République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Thèse de master en vue de l'obtention d'un diplôme de Master en Recherche Opérationnelle, Méthodes et Modèles de Décision

Thème :

Application du Simplexe Classique de Dantzig à un Problème Linéaire Flou

Présenté par :

Hakima DROUCHE

Devant le jury d'examen composé de :

MERAKEB Abdelkader	*Maître de Conférences Classe A*	**U.M.M.T.O.**	**Président**
FAHEM Karima	*Maître de Conférences Classe B*	**U.M.M.T.O.**	**Examinatrice**
BOUARAB Ouiza	*Maître de Conférences Classe B*	**U.M.M.T.O.**	**Encadreur**

Soutenue le 10/10/2016

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

À mes chers parents

En premier lieu à ma chère mère et à mon cher père qui m'ont toujours comblé de leur amour, leur bonté et leur grande affection,

À mes chères sœurs

Farida, Kaltouma, Ouiza, Nadia, Roza, Taous, Amel, Assia et Linda,

À mes frères

Mustapha, Hamza et Hocine,

À mes beaux frères

Sid Ali, Mourad, Sofiane et Yahia,

À mes très chers nièces et neveux

Ichrak, Manel, Maroua, Selma, Abd Raouf, Ouassim, Houssam, Iliasse et Sami,

À mes chères amies spécialement

Ouafa, Lamia, Malika, Sabrina, Linda, Saida, Lila et Zhor.

Remerciements

Je remercie Dieu tout puissant qui m'a ouvert les portes du savoir et qui m'a éclairé le chemin et permis de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier M^{me}*BOUARAB de m'avoir fait l'honneur d'être promotrice de cette thèse.*

Je remercie les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer mon travail.

Un grand merci à toutes les personnes qui m'ont soutenues de près ou de loin au cours de la réalisation de ce modeste travail.

Enfin, je remercie chaleureusement mes chers parents pour leur soutien et leurs encouragements.

Table des matières

Introduction générale

La programmation linéaire est un outil très puissant qui est une partie essentielle de la Recherche Opérationnelle. C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes d'optimisation en apparence différents dans des contextes divers. La programmation linéaire relève des mathématiques de la Recherche Opérationnelle et a des applications en gestion ainsi qu'en économie, en statistique, en physique, etc... Il s'agit d'un outil versatile et puissant, régulièrement cité par les entreprises comme étant l'un des dispositifs les plus utilisés et efficaces en Recherche Opérationnelle.

En mathématiques, les problèmes de programmation linéaire sont des problèmes d'optimisation qui étudient la maximisation ou la minimisation d'une fonction linéaire soumise à des contraintes linéaires. La programmation linéaire est une technique mathématique permettant de déterminer la meilleure solution d'un problème dont les données et les inconnues satisfont une série d'équations et d'inéquations linéaires. En effet, une fois qu'un problème est modélisé sous la forme d'équations linéaires, il existe une multitude de méthodes assurant la résolution du problème de manière exacte.

L'une des méthodes les plus connues pour résoudre les problèmes de la programmation linéaire en nombres réels est la méthode classique du simplexe. Cette méthode, qui a été conçue en 1963 par George Dantzig [3], reste d'actualité pour résoudre des problèmes de grande taille. Il s'agit d'une méthode algébrique robuste et efficace basée sur la résolution de systèmes d'équations linéaires mais elle est plus compliquée et exige plus de temps. Le fondement mathématique de cette méthode garantit une grande précision des résultats. Les fondements de la méthode du simplexe ont été énoncés en 1949 et publiés en 1959 par G. Dantzig.

Dans le cas où les données sont mal connues ou imprécises de nature floue, on parlera alors d'un programme linéaire flou qui est considéré comme le meilleur outil pour traiter des études de prise de décision dans un environnement imprécis. Les connaissances imprécises n'ont été prises en considération qu'à partir de 1965, lorsque Zadeh [19], professeur à l'université de Californie de Berkeley, a introduit la notion de sous-ensemble flou. A partir de l'idée d'appartenance partielle à une classe, de catégorie aux limites mal définies, dans une généralisation de la théorie classique des ensembles admettant des situations intermédiaires entre le tout et le rien.

Les premières publications sur la théorie des ensembles flous datent de 1965, édités par Lotfi A. Zadeh [19], suivies par les travaux de Goguen en 1967 et 1969. Les travaux démontrent l'intention de leurs auteurs à généraliser la notion classique d'un ensemble afin d'accommoder les données floues. Dans le même contexte, Bellman et Zadeh ont développé, en 1970, la programmation linéaire floue qu'ils ont appliquée à un processus de décision dans un environnement flou.

La théorie des ensembles flous offre donc une structure mathématique dans laquelle des concepts vagues peuvent être précisément et rigoureusement étudiés. Elle peut être considérée comme un langage de modélisation convenable à des situations caractérisées de relations, critères ou phénomènes flous. La théorie des ensembles flous a été appliquée dans de nombreux domaines, tels que la Recherche Opérationnelle, la théorie du contrôle et les sciences de gestion.

Cette thèse est organisée en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous parlerons de la programmation linéaire déterministe, nous donnerons un exemple de modélisation d'un problème réel sous forme d'un programme linéaire. Puis, nous exposerons les différentes formes d'un problème de programmation linéaire déterministe et la méthode permettant sa résolution qui est la méthode du simplexe classique de Dantzig.

Dans le deuxième chapitre, nous allons introduire la théorie des ensembles flous, donner les définitions et les concepts de base facilitant la compréhension du chapitre trois.

Le troisième chapitre, abordera la programmation linéaire floue dont le caractère flou est caractérisé par des nombres flous trapézoïdaux sous trois cas différents :

- Cas 1 : Cas où les coefficients du vecteur des coûts sont flous.
- Cas 2 : Cas où le vecteur des coûts, la matrice de condition et le vecteur des contraintes sont flous.

• Cas 3 : Cas où le vecteur des contraintes et le vecteur de décision sont flous.

Nous exposerons la résolution de chacun des cas par la méthode du simplexe flou, basée sur l'utilisation de l'arithmétique des nombres flous trapézoïdaux et des fonctions Ranking. Chaque cas est illustré par une application numérique détaillée.

Chapitre 1

Programmation Linéire

1.1 Introduction

La programmation linéaire [2,5,6,8,9,16] est une branche de l'optimisation permettant de résoudre de nombreux problèmes économiques et industriels par plusieurs méthodes. On se basera dans ce chapitre, sur la méthode la plus souple et la plus universelle qui est la méthode du simplexe qui fut proposée en 1963 par G. B. Dantzig [3], comme méthode de résolution générale des programmes linéaires. La solution optimale est approchée par étapes ou itérations successives. Chaque étape correspond au calcul de la valeur économique d'une solution. Comme il existe une infinité de solutions réalisables, la méthode propose de n'explorer qu'un nombre limité de solutions parmi lesquelles se trouve, à coup sûr, la solution optimale.

1.2 Définition et modélisation d'un programme linéaire

1.2.1 Définition : Programmation Linéaire

La programmation linéaire est une technique mathématique d'optimisation (maximisation ou minimisation) de fonction objectif linéaire sous des contraintes ayant la forme d'inéquations linéaires [8].

1.2.2 Modélisation

Un modèle mathématique est une traduction d'une observation dans le but de lui appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques, puis généralement, en sens inverse, la traduction des résultats mathématiques obtenus en prédiction ou opérations dans le monde réel.

En Recherche Opérationnelle, modéliser un problème consiste à identifier les variables intrinsèques, les différentes contraintes auxquelles sont soumises ces variables et l'objectif visé (optimisation).

Exemple de modélisation

Une usine fabrique 2 pièces P1 et P2 usinées dans deux ateliers A1 et A2.

Les temps d'usinage sont :

- ▶ Pour P1 : de 1 heure dans l'atelier A1 et de 3 heures dans l'atelier A2.
- ▶ Pour P2 : de 2 heures dans l'atelier A1 et de 2 heures dans l'atelier A2.

- Le temps de disponibilité hebdomadaire de l'atelier A1 est de 140 heures et celui de l'atelier A2 de 160 heures.

- La marge bénéficiaire est de 1000 DA pour une pièce P1 et 1200 DA pour une pièce P2.

Quelle production de chaque type doit-on fabriquer pour maximiser la marge hebdomadaire ?

. Désignons par x_1 et x_2 les quantités des pièces P1 et P2 à fabriquer respectivement.
. En tenant compte des quantités des matières premières disponibles, on aura les contraintes principales suivantes :

$$x_1 + 2x_2 \leq 140$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 160$$

. Comme les quantités à produire doivent être positives ou nulles alors, on aura les contraintes directes suivantes :

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0.$$

. Le but de l'usine est de réaliser un bénéfice maximal, par conséquent x_1 et x_2 doivent être déterminées de manière à rendre maximale la fonctionnelle objectif suivante :

$$\mathrm{Z} = 1000x_1 + 1200x_2.$$

En résumé, le problème de production se modélise mathématiquement sous la forme :

$$\begin{cases} maxZ = 1000x_1 + 1200x_2 \\ s.c \\ \quad x_1 + 2x_2 \leq 140 \\ \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 160 \\ \quad\quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

1.3 Forme générale d'un programme linéaire

Un problème de programmation linéaire (encore appelé *programme linéaire*) peut se représenter sous forme de trois modèles [13] suivants :

1.3.1 Forme canonique mixte

Un Programme Linéaire (PL) est dit sous forme *canonique mixte* s'il s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} max \left[Z(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \right] \\ s.c \\ \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad \forall i \in I_1 \qquad (contraintes\ inégalités) \\ \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad \forall i \in I_2 \qquad (contraintes\ égalités) \\ \quad\quad x_j \geq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall j \in J_1 \qquad (contraintes\ de\ signe) \\ \quad\quad x_j\ de\ signe\ quelconque \qquad\qquad\quad \forall j \in J_2 \qquad (contraintes\ de\ signe) \end{cases} \tag{1.2}$$

L'ensemble $I = I_1 \cup I_2$ est l'ensemble des indices des contraintes avec card$(I) = m$. Autrement dit, il y a m contraintes et "card" signifie cardinal de I.

L'ensemble $J = J_1 \cup J_2$ est l'ensemble des indices des variables avec card $(J) = n$, il y a n variables de décision.

1.3.2 Forme canonique pure

Un Programme Linéaire (PL) est dit sous forme *canonique pure* s'il s'écrit :

$$\begin{cases} max\left[Z(x) = c^T x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n\right] \\ s.c \\ \qquad Ax \leq b \\ \qquad x \geq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

où $\quad x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$

et A est une matrice de taille $m \times n$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sous cette forme, il n'y a pas de contraintes d'égalité c'est-à-dire $I_2 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$.

1.3.3 Forme standard

Un Programme Linéaire (PL) est dit sous forme *standard* s'il s'écrit :

$$\begin{cases} max\left[Z(x) = c^T x\right] \\ s.c \\ \qquad Ax = b \\ \qquad x \geq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Sous cette forme, $I_1 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$.

1.4 Solution de base réalisable

Soit un problème de programmation linéaire sous la forme standard défini comme suit :

$$(P) \begin{cases} maxZ = c^T x \\ s.c \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

où $b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n$ *et* $c \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.1. *Solution réalisable* [13]

On dit qu'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est une solution réalisable du problème (P) si et seulement si x satisfait les contraintes du problème c'est à dire $Ax = b$ et $x \geq 0$.

Hypothèse : On suppose que la matrice A est de taille $m \times n$ avec $rang\,(A) = m \leq n$.

On rappelle que le rang de A est le nombre maximal de lignes (ou colonnes) de A linéairement indépendantes.

On rappelle aussi qu'un ensemble de m vecteurs a_i sont linéairement indépendants si les seules valeur k_i qui permettent de satisfaire l'expression

$$\sum_{i=1}^{m} a_i k_i = 0 \text{ sont } k_i = 0,\ i = 1, \ldots, m.$$

Définition 1.2. *Ensemble des indices de base* [13]

Soit $R \subset \{1, \ldots, n\}$ un ensemble d'indices avec $card\,(R) = m$ tel que les colonnes a_j $(j \in R)$ de A sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée B formée des colonnes a_j $(j \in R)$ est inversible. On dit alors que l'ensemble R des indices est une base.

- Les variables $x_B = (x_j,\ j \in R)$ sont appelées variables de base.
- Les variables $x_E = (x_j,\ j \notin R)$ sont appelées variables hors-base.

Remarque 1.1

On peut toujours écrire les décompositions par blocs suivantes :

$A = (B, E)$ où B est appelée matrice de base et E matrice hors base et aussi
$x = (x_B, x_E)^T$ où x_B sont les variables de base et x_E les variables hors base.

Définition 1.3. *Solution de base réalisable* [5]

On dit que $x = (x_B, x_E)^T$ est une solution de base associée à la base R si elle vérifie $Ax = b$ avec $x_B = B^{-1}b$ et $x_E = 0$.

Si, en plus, $x_B \geq 0$, alors x est une solution de base réalisable.

Remarque 1.2. [6]

Un programme linéaire admet au plus C_n^m solutions de base.

Définition 1.4. *Solution dégénérée et non dégénérée* [6]

Une solution de base réalisable x est dite non dégénérée si $x_B > 0$.

Si, au moins, une composante $x_B = 0$ alors x est appelée une solution de base réalisable dégénérée.

1.5 Propriétés géométriques des solutions de base réalisables

On note

$$D_R = \{x \in \mathbb{R}^n \diagup Ax = b,\ x \geq 0\}, \tag{1.6}$$

l'ensemble des solutions réalisables du problème (P) sous forme standard.

Définition 1.5. *Ensemble convexe* [20]

On dit que l'ensemble S est convexe si et seulement si :

$$\forall\ x,y \in S \text{ et } \forall\ \lambda \in [0,1],\ \lambda x + (1-\lambda)\, y \in S$$

Définition 1.6. *Combinaison linéaire convexe* [20]

Un vecteur $y \in S$ est une combinaison linéaire convexe des points $\{x_1, \ldots, x_n\}$ s'il existe des coefficients réels $\lambda_i, i \in \{1, \ldots, n\}$, tels que :

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \text{ avec } \lambda_i \geq 0,\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Définition 1.7. *Polyèdre et Polytope* [20]

Soient les ensembles suivants :

- L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \diagup ax = b\}$ représente un hyperplan de $\mathbb{R}^n$;
- L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \diagup ax \leq b\}$ représente un demi-espace fermé de $\mathbb{R}^n$ dont l'hyperplan correspondant constitue la frontière.

1) Un polyèdre S est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés et/ ou d'hyperplans. Un polyèdre est un ensemble convexe fermé.

2) Un polyèdre S est borné s'il existe une valeur α finie et positive telle que :

$$|x_j| \leq \alpha, \forall j \in \{1, \ldots, n\} \text{ et } \forall x \in S$$

3) Un polytope est un polyèdre borné et non vide.

Définition 1.8. *Point extrême* [20]

Soit S un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. x est dit point extrême ou sommet de S si pour

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \ \forall x_1, x_2 \in S \text{ et } \lambda \in]0, 1[\text{ alors } x = x_1 = x_2.$$

Proposition 1.1. [13]

L'ensemble D_R des solutions réalisables de (P) est un polyèdre convexe et fermé.

Théorème 1.1. [13]

x est une solution de base réalisable si et seulement si x est un sommet de D_R.

Théorème 1.2. [13]

L'optimum de la fonction objectif Z sur D_R, s'il existe, est atteint en au moins un sommet de D_R.

1.6 Méthode du simplexe

La méthode du simplexe est une méthode efficace pour résoudre les problèmes linéaires. Elle peut s'appliquer peu importe le nombre de variables dans le modèle. Le principe de résolution nécessite un certain nombre d'étapes dont la démarche est la suivante [2] :

1. Déterminer une première solution de base réalisable, cette solution initiale sert de départ au changement vers la solution optimale (si elle existe).
2. Si la solution obtenue en (1) n'est pas optimale, déterminer une autre solution de base réalisable qui permettrait d'améliorer la fonction objectif (augmentation pour une maximisation ou diminution pour une minimisation).
3. On répète cette procédure itérative jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'améliorer la fonction objectif. La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale du programme linéaire.

1.6.1 Variable d'écart et la transformation à la forme standard

La méthode de résolution que nous employons nécessite que les contraintes fonctionnelles du modèle soient exprimées sous forme d'équations linéaires ($forme\ standard$) au lieu d'inéquations. Cette transformation s'effectue facilement en introduisant dans le modèle de nouvelle variable appelée variable d'écart.

Transformation d'une inéquation de signe plus petit ou égal ($\leq$) [16]

Toute contrainte de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \tag{1.7}$$

peut être remplacée par un système de contraintes suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + s = b \\ s \in \mathbb{R}^n \ et \ s \geq 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

où $\quad s = b - \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ est appelée variable d'écart.

Transformation d'une inéquation de signe plus grand ou égal ($\geq$) [16]

Toute contrainte de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b \tag{1.9}$$

peut être remplacée par un système de contraintes suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j - s = b \\ s \in \mathbb{R}^n \ et \ s \geq 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

où $\quad s = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j - b$ est appelée variable d'écart.

Coefficients des variables d'écart

Les variables d'écart représentent des activités fictives et pour assurer qu'elles ne perturbent pas la fonction objectif, nous supposons nuls les coûts ou bénéfices associés à ces variables.

Forme standard d'un modèle de programmation linéaire

La résolution d'un programme linéaire par la méthode du simplexe est basée sur la représentation du problème en forme standard.

Considérons le modèle suivant :

$$\begin{cases} Optimiser Z = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \\ s.c \\ \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad\qquad i = 1, \dots m \\ \qquad x_j \geq 0 \qquad\qquad\qquad j = 1, \dots, n \end{cases} \tag{1.11}$$

Sa forme standard sera :

$$\begin{cases} Optimiser Z = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \\ s.c \\ \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s = b_i \qquad i = 1, \dots m \\ \qquad x_j \geq 0,\ s \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n \end{cases} \tag{1.12}$$

1.6.2 Algorithme du simplexe

On dispose d'une solution de base réalisable x d'un PL sous forme standard, la matrice A peut s'écrire

$$A = (B, E)$$

avec B une matrice carrée de taille $m \times m$, inversible, correspondant aux variables de base et E une matrice de taille $m \times (n - m)$, correspondant aux variables hors-base.

On décompose également le vecteur de décision

$$x = (x_B, x_E)$$

avec x_B les variables de base et x_E les variables hors base.

