise à des charges de compressions suivantes :

Charge permanente : $N_G = 40.0 \text{ KN}$

Surcharge d'exploitation : $N_P = 30.0 \text{ KN}$

Nuance de l'acier : S235

La vérification à la sécurité des éléments comprimés est donnée par la formule suivante :

$$N_{Sd} \leq N_{c,Rd}$$

Calcul de la charge ultime de compression:

$$N_{Sd} = 1.35N_G + 1.5N_Q = 1.35 \times 40.0 + 1.5 \times 30.0 = 99 \text{ kN}$$

Détermination de la classe de la section :

Classe de la semelle : (semelle comprimée)

$$\frac{c}{t_f} = \frac{82/2}{7.4} = 5.54 \leq 10\varepsilon \quad \text{Classe 1.}$$

Classe de l'âme : (âme comprimée)

$$\frac{c}{t_w} = \frac{127.2}{5.0} = 25.44 \leq 33\varepsilon \quad \text{Classe 1.}$$

Classe de la section est de classe 1.

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = \sqrt{\frac{235}{235}} = 1.0$$

Vérification de la section à la résistance :

$$N_{c,Rd} = N_{pl,Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$N_{c,Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{20.1 \times 23.50}{1.1} = 429.4 \text{ kN}$$

$$N_{Sd} = 99.0 \text{ kN} < N_{c,Rd} = 429.4 \text{ kN} \dots\dots\dots \text{OK.}$$

Vérification de l'élément au flambement :

$$N_{c,Rd} = N_{b,Rd} = \chi \cdot \beta_A \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}}$$

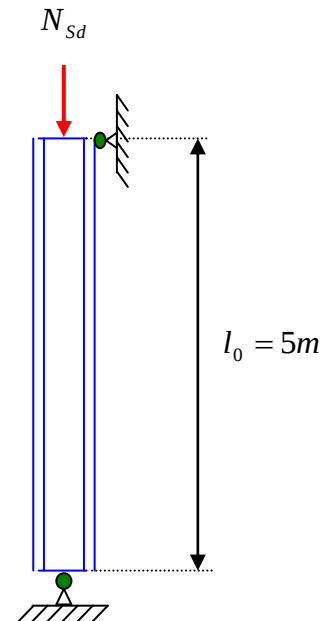
$$\chi = \frac{1}{\varphi + [\varphi^2 - \bar{\lambda}_{\max}^2]^{0.5}} \leq 1.0$$

$$\varphi = 0.5 \left[1 + \alpha(\bar{\lambda}_{\max} - 0.2) + \bar{\lambda}_{\max}^2 \right]$$

$$\bar{\lambda}_{\max} = \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_1} \right) [\beta_A]^{0.5} \quad \text{avec} \quad \beta_A = 1.0 \quad \text{pour les classes de sections 1, 2, et 3.}$$

$$\lambda_1 = \pi \left[\frac{E}{f_y} \right]^{0.5} = \pi \left[\frac{2.1 \times 10^6}{2350} \right]^{0.5} = 93.9$$

$$\lambda_{\max} = \max(\lambda_y, \lambda_z)$$



$$\lambda_y = \frac{l_y}{i_y} = \frac{500}{6.577} = 16.0$$

$$\lambda_z = \frac{l_z}{i_z} = \frac{0.5 \times 500}{1.844} = 136$$

$$\lambda_{\max} = \max(\lambda_y, \lambda_z) = 136$$

$$\bar{\lambda}_{\max} = \bar{\lambda}_z = \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_1} \right) [\beta_A]^{0.5} = \left(\frac{136}{93.9} \right) = 1.45$$

l_y : longueur de flambement autour de l'axe yy

l_z : longueur de flambement autour de l'axe zz

l_0 longueur du poteau

i_y : rayon de giration par rapport à l'axe yy

i_z : rayon de giration par rapport à l'axe zz

Choix de la courbe de flambement :

Flambement suivant zz

$$\frac{h}{b} = \frac{160}{92} = 1.95 > 1.2$$

Courbe de flambement : $b \rightarrow \alpha = 0.34$ (Table 5.5.3 Eurocode)

$$\varphi = 0.5 \left[1 + \alpha(\bar{\lambda}_{\max} - 0.2) + \bar{\lambda}_{\max}^2 \right] = 0.5 \left[1 + 0.34(1.45 - 0.2) + 1.45^2 \right] = 1.76$$

$$\chi = \frac{1}{\varphi + \left[\varphi^2 - \bar{\lambda}_{\max}^2 \right]^{0.5}} = \frac{1}{1.76 + \left[1.76^2 - 1.45^2 \right]^{0.5}} = 0.36$$

$$N_{b,Rd} = \chi_z \cdot \beta_A \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 0.36 \times 1.0 \times \frac{20.1 \times 23.5}{1.1} = 154.6 \text{ KN}$$

$$N_{c,Rd} = \text{Min}(N_{pl,Rd}, N_{b,Rd}) = 154.6 \text{ KN}$$

$$N_{Sd} = 99.0 \text{ KN} < N_{c,Rd} = 154.6 \text{ KN} \dots\dots\dots \text{OK.}$$

4.3.10.2. Exemple n°2

Vérification à la sécurité du poteau **en HEA 260** bi-articulé avec maintiens latéraux intermédiaires.

Le poteau est de nuance S235, soumis à un effort maximal de compression de 1000 kN.

Détermination de la classe de la section :

Classe de la semelle : (semelle comprimée)

$$\frac{c}{t_f} = \frac{260/2}{12.5} = 10.4 > 10\varepsilon \quad \text{Classe 2.}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = \sqrt{\frac{235}{235}} = 1.0$$

Classe de l'âme : (âme comprimée)

$$\frac{c}{t_w} = \frac{177}{7.5} = 23.6 \leq 33\varepsilon \quad \text{Classe 1.}$$

La section est de classe 2.

La formule de vérification à la sécurité d'un élément comprimé est donnée par la formule suivante :

$$N_{Sd} \leq N_{c.Rd} = \min(N_{pl.Rd}; N_{b.Rd})$$

Où :

N_{Sd} : Valeur de calcul des charges et surcharges appliquées au poteau.

$N_{c.Rd}$: Résistance de calcul de l'élément comprimé prise

Comme la plus petite des valeurs suivantes :

$$N_{pl.Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M0}} : \text{Résistance plastique de la section transversale à la compression.}$$

$$N_{b.Rd} = \chi \cdot \beta_A \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} : \text{Résistance de l'élément au déversement.}$$

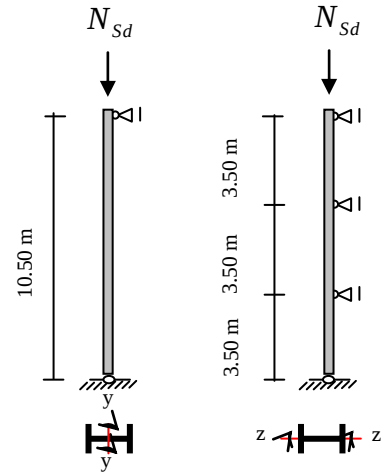
$\beta_A = 1.0$ pour les classes de sections 1,2, et 3.

$$N_{pl.Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{86.8 \times 23.50}{1.1} = 1854.36 \text{ kN}$$

$$N_{b.Rd} = \chi \cdot \beta_A \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{86.8 \times 23.5}{1.1} \chi = 1854.36 \chi$$

Calcul du coefficient de réduction pour le flambement χ :

$$\chi = \frac{1}{\varphi + [\varphi^2 - \bar{\lambda}_{\max}^2]^{0.5}} \leq 1.0$$



(Flambement suivant y-y)

(Flambement suivant z-z)

$$\varphi = 0.5 \left[1 + \alpha (\bar{\lambda}_{\max} - 0.2) + \bar{\lambda}_{\max}^2 \right]$$

$$\bar{\lambda}_{\max} = \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_1} \right) [\beta_A]^{0.5} \quad \text{avec } \beta_A = 1.0 \text{ pour les classes de sections 1, 2, et 3.}$$

$$\lambda_1 = \pi \left[\frac{E}{f_y} \right]^{0.5} = \pi \left[\frac{2.1 \times 10^6}{2350} \right]^{0.5} = 93.9$$

$$\lambda_{\max} = \max(\lambda_y, \lambda_z)$$

$$\lambda_y = \frac{l_y}{i_y} = \frac{1050}{10.97} = 95.72$$

$$\lambda_z = \frac{l_z}{i_z} = \frac{350}{6.50} = 53.8$$

$$\lambda_{\max} = \max(\lambda_y, \lambda_z) = \lambda_y = 95.72 \rightarrow \text{Axe de flambement } yy$$

$$\bar{\lambda}_{\max} = \bar{\lambda}_y = \left(\frac{\lambda_y}{\lambda_1} \right) [\beta_A]^{0.5} = \left(\frac{95.72}{93.9} \right) = 1.02$$

Choix de la courbe de flambement :

Axe de flambement yy

$$\frac{h}{b} = \frac{250}{260} = 0.96 < 1.2$$

$$t_f = 12.5 \text{ mm} < 100 \text{ mm}$$

Courbe de flambement : b $\rightarrow \alpha = 0.34$ (Table 5.5.3 Eurocode)

$$\varphi = 0.5 \left[1 + \alpha (\bar{\lambda}_{\max} - 0.2) + \bar{\lambda}_{\max}^2 \right] = 0.5 \left[1 + 0.34(1.02 - 0.2) + 1.02^2 \right] = 1.160$$

$$\chi = \frac{1}{\varphi + \left[\varphi^2 - \bar{\lambda}_{\max}^2 \right]^{0.5}} = \frac{1}{1.16 + \left[1.16^2 - 1.02^2 \right]^{0.5}} = 0.584$$

$$N_{b,Rd} = 1854.36 \chi = 1854.36 \times 0.584 = 1083 \text{ kN}$$

$$N_{c,Rd} = \min(N_{pl,Rd}, N_{b,Rd}) = \min(1854.36; 1083) = 1083 \text{ kN}$$

$$N_{Sd} = 1000 \text{ kN} < N_{c,Rd} = 1083 \text{ kN} \dots\dots\dots \text{OK.}$$

4.3.10.3. Exemple n°3 :

Dimensionnement du poteau de la figure ci-contre pour résister à l'effort de $N_{Sd} = 250kN$.

Calcul des longueurs de flambements l_y et l_z et déduire $l_{max} = \max(l_y, l_z)$

$$l_y = l_0 = 350cm$$

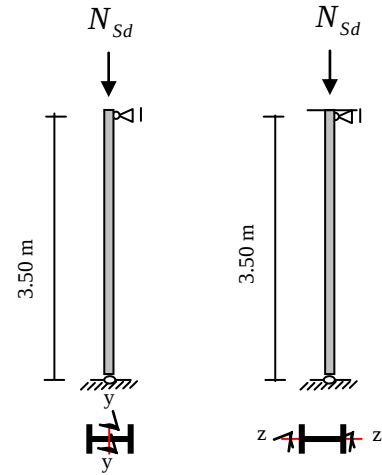
$$l_z = 0.7l_0 = 0.7 \times 350 = 245cm$$

$$l_{max} = \max(l_y, l_z) = l_y = 350cm$$

Calcul du moment d'inertie nécessaire pour résister à la charge critique d'Euler :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(l_{max}^2)} \geq N_{Sd} \quad \text{et} \quad I_{min} \geq \frac{N_{Sd} \cdot (l_{max}^2)}{\pi^2 E}$$

$$I_{min} \geq \frac{250 \times 350^2}{\pi^2 \times 2.1 \times 10^4} = 147.8cm^2$$



(Flambement suivant y-y) (Flambement suivant z-z)

Sélection des tableaux des profilés, la section minimale nécessaire ayant $I \geq I_{min}$

Soit **IPE 220** : $I_y = 2771.8cm^4$; $I_z = 204.8cm^4$; $A = 33.4cm^2$; $i_y = 9.11cm$; $i_z = 2.48cm$

$$I_{min} = I_z = 204.81cm^4 > I_{min}$$

Vérification de la section choisie (IPE 220) à la sécurité :

$$N_{Sd} \leq N_{c.Rd} = \min(N_{pl.Rd} ; N_{b.Rd})$$

Classe de la section **IPE 220** :

Classe de la semelle : (semelle comprimée)

$$\frac{c}{t_f} = \frac{b/2}{t_f} = \frac{110/2}{9.2} = 5.98 < 10\varepsilon \quad \text{Classe 1.}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = \sqrt{\frac{235}{235}} = 1.0$$

Classe de l'âme : (âme comprimée)

$$\frac{c}{t_w} = \frac{d}{t_w} = \frac{177.6}{5.9} = 30.1 \leq 33\varepsilon \quad \text{Classe 1.}$$

La section est de classe 1.

$\beta_A = 1.0$ pour les classes de sections 1,2, et 3.

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{33.4 \times 23.50}{1.1} = 713.54 kN$$

$$N_{b,Rd} = \chi \cdot \beta_A \cdot \frac{A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{33.4 \times 23.5}{1.1} \chi = 713.5 \chi$$

Calcul du coefficient de réduction pour le flambement χ :

$$\lambda_{\max} = \max(\lambda_y, \lambda_z)$$

$$\lambda_y = \frac{l_y}{i_y} = \frac{350}{9.11} = 38.42$$

$$\lambda_z = \frac{l_z}{i_z} = \frac{0.7 \times 350}{2.48} = 98.8$$

$$\lambda_{\max} = \max(\lambda_y, \lambda_z) = \lambda_z = 98.8 \rightarrow \text{Axe de flambement } zz$$

$$\bar{\lambda}_{\max} = \bar{\lambda}_z = \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_1} \right) [\beta_A]^{0.5} = \left(\frac{98.8}{93.9} \right) = 1.052$$

Choix de la courbe de flambement :

Axe de flambement zz

$$\frac{h}{b} = \frac{220}{110} = 2 > 1.2$$

$$t_f = 12.5 mm < 40 mm$$

Courbe de flambement : $b \rightarrow \alpha = 0.34$ (Table 5.5.3 Eurocode)

$$\varphi = 0.5 \left[1 + \alpha (\bar{\lambda}_{\max} - 0.2) + \bar{\lambda}_{\max}^2 \right] = 0.5 \left[1 + 0.34 (1.052 - 0.2) + 1.052^2 \right] = 1.198$$

$$\chi = \frac{1}{\varphi + \left[\varphi^2 - \bar{\lambda}_{\max}^2 \right]^{0.5}} = \frac{1}{1.198 + \left[1.198^2 - 1.052^2 \right]^{0.5}} = 0.564$$

$$N_{b,Rd} = 713.5 \chi = 713.5 \times 0.564 = 402.4 kN$$

$$N_{c,Rd} = \min(N_{pl,Rd}, N_{b,Rd}) = \min(713.54; 402.4) = 402.4 kN$$

$$N_{Sd} = 250 kN < N_{c,Rd} = 402.4 kN \dots\dots\dots \text{OK.}$$

4.3.11. Conclusion :

5. De nombreux types de sections transversales sont utilisées pour la réalisation de membrures comprimées ; ces dernières peuvent être simples, composées, à section variable continûment ou par tronçons.
6. Un tronçon de poteau court (pour lequel $\bar{\lambda} \leq 0,2$) périclît par écrasement plastique de la section transversale ; le flambement ne doit donc pas être vérifié.
7. Si $\bar{\lambda} > 0,2$, une réduction de la capacité portante doit être considérée en raison du danger de flambement. Les poteaux à élancement intermédiaire périssent par flambement dans le domaine inélastique et les poteaux élancés, par flambement élastique.
8. Les courbes européennes de flambement donnent les valeurs du coefficient de réduction pour le cas de flambement considéré en fonction du type de section, de son processus de fabrication, de l'élancement réduit et de l'axe autour duquel le flambement survient. Elles sont fondées sur des approches expérimentale et théorique et fournissent des résultats fiables.

4.4. Déversement

4.4.1. Introduction

Les poutres fléchies sont en générale constituées de profilés laminés en I. Comme leurs inerties par rapport à l'axe faible z est de beaucoup inférieure à celle relative à l'axe y , cela peut être la cause d'un phénomène d'instabilité appelé **déversement**.

Le déversement est un phénomène d'instabilité géométrique [8], [9] des poutres soumises à un moment de flexion qui survient lorsque la partie comprimée ou l'aile de certaines sections ouvertes se dérobe latéralement, entraînant la section dans un mouvement de translation horizontale et de rotation autour du centre de cisaillement en plus de la translation verticale due aux charges appliquées (Fig.4.7).

La résistance au déversement dépend donc de la rigidité à la flexion latérale EI_z de la poutre et de la rigidité en torsion de la section.

De façon analogue au flambement ou au voilement local, il existe un moment critique au-delà duquel la poutre déverse. S.P. Timoshenko[11] a, dans « *La théorie de la stabilité élastique* », déterminé analytiquement le moment critique de déversement pour une poutre simplement appuyée vis-à-vis de la flexion.

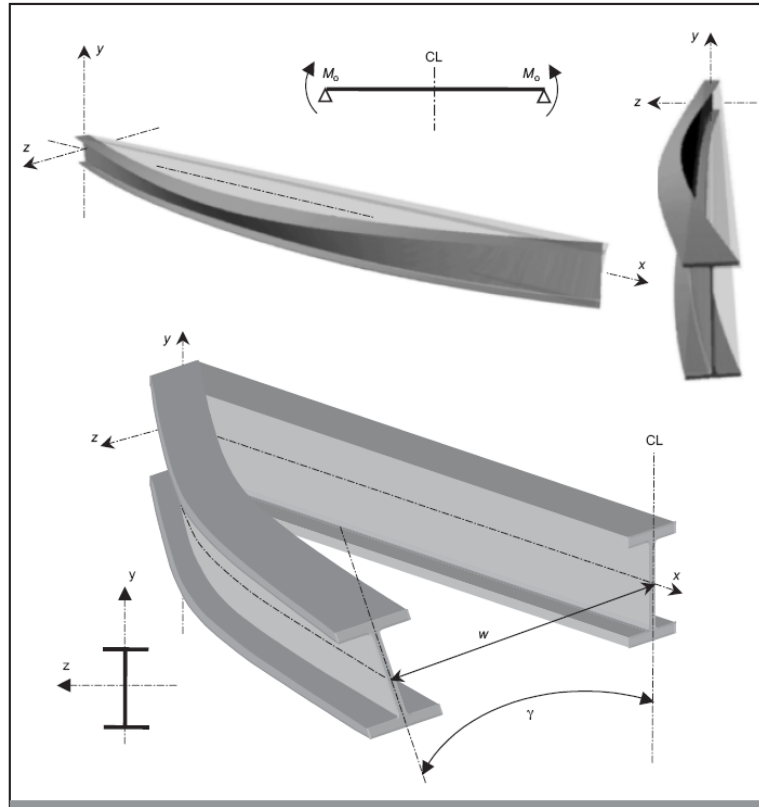


Fig.4.7 : Déversement des poutres.

4.4.2. Evaluation du moment critique du déversement élastique :

Nous en rappelons ci-après les principales étapes. Les hypothèses de base du modèle sont les suivantes :

- la rotation de torsion et le déplacement latéral sont empêchés aux extrémités ;
- un moment constant est appliqué aux extrémités (cas de flexion pure) ;
- la poutre est droite, de section doublement symétrique et constante sur toute sa longueur ;
- la poutre est sans imperfection géométrique initiale ni contrainte résiduelle ;
- la section est indéformable ;
- le matériau est élastique linéaire ;
- le moment d'inertie de flexion latérale I_z est très petit devant le moment d'inertie de flexion verticale I_y ;
- les déformations sont petites.

La figure 4.8, décompose dans les trois plans le mouvement de la poutre déversée. On écrit l'équilibre de la poutre dans le système d'axes (x', y', z') lié à l'état déformé :

- suivant y' : flexion sous le moment $M_{y'} = M_y \cos \theta \approx M_y$

($\cos \theta \approx 1$ car θ est petit)

$$\text{On a : } EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + M_y = 0 \quad (4.14)$$

- suivant z' : flexion sous le moment $M_{z'} = M_z \sin \theta \approx M_z \theta$
($\sin \theta \approx \theta$ car θ est petit)

$$\text{On a : } EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + M_z \theta = 0 \quad (4.15)$$

- suivant x' : la poutre est soumise à un moment de torsion

$$T = M \sin \varphi \approx M \varphi = M \frac{dv}{dx}$$

$$\text{On a : } EI_w \frac{d^3 \theta}{dx^3} - GK \frac{d\theta}{dx} + M \frac{dv}{dx} = 0 \quad (4.16)$$

En dérivant (4.16) et en utilisant (4.15), on obtient l'équation différentielle qui régit le phénomène du déversement :

$$EI_w \frac{d^4 \theta}{dx^4} - GK \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{M^2}{EI_z} \theta = 0 \quad (4.17)$$

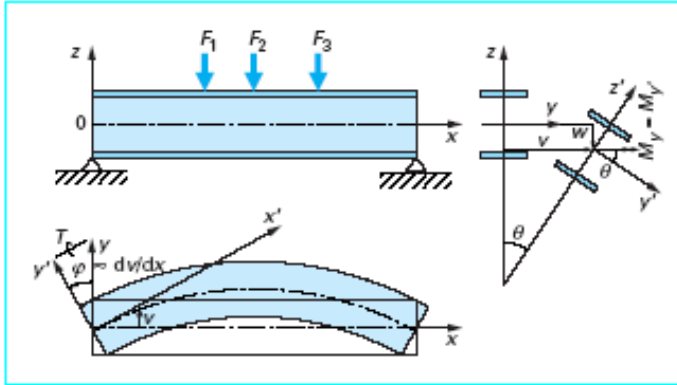


Fig.4.8 : Schématisation d'une poutre déversée.

On montre aisément avec les conditions limites stipulées parmi les hypothèses du modèle que la solution de (4.17) se met sous la forme :

$$\theta = A \sin qx \quad (4.18)$$

Avec q tel que $q^2 = -\alpha + \sqrt{\beta + \alpha^2}$

$$\alpha = \frac{GI_t}{2EI_w} ; \beta = \frac{M^2}{E^2 I_w I_z}$$

Par ailleurs en $x = L$, $\theta = 0$, il en résulte que $A \sin qL = 0$, c'est-à-dire $qL = n\pi$.

Pour le mode fondamental $n = 1$:

$$q = \frac{\pi}{L} \text{ entraîne } q^2 = \frac{\pi^2}{L^2}$$

$$\text{D'où} \quad -\alpha + \sqrt{\beta + \alpha^2} = \frac{\pi^2}{L^2} \quad (4.19)$$

$$\text{Donc} \quad \beta = \frac{\pi^4}{L^4} + 2\alpha \frac{\pi^2}{L^2}$$

En remplaçant alors α et β par leurs expressions dans (4.18), on obtient l'expression du moment critique du déversement :

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 GI_t}{\pi^2 EI_z}} \quad (4.20)$$

Des formules plus générales ont ensuite été proposées pour couvrir tous les cas rencontrés en pratique. L'annexe F de l'EC 3-DAN propose notamment une **expression empirique générale** du moment critique de déversement pour une section transversale constante symétrique par rapport à l'axe de faible inertie et pour une flexion suivant l'axe de forte inertie :

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left[\sqrt{\left(\frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GK}{\pi^2 EI_z}} + (C_2 z_g - C_3 z_j)^2 - (C_2 z_g - C_3 z_j) \right] \quad (4.21)$$

avec :

k et k_w facteurs de longueur effective,

k concernant la rotation d'extrémité dans le plan de chargement. Il est analogue au rapport longueur de flambement sur longueur réelle d'un élément comprimé, suivant les conditions aux extrémités on pourra utiliser les valeurs de la figure 4.8, du tableau 4.3

k_w concernant le gauchissement d'extrémité. Sauf dispositions particulières prises pour empêcher tout mouvement aux extrémités, on prendra : $k_w = 1$.

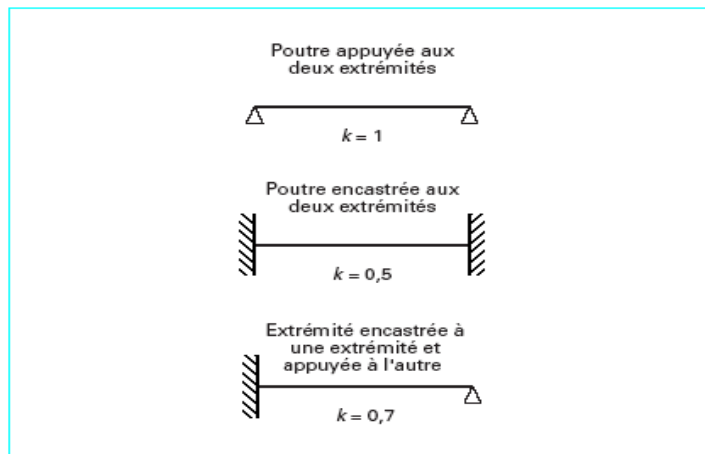


Fig.4.9 : Facteur de longueur effective k .

C_1 , C_2 et C_3 sont des coefficients dépendants des conditions de chargement et d'encastrement; les tableaux 4 et 5 ci-après donnent des valeurs pour ces coefficients pour les configurations les plus usuelles.

$$z_g = z_a - z_s$$

$$z_j = z_a - \left[0.5 \int_A z(y^2 + z^2) dA \right] / I_y$$

avec

z_a coordonnée suivant z du point d'application de la charge,

z_s coordonnée du centre de cisaillement.

Pour une section doublement symétrique, il convient de noter que $z_j = 0$. Pour des sections simplement symétriques à semelles inégales, l'annexe F de l'EC 3-DAN donne des expressions approchées de z_j qui évitent des intégrations fastidieuses.

4.4.3. Méthode de l'Eurocode3 :

Le dimensionnement des poutres suivant l'EC 3 s'effectue par la procédure suivante :

- calcul du moment critique de déversement par la relation (4.21) ; M_{cr} doit être calculé avec les caractéristiques de la section brute. Pour les sections de classe 4, le calcul de M_{cr} sera fait en considérant que la constante de torsion uniforme (k) GI_t est nulle ;
- calcul du paramètre d'élancement réduit $\bar{\lambda}_{LT}$ par la relation :

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{\beta_w W_{pl,y} f_y}{M_{cr}}} \quad (4.22)$$

avec :

$\beta_w = 1$	Si la section est de classe 1 ou 2,
$\beta_w = W_{el,y} / W_{pl,y}$	Si la section est de classe 3,
$\beta_w = W_{eff,y} / W_{pl,y}$	Si la section est de classe 4,

Ou bien par la relation suivante :

$$\bar{\lambda}_{LT} = \left(\frac{\lambda_{LT}}{\lambda_1} \right) (\beta)^{0.5} \quad (4.23)$$

Pour les poutres à sections constantes et doublement symétriques (profilés laminés en I et H), on utilise la formule suivante pour le calcul de λ_{LT} :

$$\lambda_{LT} = \frac{L / i_z}{C_1^{0.5} \left[1 + \frac{1}{20} \left(\frac{L / i_z}{h / t_f} \right)^2 \right]^{0.25}} \quad (4.24)$$

$$\lambda_1 = 93.9\varepsilon \quad \text{et} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

λ_1 : est appelé l'élancement Eulérien.

Si $\bar{\lambda}_{LT} \leq 0.4$, il n'est pas nécessaire de tenir compte du déversement.

