

République Algérienne Démocratique et Populaire

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté du Génie Electrique et d'Informatique

Département d'Electronique



Mémoire

De fin d'études

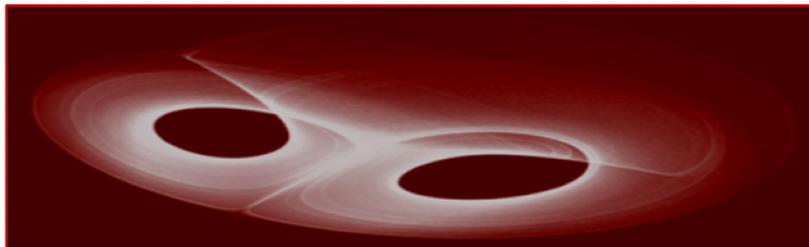
En vue de l'obtention du diplôme

d'Ingénieur d'Etat en Electronique

Option : contrôle/communication

Thème

*Etude des systèmes chaotiques et leurs
potentialités sur les systèmes de
télécommunication.*



Proposé et dirigé par :

Mr : HAMICHE Hamid

Réalisé par :

M^{lle} : AIT HOCINE Kahina

M^{lle} : AIMEUR Lamia

Promotion 2007/2008

Introduction générale.....	1
-----------------------------------	----------

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

I.1. Introduction	3
I.2. Définition utile	3
• Système dynamique	3
• Système autonome.....	4
• Flot.....	4
• Point fixe	5
• Cycle limite.....	7
• Système déterministe	8
• Espace d'états.....	8
• Degré de liberté.....	8
• Trajectoire.....	8
• Système linéaire.....	9
I.3. Les systèmes non linéaire :	
a-Définition	10
b-Représentation d'états des systèmes non linéaire	10
I.4. Notion du chaos :	11
I.4.1. Définition d'un système chaotique.....	12
I.4.2. Propriétés :	12
a-Sensibilité aux conditions initiales.....	12
b-Exposant de Lyapunov.....	14
c-Aspect aléatoire et prédiction	18
d-Les attracteurs étranges	19
e-Spectre de puissance et fonction d'auto-corrélation.....	25
I.5. Conclusion	25

Chapitre II : Synchronisation des systèmes chaotiques

II.1. Introduction	27
II.2. Synchronisation du chaos.....	28
II.3. Méthodes de synchronisation	28
II.3.1.Synchronisation par la méthode de Pecora et Carroll	
II.3.1.a. Principe de la méthode	28
II.3.1.b. Décomposition en deux sous-systèmes.....	29
II.3.2.Synchronisation par couplage	32
II.3.2.a. Synchronisation par couplage bidirectionnel.....	32
II.3.2.b. Synchronisation par couplage unidirectionnel.....	34
II.3.2.c. Exemple.....	35
II.4.Conclusion	38

Chapitre III : Utilisation du chaos dans les systèmes de télécommunication

III.1. Introduction	39
III.2.Utilisation du chaos dans les systèmes de télécommunication.....	39
III.3.Masquage de l'information avec un signal chaotique	41
III.4.Chaos Shift Keying (CSK).....	43
III.5.Démodulation cohérente par synchronisation du chaos.....	44
III.6.Démodulation CSK incohérent.....	46
III.7.Differential Chaos Shift Keying (DCSK).....	47
III.8.Exemple d'un système de communication chaotique réalisé en opto- électronique	50
III.9.Conclusion.....	56

Chapitre IV : Application au circuit de Chua.

IV.1.Introduction.....	57
------------------------	----

IV.2.Modélisation du circuit de Chua.....	57
IV.3.Application du concept de Pecora et Carroll.....	59
IV.4.Différents états de synchronisation.....	62
IV.5.Interprétation des résultats.....	67
IV.6.Le masquage de l'information par le circuit de Chua.....	68
IV.7.Illustration.....	69
IV.8.Conclusion.....	71
Conclusion générale	73
Annexe A	75
Annexe B	76
Annexe C	80
Bibliographie	

Introduction générale :

Aujourd'hui, les systèmes à comportement asymptotique périodique ou permanent sont bien connus et analysés par les scientifiques. En revanche, les mouvements chaotiques ne sont ni périodique ni permanents, ce qui complique leurs analyse et incite à les qualifier de turbulents ou aléatoires .cependant, ces mouvements sont très communs et peuvent apparaître même dans les systèmes simples.

Le concept de la dynamique du chaos a été pour la première fois introduit par Henri Poincaré (1854-1912), l'orsqu'il a étudié le fameux problème des trois corps célestes. En effet, en étudiant les trois corps (une étoile+2planètes), il a constaté que des orbites très compliquées (aujourd'hui dites chaotiques) pourraient se produire a partir d'un ensemble de conditions initiales. De plus, Poincaré est l'un des premiers à affirmer que le déterminisme d'une loi n'implique pas sa prédictibilité.

La théorie du Chaos indique la nécessité de combiner l'approche physique du phénomène chaotique avec la formulation mathématique. En effet, la théorie du chaos vise à proposer des méthodes permettant de modéliser le comportement des systèmes dynamiques chaotiques à l'aide d'équations, afin d'améliorer leur prédictibilité.

Une solution chaotique est un comportement asymptotique borné qui n'est ni un point d'équilibre, ni une solution périodique, quasi périodique ou presque périodique. Une dynamique chaotique peut être reconnue par ses propriétés telles que le spectre de puissance continu parfois confondu avec le bruit. Dans le domaine temporel, les signaux chaotiques semblent aléatoires. Les systèmes chaotiques sont aussi connus par leur sensibilité aux conditions initiales ; une petite perturbation peut générer un grand changement dans l'état du système.

L'explosion des communications personnelles de ces dernières années a grandement modifié le paysage contemporain des systèmes de communication. Les objets communicant tels que les téléphones portables, les ordinateurs, et autres périphériques informatiques utilisant des systèmes réseaux sans fils mais aussi plus récemment les capteurs sans fils et les systèmes d'identification radiofréquence, envahissent peu à peu notre quotidien et sont le sujet d'un essor commercial grandissant.

La vulgarisation des échanges des données vue à ce type de système de communication amène le problème actuel de la sécurité de l'information. La synchronisation

des systèmes dynamiques chaotiques offrent la possibilité de développer de nouveaux systèmes de transmission sécurisés. Ces nouveaux systèmes peuvent être vue comme une alternative aux méthodes de cryptographie traditionnelles, mais aussi comme des systèmes apportant un niveau supplémentaire de confidentialité puisque la sécurisation de la transmission peut s'effectuer uniquement par l'intermédiaire des étages de modulation et de démodulation des systèmes de communications.

Notre travail consiste à la sécurisation des informations à l'émission.

Ce présent mémoire est repartit comme suit :

- Le premier chapitre est une introduction à la théorie du chaos et les différents outils utilisés pour analyser de tels systèmes.
- Le deuxième chapitre introduit les différentes méthodes de synchronisation : méthode de Pecora et Carroll, synchronisation bidirectionnelle et unidirectionnelle.
- Le chapitre trois montres l'utilité du Chaos dans les systèmes de télécommunication, et présente les différentes techniques de modulation et de cryptage/décryptage de l'information.
- Au dernier chapitre nous appliquons l'approche de synchronisation et du masquage chaotique sur le circuit de Chua.

Notre travail sera clôturé par une conclusion générale et quelques perspectives.

I.1.Introduction :

La théorie du chaos est une des rares, une des très rares, théorie mathématique qui ait un vrai succès médiatique. C'est même devenu une théorie à la mode qu'il est de bon ton de pouvoir citer si l'on veut passer pour quelqu'un de cultivé. Apparue au début des années soixante en météorologie, elle s'est rapidement étendue à peu près sur toutes les sciences. Certains y ont vu, ou y voient encor, une révolution scientifique d'une importance identique à l'apparition de la mécanique de Newton, de la relativité d'Einstein ou de la mécanique quantique. Le but de ce qui suit n'est pas de juger ce genre d'opinions, mais de rappeler quelques faits élémentaires et d'indiquer enjeux soulevés par cette théorie, et âprement discutés.

I.2.Quelques définitions utiles :

- **Système dynamique : [1,2]**

Un système dynamique est un système physique qui évolue. Il peut évoluer dans le temps ou par rapport à une autre variable suivant l'espace de phases considéré. La trajectoire d'un objet en mouvement dans le temps est donc un système dynamique, ainsi que le nombre d'individu d'une population quelconque dans le temps, ou encore les valeurs d'une fonction (par exemple : $y = 2x$) par rapport à la valeur de x .

On appelle système dynamique en temps continu, tous systèmes d'équation différentielle du premier ordre défini par :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t, u) \quad (I - 1)$$

Avec f un champ de vecteurs ; $x \in u \subseteq R^n$ est appelé vecteur d'état, $u \in V \subseteq R^p$ vecteur des paramètres et t est la variable temporelle.

Cette équation est en générale associée à une autre équation désignant le vecteur de sortie :

$$y = h(t, x, u) \quad (I - 2)$$

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

Notre travail est basé sur des équations différentielles indépendantes de l'entrée u , c'est-à-dire :

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (I.3)$$

Le système (I.3) est un système dynamique car, à partir de n'importe quelle condition initiale $x(t)$, on peut résoudre les équations et obtenir l'état futur $x(t)$ pour $t > 0$.

Lorsque le champ de vecteur f ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système dynamique est autonome. Dans le cas contraire il est non autonome.

- **Système autonome : [3]**

Un système dynamique non linéaire est dit autonome lorsqu'il ne dépend pas explicitement du temps, un système autonome est donné par le système équation ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (I.4)$$

Un système autonome est indépendant du temps initial, alors qu'un système non autonome ne l'est pas. Dans un système autonome, tout instant peut être considéré comme instant initial, et un état $x(t)$ du système peut être considéré comme un état initial.

- **flot : [4]**

Définition :

Soit le système dynamique autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)), x(t_0) = x_0 \quad (I-5)$$

L'entrée a été volontairement omise, le système est considéré libre.

On appelle flot de l'équation (I.4), l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \\ (t, x_0) \longrightarrow \varphi(t, x_0) = x(t, x_0) \end{cases} \quad (I-6)$$

Telle que :

- $\varphi(t_0, x_0) = x_0$, si $t_0 = 0$ alors $\varphi(0, x_0) = x_0$.
- Pour chaque x_0 fixé, $\varphi(t, x_0)$ est une solution de l'équation différentielle (I-5).

Propriété :

Le flot satisfait la propriété suivante :

$$\varphi(t_1 + t_2) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x_0)), t_2 \geq t_1 \geq t_0 \quad (I-7).$$

Toute solution $\varphi(x, y)$ du système autonome (I.5), considérée comme un ensemble de trajectoires avec différentes conditions initiales, est appelée flot dans le plan ($x - y$).

- **point fixe ou point d'équilibre : [3]**

On appelle point fixe ou point d'équilibre du système (I.4), le point x^* de l'espace des phases tel que:

$$f(x^*) = 0 \text{ et } g(x^*) = 0 \quad (I-8)$$

Remarque :

Par un changement de variable $\varepsilon = x - x^*$ on peut ramener le point x^* à l'origine.

Exemple (I -1): [3]

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

Considérons un simple pendule montré dans la figure (I-1) où L est la longueur de la corde considérée comme rigide et sans masse, et m représente la masse en mouvement. On note θ l'angle que la corde fait avec la verticale. Afin d'écrire les équations du mouvement, on identifie les forces agissant sur la masse. Ainsi il y a la force gravitationnelle donnée par $f_g = m \cdot g$ où g est l'accélération de la gravité. On suppose aussi que la masse est soumise à une force de résistance de friction proportionnelle à la vitesse de la masse et du coefficient de friction K . D'après la seconde loi du mouvement de Newton, on obtient alors l'équation du mouvement :

$$ML\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) - KL\dot{\theta} \quad (I-9)$$

On décrit alors le modèle dans l'espace d'état non linéaire en choisissant $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{cases} \quad (I-10)$$

Afin de trouver les points d'équilibre, on pose $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 = 0 \end{cases} \quad (I-11)$$

Les points d'équilibre sont alors situés au $(n\pi, 0)$ pour $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ physiquement, cela correspond à l'existence de deux points d'équilibre $(0,0)$ et $(\pi, 0)$. Mais le pendule peut rester au point $(0,0)$ est un point d'équilibre stable, tandis que le point $(\pi, 0)$ est un point d'équilibre instable.

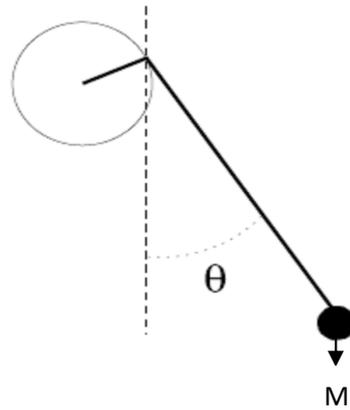


Figure (I – 1) : Pendule simple

- **Un cycle limite : [5]**

Un système non linéaire peut être un siège d'oscillations, caractérisées par leurs amplitudes et leurs fréquences, indépendantes de la condition initiale x_0 , et sans excitation extérieure. Ce siège est appelé cycle limite.

Remarque :

Pour un système autonome en temps continu, au moins trois variables d'état sont nécessaires pour générer le chaos. Dans le cas d'un système non autonome, il faut au moins deux variables d'état et une entrée indépendante.

En étudiant l'évolution temporelle des variables d'état, on peut facilement identifier une solution de type point fixe (ou point d'équilibre) ou une solution périodique.

En revanche, il n'est pas facile de distinguer une solution chaotique d'une solution quasi-périodique. Pour résoudre ce problème, nous étudions l'espace des phases ou l'espace d'état. Une trajectoire quasi-périodique converge vers une forme (un attracteur) torique, tandis qu'une trajectoire chaotique montre un comportement plus compliqué.