Le but est de trouver une autre base $R^\star$ et une solution de base $x^\star$ associée telles que

$$Z\left(x^\star\right) > Z\left(x\right) \qquad (\ x^\star \text{ est meilleur que } x\ ).$$

La méthode du simplexe consiste à faire rentrer une variable hors-base dans la nouvelle base (*variable entrante*) et faire sortir à la place une variable de base (*variabe sortante*).

1.6.2.1 Détermination d'une première solution

Considérons le problème de programmation linéaire sous forme standard suivant :

$$\begin{cases} maxZ = c^T x \\ s.c \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

où A est une matrice de dimension $m \times n$, b un vecteur colonne comportant m lignes.

On peut construire à partir de la matrice A, deux sous matrices, $A = (B, E)$.

De même le vecteur x (*vecteur de décision*) est décomposé comme suit : $x =[x_B, x_E]^T$

où $x_B = [x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m}]^T$ et x_E pour les $(n-m)$ variables restantes.

L'expression $Ax = b$ peut alors s'écrire :

$$Ax = (B, E) \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ x_E \end{bmatrix} = b$$

$$\Rightarrow \qquad Ax = Bx_B + Ex_E = b \tag{1.14}$$

Multiplions cette expression par B^{-1} (l'inverse de) B. On obtient

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Ex_E = B^{-1}b$$

avec $B^{-1} \cdot B = I$ (identité d'ordre m) d'où $x_B + B^{-1}Ex_E = B^{-1}b$

En annulant x_E, la solution de base est alors

$$x_B = B^{-1}b \tag{1.15}$$

On obtient une solution de base réalisable de départ si $x_B \geq 0$ (la matrice B est toujours constituée à partir des colonnes de la matrice A).

1.6.2.2 Amélioration d'une solution de base

A partir d'une solution de base réalisable, on obtient une nouvelle solution de base réalisable adjacente (meilleure ou aussi bonne) en transformant une variable (hors-base) en variable de base (dite variable entrante) et en même temps, rendre une variable de base actuelle en variable hors-base (dite variable sortante). Cette opération algébrique permet d'obtenir une nouvelle solution réalisable.

• Détermination de la variable entrante

. Calcul des coûts réduits

Formalisons l'expression de Z pour mieux définir le critère requis pour sélectionner la variable qui deviendra une variable de base. Nous savons que :

$$x_B + B^{-1}Ex_E = B^{-1}b$$

$$\Rightarrow \; x_B = B^{-1}b - B^{-1}Ex_E \tag{1.16}$$

Puisque

$$Z = c_B x_B + c_E x_E$$

$$\Rightarrow \quad Z = c_B \left(B^{-1}b - B^{-1}Ex_E\right) + c_E x_E$$

$$\Rightarrow \quad Z = c_B B^{-1}b + (c_E - c_B B^{-1}E)x_E$$

E constitué de vecteurs hors base (notons ces vecteurs par a_j) dont les indices de ces vecteurs sont autres que ceux des vecteurs dans la base. Identifions cet ensemble d'indices par N et par x_j, les variables correspondant aux vecteurs a_j.

L'expression matricielle $B^{-1}E$ peut s'écrire alors

$$B^{-1}E = \sum_{j \in N} B^{-1} a_j \tag{1.17}$$

On a donc

$$Z = c_B B^{-1} b + (c_E - c_B B^{-1} E) x_E$$

$$\Rightarrow \quad Z = c_B B^{-1} b + c_E x_E - c_B B^{-1} E x_E$$

Notons $Z_0 = c_B B^{-1} b$, cette dernière expression peut s'écrire :

$$Z = Z_0 + \sum_{j \in N} c_j x_j - \sum_{j \in N} c_B B^{-1} a_j x_j$$

$$\Rightarrow \quad Z = Z_0 + \sum_{j \in N} (c_j - c_B B^{-1} a_j)\, x_j$$

$$\Rightarrow \quad Z = Z_0 + \sum_{j \in N} (c_j - z_j)\, x_j \tag{1.18}$$

Le vecteur

$$Y_E = c_E - c_B B^{-1} E$$

qui se compose de

$$Y_j = c_j - z_j \tag{1.19}$$

s'appelle vecteur des coûts réduits.

$z_j = c_B B^{-1} a_j$ et c_j sont les coefficients de la fonction objectif des variables hors base.

Notons par $\mu_j = B^{-1} a_j$ (ces vecteurs μ_j seront les nouveaux éléments sous les variables x_j dans le tableau du simplexe. Dans le tableau de départ les μ_j sont les a_j associés aux contraintes originales du modèle).

— Si les coûts réduits sont tous négatifs c'est-à-dire $Y_j = c_j - z_j \leq 0$ (pour toutes les variables hors base), il n'est alors pas possible d'augmenter la fonction objectif Z : l'algorithme se termine, et on a trouvé la solution de base réalisable *optimale*.

— Dans le cas contraire s'il existe $j \in N$ avec N l'ensemble des indices des variables hors base telle que $Y_j = c_j - z_j > 0$, dans ce cas on a intérêt à faire entrer dans la base, la variable qui a le coût réduit *positif le plus grand possible.*

Pour introduire une variable dans la base, que l'optimisation en soit une maximisation ou minimisation, on suit le critère suivant :

▶ **Critère d'entrée d'une variable dans la base** [2]

A partir d'une solution de base réalisable, calculer pour toutes les variables hors base, la quantité $z_j = c_B B^{-1} a_j = c_B \mu_j$, puis les $c_j - z_j$.

- **Maximisation.** La variable x_r est introduite dans la base si $c_r - z_r$ correspond à la valeur algébrique la plus élevée parmi tous les $c_j - z_j$ c'est à dire :

$$c_r - z_r = \max_{j \in N} \{c_j - z_j \,/\, c_j - z_j > 0\}\,.$$

- **Minimisation.** Dans ce cas, la variable x_r est introduite d'après :

$$c_r - z_r = \min_{j \in N} \{c_j - z_j \,/\, c_j - z_j < 0\}\,.$$

Remarque 1.3.

a) Les $c_j - z_j = 0$ pour toutes les variables de base.
En effet, $z_j = c_B B^{-1} a_j = c_B \mu_j = c_j$, le vecteur μ_j étant alors un vecteur identité.

b) La valeur de x_r est déterminée selon la règle de sortie d'une variable de la base que nous traitons ci-après.

• **Détermination de la variable sortante**

Une fois que la variable x_r est choisie, il faut déterminer quelle variable doit quitter la base. En maintenant la relation $Ax = b$, on augmente x_r jusqu'à annuler une variable de base. Cette variable sera alors *la variable sortante*.

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Ex_E = b$$

La solution de base x_B sera modifiée selon l'expression

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Ex_E$$

$$\Rightarrow \quad x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_r x_r$$

$$\Rightarrow \quad x_B = \overline{b} - \mu_r x_r \tag{1.20}$$

où $\overline{b} = B^{-1}b$ et $\mu_r = B^{-1}a_r$ (les éléments du tableau sous le vecteur a_r)

Il faut que $x_{B_i} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ pour que la nouvelle solution de base soit réalisable c-à-d.

$$x_{B_1} = \overline{b}_1 - \mu_{1r} x_r \geq 0$$

$$x_{B_2} = \overline{b}_2 - \mu_{2r} x_r \geq 0$$

$$\vdots$$

$$x_{B_k} = \overline{b}_k - \mu_{kr} x_r \geq 0$$

$$\vdots$$

$$x_{B_m} = \overline{b}_m - \mu_{mr} x_r \geq 0$$

Discutons sur le signe de $\mu_{ir} = B^{-1}a_{ir}$.

— Si $\mu_{ir} \leq 0$, la quantité $\mu_{ir} x_r$ sera négative et x_{B_i} augmentera à mesure que x_r augmentera. Donc on peut augmenter x_r autant qu'on veut, on aura toujours la positivité de la variable de base $x_{\mathbf{B_i}}$. Dans ce cas la solution est non bornée : en faisant tendre x_r vers l'infini, Z tend vers l'infini. Dans ce cas l'algorithme s'arrête.

— Si $\mu_{ir} > 0$, alors $\mu_{ir} x_r$ sera une quantité positive et x_{B_i} réduira à mesure que x_r augmentera. Pour s'assurer de maintenir une solution réalisable (et de rendre nulle une variable qui est actuellement dans la base) x_r s'arrêtera d'augmenter aussitôt qu'une variable dans la base actuelle devient nulle.

Pour avoir la positivité de x_{B_i} pour tout i, on choisit la variable sortante pour laquelle le rapport $\dfrac{\overline{b_i}}{\mu_{ir}}$ est le plus petit possible, supposons que ce minimum s'obtient à $i = k$. Le critère de sortie d'une variable de la base s'énonce alors comme suit :

► **Critère de sortie d'une variable de la base** [2]

Sachant que la variable entrante dans la base est x_r, la variable x_k sort de la base d'après :

$$\frac{\overline{b_k}}{\mu_{kr}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\mu_{ir}},\ \mu_{ir} > 0 \right\} \tag{1.21}$$

La nouvelle valeur de la variable de base est $x_r = \frac{\overline{b_k}}{\mu_{kr}}$ pour $i = k$.

Le terme μ_{kr} est appelé le pivot et sert à effectuer l'opération de pivotage pour déterminer la nouvelle solution réalisable de base.

Soit $R^{\star}$ la nouvelle base obtenue et $x^{\star}$ sa solution de base associée alors la nouvelle valeur de la fonction objectif sera donnée par :

$$Z = Z_0 + x_r\,(c_r - z_r)$$

$$\Rightarrow \quad Z = Z_0 + \frac{\overline{b}_k}{\mu_{kr}}\,(c_r - z_r) \tag{1.22}$$

et comme la solution n'est pas dégénérée $\left(\overline{b}_k > 0\right)$ et puisque $c_r - z_r > 0$ (problème de maximisation), par conséquent, la valeur numérique de la fonction objectif s'est améliorée c'est-à-dire

$$Z > Z_0$$

On poursuit ces étapes ainsi jusqu'à ce qu'on ne puisse plus obtenir de solution de base réalisable améliorant Z. La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale au programme linéaire.

• **Détermination des nouvelles valeurs des variables de base**

Pour déterminer les nouvelles valeurs des variables de base, on procède comme suit :

- On remplace $x_r = \frac{\overline{b_k}}{\mu_{kr}}$ par sa valeur dans la relation

$$x_{B_i} = \overline{b}_i - \mu_{ir} x_r,\ i = 1, \ldots m. \tag{1.23}$$

- On obtient alors les nouvelles valeurs pour les variables de base

$$x_{B_i} = \overline{b}_i - \frac{\mu_{ir}}{\mu_{kr}}\overline{b}_k,\ i = 1, \ldots, m \tag{1.24}$$

et toutes les autres variables x_j sont nulles ($j \in N$).

On notera que $x_{B_k} = \overline{b}_k - \mu_{kr}x_r = \overline{b}_k - \dfrac{\mu_{kr}}{\mu_{kr}}\,\overline{b}_k = 0$ (variable sortante x_k)

Remarque 1.4.

On peut maintenant exprimer la nouvelle valeur de la fonction objectif ainsi que tous les $c_j - z_j$ en fonction de la nouvelle quantité pour la variable qui entre dans la base comme suit :

En considérant que la variable entrante est x_r, la variable sortante est x_k et que le pivot est μ_{kr}, on a :

$$\text{Nouvelle valeur de } Z = \text{Ancienne valeur de } Z + \frac{\overline{b}_k}{\mu_{kr}}\left(c_r - z_r\right)$$

$$\widehat{Z} = Z + \frac{\overline{b}_k}{\mu_{kr}}\left(c_r - z_r\right). \tag{1.25}$$

De la même façon, les z_j sont ajustés comme suit, à partir de la ligne pivot :

$$\text{Nouvelle valeur de } z_j = \text{Ancienne valeur de } z_j + \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}\left(c_r - z_r\right)$$

$$\widehat{z}_j = z_j + \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}\left(c_r - z_r\right). \tag{1.26}$$

l'amélioration de la fonction objectif s'écrit alors :

$$c_j - \widehat{z}_j = \left(c_j - z_j\right) - \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}\left(c_r - z_r\right). \tag{1.27}$$

Ces relation seront particulièrement utiles dans la systématisation de l'algorithme à l'aide des tableaux du simplexe.

1.6.2.3 Critère d'optimalité

. Cas d'une maximisation [2] : Une solution de base réalisable est optimale si pour toutes les variables hors base. On a

$$c_j - z_j \leq 0. \tag{1.28}$$

. Cas d'une minimisation [2] : Une solution de base réalisable est optimale si pour toutes les variables hors base. On a

$$c_j - z_j \geq 0. \tag{1.29}$$

Théorème 1.1.

. Cas d'absence de solution optimale finie : Il n'existe pas de solution optimale avec une valeur finie pour Z si :

- Pour une maximisation , s'il existe $c_j - z_j > 0$ pour une variable hors base x_j et tous les $\mu_{ij} \leq 0$. Dans ce cas $Z \to +\infty$

- Pour une minimisation , s'il existe $c_j - z_j < 0$ pour une variable hors base x_j et tous les $\mu_{ij} \leq 0$. Dans ce cas $Z \to -\infty$

Théorème 1.2.

. Solution optimale unique : Une solution de base réalisable est optimale et unique si, pour les variables hors base.

– Dans le cas d'une maximisation tous les $c_j - z_j < 0$,

– Dans le cas d'une minimisation tous les $c_j - z_j > 0$.

. Solution optimale multiple : Il existe une infinité de solutions optimales

– Si pour une variable hors base $c_j - z_j = 0$.

En effet, s'il y a un terme $\mu_{ij} > 0$ sous le vecteur a_j on peut introduire a_j dans la base et obtenir une autre solution de base optimale.

1.6.2.4 Procédure de l'algorithme du simplexe

Dans le cas d'une fonction objectif à maximiser

Étape initiale [5]

Poser $x_E = 0$ et déterminer la solution de base réalisable initiale $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$ et l'objectif $z = c_B B^{-1}b = c_B\bar{b}$.

Étape principale [5]

1. Calculer $c_j - z_j$ avec $z_j = c_B\mu_j = c_B B^{-1}a_j$, pour toutes les variables hors base.
   Si tous les $c_j - z_j \leq 0$, alors stop ; la solution actuelle est la solution optimale.
   Sinon, choisir la variable entrante selon le critère
   $$\max_{j\in N}\{c_j - z_j, \not{} c_j - z_j > 0\} = c_r - z_r \text{ (variable entrante } x_r).$$
2. Calculer $\mu_{ij} = B^{-1}a_j$.
   Si $\mu_{ij} < 0$ alors stop ; le problème a une solution infinie.
   Sinon, choisir la variable qui doit quitter la base selon le critère
   $$\min_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{\overline{b_i}}{\mu_{ir}},\ \mu_{ir} > 0\right\} = \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} \text{ (variable sortante } x_k).$$
3. A partir de la nouvelle base, déterminer B^{-1}, $x_B = B^{-1}b$ et $Z = c_B B^{-1}b$ et on passe à l'étape 1.

1.6.3 Méthode des tableaux du simplexe

Comme nous l'avons vu précédemment, nous devons, à chaque itération, déterminer les quantités suivantes :

$x_B = B^{-1}b, \quad Z = c_B x_B = c_B B^{-1}b, \quad z_j = c_B B^{-1}a_j$ et $c_j - z_j$.

Les différentes procédures ont été élaborées pour effectuer une mise à jour de ces quantités. On peut structurer toute cette information dans un tableau, dit *tableau du simplexe* [2].

On réécrit les expressions matricielles, ci-dessus, sous forme d'un tableau, comme suit :

Tableau 1

$Base$	x_B	x_E	$S.B.R$
$c_j - z_j$	0	$c_j - c_B B^{-1} a_j$	$Z = c_B x_B$
x_B	I	$B^{-1} a_j$	$x_B = B^{-1} b$

Le tableau, ci-dessus, nous donne toutes les informations dont a on besoin pour procéder à la méthode du simplexe.

La première ligne du tableau représente les $c_j - z_j$ et la valeur de la fonction objectif de la solution de base.

Les lignes 2 à m sont les éléments du tableau ($les\ \mu_{ij}$) qu'on obtient après chaque opération de pivotage, pour les variables de base. Ces éléments seront constitués uniquement de 0 et de 1.

• Opération de pivotage

Pour déterminer, à chaque itération, la solution de base et les différents éléments du tableau, nous nous servons des différentes expressions qui ont été obtenues ci-dessus. Cette procédure de calcul s'appelle *opération de pivotage*.