Si $\bar{\lambda}_{LT} > 0.4$, il faut déterminer le coefficient de réduction χ_{LT} à appliquer à la capacité plastique ou élastique de la section comme suit :

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\varphi_{LT} + \sqrt{\varphi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}}; \quad (\chi_{LT} \leq 1) \quad (4.25)$$

avec :

$$\varphi_{LT} = 0.5 \left[1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] \quad (4.26)$$

Où :

α_{LT} : facteur d'imperfection pour le déversement.

$\alpha_{LT} = 0.21$ (profilés laminés) ;

$\alpha_{LT} = 0.49$ (profilés reconstitués soudés).

Tableau 4.4 : Coefficients C_1 , C_2 et C_3 pour différentes valeurs de k dans le cas de charges transversales.

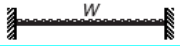
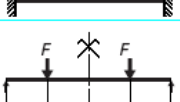
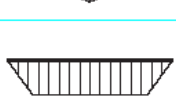
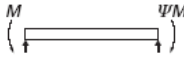
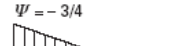
Chargement et conditions d'appuis	Diagramme de moment de flexion	Valeur de k	Coefficients		
			C_1	C_2	C_3
		1,0 0,5	1,132 0,972	0,459 0,304	0,525 0,980
		1,0 0,5	1,285 0,712	1,562 0,652	0,753 1,070
		1,0 0,5	1,365 1,070	0,553 0,432	1,730 3,050
		1,0 0,5	1,565 0,938	1,267 0,715	2,640 4,800
		1,0 0,5	1,046 1,010	0,430 0,410	1,120 1,890

Tableau 4.5 : Coefficients C_1 , C_2 et C_3 pour différentes valeurs de k dans le cas de moments d'extrémités.

Chargement et conditions d'appuis	Diagramme de moment de flexion	Valeur de k	Coefficients		
			C_1	C_2	C_3
	$\psi = +1$ 	1,0 0,7 0,5	1,000 1,000 1,000	0 0 0	1,000 1,113 1,114
	$\psi = +3/4$ 	1,0 0,7 0,5	1,141 1,270 1,305	0 0 0	0,998 1,565 2,283
	$\psi = +1/2$ 	1,0 0,7 0,5	1,323 1,473 1,514	0 0 0	0,992 1,556 2,271
	$\psi = +1/4$ 	1,0 0,7 0,5	1,563 1,739 1,788	0 0 0	0,977 1,531 2,235
	$\psi = 0$ 	1,0 0,7 0,5	1,879 2,092 2,150	0 0 0	0,939 1,473 2,150
	$\psi = -1/4$ 	1,0 0,7 0,5	2,281 2,538 2,609	0 0 0	0,855 1,340 1,947
	$\psi = -1/2$ 	1,0 0,7 0,5	2,704 3,009 3,093	0 0 0	0,676 1,059 1,546
	$\psi = -3/4$ 	1,0 0,7 0,5	2,927 3,258 3,348	0 0 0	0,366 0,575 0,837
	$\psi = -1$ 	1,0 0,7 0,5	2,752 3,063 3,149	0 0 0	0,000 0,000 0,000

4.4.4. Exemple d'application :

Soit la poutre (**IPE 160**) de 5.0 m de longueur, simplement appuyée soumise aux charges uniformément réparties suivantes :

Charge permanente : $G = 0.5 \text{ KN/ml}$

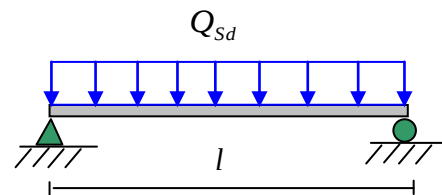
Surcharge d'exploitation : $P = 1.0 \text{ KN/ml}$

Calculer les quantités suivantes :

Le moment fléchissant ultime : $M_{y.Sd}$

Le moment critique du déversement : M_{cr}

Le moment résistant au déversement : $M_{b.Rd}$



Vérifier si $M_{y.Sd} \leq M_{b.Rd}$

La poutre n'est pas prémunie contre tout risque de déversement :

Calcul du moment fléchissant ultime: $M_{y.Sd}$

Calcul de la charge ultime :

$$Q_{sd} = 1.35G + 1.5P = 1.35 \times 0.5 + 1.5 \times 1.0 = 2.175 \text{ KN} / m$$

$$M_{y, sd} = \frac{Q_{sd} \cdot l^2}{8} = \frac{2.175 \times 5.0^2}{8} = 6.8 \text{ KN.m}$$

Calcul du moment critique du déversement : M_{cr}

Afin de simplifier les calculs, on suppose que la charge est appliquée au centre de gravité de la section.

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 GI_t}{\pi^2 EI_z} \right]^{0.5}$$

I_t : moment d'inertie de torsion

I_w : facteur de gauchissement

L : longueur de flambement latérale l_z

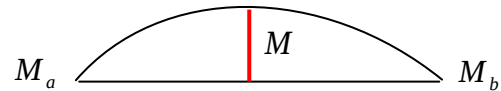
C_1 : facteur sans dimension qui dépend de la nature du diagramme des moments.

$$C_1 = 1.88 - 1.40\psi + 0.52\psi^2 \leq 2.7$$

$$\psi = \frac{M_a}{M_b} \quad \text{avec} \quad M_a \prec M_b \quad \text{Moments aux extrémités du tronçon.}$$

$$-1.0 \leq \psi \leq 1.0$$

Poutre simplement appuyée :



$$M_a = M_b = 0.0 \Rightarrow C_1 = 1.132$$

$$M_{cr} = 1.132 \frac{\pi^2 2.1 \times 10^6 \times 68.28}{500^2} \left[\frac{3960}{68.28} + \frac{500^2 \times 8 \times 10^5 \times 3.60}{\pi^2 \times 2.1 \times 10^6 \times 68.28} \right]^{0.5} = 152467.6 \text{ daN.cm} = 15.24 \text{ KNm}$$

Calcul du moment résistant au déversement :

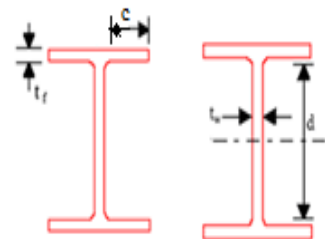
Caractéristiques géométriques du profilé IPE 160 :

$$h = 160 \text{ mm} ; b_f = 82.0 \text{ mm} ; t_f = 7.4 \text{ mm} ; A = 20.1 \text{ cm}^2$$

$$d = 145.2 \text{ mm} ; t_w = 5.0 \text{ mm} ; A_{vz} = 9.7 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 869.2 \text{ cm}^2 ; W_{pl,y} = 123.9 \text{ cm}^3 ; W_{el,y} = 108.7 \text{ cm}^3 ;$$

$$\text{Grade S235} \rightarrow f_y = 235 \text{ N} / \text{mm}^2 = 23.5 \text{ KN} / \text{cm}^2$$



Classe de la section IPE 160 :

Classe de la semelle : Paroi comprimée en console

$$\frac{c}{t_f} \leq 10\varepsilon \quad ; \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = \sqrt{\frac{235}{235}} = 1.0$$

$$c = \frac{b_f}{2} = 82/2 = 41.0mm$$

$$\frac{c}{t_f} = \frac{41.0}{7.4} = 5.54 \quad \Rightarrow \quad 5.54 < 10 \dots \dots \dots \text{Classe 1}$$

Classe de l'âme : âme en flexion pure

$$\frac{d}{t_w} \leq 72\varepsilon$$

$$d = h - 2t_f - 2r = 160 - 2 \times 7.4 - 2 \times 9 = 127.2mm$$

$$\frac{d}{t_w} = \frac{127.2}{5} = 25.44mm \quad \Rightarrow \quad 25.44 < 72 \dots \dots \dots \text{Classe 1}$$

La classe de la section transversale est la classe la moins favorable des classes de la semelle et de l'âme, en l'occurrence : classe 1

La section IPE 160 est de classe 1

Calcul du moment de résistance au déversement :

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot \beta_w \frac{W_{pl,y} \cdot f_y}{\gamma_M}$$

$$\beta_w = 1.0 \quad \text{pour les sections de classes 1 et classes 2.}$$

Calcul du coefficient de réduction pour le déversement :

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\varphi_{LT} + [\varphi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2]^{0.5}} \leq 1.0$$

$$\text{avec : } \varphi_{LT} = 0.5 [1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + \bar{\lambda}_{LT}^2]$$

α_{LT} : est le facteur d'imperfection pour le déversement.

$$\alpha_{LT} = 0.21 \quad \text{pour les sections laminées}$$

Calcul de l'élancement réduit :

L'élancement réduit s'obtient à partir de la formule suivante :

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{\beta_w \cdot W_{pl,y} \cdot f_y}{M_{cr}}}$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{1.0 \times 123.9 \times 23.5}{1524}} = 1.382$$

Il peut être également calculé à partir de la formule suivante :

$$\bar{\lambda}_{LT} = \left[\frac{\lambda_{LT}}{\lambda_1} \right] [\beta_w]^{0.5}$$

$$\text{avec : } \lambda_1 = 93.9\varepsilon \quad \text{et} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

Remarque :

Pour plus de sécurité on peut, pour les poutres à section constante et doublement symétriques (profilés laminés en I et H), utiliser la formule suivante :

$$\lambda_{LT} = \frac{L / i_z}{C_1^{0.5} \left[1 + \frac{1}{20} \left(\frac{L / i_z}{h / t_f} \right)^2 \right]^{0.25}}$$

IPE 160 : $i_z = 1.84 \text{ cm}$; $h = 16 \text{ cm}$; $t_f = 0.74 \text{ cm}$

$$\lambda_{LT} = \frac{500 / 1.84}{1.132^{0.5} \left[1 + \frac{1}{20} \left(\frac{500 / 1.84}{16 / 0.74} \right)^2 \right]^{0.25}} = 147.8 \quad ; \quad \bar{\lambda}_{LT} = \left[\frac{\lambda_{LT}}{\lambda_1} \right] [\beta_w]^{0.5} = \frac{147.8}{93.9} = 1.57$$

$$\varphi_{LT} = 0.5 \left[1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] = 0.5 \left[1 + 0.21(1.57 - 0.2) + 1.57^2 \right] = 1.876$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\varphi_{LT} + [\varphi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2]^{0.5}} = \frac{1}{1.876 + [1.876^2 - 1.57^2]^{0.5}} = 0.344$$

$$M_{b.Rd} = \chi_{LT} \cdot \beta_w \frac{W_{pl.y} \cdot f_y}{\gamma_M} = 0.334 \times 1.0 \times \frac{123.9 \times 23.5}{1.1} = 883.8 \text{ KNcm} = 8.84 \text{ KNm}$$

Vérification de la poutre au déversement :

$$M_{y.Sd} \leq M_{b.Rd}$$

$$M_{y.Sd} = 6.8 \text{ KN} < M_{b.Rd} = 8.84 \text{ KNm} \dots \dots \dots \text{OK}$$

La section IPE 160 est adéquate.

4.4.5. Conclusion :

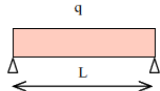
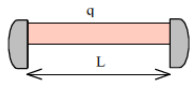
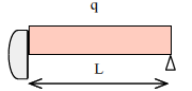
- La valeur du moment critique élastique de déversement d'une poutre élancée est déterminée sur la base d'une étude présentant de nombreuses analogies avec celle du flambement des poteaux.
- Le simple examen de l'expression du moment critique élastique de déversement, relative au cas fondamental, met bien en lumière :
 - l'influence de la forme de la section transversale qui agit sur la raideur à la flexion latérale (EI_z), à la torsion uniforme (GI_t) et à la torsion de gauchissement (EI_w),
 - le rôle de la longueur non contreventée de la poutre.
- Des aménagements peuvent être apportés à la théorie fondamentale pour traduire l'influence du type de mise en charge, des restraints aux extrémités et du niveau d'application des charges.
- Les mises en charges qui entraînent une distribution non-uniforme des moments peuvent être comparées au cas fondamental de la flexion pure à l'aide du coefficient C_1 . Elles sont pour la plupart moins sévères, ce qui justifie l'introduction, dans les normes, de valeurs de
- C_1 supérieures à l'unité.

CHAPITRE 5 : Application numériques - Calcul réglementaire

5.1. Introduction :

Nous allons procéder au calcul du moment de déversement élastique pour les sections symétriques selon le règlement en vigueur qui est l'Eurocode3[6] et les sections dissymétriques selon la nouvelle méthode proposée et cela dans le but de valider les résultats de simulation par la méthode des éléments finis.

5.2.Poutres symétriques :

Section	Boundary conditions and loading	Results		
		μ_{LTB}	μ_{ANS}	Δ
Double symmetrical I section. h = 350 mm. bf1 = bf2 = 220 mm tf1 = tf2 = 16 mm tw = 11 mm	 L = 15 m. q = -2,3 kN/m. Supports and load are applied at the shear centre line. At each support, v and θ fixed, v' and θ' free.	2,3077	2,3041	0,15 %
Idem Test 70	 L = 15 m. q = -2,3 kN/m. Supports and load are applied at the shear centre line. At each end, v, θ , v' and θ' fixed.	12,125	12,138	0,11 %
Idem Test 70	 L = 15 m. q = -2,3 kN/m. Supports and load are applied at the shear centre line. At beam fixing, v, θ , v' and θ' fixed. At beam support, v and θ fixed, v' and θ' free.	5,5322	5,5215	0,19 %

La poutre en I choisie est de 15.0 m de longueur, soumise à une charge uniformément répartie de : $Q_{z.Sd} = -2.3kN / ml$

Caractéristiques géométriques du profilé :

$$h = 300mm ; b_f = 220mm ; t_f = 16.0mm ; t_w = 11.0mm$$

$$I_z = 2842.4cm^2 ; I_t = 70.308cm^4 ; I_w = 573149cm^6 ; ;$$

$$\text{Grade S235} \rightarrow f_y = 235N / mm^2 = 23.5kN / cm^2$$

5.2.1. Poutre simplement appuyée.

Calcul du moment fléchissant maximal : $M_{\max} = M_{y.Sd}$

$$Q_{z.Sd} = -2.3kN / ml$$

$$M_{\max} = M_{y.Sd} = \frac{Q_{z.Sd} \cdot l^2}{8} = \frac{2.3 \times 15.0^2}{8} = 64.68kN.m$$

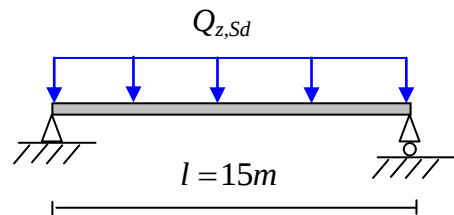


Fig.5.1 : Poutre simplement appuyée.

Calcul du moment critique de déversement M_{cr} :

Afin de simplifier les calculs, on suppose que la charge est appliquée au centre de gravité de la section.

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 GI_t}{\pi^2 EI_z} \right]^{0.5}$$

I_t : moment d'inertie de torsion

I_w : facteur de gauchissement

L : longueur de flambement latérale l_z

C_1 : facteur sans dimension qui dépend de la nature du diagramme des moments.

Poutre simplement appuyée : $\Rightarrow C_1 = 1.132$

$$M_{cr} = 1.132 \frac{\pi^2 \times 2.1 \times 10^4 \times 2842.4}{1500^2} \left[\frac{573149}{2842.4} + \frac{1500^2 \times 8 \times 10^3 \times 70.308}{\pi^2 \times 2.1 \times 10^4 \times 2842.4} \right]^{0.5}$$

$$= 296.4(201.64 + 2148.2)^{0.5} = 14368.03 \text{ kN.cm} = 143.68 \text{ kNm}$$

Le facteur de charge théorique est donné comme suit :

$$\mu_{th} = \frac{M_{cr}}{M_{max}} = \frac{143.68}{64.68} = 2.221$$

Le facteur de charge numérique [10] : $\mu_{Ansys} = 2.3041$

$$\Delta = \frac{|\mu_{ans} - \mu_{th}|}{\mu_{ans}} = \frac{2.3041 - 2.221}{2.3041} = 0.36\%$$

5.2.2. Poutre encastrée :

Calcul du moment fléchissant maximal : $M_{max} = M_{y.Sd}$

$$Q_{z.Sd} = -2.3 \text{ kN / ml}$$

$$M_{max} = M_{y.Sd} = \frac{Q_{z.Sd} \cdot l^2}{12} = \frac{2.3 \times 15.0^2}{12} = 43.125 \text{ kN.m}$$

Calcul du moment critique du déversement M_{cr} :

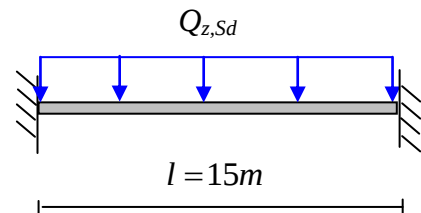


Fig.5.2 : Poutre encastrée.

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[\frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 GI_t}{\pi^2 EI_z} \right]^{0.5}$$

Poutre encastree : $\Rightarrow C_1 = 1.285$

$$M_{cr} = 1.285 \frac{\pi^2 \times 2.1 \times 10^4 \times 2842.4}{(0.5 \times 1500)^2} \left[\frac{573149}{2842.4} + \frac{(0.5 \times 1500)^2 \times 8 \times 10^3 \times 70.308}{\pi^2 \times 2.1 \times 10^4 \times 2842.4} \right]^{0.5}$$

$$= 1345.8(201.64 + 537.04)^{0.5} = 36577.05 \text{ kN.cm} = 365 \text{ kNm}$$

Le facteur de charge théorique est donné comme suit :

$$\mu_{th} = \frac{M_{cr}}{M_{max}} = \frac{365.0}{43.125} = 12.074$$

Le facteur de charge numérique [10] : $\mu_{Ansys} = 12.138$

$$\Delta = \frac{|\mu_{ans} - \mu_{th}|}{\mu_{ansys}} = \frac{12.138 - 12.074}{12.138} = 0.52\%$$

$$M_{max} = M_{y.Sd} = \frac{Q_{z.Sd} \cdot l^2}{12} = \frac{2.3 \times 15.0^2}{12} = 43.125 \text{ kN.m}$$

$$M_{cr} = C \cdot M_{cr,0}$$

$$M_{cr,0} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t}$$

$$M_{cr,0} = \frac{\pi}{(0.5 \times 1500)} \sqrt{2.1 \times 10^4 \times 2843 \times 8 \times 10^3 \times 72.525} = 2465.33 \text{ kNcm} = 24.65 \text{ kNm}$$

$$\kappa_{wt} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{EI_w}{GI_t}} \quad \kappa_{wt} = \frac{1}{(0.5 \times 1500)} \sqrt{\frac{2.1 \times 10^4 \times 792881}{8 \times 10^3 \times 72.525}} = 0.22$$

$$0.10 < \kappa_{wt} = 0.12 < 0.15$$

$$\eta = \frac{z_a}{h_s / 2} \quad h_s = 2 \sqrt{\frac{I_w}{I_z}} \quad h_s = 2 \sqrt{\frac{75040}{562.10}} = 23.10 \text{ cm}$$

Charge appliquée au centre de torsion:

$$z_a = 0 \rightarrow \eta = 0$$

La valeur de C est obtenue par interpolation linéaire :

$$\kappa_{wt} = 0.12 \quad C \approx 1.48$$

$$M_{cr} = C.M_{cr,0} = 1.48 \times 96.94 = 143.47 \text{ kNm}$$

5.3. Poutres dissymétriques :

5.3.1. Poutre console (UAP 300) :

$$M_{\max} = F \times l = 1.0 \times 6.0 = 6.0 \text{ kNm}$$

$$M_{cr} = C.M_{cr,0}$$

$$M_{cr,0} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t}$$

$$M_{cr,0} = \frac{\pi}{600} \sqrt{2.1 \times 10^6 \times 562.10 \times 8 \times 10^5 \times 36.3} = 969423 \text{ daNcm} = 96.94 \text{ kNm}$$

$$\kappa_{wt} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{EI_w}{GI_t}} \quad \kappa_{wt} = \frac{1}{600} \sqrt{\frac{2.1 \times 10^6 \times 75040}{8 \times 10^5 \times 36.3}} = 0.12$$

$$0.10 < \kappa_{wt} = 0.12 < 0.15$$

$$\eta = \frac{z_a}{h_s / 2} \quad h_s = 2 \sqrt{\frac{I_w}{I_z}} \quad h_s = 2 \sqrt{\frac{75040}{562.10}} = 23.10 \text{ cm}$$

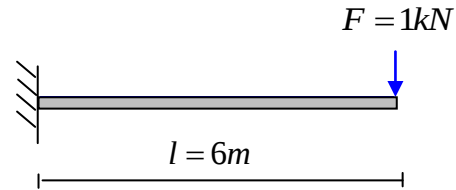


Fig.5.3 : Poutre console.

Charge appliquée au centre de torsion:

$$z_a = 0 \rightarrow \eta = 0$$

La valeur de C est obtenue par interpolation linéaire :

$$\kappa_{wt} = 0.12 \quad C \approx 1.48$$

$$M_{cr} = C.M_{cr,0} = 1.48 \times 96.94 = 143.47 \text{ kNm}$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_{pl,y} \cdot f_y}{M_{cr}}} = \sqrt{\frac{639.3 \times 23.5}{14347}} = 1.1$$

Calcul du terme additionnel $\bar{\lambda}_T$ du à la torsion[5] :

Dans notre cas : $0.75 \leq \bar{\lambda}_{LT} = 1.10 < 1.14 \rightarrow \bar{\lambda}_T = 0.69 - 0.44\bar{\lambda}_{LT} = 0.69 - 0.44 \times 1.10 = 0.28$

Calcul de l'élancement relatif modifié $\bar{\lambda}_{MT}$ [5] :

$$\bar{\lambda}_{MT} = \bar{\lambda}_{LT} + \bar{\lambda}_T = 1.1 + 0.28 = 1.38$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\varphi_{LT} + [\varphi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{MT}^2]^{0.5}} = \frac{1}{1.63 + [1.63^2 - 1.22^2]^{0.5}} = 0.3688$$

avec:

$$\varphi_{LT} = 0.5 \left[1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{MT} - 0.2) + \bar{\lambda}_{MT}^2 \right] = 0.5 \left[1 + 0.76(1.22 - 0.2) + 1.22^2 \right] = 1.63$$

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_{pl,y} f_y / \gamma_{M1} = (0.3688 \times 639.3 \times 23.5) \times 10^{-2} / 1.1 = 50.36 kNm$$

Le critère de résistance : $M_{Sd} \leq M_{b,Rd}$ (vérifié)

Calcul du moment critique de déversement modifié [5]:

$$M_{cr} = \frac{W_{pl,y} \cdot f_y}{\bar{\lambda}_{MT}^2} = \frac{639.3 \times 23.5}{1.38^2} = 10860 kNcm = 108.6 kNm$$

$$M_{max} = F \times l = 1.0 \times 6.0 = 6.0 kNm$$

$$\mu_{th} = \frac{M_{cr}}{M_{max}} = \frac{108.1}{6.0} = 18.10$$

Résultats d'Ansys :

Le facteur de charge trouvé par ANSYS n'est autre que la charge critique nécessaire pour le déversement de la poutre en U.

$$N_{cr} = FACT = 18935.8 N = 18.93 kN$$

$$M_{cr} = N_{cr} \times M_{max}$$

Due à la charge unité de 1kN.

$$M_{max} = F \times l = 1.0 \times 6.0 = 6.0 kNm$$

$$M_{cr} = N_{cr} \times M_{max} = 18.93 \times 6.0 = 113.58 kN$$

$$\Delta = \frac{|\mu_{ans} - \mu_{theo}|}{\mu_{ansys}} = \frac{18.93 - 18.10}{18.93} = 0.43\%$$

5.4. Conclusion :

Nous avons effectué dans cette section des applications numériques pour les sections symétriques et dissymétrique dans le but de valider les résultats de simulation par le logiciel commercial ANSYS. La différence entre les résultats théoriques et numérique est moins de 1%.

CHAPITRE 6 : Critères généraux de la stabilité élastique

6.1. Introduction :

La conception générale des structures suppose la détermination des forces d'équilibre interne (moments, cisaillements, etc.) de la structure, sous charge donnée et la confirmation que la structure, sous ces conditions, est stable. Il est fondamental d'être sûr qu'une structure, légèrement écartée de sa position d'équilibre par des forces, des chocs, des vibrations [24], des imperfections, des contraintes résiduelles, etc... aura tendance à revenir à sa position initiale dès la suppression de la perturbation ; cette caractéristique requise de stabilité élastique est devenue de nos jours de plus en plus critique avec l'usage croissant d'aciers à haute résistance dans des structures de plus en plus légères et élancées.

La théorie de la stabilité élastique (flambement) fournit des méthodes pour déterminer :

- La stabilité d'une configuration d'équilibre,
- La valeur critique de la charge à l'instabilité.

La plupart de ces méthodes dérivent des critères énergétiques généraux qui proviennent eux-mêmes des principes énergétiques de la mécanique. L'objet de cette leçon est donc de présenter rapidement à l'étudiant et à l'ingénieur praticien les principes de mécanique nécessaires à la compréhension des critères généraux de la stabilité élastique, de ce fait de donner une meilleure compréhension des méthodes utilisées dans la recherche du flambement, en particulier les méthodes énergétiques.

La portée de cette leçon se restreint à :

- Des chargements conservatifs et des systèmes élastiques adiabatiques (systèmes parfaitement conservatifs),
- Des systèmes dont les configurations peuvent être exprimés par des fonctions avec un nombre fini de paramètres de déplacement.

Il faut noter que l'on ne considère que l'aspect statique de la stabilité.

6.2. Généralités :

Dans cette leçon, on considère les changements de la configuration d'un système à partir d'une configuration initiale ; tout changement dans cette configuration est considéré comme un déplacement. Une configuration est déterminée au moyen d'un nombre fini de variables réelles indépendantes, appelées coordonnées généralisées, notées ici $q_1, q_2 \dots q_n$ ou plus généralement q_i . Une poutre à travée unique peut, bien sûr, avoir un ensemble infini de coordonnées généralisées, comme par exemple les coefficients q_i de la série de Fourier représentant la flèche :

$$y = \sum_i q_i \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (6.1)$$

Cette série peut cependant être approchée par un nombre fini de termes avec un nombre fini de coordonnées généralisées représentant les degrés de liberté du système. Si l'on considère la poutre de la figure 6.1, les coordonnées généralisées peuvent être les degrés de liberté des nœuds i et j aux extrémités de la poutre : deux translations u et v et une rotation θ par nœud (dans le plan). On suppose ici que l'ensemble de l'allure de la déformée élastique de la poutre peut être défini en utilisant, par exemple, des fonctions d'interpolation. Le vecteur déplacement de la poutre peut être noté :

$$D = (u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j). \quad (6.2)$$

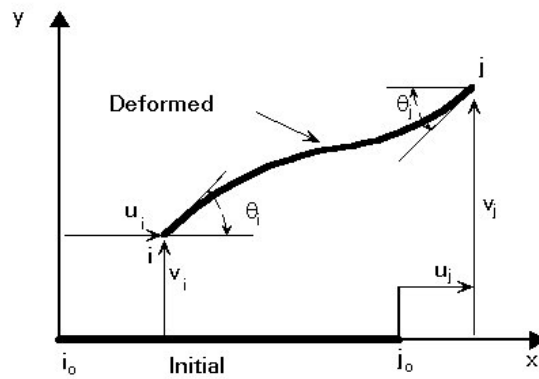


Fig.6.1 : Coordonnées généralisées d'une poutre.