Exemple (I-2): [3]

Supposons maintenant qu'un couple (moment de torsion) sinusoïdal soit appliqué au point pivot du pendule de la figure (I-1). L'équation du pendule devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = \frac{\tau}{ml} \sin(2\pi ft) \quad (I - 12)$$

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

Le second membre de l'équation représente le couple sinusoïdal. La question qu'on se pose est : le pendule peut-il montrer un mouvement chaotique ? Pour reprendre à cette question, nous appliquons les changements de variable suivants :

$$\begin{cases} x_1 = \dot{\theta} \\ x_2 = \theta \\ x_3 = 2\pi ft \end{cases} \quad (I-13)$$

Le système ci-dessous est alors obtenu :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{t}{ml} \sin x_3 - \frac{g}{l} \sin x_2 - \frac{k}{m} x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = 2\pi f \end{cases} \quad (I-14)$$

Le système obtenu est un système de dimension 3, ce qui n'exclut pas la possibilité d'apparition d'un régime chaotique. En effet, différentes solutions sont possibles pour certaines valeurs des paramètres k , t et f .

- **Système déterministe : [4]**

On dit d'un système qu'il est déterministe si en connaissant l'état du système à un instant donné, on est en mesure de prévoir son état à un instant ultérieur.

- **Espace d'état : [6]**

C'est le recensement des états possibles d'un système dynamique. On peut également le définir comme un espace abstrait dont chaque variable représente une dimension nécessaire à la description du système à un instant donné.

Il s'agit d'un espace multi directionnel dont les coordonnées sont les variables du système. L'évolution suivant t d'une trajectoire du système se traduit alors par un

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

déplacement du point représentatif dans l'espace de phase, traçant ainsi une trajectoire de phase. Le portrait de phase est une véritable signature de la dynamique d'un système.

- **Degré de liberté : [7]**

Caractérise l'espace d'état. Il représente l'ordre qui est égale à la dimension de l'espace d'état, c'est-à-dire le nombre de variables qui le caractérise.

- **Trajectoire : [6]**

Si l'on observe l'ensemble de différents états successifs de l'espace d'état, on peut remarquer l'émergence d'une trajectoire dans cet espace. Cette trajectoire est également appelée l'orbite du système, il est à noter que si les variables d'état prennent des valeurs réelles, l'orbite d'un système dynamique à temps continu sera une courbe alors que l'orbite d'un système dynamique discret sera représenté par une série de points.

- **Système linéaire : [8]**

Un système linéaire peut être donné par l'expression suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{array} \right. \quad (I - 15)$$

$x(t)$: est un vecteur colonne de variables d'états de dimension n (n est la dimension de l'espace d'état).

$y(t)$: est un vecteur colonne de sortie du système de dimension p .

$u(t)$: est un vecteur colonne de dimension m .

A , B , C et D : sont des matrices constantes de dimension respectives $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ et $p \times m$ appelées respectivement matrices d'évolution (d'états), de commande (d'entrée), d'observation (de sortie) et de transmission directe de la commande vers la sortie (de découplage).

La notion de linéarité est caractérisée physiquement et mathématiquement par :

$$\begin{array}{rcl}
 e_1 & \longrightarrow & s_1 \\
 e_2 & \longrightarrow & s_2 \\
 \cdot & \cdot & \longrightarrow \\
 & & \longrightarrow \cdot \cdot \longrightarrow K_1 * e_1 + \dots + K_n * e_n \qquad K_1 * s_1 + \dots + K_n * s_n \\
 & & \\
 \cdot & \cdot & \longrightarrow \\
 e_n & \longrightarrow & s_n
 \end{array}
 \tag{I - 16}$$

Le système est dit linéaire si et seulement si les deux principes suivants sont vérifiés :

- Additivité
- Proportionnalité

1.3.les systèmes non linéaires : [8,9]

a. Définitions :

Ceux sont tous les systèmes qui ne sont pas régis par des équations différentielles linéaires, à coefficients constants et d'ordre fini, à l'exception du retard pur, considéré comme linéaire.

Donc un système physique est dit non linéaire, si la relation entre les grandeurs d'entées et les grandeurs de sorties est un système d'équations différentielles avec des coefficients non constants.

b.Représentation d'état des systèmes non linéaires : [8], [9]

La représentation d'état des systèmes non linéaires peut se présenter sous les deux cas suivants :

- Cas générale :

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

Les systèmes phasiques, de part leur nature, ont un comportement non linéaire. En général, la représentation de tels systèmes est formulée par un ensemble d'équations différentielles non linéaires du premier ordre de type :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \text{équation d'état} \\ y(t) = f(x(t), u(t)) & \text{équation de sortie} \end{cases} \quad (I-17)$$

- **Cas analytique :**

C'est un cas particulier des systèmes non linéaires ayant la propriété d'affinité par rapport à l'entrée, il est représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (I-18)$$

$x(t)$, $u(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie à l'instant t . f , h et g sont des fonctions vectorielles de dimensions n , p et m respectivement.

Exemple (I-3):

- $f(x) = x + e^{-20x^2} \cos x$
- $f(x) = \frac{6}{2} - \sin x + \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}/2$
- $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + e^{-20x_1^2} \cos x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

1.4. Notion du chaos:

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

La théorie du chaos est la branche des systèmes non linéaires qui étudie et essaye de clarifier le chaos. Le but n'est pas de trouver des solutions précises à des équations mais d'essayer d'avoir les réponses à des questions sur l'état d'un système au fur et à mesure du temps, si tel système aura un état stationnaire dépendant de telle condition, et quel genre d'états stationnaires il peut y avoir.

Un système comprendra donc plusieurs points, des points fixes (valeurs des variables qui ne vont pas changer avec le temps) vers lesquels le système est susceptible de converger. On parle de points attractifs.

Après avoir pris connaissance du phénomène chaotique de façon générale (son apparition, son évolution à travers le temps...etc.). Nous allons introduire quelques notions importantes qui vont être utiles pour la bonne compréhension du phénomène.

1.4.1.Définition d'un système chaotique :

Un système est dit chaotique si son comportement est irrégulier, désordonné tout en étant déterministes. En particulier, on dira d'un système qu'il est chaotique (dans le temps) si son spectre de puissance comporte une partie continue, une bande large, indépendamment de la présence éventuelle de quelques raies.

1.4.2.Propriétés : [10,11, 12]

un système chaotique est caractérisé par :

- Sa sensibilité aux conditions initiales.
- Son exposant de Lyapunov.
- Son aspect aléatoire et prédiction.
- Ses trajectoires typiques, attracteur étrange.
- Son spectre de puissance.
- Sa fonction d'auto corrélation.

a. Sensibilité aux conditions initiales :

Quelques systèmes physiques se comportent de manière chaotique. Parmi ces systèmes, on peut citer l'atmosphère, un robinet qui goutte, un pendule excité dans un champ magnétique...etc. Ces quelques systèmes se démarquent par leurs dimensions et l'origine de leurs mouvements. Ainsi, on remarque que le chaos peut surgir dans divers systèmes et est, de ce fait, assez répandu. Quelques caractéristiques permettent de comprendre qualitativement les points marquants de ces systèmes.

Tout d'abord, ils sont extrêmement sensibles aux perturbations. On peut illustrer ce fait par l'effet papillon. Popularisé par le météorologue Edward Lorenz, cet effet papillon consiste en l'image suivante. On peut considérer que le simple battement d'aile d'un papillon en Australie peut entraîner une tempête sur côte américaine. Ceci signifie qu'une perturbation en apparence mineure à l'échelle de l'atmosphère peut avoir de grandes répercussions.

Il faut néanmoins garder à l'esprit qu'il s'agit d'une image qui n'est pas tout à fait exacte, car l'atmosphère n'est pas un système chaotique « parfait ». Le battement d'aile d'un papillon n'aurait en réalité pas une influence si grande car il existe des phénomènes limitant. Quoiqu'il en soit, l'image permet de comprendre le phénomène de sensibilité aux perturbations, plus souvent appelé « sensibilité aux conditions initiales ».

- **Illustrations pour le model de Lorenz :**

Illustrons ce phénomène par une simulation numérique. Nous affectons à un système chaotique deux conditions initiales très proches, c'est-à-dire ne différant que très peu (d'un papillon...). Dans un premier temps, les deux systèmes évoluent de la même manière ; mais, très vite, leur comportements devient différents pour n'avoir plus grand-chose à voir.

Nous avons pris pour référence le modèle de Lorenz, sur lequel nous avons illustré l'approche chaotique et présenter certaines propriétés et caractéristiques, pour les simulations nous avons choisis MATLAB.

La propriété de sensibilité aux conditions initiales a été observé la premier foi par E. Lorenz sur son modèle météorologique. Le premier coup de génie de Lorenz a été de choisir délibérément la compréhension aux dépens de la prévision. Il a donc établi un système d'équations différentielles ultra simplifiées de seulement trois variables qui permettaient de déterminer l'évolution des masses d'air.

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

Ce système ultra simplifié, avec seulement trois variables, est représenté par les équations ci- dessous, dit, parfois, « système de Lorenz » :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = Pr(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + Rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{array} \right. \quad (I - 19)$$

Où Pr représente le nombre de Prandtl du fluide, R est proportionnel au nombre de Rayleigh et b est relié au vecteur d'onde convectif. Les variables x et y sont respectivement proportionnelles aux amplitudes du champ de vitesse et du champ de température alors que z est relié au mode vertical de température. Enfin t est le temps.

En remarque, cela aura de l'importance plus tard, que ces équations ne sont pas linéaires : elles comportent les termes $-yz$ et xy qui ne sont pas linéaires.

Lors de la simulation sous MATLAB nous avons pris :

$$Pr=10 ; R = 28 ; b = \frac{8}{3}$$

Des valeurs pour lesquelles le système présente un comportement chaotique, et pour les conditions initiales suivantes :

$$\text{Soit } (x_0; y_0; z_0) = (10; 10; 20) \text{ et } (x_1; y_1; z_1) = (10.01; 10; 20)$$

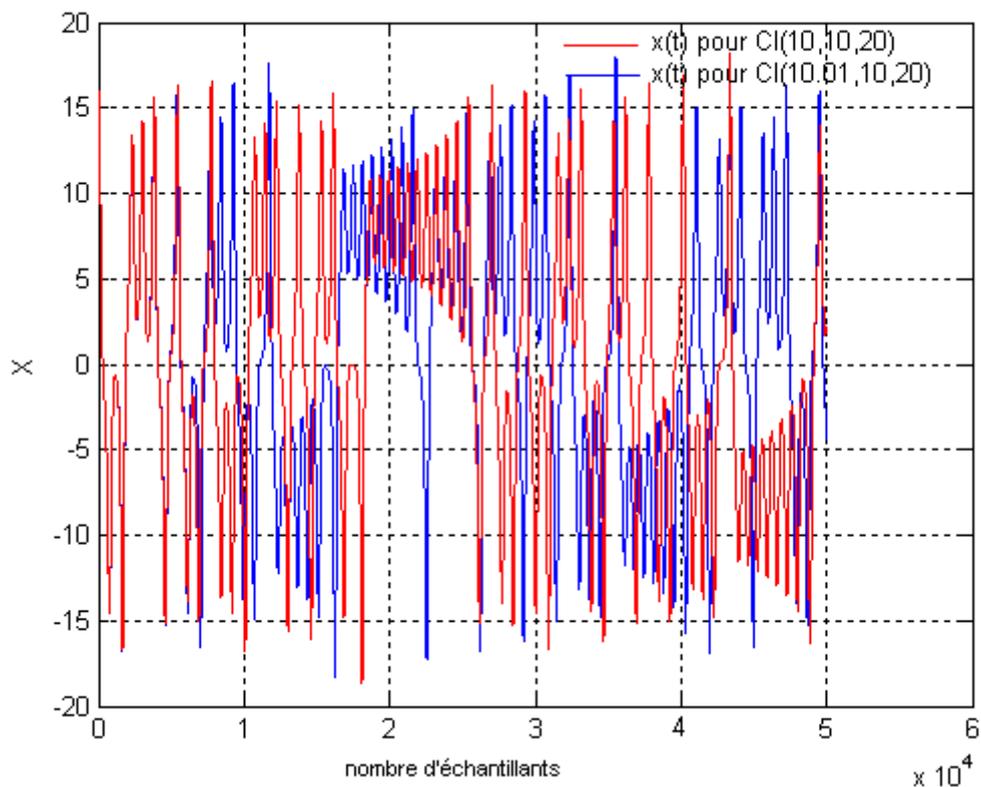


Figure (I- 2) : Evolution dans le temps pour deux conditions initiales très proche.

b.Exposant de Lyapunov :

Nous considérons un système à n degrés de liberté. Soient x_0 et y_0 deux conditions initiales pour ce système (valeurs initiales des n degrés de liberté). Nous notons x et y les fonctions du temps telles que $x(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement l'état du système (les valeurs des n degrés de liberté) à l'instant t et telles que $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.

d est la distance euclidienne définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} d: \quad R^n \times R^n \rightarrow R \\ \\ (x, y) \rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)^2} \end{array} \right. \quad (I - 20)$$

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

S'il existe à un instant t_i , une constante réelle I et une constante réelle α tels que, si

$$I = [0, t_i],$$

$$\forall t \in I : d(X_i(t), Y_i(t)) \rightarrow e^{\lambda t + \alpha}. \quad (I - 21)$$

Alors, λ est appelé exposant de Lyapunov.

Nous comprenons que l'exposant de Lyapunov caractérise la qualité chaotique ou non d'un système car il rend compte de la sensibilité aux conditions initiales.

Note : Nous imposons à la propriété de n'être vérifiée que sur un intervalle I car des effets limitant peuvent intervenir de sorte que la croissance exponentielle ne puisse être observée que localement. La présence d'attracteur justifie cette limitation.