Supposons que x_r devient une variable de base (variable entrante) et que x_k devient une variable hors base (variable sortante)

. Diviser les éléments de la ligne k par le pivot μ_{kr} :

$$x_{B_k} = \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}$$

$$\widehat{\mu}_{kj} = \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}, \ \ j = 1, \ldots, n \text{ et } \widehat{\mu}_{kr} = 1, \quad j = r$$

. Pour les lignes $i = 1, \ldots, m, \ i \neq k$ du tableau, ajuster les valeurs de la ligne i en additionnant à cette ligne , $-\mu_{ir}$ multipliée par les éléments de la nouvelle ligne k :

$$\widehat{\mu}_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{ir}\widehat{\mu}_{kj} = \mu_{ij} - \mu_{ir}\frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}$$

$$\widehat{\mu}_{ir} = 0, \ \ i = 1, 2, \ldots, m \text{ et } \widehat{\mu}_{kr} = 1, \ \ j = r$$

$$\widehat{x}_{B_i} = x_{B_i} - \mu_{ir}\frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} = \bar{b}_i - \mu_{ir}\frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}.$$

- Effectuer une mise à jour de la ligne $c_j - z_j$ en additionnant à cette ligne, $-(c_r - z_r)$ multipliée par les éléments de la nouvelle ligne k, $\dfrac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}$;

$$c_j - \widehat{z}_j = (c_j - z_j) - \frac{\mu_{kj}}{\mu_{kr}}(c_r - z_r)$$

On notera que pour les variables de base $c_j - z_j = 0$, $j \in R$

- La mise à jour de Z s'obtient de

$$\widehat{Z} = Z + \frac{\overline{b}_k}{\mu_{kr}}(c_r - z_r).$$

Règle de rectangle

Le calcul des éléments $\overline{b}_k$, μ_{ij}, Z et $c_j - z_j$ s'obtient rapidement selon la règle du rectangle

$$Nouvelle\ valeur = Ancienne\ valeur\ \text{-}\ \frac{Produit\ des\ \acute{e}l\acute{e}ments\ dans\ les\ coins\ oppos\acute{e}s}{Le\ pivot}$$

1.6.4 Organigramme de l'algorithme du simplexe (maximisation)

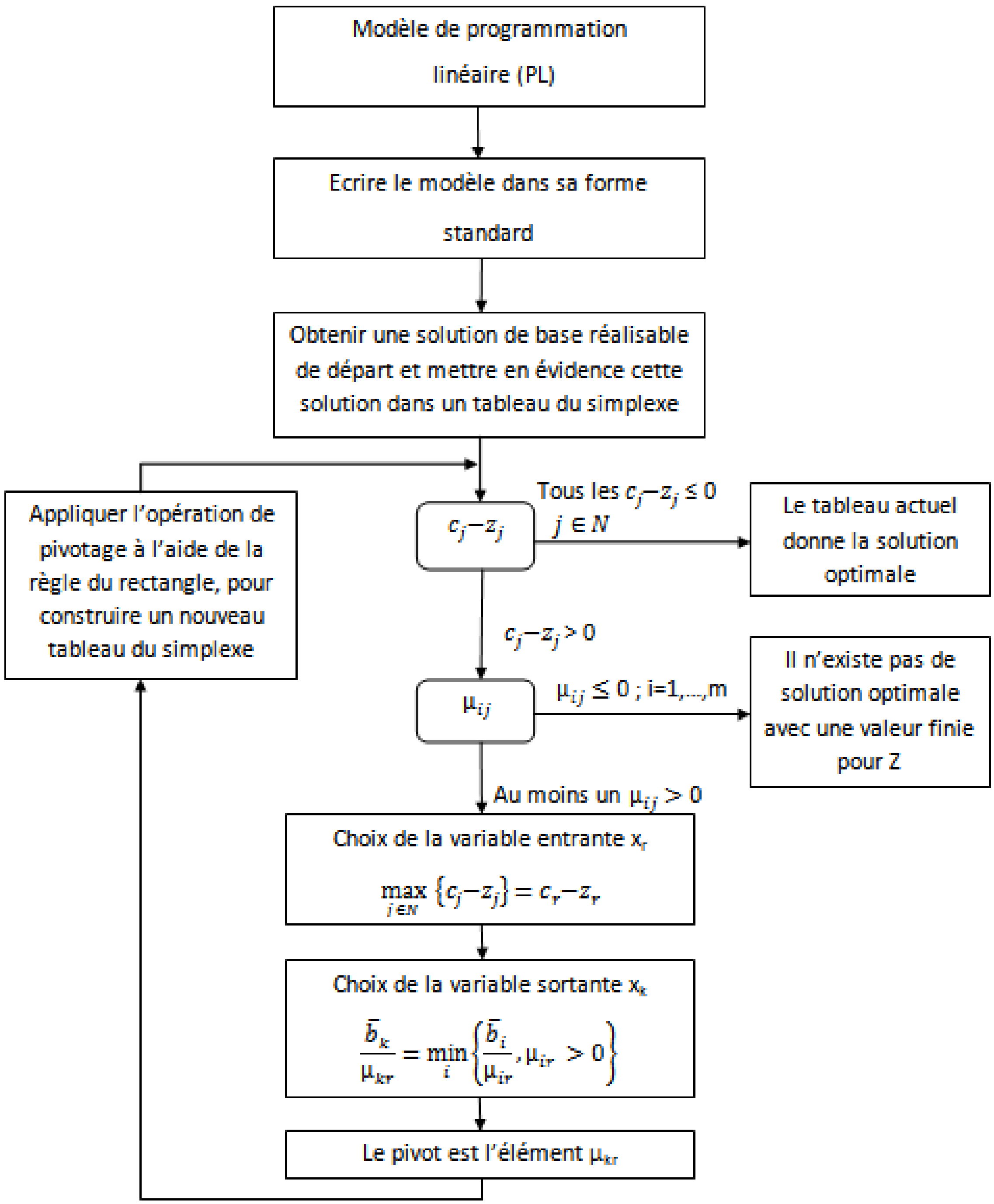

Figure 1 : Organigramme de l'algorithme du simplexe

1.6.5 Complexité de l'algorithme du simplexe

La complexité d'un algorithme est le nombre d'opérations élémentaires qu'il doit effectuer pour mener à bien un calcul en fonction de la taille des données d'entrée. L'efficacité d'un algorithme est mesurée par l'augmentation du temps de calcul en fonction du nombre des données [18].

Nous avons donc deux éléments à prendre en compte :

— la taille des données ;

— le temps de calcul.

L'évaluation de la complexité d'un algorithme est l'étude du nombre maximal d'opérations élémentaires qu'il nécessite dans le pire des cas. Kelle et Miny (1972) ont construit des problèmes nécessitant l'examen d'un nombre de sommets croissants exponentiellement en fonction de la taille du problème (contraintes et variables). Et puisqu'il a été montré pour les principales règles de pivotage employées que l'algorithme du simplexe pouvait prendre un temps de calcul exponentiel. En particulier, on ne sait pas s'il existe une règle de pivotage qui assurerait que l'algorithme se termine après un nombre polynomial d'étapes. Alors la complexité de la méthode du simplexe est donc exponentielle [5] .

1.6.6 Exemple numérique

. Enoncé

Un ébéniste fabrique des bureaux sous forme standard ou luxe. Des études de marché ont montré que pour l'année à venir, les possibilités de vente s'élèvent à 200 unités pour le modèle luxe et à 300 unités pour le modèle standard. L'approvisionnement en bois est suffisant pour fabriquer annuellement 600 bureaux quel que soit le type. Par ailleurs, le temps de fabrication d'un modèle luxe est le double de celui d'un bureau de modèle standard. La capacité annuelle de fabrication est telle que, si tous les bureaux fabriqués étaient de type standard, on pourrait en fabriquer 800 au maximum. La vente d'un bureau sous le modèle luxe conduit à une marge unitaire sur un coût variable égale à 8, celle d'un bureau de type standard égale à 4. On se propose de rechercher le programme annuel de fabrication conduisant au profit global maximum.

. Mise en équations

Soit x_1 le nombre de bureaux de type luxe, x_2 le nombre de bureaux de type standard. Le programme linéaire est :

$$\begin{cases} maxZ = 8x_1 + 4x_2 \\ x_1 \quad\quad\quad \leq 200 \\ \quad\quad x_2 \leq 300 \\ x_1 \quad + x_2 \leq 600 \\ 2x_1 \ + x_2 \leq 800 \\ \quad x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{1.30}$$

Écrivons le modèle dans sa forme standard en ajoutant les variables d'écart x_3, x_4, x_5, x_6.

$$\begin{cases} maxZ = 8x_1 + 4x_2 \\ x_1 \quad + x_3 \quad\quad\quad = 200 \\ \quad x_2 \quad + x_4 \quad = 300 \\ x_1 + x_2 \quad\quad + x_5 \quad = 600 \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad\quad + x_6 = 800 \\ \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots 6 \end{cases} \tag{1.31}$$

On obtient alors un système d'équations comportant $n = 6$ inconnues et $m = 4$ contraintes.

On obtient une solution de base en annulant $(6 - 4) = 2$ variables. On s'assure d'une solution de base réalisable en annulant les variables x_1, x_2 c'est à dire

$$x_1 = 0, \, x_2 = 0, \, x_3 = 200, \, x_4 = 300, \, x_5 = 600, \, x_6 = 800.$$

C'est la solution de base réalisable de départ qui est mise en évidence dans le premier tableau du simplexe.

Tableau 1- solution de départ

Ligne	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$S.B.R$
0	$c_j - z_j$	8	4	0	0	0	0	0
1	x_3	1	0	1	0	0	0	200
2	x_4	0	1	0	1	0	0	300
3	x_5	1	1	0	0	1	0	600
4	x_6	2	1	0	0	0	1	800

Les variables hors base sont x_1, x_2.

Appliquer le critère d'entrée et de sortie d'une variable.

$$\begin{aligned} max\,\{c_j - z_j\} &= max\,\{c_1 - z_1, c_2 - z_2\} \\ &= max\,\{8, 4\} = 8 \rightarrow \text{variable entrante } x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}},\ \mu_{ir} > 0\right\} &= min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{i1}},\ \mu_{i1}\right\} \\ &= min\left\{200, 600, \frac{800}{2}\right\} \\ &= min\,\{200, 600, 400\} = 200 = \frac{\bar{b}_1}{\mu_{11}} \rightarrow \text{variable sortante } x_3 \end{aligned}$$

La variable x_1 entre dans la base et sa valeur sera 200, la variable sortante est x_3 $(k = 1)$ et le pivot $\mu_{11} = 1$.

Ce calcul s'indique habituellement sur le tableau 2 suivant :

Tableau 2

Ligne	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	S.B.R
0	$c_j - z_j$	0	4	-8	0	0	0	1600
1	x_1	1	0	1	0	0	0	200
2	x_4	0	1	0	1	0	0	300
3	x_5	0	1	-1	0	1	0	400
4	x_6	0	1	-2	0	0	1	400

Le tableau 2 n'est pas optimal puisque $c_2 - z_2 = 4 > 0$

On applique les mêmes critères d'entrée et de sortie d'une variable on obtient :

la variable entrante : x_2, la variable sortante : x_4, le pivot : $\mu_{22} = 1$

En pivotant sur $\mu_{22} = 1$, on obtient le tableau 3 suivant :

Tableau 3

Ligne	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	S.B.R
0	$c_j - z_j$	0	0	-8	-4	0	0	2800
1	x_1	1	0	1	0	0	0	200
2	x_2	0	1	0	1	0	0	300
3	x_5	0	0	-1	-1	1	0	100
4	x_6	0	0	-2	-1	0	1	100

Le tableau 3 est optimal puisque tous les $c_j - z_j$ pour les variables hors base sont négatifs $c_3 - z_3 = -8 < 0$ et $c_4 - z_4 = -4 < 0$.

La solution optimale est :

$$x_{B_1} = x_1 = 200$$
$$x_{B_2} = x_2 = 300$$
$$x_{B_3} = x_5 = 100$$
$$x_{B_4} = x_6 = 100$$

Z est maximum pour $x_1 = 200$ et $x_2 = 300$ et vaut 2800.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté et détaillé une méthode de résolution des problèmes de programmation linéaire qui est la méthode du simplexe. Dans un premier temps nous avons parlé brièvement sur la programmation linéaire. Puis, nous avons montré l'application de cette méthode pour la résolution des problèmes de la programmation linéaire.

Chapitre 2

Concepts préliminaires sur les nombres flous

2.1 Introduction

La théorie des ensembles flous a été développée par Lotfi Zadeh (1963) [19] pour représenter l'incertitude dûe à l'imprécision dans l'information ne pouvant pas être modélisée par la théorie probabiliste.

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous ensemble. Le mérite de Zadeh a été de tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée : permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble, c'est-à-dire d'autoriser un élément à appartenir plus ou moins fortement à ce sous-ensemble.

2.2 Préface sur les ensembles flous

La notion d'ensemble flou n'étant pas classique, il convient avant tout d'introduire quelques définitions, principes d'utilisation et propriétés élémentaires. C'est ce que nous ferons dans ce paragraphe, en nous limitant strictement aux notions de base.

2.2.1 Définition d'un ensemble flou

Définition 2.1. *Ensemble flou* [17]

Soit X un ensemble appelé univers, dont les éléments sont notés x.

Un sous-ensemble classique A de X peut être caractérisé à l'aide d'une fonction d'appartenance réelle μ_A définie sur X et prenant ses valeurs dans l'ensemble binaire $\{0, 1\}$ telle que :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & si\, x \in A \\ 0 & si\, x \notin A \end{cases} \tag{2.1}$$

Un sous ensemble flou $\widetilde{A}$ de X est la notation classique pour désigner le caractère flou, il est défini à l'aide d'une fonction d'appartenance $\mu_{\widetilde{A}}$ définie sur X et prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. $\widetilde{A}$ est donc caractérisé par l'ensemble des couples tels que :

$$\widetilde{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)\right) \diagup x \in X \right\}. \tag{2.2}$$

La fonction d'appartenance $\mu_{\widetilde{A}}$ peut, selon la situation, représenter un degré de possibilité ou un degré de préférence ou un degré d'appartenance à $\widetilde{A}$.

Exemple d'un ensemble flou

Soit X une communauté donnée

On définit sur X le caractère « avoisinant les 30 ans ».

— Si $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0$: La communauté ne compte aucune personne avoisinant les 30 ans $\left(\widetilde{A} = \emptyset\right)$
— Si $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$:Tous les éléments de la communauté avoisinant les 30 ans
— Si $0 \leq \mu_{\widetilde{A}}(x) \leq 1$: Classe intermédiaire.

Supposons que $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

On peut définit l'ensemble flou $\widetilde{A}$ de la manière suivante :

$$\widetilde{A} = \{(x_1, 0), (x_2, 0.2), (x_3, 0.4), (x_4, 0.6), (x_5, 0.8), (x_6, 1)\}$$

Remarque 2.1. [17]

• Un ensemble classique (“crisp” par opposition à “fuzzy”) constitue donc un cas particulier d'ensemble flou.

• L'ensemble vide est caractérisé par $\mu_{\emptyset}(x) = 0$, $\forall x \in X$.

Définition 2.2. *Ensemble flou convexe* [10]

L'ensemble flou $\tilde{A}$ est convexe si sa fonction d'appartenance vérifie :

$$\mu_{\tilde{A}}\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2\right) \geq \min\left(\mu_{\tilde{A}}\left(x_1\right),\ \mu_{\tilde{A}}\left(x_2\right)\right), \quad \forall x_1, x_2 \in X \text{ et } \forall \lambda \in [0,1].$$

Définition 2.3. *Ensemble flou normalisé* [10]

L'ensemble flou $\tilde{A}$ est normalisé s'il existe $x_0 \in X$ tel que $\mu_{\tilde{A}}\left(x_0\right) = 1$.

2.2.2 Définition des caractéristiques d'un ensemble flou

Un ensemble flou est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance. A partir d'une telle fonction, un certain nombre de caractéristiques de sous ensemble flou peuvent être étudiées.

• **Coupe de niveau $\boldsymbol{\alpha}$** [10]

Une coupe de niveau α d'un ensemble flou $\widetilde{A}$ noté $\widetilde{A}_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$, est l'ensemble ordinaire des éléments qui appartiennent à $\widetilde{A}$ avec un degré au moins égale à α.

Formellement :

$$\widetilde{A}_\alpha = \left\{x \in X \diagup \mu_{\tilde{A}}\left(x\right) \geq \alpha\right\}$$

• **Support d'un ensemble $\widetilde{\boldsymbol{A}}$** [11]

Le support d'un ensemble flou $\widetilde{A}$ noté $Supp\left(\widetilde{A}\right)$ est l'ensemble ordinaire de X qui comprend les éléments x de X dont la fonction d'appartenance est positive.

Formellement :

$$Supp\left(\widetilde{A}\right) = \left\{x \in X \diagup \mu_{\widetilde{A}}\left(x\right) > 0\right\}$$

• **Hauteur d'un ensemble flou $\widetilde{\boldsymbol{A}}$** [15]

La hauteur d'un ensemble flou $\widetilde{A}$ noté $Haut\left(\widetilde{A}\right)$ est le plus fort degré avec lequel un élément de X appartient à $\widetilde{A}$

Formellement :

$$Haut\left(\widetilde{A}\right) = \underset{x \in X}{sup}\left(\mu_{\widetilde{A}}\left(x\right)\right)$$

• **Noyau d'un ensemble $\widetilde{A}$** [15]

Le noyau d'un ensemble flou $\widetilde{A}$ de X noté $Noy\left(\widetilde{A}\right)$ est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent totalement (avec un degré 1).

Formellement :

$$Noy\left(\tilde{A}\right) = \{x \in X \diagup \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

2.3 Nombre flou

Définition 2.3. [11]

Un nombre flou est un ensemble flou $\tilde{A}$ convexe et normalisé, de l'ensemble des nombres réels ($X = \mathbb{R}$).

Remarque 2.2.

Si le $Noy\left(\tilde{A}\right)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, on parle alors d'intervalle flou.

Exemple

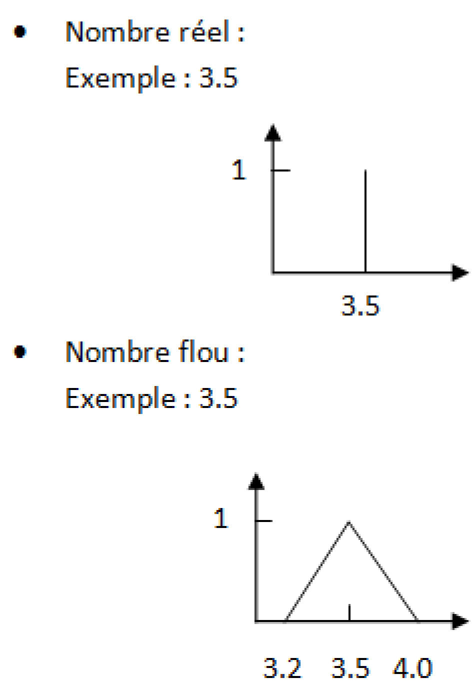

Figure 2.1 - Comparaison entre un nombre flou et un nombre réel

2.3.1 Opérations ensemblistes

Soient $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ deux sous-ensembles d'un même référentiel X.