Aux appuis, les conditions aux limites imposent des restrictions aux variables généralisées. Sur la figure 6.2, par exemple, les conditions aux limites sont telles que le vecteur déplacement est nul à l'extrémité encastrée de la poutre console, d'où les restrictions imposées : $u_i = v_i = \theta_i = 0$.

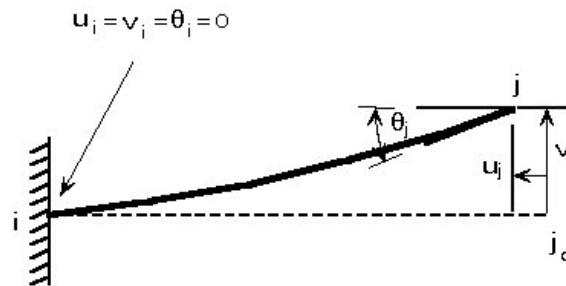


Fig.6.2 : Poutre console.

Une structure est généralement soumise à des forces intérieures et extérieures ; les forces intérieures sont généralement des forces de traction (de décohesion), c'est-à-dire des forces dues aux contraintes, sur les faces d'un cube infiniment petit de matériau. Les forces

extérieures agissent sur le volume (par exemple la gravitation), et/ou sur la surface (forces ou couples de contacts) de l'élément de la structure.

Lors d'un changement dans la configuration du système, la loi de conservation de l'énergie peut s'exprimer de la manière suivante :

$$W_{\text{ext}} + Q = \Delta T + \Delta U \quad (6.3)$$

Où : W_{ext} représente le travail créé dû aux forces extérieures au système,

Q représente la quantité de chaleur transmise au système,

ΔT représente l'augmentation de l'énergie cinétique,

ΔU représente l'augmentation de l'énergie interne,

U est souvent appelée énergie de déformation..

D'autre part, la loi de l'énergie cinétique est donnée par :

$$W = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta T \quad (6.4)$$

Où : W_{int} représente le travail des forces intérieures,

W représente le travail créé par toutes les forces appliquées au système.

Les équations (6.3) et (6.4) donnent :

$$W_{\text{int}} = Q - \Delta U \quad (6.5)$$

Comme on ne prend en compte ici que des processus adiabatiques, $Q = 0$ et l'équation (6.5) donne :

$$W_{\text{int}} = - \Delta U \quad (6.6)$$

N.B. : ΔU n'existe que pour des systèmes déformables ; pour un système rigide on a :

$$\Delta U = 0 \quad \text{donc} \quad W_{\text{int}} = 0 \quad (6.7)$$

Comme on ne prend en compte ici que les aspects statiques, on suppose qu'il n'y a pas de variation de l'énergie cinétique pendant le déplacement (vitesse très faible) :

$$\Delta T = 0 \quad (6.8)$$

Et les équations (6.3), (6.4) et (6.7) donnent :

$$W_{\text{ext}} = \Delta U \quad (6.9)$$

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = 0 \quad (6.10)$$

6.3. Principe du travail virtuel :

L'étude des problèmes de stabilité fait généralement appel au principe du travail virtuel, que l'on va voir dans ce paragraphe. Le problème est d'abord de trouver la configuration d'équilibre réel du système, si elle existe, puis ensuite de vérifier si cette configuration est stable.

Un système donné peut prendre un nombre quelconque de configurations déformées compte tenu des limites fixées par les conditions aux limites, mais seule l'une d'elle est la vraie, correspondant à l'équilibre entre les charges réellement appliquées et les réactions correspondantes.

Supposons que le système soit dans une configuration caractérisée par les coordonnées généralisées $q_1, q_2, \dots, q_n$ et pour laquelle on recherche l'équilibre.

Supposons que le système soit soumis à des déplacements petits, arbitraires à partir de cette configuration, on ne demandera à ces déplacements que de satisfaire les conditions aux limites, la structure étant soumise à son chargement réel. Les petits déplacements considérés ici ne sont pas nécessairement réels ; ils sont imaginaires et ne servent qu'à des fins de comparaison, c'est pour cela qu'on les appelle déplacements virtuels ; ces déplacements virtuels sont indépendants du chargement et sont notés ici δq_i . Par conséquent, tous les travaux ou calculs énergétiques mis en œuvre sur ce système donneront lieu à des travaux ou énergie virtuels.

Pour un système rigide, les équations (6.7) et (6.10) donnent :

$$\delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (6.11)$$

Où : δW_{ext} représente le travail virtuel des forces extérieures dans les déplacements virtuels ; on peut exprimer le Principe du Travail Virtuel de la manière suivante :

« Un système rigide est dans sa configuration d'équilibre si le travail virtuel de toutes les forces extérieures agissant sur lui est nul dans tout déplacement virtuel qui satisfasse les conditions aux limites ».

Pour un système déformable, l'équation (6.9) donne :

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta U \quad (6.12)$$

Où δU représente la variation de l'énergie de déformation dans le déplacement virtuel, le Principe du Travail Virtuel peut être exprimé ainsi :

« Un système déformable est dans sa configuration d'équilibre si le travail virtuel de toutes les forces extérieures est égal à la variation d'énergie de déformation, dans tout déplacement virtuel satisfaisant les conditions aux limites ».

C'est là la forme du principe que l'on rencontre le plus souvent en analyse des structures ; cette condition est équivalente à la condition suivante, en utilisant l'équation (6.10) :

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (6.13)$$

Configuration d'équilibre réel :

Pour un système ayant un nombre fini de coordonnées généralisées ($q_1, q_2 \dots q_n$), le travail virtuel δW correspondant à un déplacement virtuel à partir d'une configuration ($q_1, q_2 \dots q_n$) vers une configuration voisine ($q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n$) peut être représenté par une forme linéaire des variations des coordonnées, soit :

$$\delta W = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots = \sum_i Q_i \delta q_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (6.14)$$

où : $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ représentent des fonctions des coordonnées généralisées q_i et des forces intérieures (pour les systèmes déformables) et extérieures.

Par analogie avec le travail d'une force, les fonctions $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ sont appelées composantes des forces généralisées. Les termes Q_i n'ont pas nécessairement la dimension d'une force et n'ont souvent pas tous la même dimension ; leur dimension est déterminée par le fait que $Q_i \delta q_i$ a la dimension d'un travail. Les équations (6.13) et (6.14) donnent :

$$\sum_i Q_i \delta q_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (6.15)$$

Comme les δq_i sont arbitraires, indépendants des variations de q_i , l'équation (6.15) implique que :

$$Q_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.16)$$

La résolution de ces n équations simultanées d'équilibre donne les valeurs des q correspondant à la configuration d'équilibre réel.

6.4. Principe de l'énergie potentielle totale stationnaire :

Les forces intérieures et extérieures sont toutes conservatives (système parfaitement conservatif). Les forces intérieures dérivent d'une fonction scalaire unique des coordonnées généralisées $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ dont la valeur U représente l'énergie de déformation exprimée par l'équation (6.4). De la même manière, les forces extérieures dérivent d'une fonction $\Omega(q_1,$

$q_2, \dots, q_n$) dont la valeur U représente l'énergie potentielle de ces forces. On peut donc dire que toutes les forces dérivent d'une seule fonction scalaire $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$, appelée fonction potentiel total, dont la valeur est donnée par l'énergie potentielle totale du système. Cette énergie potentielle totale peut être exprimée par :

$$V = U + \Omega \quad (6.17)$$

La valeur totale de l'énergie potentielle est généralement indéterminée. Seules des différences d'énergie potentielle peuvent être déterminées.

Parce qu'on suppose le système parfaitement conservatif, on a :

$$\delta W = - \delta V \quad (6.18)$$

Où δV représente la variation de l'énergie potentielle totale dans le déplacement virtuel et (6.13) et (6.18) donnent :

$$\delta V = 0 \quad (6.19)$$

L'équation (6.19) est une traduction analytique du Principe de l'énergie potentielle totale stationnaire qui dit que :

« De toutes les configurations géométriques possibles d'un système, celle qui correspond à l'équilibre entre les charges appliquées et les réactions correspondantes est celle pour laquelle l'énergie potentielle totale est stationnaire ».

Configuration d'équilibre réel :

Comme $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$, δV peut être exprimé par :

$$\delta V = \frac{\delta V}{\delta q_1} \delta q_1 + \frac{\delta V}{\delta q_2} \delta q_2 + \dots = \sum_i \frac{\delta V}{\delta q_i} \delta q_i \quad (6.20)$$

Ici, les valeurs de δq_i sont arbitraires et indépendantes, de telle sorte que, si $\delta V = 0$, on a :

$$\frac{\delta V}{\delta q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.21)$$

Le principe fournit alors n équations d'équilibre exprimées en termes de charges appliquées et de coordonnées généralisées, à partir desquelles on peut déterminer les valeurs des q_i , définissant la configuration d'équilibre.

Il faut noter que les équations (6.14), (6.18), (6.20) et (6.21), ajoutées au fait que les valeurs de δq_i sont arbitraires et indépendantes donnent :

$$\frac{\delta V}{\delta q_i} = -Q_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.22)$$

En résumé, il faut noter que, pour des systèmes parfaitement conservatifs, le principe du travail virtuel devient le principe de l'énergie potentielle totale stationnaire. Le principe est exact et très puissant et peut être utilisé pour développer des méthodes approchées de résolution des problèmes de stabilité en conception générale de structures.

6.5. Stabilité de l'équilibre :

On dit qu'un système est en état d'équilibre stable s'il a tendance à revenir à sa configuration d'équilibre d'origine dès l'arrêt de la perturbation (faible) qu'il subissait. Si cette légère perturbation a pour effet de faire quitter au système sa position d'équilibre, il est dit instable. On peut concevoir une situation intermédiaire dans laquelle la configuration légèrement déformée se maintient à l'arrêt de la perturbation. Cette situation détermine un état d'équilibre neutre. Il est bien évident que les faibles déplacements dont il est question doivent être compatibles avec les conditions aux limites, de telle sorte qu'ils correspondent à de petites variations des coordonnées généralisées du système ; la discussion relative à la stabilité de l'équilibre peut alors se baser sur les déplacements virtuels.

Le Principe du Travail Virtuel montre que l'énergie potentielle est stationnaire à l'équilibre ; on a aussi vu, que l'équilibre est stable pour un minimum relatif ; la condition de stabilité peut donc être écrite sous la forme :

« L'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale, en configuration d'équilibre constitue à la fois une condition nécessaire et suffisante de stabilité de cette configuration ».

Si on note ΔV l'augmentation de l'énergie potentielle totale due à un déplacement virtuel à partir de la configuration d'équilibre, on a :

$$\begin{aligned} \Delta V > 0 & : \text{équilibre stable} \\ \Delta V = 0 & : \text{équilibre neutre} \\ \Delta V < 0 & : \text{équilibre instable} \end{aligned} \quad (6.23)$$

On peut voir que, parce que l'énergie potentielle est stationnaire à l'équilibre ($\delta V = 0$), discuter de la stabilité revient à discuter des termes d'ordre supérieur qui apparaissent dans l'augmentation de l'énergie potentielle totale ΔV .

On suppose que la fonction $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ et ses dérivées partielles par rapport aux q_i jusqu'au troisième ordre sont des fonctions continues des q_i ; ensuite, en faisant un développement en série de Taylor au voisinage de la configuration d'équilibre initial, l'augmentation ΔV de V correspondant aux variations virtuelles δq_i de q_i , s'écrit :

$$\Delta V = \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_i \delta q_j + 0(\delta^3) \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (6.24)$$

Ou :

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V + 0(\delta^3) \quad (6.25)$$

Avec :

$$\delta^2 V = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_i \delta q_j \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (6.26)$$

$0(\delta^3)$ représente un infiniment petit d'ordre trois.

Le principe du travail virtuel signifie qu'une condition nécessaire d'équilibre est que δV soit nul quels que soient δq_i , soit :

$$\delta V = 0 \quad \text{ou} \quad \partial V / \partial q_i = 0 \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.27)$$

Le signe de ΔV est donc gouverné par le signe de $\delta^2 V$, soit, si l'on prend en compte l'équation (6.21), la condition de stabilité devient :

$$\delta^2 V > 0 \quad (6.28)$$

Si

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad (6.29)$$

Alors

$$\delta^2 V = \sum_i \sum_j a_{ij} \delta q_i \delta q_j \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (6.30)$$

Si l'on introduit la matrice $[a]$ des coefficients a_{ij} , l'équation (6.30) peut s'écrire :

$$\delta^2 V = \{\delta q\}^t [a] \{\delta q\} \quad (6.31)$$

La condition de stabilité (équation (6.26)) impose que $[a]$ soit une matrice définie positive, c'est-à-dire que les mineurs principaux de $[a]$ doivent être positifs.

Les coefficients a_{ij} sont des fonctions des charges appliquées et des caractéristiques du système, de telle sorte que le fait pour la matrice $[a]$ d'être définie positive impose une condition à vérifier pour les charges afin que la configuration soit stable.

6.6. Equilibre neutre - chargement critique :

L'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale pour une configuration stable et si on considère l'équilibre neutre comme une limite de la stabilité, la condition de l'équilibre neutre peut être exprimée de la manière suivante :

$$\delta^2 V = 0 = \text{minimum} \quad (6.32)$$

Si on considère l'équation (6.31) dans le cas d'une configuration non triviale $\{\delta q\} \neq 0$, l'état d'équilibre neutre est obtenu quand la matrice $[a]$ est singulière.

Les coefficients a_{ij} de $[a]$ sont des fonctions des caractéristiques géométriques et mécaniques du système et aussi des charges appliquées.

Il s'avère donc très important d'un point de vue pratique de pouvoir déterminer les valeurs critiques des charges conduisant à l'équilibre neutre d'un système subissant un changement d'état de stabilité de sa configuration d'équilibre.

Si l'on introduit un coefficient multiplicateur de charge commun α , pour toutes les composantes du chargement et si l'on définit un système de chargement de référence S_1 (correspondant à $\alpha = 1$), les charges, à chaque instant d'une histoire du chargement proportionnelle (linéaire) sont égales à :

$$S = \alpha S_1 \quad (6.33)$$

Seul le facteur multiplicateur de charge est inconnu et la condition d'équilibre neutre nécessite la résolution d'un problème aux valeurs propres :

$$\text{Dét } [a(\alpha)] = 0 \quad (6.34)$$

La résolution de l'équation (6.34) conduit à un ensemble de solutions α , appelées α_{cr} , dont le nombre est égal au nombre de coordonnées généralisées du système. Les vecteurs propres représentent la configuration déformée associée à chaque solution α . La plupart de ces solutions mathématiques ne correspondent pas au comportement réel de la structure ; généralement, l'ingénieur ne s'intéresse qu'aux valeurs du chargement au-delà desquelles le système, stable en l'absence de charges, devient instable. Ces charges s'obtiennent normalement pour la plus petite valeur positive α_{cr}^o de α_{cr} , et, de ce fait, les charges critiques sont déterminées par :

$$S_{cr} = \alpha_{cr}^o S_1 \quad (6.35)$$

6.7. Illustration sur des exemples de base :

6.7.1.Exemple 1 :

Il est intéressant d'illustrer le critère de stabilité sur l'exemple de base de l'élément biarticulé en compression représenté sur la figure 6.3 ; cependant et afin d'avoir des calculs simples de l'énergie de déformation, on suppose que toute la flexibilité de l'élément est concentrée sur un ressort élastique spirale situé à mi-hauteur, comme on le voit sur la figure 6.4. Les deux barres, chacune de longueur $L/2$, sont rigides, de telle sorte que leur énergie de déformation est nulle. La valeur K du ressort, constante en B , sera étudiée ultérieurement. Les déplacements latéraux des articulations A et C sont bloqués. La charge P agit verticalement vers le bas en C et la force extérieure F , présente dès le début du chargement, agit horizontalement vers la gauche en B .

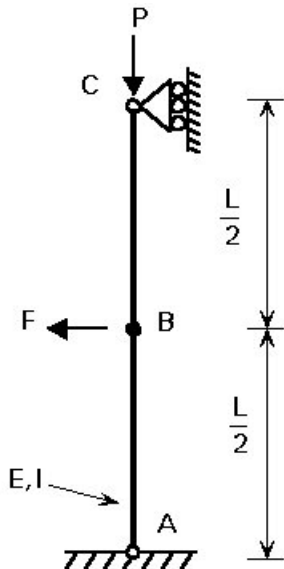


Fig.6.3 : Poteau doublement articulé.

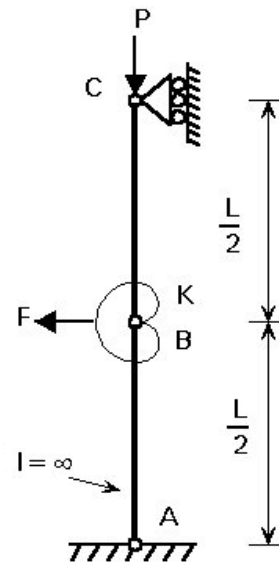


Fig.6.4 : Modèle idéalisé d'un poteau.

Compte tenu des conditions aux limites, le système n'a qu'un seul degré de liberté. Prenons le déplacement latéral de B comme coordonnée généralisée, notée δ sur la figure 6.5. (Une autre possibilité aurait consisté à choisir la rotation de la barre supérieure ou inférieure). Avant d'étudier la stabilité de ce système, déterminons sa configuration d'équilibre sous les charges P et F . On suppose les déplacements suffisamment petits pour que les fonctions trigonométriques puissent être assimilées au premier terme de leur développement en série.

L'énergie de déformation du système dans sa configuration déformée est donnée par le ressort seulement, soit :

$$U = U_o + \frac{1}{2} K \theta^2 \quad (6.36)$$

Où :

U_o représente l'énergie potentielle du système dans sa configuration initiale

θ représente la rotation du ressort (voir figure6.5).

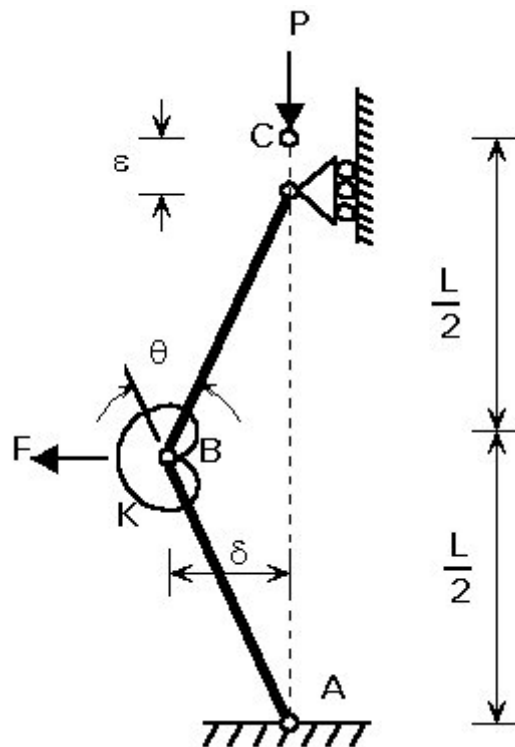


Fig.6.5 : Déplacement latéral d'un poteau idéalisé.

On démontre facilement que $\theta = 4\delta/L$, ce qui donne :

$$U = U_o + \frac{8K\delta^2}{L^2} \quad (6.37)$$

L'énergie potentielle créée par les charges extérieures vaut :

$$\Omega = \Omega_o - P \varepsilon - F \delta \quad (6.38)$$

Où Ω_o représente l'énergie potentielle des charges extérieures lorsque le système se trouve dans sa configuration initiale

ε représente le déplacement vertical créé en C (voir figure 6.5)

On peut démontrer que, pour de petits déplacements, $\varepsilon = 2\delta^2/L$, ceci donne :

$$\Omega = \Omega_0 - 2P\delta^2/L - F\delta \quad (6.39)$$

L'énergie potentielle totale vaut :

$$V = U + \Omega = V_0 + \frac{8K\delta^2}{L^2} - \frac{2P\delta^2}{L} - F\delta \quad (6.40)$$

Où

$V_0 = (U_0 + \Omega_0)$ représente l'énergie potentielle initiale du système.

Selon l'équation (6.21), la configuration d'équilibre est donnée par la solution de :

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = (16K - 4PL) \frac{\delta}{L^2} - F = 0 \quad (6.41)$$

Ceci donne :

$$\delta = \frac{FL^2}{16K - 4PL} \quad (6.42)$$

La condition de stabilité, à partir de l'équation (6.28), peut être exprimée par :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \delta^2} = \frac{16K - 4PL}{L} > 0 \quad (6.43)$$

Le système sera stable si la condition suivante est remplie :

$$P < 4K/L \quad (6.44)$$

La valeur de P à la limite constitue sa valeur limite P_{cr} , valeur pour laquelle se produit le flambement élastique. Il est intéressant de noter que cette valeur critique ne dépend pas de la force latérale extérieure F qui agit sur le système. En particulier, cette valeur critique est vraie pour le cas particulier $F = 0$, donnant ainsi le problème classique de flambement d'un poteau sous charge axiale seule.

On peut donner une valeur à K de telle sorte que la flexibilité soit la même que celle de l'élément continu de la figure 6.3. Elle se définit alors comme la valeur qui conduit au même déplacement latéral δ en B dû à F que dans l'élément continu, en supposant que P est nul.

Pour l'élément continu, la théorie des poutres donne :

$$\delta = FL^3/(48EI) \quad (6.45)$$

Où :

I représente le moment d'inertie de flexion de l'élément

E représente le module de Young.

Pour la barre et le système à ressort, si on exprime le moment en B avec $\theta = 4\delta/L$, on obtient :

$$\delta = FL^2/(16K) \quad (6.46)$$

Les équations (6.45) et (6.46) donnent la constante du ressort équivalent : $K = 3 EI/L$ et la valeur critique de P vaut :

$$P_{cr} = 12 EI/L^2 \quad (6.47)$$

Cette valeur doit être comparée à la valeur exacte bien connue $\pi^2 EI/L^2$; la précision du résultat dépend, en fait, des hypothèses faites pour la détermination de la constante équivalente du ressort K.

6.7.2.Exemple 2 :

Considérons maintenant le système à barres et ressorts représenté dans la figure 6.6. Les deux barres AB et BC, ayant chacune une longueur L, sont rigides (énergie de déformation nulle) et sont articulées et reliées entre elles en B. On restreint les déplacements latéraux en B et C par des ressorts élastiques droits, à la fois de compression et de traction, de rigidité respective K_1 et K_2 . La charge P agit en C verticalement vers le bas et les forces F_1 et F_2 horizontalement vers la gauche, respectivement en B et C.

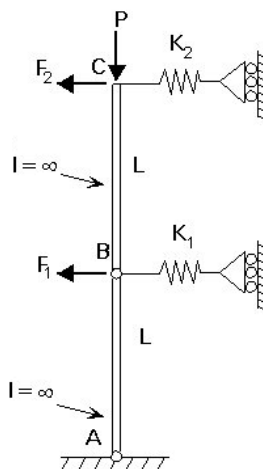


Fig. 6.6 : Système à barres et ressorts.

Si on prend en compte les conditions aux limites, le système possède deux degrés de liberté. On choisit les rotations θ_1 et θ_2 des deux barres comme coordonnées généralisées (voir figure 6.7). On détermine d'abord la configuration d'équilibre du système, puis on étudie sa stabilité.

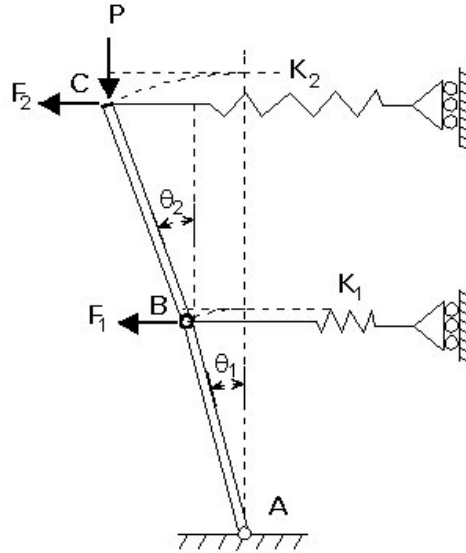


Fig.6.7 : Déplacement de la barre et ressorts.

L'énergie de déformation du système est celle due aux ressorts seuls. L'énergie de déformation de chaque ressort vaut $K\delta^2/2$, où δ représente le déplacement latéral du ressort correspondant et K sa raideur (ou constante du ressort). Par conséquent, l'énergie de déformation dans la configuration (θ_1, θ_2) vaut :

$$U = U_o + \frac{1}{2} K_1 L^2 \theta_1^2 + \frac{1}{2} K_2 L^2 (\theta_1 + \theta_2)^2 \quad (6.48)$$

L'énergie potentielle due aux charges extérieures vaut :

$$\Omega = \Omega_o - \frac{1}{2} PL(\theta_1^2 + \theta_2^2) - F_1 L \theta_1 - F_2 L(\theta_1 + \theta_2) \quad (6.49)$$

L'énergie potentielle vaut :

$$V = U + \Omega \quad (6.50)$$

Les dérivées utiles sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = K_1 L^2 \theta_1 + K_2 L^2 (\theta_1 + \theta_2) - PL \theta_1 - F_1 L - F_2 L \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = K_2 L^2 (\theta_1 + \theta_2) - PL \theta_2 - F_2 L \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} = K_1 L^2 + K_2 L^2 - PL \quad (49) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} = K_2 L^2 - PL \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} = K_2 L^2 \end{array} \right\}$$

Configuration d'équilibre :

La condition de l'énergie potentielle stationnaire, équation (6.21), fournit le système suivant d'équations :

$$\{\theta_1 (K_1 L^2 + K_2 L^2 - PL) + \theta_2 K_2 L^2 = (F_1 + F_2) L \quad (6.51)$$

$$\{\theta_1 K_2 L^2 + \theta_2 (K_2 L^2 - PL) = F_2 L$$

La configuration d'équilibre (θ_1, θ_2) peut être facilement obtenue en résolvant ce système d'équations. A ce stade, l'existence d'une solution ne nécessite que de pouvoir définir le déterminant, c'est-à-dire :

$$\text{Dét} = (K_2 L^2 - PL) K_1 L^2 + PL (PL - 2K_2 L^2) \neq 0 \quad (6.52)$$

Stabilité :

La condition de stabilité d'une configuration d'équilibre est donnée par l'équation (6.28) et la matrice [a], dont les coefficients sont donnés par l'équation (6.29) est déterminée de la manière suivante :

$$[a] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 L^2 + K_2 L^2 - PL & K_2 L^2 \\ K_2 L^2 & K_2 L^2 - PL \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

Les conditions de stabilité imposent à la matrice [a] d'être définie positive, c'est-à-dire que les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$(K_2 L^2 - PL) K_1 L^2 + PL (PL - 2K_2 L^2) > 0 \quad (6.54)$$

$$K_2 L^2 - PL > 0 \quad (6.55)$$

Il faut noter que la première condition incorpore la condition (6.52) d'existence d'une configuration d'équilibre ; ceci résulte du fait que V est une forme quadratique des θ .