Il est très difficile de déterminer l'exposant de Lyapunov analytiquement c'est pour cela que nous avons recours à une simulation numérique simple dont nous présentons le résultat pour le système de Hénon comme exemple.

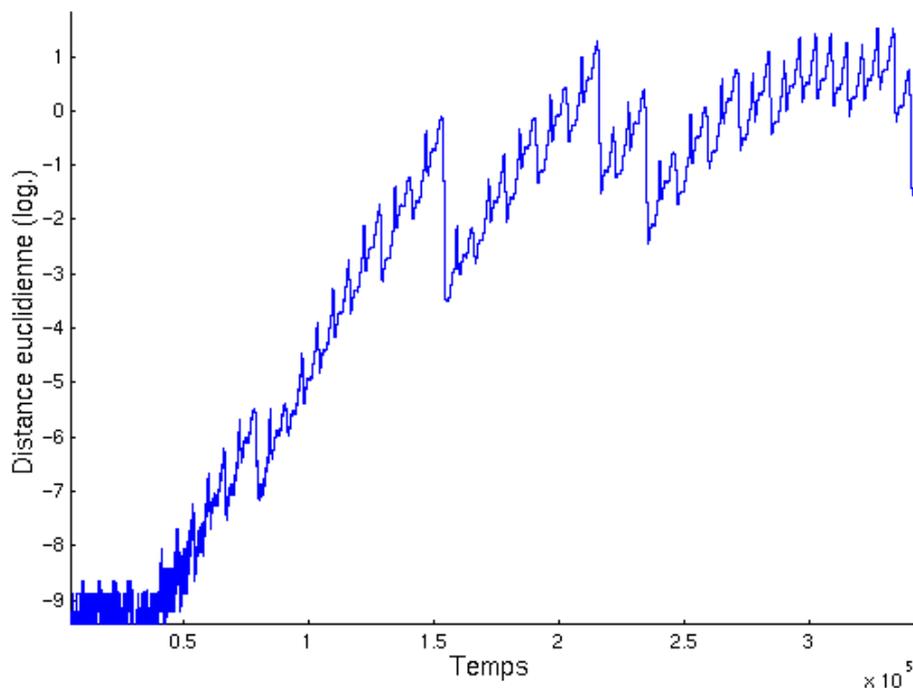


Figure (I-3) : Détermination de l'exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Hénon.

Note :

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

La première partie de la courbe (avant la croissance de la distance) ne traduit pas une croissance exponentielle. Le problème provient de l'enregistrement des données qui n'est pas assez précis pour qu'une distance euclidienne puisse être évaluée en dessous de 10^{-9} (les calculs sont tout de même assez justes car c'est l'enregistrement des données qui est en cause ici, pas leur stockage en mémoire). Par contre, la deuxième partie de la courbe montre bien que la distance croît de manière exponentielle à cause de la sensibilité aux conditions initiales. Nous pouvons lire du tracé en échelle logarithmique que la valeur de la pente représente la valeur de l'exposant de Lyapunov.

Dans notre exemple $\lambda=0.09$.

L'intérêt de calculer les exposants de Lyapunov peut être résumé en quelque ligne :

Les exposants de Lyapunov λ permettent de quantifier la sensibilité aux conditions initiales mais aussi de pouvoir séparer le comportement chaotique du comportement prévisible. Si λ est strictement positif, alors la sensibilité aux conditions initiales est très grande, le système est considéré comme chaotique. Par contre, si λ est négatif ou égale à zéro, nous sommes en présence d'un phénomène stable ou périodique. Pour estimer l'exposant de Lyapunov on laisse évoluer le système à partir de deux conditions initiales différentes mais très proches, si le système est chaotique, nous obtenons deux évolutions très différentes (divergentes), si non nous allons avoir deux courbes qui se confondent.

Donc, connaissant la valeur de l'exposant de Lyapunov nous pourrions être en mesure de déterminer la nature du système ainsi que le type de son attracteur.

Les divers critères permettant de caractériser la dynamique d'un système quelconque sont regroupés dans le tableau suivant :

Régime permanent	Attracteur	Spectre	Exposant Lyapunov
Point d'équilibre	point	Composante continue	$0 > \lambda_1 \dots \lambda_n$

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

Périodique	Courbe fermée	Fréquence Fondamentale + harmonique entières	$\lambda_1 = 0$ $0 > \lambda_2 \dots \lambda_n$
Quasi-périodique	tore	Composantes fréquentielles en rapport irrationnel	$\lambda_1 = \dots = \lambda_i = 0$ $0 > \lambda_{i+1} \dots \lambda_n$
Chaotique	Attracteur étrange	Spectre large	$\lambda_1 > 0$ $0 > \lambda_2 \dots \lambda_n$
Hyper Chaotique	Attracteur étrange	Spectre large	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ $0 > \lambda_3 \dots \lambda_n$

Tableau (I-1): Classification des régimes permanents en fonction des exposants de Lyapunov.

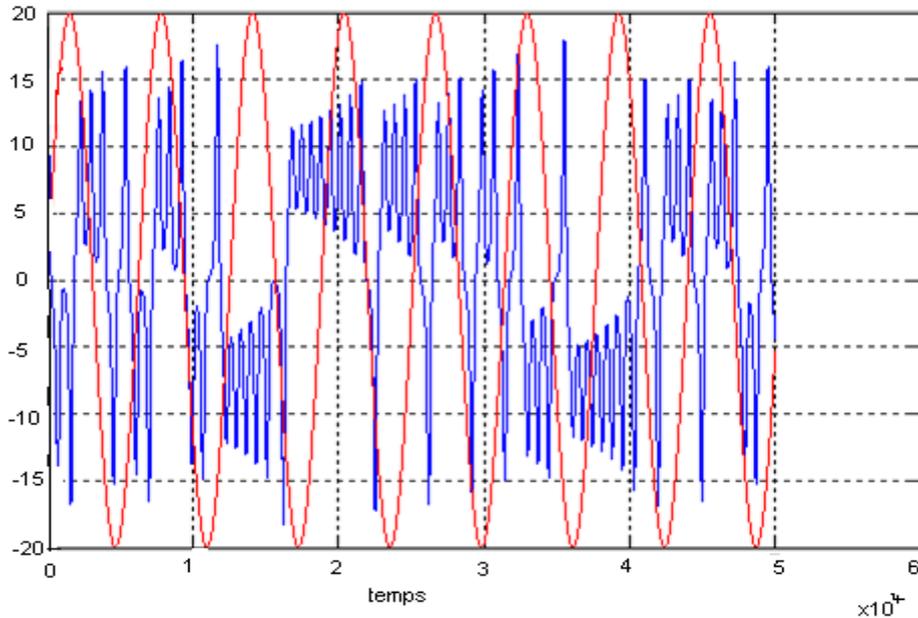
c. Aspect aléatoire et prédiction :

- **Aspect aléatoire :**

Les courbes précédentes illustrent la sensibilité aux conditions initiales. Cependant, une autre caractéristique des systèmes chaotiques peut être observée sur les courbes précédentes. En effet, un système chaotique évolue d'une manière qui semble aléatoire. La courbe suivante permet de comparer une évolution simple, périodique et donc prédictible d'un système classique avec l'évolution plus complexe, non périodique et non prédictible d'un système chaotique.

— Signal sinusoïdal.

— Signal chaotique.



Figure

re (I-4): Evolution dans le temps d'un système chaotique, comparé à une sinusoïde.

Ainsi, les systèmes chaotiques semblent évoluer de manière aléatoire. En tout cas, nous ne pouvons prévoir facilement quelles seront leurs évolutions dans le temps.

Notant que les systèmes chaotiques obéissent tout de même aux lois de la physique. Si nous nous plaçons dans l'approximation de la physique classique, on peut affirmer que le système est totalement déterministe.

Il ne faut donc pas se laisser abuser par le caractère à priori aléatoire qui ne dénote qu'une complexité du système. Gardant donc à l'esprit que tout système chaotique répond aux lois de la physique et n'évolue pas du tout de manière aléatoire comme on pourrait le penser au premier abord.

- **Prédiction :**

Il serait un peu long et assez difficile de résumer les raisonnements topologiques de Poincaré, mais sa conclusion était claire : les trajectoires de trois planètes s'influencent étaient imprévisibles. Des calculs plus récents ont confirmé que le système solaire était réellement instable, chaotique dirions-nous.

Une fluctuation de 1cm sur la position initiale de la terre peut aboutir après cent millions d'années à un déplacement d'un million de Km. Rassurons nous : les dix premiers millions d'années, le déplacement est minime.

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

Voici comment Poincaré vulgarisa sa découverte :

Une cause très petite qui nous échappe détermine un effet considérable qu'on ne peut pas ne pas voir, et alors on dit que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissons exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initiale, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux : une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit [31]

C'est à l'extrême sensibilité aux conditions initiales que réside l'origine de l'imprédictibilité du chaos déterministe.

d-Les attracteurs étranges :

Les systèmes parfaitement déterministes sont représentés dans l'espace des phases par des trajectoires précises sur lesquels ces systèmes se situent et évoluent sans les quitter.

Les systèmes aléatoires évoluent au hasard dans tout l'espace.

Les systèmes chaotiques, eux ont un comportement infiniment complexe. Ils sont irrésistiblement attirés par une figure géométrique de structure également infiniment complexe sur laquelle ils errent au hasard, mais sans jamais la quitter, ni repasser deux fois par le même point! Les attracteurs étranges, semblent inclure à la fois des lois déterministes et des lois aléatoires. Avec la théorie du chaos, la science est entrée dans le domaine de la complexité !

L'attracteur est une limite vers lequel semble convergé les orbites du système. On peut définir un attracteur comme un ensemble compact de l'espace de phase vers lequel toutes les trajectoires environnantes convergent.

Il est caractérisé par :

- Son bassin d'attraction

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

- Sa dimension fractale
- **Le bassin d'attraction :**

Dans cette caractéristique la trajectoire ne converge pas vers l'attracteur pour toutes les conditions initiales de chaque une des trajectoires. L'ensemble des conditions initiales tel que la trajectoire converge asymptotiquement vers l'attracteur est le bassin d'attraction de l'attracteur.

- **La dimension fractale :**

Soit un ensemble de points situés dans un espace à p dimensions. Cherchons à recouvrir cet ensemble par des cubes de côté ε . Soit $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de cubes nécessaire à cette opération.

Par définition, la dimension de Hausdorff-Beiscovitch D est la limite, si elle existe, de l'expression :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (I - 22)$$

D est la dimension fractale Quand l'arête des hyper cubes tend vers 0.

Autrement dit, pour ε petit, le nombre minimal de cubes nécessaires pour recouvrir l'ensemble de points varie avec $N(\varepsilon)$ comme ε^{-D} . Dans le cas où l'ensemble se réduit à un point unique :

$$N(\varepsilon) = 1$$

Donc $D=0$ est la dimension de Hausdorff du point.

Si l'ensemble est celui des points d'un segment de longueur L .

$$N(\varepsilon) = L\varepsilon^{-1}$$

D'où : $D=1$, alors que pour l'ensemble des points d'une interface d'aire S :

$$N(\varepsilon) = S\varepsilon^{-2}$$

D'où : $D=2$

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

Par conséquent : le point fixe a une dimension nulle, une oscillation périodique stable est de dimension 1, et un attracteur de période 2 a une dimension 2.

C'est parce que la structure de ces attracteurs est très régulière que leur dimension soit entière. Par contre la dimension d'un attracteur étrange est non entière par exemple la dimension de l'attracteur de Lorenz est de 2.06.

Quelques exemples d'attracteurs étranges :

a. Cas continu :

a.1.L'attracteur de Lorenz :

L'attracteur de Lorenz tient son nom du météorologue Edward Lorenz qui l'a étudié le premier. C'est une simplification à l'extrême d'équations précédentes régissant les mouvements atmosphériques. Lorenz les a étudié afin de mettre en évidence sur un système simple la sensibilité aux conditions initiales qu'il avait observé.

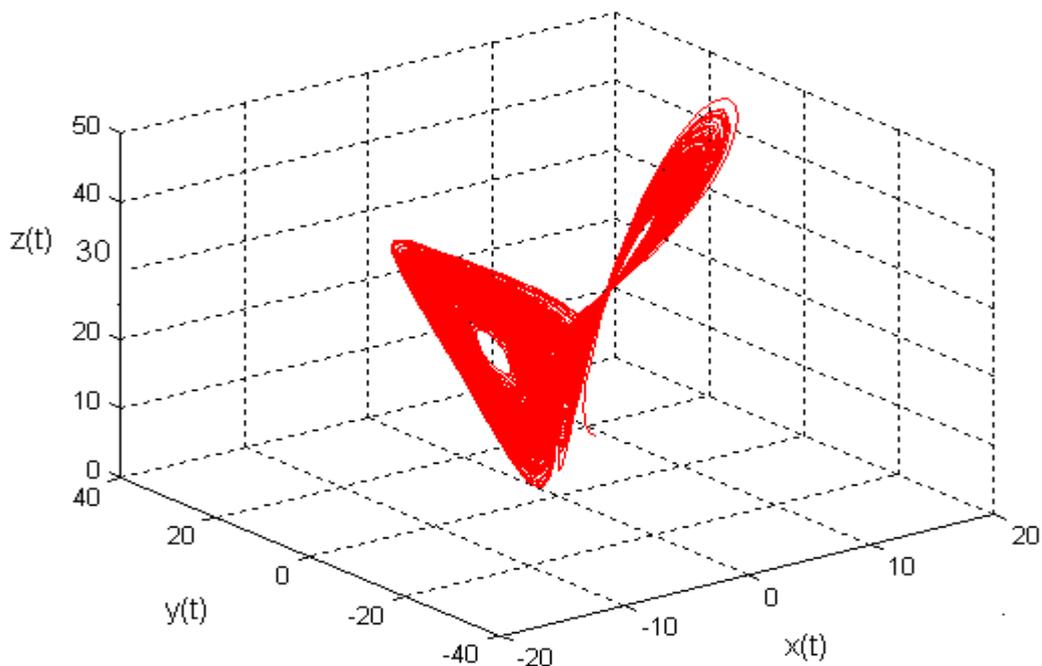


Figure (I-5) : Attracteur de Lorenz.