• **Inclusion** [17]

Un ensemble flou $\tilde{A}$ est inclus dans un autre ensemble flou $\tilde{B}$ si :

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \forall\ x \in X$$

• **Egalité** [17]

Deux ensembles flous $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont égaux si :

$$\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \forall\ x \in X$$

• **Complémentaire** [15]

Le complémentaire $\overline{\tilde{A}}$ d'un ensemble flou est défini par sa fonction d'appartenance :

$$\mu_{\overline{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

• **Intersection** [17]

L'intersection de deux ensembles flous est définie par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x)\,,\ \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall\ x \in X$$

• **L'union** [17]

L'union de deux ensembles flous est définie par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x)\,,\ \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall\ x \in X$$

Principe d'extension de Zadeh et fonction d'ensembles flous [17]

Soit X un produit cartésien d'univers $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_r$ et $\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_r$, r ensembles flous dans $X_1, \ldots, X_r$ respectivement. Selon le principe d'extension de Zadeh (basé sur l'opération min) la fonction d'appartenance du produit cartésien $\widetilde{A}_1 \times \cdots \times \widetilde{A}_r$ vaut

$$\mu_{\widetilde{A_1}\times\cdots\times\widetilde{A_r}}(x_1, \ldots, x_r) = \min\Big(\mu_{\widetilde{A_1}}(x_1)\,, \ldots, \mu_{\widetilde{A_r}}(x_r)\Big)\,.$$

2.3.2 Nombre flou de type L-R

Un nombre flou $\widetilde{A}$ est de représentation L-R [12,17] s'il existe deux fonctions L et R telles que sa fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & pour\ x \leq m,\ avec \quad \alpha > 0, \\ \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & pour\ x \geq m,\ avec \quad \beta > 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

où :

L et R sont des fonctions dites de référence du nombre flou $\widetilde{A}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- L et R fonctions non croissantes sur $[0, +\infty[$
- L et R fonctions symétriques : $L(x) = L(-x)$; $R(x) = R(-x)$, $\forall x$
- $L(0) = R(0) = 1$.

On note $\widetilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{L-R}$

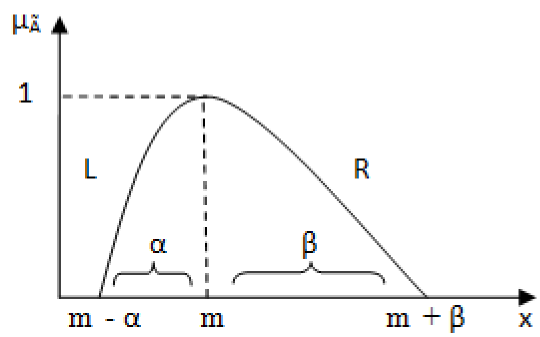

Figure 2.3 - Représentation d'un nombre flou de type L-R

2.3.2.1 Intervalle flou

Un nombre flou plat de type L-R, ou intervalle flou [17], est tel qu'il existe m,$n \in \mathbb{R}$, avec $m < n$ de sorte que $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$ $\forall x \in [m, n]$. Sa fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & si\ x \leq m;\ \alpha > 0, \\ 1 & si\ m \leq x \leq n, \\ R\left(\frac{x-n}{\beta}\right) & si\ x \geq n;\ \beta > 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Nous désignerons un tel nombre flou $\tilde{A}$ de type L-R par $\widetilde{A} = (m, n, \alpha, \beta)_{L-R}$

où

α et β sont les écarts à gauche et à droite de $\widetilde{A}$ respectivement,
m et n sont les valeurs modales inférieur et supérieur de $\widetilde{A}$ respectivement ou bien la moyenne à gauche et à droite de $\widetilde{A}$ respectivement,
$[m, n]$ est le noyau de $\widetilde{A}$.

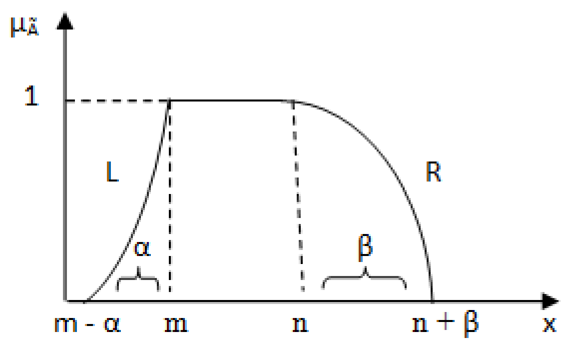

Figure 2.4 - Représentation d'un nombre flou plat de type L-R

Remarque 2.3

Il existe plusieurs types de nombres flous de type L-R. Lorsque les fonctions de référence L et R sont linéaires, on parle alors de nombre flou de type triangulaire ou de type trapézoïdal.

2.3.3 Nombre flou de type triangulaire

Un nombre flou $\widetilde{A}$ est dit de type triangulaire [15] noté (a, α, β) si sa fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a+\alpha}{\alpha} & si\ a-\alpha \leq x \leq a,\ avec\, \alpha > 0 \\ 1 & si\ x = a \\ \frac{a+\beta-x}{\beta} & si\ a \leq x \leq a+\beta,\ avec\, \beta > 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

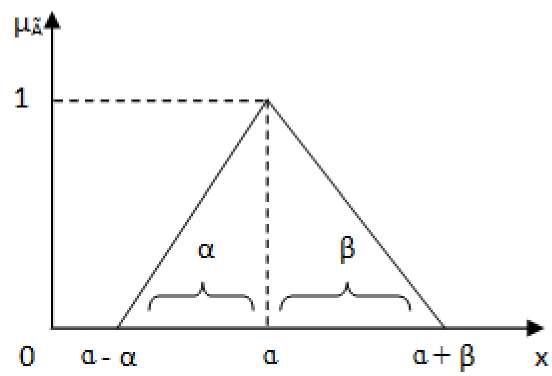

Figure 2.5 - Représentation d'un nombre flou triangulaire (a, α, β)

2.3.3.1 Opérations sur les nombres flous de type triangulaire

Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux nombres flous de type triangulaire

▶ **Multiplication scalaire** [15]

Soit le nombre flou triangulaire $\widetilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$.
Il vient :

$$\begin{cases} Si\ \lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}: & \lambda \bigotimes \widetilde{A} = (\lambda a,\ \lambda\alpha_1,\ \lambda\beta_1), \\ Si\ \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R}: & \lambda \bigotimes \widetilde{A} = (\lambda a,\ -\lambda\beta_1, -\lambda\alpha_1). \end{cases}$$

▶ **Addition** [15]

Soient deux nombres flous triangulaires $\widetilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$ et $\widetilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$.
Il vient

$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} = (a+b,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2).$$

► **Soustraction** [15]

Étant donné $\widetilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$ et $\widetilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$ deux nombres flous triangulaires. Il vient

$$-\widetilde{B} = -(b,\ \alpha_2,\ \beta_2) = (-b,\ \beta_2,\ \alpha_2).$$

et

$$\widetilde{A} \ominus \widetilde{B} = (a-b,\ \alpha_1+\beta_2,\ \beta_1+\alpha_2).$$

2.3.3.2 Comparaison de deux nombres flous triangulaires

Soient deux nombres flous triangulaires $\widetilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$ et $\widetilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$.

► $\widetilde{A}=\widetilde{B} \Leftrightarrow a = b\ ,\ \alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2.$

► $\widetilde{A}\leq\widetilde{B} \Leftrightarrow a \leq b\ ,\ a-\alpha_1 \leq b-\alpha_2,\ a+\beta_1 \leq b+\beta_2.$

2.3.4 Nombre flou de type trapézoïdal

Un nombre flou $\widetilde{A}$ est dit de type trapézoïdal [11] noté $\left(a^L, a^U, \alpha, \beta\right)$ si sa fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a^L+\alpha}{\alpha} & si\ a^L-\alpha \leq x \leq a^L \\ 1 & si\ a^L \leq x \leq a^U \\ \frac{a^U+\beta-x}{\beta} & si\ a^u \leq x \leq a^U+\beta \end{cases} \tag{2.6}$$

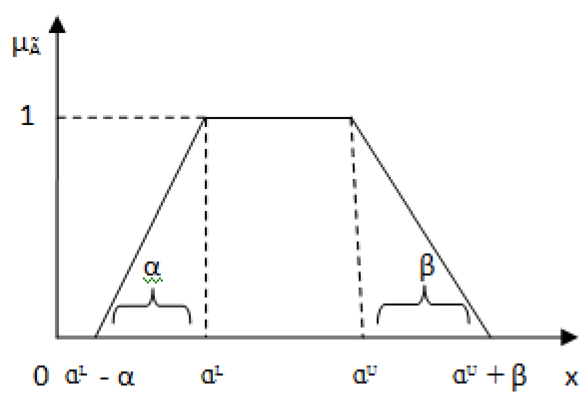

Figure 2.5 - Représentation d'un nombre flou trapézoïdal

2.3.4.1 Opérations sur les nombres flous de type trapézoïdal

Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux nombres flous trapézoïdaux.

▶ **Multiplication scalaire** [10]

Soit le nombre flou $\widetilde{A} = \left(a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1\right)$ de type trapézoïdal.
Il vient :

$$\begin{cases} Si\ \lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R} : & \lambda \bigotimes \widetilde{A} = \left(\lambda a^L,\ \lambda a^U,\ \lambda\alpha_1,\ \lambda\beta_1\right), \\ Si\ \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R} : & \lambda \bigotimes \widetilde{A} = \left(\lambda a^U,\ \lambda a^L,\ -\lambda\beta_1, -\lambda\alpha_1\right). \end{cases}$$

▶ **Addition** [10]

Soient deux nombres flous $\widetilde{A} = \left(a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1\right)$ et $\widetilde{B} = \left(b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2\right)$ de type trapézoïdaux.
Il vient :

$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} = \left(a^L + b^L,\ a^U + b^U,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ \beta_1 + \beta_2\right).$$

▶ **Soustraction** [10]

Étant donné deux nombres flous trapézoïdaux $\widetilde{A} = \left(a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1\right)$ et $\widetilde{B} = \left(b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2\right)$
Il vient :

$$-\widetilde{B} = -\left(b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2\right) = \left(-b^U, -b^L, \beta_2, \alpha_2\right),$$

et

$$\widetilde{A} \ominus \widetilde{B} = \left(a^L - b^U,\ a^U - b^L,\ \alpha_1 + \beta_2,\ \beta_1 + \alpha_2\right).$$

2.3.4.2 Comparaison de deux nombres flous trapézoïdaux

Soient deux nombres flous trapézoïdaux $\widetilde{A} = \left(a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1\right)$ et $\widetilde{B} = \left(b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2\right)$.

▶ $\widetilde{A} = \widetilde{B} \Leftrightarrow a^L = b^L,\ a^U = b^U,\ \alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2$.

▶ $\widetilde{A} \leq \widetilde{B} \Leftrightarrow a^L \leq b^L,\ a^U \leq b^U,\ a^L - \alpha_1 \leq b^L - \alpha_2,\ a^U + \beta_1 \leq b^U + \beta_2$.

▶ Un nombre flou trapézoïdal est positif si et seulement si $a^L - \alpha_1 \geq 0$.

▶ Un nombre flou trapézoïdal est négatif si et seulement si $a^U + \beta_1 \leq 0$.

Remarque 2.3.

On note par $F(\mathbb{R})$ l'ensemble des nombres flous de type trapézoïdal.

2.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, quelques notions de base sur la logique floue en introduisant les concepts de base des ensembles et des nombres flous. Dans notre travail, nous nous limiterons exclusivement aux nombres flous trapézoïdaux.

Chapitre 3

Programmation Linéaire Floue

3.1 Introduction

En programmation linéaire, les données sont supposées être connues avec précision. Dans le cas où ces dernières sont mal connues ou imprécises de nature floue, nous avons un programmation linéaire flou. Dans ce chapitre, nous allons résoudre un problème de programmation linéaire flou par la méthode du simplexe flou que nous présenterons en détail.

3.2 Fonction Ranking $\Re$

Une approche efficace pour comparer les nombres flous est l'utilisation des fonctions Ranking ou fonctions de classement. Une fonction Ranking $\Re$ est définie de l'ensemble des nombres flous trapézoïdaux $F(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ ($\Re : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$)[12]. De différents types de fonctions Ranking [14] ont été introduits et certains ont été utilisés pour résoudre des problèmes de programmation linéaire avec des paramètres flous.

Proposition 3.1. [1]

Soient $\widetilde{a}$ et $\widetilde{b}$ deux nombres flous trapézoïdaux, on définit un ordre sur $F(\mathbb{R})$ comme suit :

- On dit que $\widetilde{a} \underset{\Re}{\geq} \widetilde{b}$ si et seulement si $\Re(\widetilde{a}) \geq \Re(\widetilde{b})$
- On dit que $\widetilde{a} \underset{\Re}{>} \widetilde{b}$ si et seulement si $\Re(\widetilde{a}) > \Re(\widetilde{b})$
- On dit que $\widetilde{a} \underset{\Re}{=} \widetilde{b}$ si et seulement si $\Re(\widetilde{a}) = \Re(\widetilde{b})$

Lemme 3.1. [14]

Soient $\widetilde{a}$ et $\widetilde{b}$ deux nombres flous trapézoïdaux dans $F(\mathbb{R})$ et soit $\Re$ une fonction Ranking. Alors

- $\widetilde{a} \underset{\Re}{\leq} \widetilde{b} \Leftrightarrow \widetilde{b} \underset{\Re}{\geq} \widetilde{a}$
- $\widetilde{a} \underset{\Re}{\geq} \widetilde{b} \Leftrightarrow \widetilde{a} - \widetilde{b} \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0} \Leftrightarrow -\widetilde{b} \underset{\Re}{\geq} -\widetilde{a}$
- Si $\widetilde{a} \underset{\Re}{\geq} \widetilde{b}$ et $\widetilde{c} \underset{\Re}{\geq} \widetilde{d}$ alors $\widetilde{a} + \widetilde{c} \underset{\Re}{\geq} \widetilde{b} + \widetilde{d}$
- $\Re\left(k\widetilde{a} + \widetilde{b}\right) = k\Re(\widetilde{a}) + \Re(\widetilde{b})$ pour tout $\widetilde{a}$, $\widetilde{b} \in F(\mathbb{R})$ et tout $k \in \mathbb{R}$ ($\Re$ est linéaire)

Remarque 3.2. [1,10]

Comme suggestion d'une fonction linéaire Ranking $\Re$ d'un nombre flou trapézoïdal $\widetilde{a} = \left(a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1\right)$ où $\widetilde{a} \in F(\mathbb{R})$, est :

$$\Re(\widetilde{a}) = a^L + a^U + \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_1) \tag{3.1}$$

Ainsi, en utilisant (3.1) pour des nombres flous trapézoïdaux $\widetilde{a} = \left(a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1\right)$ et $\widetilde{b} = \left(b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2\right)$, on a donc :

$$\widetilde{a} \underset{\Re}{\geq} \widetilde{b} \;\Leftrightarrow\; a^L + a^U + \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_1) \geq b^L + b^U + \frac{1}{2}(\beta_2 - \alpha_2) \tag{3.2}$$

Dans ce chapitre, nous allons considérer trois cas de problèmes linéaires flous.

3.3 Cas où le vecteur des coûts $\widetilde{c}$ est un nombre flou trapézoïdal

Un problème de Programmation Linéaire en Nombres Flous Trapézoïdal (PLNFT), dans le cas où les composantes du vecteur des coûts $\widetilde{c}$ sont des nombres flous trapézoïdaux [1] , est défini comme suit :

$$(P_{\widetilde{c}}) \begin{cases} max \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{c}^T x \\ s.c \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\widetilde{c}^T \in (F(\mathbb{R}))^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ avec $\Re$ une fonction Ranking linéaire.

Définition 3.2. *Solution réalisable* [10]

On dit qu'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est une solution réalisable du problème $(P_{\widetilde{c}})$ si et seulement si x satisfait les contraintes du problème, c'est à dire $Ax = b$ et $x \geq 0$.

Définition 3.3. *Solution optimale* [10]

Une solution réalisable $x^\star$ est une solution optimale pour le problème $(P_{\widetilde{c}})$ si pour toute solution réalisable x, on a $\widetilde{c}x^\star \underset{\Re}{\geq} \widetilde{c}x$.

3.3.1 Solution de base réalisable

Nous introduisons la définition d'une solution de base réalisable pour un problème de programmation linéaire en nombres flous $(P_{\widetilde{c}})$. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Hypothèse : Supposons que $rang\,(A) = m$.

Définition 3.4. *Ensemble des indices de base* [10,13]

Soit $R \subset \{1, \ldots, n\}$ un ensemble d'indices avec $card\,(R) = m$ tel que les colonnes a_j, $(j \in R)$, de A sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée B formée des colonnes a_j, $(j \in R)$, est inversible. On dit alors que l'ensemble R des indices est une base.

- Les variables $x_B = (x_j,\ j \in R)$ sont appelées variables de base.
- Les variables $x_E = (x_j,\ j \notin R)$ sont appelées variables hors-base.

Remarque 3.1.

On peut toujours écrire les décompositions par blocs suivantes :

$A = (B, E)$ où B est appelée matrice de base et E matrice hors base
et $x = (x_B, x_E)^T$.

Définition 3.6. *Solution de base réalisable* [4]

On dit que $x = (x_B, x_E)^T$ est une solution de base associée à la base R si elle vérifie :

$Ax = b$ avec $x_B = B^{-1}b$ et $x_E = 0$

Si, en plus, $x_B \geq 0$, alors x est une solution de base réalisable.

Définition 3.7. *Solution dégénérée et non dégénérée* [1]

Une solution de base réalisable x est dite non dégénérée si $x_B > 0$.

Si, au moins, une composante $x_B = 0$ alors x est appelée une solution de base réalisable dégénérée.

3.4 Méthode du simplexe flou d'un problème de PLNFT

On dispose d'une solution de base réalisable x d'un programme linéaire flou sous forme standard. La matrice A peut s'écrire

$$A = (B, E)$$

où B est une matrice carrée de taille $m \times m$ inversible, correspondante aux variables de base et E est une matrice de taille $m \times (n - m)$, correspondante aux variables hors-base. On décompose également le vecteur de décision :

$$x = (x_B, x_E)$$

avec x_B les variables de base et x_E les variables hors base.

Le but est de trouver une autre base $R^\star$ et une solution de base $x^\star$ associée telles que

$$\widetilde{Z}(x^\star) \underset{\Re}{>} \widetilde{Z}(x) \qquad (x^\star \text{ est meilleur que } x).$$

La méthode du simplexe flou consiste à faire rentrer une variable hors-base dans la nouvelle base appelée *variable entrante* et faire sortir à la place une variable de base appelée *variable sortante.*

3.4.1 Détermination d'une première solution

Considérons le problème de programmation linéaire floue sous forme standard suivant :

$$\begin{cases} max\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{c}^T x \\ s.c \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

où A est une matrice de dimension $m \times n$, b un vecteur colonne comportant m lignes.

On peut construire à partir de la matrice A deux sous matrices, $A = (B, E)$.

De même le vecteur x (*vecteur de décision*) est décomposé comme suit : $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_E \end{bmatrix}$

où $x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$ et x_E pour les $(n-m)$ variables restantes.