On démontre facilement que la condition la plus restrictive, des équations (6.54) et (6.55), conduit à l'exigence de stabilité suivante pour la charge verticale P :

$$P < 0,5 L \left(K_1 + 2K_2 - \sqrt{K_1^2 + 4K_2^2} \right)$$

Ou

$$P > 0,5 L \left(K_1 + 2K_2 + \sqrt{K_1^2 + 4K_2^2} \right)$$

Les figures 6.8, 6.9 et 6.10 illustrent ces résultats pour le cas où :

$$L = 400, K_1 = 20, K_2 = 30 \text{ et } F_1 = F_2 = 40 \text{ (unité : kN cm)}$$

Comme dans l'exemple 1, il est intéressant de remarquer que les valeurs critiques P_{cr1} et P_{cr2} , limites du domaine d'instabilité, sont indépendantes des charges extérieures latérales F_1 et F_2 agissant sur le système et sont donc encore valables pour le cas particulier $F_1 = F_2 = 0$.

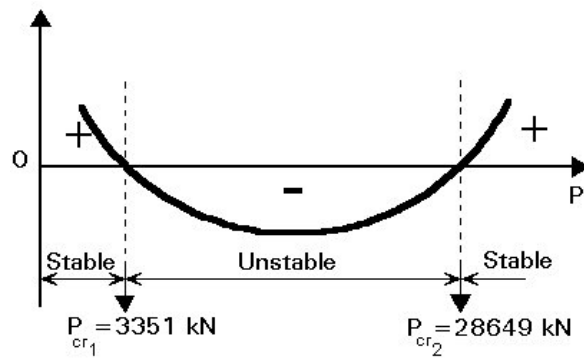


Fig.6.8 : Exemple de stabilité du système de la figure 6.7.

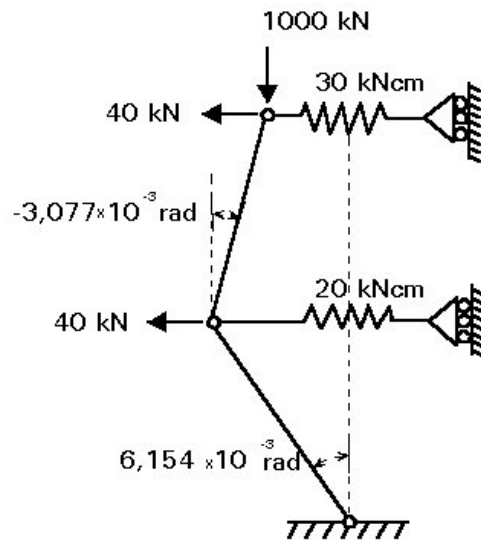


Fig.6.9 : Configuration d'équilibre stable pour $P < P_{cr1}$.

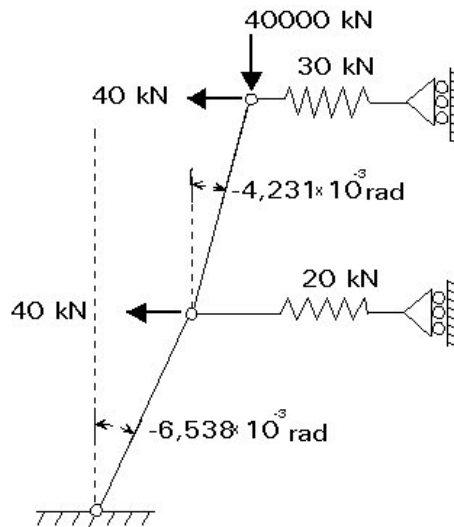


Fig.6.10 : Configuration d'équilibre stable pour $P > P_{cr2}$.

6.8. Méthodes générales de détermination des charges critiques :

6.8.1. Introduction :

Les charges critiques de stabilité peuvent être déterminées en utilisant l'une ou l'autre des méthodes suivantes :

- résolution directe des équations différentielles de l'équilibre, avec comme résultats les valeurs exactes des charges critiques,
- l'utilisation de méthodes approchées qui sont, pour la plupart d'entre elles, basées sur des méthodes énergétiques et qui conduisent à des solutions approchées des problèmes de flambement.

La résolution des équations différentielles de l'équilibre, afin de satisfaire les conditions aux limites présente beaucoup de difficultés et ne peut être réalisée que pour des problèmes simples de flambement, pour des structures dont le nombre de degrés de liberté est faible ; c'est le cas des problèmes présentés et résolus, de cette manière, dans le chapitre précédent. Ce n'est plus cette approche, cependant qui sera prise en compte dans ce chapitre, celui-ci se focalisant plutôt sur des méthodes énergétiques alternatives mentionnées précédemment. Il faut noter que l'on peut aussi utiliser des méthodes itératives puissantes pour résoudre les problèmes de stabilité.

Quand on fait certaines hypothèses sur la nature de la déformation d'un système élastique pendant le changement de configuration associé à l'équilibre neutre (mode de flambement), le système élastique peut être approché en utilisant des paramètres adéquats et modifiables ou des coordonnées généralisées, déterminées de manière à remplir les conditions d'équilibre neutre. Cette idée est à la base des méthodes approchées, très utiles à l'ingénieur de pratique ;

on présentera ici les plus connues de ces méthodes, à savoir les coefficients de Rayleigh, la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode de Galerkin. On donnera aussi une présentation rapide de quelques méthodes numériques, comme par exemple la méthode des différences finies d'Euler et la méthode des éléments finis.

Si l'on choisit judicieusement les paramètres ajustables mentionnés ci-dessus et en nombre adéquat (dans le cas de l'approximation d'un système continu), ces méthodes approchées donnent des résultats très proches de la solution exacte, au prix d'un effort de calcul plus important.

6.8.2. Application des méthodes énergétiques générales aux systèmes élastiques :

Les méthodes énergétiques de résolution des problèmes de stabilité élastique sont basées sur le principe de l'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale à l'équilibre neutre. Il est établi que : si on considère le changement ΔV de l'énergie totale V d'un système, d'une configuration d'équilibre de départ à une configuration voisine définie par un déplacement virtuel infiniment petit et cinématiquement admissible, alors la condition d'équilibre neutre est gouvernée par la deuxième variation $\delta^2 V$ de l'incrément ΔV , c'est-à-dire :

$$\delta^2 V = 0 = \text{minimum} \quad (6.56)$$

Généralement, quand on considère des structures en acier, on étudie la stabilité d'une structure sous un ensemble de charges extérieures en prenant en compte une déformation de flambement, f , depuis une configuration de départ et en faisant les calculs conformément à l'équation (6.56), soit pour vérifier la stabilité de la configuration de départ, soit pour déterminer les valeurs critiques des charges extérieures conduisant à l'instabilité. La déformation f est exprimée comme une fonction de une ou plusieurs variables indépendantes (généralement les coordonnées cartésiennes) ; par exemple, $f(x)$ en tant que déformée d'une poutre ou $f(x,y)$ comme déformée d'une plaque. Le changement de déformation d'un système à l'équilibre neutre - la déformation de flambement ou le mode de flambement - sera désormais noté $f(X)$, où X représente le champ de coordonnées du système de référence utilisé (une, deux ou trois dimensions). la fonction f peut être continue si le système est continu ou peut être définie par morceaux si le système est discret.

La résolution de l'équation (6.56) nécessite l'évaluation de la fonction potentiel $\delta^2 V$ par rapport à la fonction f , à l'intérieur d'un domaine d'intégration noté D (longueur, pour une poutre, surface, pour une plaque, par exemple). Généralement $\delta^2 V$ comprend des quantités quadratiques et homogènes de la déformation de flambement $f(X)$ et ses dérivées et constitue une fonction linéaire des charges extérieures appliquées.

Si l'on introduit un coefficient multiplicateur de charge commun α , pour toutes les composantes du chargement et si on définit un chargement de référence $S1$ (correspondant à $\alpha = 1$), la charge à chaque instant d'une histoire linéaire du chargement est égale à :

$$S = \alpha S_1 \quad (6.57)$$

Alors, d'une manière générale, la fonction $\delta^2 V$ peut être évaluée par :

$$\delta^2 V(f) = \int_D F(\alpha, X, f, f', f'') dD = 0 \quad (6.58)$$

où la fonction F comporte aussi les caractéristiques géométriques et du matériau du domaine.

La résolution de l'équation (6.58) par rapport à f conduit à la détermination des valeurs des charges (par le coefficient multiplicateur α) à l'équilibre neutre, c'est-à-dire les valeurs critiques des charges au-delà desquelles la configuration de départ devient instable.

6.8.3. Coefficient de Rayleigh :

La méthode de calcul des charges critiques par le coefficient de Rayleigh découle directement de l'équation (6.56) ; la seconde variation $\delta^2 V$ de l'énergie potentielle totale peut être exprimée de la manière suivante :

$$\delta^2 V(f) = \delta^2 U(f) + \delta^2 \Omega(f, S) \quad (6.59)$$

où :

$\delta^2 U$ est la deuxième variation de l'énergie de déformation (fonction homogène et quadratique de f) ; elle représente l'énergie de déformation correspondant au mode de flambement ;

$\delta^2 \Omega$ est la deuxième variation de l'énergie potentielle due aux charges extérieures S (fonction linéaire de S et fonction quadratique et homogène de f). Elle représente l'opposé du travail des forces extérieures correspondant au mode de flambement.

A l'équilibre neutre, α (voir équation (6.57)) prend la valeur particulière α_{cr} qui est le facteur multiplicateur de charge critique au-delà duquel se développe l'instabilité. Les équations (6.56), (6.57) et (6.59) donnent :

$$\delta^2 V(f) = \delta^2 U(f) + \alpha_{cr} \delta^2 \Omega(f, S_1) = 0 \quad \text{minimum} \quad (6.60)$$

Si l'on connaît la déformation de flambement f , le facteur multiplicateur de charge critique peut être obtenu à partir de l'équation (6.59), soit :

$$\alpha_{cr} = - \frac{\delta^2 U(f)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)} \quad (6.61)$$

Considérons maintenant une approximation f_1 de f (f_1 étant différente de f), α_{cr} étant connu. On a alors, à cause de la condition du minimum :

$$\delta^2 V(f_1) = \delta^2 U(f_1) + \alpha_{cr} \delta^2 \Omega(f_1, S_1) > 0 \quad (6.62)$$

Les équations (6.60) et (6.62) donnent :

$$\alpha_{cr} = - \frac{\delta^2 U(f)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)} < - \frac{\delta^2 U(f_1)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)} \quad \text{quel que soit } f_1 \neq f \quad (6.63)$$

c'est-à-dire :

$$\alpha_{cr} < \min \left[- \frac{\delta^2 U(f_1)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)} \right] \quad \text{quel que soit } f_1 \neq f \quad (6.64)$$

Ceci définit le Principe de Rayleigh qui établit que le facteur multiplicateur de charge critique α_{cr} , calculé en utilisant l'équation (6.61) avec un déplacement cinématiquement admissible quelconque différent de la vraie déformation de flambement, donnera une valeur de α_{cr} supérieure à la valeur exacte.

En supposant que $f_1 = f + \varepsilon f_2$, avec f_2 un déplacement cinématiquement admissible quelconque et ε une constante, on a :

$$\alpha_{cr1} = - \frac{\delta^2 U(f + \varepsilon f_2)}{\delta^2 \Omega(f + \varepsilon f_2, S_1)} = - \frac{\delta^2 U(f)}{\delta^2 \Omega(f, S_1)} + 0(\varepsilon^2) = \alpha_{cr} + 0(\varepsilon^2)$$

où $0(\varepsilon^2)$ représente une quantité en ε^2 . Ceci implique qu'une erreur du premier ordre dans le choix de f donne une erreur du second ordre pour la valeur de α_{cr} . Si l'on fait les calculs en utilisant l'équation (6.61) avec une bonne fonction d'approximation f , simplement nécessaire pour satisfaire les conditions aux limites, on peut obtenir une valeur précise de α_{cr} , avec une erreur par excès.

6.8.4. Méthode de Rayleigh-Ritz :

La méthode de Rayleigh-Ritz suppose que la solution exacte $f(X)$ du problème variationnel décrit par l'équation (6.58) peut être approchée par une combinaison linéaire de « fonctions de coordonnées » correctement choisies $\Phi_1(X)$, $\Phi_2(X)$, ... $\Phi_n(X)$, soit :

$$f_n(X) = q_1 \Phi_1(X) + q_2 \Phi_2(X) + \dots + q_n \Phi_n(X) \quad (6.65)$$

où les q sont des constantes à déterminer et qui doivent être considérées comme les coordonnées généralisées (degrés de liberté) du système.

Quand $f(X)$ est approchée ainsi par $f_n(X)$, la fonction $\delta^2 V$, à évaluer, devient une fonction quadratique et homogène des q ; l'équation (3) peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\delta^2 V = \{q\}^t [a] \{q\} = 0 \quad (6.66)$$

où $\{q\}$ représente le vecteur des q et $[a]$ une matrice dont les coefficients a_{ij} sont :

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad (6.67)$$

Les coefficients a_{ij} sont des fonctions du facteur multiplicateur de charge α et des propriétés du système.

Si l'on considère le cas de configurations non triviales, $\{q\} \neq 0$, l'équation (6.66) de l'équilibre neutre nécessite que $[a]$ soit une matrice singulière, c'est-à-dire que son déterminant doit être nul. Cette condition fournit une équation en α , de degré n , dont la valeur positive la plus petite peut être considérée comme le facteur multiplicateur de charge critique α_{cr} .

Les fonctions Φ_i sont choisies par avance, selon la connaissance et les hypothèses faites sur la nature de la déformation. Elles ne sont pas inconnues, et, à condition qu'elles satisfassent les conditions aux limites forcées (ou géométriques) pour chaque valeur de q , le choix des « formes » est arbitraire. On peut noter, cependant, que l'efficacité de la méthode dépend du caractère judicieux du choix fait pour les Φ et que c'est un avantage si elles satisfont toutes les conditions aux limites : dans les applications pratiques, on aura une idée de la nature générale de la solution réelle $f(X)$, de telle sorte que la question d'utiliser des formes « excessives » pour les Φ se pose rarement. Si les fonctions sont judicieusement choisies, on peut obtenir une très bonne précision avec relativement peu de fonctions. L'efficacité du procédé de Rayleigh-Ritz peut être considérablement améliorée si, en plus des conditions aux limites forcées (ou géométriques) (concernant les translations ou les rotations aux supports, c'est-à-dire f et f'), on vérifie aussi les conditions aux limites naturelles (ou mécaniques) (concernant la courbure, c'est-à-dire f'').

Pour avoir une idée de la précision des résultats, on peut faire appel à une procédure plus élaborée pour obtenir une séquence d'approximations successives ; on peut alors prendre l'expression suivante en première approximation :

$$f_1(X) = q_1 \Phi_1(X) \quad (6.68)$$

et comme seconde approximation :

$$f_2(X) = q_1' \Phi_1(X) + q_2' \Phi_2(X) \quad (6.69)$$

Il en est de même des approximations suivantes.

La comparaison de solutions successives donne une indication sur la précision de la solution en cours. Il est intéressant de noter que la solution $f_{i+1}(X)$ sera toujours meilleure ou au moins pas pire, que la solution précédente $f_i(X)$.

6.8.5. Méthode de Galerkin :

En contraste avec la méthode de Rayleigh-Ritz qui donne une solution après avoir écrit le problème variationnel, la méthode de Galerkin fournit directement les solutions approchées des équations différentielles et elle s'applique que l'on puisse ou non écrire la transformation sous la forme d'un problème variationnel. Elle semble donc s'appliquer plus largement que la technique de Rayleigh-Ritz et est plus attractive en pratique dans la mesure où elle ne nécessite pas de déterminer une fonction potentielle. On peut démontrer, cependant, que les deux méthodes sont étroitement reliées. La méthode de Galerkin procède de la manière suivante.

Généralement, l'équation différentielle gouvernant un problème de flambement peut s'écrire :

$$L[f(X)] = 0 \quad (6.70)$$

où : $f(X)$ représente la déformation de flambement et L un opérateur différentiel linéaire et homogène.

Supposons que la solution exacte $f(X)$ de l'équation (6.70) puisse s'exprimer sous la forme d'une série de fonctions complète :

$$f(X) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \Phi_j(X) \quad (6.71)$$

satisfaisant toutes les conditions aux limites ; l'« exactitude » de cette solution peut être établie en déclarant que la partie gauche de l'équation (6.70) est orthogonale à chaque terme dans la série de l'équation (6.71), soit :

$$\int_D L[f(X)] \Phi_j(X) dD = 0 \quad j = 1, 2, \dots \quad (6.72)$$

Supposons que la série de l'équation (6.71) soit tronquée à un nombre fini de termes, n , ensuite, au moyen de l'idée ci-dessus, on peut imposer n conditions d'orthogonalité, de la manière suivante :

$$\int_D L \left[\sum_{j=1}^n q_j \Phi_j(X) \right] \Phi_i(X) dD = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.73)$$

Ceci peut être encore écrit de la manière suivante, car L est un opérateur linéaire :

$$\sum_{j=1}^n q_j \int_D L[\Phi_j(X)] \Phi_i(X) dD = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.74)$$

Ceci fournit une base moyenne d'évaluation des n inconnues q , telles que :

$$f_n(X) = \sum_{j=1}^n q_j \Phi_j(X) \quad (6.75)$$

ce qui constitue une solution approchée de l'équation différentielle.

La partie gauche de l'équation (6.74) qui comprend les propriétés du système et les charges extérieures par l'intermédiaire du coefficient multiplicateur de charge α , est quadratique et homogène en q ; cette équation peut s'écrire sous la forme de l'équation (6.65), puis traitée de la même manière que pour la méthode de Rayleigh-Ritz pour trouver les charges critiques.

6.8.6. Méthodes numériques :

Les méthodes numériques qui nécessitent l'utilisation d'un ordinateur peuvent être utilisées pour déterminer des charges critiques. On décrira ici rapidement la méthode des différences finies d'Euler et la méthode des éléments finis (MEF).

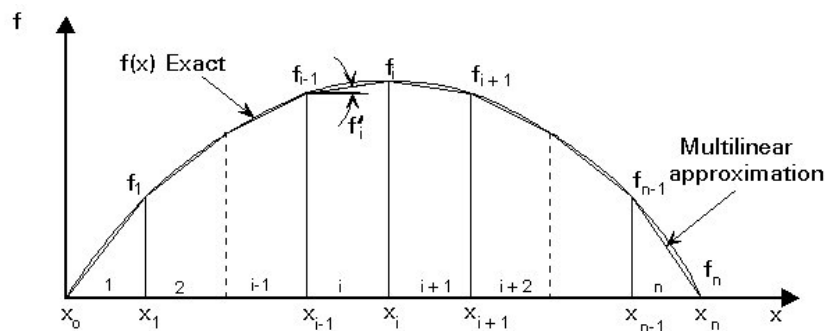
6.8.6.1. Méthode des différences finies d'Euler :

Dans la méthode de Rayleigh-Ritz, il est nécessaire que les fonctions admissibles soient continûment différentiables dans le domaine d'intégration. Le domaine admissible peut être étendu si l'on admet des fonctions qui ont des dérivées continues par morceaux. La base de la méthode des différences finies d'Euler consiste donc à diviser le domaine d'intégration en un certain nombre de sous-domaines ou intervalles, en supposant les fonctions linéaires à l'intérieur du sous-domaine. Si on note f_i la valeur de la fonction f à la frontière entre les intervalles i et $i+1$, les dérivées de f peuvent être exprimées comme des fonctions de f et la somme de la deuxième variation de l'énergie sur tous les intervalles est aussi une fonction de f . On peut considérer ici les f comme les q de la méthode de Rayleigh-Ritz ; la figure 6.11a illustre cette approche.

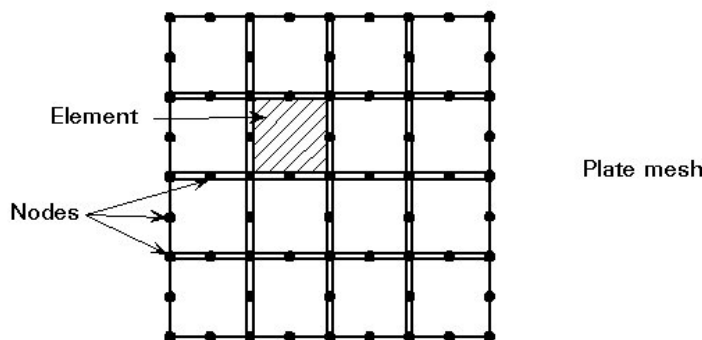
6.8.6.2. Méthode des éléments finis :

Cette méthode est utilisée en particulier pour résoudre des problèmes de stabilité de structures [6], [13], [31], [32] [35] de type plaques ou coques. La résolution des problèmes de voilement de plaques au moyen de la théorie des éléments finis a vu sa popularité s'accroître car elle utilise une formulation matricielle convenant aux traitements par ordinateurs. La méthode des éléments finis a le caractère d'un « morceau » de la technique de Rayleigh-Ritz ; la plaque est « découpée » en un nombre d'éléments plats reliés seulement en des nœuds spécifiques, la

continuité et l'équilibre étant écrits en ces nœuds. Un grand nombre de petits éléments donnent une structure virtuellement continue, dont le comportement ressemble à celui d'une plaque complète. On peut prendre en compte sans problème des conditions aux limites de toutes sortes simultanément et des variations de rigidité de flexion. On peut analyser des structures complètes, il est aussi possible de rechercher des comportements post-critique. Un exemple de maillage de plaque est présenté sur la figure 6.11b.



a) Illustration of the Euler finite difference method



b) Example of plate mesh for finite element method

Fig.6.11 : Modèle numérique.

6.8.7. Quelques énergies de déformation typiques :

Les expressions de l'énergie de déformation sont nécessaires aux calculs que l'on fait au moyen des différentes méthodes énergétiques. On donne ci-dessous quelques expressions de l'énergie de déformation utiles typiques pour des éléments de structures tels que barres et plaques. Ces expressions font apparaître le changement d'énergie de déformation correspondant à la déformation de flambement.

6.8.7.1. Eléments barres :

Energie de déformation :

Allongement :
$$\delta^2 U = \frac{1}{2} \int_0^L E A \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (6.76)$$

Flexion :
$$\delta^2 U = \frac{1}{2} \int_0^L E I \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (6.77)$$

Torsion :
$$\delta^2 U = \frac{1}{2} \int_0^L G I_t \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx \quad (6.78)$$

Cisaillement :
$$\delta^2 U = \frac{1}{2} \int_0^L G A_v \psi^2 dx \quad (6.79)$$

Gauchissement :
$$\delta^2 U = \frac{1}{2} \int_0^L E I_w \left(\frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)^2 dx \quad (6.80)$$

6.8.7.2. Plaques minces :

Energie de déformation :

Flexion :

$$\delta^2 U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (6.81)$$

6.8.8. Exemple faisant appel aux différentes méthodes :

On s'intéresse au flambement par flexion d'un élément en compression ; la charge critique est déterminée en utilisant le coefficient de Rayleigh, les méthodes de Rayleigh-Ritz et de Galerkin.

L'élément en compression faisant l'objet de l'étude est représenté sur la figure 6.12 : il est articulé et le déplacement latéral est empêché aux extrémités ; On note respectivement L, I et

E la longueur de l'élément, le moment d'inertie de flexion de la section et le module de Young ; la charge P agit verticalement vers le bas ; il s'agit de déterminer la valeur critique P_{Cr} de P ; la déformation de flambement de l'élément est représentée en figure 6.13.

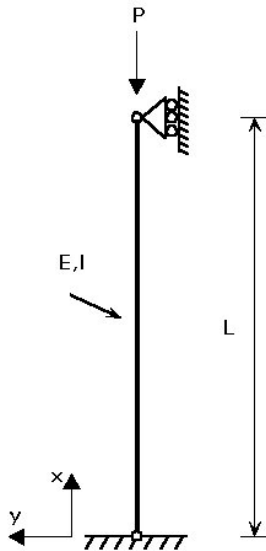


Fig.6.12 : Poteau doublement articulé.

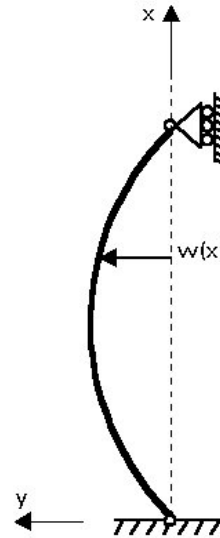


Fig. 6.13: Mode de flambement fondamental.

6.8.8.1. Méthode du coefficient de Rayleigh :

On choisit l'expression ci-dessous comme approximation du déplacement de flambement $w(x)$:

$$w(x) = a (x^2 - xL) \quad (6.82)$$

avec a constante non nulle quelconque qui satisfait les conditions aux limites $w = 0$ pour $x = 0$ et $x = L$.

Les dérivées sont :

$$\frac{dw}{dx} = 2ax \quad \text{et} \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 2a \quad (6.83)$$

Si l'on intègre selon l'équation (6.77), la variation de l'énergie de déformation pour la déformation de flambement est :

$$\delta^2 U = 2 a^2 E I L \quad (6.84)$$

La variation de l'énergie potentielle de P est l'opposée du travail fait par P pour la déformation de flambement. Le déplacement vertical du point d'application de P dû à la déformation de flexion est donné par :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (6.84)$$

et la variation de l'énergie potentielle de la charge extérieure donne, après l'intégration de l'équation (6.84) :

$$\varepsilon^2 \Omega = -P \varepsilon = -\frac{P a^2 L^3}{6} \quad (6.85)$$

Le coefficient multiplicateur de charge critique est obtenu par l'équation (6.61), soit :

$$\alpha_{cr} = \frac{2 a^2 E I L}{P a^2 L^3} = \frac{12 E I}{P L^2} \quad (6.86)$$

et, à partir de l'équation (6.57), la valeur critique P_{cr} vaut :

$$P_{cr} = 12 \frac{E I}{L^2} \quad (6.87)$$

Cette valeur doit être comparée à la valeur exacte obtenue avec le déplacement de flambement exact :

$$w(x) = a \sin \pi x / L$$

c'est-à-dire :

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{E I}{L^2} = 9,8696 \frac{E I}{L^2} \quad (6.88)$$

Ceci montre qu'un déplacement de flambement parabolique ne constitue pas une très bonne approximation du mode de flambement exact. Si on choisit comme approximation la déformée d'une poutre simplement appuyée sous charge uniformément distribuée, c'est-à-dire :

$$w(a) = a \left(x^4 - 2 x^3 L + x L^3 \right) \quad (6.89)$$

les calculs ci-dessus donnent :

$$P_{cr} = 9,88 \frac{E I}{L^2} \quad (6.90)$$

ce qui est très proche de la valeur exacte donnée par l'équation (6.88).

6.8.8.2. Méthode de Rayleigh-Ritz :

Pour simplifier les calculs, on prend l'origine de l'abscisse à mi-longueur de l'élément (voir figure 6.14).

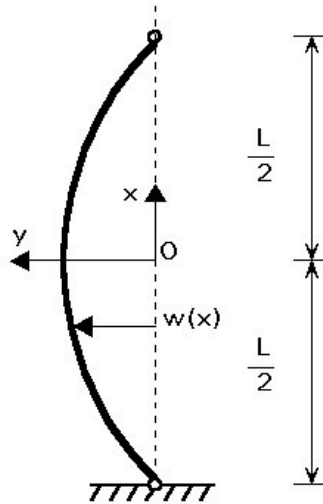


Fig.6.14 : Poteau doublement articulé.

On choisit un déplacement de flambement qui est une combinaison linéaire des deux fonctions de coordonnées suivantes :

$$\Phi_1(x) = x^2 - \frac{L^2}{4} \quad (6.91)$$

$$\Phi_2(x) = x^4 - \frac{L^4}{16} \quad (6.92)$$

qui satisfont toutes deux les conditions aux limites $w = 0$ pour $x = -L/2$ et $x = L/2$.