Lorenz a fait son expérience en prenant une situation initiale très voisine de

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

$x_0 = 5, y_0 = 5, z_0 = 5$. Il se doutait de ce qui allait arriver. Même si les points de départ étaient très proches, la seconde trajectoire divergea de plus en plus de la première, mais, à la surprise de Lorenz, elle alla aussi s'enrouler autour des deux boucles. Elle aussi semblait évoluer de façon aléatoire : elle pouvait effectuer plusieurs tours sur une aile du papillon, puis basculer sans prévenir vers l'autre et ainsi de suite. Lorenz eût beau répéter son expérience un grand nombre de fois, il obtenait toujours le même résultat. Quel que soit le point de départ, le système semblait irrésistiblement attiré par les deux boucles des ailes du papillon, autour des quelles il tournait retournait, apparemment au hasard, mais sans jamais couper sa trajectoire.

a.2. Attracteur de Rossler :

Proposé par l'allemand Otto Rossler, le système de Rossler est lié à l'étude de l'écoulement des fluides; il découle des équations de Navier Stokes. Les équations de ce système ont été découvertes à la suite de travaux en cinétique chimique.

Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (I - 23)$$

Les dérivés des premiers membres sont des dérivés partielles par rapport au temps. a, b et c sont des constantes réelles. Sauf précision contraire, nous prenons désormais :

$$a=0.398, b=2, c=4.$$

Nous sommes alors en présence d'un système chaotique.

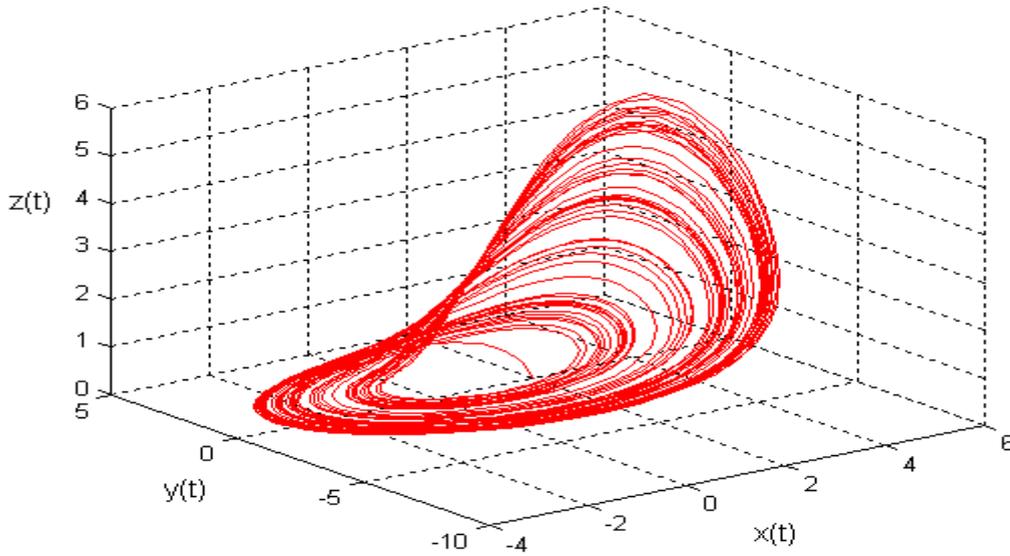


Figure (I-6) : Attracteur de Rossler pour $x(t=0)=2$; $y(t=0)=0$; $z(t=0)=0$.

b.cas discret :

- **Attracteur de Hénon :**

L'attracteur chaotique de Hénon du nom de l'astronome français Michel Hénon est un système dynamique. Il a été présenté pour la première fois en 1976 et est basé sur les équations suivantes :

$$\begin{cases}
 x_{n+1} = 1 + y_n - A x_n^2 \\
 y_{n+1} = B x_n
 \end{cases}
 \quad (I - 24)$$

C'est l'un des plus simples et des plus connus dans le monde. Pour visualiser le mouvement des étoiles, ce modèle n'est pas vraiment une courbe dans le sens mathématique, c'est réellement un ensemble de points discrets qui semblent suivre le modèle d'une courbe ce qui ressemble à une courbe lisse comme l'indique la figures ci-dessous.

Lors de la simulation nous avons pris :

$$A=1.4 ; B=0.3$$

Pour les conditions initiales suivantes :

$$X(0)=1 ; y(0)=0.$$

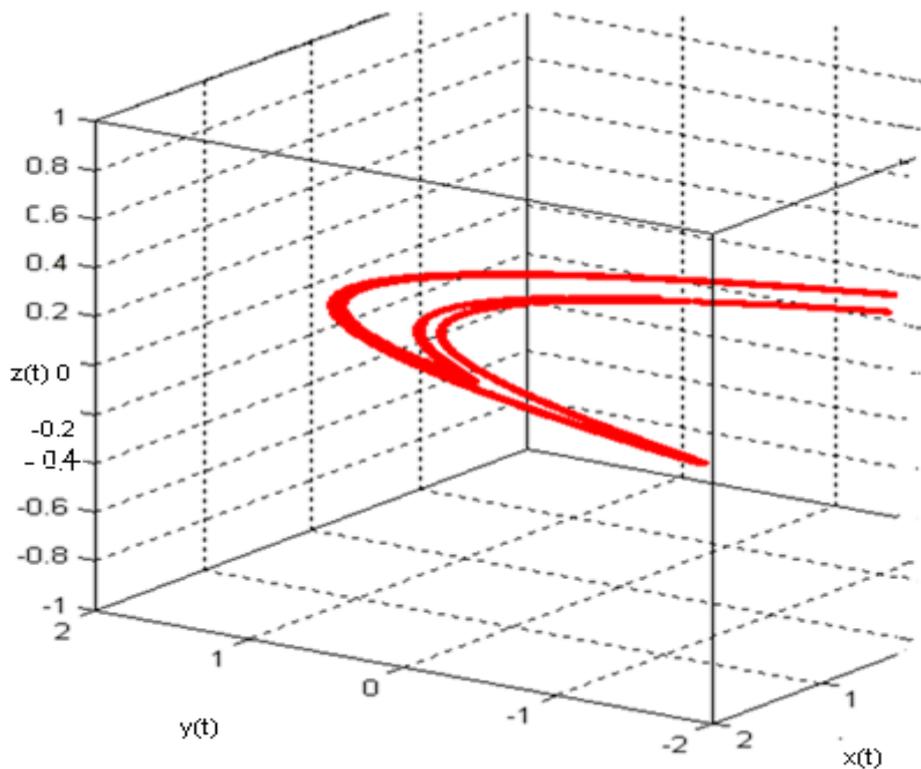


Figure (I-7): Attracteur de Hénon.

e. Spectre de puissance et fonction d'auto corrélation :

Parmi les méthodes d'analyse des signaux temporels, la transformée de fourrier est la plus utilisée car elle permet de caractériser les régimes chaotiques.

Le spectre de puissance d'un signale $x(t)$ est définie comme le carré de son amplitude par unité de temps. L'allure de son spectre nous informe sur le type de fonctionnement du système étudié.

En régime chaotique, le spectre de puissance de l'une des variables du système dynamique comporte une partie continue, traduisant une évolution désordonnée ce type de

Chapitre I : Etude sur les systèmes non linéaires et la théorie du chaos.

spectre est difficile à différencier de celui d'un bruit blanc. Cette méthode n'est pas donc suffisante pour identifier un régime chaotique.

Le cas le plus simple est celui d'un régime périodique dont le spectre de puissance est formé d'une raie de fréquence f et d'un ensemble de raies harmoniques $2f, 3f, \dots$ etc.

Pour estimer ce taux de désordre, il est utile d'introduire la fonction d'auto corrélation.

$$C(\Gamma) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int x(t) * x(t - \Gamma) dt. \quad (I - 25)$$

Cette fonction mesure la ressemblance de la variable x , à l'instant t , avec sa valeur à l'instant $(t+\Gamma)$, elle introduit ainsi le taux de similitude du signal avec lui-même quand le temps s'écoule.

Lorsque le régime est chaotique $C(\Gamma)$ tend vers zéro quand Γ augmente. La fonction d'auto corrélation temporelle du signal avec lui-même diminue et disparaît même totalement à des instants suffisamment éloignés. Le régime chaotique est alors imprédictible par perte progressive de similitude interne.

1.5.Conclusion:

C'est lors d'étude météorologique que la théorie du chaos a été mise à jour. Un système est chaotique si il est régi par des lois déterministes (équations bien connues) mais que son évolution échappe tout de même à toutes prévisions à long terme. L'origine de ce phénomène est la dépendance aux conditions initiales. Les systèmes chaotiques ont un comportement infiniment complexe, et ils sont irrésistiblement attiré par une figure géométrique de structure également infiniment complexe : l'attracteur étrange.

Le nouveau défi de la science du chaos est celui de la synchronisation des systèmes chaotiques afin d'en tirer les riches propriétés qu'ils possèdent, et c'est le but du chapitre suivant.



II.1. Introduction :

L'application du chaos aux transmissions numériques fait l'objet d'un intérêt croissant dans la littérature depuis les résultats de Pecora et Carroll sur la synchronisation du chaos. Ils ont démontré que, malgré l'extrême sensibilité aux choix des conditions initiales d'un système chaotique, deux systèmes de dynamiques identiques configurés en maître-esclave sont capables de se synchroniser parfaitement en l'absence du bruit. Cette possibilité résulte du caractère déterministe du chaos, bien qu'en apparence une trajectoire chaotique soit plutôt assimilable à un signal aléatoire.

L'activité de recherche soutenue observée ces dix dernières années pour l'exploitation du chaos à des fins de transmission est principalement motivée par des préoccupations sur la sécurité de l'information. En effet, en agissant comme une clef de cryptage, le code chaotique permet facilement d'assurer une faible probabilité de détection des symboles informationnels ; aussi il constitue un moyen potentiel de satisfaire une faible probabilité d'interruption du signal. D'autres arguments en faveur des systèmes de transmission chaotiques sont souvent mis en avant : meilleur partage du canal en contexte d'accès multiples (CDMA) et complexité matérielle moindre, puisqu'il devient théoriquement possible de se passer des circuits classiques assurant les tâches d'acquisition et de poursuite. La transmission chaotique d'informations sous forme numérique peut être accomplie par le principe de commutation (Chaos Shift Keying) : deux systèmes chaotiques A et B fonctionnent à l'émetteur pour encoder les éléments binaires 0 et 1, respectivement, en réception, le signal commande deux systèmes esclaves A et B et la détection du symbole transmis peut alors se faire en comparant les erreurs de synchronisation des deux systèmes maître-esclave.

Si Pecora et Carroll ont prouvé que deux trajectoires chaotiques peuvent se synchroniser (la distance entre elles tend asymptotiquement vers 0), en pratique ce résultat n'est plus vrai car il faut tenir compte du bruit de canal. Seule une erreur de synchronisation bornée peut être espérée. En présence de trajets multiples et/ou de non-stationnarité de canal (cas des communications sans fil), la réception des signaux avec un taux d'erreur acceptable devient un vrai challenge.

II.2. Synchronisation du chaos : [13]

Malgré le fait que les régimes chaotiques des circuits et sous-systèmes restent traditionnellement considérés comme néfastes au bon fonctionnement des systèmes, les potentialités des dynamiques chaotiques, afin de sécuriser les informations transmises dans les systèmes de communication, ont été évaluées et abordées dans le nombreux exemples, depuis ces quinze dernières années suivant l'architecture de communication présentée à la figure (II-1) suivante :

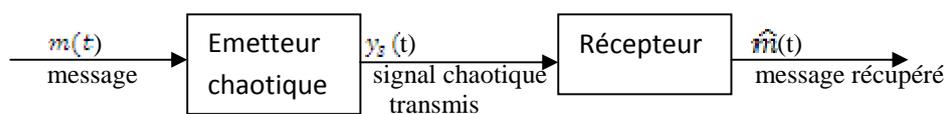


Figure (II-1) : Principe d'une chaîne de transmission numérique.

Des méthodes variées ont été développées pour réaliser cette architecture en tirant profit de la possible synchronisation des systèmes dynamiques et de la nature même des signaux chaotiques.

En effet, les formes d'ondes émises par les oscillateurs chaotiques possèdent des densités spectrales large bande et propriétés d'autocorrélation qui leur confèrent des similitudes avec le bruit blanc.

II.3. Méthodes de synchronisation :

II.3.1. synchronisation par la méthode de Pecora et Carroll :

II.3.1.a : Principe de la méthode : [13]

L'idée originale d'utiliser le chaos pour transmettre une information a été proposée au début des années 1990. cette idée est formulée à partir du constat que le comportement chaotique d'un système, composé d'au moins un sous-système différentiable est stable au sens de Lyapunov, puisse être reproduit à l'identique et synchronisé au comportement d'un deuxième système construit avec le même sous-système stable que celui du système original. La figure (II-2) représente la technique de synchronisation dite « maître-esclave »

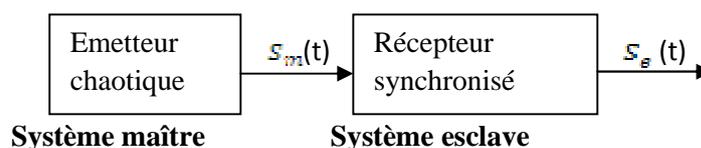


Figure (II-2) : Synchronisation maître-esclave.