L'expression $Ax = b$ peut alors s'écrire :

$$Ax = (B, E) \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ x_E \end{bmatrix} = b$$

$$\Rightarrow Ax = Bx_B + Ex_E = b \tag{3.6}$$

Multiplions l'expression par B^{-1}, l'inverse de B ;

on obtient

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Ex_E = B^{-1}b$$

avec $B^{-1} \cdot B = I$ (identité d'ordre m)

d'où

$$x_B + B^{-1}Ex_E = B^{-1}b$$

En annulant x_E, la solution de base est alors

$$x_B = B^{-1}b \tag{3.7}$$

On obtient une solution de base réalisable de départ si $x_B \geq 0$ (la matrice B est toujours constituée à partir des colonnes de la matrice A).

3.4.2 Amélioration d'une solution de base

À partir d'une solution de base réalisable, on obtient une nouvelle solution de base réalisable adjacente (meilleure ou aussi bonne) en transformant une variable (hors-base) en variable de base (dite variable entrante) et en même temps, rendre une variable de base actuelle en variable hors-base (dite variable sortante). Cette opération algébrique permet d'obtenir une nouvelle solution réalisable.

- **Détermination de la variable entrante**

. Calcul des coûts réduits

Formalisons l'expression de $\widetilde{Z}$ pour mieux définir le critère requis pour sélectionner la variable qui deviendra une variable de base. Nous savons que :

$$Ax = Bx_B + Ex_E = b$$

avec B qui est inversible. Donc

$$x_B + B^{-1}Ex_E = B^{-1}b \tag{3.8}$$

Alors

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Ex_E \tag{3.9}$$

On obtient donc

$$\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{c}x \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B x_B + \widetilde{c}_E x_E$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B \left(B^{-1} \cdot b - B^{-1}Ex_E\right) + \widetilde{c}_E x_E$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B B^{-1}b + (\widetilde{c}_E - \widetilde{c}_B B^{-1}E)x_E$$

Or $x_0 = (x_B, x_E)$ où $x_B = B^{-1}b$ $(car\ x_E = 0)$ alors

$$\widetilde{Z}_0 \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B x_B \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B B^{-1} b$$

Donc

$$\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{Z}_0 + \left(\widetilde{c}_E - \widetilde{c}_B B^{-1} E\right) x_E \tag{3.10}$$

L'expression matricielle $B^{-1}E$ peut s'écrire

$$B^{-1}E = \sum_{j \in N} B^{-1} a_j \tag{3.11}$$

Cette dernière expression peut s'écrire :

$$\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{Z}_0 + \sum_{j \in N} \widetilde{c}_j x_j - \sum_{j \in N} \widetilde{c}_B B^{-1} a_j x_j$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{Z}_0 + \sum_{j \in N} \left(\widetilde{c}_j - \widetilde{c}_B B^{-1} a_j\right) x_j$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{Z}_0 + \sum_{j \in N} \left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right) x_j \tag{3.12}$$

Le vecteur

$$\widetilde{Y}_E \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_E - \widetilde{c}_B B^{-1} E$$

qui se compose de

$$\widetilde{Y}_j \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j \tag{3.13}$$

s'appelle vecteur des coûts réduits.

$\widetilde{z}_j = c_B B^{-1} a_j$ et $\widetilde{c}_j$ sont les coefficients de la fonction objectif des variables hors base.

Notons par $\mu_j = B^{-1} a_j$ (ces vecteurs μ_j seront les nouveaux éléments sous les variables x_j dans le tableau du simplexe, dans le tableau de départ les μ_j sont les a_j associés aux contraintes originales du modèle).

— Si les coûts réduits sont tous négatifs, c'est-à-dire $\widetilde{Y}_j \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j \underset{\Re}{\leq} \widetilde{0}$ (pour toutes les variables hors base), il n'est alors pas possible d'augmenter la fonction objectif $\widetilde{Z}$. Dans ce cas, l'algorithme se termine, et la solution de base réalisable obtenue est *optimale*.

— Dans le cas contraire, s'il existe $j \in N$ tel que $\widetilde{Y} \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j \underset{\Re}{>} \widetilde{0}$, on a intérêt à faire entrer dans la base, la variable qui a le coût réduit $positif\ le\ plus\ grand\ possible$.

Pour introduire une variable dans la base, quelque soit l'optimisation (maximisation ou minimisation), on applique le critère suivant :

▶ **Critère d'entrée d'une variable dans la base [1,10]**

À partir d'une solution de base réalisable, calculer pour toutes les variables hors base, la quantité $\widetilde{z}_j \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B B^{-1} a_j \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B \mu_j$, puis les $\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j$.

. **Maximisation.** La variable x_r est introduite dans la base si $\Re\left(\widetilde{c}_r - \widetilde{z}_r\right)$ correspond à la valeur algébrique la plus élevée parmi tous les $\Re\left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right)$, c'est à dire :

$$\Re\left(\widetilde{c}_r - \widetilde{z}_r\right) = \underset{j \in N}{max}\{\Re\left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right) \diagup \Re\left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right) > 0\}\,.$$

. **Minimisation.** Dans ce cas, la variable x_r est introduite dans la base si $\Re\left(\widetilde{c}_r - \widetilde{z}_r\right)$ correspond à la valeur algébrique la moins élevée parmi tous les $\Re\left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right)$:

$$\Re\left(\widetilde{c}_r - \widetilde{z}_r\right) = \underset{j \in N}{min}\{\Re\left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right) \diagup \Re\left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right) < 0\}\,.$$

Remarque 3.2.

a) $\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j \underset{\Re}{=} \widetilde{0}$ pour toutes les variables de base.
En effet, $\widetilde{z}_j \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B B^{-1} a_j \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B \mu_j \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_j$, le vecteur μ_j étant alors un vecteur identité.

b) La valeur de x_r est déterminée selon la règle de sortie d'une variable de base, que nous traitons ci-après.

• **Détermination de la variable sortante**

Une fois que la variable x_r est choisie, il faut déterminer quelle variable doit quitter la base. En maintenant la relation $Ax = b$, on augmente x_r jusqu'à annuler une variable de base. Cette variable sera alors (*la variable sortante*).

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Ex_E = b$$

La solution de base x_B sera modifiée selon l'expression

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Ex_E$$

$$\Rightarrow \quad x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_r x_r$$

$$\Rightarrow \quad x_B = \overline{b} - \mu_r x_r \tag{3.14}$$

où $\overline{b} = B^{-1}b$ et $\mu_r = B^{-1}a_r$ (les éléments du tableau sous le vecteur a_r).

Il faut que $x_{B_i} \geq 0$, $(i = 1, \ldots, m)$ pour que la nouvelle solution de base soit réalisable c-à-d.

$$x_{B_1} = \overline{b}_1 - \mu_{1r}x_r \geq 0$$

$$x_{B_2} = \overline{b}_2 - \mu_{2r}x_r \geq 0$$

$$\vdots$$

$$x_{B_k} = \overline{b}_k - \mu_{kr}x_r \geq 0$$

$$\vdots$$

$$x_{B_m} = \overline{b}_m - \mu_{mr}x_r \geq 0$$

Discutons sur le signe de $\mu_{ir} = B^{-1}a_{ir}$.

— Si $\mu_{ir} \leq 0$, la quantité $\mu_{ir}x_r$ sera négative et x_{B_i} augmentera à mesure que x_r augmentera. Donc on peut augmenter x_r autant qu'on veut, on aura toujours la positivité de la variable de base $x_{\mathbf{B_i}}$. Dans ce cas, la solution est non bornée ; en effet, en faisant tendre x_r vers l'infini, $\widetilde{Z}$ tend vers l'infini. Donc, l'algorithme s'arrête.

— Si $\mu_{ir} > 0$, alors $\mu_{ir}x_r$ sera une quantité positive et x_{B_i} réduira à mesure que x_r augmentera. Pour s'assurer de maintenir une solution réalisable (et de rendre nulle une variable qui est actuellement dans la base), x_r s'arrêtera d'augmenter aussitôt qu'une variable dans la base actuelle devient nulle.

Pour avoir la positivité de x_{B_i} pour tout i, on choisit la variable sortante pour laquelle le rapport $\dfrac{\overline{b}_i}{\mu_{ir}}$ est le plus petit possible, supposons que ce minimum s'obtient à $i = k$. Le critère de sortie d'une variable de la base s'énonce alors comme suit :

▶ **Critère de sortie d'une variable de la base** [10]

Sachant que la variable entrante dans la base est x_r, la variable x_k sort de la base d'après :

$$\frac{\overline{b_k}}{\mu_{kr}} = \min_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{\overline{b_i}}{\mu_{ir}},\ \mu_{ir} > 0\right\} \tag{3.15}$$

La nouvelle valeur de la variable de base est $x_r = \dfrac{\overline{b_k}}{\mu_{kr}}$ pour $i = k$.

Le terme μ_{kr} est appelé le pivot et sert à effectuer l'opération de pivotage pour déterminer la nouvelle solution de base réalisable .

Soit $R^{\star}$ la nouvelle base obtenue et $x^{\star}$ sa solution de base associée alors la nouvelle valeur de la fonction objectif sera donnée par :

$$\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{Z}_0 + x_r\left(\widetilde{c}_r - \widetilde{z}_r\right)$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{Z}_0 + \frac{\overline{b}_k}{\mu_{kr}}\left(\widetilde{c}_r - \widetilde{z}_r\right) \tag{3.16}$$

et en considérant que la solution n'est pas dégénérée $\left(\overline{b}_k > 0\right)$ et puisque $\widetilde{c}_r - \widetilde{z}_r \underset{\Re}{>} \widetilde{0}$ (problème de maximisation), la valeur numérique de la fonction objectif s'est améliorée ; c'est-à-dire

$$\widetilde{Z} \underset{\Re}{>} \widetilde{Z}_0$$

On poursuit ces étapes ainsi jusqu'à ce qu'on ne puisse plus obtenir de solution de base réalisable améliorant $\widetilde{Z}$. La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale au programme linéaire floue.

Remarque 3.3.

Absence de solutions optimales finies

Il n'existe pas de solution optimale avec une valeur finie pour $\widetilde{Z}$ si :

— Pour une maximisation, s'il existe $\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j \underset{\Re}{>} \widetilde{0}$ pour une variable hors base x_j et tous les $\mu_{ij} \leq 0$. Dans ce cas, $\widetilde{Z} \to +\infty$

— Pour une minimisation, s'il existe $\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j \underset{\Re}{<} \widetilde{0}$ pour une variable hors base x_j et tous les $\mu_{ij} \leq 0$. Dans ce cas, $\widetilde{Z} \to -\infty$

3.4.3 Critère d'optimalité

. Cas d'une maximisation [10] : Une solution de base réalisable est optimale si pour toutes les variables hors base. On a

$$\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j \underset{\Re}{\leq} \widetilde{0} \tag{3.17}$$

. Cas d'une minimisation : Une solution de base réalisable est optimale si pour toutes les variables hors base. On a

$$\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0} \tag{3.18}$$

3.4.4 Tableau de simplexe flou d'un problème de PLNFT

Considérons le problème de programmation linéaire flou trapézoïdal $(PLNFT)$ défini précédemment comme :

$$\begin{cases} max \quad \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B x_B + \widetilde{c}_E x_E \\ s.c \\ \qquad\quad B x_B + E x_E = b \\ \qquad\quad x_B, x_E \geq 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Par conséquent, on peut écrire

$$x_B + B^{-1} E x_E = B^{-1} b.$$

Donc

$$\widetilde{Z} - \left(\widetilde{c}_E - \widetilde{c}_B B^{-1} E\right) x_E = \widetilde{c}_B B^{-1} b$$

Actuellement, $x_E = 0$ donc $x_B = B^{-1} b$ et $\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B B^{-1} b$.

On réécrit le problème $(PLNFT)$, ci-dessus, sous forme d'un tableau [4] , comme suit :

Tableau 2

Base	x_B	x_E	*S.B.R*
$\Re\left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right)$	0	$\Re\left(\widetilde{c}_E - \widetilde{z}_E\right) = \Re\left(\widetilde{c}_E - \widetilde{c}_B B^{-1} E\right)$	$\Re\left(\widetilde{Z}\right) = \Re\left(\widetilde{c}_B B^{-1} b\right)$
$\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j$	$\widetilde{0}$	$\widetilde{c}_E - \widetilde{z}_E = \widetilde{c}_E - \widetilde{c}_B B^{-1} E$	$\widetilde{Z} = \widetilde{c}_B B^{-1} b$
x_B	I	$\mu_E = B^{-1} E$	$\overline{b} = B^{-1} b$

Ce tableau nous donne toutes les informations dont on aura besoin pour appliquer la méthode du simplexe flou.

La ligne des coûts flous dans le tableau, ci-dessus, est $\widetilde{Y} \underset{\Re}{=} \left(\widetilde{c}_E - \widetilde{c}_B B^{-1} E\right)$ qui se compose de $\widetilde{Y}_j \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j$ pour les variables hors base.

En fonction de la condition d'optimalité, on arrive à la solution optimale si $\widetilde{Y}_j = \widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j \underset{\Re}{\leq} \widetilde{0}$ pour tout $j \in N$.

3.4.5 Algorithme du simplexe flou d'un problème de PLNFT

La méthode du simplexe flou pour un problème de maximisation est composée des deux étapes suivantes [4] :

Etape initiale

La solution de base réalisable de départ est donnée par $x_B = B^{-1} b = \overline{b}$, $x_E = 0$ et l'objectif flou $\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B B^{-1} b \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B \overline{b}$.

Etape principale

1. Calculer $\Re\left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right)$ pour toutes les variables hors base.

   Soit $\Re\left(\widetilde{c}_r - \widetilde{z}_r\right) = \underset{j \in N}{max}\{\Re\left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right), \ j \in N\}$ dans lequel N est l'ensemble

   des indices hors base actuels.

   - Si $\Re\left(\widetilde{c}_r - \widetilde{z}_r\right) \leq 0$, alors stop ; la solution actuelle est optimale.

   - Sinon, on passe à l'étape (2).

2. Soit $\mu_{ir} = B^{-1}a_{ir}$.

- Si $\mu_{ir} \leq 0$, alors stop ; le problème a une solution infinie.

- Sinon, déterminer la variable x_k qui va quitter la base de la manière suivante :

$$\frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} = \min_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}},\ \mu_{ir} > 0\right\}$$

3. Mettre à jour le tableau en pivotant sur μ_{kr} ;

mettre à jour $\bar{b}_i$ en le remplaçant par ($\bar{b}_i - \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}\ \mu_{ir}$) pour $i \neq k$ et par $\frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}$ pour $i = k$;

mettre à jour $\widetilde{Z}$ en le remplaçant par $(\widetilde{Z} + \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}\ (\widetilde{c}_r - \widetilde{z}_r))$.

Puis, mettre à jour la matrice de base B en remplaçant a_r par a_k et passer à l'étape 1.

3.4.6 Organigramme de l'algorithme du simplexe flou d'un problème de PLNFT (maximisation)

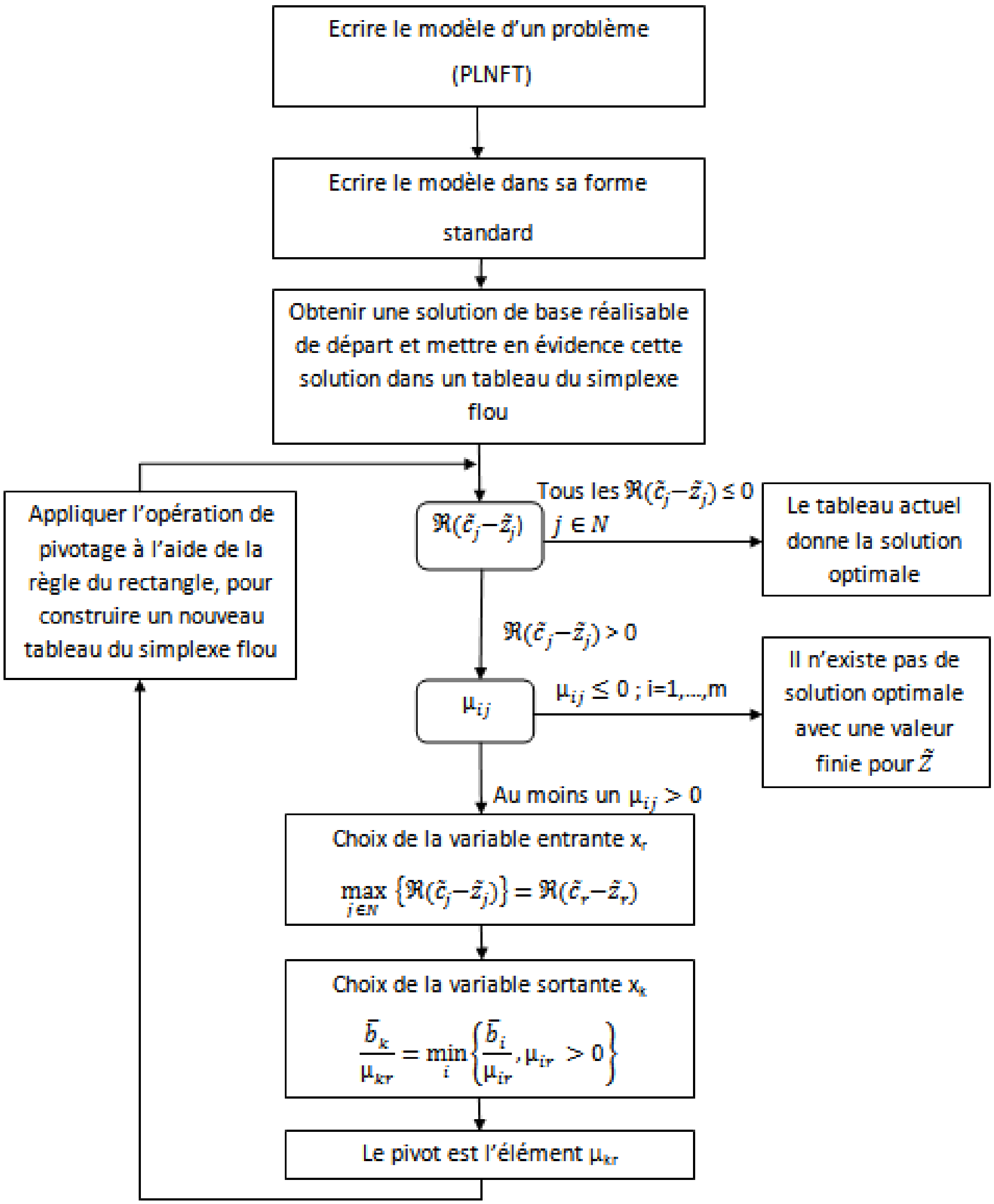

Figure 1 : Organigramme de l'algorithme du simplexe flou pour un problème de PLNFT

3.4.7 Exemple numérique pour résoudre un problème de PLNFT

Résoudre le problème de programmation linéaire en nombres flous trapézoïdaux (PLNFT) suivant en utilisant la méthode du simplexe flou.

$$\begin{cases} max\ \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} (1,3,1,1)\, x_1 + (2,1,1,1)\, x_2 \\ s.c \\ \qquad x_1 + x_2 \leq 8 \\ \qquad 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

Le modèle sous sa forme standard s'écrit :

$$\begin{cases} max\ \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} (1,3,1,1)\, x_1 + (2,1,1,1)\, x_2 \\ s.c \\ \qquad x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 8 \\ \qquad 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 10 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

On obtient alors un système d'équations comportant $n = 4$ inconnues et $m = 2$ contraintes.