L'expression du déplacement de flambement est alors :

$$w(x) = a \Phi_1(x) + b \Phi_2(x) = a \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right) + b \left(x^4 - \frac{L^4}{16} \right) \quad (6.93)$$

Ses dérivées sont :

$$\frac{dw}{dx} = 2 a x + 4 b x^3 \quad \text{et} \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 2 a + 12 b x^2 \quad (6.94)$$

La variation de l'énergie de déformation est exprimée par :

$$\delta^2 U = 2 \frac{1}{2} \int_0^{L/2} E I \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = E I \left(2 a^2 L + \frac{9}{10} b^2 L^5 + 2 a b L^3 \right) \quad (6.95)$$

La variation de l'énergie potentielle due à la charge de compression est :

$$\delta^2 \Omega = - 2 \frac{1}{2} P \int_0^{L/2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = - P \left(\frac{1}{6} a^2 L^3 + \frac{1}{56} b^2 L^7 + \frac{1}{10} a b L^5 \right) \quad (6.96)$$

et les équations (6.59), (6.95) et (6.96) donnent :

$$\delta^2 V = a^2 \left(2EIL - \frac{PL^3}{6} \right) + b^2 \left(\frac{9EIL^5}{10} - \frac{PL^7}{56} \right) + ab \left(2EIL^3 - \frac{PL^5}{10} \right) \quad (6.97)$$

Les dérivées nécessaires sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = 4EIL - \frac{PL^3}{3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = \frac{9EIL^5}{5} - \frac{PL^7}{28} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} = 2 E I L^3 - \frac{PL^5}{10} = \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial a} \end{array} \right\} \quad (6.98)$$

et la matrice [a] de l'équation (6.77) est : **normalement (6.66) avec (6.67) au lieu de (6.77)**

$$[a] = \begin{bmatrix} 4EIL - \frac{PL^3}{3} & 2EIL^3 - \frac{PL^5}{10} \\ 2EIL^3 - \frac{PL^5}{10} & \frac{9EIL^5}{5} - \frac{PL^7}{28} \end{bmatrix} \quad (6.99)$$

Son déterminant est donné par :

$$\text{Dét}[a] = \left(4EIL - \frac{PL^3}{3} \right) \left(\frac{9EIL^5}{5} - \frac{PL^7}{28} \right) - \left(2EIL^3 - \frac{PL^5}{10} \right)^2 \quad (6.100)$$

La plus petite solution positive de $\text{Dét}[a] = 0$ est :

$$P_{cr} = 9,875 \frac{EI}{L^2} \quad (6.101)$$

qu'il faut comparer à la valeur exacte donnée par l'équation (6.88). Bien que les fonctions de coordonnées (6.91) et (6.92) ne constituent pas individuellement de réelles bonnes approximations du mode exact de flambement, leur combinaison (2 degrés de liberté) donne des résultats satisfaisants.

6.8.8.3. Méthode de Galerkin :

On choisit la même approximation de la déformation de flambement et la même convention de signe pour les coordonnées que pour la méthode de Rayleigh-Ritz :

$$w(x) = a \Phi_1(x) + b \Phi_2(x) \quad (6.102)$$

$$\text{où} \quad \Phi_1(x) = x^2 - L^2/4 \quad (6.103)$$

$$\Phi_2(x) = x^4 - L^4/16 \quad (6.104)$$

qui satisfont toutes deux les conditions aux limites nécessaires qui sont

$$w = 0 \text{ pour } x = -L/2 \text{ et } x = L/2$$

(pas de condition imposée pour les rotations d'extrémités).

On a vu dans ce même cours que l'équation différentielle gouvernant le flambement par flexion d'un élément en compression était donnée par :

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} + Pw = 0 \quad (6.105)$$

Le système d'équations obtenu à partir de l'équation (6.74) est :

$$2a \int_0^{L/2} \left(EI \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} + P \Phi_1 \right) \Phi_1 dx + 2b \int_0^{L/2} \left(EI \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} + P \Phi_2 \right) \Phi_1 dx = 0 \quad (6.106)$$

$$2a \int_0^{L/2} \left(EI \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} + P \Phi_1 \right) \Phi_2 dx + 2b \int_0^{L/2} \left(EI \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} + P \Phi_2 \right) \Phi_2 dx = 0$$

Les dérivées nécessaires sont :

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} = 12 x^2$$

Après intégration, on obtient le système suivant :

$$a \left[\frac{PL^5}{30} - \frac{EIL^3}{3} \right] + b \left[\frac{PL^7}{105} - \frac{EIL^5}{10} \right] = 0 \quad (6.107)$$

$$a \left[\frac{PL^7}{105} - \frac{EIL^5}{10} \right] + b \left[\frac{PL^9}{360} - \frac{EIL^7}{28} \right] = 0$$

Il existe une solution non-triviale si le déterminant de l'équation (6.107) est égal à zéro, soit :

$$\left(\frac{PL^5}{30} - \frac{EIL^3}{3} \right) \left(\frac{PL^9}{360} - \frac{EIL^7}{28} \right) - \left(\frac{PL^7}{105} - \frac{EIL^5}{10} \right)^2 = 0 \quad (6.108)$$

dont la solution la plus petite vaut :

$$P_{cr} = 9,8697 \frac{EI}{L^2} \quad (6.109)$$

qui est presque égal à la valeur exacte donnée par l'équation (6.88).

6.9. Méthodes itératives de résolution des problèmes de stabilité :

6.9.1. Introduction :

Même lorsque l'on suppose les déplacements petits, les problèmes de stabilité sont toujours non linéaires, dans le sens que les équations d'équilibre et les conditions aux limites doivent être établies dans la configuration déformée de la structure. Le résultat est que, pour des cas très simples seulement, on peut obtenir des solutions analytiques du problème aux valeurs propres - vecteurs propres, conduisant à la détermination de la charge critique et du mode de flambement correspondant d'instabilité. En général, il est nécessaire de recourir à des méthodes approchées. On a présenté précédemment un groupe très important de ces méthodes, les méthodes énergétiques. Fondamentalement, ces méthodes consistent à remplacer la structure continue d'origine par une structure discrète plus simple. Ceci est réalisé en contraignant la structure réelle à se déformer d'une manière que l'on peut décrire sous la forme de la superposition d'un ensemble de formes définies, avec des amplitudes non spécifiées. La charge critique exacte et le mode de flambement de cette structure simple, solution d'un problème aux valeurs propres - vecteurs propres, sont des solutions approchées de la structure d'origine. Bien que la précision de ces méthodes (et l'effort investi) augmente avec le nombre de degrés de liberté considérés, on peut souvent avoir des approximations

assez satisfaisantes en n'en considérant qu'un petit nombre. Un des principaux inconvénients des méthodes énergétiques est qu'elles conduisent toujours aux limites supérieures de la charge critique de flambement, ce qui n'est pas pratique en conception. La procédure de discrétisation d'une structure continue peut aussi être réalisée en divisant cette structure en plusieurs éléments rigides reliés au moyen de ressorts lui fournissant sa rigidité. La déformation de la structure est une fonction continue par morceaux, complètement définie par les déplacements des nœuds reliant les éléments. La solution exacte de cette structure discrétisée constitue aussi une solution approchée du problème initial. Cependant, dans ce cas, on ne peut rien dire concernant la valeur ou le signe de l'erreur. Comme auparavant, la précision augmente avec le nombre des éléments.

La détermination de la charge critique et du mode de flambement d'une structure nécessite la résolution d'un problème non-linéaire qui est soit un problème aux valeurs propres - vecteurs propres linéaire (systèmes discrets ou discrétisés) soit un problème aux valeurs propres - fonctions propres linéaire (systèmes continus). Dans le premier cas, on peut toujours trouver une solution analytique, mais il faut déterminer la racine la plus petite de l'équation caractéristique qui est souvent d'un degré relativement élevé. Dans le second cas, une solution analytique n'est possible que pour les problèmes simples. Une alternative à l'un ou l'autre de ces problèmes est fournie par une méthode itérative introduite en premier lieu par Vianello et appelée, de ce fait, méthode de Vianello. L'idée de base consiste à remplacer la solution du problème non-linéaire par la solution d'une suite de problèmes linéaires dont on peut montrer qu'elle converge vers le mode critique de flambement et permet le calcul de la charge critique de flambement. Une des caractéristiques de la méthode de Vianello, très pratique pour la conception et la vérification de la sécurité des structures, est qu'il est possible, à l'issue de chaque itération, de calculer les limites supérieure et inférieure de la charge critique de flambement et donc d'estimer l'erreur correspondante.

Enfin, la méthode de Vianello-Newmark combine le concept de la méthode de Vianello et la technique d'intégration numérique de Newmark. Elle constitue une alternative très efficace pour la détermination des charges critiques de flambement et des modes pour des poteaux chargés axialement, en particulier si les charges, le poteau ou ses conditions de liaison présentent des caractéristiques non-standard. On peut aussi utiliser cette méthode pour déterminer les configurations d'équilibre de poteaux sur lesquels agissent des charges axiales données et qui présentent des imperfections géométriques initiales ou des charges transversales (par exemple poutres - poteaux).

6.9.2. Méthode de Vianello :

La méthode de Vianello est une procédure itérative que l'on peut utiliser pour déterminer approximativement la charge critique et le mode de flambement pour des structures réelles continues ou discrètes sur lesquelles agissent un ensemble de charges que l'on peut exprimer en termes d'un paramètre de chargement unique λ (chargement proportionnel). Cette méthode est directement basée sur l'équation différentielle (système d'équations simultanées) de l'équilibre du système, ce qui signifie qu'elle ne prend pas en compte les concepts énergétiques. L'application de cette méthode consiste en les étapes suivantes :

- (i) Faire une estimation initiale de la configuration déformée associée au mode critique de flambement de la structure, satisfaisant les conditions aux limites en déplacements (cinématiquement admissible). Cette estimation initiale est un vecteur (pour les systèmes discrets) ou une fonction (pour les systèmes continus).
- (ii) Sur la base de cette configuration supposée, calculer les forces intérieures en termes de paramètre de charge de flambement, λ , inconnu. Ces forces intérieures sont des forces concentrées et/ou des couples (systèmes discrets) ou des moments fléchissants (systèmes continus).
- (iii) En utilisant une analyse linéaire standard, déterminer la configuration déformée due aux forces intérieures calculées en (ii). Cette nouvelle configuration déformée qui dépend de λ , constitue une meilleure approximation du mode critique de flambement de la structure. L'analyse linéaire comporte la résolution d'un système d'équations d'équilibre, simultanées (systèmes discrets ou discrétisés) ou d'équations différentielles (systèmes continus).
- (iv) Identifier les déplacements supposés et calculés mentionnés en (i) et (iii) de manière à obtenir les limites supérieure et inférieure d'une estimation de la valeur critique du paramètre de chargement λ_{cr} . Pour des systèmes discrets la limite supérieure (inférieure) de λ_{cr} est la plus grande (plus petite) valeur de λ nécessaire pour égaliser deux vecteurs correspondants non nuls, définissant les déplacements supposés et calculés. Il est nécessaire de faire une estimation correcte de λ pour égaliser les valeurs des fonctions qui définissent les déplacements supposés et calculés en un point de valeur non nulle. Ces limites sont, souvent, plutôt difficiles à calculer et seule une estimation de λ_{cr} est possible qui consiste en la valeur de λ requise pour égaliser les fonctions au point spécifié.
- (v) Répéter le processus en utilisant comme estimation initiale la forme de la déformée calculée lors de l'itération précédente. S'arrêter lorsque l'on a obtenu la précision désirée. Pour des raisons numériques, il est souvent pratique de normer le déplacement calculé avant de l'utiliser comme estimation initiale de l'itération suivante. La précision de la solution se mesure soit par la différence entre les limites supérieure et inférieure, soit par l'écart entre des estimations successives de λ_{cr} .

On peut montrer que le processus converge vers le mode d'instabilité critique, ce qui permet donc de calculer le paramètre de charge critique de flambement λ_{cr} .

6.9.3. Examen de la méthode de Newmark :

Mathématiquement, l'essence de la méthode de Newmark réside dans une technique d'intégration numérique permettant la résolution d'équations différentielles du type

$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$. Elle conduit à un calcul rapide et systématique des cisaillements et des moments dans des poutres isostatiques quelconques soumises à des charges transversales. Si l'on combine la démarche d'intégration de Newmark et la méthode des poutres conjuguées, on peut aussi calculer les pentes et les déplacements dus à la flexion. Les poutres hyperstatiques peuvent être étudiées par la méthode des forces, la méthode de Newmark fournissant une méthode directe de détermination de la matrice de souplesse.

6.9.3.1. Conventions de signe :

On choisit des conventions de signe de telle sorte que l'on puisse ajouter les quantités en se déplaçant de gauche à droite le long de la poutre et les retrancher dans le cas contraire. L'effort normal (N) est alors positif en compression, l'effort tranchant (V) est positif s'il tend à tourner dans le sens des aiguilles d'une montre, le moment fléchissant (M) et la courbure (χ) sont positifs quand les fibres supérieures sont comprimées, la pente (θ) est positive de bas en haut vers la droite, la flèche (y) et les charges appliquées (q, Q) sont positives de bas en haut, les forces axiales appliquées (P, p) sont positives de la gauche vers la droite.

6.9.3.2. Concepts :

Pour pouvoir appliquer la méthode de Newmark, il faut diviser la poutre en plusieurs segments égaux. Chaque point de séparation s'appelle port. Le nombre de ports doit permettre une bonne description de la poutre, des chargements et des conditions d'appui. Quand le chargement consiste en des charges concentrées appliquées aux ports, la méthode détermine les cisaillements dans les segments et les moments de manière exacte aux ports. Les cisaillements sont déterminés en faisant la somme algébrique des charges le long de la poutre et on trouve les moments fléchissant en ajoutant ou retranchant les produits des cisaillements successifs par la longueur des segments sur lesquels ils agissent. Quand on ne connaît la valeur du cisaillement ou du moment en aucun point de la poutre, on peut faire les calculs sur la base d'une valeur choisie arbitraire (d'habitude, zéro), avec une correction linéaire ou constante (constante) que l'on ajoute plus tard aux moments résultants (aux cisaillements).

Quand la poutre est soumise à des charges réparties, celles-ci peuvent être remplacées par des charges concentrées équivalentes exercées aux ports. Physiquement, ces charges représentent les réactions dues à une série de pannes hypothétiques de poids propre nul, coïncidant avec les segments et interposées entre les charges et la poutre (voir figure 6.15). Les réactions des pannes sont équivalentes aux charges réparties dans le sens qu'elles produisent les mêmes cisaillements et moments de flexion aux ports. Les formules de détermination des charges concentrées équivalentes sont exactes, respectivement pour des distributions de charges linéaires et paraboliques et approchées pour des distributions d'ordre supérieur. On peut aussi utiliser les formules relatives aux ports d'extrémité chaque fois qu'il y a un saut dans la valeur ou la pente de la charge appliquée.

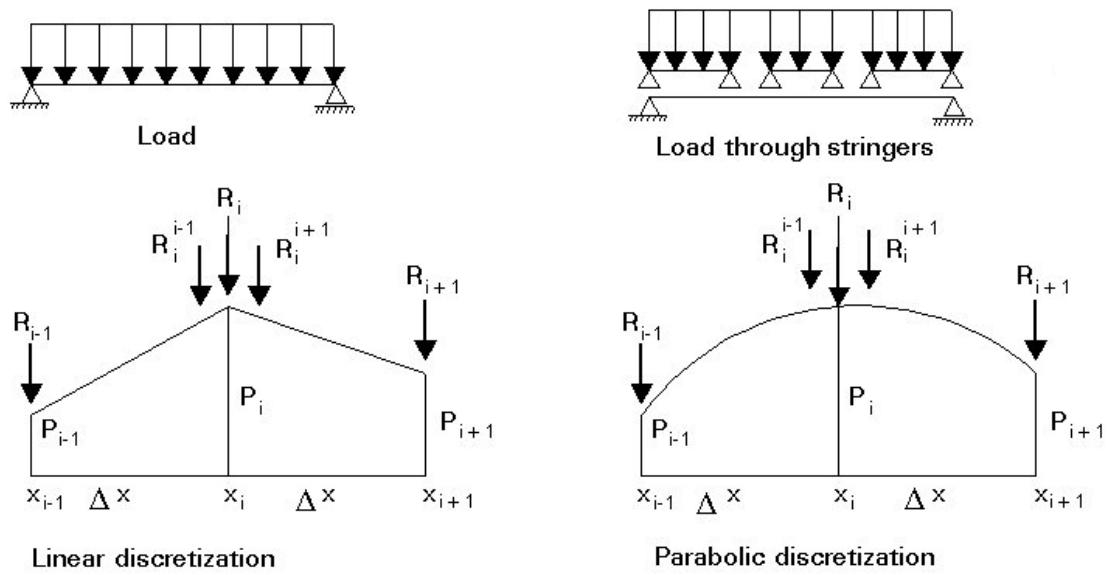


Fig.6.15 : Modèle numérique pour une poutre simplement appuyée.

Pour une discrétisation linéaire (figure 6.15a), on a les formules suivantes :

Port d'extrémité :
$$R_{i\pm 1} = \frac{\Delta x}{6} (2p_{i\pm 1} + p_i)$$

Ports intermédiaires :
$$R_i^{i\pm 1} = \frac{\Delta x}{6} (2p_i + p_{i\pm 1})$$

$$R_i = R_i^{i+1} + R_i^{i-1} = \frac{\Delta x}{6} (p_{i-1} + 4p_i + p_{i+1})$$

Pour une discrétisation parabolique (figure 6.15b), on a :

$$R_{i\pm 1} = \frac{\Delta x}{24} (7p_{i\pm 1} + 6p_i - p_{i\mp 1})$$

$$R_i^{i+1} = \frac{\Delta x}{24} (3p_{i+1} + 10p_i - p_{i-1})$$

$$R_i = R_i^{i+1} + R_i^{i-1} = \frac{\Delta x}{12} (p_{i-1} + 10p_i + p_{i+1})$$

Lorsque le chargement contient des charges réparties, la méthode donne directement les cisaillements moyens dans les segments et les moments fléchissant aux ports. Une simple addition permet d'avoir les cisaillements aux ports. Toutes ces valeurs sont exactes sous réserve que l'on n'introduise pas d'erreur en discrétisant les charges.

Une fois que les moments fléchissant sont connus, on peut traiter les courbures en les divisant par la rigidité de flexion EI . Comme les charges (p), le cisaillement (V) et le moment fléchissant (M) suivent les mêmes relations les uns avec les autres que la courbure $\left[\chi = \frac{M}{EI}\right]$, la pente (θ) et la flèche (y), on peut en conclure que la procédure utilisée pour calculer les moments fléchissant à partir des charges peut aussi être utilisée pour calculer les flèches à partir des courbures, aussi longtemps que l'on prend en compte les différentes conditions aux limites. Pour pouvoir répéter la procédure ci-dessus, la première étape consiste à remplacer les courbures (quantité répartie de manière continue) par des « courbures concentrées » équivalentes. Physiquement, ces quantités représentent le changement brutal de pente qui a lieu aux nœuds d'une poutre hypothétique formée de segments rigides articulés les uns aux autres et dont la raideur de flexion est fournie exclusivement par des ressorts spirales placés aux articulations. Les variations de pente sont équivalentes à des courbures réparties dans le sens qu'elles produisent les mêmes pentes et flèches aux ports. Les formules à utiliser pour calculer les courbures concentrées équivalentes sont celles utilisées pour les charges et représentées sur la figure 6.15b. Ensuite la procédure donne successivement les pentes moyennes des segments et les flèches aux ports. Il faut noter que ces quantités sont précisément les charges concentrées équivalentes, les cisaillements moyens et les moments fléchissant de la « poutre conjuguée » sollicitée par des charges réparties coïncidant avec le diagramme de courbure de la poutre initiale (le concept de « courbure concentrée » est remplacé par la définition de la « poutre conjuguée »).

Enfin, dans le cas de poutres hyperstatiques, la méthode de Newmark convient bien à l'utilisation de la méthode des forces, dans la mesure où elle fournit une manière directe de déterminer la matrice de souplesse et la flèche dans le système de base.

6.9.4. Méthode de Vianello-Newark :

Chaque fois que l'on applique la méthode de Vianello à des poteaux chargés axialement et que l'on suit l'étape (iii) de la méthode de Newmark, on a la méthode de Vianello-Newmark. Pour l'étape (ii), c'est-à-dire le calcul des valeurs des moments fléchissant aux ports en termes de paramètre de charge et sur la base de l'estimation initiale du mode de flambement, on peut appliquer la procédure suivante, exacte à condition que toutes les charges axiales soient concentrées aux ports :

- (i) Calculer les efforts normaux (N) dans les segments en termes de charges axiales (P) que l'on peut exprimer au moyen du paramètre unique de chargement λ . Si le poteau est hyperstatique dans son sens longitudinal, il faut déterminer les valeurs de N au moyen d'une méthode adéquate (par exemple la méthode des forces).
- (ii) Calculer la valeur de la flèche moins l'incrément de flèche que l'on a dans chaque segment, sur la base de l'estimation initiale ($\Delta y_{ij} = y_i - y_j$). On adopte cette convention de signe de telle sorte que l'on puisse ajouter les quantités

quand on se déplace de la gauche vers la droite le long de la poutre et les soustraire dans le cas contraire.

- (iii) Calculer l'incrément du moment fléchissant dû à l'effort normal dans chaque segment ($\Delta M_{ij} = N_{ij} \Delta y_{ij}$).
- (iv) Calculer les moments fléchissants, dus aux forces axiales, aux ports (M'), en ajoutant ou retranchant les valeurs de ΔM . Ces moments fléchissants n'incluent pas l'influence des réactions d'appui et doivent donc être corrigés chaque fois que cette influence existe.
- (v) Faire les corrections appropriées sur les moments fléchissants calculés en (iv). Ces corrections sont identiques à celles vues dans le chapitre précédent et conduisent aux valeurs exactes dans le cas de poteaux isostatiques (dans la direction transversale). Si le poteau est hyperstatique et en supposant que l'on utilise la méthode des forces, on applique la procédure précédemment décrite sur le système de base choisi. On impose la compatibilité pendant l'étape (iii) de la méthode de Vianello qui utilise aussi la technique de Newmark, ce qui permet de déterminer les moments fléchissants et les flèches aux ports du poteau initial.

S'il y a des charges axiales réparties, elles doivent être remplacées par des charges axiales concentrées équivalentes (p_{disc}), en utilisant les formules données figure 6.15b. La procédure de calcul des moments fléchissants aux ports, mentionnée ci-dessus, devient alors approchée (on peut réduire cette erreur en augmentant le nombre de segments).

Il faut noter que le calcul des courbures concentrées équivalentes est dans ce cas toujours approché. La méthode de Vianello-Newmark conduira alors toujours à une valeur de la charge critique de flambement légèrement différente de la valeur réelle. Cette erreur diminue si le nombre de segments augmente.

6.9.5. Configurations d'équilibre :

On peut aussi utiliser les méthodes de Vianello et Vianello-Newmark pour déterminer les configurations d'équilibre de poteaux à géométrie non parfaite ou chargés transversalement sous l'action de charges axiales connues. On n'étudiera ici que la méthode de Vianello-Newmark. La méthode de Vianello ne peut être appliquée que dans quelques cas simples.

Par exemple, le comportement d'une poutre-poteau est donné par la solution de l'équation différentielle suivante (N constant par morceau) :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = N \frac{d^2 y}{dx^2} + q \quad (6.110)$$

L'application de la méthode de Vianello-Newmark consiste en une procédure itérative qui nécessite de pouvoir estimer au départ la configuration déformée de la poutre-poteau. Le processus converge vers la forme exacte $y(x)$. Chaque itération comporte la résolution des deux équations suivantes :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y_I}{dx^2} \right) = q \quad (6.111)$$

$$\frac{d^2 y_{II}}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (6.112)$$

L'équation (6.111) constitue l'analyse linéaire standard et n'a besoin d'être résolue qu'une fois, dans la mesure où $y_1(x)$ est la même quelles que soient les itérations. L'équation (6.112) ressemble fortement au problème aux valeurs propres - fonctions propres que l'on a étudié auparavant, la différence résidant dans le fait que les forces axiales sont maintenant dues à des forces appliquées connues. L'amplitude des estimations initiales de la configuration déformée doit cependant être contrôlée par un facteur Δ , déterminé à l'issue de chaque itération par la condition :

$$\Delta \sum_{i=1}^n y(x_i) = \Delta \sum_{i=1}^n y_{II}(x_i) + \sum_{i=1}^n y_I(x_i) \quad (6.113)$$

où n désigne le nombre de ports. Cette condition impose une similitude entre les configurations déformées initiales et calculées, dans le sens que la somme des valeurs de leurs ports doit être la même.

Si l'imperfection initiale consiste en une excentricité e_0 de toutes les charges appliquées, $y_1(x)$ est alors solution de : (N constant par morceau)

$$EI \frac{d^2 y_I}{dx^2} = - N e_0(x) + Ax + B \quad (6.114)$$

Enfin, il faut mentionner que la méthode diverge si le paramètre de chargement axial λ est supérieur à la valeur critique correspondante λ_{cr} .

6.10. Conclusions :

- L'étude des problèmes de stabilité fait appel à des critères généraux de l'énergie dérivés du principe du travail virtuel et du principe de l'énergie potentielle totale stationnaire ; le premier de ces principes est identique au second pour des systèmes parfaitement conservatifs.

- Toute configuration d'un système peut généralement être décrite par un ensemble de coordonnées généralisées q_i . Si on note V l'énergie potentielle totale du système, une configuration d'équilibre vérifie $\delta^2 V = 0$ et la condition de stabilité de cet équilibre est $\delta^2 V > 0$; la première et la seconde variation de V sont déterminées pour tout déplacement virtuel δq_i satisfaisant les conditions aux limites.
- Les charges critiques sont calculées à partir de la condition d'équilibre neutre donnée par $\delta^2 V = 0 = \text{minimum}$.
- Il existe des méthodes énergétiques approchées qui fournissent à l'ingénieur les moyens pratiques de déterminer les chargements critiques pour la plupart des problèmes de stabilité; ces méthodes font des hypothèses sur la nature de la déformation de flambement du système élastique, incorporant des paramètres ajustables déterminés de manière à remplir les conditions d'équilibre neutre.
- Le coefficient de Rayleigh, la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode de Galerkin présentés dans ce document sont des méthodes bien connues qui peuvent généralement être appliquées manuellement à des problèmes simples de flambement d'éléments de structures isolés sous des charges élémentaires.
- Lorsque le nombre de degrés de liberté augmente, ces méthodes requièrent généralement un traitement informatique, comme le font les méthodes des différences finies d'Euler et des éléments finis.
- Cette leçon concerne l'utilisation de méthodes itératives pour résoudre les problèmes de stabilité, en particulier pour la détermination des charges critiques et des configurations d'équilibre.
- L'idée à la base des méthodes itératives a été introduite par Vianello et consiste à remplacer la solution d'un problème non linéaire par la solution d'une suite convergente de problèmes linéaires.
- La méthode de Vianello est utilisée pour calculer les charges critiques de flambement de systèmes discrets et continus. Cependant, dans le cas de systèmes continus, elle n'est applicable qu'à des cas plutôt simples.
- Si l'on combine la méthode de Vianello et la technique d'intégration de Newmark, il est possible d'élaborer une méthode efficace de calcul des charges critiques et de détermination des configurations d'équilibre de poteaux chargés axialement.
- La méthode de Vianello-Newmark est particulièrement utile lorsque l'on a des caractéristiques non standard telles que des charges axiales réparties, une rigidité de flexion variable ou des conditions aux limites complexes.