Une forme d'onde issue du système maître entraîne le système esclave pour que la trajectoire du signal $s_e(t)$ soit identique à la trajectoire du signal $s_m(t)$, quand t tend vers l'infini, indépendamment des valeurs des conditions initiales de chaque système ; la synchronisation des variables est considérée acquise lorsque :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |s_e(t) - s_m(t)| = 0 \quad (II-1)$$

Il existe plusieurs méthodes pour réaliser cette opération, telle que la méthode par décomposition en deux sous-systèmes.

II.3.1.b. Décomposition en deux sous-systèmes : [13, 14,15]

Considérons un système dynamique, supposé autonome s'écrivant sous la forme d'un système à n équations d'états :

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad (II-2)$$

Avec $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t)) \in \mathbb{R}^n$

et $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (F_1(\mathbf{u}), \dots, F_n(\mathbf{u}))$, un champ de vecteur.

Ce système est divisé arbitrairement en deux sous-systèmes

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{H}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y})$$

Avec $\mathbf{x}(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$

et : $\mathbf{y}(t) = (u_{m+1}, \dots, u_n(t)) = (y_1(t), \dots, y_p(t))$.

Tel que : $m+p=n$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = G_1(x, y_1) \\ \vdots \\ \dot{x}_m = G_m(x, y_1) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = H_1(x_1, y) \\ \vdots \\ \dot{y}_p = H_p(x_1, y) \end{array} \right. \quad (II-3)$$

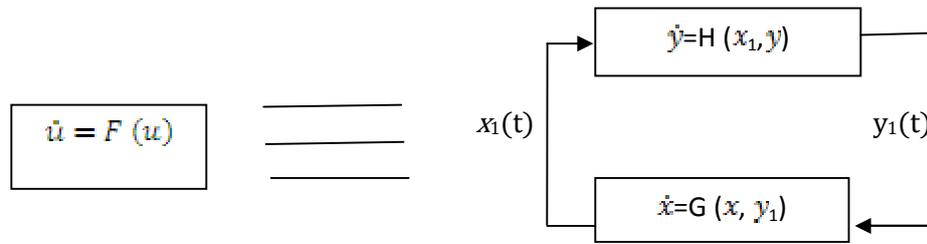


Figure (II-3) : Séparation du système F en deux sous systèmes G et H.

Le sous-système G dont les variables d'états y sont reliés par les variables $x_1(t)$ et $y_1(t)$.

Ces deux sous-systèmes sont ensuite dupliqués et mis en cascade comme le montre la figure (II-4) :

Soient \hat{G} et \hat{H} ces deux sous-système

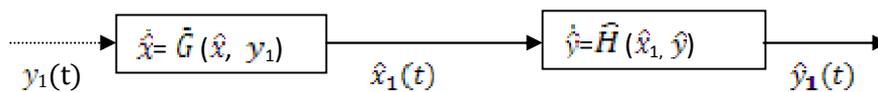


Figure (II-4) : Mise en cascade des deux sous-systèmes dupliqués.

L'objectif est de synchroniser le signal $y_1(t)$ provenant du système d'origine.

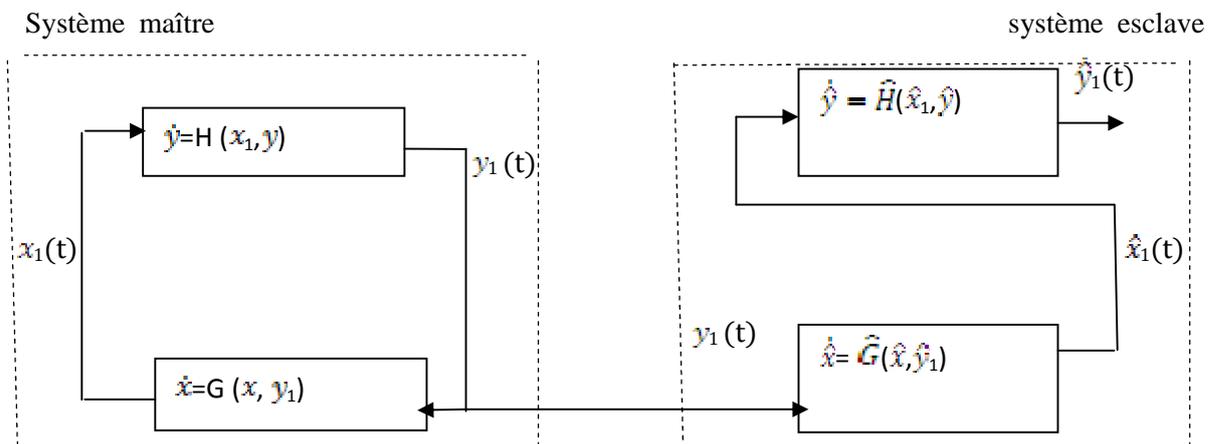


Figure (II-5): Principe de synchronisation par décomposition en deux sous-systèmes.

Si l'ensemble des quatre systèmes est considéré comme un système unique alors ce dernier peut être décrit par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}=G(x, y_1) \\ y=H(x_1, y) \\ \dot{\hat{x}}=\hat{G}(\hat{x}, y_1) \\ \dot{\hat{y}}=\hat{H}(\hat{x}_1, \hat{y}) \end{array} \right. \quad (II - 4)$$

On parle alors de la synchronisation par cascade.

La condition nécessaire pour obtenir la synchronisation est tous les exposants conditionnels de Lyapunov (CLE) du sous-système \tilde{G} soit négatifs. Les CLE représentent les exposants de Lyapunov dans le cas d'un système non autonome. Dans notre cas, le sous-système \tilde{G} est piloté par le signal $y_1(t)$. Les CLE entraîne la stabilité du sous-système non autonome \tilde{G} et s'ils sont tous négatifs, $\hat{x}_1(t)$ et $x_1(t)$ se synchronisent et :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_1(t) - x_1(t)| = 0 \quad (II - 5)$$

La condition exposée précédemment est une condition nécessaire et suffisante pour obtenir la stabilité locale. En effet, la synchronisation du sous-système \tilde{H} dépend aussi du choix des paramètres statiques (par exemple le choix des composants d'un circuit) et des conditions initiales des variables dynamiques du système maître ($x(t=0), y(t=0)$) et du système esclave ($\hat{x}(t=0), \hat{y}(t=0)$). La difficulté réside dans les conditions initiales qui dans la pratique ne sont pas contrôlables.

Un exemple de cette méthode sera présenté au quatrième chapitre.

II.3.2. Synchronisation par couplage :

Les méthodes traditionnelles de synchronisation chaotiques sont en générale basées sur l'utilisation de circuits identiques. Supposons deux circuits chaotiques identiques oscillant de façon totalement indépendante. Si par un moyen quelconque, on leur permet d'échanger l'énergie, action que l'on nome couplage, les deux systèmes finiront par céder la place à un comportement commun : Ils se synchronisent. Il est possible de coupler les systèmes chaotiques dans un sens (Couplage unidirectionnel) ou dans deux sens (couplage bidirectionnel). Dans le cas d'un couplage unidirectionnel, l'énergie est transférée d'un système à un autre à l'aide d'un élément de couplage fonctionnant dans un seul sens comme le cas d'un suiveur. Par contre dans le couplage bidirectionnel, l'élément de couplage permet l'échange de l'énergie dans les deux sens. Ceci peut être par exemple une résistance.

Les deux types de couplage unidirectionnel et bidirectionnel peuvent aussi être appliqués aux systèmes non identiques.

II.3.2.a. Synchronisation par couplage bidirectionnel : [16]

Pour expliquer la synchronisation bidirectionnelle (mutuelle) de deux systèmes chaotiques, nous considérons les deux systèmes donnés ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \lambda(y - x) \\ \dot{y} = g(y) + \mu(x - y) \end{cases} \quad (II - 6)$$

Où x et $y \in R^n$ et λ, μ sont des matrices diagonales $n \times n$;

$\lambda = \text{diag}[\lambda_i], \mu = \text{diag}[\mu_i], i = 1, 2, \dots, n$ On suppose $f(0) = g(0) = 0$.

Afin de constater expérimentalement le couplage bidirectionnel de système chaotique, nous avons couplé deux montages identiques de l'oscillateur de Colpitts, comme montrer dans la figure (II-6). Pour cela, nous avons d'abord ajusté les tensions d'alimentation de chaque montage afin d'obtenir deux comportements différents, nous avons ensuite couplé les points V_{c2} (émetteur des transistors) à l'aide d'un potentiomètre dans les deux sens, et donc un

couplage bidirectionnel. Nous avons fait varier le potentiomètre et avons relevé les différentes valeurs de la résistance de couplage pour lesquels différents comportements apparaissent. Pour le premier oscillateur, nous avons choisis $V_1 = 14.5 V, V_2 = 18.1 V$ et pour le second oscillateur nous avons fixé $V_1 = 15.2 V, V_2 = 15.2 V$. Le premier oscillateur oscille alors en régime multi périodique alors que le deuxième montre un comportement chaotique. Ensuite, nous avons couplé les deux oscillateurs à l'aide du potentiomètre ajusté à sa valeur maximale, (dans notre exemple elle vaut 566 K). Nous constatons qu'il n'y a aucun changement dans le comportement des oscillateurs, ce qui signifie que l'énergie est trop faible pour produire une synchronisation. En diminuant la valeur de R nous observons des changements de comportement pour chaque oscillateur, ainsi pour $R=36$ un comportement commun apparaît et les deux oscillateurs se synchronisent parfaitement. En conservant cette valeur de résistance de couplage, nous faisons varier une des deux tensions de polarisation du deuxième oscillateur ce qui, si l'oscillateur n'était pas couplé, lui ferait changer de régime. Il n'en est rien : Seule l'amplitude du second oscillateur change, la forme des signaux reste identique et les deux oscillateurs restent couplés.

Les résultats obtenus montrent que pour une synchronisation bidirectionnelle, la résistance de couplage doit être très faible pour que l'échange de l'énergie ait lieu dans les deux sens.

Lorsque les oscillateurs sont synchronisés, la dimension du système global, constitué de deux oscillateurs couplés, passe de 6a 3.

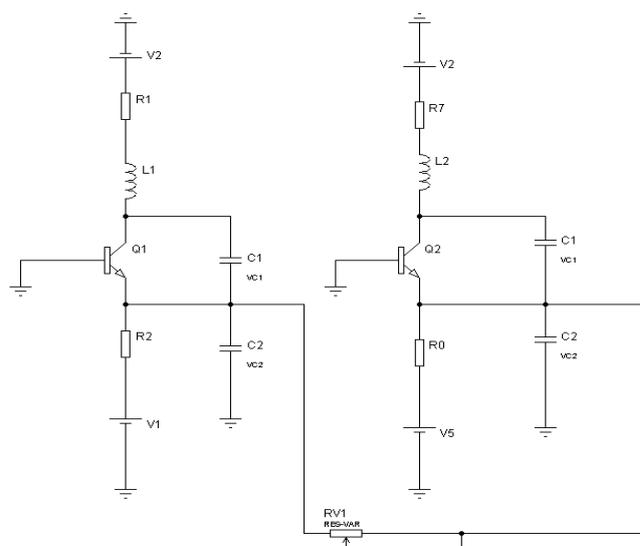


Figure (II-6) : Couplage bidirectionnel de deux oscillateurs de Colpitts.

II.3.2.B : Synchronisation par couplage unidirectionnel : [16]

La synchronisation unidirectionnelle des systèmes chaotiques est basée sur l'injection d'une partie du signal d'erreur dans le système esclave (celui qui doit se synchroniser avec l'autre). Mathématiquement parlant, nous pouvons considérer les deux systèmes donnés ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x) \\ \dot{y} = f_2(y) + \lambda(x - y) \end{cases} \quad (II - 7)$$

Où : $(x, y) \in R^n$, $\lambda = \text{diag} [\lambda_1 \dots \lambda_n]^T$. Le problème de synchronisation consiste alors à trouver un λ tel que :

$y(t) \rightarrow x(t)$ Lorsque $t \rightarrow \infty$. Ce type de synchronisation a été appliqué au circuit de Chua.

L'exemple donné ci-après illustre de façon simple la différence entre la synchronisation par couplage unidirectionnel et le couplage bidirectionnel.

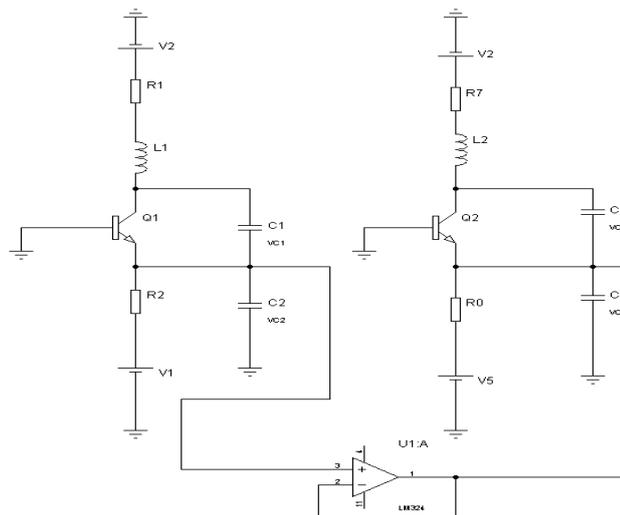


Figure (II-7) : Couplage unidirectionnel de deux oscillateurs de Colpitts.