On obtient une solution de base en annulant $(4-2) = 2$ variables. On assure une solution de base réalisable en annulant les variables x_1 et x_2 :

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 8,\ x_4 = 10.$$

C'est la solution de base réalisable de départ qui est mise en évidence dans le tableau 1 du simplexe.

Tableau 1−Solution de départ

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	$S.B.R$
$\Re\left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right)$	4	3	0	0	0
$\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j$	$(1,3,1,1)$	$(2,1,1,1)$	$\widetilde{0}$	$\widetilde{0}$	$\widetilde{0}$
x_3	1	1	1	0	8
x_4	2	1	0	1	10

Les variables hors base sont x_1 et x_2.

On applique les critères d'entrée et de sortie d'une variable :

$$\begin{aligned}
\underset{j\in N}{max}\{\Re\left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right) / \Re\left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right) > 0\} &= max\left\{\Re\left(\widetilde{c}_1 - \widetilde{z}_1\right), \Re\left(\widetilde{c}_2 - \widetilde{z}_2\right)\right\} \\
&= max\left\{4, 3\right\} = 4 \rightarrow \text{la variable entrante est } x_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0\right\} &= min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\mu_{i1}}, \mu_{i1} > 0\right\} \\
&= min\left\{8, \frac{10}{2}\right\} = 5 = \frac{\overline{b}_2}{\mu_{21}} \rightarrow \text{la variable sortante est } x_4.
\end{aligned}$$

La variable x_1 entre dans la base et sa valeur sera 5, la variable sortante est x_4 $(k = 2)$

En pivotant sur $\mu_{21} = 2$, on obtient le tableau 2 suivant :

Tableau 2

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	$S.B.R$
$\Re\left(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j\right)$	0	1	0	-2	20
$\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j$	$\widetilde{0}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\widetilde{0}$	$\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$(5,15,5,5)$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	3
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5

Le tableau 2 n'est pas optimal puisque $\Re(\widetilde{c}_2 - \widetilde{z}_2) = 1 > 0$

On applique les critères d'entrée et de sortie d'une variable

$$\Re(\widetilde{c}_r - \widetilde{z}_r) = max\{\Re(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j) \,/\, \Re(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j) > 0\}$$
$$= 1 \rightarrow \text{la variable entrante est } x_2$$

$$min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0\right\} = min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{i2}}, \mu_{i2} > 0\right\}$$
$$= min\{6, 10\} = 6 = \frac{\bar{b}_1}{\mu_{12}} \rightarrow \text{la variable sortante est } x_3$$

La variable x_2 entre dans la base et sa valeur sera 6, la variable sortante est x_3 $(k = 1)$ et le pivot est μ_{12}.

En pivotant sur $\mu_{12} = \frac{1}{2}$, on obtient le tableau 3 suivant :

Tableau 3

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	$S.B.R$
$\Re(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j)$	0	0	-2	-1	26
$\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j$	$\widetilde{0}$	$\widetilde{0}$	$(-1, -1, 3, 3)$	$(-1, 0, 2, 2)$	$(14, 12, 8, 8)$
x_2	0	1	2	-1	6
x_1	1	0	-1	1	2

$$\widetilde{\widetilde{Z}} \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B B^{-1} b \underset{\Re}{=} (14, 12, 8, 8)$$
$$\Re\left(\widetilde{\widetilde{Z}}\right) \underset{\Re}{=} 14 + 12 + \frac{1}{2}(8 - 8) = 26$$
$$\left(\widetilde{Y}_3, \widetilde{Y}_4\right) \underset{\Re}{=} (\widetilde{c}_E - \widetilde{z}_E) \underset{\Re}{=} ((-1, -1, 3, 3), (-1, 0, 2, 2)) \text{et } \widetilde{Y}_1 \underset{\Re}{=} \widetilde{0},\ \widetilde{Y}_2 \underset{\Re}{=} \widetilde{0}$$
$$(Y_3; Y_4) = \left(\Re\left(\widetilde{Y}_3\right), \Re\left(\widetilde{Y}_4\right)\right) = (-2, -1) < 0.$$

Comme $\Re(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j) < 0$ pour toutes les variables hors base alors la solution $x = (2, 6)^T$ est optimale et $\widetilde{\widetilde{Z}} \underset{\Re}{=} (14, 12, 8, 8)$ avec $\Re\left(\widetilde{\widetilde{Z}}\right) = 26$

3.5 Cas où les coefficients $\widetilde{c}$, $\widetilde{A}$ et $\widetilde{b}$ sont flous trapézoïdaux

Un problème de programmation linéaire en nombres flous trapézoïdaux dans le cas où le vecteur des coûts $\widetilde{c}$, la matrice des conditions $\widetilde{A}$ et le vecteur des contraintes $\widetilde{b}$ sont des nombres flous trapézoïdaux [7] est défini comme suit :

$$\left(P_{\widetilde{c},\widetilde{A},\widetilde{b}}\right)\begin{cases} max\ \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_j x_j \\ s.c \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} x_j \underset{\Re}{\leq} \widetilde{b}_i \quad i=1,\ldots,m \\ \\ \qquad\quad x_j \geq 0 \qquad j=1,\ldots,n \end{cases} \tag{3.22}$$

où

$\widetilde{a}_{ij} = \left(a_{ij}^L, a_{ij}^U, \alpha_{ij}, \beta_{ij}\right) \in F(\mathbb{R})$, $\widetilde{b}_i = \left(b_i^L, b_i^U, \alpha_j, \beta_j\right) \in F(\mathbb{R})$ et $\widetilde{c}_j = \left(c_j^U, c_j^L, w_j, \eta_j\right) \in F(\mathbb{R})$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$.

Théorème 3.3.

Le problème $\left(P_{\widetilde{c},\widetilde{A},\widetilde{b}}\right)$ et le problème suivant sont équivalents

$$\left(P_{\widetilde{c}}\right)\begin{cases} max\ \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_j x_j \\ s.c \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=1,\ldots,m \\ \\ \qquad\quad x_j \geq 0 \qquad j=1,\ldots,n \end{cases} \tag{3.23}$$

Preuve [7]

Soient Q_1 et Q_2 les ensembles de solutions réalisables des problèmes $\left(P_{\widetilde{c},\widetilde{A},\widetilde{b}}\right)$ et $\left(P_{\widetilde{c}}\right)$ respectivement.

Montrons que $Q_1 = Q_2$.

Soit $x \epsilon Q_1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} \cdot x_j \underset{\Re}{\leq} \widetilde{b}_i, \quad i = 1, \ldots, m$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}^L, a_{ij}^U, \alpha_{ij}, \beta_{ij}\right) \cdot x_j \underset{\Re}{\leq} \left(b_i^L, b_i^U, \alpha_i, \beta_i\right), \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_{ij}^L, \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_{ij}^U, \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \alpha_{ij}, \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \beta_{ij} \right\} \underset{\Re}{\leq} \left(b_i^L, b_i^U, \alpha_i, \beta_i\right), \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\Leftrightarrow \Re \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_{ij}^L, \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_{ij}^U, \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \alpha_{ij}, \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \beta_{ij} \right\} \leq \Re \left(b_i^L, b_i^U, \alpha_i, \beta_i\right), \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \left\{ a_{ij}^L + a_{ij}^U + \frac{1}{2} (\beta_{ij} - \alpha_{ij}) \right\} x_j \leq b_i^L + b_i^U + \frac{1}{2} (\beta_i - \alpha_i), \quad i = 1, \ldots, m.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

$\Leftrightarrow x \epsilon Q_2$ donc $Q_1 = Q_2$.

Comme $Q_1 = Q_2$ et que toute solution réalisable optimale de $\left(P_{\widetilde{c}, \widetilde{A}, \widetilde{b}}\right)$ est solution réalisable optimale de $(P_{\widetilde{c}})$ donc on conclut que les deux problèmes sont équivalents.

Remarque 3.4.

La réalisation du problème obtenu $(P_{\widetilde{c}})$ se fera par le simplexe flou (voir le premier cas).

3.5.1 Exemple numérique

Résoudre le problème de programmation linéaire floue à coefficients trapézoïdaux suivant :

$$(P_1) \begin{cases} max \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} (5, 8, 2, 5)\, x_1 + (6, 10, 2, 6)\, x_2 \\ s.c \\ \quad (1, 1, 3, 3)\, x_1 + (2, 1, 1, 1)\, x_2 \underset{\Re}{\leq} (3, 2, 1, 3) \\ \quad (2, 2, 2, 4)\, x_1 + (2, 1, 1, 3)\, x_2 \underset{\Re}{\leq} (6, 4, 5, 5) \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

Son problème équivalent obtenu en appliquant la fonction Ranking $\Re$ et les opérations sur les nombres flous trapézoïdaux s'écrit :

$$\begin{cases} max\ \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} (5,8,2,5)\, x_1 + (6,10,2,6)\, x_2 \\ s.c \\ \qquad 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ \qquad 5x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ \qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

Le modèle sous sa forme standard s'écrit :

$$(P_1') \begin{cases} max\ \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} (5,8,2,5)\, x_1 + (6,10,2,6)\, x_2 \\ s.c \\ \qquad 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 6 \\ \qquad 5x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 = 10 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3; x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

La résolution de (P_1') est donnée sous forme du tableau simplexe flou.

On obtient alors un système d'équations comportant $n = 4$ inconnues et $m = 2$ contraintes.

On obtient une solution de base en annulant $(4-2) = 2$ variables. On assure une solution de base réalisable en annulant les variables x_1 et x_2 :

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 6,\ x_4 = 10.$$

C'est la solution de base réalisable de départ qui est mise en évidence dans le tableau 1 du simplexe suivant :

Tableau 1−Solution de départ

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	$S.B.R$
$\Re(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j)$	14.5	18	0	0	0
$\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j$	$(5,8,2,5)$	$(6,10,2,6)$	$\widetilde{0}$	$\widetilde{0}$	$\widetilde{0}$
x_3	2	3	1	0	6
x_4	5	4	0	1	10

Les variables hors base sont x_1 et x_2.

On applique les critères d'entrée et de sortie d'une variable :

$$\begin{aligned}\underset{j\in N}{max}\{\Re(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j) \,/\, \Re(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j) > 0\} &= \underset{J\in N}{max}\{\Re(\widetilde{c}_1 - \widetilde{z}_1), \Re(\widetilde{c}_2 - \widetilde{z}_2)\} \\ &= \underset{j\in N}{max}\{14.5, 18\} = 18 \rightarrow \text{la variable entrante est } x_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0\right\} &= min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{i2}}, \mu_{i2} > 0\right\} \\ &= min\left\{\frac{6}{3}, \frac{10}{4}\right\} = 2 = \frac{\bar{b}_1}{\mu_{12}} \rightarrow \text{la variable sortante est } x_3\end{aligned}$$

La variable x_2 entre dans la base et sa valeur est 2, la variable sortante est x_3 $(k = 1)$

En pivotant sur $\mu_{12} = 3$, on obtient le tableau 2 suivant

Tableau 2

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	$S.B.R$
$\Re(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j)$	2.5	0	-6	0	36
$\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j$	$\left(\frac{-5}{3}, 4, 6, \frac{19}{3}\right)$	$\widetilde{0}$	$\left(\frac{-10}{3}, -2, 2, \frac{2}{3}\right)$	$\widetilde{0}$	$(12,20,4,12)$
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	2
x_4	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{-4}{3}$	1	2

Le tableau 2 n'est pas optimal puisque $\Re(\widetilde{c}_1 - \widetilde{z}_1) = 2.5 > 0$

On applique les critères d'entrée et de sortie d'une variable :

$$\begin{aligned}\Re(\widetilde{c}_r - \widetilde{z}_r) &= \max_{j\in N}\{\Re(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j) \,/\, \Re(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j) > 0\} \\ &= 2.5 \rightarrow \text{la variable entrante est } x_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0\right\} &= min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\mu_{i1}}, \mu_{i1} > 0\right\} \\ &= min\left\{\frac{6}{2}, \frac{6}{7}\right\} = \frac{6}{7} = \frac{\bar{b}_2}{\mu_{21}} \rightarrow \text{la variable sortante est } x_4\end{aligned}$$

La variable x_1 entre dans la base et sa valeur est $\frac{6}{7}$, la variable sortante est x_4 $(k = 2)$ et le pivot est μ_{21}.

En pivotant sur $\mu_{21} = \frac{7}{3}$, on obtient le tableau 3 suivant :

Tableau 3

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	$S.B.R$
$\Re(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j)$	0	0	$\frac{-32}{7}$	$\frac{-15}{14}$	$\frac{267}{7}$
$\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j$	$\widetilde{0}$	$\widetilde{0}$	$\left(\frac{-30}{7}, \frac{2}{7}, \frac{38}{7}, \frac{30}{7}\right)$	$\left(\frac{-12}{7}, \frac{5}{7}, \frac{19}{7}, \frac{18}{7}\right)$	$\left(\frac{90}{7}, \frac{148}{7}, \frac{32}{7}, \frac{90}{7}\right)$
x_2	0	1	$\frac{5}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{10}{7}$
x_1	1	0	$\frac{-4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$

$$\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{c}_B B^{-1} b$$

$$\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} (5, 8, 2, 5)\, x_1 + (6, 10, 2, 6)\, x_2 \underset{\Re}{=} (5, 8, 2, 5)\, \frac{6}{7} + (6, 10, 2, 6)\, \frac{10}{7}$$

$$\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \left(\frac{30}{7}, \frac{48}{7}, \frac{12}{7}, \frac{30}{7}\right) + \left(\frac{60}{7}, \frac{100}{7}, \frac{20}{7}, \frac{60}{7}\right) \underset{\Re}{=} \left(\frac{30}{7} + \frac{60}{7}, \frac{48}{7} + \frac{100}{7}, \frac{12}{7} + \frac{20}{7}, \frac{30}{7} + \frac{60}{7}\right)$$

$$\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \left(\frac{90}{7}, \frac{148}{7}, \frac{32}{7}, \frac{90}{7}\right)$$

$\Re\left(\widetilde{\widetilde{Z}}\right) = \frac{90}{7} + \frac{148}{7} + \frac{1}{2}\left(\frac{90}{7} - \frac{32}{7}\right) = \frac{267}{7}$

$\left(\widetilde{Y}_3, \widetilde{Y}_4\right) \underset{\Re}{=} (\widetilde{c}_E - \widetilde{z}_E) \underset{\Re}{=} \left(\left(\frac{-30}{7}, \frac{2}{7}, \frac{38}{7}, \frac{30}{7}\right), \left(\frac{-12}{7}, \frac{5}{7}, \frac{18}{7}, \frac{19}{7}\right)\right)$

$(Y_3; Y_4) = \left(\Re\left(\widetilde{Y}_3\right), \Re\left(\widetilde{Y}_4\right)\right) = \left(\frac{-32}{7}, \frac{-15}{7}\right) < (0,0)$ et $\widetilde{Y}_1 \underset{\Re}{=} \widetilde{0}$, $\widetilde{Y}_2 \underset{\Re}{=} \widetilde{0}$.

Comme $\Re(\widetilde{c}_j - \widetilde{z}_j) < 0$ pour toutes les variables hors base, la solution optimale obtenue par la méthode du simplexe flou du problème initial (P_1) est $x = \left(\frac{6}{7}, \frac{10}{7}\right)$ et la valeur de la fonction objectif optimale floue est $\widetilde{\widetilde{Z}} \underset{\Re}{=} c_B B^{-1} a_j \underset{\Re}{=} \left(\frac{90}{7}, \frac{148}{7}, \frac{32}{7}, \frac{90}{7}\right)$ avec $\Re\left(\widetilde{\widetilde{Z}}\right) = \frac{267}{7}$.

3.6 Cas où les coefficient $\widetilde{b}$ et $\widetilde{x}$ sont flous trapézoïdaux

Un problème de programmation linéaire à variables flous trapézoïdales (PLVFT), dans le cas où le vecteur des contraintes $\widetilde{b}$ et le vecteur de décision $\widetilde{x}$ sont des nombres flous trapézoïdaux [1,11], est défini comme suit :

$$\left(P_{\widetilde{b},\widetilde{x}}\right)\begin{cases} max\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} c^T\widetilde{x} \\ s.c \\ \quad A\widetilde{x} \underset{\Re}{=} \widetilde{b} \\ \quad \widetilde{x} \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0} \end{cases} \tag{3.27}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\widetilde{b} \in F(\mathbb{R})$, $c^T \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{x} \in F(\mathbb{R})$ et $\Re$ est une fonction Ranking linéaire.

Définition 3.8. *Solution réalisable floue* [11]

On dit qu'un vecteur flou $\widetilde{x} \in (F(\mathbb{R}))^n$ est une solution réalisable floue pour $\left(P_{\widetilde{b},\widetilde{x}}\right)$ si et seulement si $\widetilde{x}$ satisfait les contraintes du problème c'est à dire $A\widetilde{x} \underset{\Re}{=} \widetilde{b}$ et $\widetilde{x} \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0}$.

Définition 3.9. *Solution optimale floue* [11]

Une solution réalisable floue $\widetilde{x}^\star$ est une solution optimale floue pour $\left(P_{\widetilde{b},\widetilde{x}}\right)$ si pour toute solution réalisable floue $\widetilde{x}$, on a $c\widetilde{x}^\star \underset{\Re}{\geq} c\widetilde{x}$.