CHAPITRE 7 : Modélisation par éléments finis des phénomènes d'instabilités

7.1.Revue de l'analyse du déversement par la méthode des éléments finis :

7.1.1. Généralités:

L'analyse par éléments finis (FEA) est un outil d'analyse structurelle le plus courant en usage aujourd'hui [26], [31], [32] . De grands progrès ont été réalisés dans les aspects théoriques et aspect computationnel de la méthode des éléments finis. L'utilisation de cette technique est de plus en plus répandue dans la conception de l'évaluation, de la fiabilité et de l'analyse des risques et de la performance des structures en générale .

L'analyse des phénomènes de stabilité (flambement, déversement etc..) est une technique utilisée pour déterminer les charges critiques au cours de laquelle une structure devient instable. Dans ce chapitre nous résumons les principes fondamentaux et les connaissances techniques liées au déversement par la méthode des éléments finis (FEM). Les informations détaillées peuvent être trouvées dans la documentation en ligne du logiciel ANSYS.

7.1.2. Modèle d'Ingénierie:

Les structures sont généralement complexes par nature, et ne peuvent être analysées qu'après leurs idéalisation. Les éléments qui doivent être pris en compte dans ce processus de l'idéalisation sont : le caractère de chargement, les chemins de chargement primaires, et les parties de la structure qui participent à l'étude par éléments finis. Les analystes devraient décrire et justifier la nature du modèle. Le mode de justification devrait inclure une discussion sur:

- Toute action structurelle importante capturé par le modèle.
- Exigence de prédire avec précision les contraintes et/ou déformations.
- Région de la structure d'un intérêt particulier, si le principe de Saint-Venant est satisfait.
- changements évidents dans la rigidité structurelle qui suggèrent des conditions aux limites du modèle
- Application localisée de la charge à une grande structure uniforme.

7.1.3. Modèle d'analyse par éléments finis :

Avant de modéliser un problème structurel, il est utile d'avoir une idée générale du comportement attendu de la structure. Cette connaissance sert de guide utile dans plusieurs décisions de modélisation qui doivent être réalisés dans la construction du modèle par éléments finis.

Dans une certaine mesure tous les types d'éléments finis sont spécifiques et ne peuvent simuler qu'un nombre limité de types de réponse. Une étape importante dans la procédure de modélisation par éléments finis est de choisir les types d'éléments appropriés, ce qui est souhaitable au problème particulier.

7.1.4. Procédure de Solution :

Deux techniques sont disponibles pour la prédiction de la charge et le mode de déversement d'une structure : analyse par calcul non linéaire, et par les valeurs propres (ou linéaire). Depuis ces deux méthodes donnent souvent des résultats très différents, les différences entre eux doivent être examinées avant de discuter les détails de leur mise en œuvre.

7.1.5. La méthode des valeurs propres:

La méthode d'analyse de flambement par les valeurs propres prédit la charge de flambage théorique (le point de bifurcation) d'une structure linéaire élastique idéale. Cette méthode correspond à l'approche des méthodes d'analyse de flambement élastique donnée par les manuels : par exemple, une analyse de flambement par valeur propre d'une colonne correspond à la solution classique d'Euler.

Le flambement est formulé comme un problème de valeurs propres :

$$([K] + \lambda_i[S]\{\psi_i\}) = 0$$

où

$[K]$ = matrice de rigidité.

$[S]$ = matrice de rigidité des contraintes.

λ_i = la i ème valeur propre (utilisée pour être multiplié par les charges qui ont généré $[S]$).

ψ_i = le i ème vecteur propre des déplacements.

Le problème aux valeurs propres est résolu par la méthode d'extraction de la valeur propre et du vecteur propre. Les vecteurs propres sont normalisés de sorte que la plus grande valeur est de 1,0. Ainsi, les contraintes (résultats) ne peuvent être interprétées que comme une répartition relative des contraintes.

L'analyse de flambement par la méthode des valeurs propres suit la procédure suivante:

7.1.5.1. Créer le modèle d'analyse :

Il faut garder à l'esprit que seul le comportement linéaire est valable. Des éléments non linéaires, le cas échéant, sont traités comme linéaire. Le module de Young doit être définie. Les propriétés des matériaux peuvent être linéaire, isotrope ou orthotrope et constante ou dépendant de la température. Les propriétés non linéaires, le cas échéant, sont ignorées.

7.1.5.2. Obtenir la solution statique :

La procédure pour obtenir une solution statique est la même que l'analyse statique de structure avec les exceptions suivantes:

- Les effets de précontrainte doivent être activés. L'analyse de flambement par valeur propre exige que la matrice de rigidité des contraintes soit calculée.
- Les charges unitaires sont généralement suffisantes (les valeurs réelles de charge ne doivent pas être spécifiées).

Les valeurs propres calculées par l'analyse de flambement représentent les facteurs de charge de flambement. Par conséquent, si une charge unitaire est spécifiée, les facteurs de charge représentent des charges de flambement.

7.2. Poutres à sections symétriques (IPE) :

7.2.1. Poutre simplement appuyée :

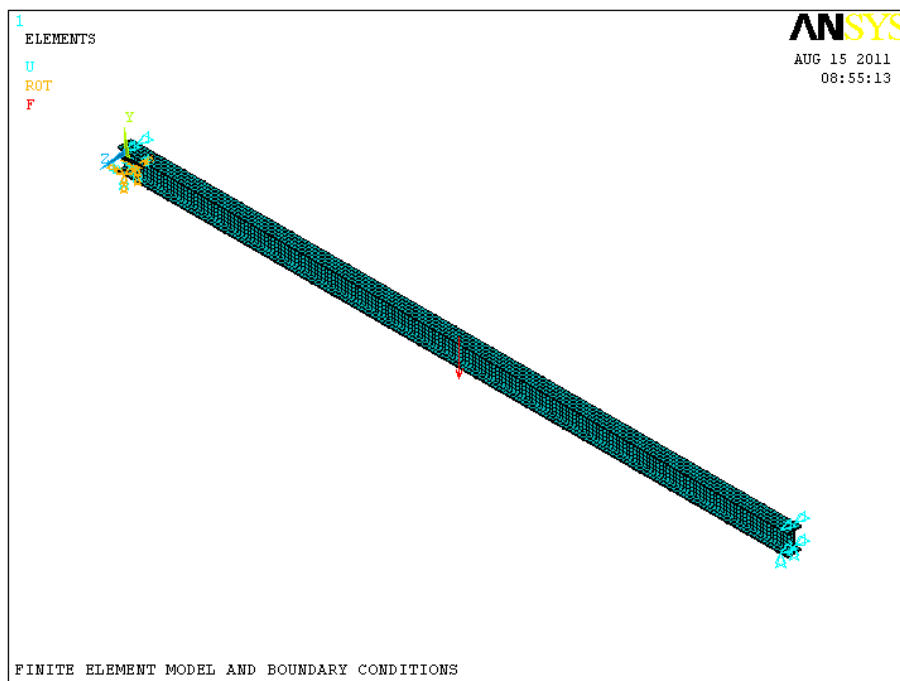


Fig.7.1 : Modèle par éléments finis et conditions aux limites.

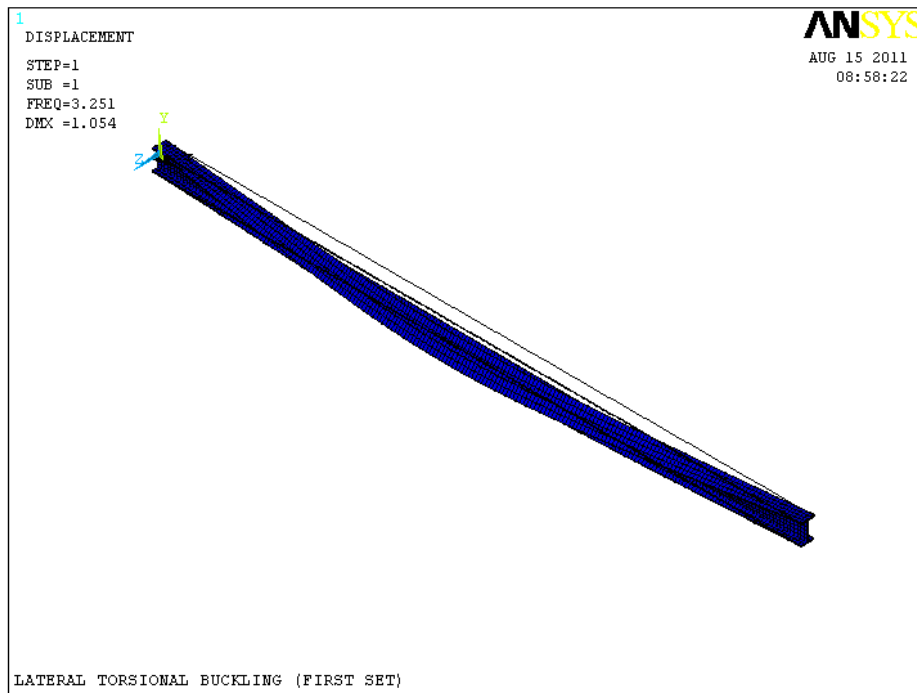


Fig.7.2 : Premier mode de déversement.

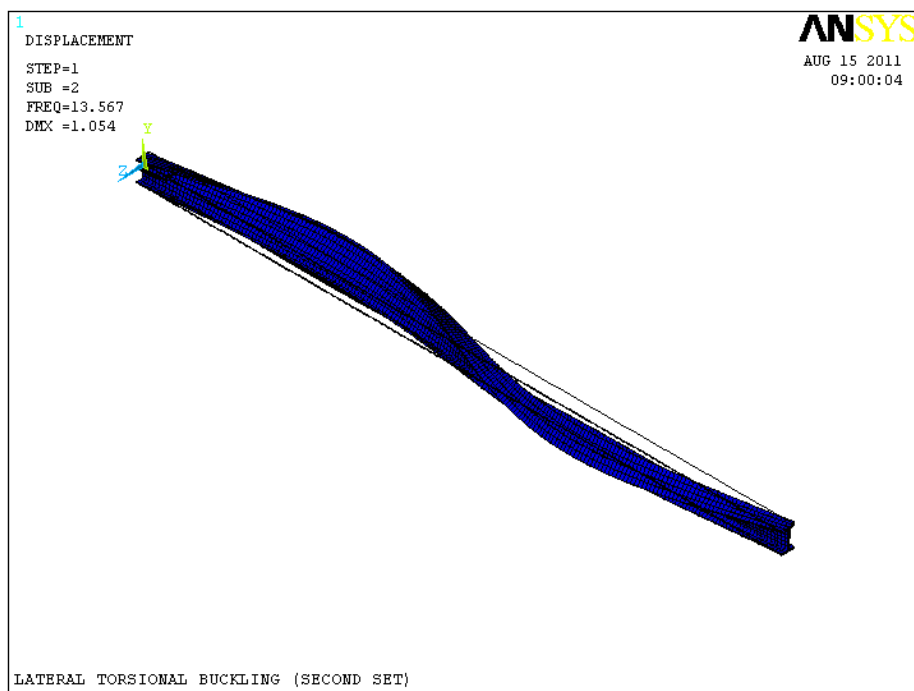


Fig.7.3 : Deuxième mode de déversement.

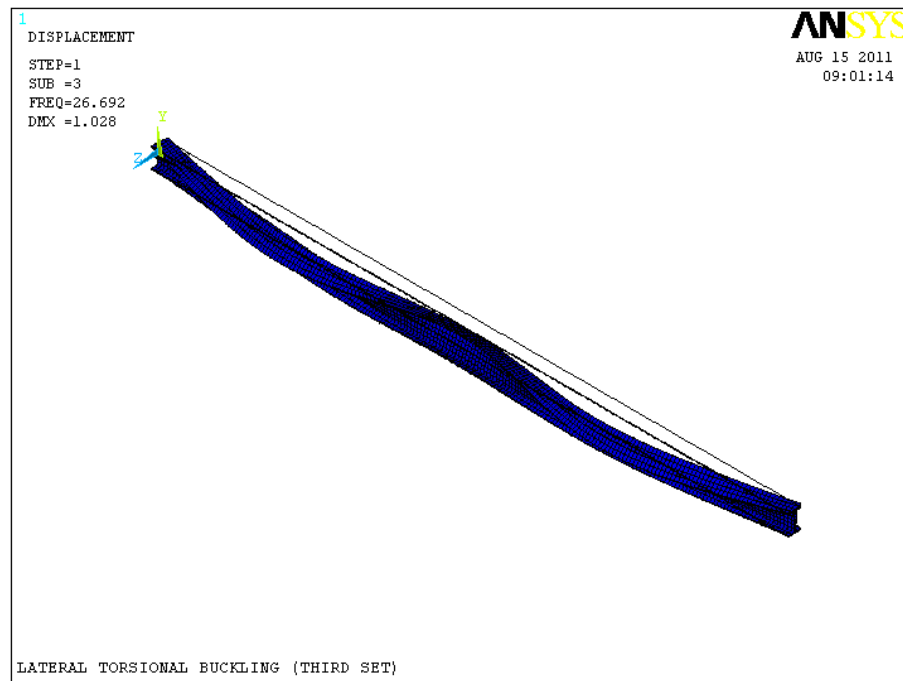


Fig.7.4 : Troisième mode de déversement.

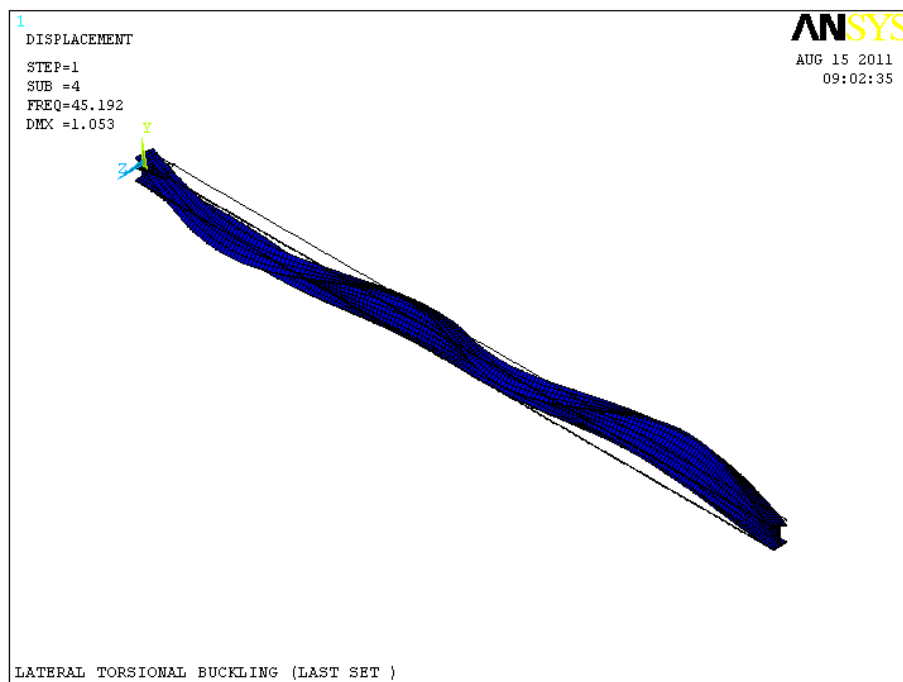


Fig.7.5 : Quatrième mode de déversement.

7.2.2. Poutre console :

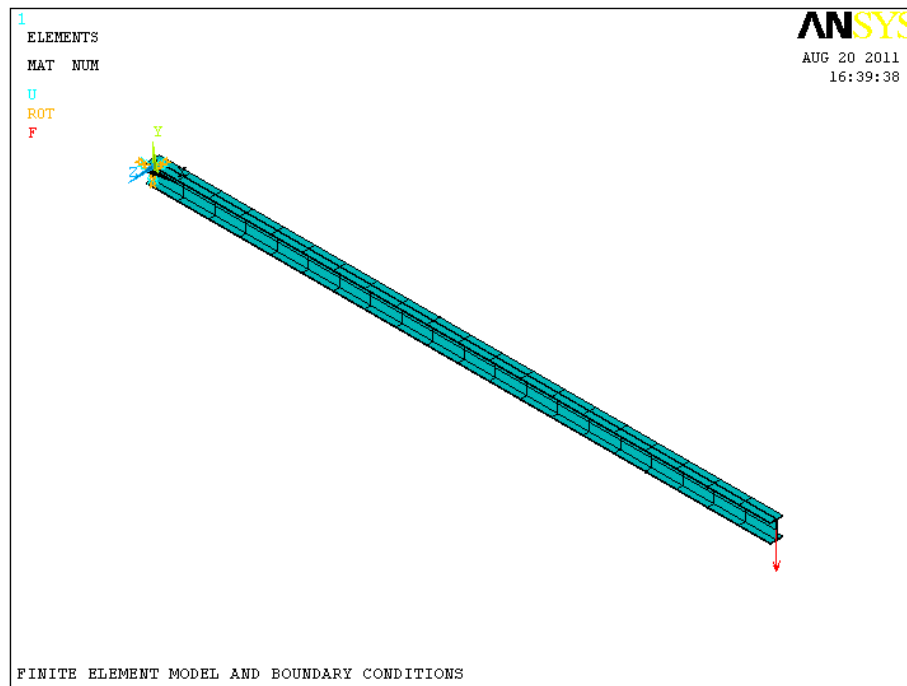


Fig.7.6 : Modèle par éléments finis et conditions aux limites.

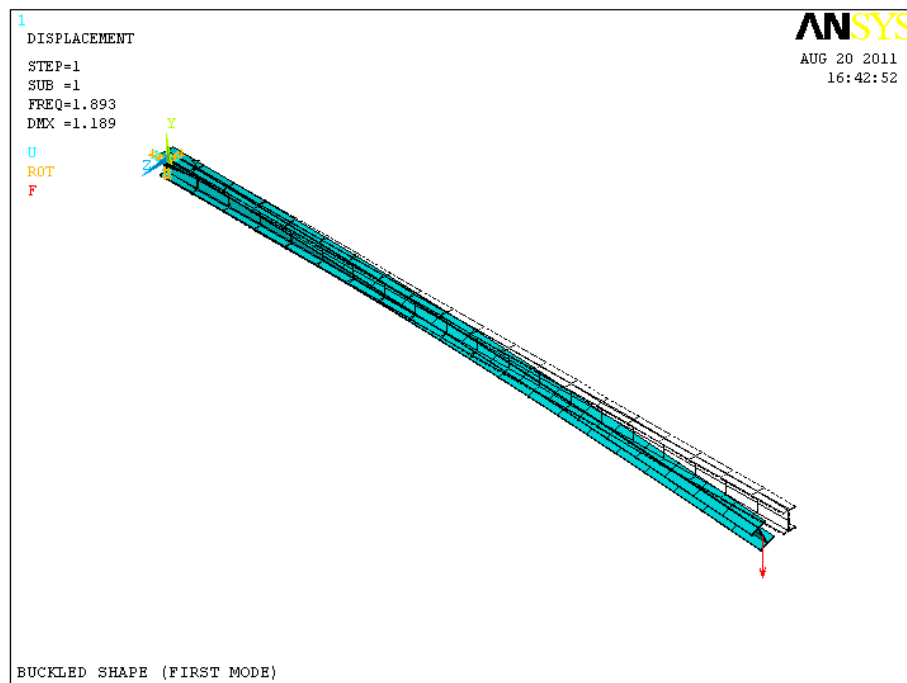


Fig.7.7 : Premier mode de déversement.

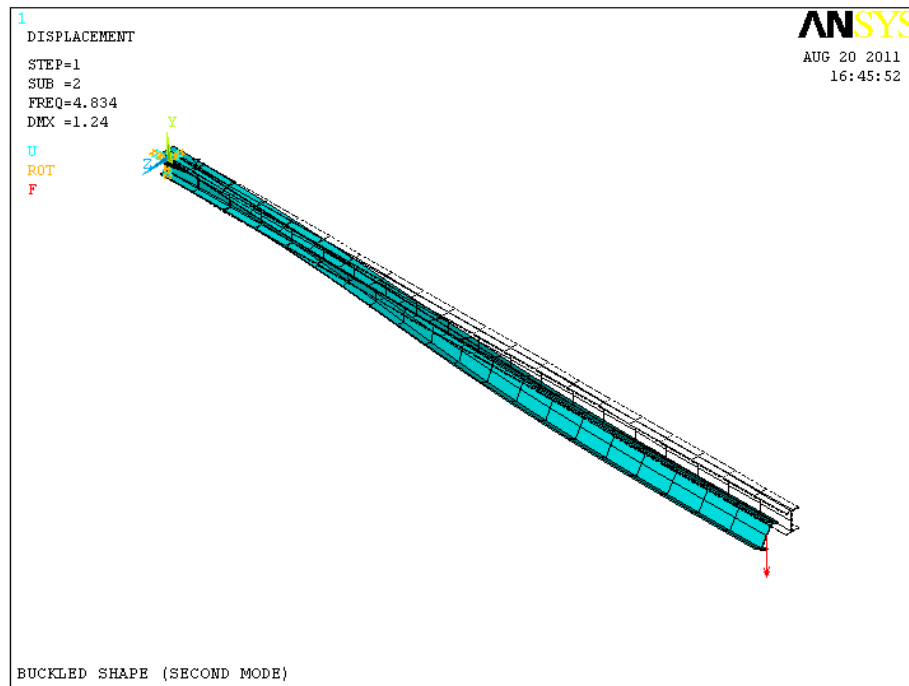


Fig.7.8 : Deuxième mode de déversement.

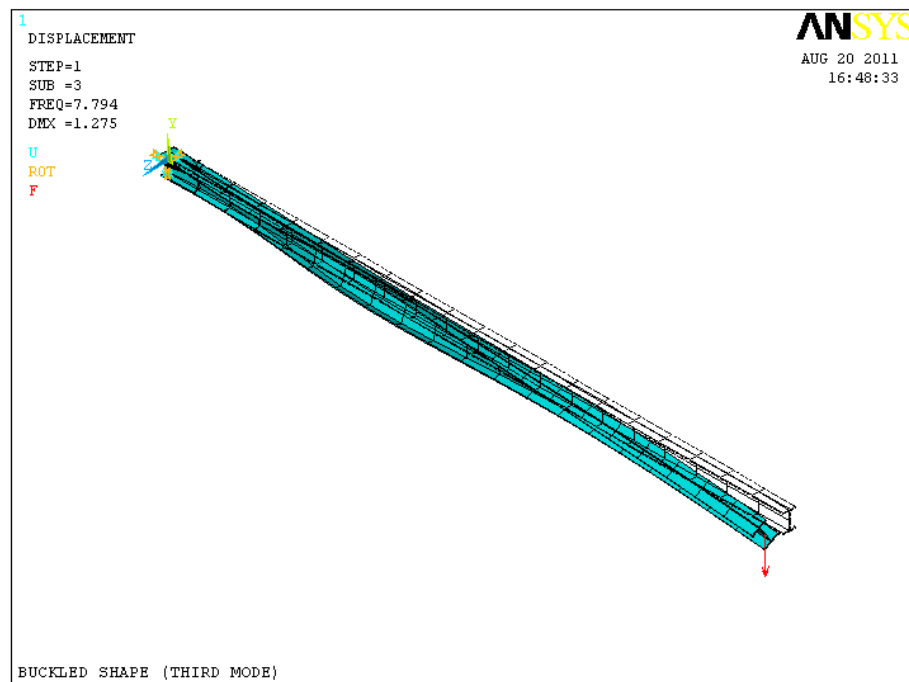


Fig.7.9 : Troisième mode de déversement.

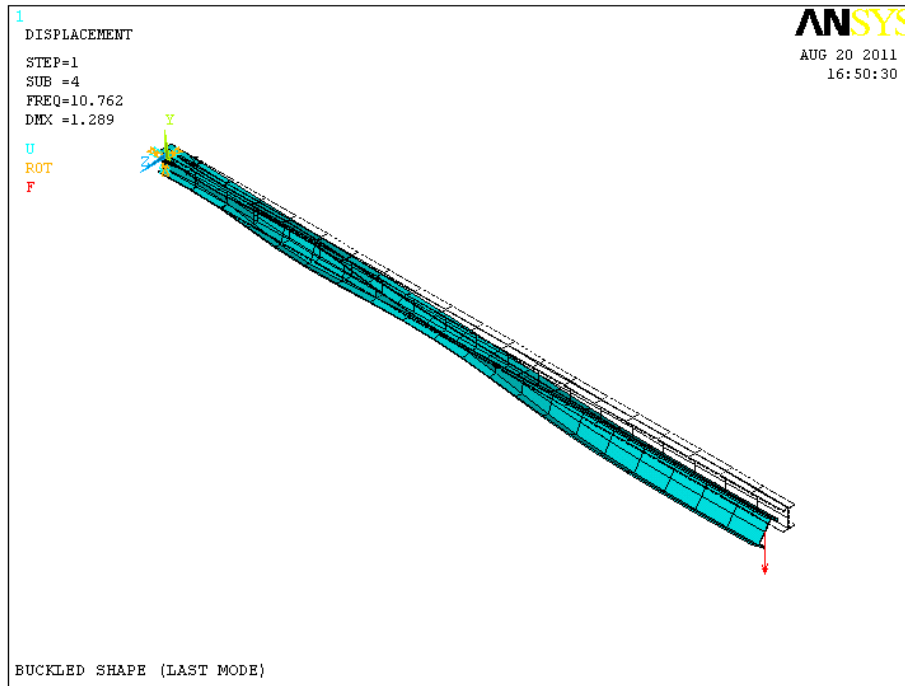
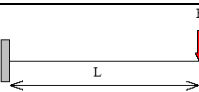
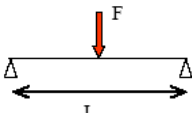


Fig.7.10 : Quatrième mode de déversement.

7.2.3. Validation :

Les résultats de simulation numériques sont confrontés à des résultats théoriques et sont montrés dans le tableau 1 ci-dessous. Le moment critique de déversement est calculé en multipliant le facteur de charge μ du tableau par le moment maximum dans la poutre.

Tableau 1 : Résultats théorique et numérique du facteur de charge.

Section	Boundary conditions loading	Loading location	Load Factors		
			μ_{theo}	μ_{ans}	Δ
Double symmetrical I section. h = 300 mm bf1 = bf2 = 15 mm tf1 = tf2 = 10 mm tw = 10 mm	 L = 10 m F = -10 KN At beam fixing: $\nu, \theta, \nu', \theta'$ (fixed)	Upper flange	1.893	1.897	0.21%
		Shear center	2.333	2.343	0.43%
		Lower flange	2.670	2.676	0.22%
Double symmetrical I section. h = 300 mm bf1 = bf2 = 15 mm tf1 = tf2 = 10 mm tw = 10 mm	 L = 10 m F = -10 KN At beam fixing : ν, θ (free) ν', θ' (fixed)	Upper flange	3.245	3.251	0.18%
		Shear center	4.245	4.250	0.11%
		Lower flange	4.643	4.650	0.15%

7.2.4. Discussion des résultats :

Afin de valider le model par éléments finis développé dans cette analyse, La méthode aux valeurs propres pour le déversement a été effectuée pour le modèle présenté dans la figure 2. Les facteurs de charges obtenus sont comparés avec les valeurs de calcul théorique.