II.3.2.C : Exemple : [16]

Soit deux systèmes chaotiques identiques (a) et (b) de dimension 3, décrits respectivement par $\dot{x}_a = f(x_a)$ et $\dot{x}_b = f(x_b)$. Le schéma de couplage des deux systèmes est montré dans la figure (II-8) couplage bidirectionnel et la figure (II-10) pour le couplage unidirectionnel. Le couplage de ces systèmes peut être exprimé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1a} = f_1(x_a) + k_{a1}(x_{1b} - x_{1a}) \\ \dot{x}_{2a} = f_2(x_a) + k_{a2}(x_{1b} - x_{1a}) \\ \dot{x}_{3a} = f_3(x_a) + k_{a3}(x_{1b} - x_{1a}) \end{cases} \quad (II-8)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{1b} = f_1(x_b) + k_{b1}(x_{1a} - x_{1a}) \\ \dot{x}_{2b} = f_2(x_b) + k_{b2}(x_{1a} - x_{1a}) \\ \dot{x}_{3b} = f_3(x_b) + k_{b3}(x_{1a} - x_{1a}) \end{cases} \quad (II-9)$$

Où k_{ai}, k_{bj} sont des constantes appelées « constantes de couplage ». Si les coefficients $k_{ai} = 0; i = 1,2,3$, il existe alors un couplage unidirectionnel du système (a) au système (b), car l'état de (a) influence sur le système (b) tandis que le système (b) n'a aucune influence sur le système (a). Le système (a) est alors le maître (ou l'émetteur) et le système (b) est l'esclave (ou le récepteur). Si $k_{ai} \neq 0$ et $k_{bj} \neq 0$ pour au moins une valeur de $i = 1,2,3$ et au moins une valeur de $j = 1,2,3$, alors un couplage bidirectionnel est établi entre les deux systèmes, c'est-à-dire que chaque système est influencé par l'autre.

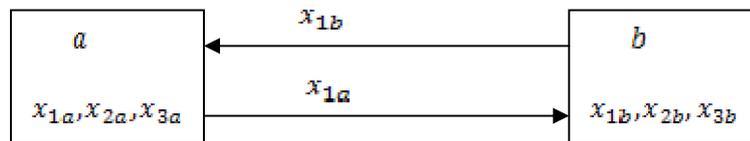


Figure (II-8) : Schéma de synchronisation bidirectionnel.



Figure (II-9) : Schéma de couplage unidirectionnel.

Lorsque la synchronisation de deux systèmes est atteinte, les termes de couplage contenant les coefficients k deviennent nuls. Cela veut dire que $x_a = x_b$ et qu'un comportement commun est obtenu pour les systèmes. En effet, la dimension du système est réduite de 6 à 3.

Dans le cas de la figure (II-6), qui est un couplage bidirectionnel, si nous mettons un suiveur de tension en série et avant le potentiomètre, le couplage devient alors unidirectionnel.

Dans le contexte du système de l'exemple, nous considérons le vecteur de dimension 6 :

$$z(t) = \begin{pmatrix} X_a(t) \\ X_b(t) \end{pmatrix}$$

Nous supposons que les deux systèmes sont synchronisés, c'est-à-dire $X_a(t) = X_b(t)$.

Imaginons maintenant que z soit légèrement perturbé. Si la synchronisation des deux systèmes chaotiques est stable, alors z revient à sa position initiale et les deux systèmes restent synchronisés. Pour étudier ce problème, considérons $x_a - x_b = \Delta$ et par soustraction des équations du système b de celles du système a , ensuite, nous linéarisons le système obtenue par rapport à la perturbation Δ . Nous obtenons alors :

$$\dot{\Delta} = Df(x)\Delta - k\Delta_1 \quad (II - 10)$$

Dans le $Df(x)$ est la matrice jacobéenne de $f(x)$, $X(t) = X_a(t) = X_b(t)$ représente la situation de synchronisation chaotique vérifiant $\dot{x} = f(x)$ et $k = [k_{a1} + k_{b1}, k_{a2} + k_{b2}, k_{a3} + k_{b3}]^T$.

Si pour $|X_a(0) - X_b(0)| < \varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$ et petit), nous obtenons $|X_a(t) - X_b(t)| \rightarrow 0$ pour $t > 0$, on dit alors que la synchronisation est stable. La synchronisation chaotique sera globalement stable si pour toute trajectoire $X(t)$ sur l'attracteur chaotique du système synchronise $\dot{X} = f(x)$ (comportement commun), les exposants de Lyapunov sont négatifs lorsque le système est soumis à une légère perturbation Δ_0 .

Les méthodes de synchronisation chaotique expliquées jusqu'ici sont basées sur l'utilisation de systèmes identiques, même s'il existe une légère différence entre leurs paramètres. On se demande maintenant ce qui se passerait si les systèmes n'étaient pas du tout identiques, et même de structure différente ?

Dans la figure (II-9), deux systèmes chaotiques couplés de façon unidirectionnelle (que l'on note aussi « syntonisation ») sont considérés avec des équations de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = g(y, h(x)) \end{cases} \quad (II - 11)$$

Où x et y sont respectivement de dimension n et m . Le système y est piloté par une fonction de x , c'est à dire $h(t)$. Il existe une synchronisation entre les deux systèmes si l'état y est déterminé uniquement par x , c'est-à-dire :

$$y = \phi(x) \quad (II - 12)$$

Dans le quel ϕ ne dépend pas des conditions initiales de y . Ce type de synchronisation est appelé « synchronisation globale ».

Il existe une autre définition pour la synchronisation globale des systèmes chaotiques, et d'après cette définition, la synchronisation globale apparaît si pour toutes conditions initiales x_0 du système pilote x , le système de réponse y est asymptotiquement stable, c'est-à-dire qu'il existe une région B de l'espace de y telle que pour deux points initiaux y_{10} et $y_{20} \in B$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, x_0, y_{10}) - y(t, x_0, y_{20})\| = 0 \quad (II - 13)$$

Où $y(t, x_0, y_{10}), y(t, x_0, y_{20})$ sont des trajectoires dans B (pour t suffisamment grand) générées à partir de (x_0, y_{10}) et (x_0, y_{20}) .

II.4. Conclusion :

Certains systèmes chaotiques possèdent des propriétés d'auto-synchronisation, c'est-à-dire qu'on peut les décomposer en deux sous-systèmes, l'un maître, l'autre esclave, pouvant se synchroniser sous l'effet d'un couplage avec un signal commun. Nous avons ainsi réussi à démontrer que le chaos peut être maîtrisé et même exploiter. Comme exemples d'applications,

on peut citer l'utilisation du chaos dans l'accroissement de la puissance d'un LASER, le contrôle des petites perturbations intervenant lors de son réglage qui gênent la finesse du faisceau; le contrôle des oscillations dans des réactions chimiques; la synchronisation des entrées de circuits électriques dans le codage des messages électroniques pour une meilleure sécurité dans les communications, etc. Dans tous les schémas proposés en sécurité de communication et utilisant les idées de synchronisation, il existe un bruit inévitable qui dégrade la qualité du message transmis, et les différentes techniques utilisées pour sécuriser l'information par un signal chaotiques seront détaillées dans le chapitre suivant.

III.1.Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons une application des résultats introduits dans les chapitres précédents à la synchronisation et au cryptage/décryptage utilisé dans les systèmes de communication chaotiques, ensuite nous exposons les principales implémentations utilisant des systèmes chaotiques pour les communications. Notamment le masquage, la modulation Chaos Shift keying(CSK), ainsi que la modulation Différential Chaos Shift keying(DCSK). Nos résultats interviennent au niveau de la synchronisation qui constitue une étape centrale dans les schémas de communication.

III.2. Utilisation du chaos dans les systèmes de télécommunication :

Les signaux chaotiques peuvent être utilisés pour la transmission de l'information principalement pour deux objectifs. Le premier objectif est de protéger l'information transmise et dans ce cas les applications réalisées sont en compétition avec les méthodes de cryptographie classiques. Un deuxième objectif est d'étaler le signal informationnel avec tous les avantages des techniques à étalement de spectre.

Il existe deux approches possibles pour l'utilisation du chaos dans un système de télécommunication. Dans la première configuration, la partie chaotique du système émetteur récepteur est traitée en bande de base (figure III-1), l'avantage de cette implémentation est que les systèmes chaotiques à l'émission et à la réception sont facilement réalisables, et l'inconvénient est que cela complique la partie du système en bande de base puisque dans les systèmes conventionnels, celle-ci est traitée numériquement alors que pour le chaos, le système en bande de base serait par définition analogique. De plus, pour les récepteurs cohérents, il est nécessaire de reproduire à l'identique en réception le système chaotique ; ce qui peut se révéler relativement complexe.

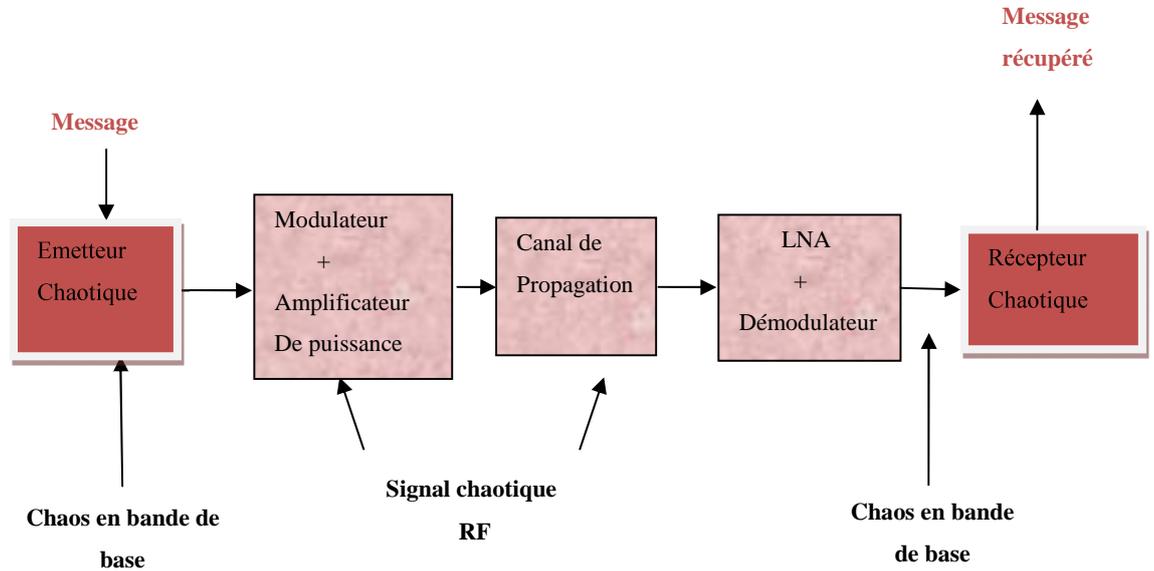


Figure (III-1): Chaos en bande de base.

La deuxième configuration envisageable consiste à gérer directement le chaos en fréquence intermédiaire (FI) ou en RF (radiofréquence). Contrairement à la figure précédente où l'architecture du système utilise un schéma classique, c'est-à-dire un codage du signal en bande de base suivi par modulation à fréquence FI ou RF, cette deuxième implémentation regroupe à la fois le codage et la modulation. Cela permet de simplifier l'architecture du système d'émission-réception. Cependant, la difficulté dans ce cas, réside dans la réalisation d'un générateur de chaos fiable en FI ou en RF. De plus, même si le générateur de chaos délivre un signal chaotique en RF, l'introduction du message est effectuée au niveau de ce sous-système.

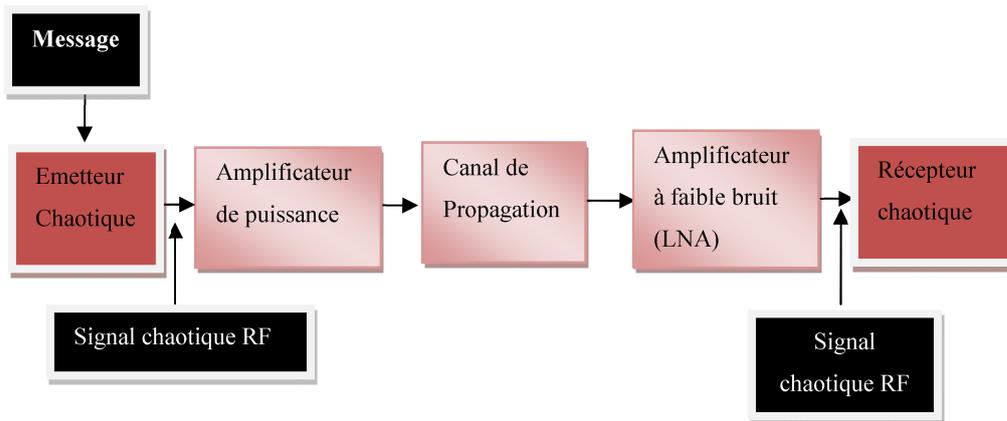


Figure (III-2): Système avec générateur de chaos FI

III.3. Masquage de l'information par un signal chaotique :

La méthode du masquage chaotique a été la première solution proposée dans la littérature comme application du chaos aux communications. L'idée de base consiste à additionner le message en bande de base (figure III-3). Au niveau du récepteur, un système chaotique identique à celui de l'émetteur essaye de se synchroniser avec le signal chaotique reçu $y(t)$. Du point de vue de la synchronisation des deux systèmes chaotiques, le message $m(t)$ est pris comme un élément du signal $x(t)$. En considérant un canal de propagation idéal non bruité et sans trajets multiples, le signal chaotique reçu s'écrit :

$$y(t) = m(t) + x(t) \quad (\text{III-1})$$

En utilisant par exemple le principe de Pecora et Carroll pour la synchronisation et en supposant que les deux systèmes chaotiques soient dans des configurations favorables (problèmes des conditions initiales), l'erreur de synchronisation ne dépend que de $m(t)$. Donc, si l'amplitude du message $m(t)$ est suffisamment faible par rapport au signal chaotique $x(t)$, le signal contenant l'information ne modifie que modérément $y(t)$ et la synchronisation s'effectue correctement.