3.6.1 Solution de base réalisable floue

Nous introduisons la définition d'une solution de base réalisable floue pour un problème de programmation linéaire à variables flous $\left(P_{\widetilde{b},\widetilde{x}}\right)$. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} A\widetilde{x} \underset{\Re}{=} \widetilde{b} \\ \widetilde{x} \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0} \end{cases} \tag{3.28}$$

Hypothèse :

On suppose que le $rang\,(A) = m$.

Définition 3.11. *Ensemble des indices de base*

Soit $R \subset \{1, \ldots, n\}$ un ensemble d'indices avec $card\,(R) = m$ tel que les colonnes a_j $(j \in R)$ de A sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée B, formée des colonnes a_j $(j \in R)$, est inversible. On dit alors que l'ensemble R des indices est une base.

- Les variables $\widetilde{x}_B = (\widetilde{x}_j,\ j \in R)$ sont appelées variables de base floues.
- Les variables $\widetilde{x}_E = (\widetilde{x}_j,\ j \notin R)$ sont appelées variables hors-base floues.

Remarque 3.2.

On peut toujours écrire les décompositions par blocs suivantes :

- $A = (B, E)$ où B est appelée une matrice de base et E une matrice hors base
- $\widetilde{x} \underset{\Re}{=} (\widetilde{x}_B, \widetilde{x}_E)^T$ où $\widetilde{x}_B$ représente les variables de base floues et $\widetilde{x}_E$ représente les variables hors base floues

Définition 3.12. *Solution de base réalisable floue* [1]

On dit que $\widetilde{x} \underset{\Re}{=} (\widetilde{x}_B, \widetilde{x}_E)^T$ est une solution de base floue si elle vérifie

$$A\widetilde{x} \underset{\Re}{=} \widetilde{b} \text{ avec } \widetilde{x}_B \underset{\Re}{=} (\widetilde{x}_{B_1}, \ldots, \widetilde{x}_{B_m}) \underset{\Re}{=} B^{-1}\widetilde{b} \text{ et } \widetilde{x}_E \underset{\Re}{=} \widetilde{0}.$$

Si, en plus, $\widetilde{x}_B \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0}$ alors $\widetilde{x}$ est une solution de base réalisable floue.

Définition 3.13. *Solution floue dégénérée et floue non dégénérée* [11]

Une solution de base réalisable floue $\widetilde{x}$ est dite non dégénérée si $\widetilde{x}_B \underset{\Re}{>} \widetilde{0}$.

Si au moins une composante $\widetilde{x}_B \underset{\Re}{=} \widetilde{0}$ alors le vecteur $\widetilde{x}$ est appelé une solution de base réalisable floue dégénérée.

3.7 Méthode du simplexe flou d'un problème de PLVFT

On dispose d'une solution de base réalisable flou $\widetilde{x}$ d'un programme linéaire sous forme standard. La matrice A peut s'écrire

$$A = (B, E)$$

avec B est une matrice carrée de taille $m \times m$, inversible, correspondante aux variables de base floues et E une matrice de taille $m \times (n - m)$, correspondante aux variables hors-base floues. On décompose également le vecteur de décision

$$\widetilde{x} \underset{\Re}{=} (\widetilde{x}_B, \widetilde{x}_E)$$

avec $\widetilde{x}_B$ les variables de base floues et $\widetilde{x}_E$ les variables hors base floues.

Le but est de trouver une autre base $R^\star$ et une solution de base floue $\widetilde{x}^\star$ associée telles que :

$$\widetilde{Z}(\widetilde{x}^\star) \underset{\Re}{>} \widetilde{Z}(\widetilde{x}) \qquad (\widetilde{x}^\star \text{ est meilleur que } \widetilde{x}).$$

La méthode du simplexe floue consiste à faire rentrer une variable hors-base floue dans la nouvelle base $(variable\, entrante)$ et faire sortir à la place une variable de base floue $(variabe\, sortante)$.

3.7.1 Détermination d'une première solution

Considérons le problème de programmation linéaire floue sous forme standard suivant :

$$\begin{cases} max \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} c^T \widetilde{x} \\ s.c \\ \quad A\widetilde{x} \underset{\Re}{=} \widetilde{b} \\ \quad \widetilde{x} \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0} \end{cases} \tag{3.29}$$

où A est une matrice de dimension $m \times n$, $\widetilde{b} \in (F(\mathbb{R}))^m$.

On peut construire à partir de la matrice A, deux sous matrices, $A = (B, E)$.

De même le vecteur $\widetilde{x}$ $(vecteur\, de\, décision)$ est décomposé comme suit : $\widetilde{x} \underset{\Re}{=} \begin{bmatrix} \widetilde{x}_B \\ \widetilde{x}_E \end{bmatrix}$

où $\quad \widetilde{x}_B \underset{\Re}{=} \begin{bmatrix} \widetilde{x}_{B_1} \\ \widetilde{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \widetilde{x}_{B_m} \end{bmatrix}$ et $\widetilde{x}_E$ pour les $(n-m)$ variables restantes.

L'expression $A\widetilde{x} \underset{\Re}{=} \widetilde{b}$ peut alors s'écrire :

$$A\widetilde{x} \underset{\Re}{=} (B, E) \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{x}_B \\ \widetilde{x}_E \end{bmatrix} \underset{\Re}{=} \widetilde{b}$$

$$\Rightarrow \; A\widetilde{x} \underset{\Re}{=} B\widetilde{x}_B + E\widetilde{x}_E \underset{\Re}{=} \widetilde{b} \tag{3.30}$$

Multiplions l'expression par B^{-1}, l'inverse de B.

On obtient

$$B^{-1}B\widetilde{x}_B + B^{-1}E\widetilde{x}_E \underset{\Re}{=} B^{-1}\widetilde{b}$$

avec $B^{-1} \cdot B = I$ (identité d'ordre m) d'où

$$\widetilde{x}_B + B^{-1}E\widetilde{x}_E \underset{\Re}{=} B^{-1}\widetilde{b}$$

En annulant $\widetilde{x}_E$, la solution de base est alors

$$\widetilde{x}_B \underset{\Re}{=} B^{-1}\widetilde{b} \tag{3.31}$$

On obtient une solution de base réalisable floue de départ si $\widetilde{x}_B \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0}$ (la matrice B est toujours constituée à partir des colonnes de la matrice A).

3.7.2 Amélioration d'une solution de base floue

À partir d'une solution de base réalisable floue, on obtient une nouvelle solution de base réalisable floue adjacente (meilleure ou aussi bonne) en transformant une variable hors-base floue en variable de base floue (dite variable entrante) et en même temps, rendre une variable de base floue actuelle en variable hors-base floue (dite variable sortante). Cette opération algébrique permet d'obtenir une nouvelle solution réalisable floue.

• **Détermination de la variable entrante**

. **Calcul des coûts réduits**

Formalisons l'expression de $\widetilde{Z}$ pour mieux définir le critère requis pour sélectionner la variable qui deviendra une variable de base floue. Nous savons que

$$A\widetilde{x} \underset{\Re}{=} B\widetilde{x}_B + E\widetilde{x}_E \underset{\Re}{=} \widetilde{b}$$

avec B qui est inversible donc

$$\widetilde{x}_B + B^{-1}E\widetilde{x}_E \underset{\Re}{=} B^{-1}\widetilde{b} \tag{3.32}$$

Alors

$$\widetilde{x}_B \underset{\Re}{=} B^{-1}\widetilde{b} - B^{-1}E\widetilde{x}_E \tag{3.33}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \widetilde{Z} &\underset{\Re}{=} c\widetilde{x} \underset{\Re}{=} c_B\widetilde{x}_B + c_E\widetilde{x}_E \\ \Rightarrow \quad \widetilde{Z} &\underset{\Re}{=} c_B\left(B^{-1}\cdot\widetilde{b} - B^{-1}E\widetilde{x}_E\right) + c_E\widetilde{x}_E \\ \Rightarrow \quad \widetilde{Z} &\underset{\Re}{=} c_BB^{-1}\widetilde{b} + (c_E - c_BB^{-1}E)\widetilde{x}_E \end{aligned}$$

Or $\widetilde{x}_0 \underset{\Re}{=} (\widetilde{x}_B, \widetilde{x}_E)$ où $\widetilde{x}_B \underset{\Re}{=} B^{-1}\widetilde{b}$ $\left(car\ \widetilde{x}_E \underset{\Re}{=} \widetilde{0}\right)$

$$\widetilde{Z}_0 \underset{\Re}{=} c_B\widetilde{x}_B \underset{\Re}{=} c_BB^{-1}\widetilde{b}$$

Donc

$$\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{Z}_0 + \left(c_E - c_BB^{-1}E\right)\widetilde{x}_E \tag{3.34}$$

L'expression matricielle $B^{-1}E$ peut s'écrire alors

$$B^{-1}E = \sum_{j\in N} B^{-1}a_j \tag{3.35}$$

Cette dernière expression peut s'écrire :

$$\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{Z}_0 + \sum_{j \in N} c_j \widetilde{x}_j - \sum_{j \in N} c_B B^{-1} a_j \widetilde{x}_j$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{Z}_0 + \sum_{j \in N} (c_j - c_B B^{-1} a_j) \widetilde{x}_j$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{Z}_0 + \sum_{j \in N} (c_j - z_j) \widetilde{x}_j \tag{3.36}$$

Le vecteur

$$Y_E = c_E - c_B B^{-1} E$$

qui se compose de

$$Y_j = c_j - z_j \tag{3.37}$$

s'appelle vecteur des coûts réduits.

$z_j = c_B B^{-1} a_j$ et c_j sont les coefficients de la fonction objectif des variables hors base floues.

Notons par $\mu_j = B^{-1} a_j$ (ces vecteurs μ_j, qui seront les nouveaux éléments sous les variables $\widetilde{x}_j$ dans le tableau du simplexe flou, étaient dans le tableau de départ les a_j associés aux contraintes originales du modèle).

— Si les coûts réduits sont tous négatifs, c'est-à-dire $Y_j = c_j - z_j \leq 0$ (pour toutes les variables hors base floues), il n'est alors pas possible d'augmenter la fonction objectif $\widetilde{Z}$. Dans ce cas, l'algorithme se termine et la solution de base réalisable floue obtenue est *optimale*.

— Dans le cas contraire s'il existe $j \in N$ tel que $Y_j = c_j - z_j > 0$, on a intérêt à faire entrer dans la base la variable qui a le coût réduit *positif le plus grand possible*.

Pour introduire une variable dans la base, quelque soit l'optimisation (maximisation ou minimisation), on applique le critère suivant :

▶ **Critère d'entrée d'une variable dans la base [1,11]**

À partir d'une solution de base réalisable floue, on calcule, pour toutes les variables hors base floues, la quantité $z_j = c_B B^{-1} a_j = c_B \mu_j$, puis les $c_j - z_j$.

. **Maximisation.** La variable $\widetilde{x}_r$ est introduite dans la base si $c_r - z_r$ correspond à la valeur algébrique la plus élevée parmi tous les $c_j - z_j$, c'est à dire

$$c_r - z_r = \underset{j \in N}{max}\{c - z_j,\ / c_j - z_j > 0\}\,.$$

. **Minimisation.** Dans ce cas, la variable $\widetilde{x}_r$ est introduite dans la base si $c_r - z_r$ correspond à la valeur algébrique la moins élevée parmi tous les $c_j - z_j$, c'est à dire

$$c_r - z_r = \underset{j \in N}{min}\{c_j - z_j,\ / c_j - z_j < 0\}\,.$$

Remarque 3.4.

a) Les $c_j - z_j = 0$ pour toutes les variables de base floue.
En effet, $z_j = c_B B^{-1} a_j = c_B \mu_j = c_j$, le vecteur μ_j étant alors un vecteur identité.

b) La valeur de $\widetilde{x}_r$ est déterminée selon la règle de sortie d'une variable de la base floue que nous traitons ci-après.

• **Détermination de la variable sortante**

Une fois que la variable $\widetilde{x}_r$ est choisie, il faut déterminer quelle variable doit quitter la base. En maintenant la relation $A\widetilde{x} \underset{\Re}{=} \widetilde{b}$, on augmente $\widetilde{x}_r$ jusqu'à annuler une variable de base floue. Cette variable sera alors *la variable sortante*.

$$A\widetilde{x} \underset{\Re}{=} \widetilde{b} \Leftrightarrow B\widetilde{x}_B + E\widetilde{x}_E \underset{\Re}{=} \widetilde{b}$$

La solution de base floue $\widetilde{x}_B$ sera modifiée selon l'expression

$$\widetilde{x}_B \underset{\Re}{=} B^{-1}\widetilde{b} - B^{-1}E\widetilde{x}_E$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{x}_B \underset{\Re}{=} B^{-1}\widetilde{b} - B^{-1}a_r\widetilde{x}_r$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{x}_B \underset{\Re}{=} \widetilde{\overline{b}} - \mu_r\widetilde{x}_r \tag{3.38}$$

où $\widetilde{\overline{b}} \underset{\Re}{=} B^{-1}\widetilde{b}$ et $\mu_r = B^{-1}a_r$ (les éléments du tableau sous le vecteur a_r).

Il faut que $\widetilde{x}_{\mathbf{B_i}} \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0}$ $(i = 1, \ldots, m)$ pour que la nouvelle solution de base floue soit réalisable, c'est-à-dire

$$\widetilde{x}_{B_1} \underset{\Re}{=} \widetilde{\overline{b}}_1 - \mu_{1r}\widetilde{x}_r \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0}$$

$$\widetilde{x}_{B_2} \underset{\Re}{=} \widetilde{\overline{b}}_2 - \mu_{2r}\widetilde{x}_r \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0}$$

$$\vdots$$

$$\widetilde{x}_{B_k} \underset{\Re}{=} \widetilde{\overline{b}}_k - \mu_{kr}\widetilde{x}_r \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0}$$

$$\vdots$$

$$\widetilde{x}_{B_m} \underset{\Re}{=} \widetilde{\overline{b}}_m - \mu_{mr}\widetilde{x}_r \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0}$$

Discutons sur le signe de $\mu_{ir} = B^{-1}a_{ir}$.

— Si $\mu_{ir} \leq 0$, alors $\mu_{ir}\widetilde{x}_r$ sera négative et $\widetilde{x}_{B_i}$ augmentera à mesure que $\widetilde{x}_r$ augmentera. Donc on peut augmenter $\widetilde{x}_r$ autant qu'on veut, on aura toujours la positivité de la variable de base floue $\widetilde{x}_{\mathbf{B_i}}$. Dans ce cas, la solution est non bornée ; en effet, en faisant tendre $\widetilde{x}_r$ vers l'infini, $\widetilde{Z}$ tend vers l'infini et l'algorithme s'arrête.

— Si $\mu_{ir} > 0$, alors $\mu_{ir}\widetilde{x}_r$ sera une quantité positive et $\widetilde{x}_{B_i}$ réduira à mesure que $\widetilde{x}_r$ augmentera. Pour assurer et maintenir une solution réalisable floue, $\widetilde{x}_r$ s'arrête d'augmenter aussitôt qu'une variable dans la base actuelle devient nulle.

Pour avoir la positivité de $\widetilde{x}_{B_i}$ pour tout i ($i = 1, \ldots, m$) on choisit la variable sortante pour laquelle le rapport $\dfrac{\overline{b_i}}{\mu_{ir}}$ est le plus petit possible, supposons que ce minimum s'obtient à $i = k$. Le critère de sortie d'une variable de la base floue s'énonce alors comme suit :

▶ **Critère de sortie d'une variable de base** [1,11]

Sachant que $\overline{b}_i = \Re\left(\widetilde{\overline{b}}_i\right)$ et la variable entrante dans la base est $\widetilde{x}_r$, la variable $\widetilde{x}_k$ sort de la base d'après :

$$\frac{\overline{b_k}}{\mu_{kr}} = \underset{1 \leq i \leq m}{min} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\mu_{ir}},\ \mu_{ir} > 0 \right\} \tag{3.39}$$

La nouvelle valeur de la variable de base floue est $\widetilde{x}_r \underset{\Re}{=} \dfrac{\widetilde{\overline{b}}_k}{\mu_{kr}}$ pour $i = k$.

Le terme μ_{kr} est appelé le pivot et sert à effectuer l'opération de pivotage pour déterminer la nouvelle solution réalisable de base floue.

Soit $R^\star$ la nouvelle base obtenue et $\widetilde{x}^\star$ sa solution de base floue associée alors la nouvelle valeur de la fonction objectif floue sera donnée par :

$$\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{Z}_0 + (c_r - z_r)\,\widetilde{x}_r$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} \widetilde{Z}_0 + (c_r - z_r)\,\frac{\widetilde{\overline{b}}_k}{\mu_{kr}} \tag{3.40}$$

et en considérant que la solution n'est pas dégénérée $\left(\widetilde{\overline{b}}_k \underset{\Re}{>} \widetilde{0}\right)$ et puisque $c_r - z_r > 0$ (problème de maximisation), la valeur numérique de la fonction objectif floue s'est améliorée c'est-à-dire

$$\widetilde{Z} \underset{\Re}{>} \widetilde{Z}_0$$

On poursuit ces étapes ainsi jusqu'à ce qu'on ne puisse plus obtenir de solution de base réalisable floue qui améliore $\widetilde{Z}$. La dernière solution de base réalisable floue obtenue constitue la solution optimale floue au programme linéaire floue.

Remarque 3.5.

Absence de solutions optimales finies

Il n'existe pas de solution optimale avec une valeur finie pour $\widetilde{Z}$ si :

- Pour une maximisation, s'il existe $c_j - z_j > 0$ pour une variable hors base floue $\widetilde{x}_j$ et tous les $\mu_{ij} \leq 0$, dans ce cas, $\widetilde{Z} \rightarrow +\infty$

- Pour une minimisation, s'il existe $c_j - z_j < 0$ pour une variable hors base floue $\widetilde{x}_j$ et tous les $\mu_{ij} \leq 0$, dans ce cas $\widetilde{Z} \rightarrow -\infty$

3.7.3 Critère d'optimalité

. Cas d'une maximisation [11] : Une solution de base réalisable floue est optimale si pour toutes les variables hors base floue. On a

$$c_j - z_j \leq 0 \tag{3.41}$$

. Cas d'une minimisation : Une solution de base réalisable floue est optimale si pour toutes les variables hors base floue. On a

$$c_j - z_j \geq 0 \tag{3.42}$$

3.7.4 Tableau du simplexe flou pour un problème de PLVFT

La méthode de simplexe flou sous la forme du tableau.