La différence entre les résultats théoriques et numériques est calculée selon la relation

$$\text{suivante : } \Delta = \frac{|\mu_{ans} - \mu_{theo}|}{\mu_{ansys}} .$$

Les résultats de simulation numériques obtenus en utilisant l'élément (BEAM 188) du logiciel ANSYS diffèrent de 0,5% des valeurs théoriques.

Pour ces situations, on peut conclure qu'il y a un bon agrément entre les résultats théoriques calculés par le code de conception de l'Eurocode 3 et les résultats numériques donnés par Ansys.

7.3.Poutres à sections dissymétriques (UAP) :

7.3.1. Poutre en UAP 300 encastrée :

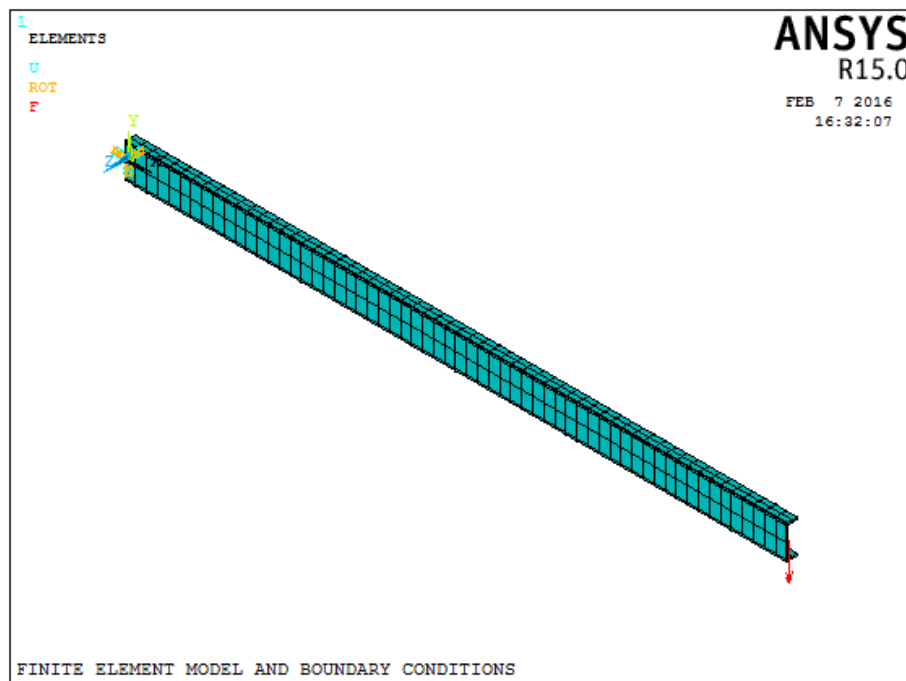


Fig.7.11 : Modèle par éléments finis et conditions aux limites.

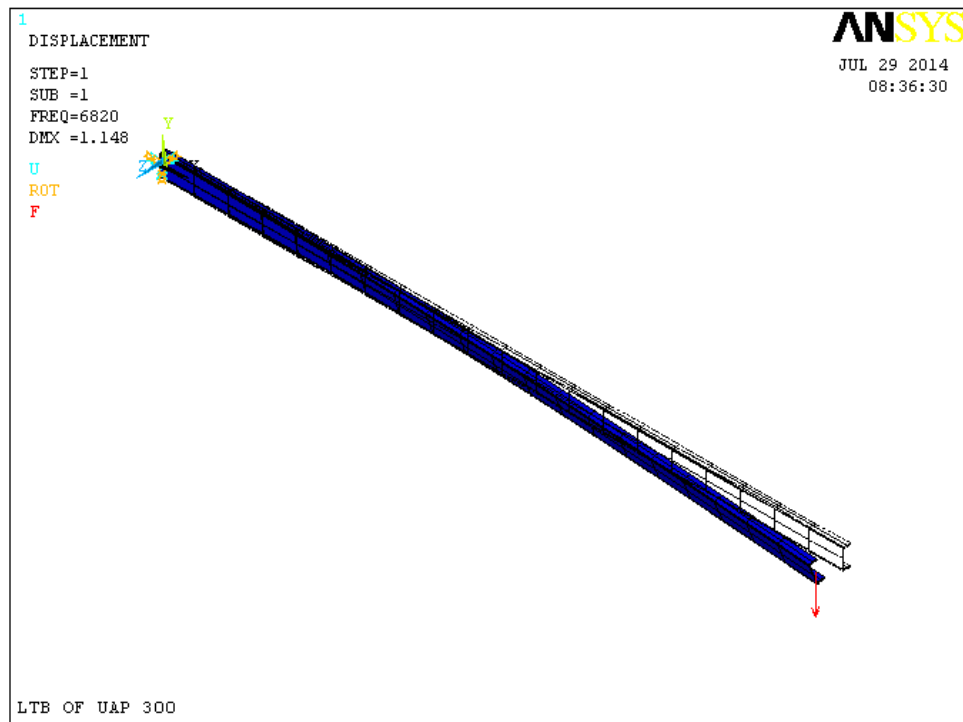


Fig.7.12 : Premier mode de déversement.

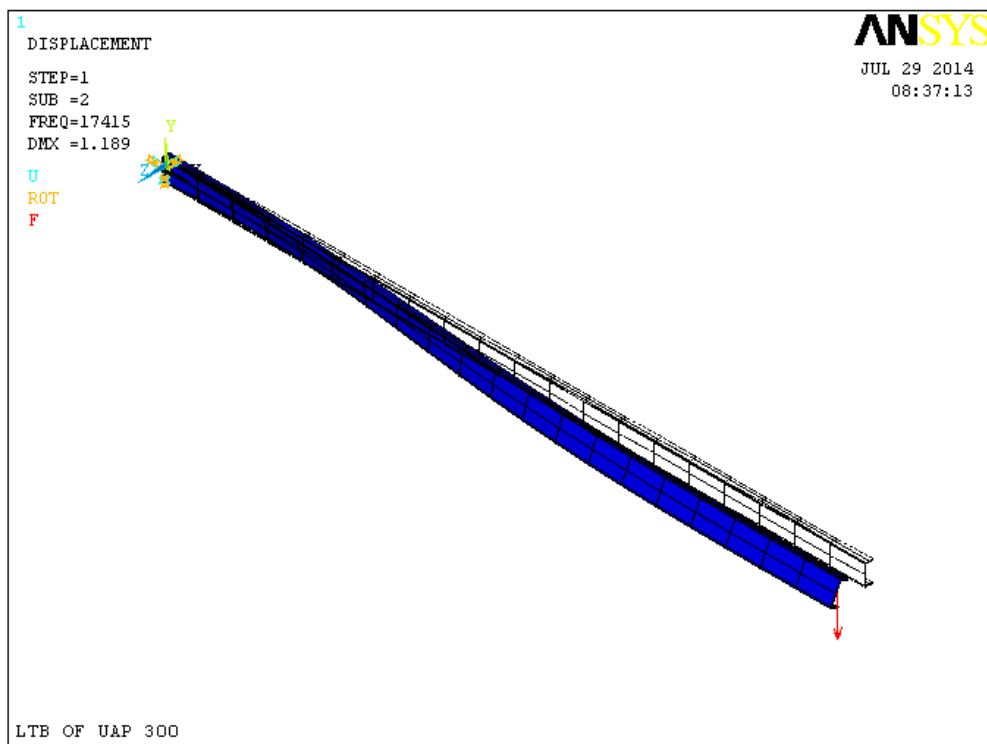


Fig.7.13 : Deuxième mode de déversement.

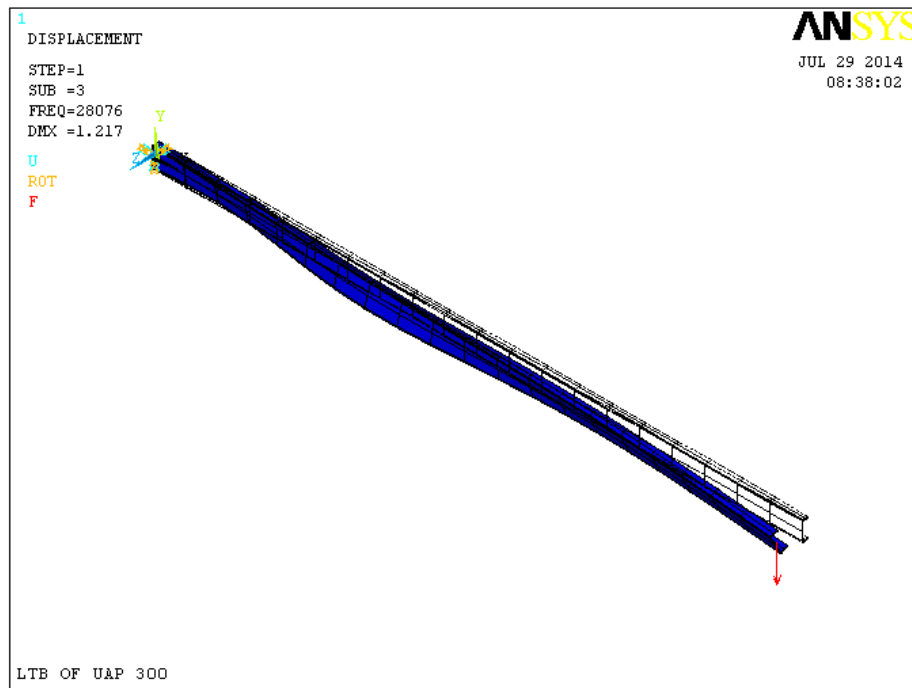


Fig.7.14 : Troisième mode de déversement.

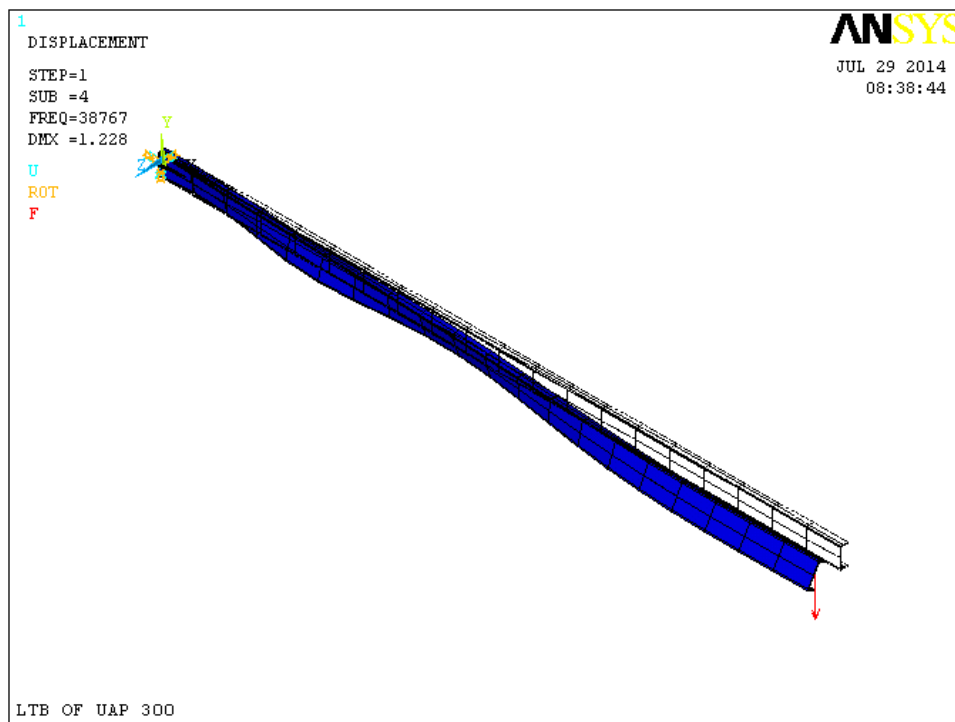
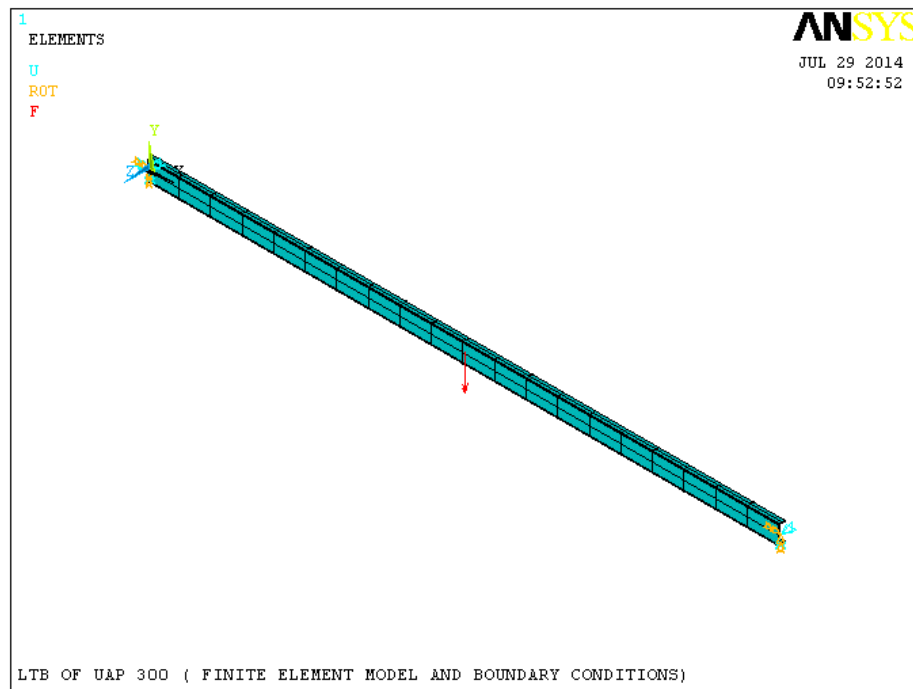


Fig.7.15 : Quatrième mode de déversement.

7.3.2. Poutre en UAP 300 simplement appuyée :



7.16 : Modèle Par élément finis et conditions aux limites.

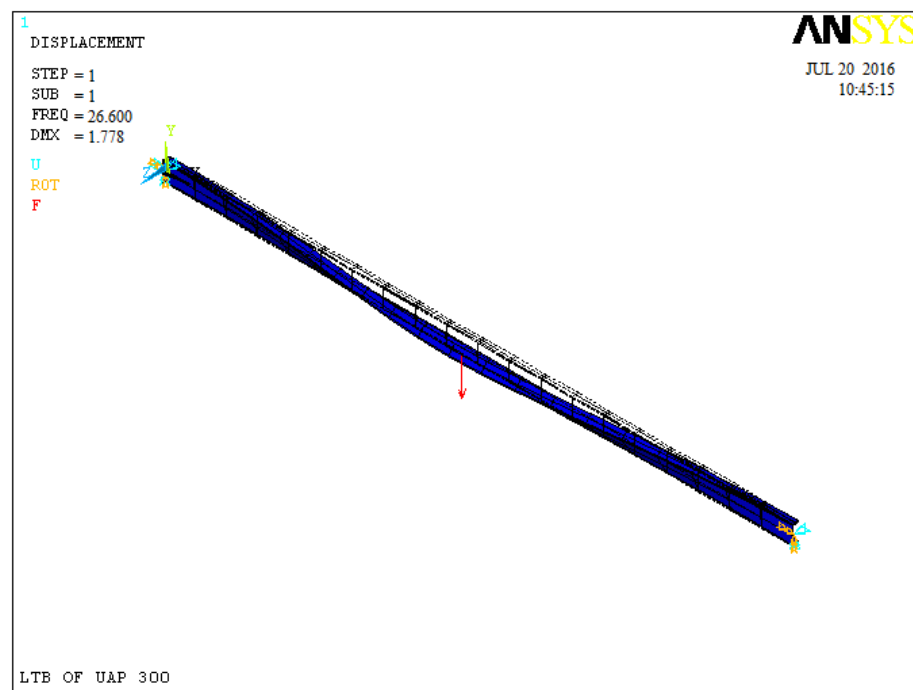


Fig.7.17 : Premier mode de déversement.

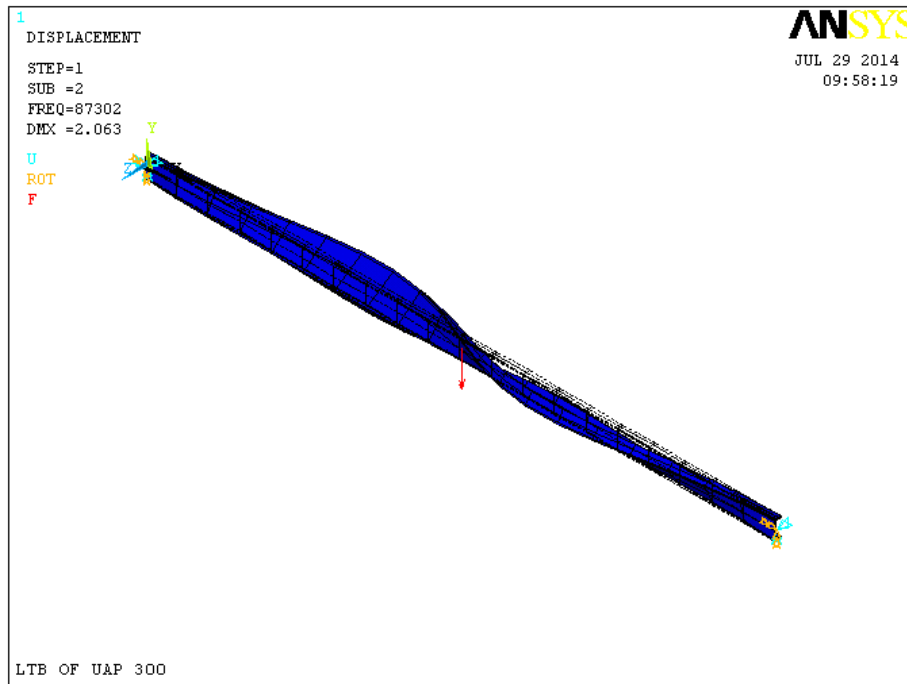


Fig.7.18 : Deuxième mode de déversement.

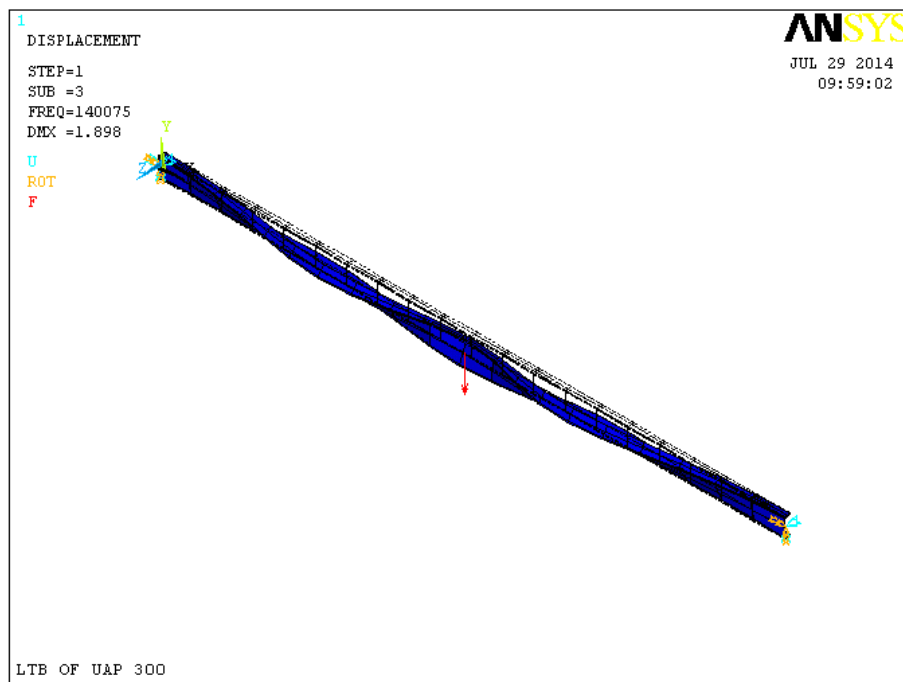


Fig.7.19 : Troisième mode de déversement.

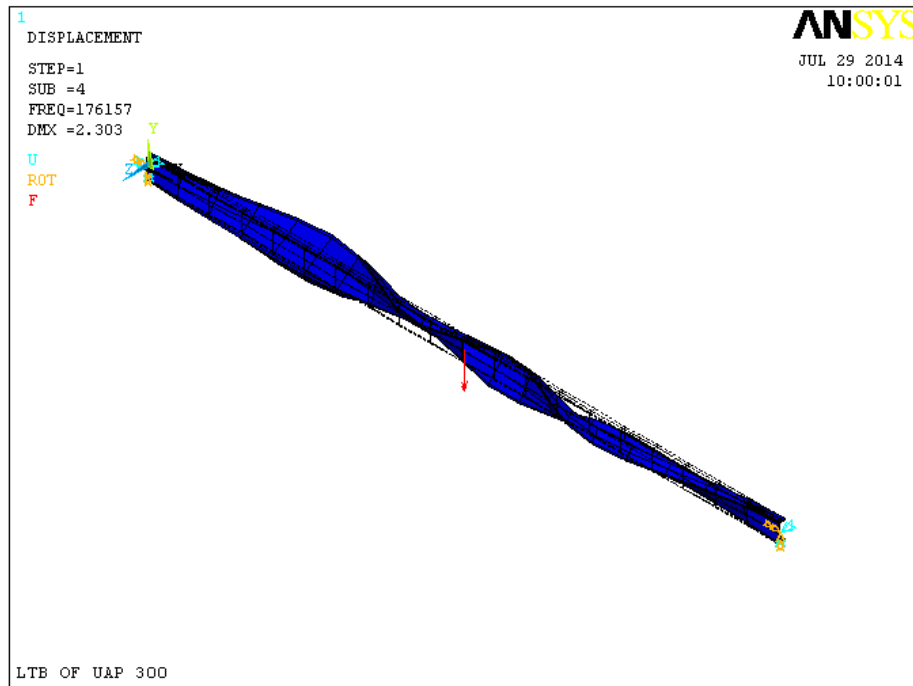


Fig.7.20 : Quatrième mode de déversement.

7.3.3. Poutre en UAP 300 doublement encastree :

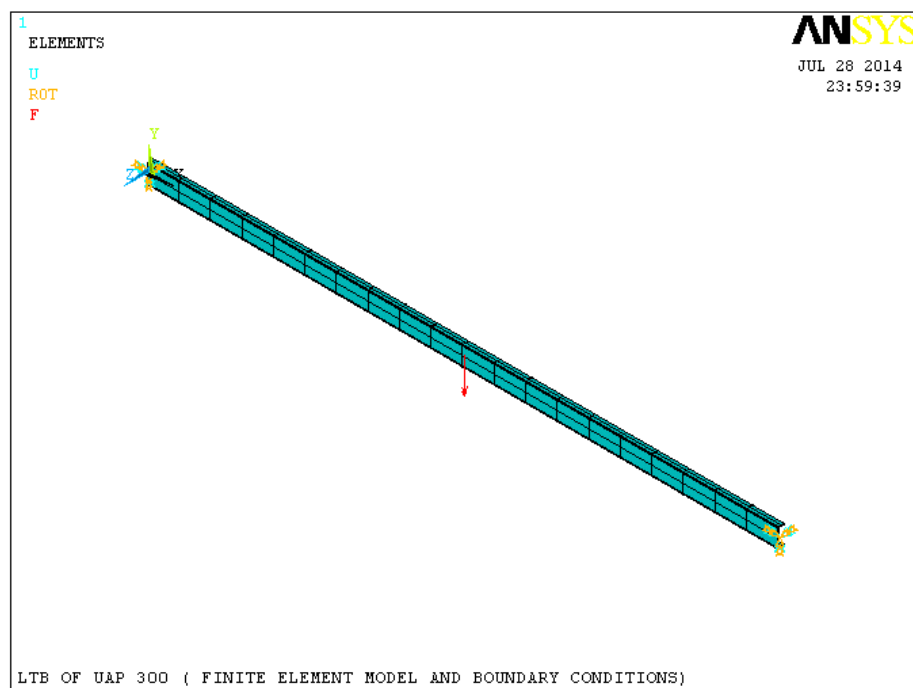


Fig.7.21 : Modèle par éléments finis et conditions aux limites.

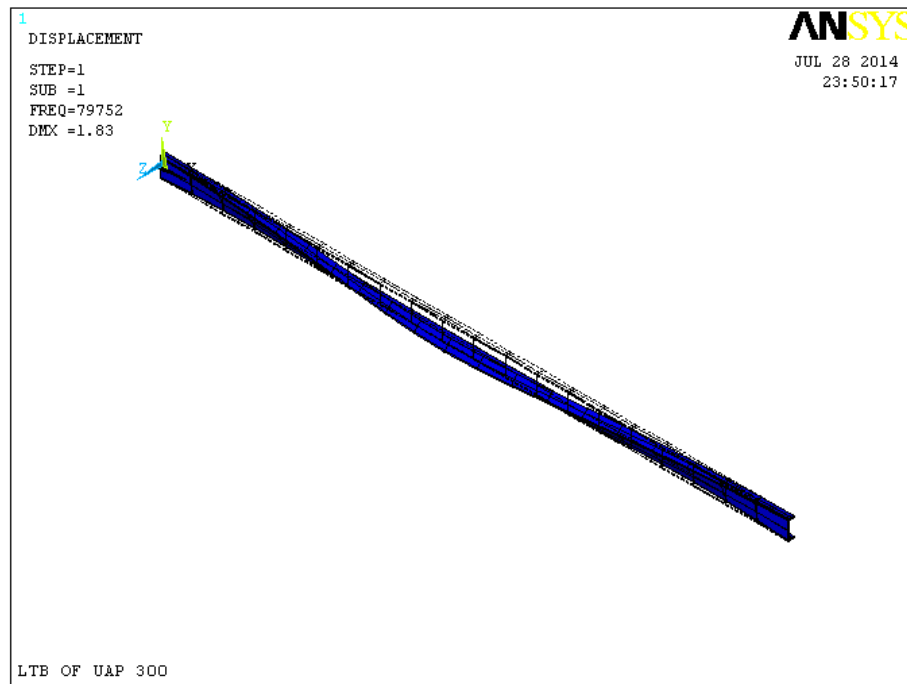


Fig.7.22 : Premier mode de déversement.

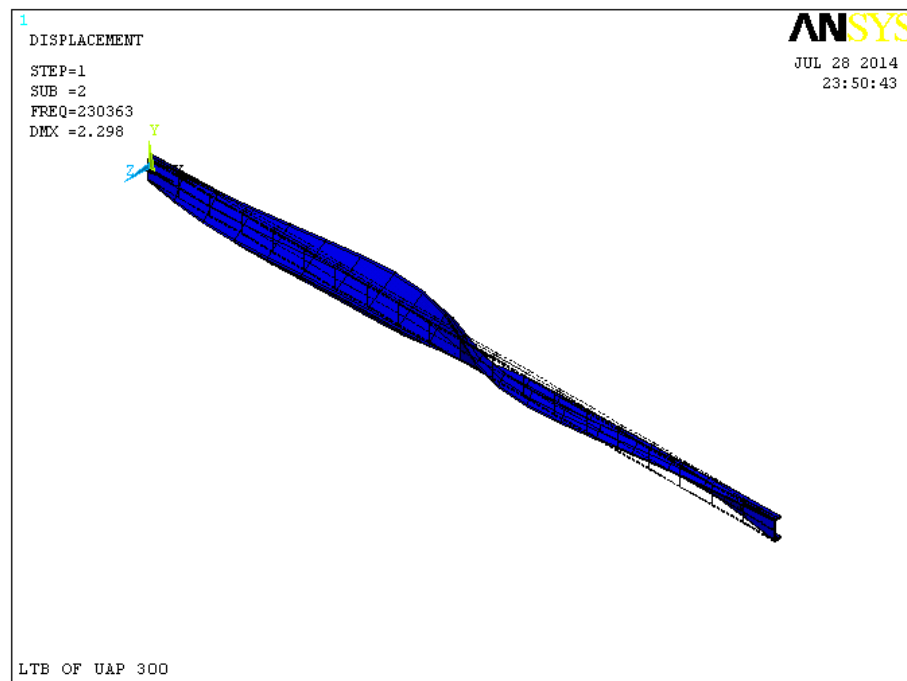


Fig.7.23 : Deuxième mode de déversement.