En suite, pour démoduler le message, il suffit de soustraire le signal à l'entrée du système chaotique ($y(t)$) avec celui en sortie de ce même dispositif $\hat{y}(t)$:

$$m'(t) = y'(t) - \hat{x}(t) \quad (\text{III-2})$$

Si la synchronisation est parfaite alors :

$$\hat{x}(t) = x(t) \text{ et } \hat{m}(t) = m(t).$$

En considérant un canal de propagation réel qui prend compte de la non-linéarité de l'amplificateur de puissance, les trajets multiple...etc. Cette méthode ne se révèle pas très efficace car elle est sensible au bruit. Au cours de la démodulation, le bruit additif ne se distingue pas du message et il est nécessaire de pouvoir l'éliminer surtout si le niveau de bruit n'est pas suffisamment faible par rapport à celui du message.

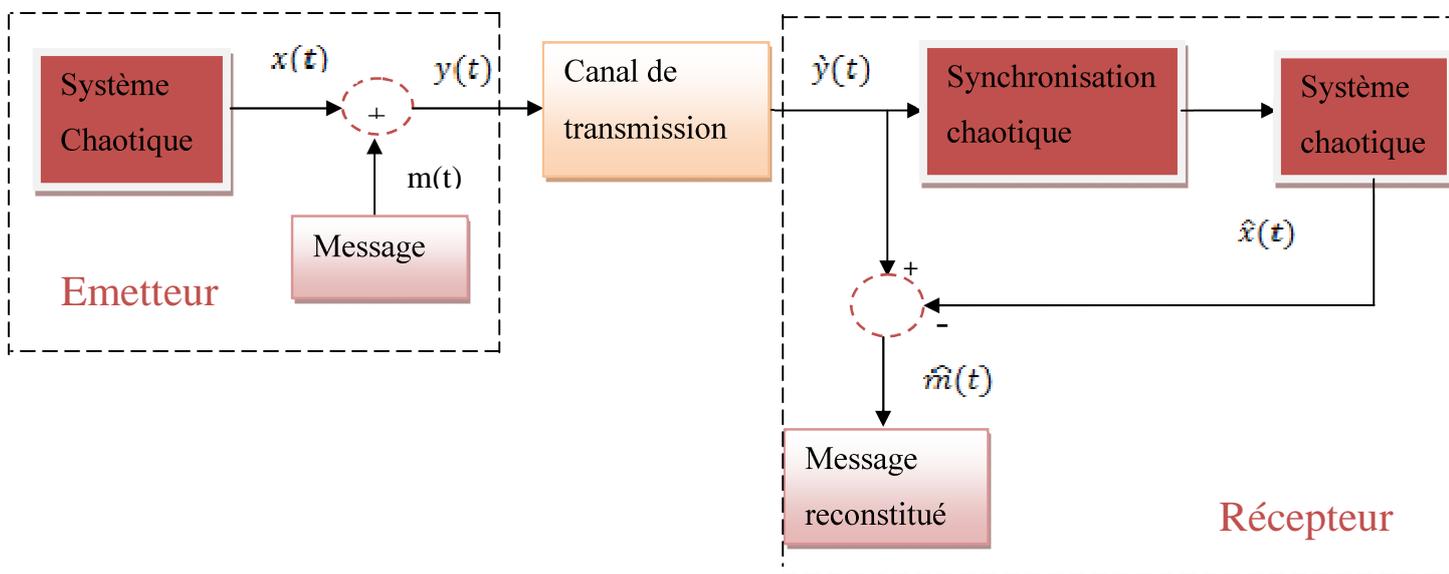


Figure (III-3) : Schéma de communication par addition.

Même si cette méthode n'a pas trouvé d'applications directes sur des canaux radiofréquences elle est envisagée comme solution de cryptage sur des canaux à fort SNR, comme c'est le cas dans la fibre optique.

III.4. Chaos Shift Keying (CSK):

La technique CSK est définie comme une modulation numérique qui associe à chaque symbole informationnel un attracteur où une somme d'attracteurs différents, en se plaçant dans une période de symbole de durée

T . Cette définition générale peut être développée analytiquement avec la supposition que chaque attracteur va générer une fonction de base $g_j(t)$ et que l'ensemble des signaux porteurs de l'information s'exprime alors, sur l'intervalle $t \in [iT, (i + 1)T]$. Cette technique

développée en 1993 est illustrée par la figure (III-4). Elle consiste en deux systèmes chaotiques identiques, l'émetteur et le récepteur. Le signal chaotique $c(t)$ est l'une des variables d'état du système dans l'émetteur. Le message d'information (le signal utile qui doit être crypté) $m(t)$, qui est typiquement très faible devant $c(t)$, est ajouté au signal $c(t)$ et donne le signal transmis $s(t)$.

Comme $c(t)$ est très complexe et $m(t)$ est beaucoup plus petit que $c(t)$, alors il est difficile de séparer $m(t)$ du signal $s(t)$ sans connaître $c(t)$.

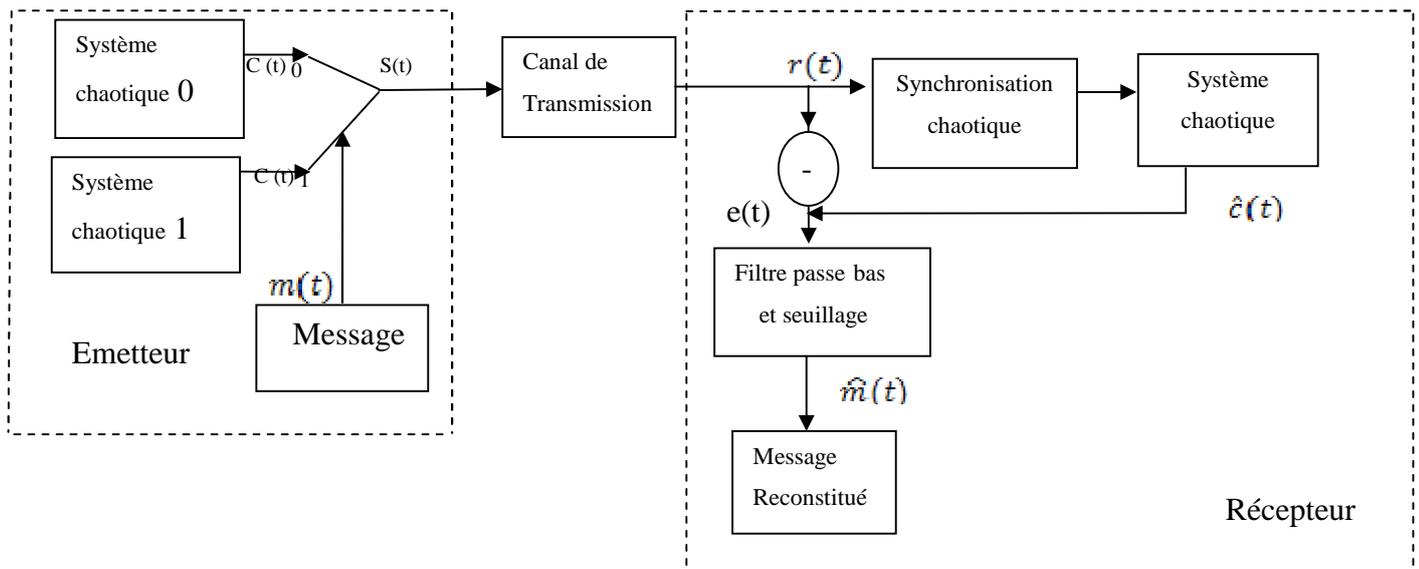


Figure (III-4): Schéma de communication par décalage(CSK).

III.5. Démodulation cohérente par synchronisation du chaos :

Dans ce type de récepteur, suivant la valeur du bit émis, le signal reçu se synchronisera soit sur le système chaotique n°1 soit sur le système n°2. Pour chaque bit transmis, seul un des deux systèmes chaotiques sera synchronisé, l'autre sera automatiquement désynchronisé. La figure (III-5) montre l'architecture du récepteur cohérent. Si le signal d'erreur $e(t)$ tend vers 0 alors le système chaotique n°1 est synchronisé. A l'inverse lorsque le système n°2 est synchronisé alors le signal $\hat{e}(t)$ tend vers 0.

Chapitre III : Utilisation du chaos dans les systèmes de télécommunication.

Il est à noter que certains démodulateurs CSK cohérent n'utilisent qu'un seul des deux systèmes.

Supposons que le système n°1 soit le système employé en réception et admettons qu'il permette de démoduler le bit 0. Lorsque ce système sera synchronisé, le bit récupéré en sortie du démodulateur sera le bit 0. A l'inverse, en cas de désynchronisation, le bit d'information obtenu sera un 1. L'avantage de cette implémentation est d'alléger la structure du récepteur. Cependant, le risque de récupérer un bit erroné est plus important que dans la première architecture puisque dans ce cas, la décision ne se fait plus que sur un seul signal de synchronisation au lieu de deux auparavant.

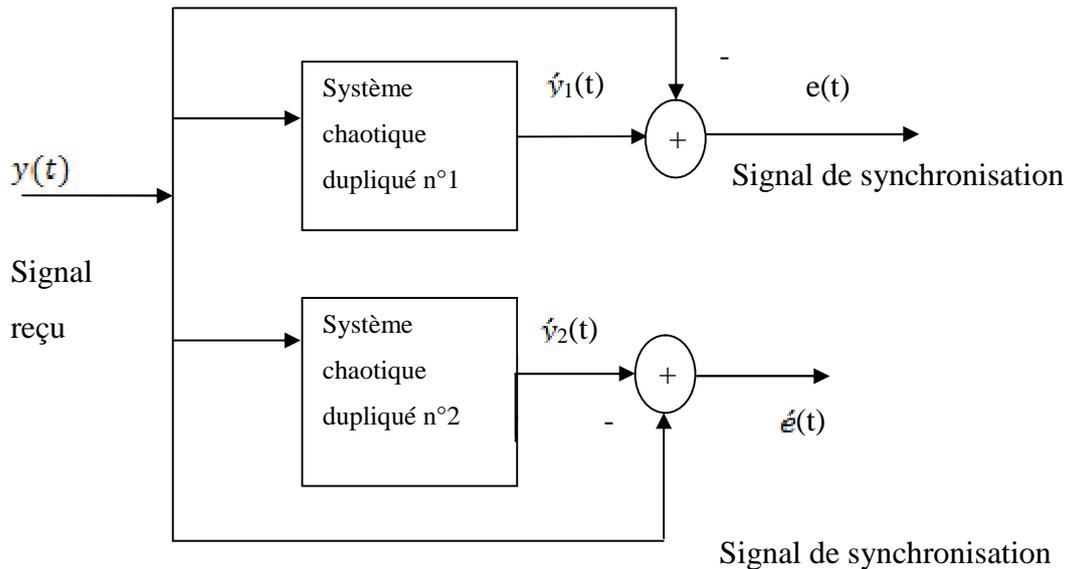


Figure (III -5) : Démodulateur CSK cohérent.

La synchronisation peut être établie de différentes façons. H.Dedieu a réalisé un système de transmission CSK à partir du circuit de Chua où la synchronisation a été effectuée par décomposition en sous systèmes (concept de Pecora et Carroll). Par contre M.Hasler, toujours en utilisant le circuit de Chua, réalise la synchronisation par retour linéaire qui est employée en automatique.

Les systèmes CSK basés sur une démodulation cohérente sont nettement plus robustes vis-à-vis du bruit que le masquage de l'information par un signal chaotique. Par

contre, le débit du signal binaire est moins important. En effet, il est impératif que la durée d'un bit soit supérieure au temps que mettent les deux systèmes chaotiques en réception à se synchroniser.

Cependant, dans le cas où le canal est fortement bruité, il est préférable d'utiliser une démodulation incohérente dans laquelle la synchronisation du chaos n'est pas employée.

III.6. Démodulation CSK incohérente :

Dans une modulation conventionnelle de type PSK (Phase Shift Keying) ou FSK (Frequency Shift Keying), l'information est portée respectivement par la phase et la fréquence de la porteuse dont la forme d'onde est sinusoïdale. Dans le cas d'une modulation CSK, le message ne peut pas être transmis via la phase ou la fréquence du signal chaotique dans la mesure où le signal chaotique n'est pas périodique. Il est donc nécessaire de déterminer un autre paramètre du signal chaotique permettant la transmission de l'information binaire. Le paramètre considéré pour la modulation CSK est l'énergie du signal chaotique contenue dans chaque segment de durée T_b ; T_b étant la durée d'un bit d'information. Rappelons que chaque bit « 0 » et « 1 » est transmis par un signal chaotique provenant de deux générateurs différents et qu'à un bit d'information correspond une séquence de durée T_b de l'un ou de l'autre des deux signaux chaotiques. Contrairement au système de communication classique, le paramètre (l'énergie) ne peut pas être déterminé précisément mais seulement estimé. En effet, il doit être considéré comme une variable aléatoire et le décodage de l'information au niveau du circuit de décision qui est un simple comparateur à seuil se fait par rapport à la variance de cette variable aléatoire. Pour chacun des deux signaux chaotiques, cette variance sera proche de la valeur moyenne du paramètre. Un choix judicieux de la valeur seuil du circuit de décision permettra de décoder le message.

Cependant, la variance du paramètre estimé dépend à la fois du niveau de bruit dans le canal, c'est-à-dire du rapport signal sur bruit, et du signal chaotique utilisé ce qui fait que le choix de la valeur seuil n'est pas aisé. Mais pour un rapport signal sur bruit donné ainsi que pour un signal chaotique considéré, il est possible de diminuer la variance en augmentant la durée d'estimation c'est-à-dire en diminuant le débit de l'information. La diminution de cette variance permet d'améliorer les performances en bruit du démodulateur non cohérent au détriment du débit d'information à transmettre.