On considère le problème de PLVFT défini comme

$$\begin{cases} max & \widetilde{Z} \underset{\Re}{=} c_B \widetilde{x}_B + c_E \widetilde{x}_E \\ s.c & \\ & B\widetilde{x}_B + E\widetilde{x}_E \underset{\Re}{=} \widetilde{b} \\ & \widetilde{x}_B, \widetilde{x}_E \underset{\Re}{\geq} 0 \end{cases} \tag{3.43}$$

Alors, il est possible d'écrire

$$\widetilde{x}_B \underset{\Re}{=} B^{-1}\widetilde{b} - B^{-1}E\widetilde{x}_E \ \text{ où } \ \widetilde{x}_B + B^{-1}E\widetilde{x}_E \underset{\Re}{=} B^{-1}\widetilde{b}.$$

D'où la fonction objectif floue

$$\widetilde{Z} - (c_E - c_B B^{-1}E)\,\widetilde{x}_E \underset{\Re}{=} c_B B^{-1}\widetilde{b}.$$

Actuellement, $\widetilde{x}_E \underset{\Re}{=} \widetilde{0}$ puis alors $\widetilde{x}_B \underset{\Re}{=} B^{-1}b$, donc $\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} c_B B^{-1}\widetilde{b}$.

Alors, on peut écrire le problème du (PLVFT), ci-dessus, sous la forme d'un tableau [11] comme suit :

Tableau 3

Base	$\widetilde{x}_B$	$\widetilde{x}_E$	$S.B.R$	$\Re\,(S.B.R)$
$c_j - z_j$	0	$c_E - c_B B^{-1}E$	$c_B B^{-1}\widetilde{b}$	$\Re\left(c_B B^{-1}\widetilde{b}\right)$
$\widetilde{x}_B$	I	$B^{-1}E$	$B^{-1}\widetilde{b}$	$\Re\left(B^{-1}\widetilde{b}\right)$

Le tableau, ci-dessus, nous donne toutes les informations dont on a besoin pour appliquer la méthode du simplexe flou.

La ligne des coûts flous dans le tableau ci-dessus est $(Y)_j$= $(c_j - c_B B^{-1} a_j)$= $c_j - z_j$ pour les variables hors base.

En fonction de la condition d'optimalité pour ces problèmes, on arrive à la solution optimale si :

$$Y_j = c_j - z_j \leq 0, \text{ pour toute } j \in N$$

3.7.5 Algorithme du simplexe flou d'un problème de PLVFT

Cas d'une fonction objectif à maximiser [1]

1. La solution de base réalisable floue initiale est donnée par $\widetilde{x}_B \underset{\Re}{=} B^{-1}\widetilde{b} \underset{\Re}{=} \widetilde{\overline{b}}$, $\widetilde{x}_E \underset{\Re}{=} \widetilde{0}$ et l'objectif flou $\widetilde{Z}_j \underset{\Re}{=} c_B B^{-1}\widetilde{b} \underset{\Re}{=} c_B\widetilde{\overline{b}}$.

2. Calculer $\overline{b} = \Re\left(\widetilde{\overline{b}}\right)$ et $Y_j = c_j - z_j = c_j - c_B B^{-1} a_j$ pour les variables hors base.
   Soit $Y_r = c_r - z_r = max\left\{c_j - z_j, \quad j \in N\right\}$

   - Si $c_r - z_r < 0$ alors stop ; la solution actuelle est optimale.
   - Sinon, on passe à l'étape 3.

3. Calculer $\mu_{ir} = B^{-1} a_{ir}$.

   - Si $\mu_{ir} \leq 0$, alors stop ; le problème a une solution infinie.
   - Sinon, déterminer la variable $\widetilde{x}_k$ qui va quitter la base de la manière suivante :

$$\frac{\overline{b}_k}{\mu_{kr}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\mu_{ir}},\ \mu_{ir} > 0 \right\}.$$

   Mettre à jour $\widetilde{\overline{b}}_i$ en le remplaçant par $(\widetilde{\overline{b}} - \dfrac{\widetilde{\overline{b}}_k}{\mu_{kr}}\ \mu_{ir})$, et par $\dfrac{\widetilde{\overline{b}}_k}{\mu_{kr}}$,pour $i \neq k$.

   Mettre à jour $\widetilde{Z}$ en le remplaçant par $\widetilde{z} + \dfrac{\widetilde{\overline{b}}_k}{\mu_{kr}}\ (c_r - z_r)$.

   Puis, mettre à jour B en remplaçant a_r par a_k et passer à l'étape (2).

3.7.6 Organigramme de l'algorithme du simplexe flou d'un problème de PLVFT (maximisation)

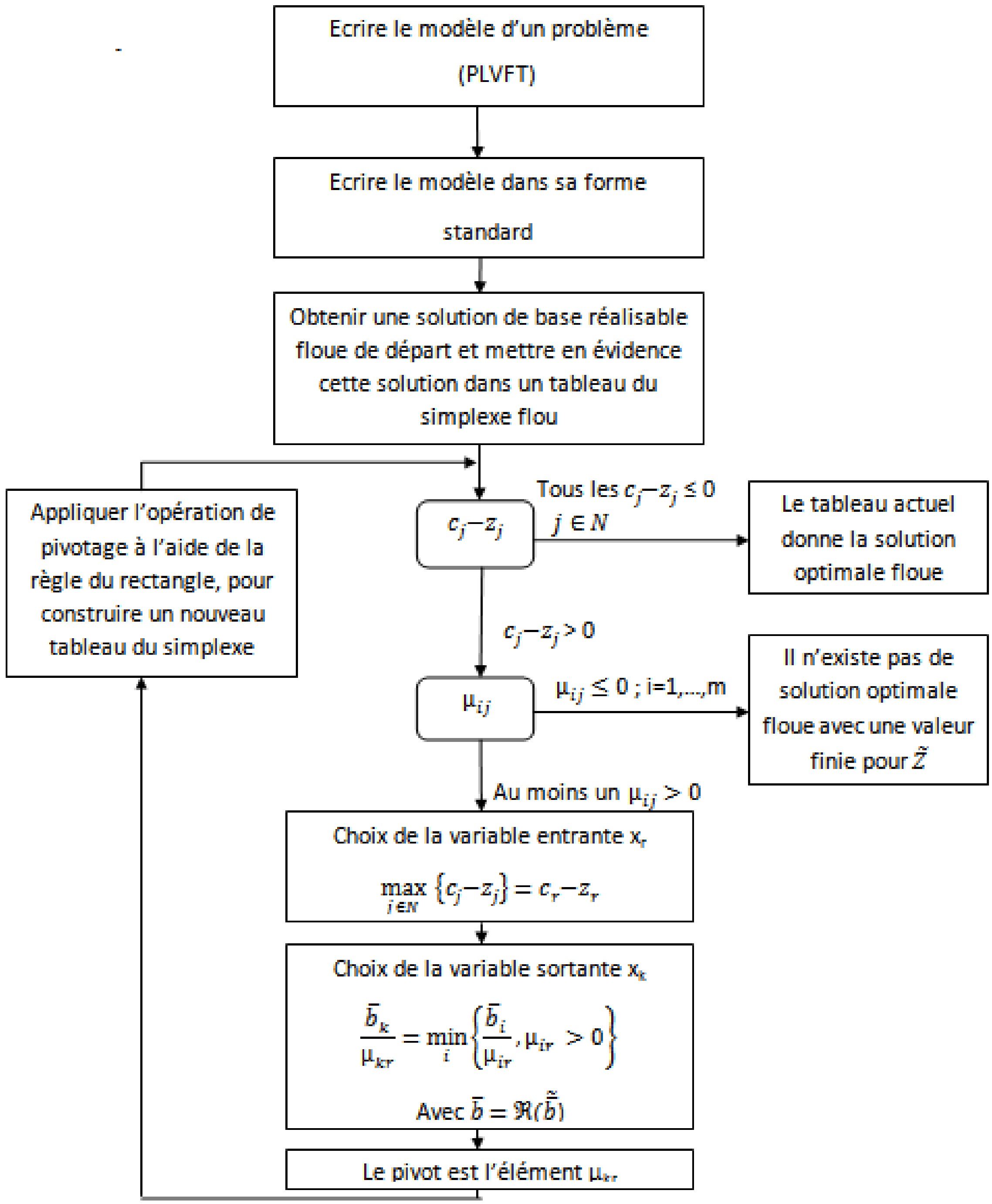

Figure 1 : Organigramme de l'algorithme du simplexe flou pour PLVFT

3.7.7 Exemple numérique pour résoudre un problème de PLVFT

Résolvons le problème de programmation linéaire en variables floues trapézoïdal (PLVFT) suivant en utilisant la méthode du simplexe flou.

$$\begin{cases} max\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} 3\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 \\ s.c \\ \quad \widetilde{x}_1 + 5\widetilde{x}_2 \underset{\Re}{\leq} (11, 8, 3, 1) \\ \quad \widetilde{x}_1 + 3\widetilde{x}_2 \underset{\Re}{\leq} (5, 10, 4, 3) \\ \qquad \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0} \end{cases} \tag{3.44}$$

Le modèle sous sa forme standard s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} max\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} 3\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 \\ s.c \\ \quad \widetilde{x}_1 + 5\widetilde{x}_2 + \widetilde{x}_3 \quad \underset{\Re}{=} (11, 8, 3, 1) \\ \quad \widetilde{x}_1 + 3\widetilde{x}_2 \qquad + \widetilde{x}_4 \underset{\Re}{=} (5, 10, 4, 3) \\ \qquad \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4 \underset{\Re}{\geq} \widetilde{0} \end{cases} \tag{3.45}$$

On obtient alors un système d'équations comportant $n = 4$ inconnues et $m = 2$ contraintes.

On obtient une solution de base en annulant $(4 - 2) = 2$ variables. On assure une solution de base réalisable floue en annulant les variables $\widetilde{x}_1$ et $\widetilde{x}_2$.

$$\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_2 = \widetilde{0},\ \widetilde{x}_3 = (11, 8, 3, 1),\ \widetilde{x}_4 = (5, 10, 4, 3)\,.$$

C'est la solution de base réalisable de départ qui est mise en évidence dans le tableau du simplexe suivant :

Tableau 1−Solution de départ

Base	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4$	S.B.R	$\Re\,(S.B.R)$
$c_j - z_j$	3	1	0	0	$\widetilde{0}$	0
$\widetilde{x}_3$	1	5	1	0	$(11, 8, 3, 1)$	18
$\widetilde{x}_4$	1	3	0	1	$(5, 10, 4, 3)$	$\frac{29}{2}$

Les variables hors base sont x_1 et x_2.

On applique les critères d'entrée et de sortie d'une variable :

$$\begin{aligned} \underset{j\in N}{max}\left\{c_j - z_j \diagup c_j - z_j > 0\right\} &= \underset{j\in N}{max}\left\{c_1 - z_1, c_2 - z_2\right\} \\ &= \underset{j\in N}{max}\left\{3, 1\right\} = 3 \rightarrow \text{la variable entrante est } \widetilde{x}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\mu_{ir}},\ \mu_{ir} > 0\right\} &= min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\mu_{i1}},\ \mu_{i1}\right\} \\ &= min\left\{18, \frac{29}{2}\right\} = \frac{29}{2} = \frac{\overline{b}_2}{\mu_{21}} \rightarrow \text{la variable sortante est } \widetilde{x}_4 \end{aligned}$$

avec $\overline{b}_i = \Re\left(\widetilde{\overline{b}}_i\right)$.

La variable $\widetilde{x}_1$ entre dans la base et sa valeur est $\Re\,(5, 10, 4, 3) = \frac{29}{2}$, la variable sortante est $\widetilde{x}_4$ $(k = 2)$ et le pivot $\mu_{21} = 1$.

En pivotant sur $\mu_{21} = 1$, on obtient le tableau suivant :

Tableau 2

Base	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	$\widetilde{x}_4$	S.B.R	$\Re\,(S.B.R)$
$c_j - z_j$	0	-8	0	-3	$(15, 30, 12, 9)$	$\frac{87}{2}$
$\widetilde{x}_3$	0	2	1	-1	$(1, 3, 6, 5)$	$\frac{7}{2}$
$\widetilde{x}_1$	1	3	0	1	$(5, 10, 4, 3)$	$\frac{29}{2}$

Le tableau 2 est optimal puisque tous les $c_j - z_j$ pour les variables hors base sont négatifs $c_2 - z_2 = -8 < 0$ et $c_4 - z_4 = -3 < 0$ donc la condition d'optimalité pour le PLVFT est vérifiée.

La solution optimale floue est $\widetilde{x}_1 \underset{\Re}{=} (5, 10, 4, 3)$, $\widetilde{x}_2 \underset{\Re}{=} (0, 0, 0, 0)$, $\widetilde{x}_3 \underset{\Re}{=} (1, 3, 6, 5)$,

$\widetilde{x}_4 \underset{\Re}{=} (0, 0, 0, 0)$ et $\widetilde{Z} \underset{\Re}{=} c_B B^{-1} \widetilde{b} \underset{\Re}{=} (15, 30, 12, 9)$ avec $\Re\left(\widetilde{Z}\right) = \dfrac{87}{2}$.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité un problème de programmation linéaire floue, sous trois cas différents, dont la résolution a été faite à l'aide de la méthode du simplexe flou que nous avons détaillé et approfondi.

Conclusion générale

Depuis plusieurs années, on considère que les deux sources d'incertitude principales sont le manque d'information et la variabilité des phénomènes. On modélise, alors, les informations soit par des distributions de probabilité (informations aléatoires) soit par des ensembles flous (informations incomplètes). La théorie des ensembles flous apparait comme un outil bien adapté pour modéliser un concept vague.

Dans notre travail nous avons abordé, en premier lieu, des programmes linéaires dont les données sont supposées être connues avec précision qui sont appelés des problèmes linéaires d'optimisation déterministes dont la résolution s'est faite par la méthode du simplexe classique de Dantzig.

Ensuite nous avons traité des programmes linéaires, dont les données sont approximatives ou vagues, qui sont appelés des problèmes linéaires d'optimisation flous. Dans notre cas, le flou est caractérisé par des nombres flous trapézoïdaux. En utilisant les fonctions Ranking et l'arithmétique des nombres flous de type trapézoïdal, nous avons résolu les problèmes linéaires flous par la méthode du simplexe flou qui n'est rien d'autre qu'une extension du simplexe classique étudié au chapitre un.

Bibliographie

[1] Amiri N. M., Nasseri S. H. , Yazdani A. , Fuzzy Primal Simplex Algorithms for Solving Fuzzy Linear Programming Problems. Iranian Journal of Operations Research , 1(2) 68-84, 2009.

[2] Baillargeon G., Programmation linéaire appliquée. Les éditions SMG , Québec, 1996.

[3] Dantzig G.B., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1963.

[4] Ebrahimnejad A., Some New Results in Linear Programming Problems With Fuzzy Cost Coefficients. Walailak J Sci & Tech, 10(2) 191-199, 2013.

[5] El Barnoussi S., Programmation linéaire Méthode du simplexe, Programmation linéaire.Méthode du simplexe. Publier en ligne : « www .fsr. ac.ma/ cours/ maths/ bernoussi /RO-ELBERNOUSSI-2010-P1.», octobre 2010.

[6] Hamam Y., Talbot H., Introduction à la programmation mathématique (Programmation Linéaire et Optimisation Combinatoire), Introduction à la programmation mathématique –ESIEE Paris, publier en ligne : « perso.esiee.fr/~talboth/ESIEE/IF4-ALG2/pdf/poly_optim_2009. » , 7 avril 2009

[7] Maleki H. R., Tata M. , Mashinchi M. , Linear programming with fuzzy variables. Fuzzy Sets and Systems, 109(2000) 21-33, 1998.

[8] Michel J. c., Programmation linéaire outil efficace pour la planification optimale de la production dans une entreprise industrielle « mémoire de Licence » Université Libre de Kigali, 2003.

[9] Müller D., Introduction à la programmation linéaire, Introduction à la programmation linaire – Apprendre en ligne. Publier en ligne : « www . apprendre - en -ligne. net/MADIMU2/ALGEB/ALGEB3. », 2013.

[10] Nasseri S. H. , Ardil E., Yazdani A. , and Zaefarian R. , Simplex Method for Solving Linear Programming Problems With Fuzzy Numbers. International Scholarly and Scientific Research & Innovation, 1(10) 500-504, 2007.

[11] Nasseri S. H., and Ardil E., Simplex Method for Fuzzy Variable Linear Programming Problems. International Scholarly and Scientific Research & Innovation, 3(10)36-40, 2009.

[12] Noora A. A., Karami P., Ranking Function and its Application to fuzzy DEA , Ranking Functions and its Application to Fuzzy DEA - Hikari. Publier en ligne : « www. m-hikari .com /imf... / 29 -32.../ nooraIMF 29-32-2008. » , 2008.

[13] Scheid J-F., Graphe et recherche opérationnelle, Graphe et Recherche Opérationnelle. ESIAL. publier en ligne : «www.isig.ac.cd/isiggoma/data/fichier/5568820f13cf6.pdf » 2010-2011.

[14] Sudha A. S., Karpagamani V., Solving fully fuzzy linear programming problem using trapezoidal ranking function, Solving fully fuzzy linear programming problem using trapezoidal ranking function. Publier en ligne : « www.jgrma.info/index.php/jgrma/article/viewFile/231/162 » , juin 2014.

[15] Tareb F., Merzouk D., Résolution d'un problème de programmation linéaire flou via l'optimisation multiobjectif . « Thèse de Master », UMMTO, 2015.

[16] Teaching C. Chapitre 1 programmation linéaire , Chapitre 1 programmation linéaire1. Généralités. publier en ligne : « www. rogp. hec. ulg. ac. be / Crama /Teaching / RO1lic /Docs/Chap1_PL.PDF »

[17] Teghem J., Programmation Linéaire. SMA, Bruxelles, 1996.

[18] Trichet E., Introduction à la complexité algorithmque, Introduction à la complexité algorithmque -IREM. Publier en ligne : « www.irem.unilim.fr/.../2015 _01 _04 - Introduction_complexite_algorithmique.odt »

[19] Zadeh L. A., Fuzzy sets, Information and Control. 8(3), 338-358, 1695.

[20] Zerdani O., L'optimisation non Linéaire Multiobjectif. « Thèse de doctorat », UMMTO, 2013.