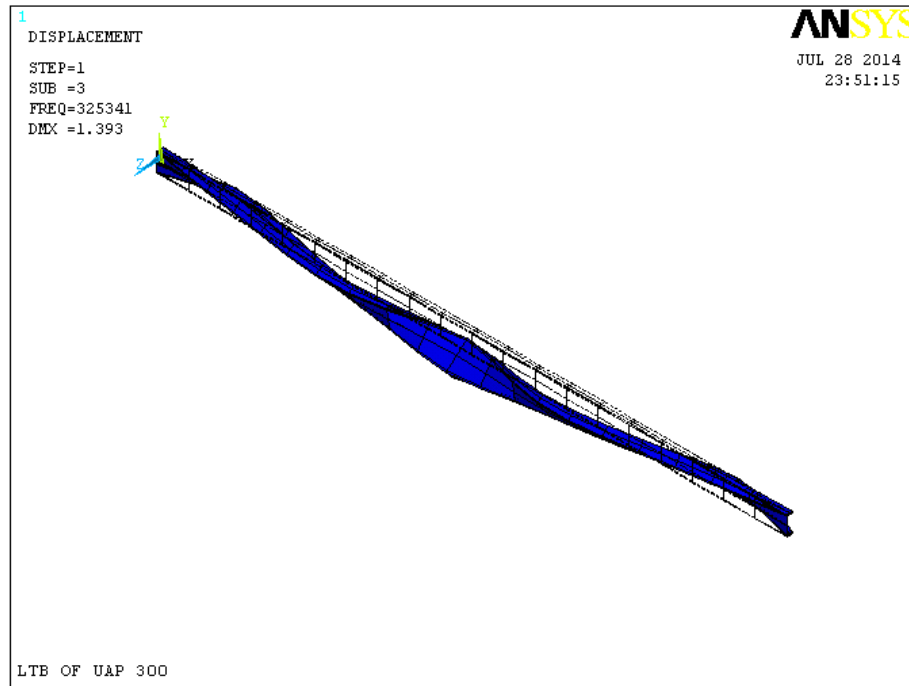


Fig.7.24 : Troisième mode de déversement.

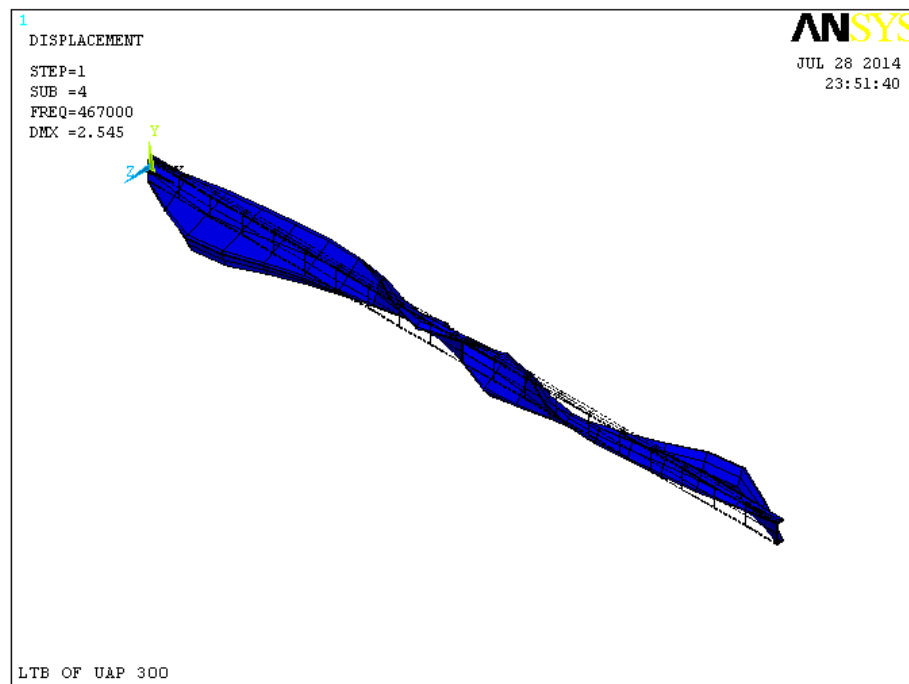


Fig.7.25 : Quatrième mode de déversement.

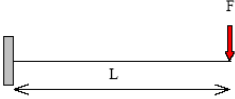
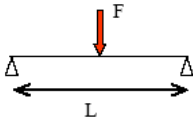
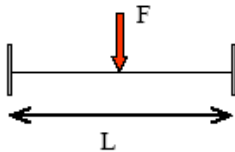
Les figures ci-dessus montrent le comportement du déversement avec les différents modes ; nous pouvons remarquer le déplacement latéral en combinaison avec la torsion.

7.3.4. Comparaison des résultats de simulation avec les valeurs théoriques :

Les résultats de simulation numérique et théorique de la section dissymétrique UAP 300 sous les différentes conditions aux limites et de chargement sont répertoriés dans le tableau 2 ci-dessous.

Les facteurs de charge trouvés (load factors) représentent les charges ultimes de déversement élastique.

Tableau 2 : Résultats théoriques et numérique du facteur de charge.

Section	Boundary conditions and loading	Loading location	Load Factors		
			μ_{theo}	μ_{ans}	$\Delta \%$
UAP 300	 Cantilever beam $L = 6 \text{ m}$; $F = -1.0 \text{ KN}$ At beam fixing: v, θ, v', θ' (fixed)	Upper flange	6790	6820	0.43
		Shear center	7750	7800	0.64
		Lower flange	8360	8400	0.47
UAP 300	 Simply supported beam $L = 10 \text{ m}$; $F = -1.0 \text{ KN}$ At beam fixing: v, θ (free) ; v', θ' (fixed)	Upper flange	43724	43988	0.60
		Shear center	44977	45000	0.50
		Lower flange	45793	46000	0.45
UAP 300	 Fixed end beam $L = 10 \text{ m}$; $F = -1.0 \text{ KN}$ At beam fixing: v, θ (fixed) ; v', θ' (fixed)	Upper flange	79273	79752	0.60
		Shear center	80554	81000	0.55
		Lower flange	82170	82500	0.40

7.3.5. Validation:

Afin de valider le modèle par éléments finis développé pour cette étude, une analyse de déversement par les valeurs propres a été effectuée pour les modèles présentés ci-dessus, et les facteurs de charges prédites (voir tableau) ont été comparés avec les valeurs théoriques du

déversement. La différence entre les résultats calculés sont donnés par la formule suivante :

$$\Delta = \frac{|\mu_{ans} - \mu_{theo}|}{\mu_{ansys}}$$

La capacité de déversement prédite en utilisant l'élément de poutre BEAM 188 d'ANSYS est à moins de 0,65% de la valeur théorique.

7.4. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons élaboré les modèles de calcul par éléments finis pour le déversement des poutres symétriques et dissymétrique avec les différentes conditions aux limites et de chargement.

Nous avons effectué la comparaison des charges ultimes de déversement des poutres non retenues latéralement sur les règles de conception de l'Eurocode 3 pour les poutres symétriques et sur la nouvelle méthode de calcul au déversement des poutres dissymétriques chargées excentriquement aux charges ultimes obtenues avec des simulations par éléments finis. Pour les calculs effectués dans l'étude des paramètres, des résultats inquiétants ont été obtenus sur la validité des méthodes générales pour le flambement en torsion latérale des sections laminées. On peut en conclure que la méthode générale peut conduire à des sous-estimations de même moins de 0,6% de la charge de flambement en torsion latérale ultime de faisceaux non restreints obtenue à partir de simulations par éléments finis. La méthode générale donne de bons résultats pour le flambement en torsion latérale des poutres en acier sans contrainte entre les supports.

Dans ces situations, il existe un assez bon accord entre les valeurs données par le code de calcul Eurocode 3 et les résultats numériques des méthodes des éléments finis.

Dans cette partie, nous avons élaboré une et nous avons comparé les moments critiques de déversement (facteurs de charges) obtenus par cette méthode pour les différents cas de chargement et de conditions d'appuis avec les résultats de simulation numérique (Tableau 2). On peut conclure que la méthode de calcul au déversement ajustée pour tenir compte des effets de torsion des poutres en U chargées excentriquement, donne des résultats satisfaisant en comparaison avec les résultats obtenus numériquement, l'ordre de l'erreur est moins de 0.65%.

CHAPITRE 8 : Discussion des résultats et conclusion générale

Dans cette recherche, les simulations numériques de déversement ont traité les cas des sections symétriques et dissymétriques sous les différents chargements et conditions aux limites.

Le premier élément moteur de cette recherche découle des normes de construction métallique européennes (Eurocodes) pour lesquelles la vérification du déversement s'effectue en se basant sur les courbes de flambement. Ces courbes représentent le facteur de réduction noté: χ (**Qui**), à appliquer sur la capacité de résistance en section en fonction de l'élancement réduit $\bar{\lambda}$ (**Lamda barre**) qui tient compte d'un ensemble de caractéristiques de l'élément à vérifier.

Le deuxième élément moteur provient des origines des courbes de flambement. Celles-ci sont semi-empiriques et contiennent par conséquent deux origines.

Une origine expérimentale qui repose sur une vaste campagne d'essais de profilés laminés et quelques profilés composés-soudés dont les géométries correspondent à celles utilisées dans le bâtiment. Une origine théorique basée sur des considérations analytiques et des simulations numériques effectuées sur des profilés de type bâtiment. Par conséquent, il a été constaté au travers de l'examen de la littérature que peu d'études expérimentales et théoriques traitent le cas des poutres métalliques de sections dissymétriques.

Finalement, en comparaison avec les poutres de bâtiments, les poutres de sections dissymétriques ont des particularités qui forment un ensemble de paramètres susceptibles d'influencer, avec plus ou moins d'importance, la résistance au déversement.

En résistance des matériaux, le **déversement** est un phénomène d'instabilité affectant une poutre subissant un moment de flexion.

Lorsqu'une poutre est fléchie, l'une de ses faces est tendue et l'autre est comprimée. Lorsque cet effort de compression atteint une valeur critique dépendant notamment des conditions d'appui et de la distribution du moment de flexion, le côté comprimé va voiler, à la manière d'une colonne comprimée qui flambe. Ce phénomène est appelé *déversement* et, en fonction des rigidités torsionnelles et flexionnelles des différentes parties de la section, il s'accompagne d'une rotation (torsion) de la section droite de la poutre, d'où l'expression « flambage latéral torsionnel (Lateral Torsional Buckling) ».

Ce phénomène concerne principalement les profilés en acier, d'habitude très élancés, au contraire des sections de bois ou de béton armé, généralement plus massives et plus rigides en torsion. Pour cette raison, la majorité des études précises sur le déversement se concentrent sur les sections en acier, en particulier sur les sections simplement ou doublement symétriques en H ou en I, les plus sujettes au déversement.

Dans le cas de poutres à sections symétriques, la méthode générale de l'eurocode3 a été utilisée pour déterminer les charges ultimes de déversement élastique. Dans le calcul du phénomène de déversement, la résistance ultime de la section transversale calculée en fonction de la classe de la section et de la nuance des aciers est frappée d'un coefficient de réduction pour tenir compte de l'élancement des éléments et de leurs conditions aux limites. Ces élancements sont utilisés dans les équations pour déterminer le facteur de réduction de l'élément vis-à-vis du déversement. Ce coefficient de réduction peut être tiré aussi directement des tableaux en fonction de l'élancement réduit de l'élément et de la courbe de flambement appropriée. Quand l'élancement réduit est inférieur ou égale à 0.4, le coefficient de réduction pour le déversement est pris égale à l'unité. Il convient de noter que le moment critique de déversement élastique n'est pas spécifié par l'Eurocode 3. Sa détermination est laissée au concepteur.

Deux exemples de calcul ont été donnés (une poutre encastrée et une autre simplement appuyée) pour déterminer le facteur de charge théorique et numérique afin de valider la méthode générale utilisée dans l'eurocode3.

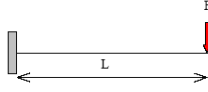
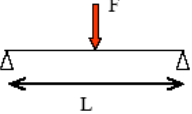
La méthode de simulation numérique s'est basée sur l'utilisation du logiciel commercial ANSYS 15. L'élément fini utilisé dans ANSYS est le : BEAM 188. Il s'agit d'un élément poutre quadratique et tridimensionnel qui convient à l'analyse des poutres plus au moins élancées. Il possède des degrés de liberté de gauchissement en plus des six degrés de liberté conventionnels.

Deux techniques sont disponibles pour la prédiction de la charge et le mode de déversement d'une structure: analyse par calcul non linéaire, et par les valeurs propres (utilisé dans notre travail).

La méthode d'analyse de flambement par les valeurs propres prédit la charge de flambage théorique (le point de bifurcation) d'une structure linéaire élastique idéale. Cette méthode correspond à l'approche des méthodes d'analyse de flambement élastique donnée par les manuels : par exemple, une analyse de flambement par valeur propre d'une colonne correspond à la solution classique d'Euler. Le problème aux valeurs propres est résolu par la méthode d'extraction de la valeur propre et du vecteur propre. Les vecteurs propres sont normalisés de sorte que la plus grande valeur est de 1,0. Ainsi, les contraintes (résultats) ne peuvent être interprétées que comme une répartition relative des contraintes. Les valeurs propres calculées par l'analyse de flambement représentent les facteurs de charge de flambement. Par conséquent, si une charge unitaire est spécifiée, les facteurs de charge représentent des charges de flambement.

Les résultats de l'analyse du déversement pour les poutres de sections symétriques sont présentés dans le tableau 1 ci-dessous, où les valeurs des facteurs de charges (load factors) sont calculés analytiquement et numériquement pour comparaison. Les facteurs de charges théoriques μ_{theo} et numériques μ_{ans} multipliés par le moment maximal dans la poutre nous donne la charge ultime de déversement , exprimé en Nmm.

TABLEAU 1. Les facteurs de charges

Section en I doublement symétrique	Conditions aux limites et chargements	Niveau de chargement	Facteurs de charges		
			μ_{theo}	μ_{ans}	Δ
h = 300 mm bf1 = bf2 = 150 mm tf1 = tf2 = 10 mm tw = 10 mm	 L = 10 m F = -10 kN At beam fixing: $\nu, \theta, \nu', \theta'$ (fixed)	Semelle supérieure	1.893	1.897	0.21%
		Centre de cisaillement	2.333	2.343	0.43%
		Semelle inférieure	2.670	2.676	0.22%
h = 300 mm bf1 = bf2 = 150 mm tf1 = tf2 = 10 mm tw = 10 mm	 L = 10 m F = -10 kN At beam fixing: ν, θ (free) ν', θ' (fixed)	Semelle supérieure	3.245	3.251	0.18%
		Centre de cisaillement	4.245	4.250	0.11%
		Semelle inférieure	4.643	4.650	0.15%

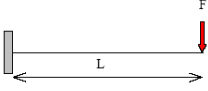
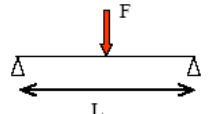
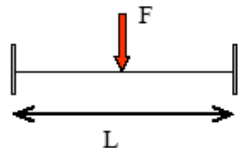
On peut en conclure d'après les résultats obtenus, que la méthode générale peut conduire à des sous-estimations de même moins de 0,5% de la charge de déversement ultime de poutres non retenues latéralement obtenue à partir des simulations par éléments finis. La méthode générale donne de bons résultats pour le déversement des poutres en acier sans maintien latéraux entre les supports.

Les profils à sections dissymétriques sont d'un usage courant dans la construction métallique. Le phénomène de torsion des poutres est profondément influencé par la forme de la section transversale. Dans le cas des profils minces à sections ouvertes, la torsion est non uniforme. Le **gauchissement** joue un rôle très important, il ne peut être négligé. Les charges critiques de déversement des poutres à sections dissymétriques sont déterminées par des méthodes analytiques et numériques comme dans le cas des poutres symétriques. Etant donné que la méthode de calcul donnée par l'Eurocode 3 n'est pas applicable dans le cas où la poutre est chargée excentriquement (sur le plan de l'âme). La méthode analytique proposée dans notre travail s'est basée sur l'ajustement de l'élancement relatif de l'élément en tenant compte de la torsion. Ceci a été réalisé en ajoutant un élancement additionnel de torsion $\bar{\lambda}_T$. Elle est appelée **méthode de calcul ajustée** pour le déversement des poutres en U chargées excentriquement.

$\bar{\lambda}_{LT}$, est l'élancement relatif de l'élément, défini par : $\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{W_{pl} \cdot f_y / M_{cr}}$ défini précédemment. L'élancement relatif modifié $\bar{\lambda}_{MT}$ pour tenir compte du chargement excentrique de la poutre en U est donné comme suit : $\bar{\lambda}_{MT} = \bar{\lambda}_{LT} + \bar{\lambda}$ où l'élancement additionnel de torsion est calculé précédemment en fonction de l'élancement relatif $\bar{\lambda}_{LT}$.

En l'état actuel, la vérification analytique au déversement requiert le calcul du coefficient d'élancement au déversement ; $\bar{\lambda}_{LT}$ et du facteur de réduction χ_{LT} . Il a été vu au chapitre 5 que la détermination de $\chi_{LT(mod)}$ pour les sections dissymétriques montre de très bonne correspondance avec les résultats numériques. Les charges critiques de déversement (Tableau2) sont données pour différents chargements, en fonction du point d'application des charges transversales et de l'élancement de la poutre. Dans le but de validation du modèle théorique proposé les résultats théoriques sont confrontés à des résultats de simulation numériques.

TABLEAU 2: Les facteurs de charges

Section dissymétrique en U	Chargement et conditions aux limites	Niveau de chargement	Facteurs de charges		
			μ_{theo}	μ_{ans}	$\Delta \%$
UAP 300	 Cantilever beam $L = 6 \text{ m}$; $F = -1.0 \text{ KN}$ At beam fixing: v, θ, v', θ' (fixed)	Semelle supérieure	6790	6820	0.43
		Centre de cisaillement	7750	7800	0.64
		Semelle inférieure	8360	8400	0.47
UAP 300	 simply supported beam $L = 10 \text{ m}$; $F = -1.0 \text{ KN}$ At beam fixing: v, θ (free) ; v', θ' (fixed)	Semelle supérieure	43724	43988	0.60
		Centre de cisaillement	44977	45000	0.50
		Semelle inférieure	45793	46000	0.45
UAP 300	 fixed end beam $L = 10 \text{ m}$; $F = -1.0 \text{ KN}$ At beam fixing: v, θ (fixed) ; v', θ' (fixed)	Semelle supérieure	79273	79752	0.60
		Centre de cisaillement	80554	81000	0.55
		Semelle inférieure	82170	82500	0.40

Les facteurs de charges représentent directement la valeur du moment ultime de déversement vu que le chargement extérieur est unitaire.

On peut conclure d'après les résultats obtenus que le calcul du moment ultime de déversement par la méthode ajustée (pour tenir compte des effets de torsion des poutres en U chargées excentriquement), donne des résultats satisfaisant en comparaison avec les résultats obtenus numériquement. L'ordre de l'erreur est moins de 0.65%.

Conclusion générale :

Ce mémoire constitue une contribution à l'établissement de formule réglementaire selon l'Eurocode3, régissant le calcul au déversement des sections transversales à dissymétrie par rapport à leur axe d'inertie noté communément zz ou autrement celles dont leur centre de torsion se situe en dehors de la section transversale.

L'analyse bibliographique a montré un traitement relatif aux sections doublement symétriques avec un niveau variable du point d'application (Eurocode3), de même le traitement des sections dissymétriques par rapport à leur d'inertie yy pour lesquelles des formules empiriques ont été avancées par certains auteurs tel que Djalaly. Ces formules dans les deux cas ne couvraient pas le cas des sections à dissymétrie selon l'axe zz .

la modélisation par éléments finis en utilisant le logiciel ANSYS pour ces poutres à sections dissymétriques par rapport zz a présenté des résultats de calcul qui vont en parallèle avec la formule proposée, une formulation qui reste toutefois justifiée à travers les sections doublement symétriques, ce qui a donc permis la validation de la proposition.

Perspectives :

Sur le plan scientifique, le travail mené a essentiellement concerné l'élargissement de connaissances dans le domaine d'instabilité de forme des poutres métalliques en général. De même le travail mené traite de façon particulière du phénomène de déversement qui menace les sections métalliques dissymétriques dont le profil est ouvert:

- D'un point de vue matériau cette étude pourrait être étendue à d'autres matériaux tels que l'aluminium.
- D'un point de vue profil géométrique les travaux menés peuvent être de base de réflexion pour le traitement des sections doublement dissymétriques, des sections qui sont couramment utilisée pour poutres de roulement des ponts roulants de grande puissance. L'instabilité horizontale à l'égard de ces poutres est souvent éliminée en utilisant des dispositions constructives quand cela est possible.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. N. Boissonnade, R. Greiner, J. P. Jaspart, and J. Lindner, Rules for Member Stability in EN1993-1-1 – Background Documentation and Design Guidelines, ECCS TC8 – Stability, ECCS Report No. 119, ISBN 92-9147-000-84, ECCS, Brussels, Belgium(2007).
2. Louw, C.H.M. de: Design rule for lateral torsional buckling of channel section. Msc Thesis Nr. 0-2007.21, Department of Architecture Building and Planning, Eindhoven University of Technology, the Netherlands 2007.
3. H.H. Snijder , and al., FEM Simulations of Lateral Torsional Buckling Experiments on Channel Sections Loaded in Bending. Proceeding of the 3rd European Conference on steel structures, Coimbra, Portugal 19-20 Septembre 2002. pp. 201-210.
4. A. Boudjemia , L. Dahmani , Lateral torsional buckling response of steel beam with different boundary conditions and loading , Strength of Material Journal, Ed. Springer New York, Vol.46, N°3, pp.429-432, Mai **2014**.
5. D.B. Poutré , and al., Lateral Torsional Buckling of steel Channel Shaped Beams- Experimental research, Proceeding of the Third International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, Lisbon, Portugal, 2000. pp.265-272.
6. EN 1993-1-1. Eurocode 3 : Design of steel structure – Part 1-1 : General rules and rules for building, January 2006.
7. H. H. Snijder and J. C. D. Hoenderkamp, “Buckling curves for lateral torsional buckling of unrestrained beams,” in: Proc. of the Hommages a Rene Maquoui Birthday Anniversary, Universite de Liege, Belgium (2007), pp. 239–248.
8. N. S. Trahair, “Multiple design curves for beam lateral buckling,” in: T. Usami and Y. Itoh (Eds.), Stability and Ductility of Steel Structures, Pergamon (1998), pp. 13–26.
9. N. S. Trahair, Flexural-Torsional Buckling of Structures, CRC Press, Boca Raton (1993).
10. ANSYS 15.0. The General Purpose of Finite Element Software. Documentation.
11. S.P. TIMOSHENKO, J. Monroe Gere, Theory of Elastic Stability 2E, MCGRAW-HILL, 1961.
12. C. DUBAS, Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies, école polytechnique fédérale de Zurich, Editeur S.A. Leemann frères & Co. Zurich, 1948.

13. J.L. BATOZ, G. DHATT, Modélisation des structures par éléments finis, volume 2 poutres et plaques, HERMES, Paris 1990. P221-417.
14. Timoshenko, S.P. et Gere, J.M., "*Theory of Elastic Stability*", McGraw-Hill, 2nd edition, New York, 1961.
15. Allen, H.G. et Bulson, P.S., "*Background to Buckling*", McGraw-Hill, London, 1980.
16. Shanley, F.R., "*Strength of Materials*", McGraw-Hill, New York, 1957.
17. Murray, N.W., "*Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures*", Clarendon Press, Oxford, 1984.
18. R. MAQUOI, Instabilités structurales: Principes généraux, Techniques de l'Ingénieur, 2009.
19. J. Dehard, Classification des sections, HEMES GRAMME, 2008. P42-52.
20. CCM97: Règles de conception et de calcul des structures en acier, Centre national de recherche appliquée en génie parasismique, 1997.
21. Eurocode 3: Calcul des structures en acier et Document d'Application Nationale, AFNOR, 1999.
22. V.A. Zarutskii, Stability analysis of rectangular plates unidirectionally strengthened by ribs, INTERNATIONAL APPLIED MECHANICS, Vol. 36, No. 4, 2000.
23. European wide flange beams HE A, HE B and HE M 100 - 1000 in accordance with Euronorm 53-62.
24. L. JAOUEN, Vibrations de flexion des plaques, UNIVERSITE DE SHERBROOKE, 2002.
25. J. COURBON, Plaques minces élastiques, Techniques de l'Ingénieur, 1980.
26. F.SABOURIN, E.SALLE, Calcul des structures par éléments finis, INSA de Lyon, 2002.
27. R. MAQUOI, Instabilités structurales des plaques, Voilement, Techniques de l'Ingénieur, 2010. [14] Z. Zhulin, Ultimate strength of post buckling for simply supported rectangular composite thin plates under compression, APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS, April 1998.
28. P. Lestuzzi, Mécanique des Structures II, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2010.
29. E. Le Fichoux, Présentation et utilisation de CASTEM2000, ENSTA-LME, 1998.

30. P. PASQUET, Mécanique des structures : CALCULS MECANIQUES-I et II, documentation CASTEM2000, 1999.
31. P. SPITERI, Introduction à la méthode des éléments finis, Techniques de l'Ingénieur, 2002.
32. P. RAPIN, Méthode des éléments finis, Techniques de l'Ingénieur, 1993.
33. CASTEM 2000, Recueil d'exemples commentés, C.E.A / D.M.T / L.A.M.S, 1992.
34. J. Dehard, Analyse des structures en acier, HEMES GRAMME, 2009.
35. J. Dehard, Les éléments fléchis, HEMES GRAMME, 2009.
36. Mason J., "*Variational, Incremental and Energy Methods in Solid Mechanics and Shell Theory*", Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1980.
37. Richards T.H., "*Energy Methods in Stress Analysis*", Rainbow-Bridge Book Company, 1977
38. Langhaar H.L., "*Energy Methods in Applied Mechanics*", John Wiley and Sons, New York, London, 1962.
39. Massonnet C., "*Résistance des matériaux*", Volume, Dunod, Paris, 1963.
40. Timoshenko S.P. "*Theory of Elastic Stability*", McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
41. Arcelor group - Profil ARBED programme de vente 2001
42. Eurocode 3 - Design of steel structures Part 1-3 General rules -supplementary rules for cold formed members and sheeting prEN 1993-1-3 2004.
43. Manfred A, Hirt , Michel Crisinel "Charpentes métalliques - TGC Volume 11 Dimensionnement des halles et bâtiments ".