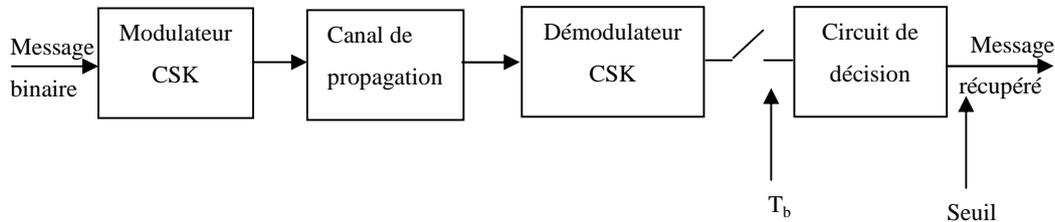


Figure (III-6) : Architecture modulation CSK- démodulation incohérente.

III.7. Differential chaos shift keying (DCSK):

La modulation DCSK n'utilise qu'un seul générateur de chaos contrairement à la modulation CSK et celui-ci fonctionne en continu. La transmission de l'information se décompose en deux parties. Chaque bit transmet deux fois le même segment du signal chaotique : La première séquence sert de référence alors que la seconde véhicule l'information.

Si le bit à transmettre est un « 1 » alors les deux segments seront égaux, par contre si le bit est « 0 » alors la seconde séquence chaotique sera en opposition de phase par rapport à la première.

Appelons : $x(t)$ le signal en sortie du générateur de chaos.

T_b : La durée d'un bit d'information

T_k : L'instant à partir duquel le $k^{\text{ième}}$ bit est transmis.

$Y(t)$: Le signal en sortie du modulateur DCSK.

Chaque segment chaotique sera de durée T_b et pour chaque bit transmis la séquence chaotique correspondante sera de longueur $2 \times T_b$.

Si l'information binaire à transmettre « 1 » à l'instant t_k alors $y(t)$ s'écrit :

$$Y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{Pour } t_k \leq t < t_k + T_b. \\ x(t - T_b) & \text{Pour } t_k + T_b \leq t < t_k + 2T_b. \end{cases} \quad (\text{III-3})$$

Si l'information binaire à transmettre est un « 0 » à l'instant t_k alors $y(t)$ s'écrit :

$$Y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{Pour } t_k \leq t < t_k + T_b. \\ -x(t - T_b) & \text{Pour } t_k + T_b \leq t < t_k + 2T_b. \end{cases} \quad (\text{III-4})$$

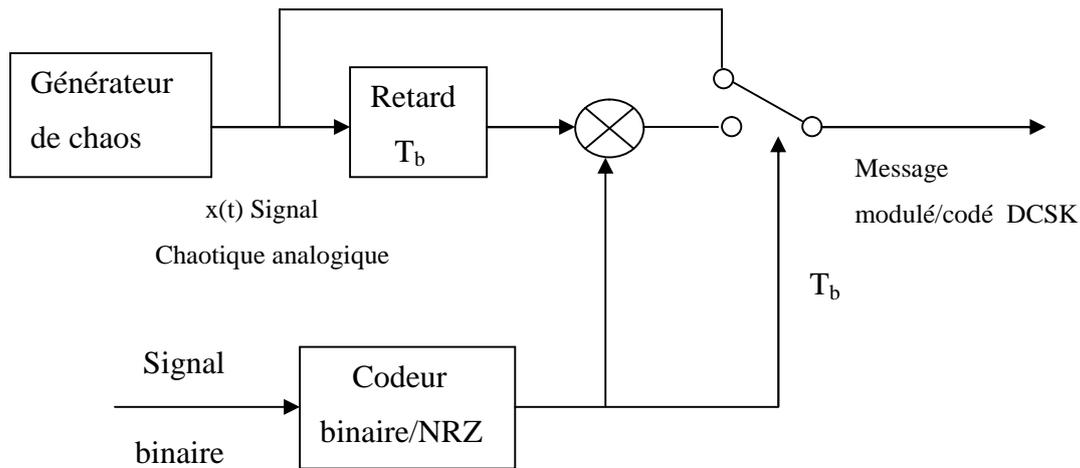


Figure (III-7) : Exemple d'architecture de modulateur DCSK.

La modulation DCSK entraîne une division par deux du débit de l'information et un doublement de l'énergie transmise par bit par rapport à la CSK.

Le schéma de la modulation est présenté sur la figure (III-8). Elle consiste à corrélérer le signal chaotique reçu avec lui-même mais décalé de la durée d'un bit. Que

l'information soit un « 1 » ou un « 0 », le résultat de cette corrélation sur une durée t_b est un pic positif dans le cas d'un 1 et négatif dans l'autre cas :

$$y(t) = \int_{t_k+T_b}^{t_k+2T_b} \hat{x}(t) \cdot \hat{x}(t - T_b) dt \quad (\text{III-5})$$

Avec $\hat{x}(t)$ le signal chaotique reçu perturbé par un bruit $n(t)$.

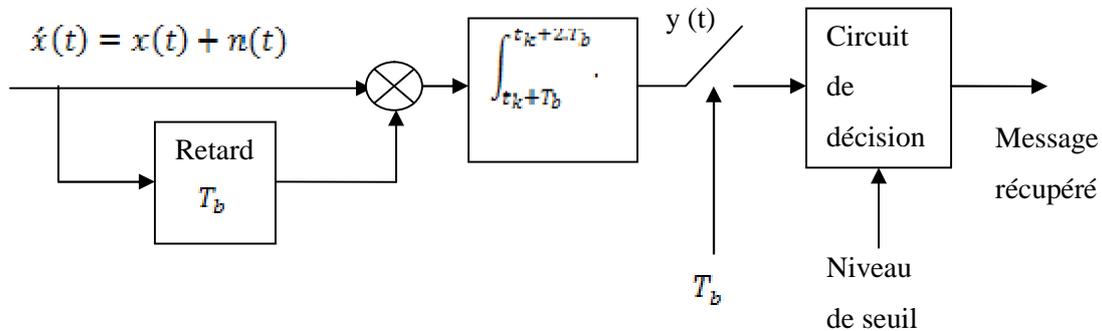


Figure (III-8) : Architecture du démodulateur DCSK.

L'avantage par rapport à une modulation CSK est que le niveau de seuil ne dépend ni du rapport signal sur bruit à l'entrée du récepteur ni du signal chaotique envisagé puisqu'il s'agit de comparer deux séquences identiques (au signe près) du signal chaotique.

Les performances en bruit de ce type de systèmes sont comparables à celles obtenues avec les systèmes conventionnels conçus à partir de modulation sur porteuse sinusoïdale.

La figure (III-8) montre le taux d'erreurs bits (défini comme le nombre de bits erronés en réception / nombre de bits transmis) de la modulation FSK à réception incohérentes. Ce résultat présenté par M.P. Kennedy permet de voir que la modulation CSK n'est pas du tout compétitive vis-à-vis de la FSK alors que la DCSK, par contre, même si elle n'est pas aussi performante, reste comparable.

III.8.Exemple d'un système de communication chaotique réalisé en optoélectronique :

Cet exemple de système de communication optique reprend la technique du masquage de l'information avec cependant une différence fondamentale. Le message participe directement à la dynamique du signal optique chaotique contrairement au masquage classique qui se traduit par l'ajout du message au chaos.

L'émetteur est constitué par un oscillateur optoélectronique générant de l'hyper chaos en longueur d'onde. Il est constitué :

◆ D'une diode laser de longueur d'onde centrale λ_0 obtenue par l'application d'un courant de polarisation I_0 . Cette longueur d'onde γ peut varier de manière continue autour de λ_0 à l'aide d'un courant de modulation $i(t)$ superposé à I_0 et s'écrit :

$$\gamma = \lambda_0 + s \cdot i(t) \quad (\text{III-6})$$

Avec : $\gamma = \lambda_0 + s \cdot i(t)$ où s désigne la sensibilité de la diode laser (en m/A)

La puissance de sortie optique P_0 de la diode est indépendante de la longueur d'onde en appliquant un courant continu de correction I_c .

◆ Un filtre optique opérant comme un élément non-linéaire sur la longueur d'onde et dont la non-linéarité s'écrit :

$$f(\gamma) = \sin^2\left(\frac{\pi \cdot D}{\gamma}\right) \quad (\text{III-7})$$

Avec D la différence de chemin optique dans l'élément non linéaire.

Les variations de la longueur d'onde autour de λ_0 étant faibles, l'expression (III-7) peut être approchée par l'équation suivante :

$$f(\gamma) = \sin^2\left(\frac{\pi \cdot D}{\lambda_0^2} \cdot \lambda - \varphi_0\right) \quad (\text{III-8})$$

Avec $\varphi_0 = \frac{\pi \cdot D}{\lambda_0}$ et $\gamma = \lambda + \lambda_0 = s \cdot i$

◆ Une photo détectrice PD permettant la conversion de la puissance optique en un photo courant avec un facteur de conversion K (A/W).

◆ Une ligne à retard qui introduit un retard T supérieur au temps de repense τ de la boucle de l'oscillateur.

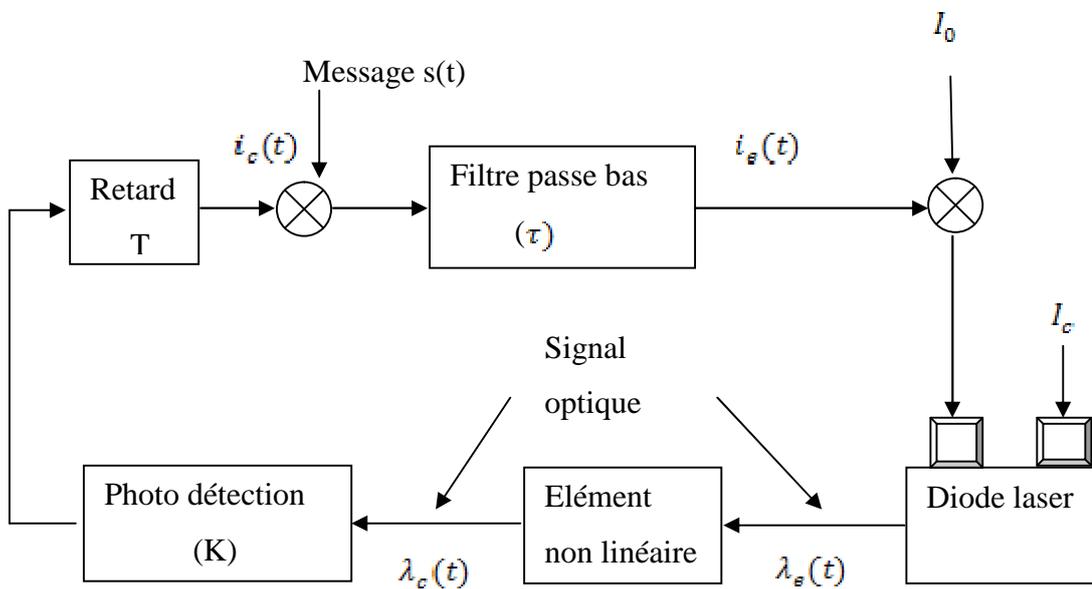


Figure (III-9) : Architecture de l'émetteur (Oscillateur optoélectronique).

La longueur d'onde du signal optique en sortie de l'oscillateur est donnée par l'équation d'IKEDA :

$$\lambda_s(t) + \tau \cdot \frac{d\lambda_s(t)}{dt} = B_\lambda \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot D}{\lambda_0^2} \cdot \lambda_s(t - T) - \varphi_0\right) \quad (\text{III-9})$$

Avec: $B_\lambda = K \cdot P_0 \cdot S$ et $\varphi_0 = \frac{\pi \cdot D}{\lambda_0}$

$\lambda_s(t)$: Représente la déviation de la longueur d'onde par rapport à λ_0 .

Chapitre III : Utilisation du chaos dans les systèmes de télécommunication.

B_λ : Représente le paramètre de bifurcation (même unité que λ_e) du système dynamique.

Le signal chaotique (hyper chaotique) en longueur d'onde ainsi généré permet d'envisager le codage de l'information.

La méthode de codage consiste à superposer électriquement le message $s(t)$ au signal chaotique $i_e(t)$ se propageant dans la boucle de la figure (III-9). la longueur d'onde émise $\lambda_e(t)$ s'écrit sous la forme :

$$\lambda_e(t) = \lambda_0 [i_e(t) + s(t)] \quad (\text{III-10})$$

Pour respecter l'opération de masquage (le message doit être noyé dans le signal chaotique), il est nécessaire de respecter la condition suivante $s(t) \ll i_e(t)$. D'un point de vue spectral, le message $s(t)$ est bande étroite alors que le signal chaotique émis est large bande et le niveau de ce dernier est plus important que celui de l'information.

Le récepteur est présenté sur la figure (III-10). Il est basé sur un processus d'auto synchronisation qui consiste à reproduire un régime chaotique identique à celui de l'émetteur et à piloter ce système par le signal reçu ; le récepteur est donc un système dynamique non autonome. Sur l'entrée du récepteur, le signal optique reçu est séparé en deux voies. Sur la première voie, le signal optique est converti en un signal électrique $i_d(t)$ par le biais d'un détecteur de longueur d'onde alors que sur la seconde, il passe à travers une non-linéarité identique à celle de l'émetteur et qui engendre le même régime chaotique qu'à l'émission. En fait, cette voie reproduit l'architecture de l'oscillateur optoélectronique mais en boucle ouverte. Une partie du signal optique reçu traverse l'élément non linéaire puis convertie en un signal électronique par le photodétecteur.

L'équation régissant le comportement dynamique de ce système non autonome s'écrit :

$$\lambda'_e(t) + \tau \frac{d\lambda'_e(t)}{dt} = B_\lambda \cdot \sin^2\left(\frac{\pi D}{\lambda_0^2} \cdot \lambda_e(t-T) - \varphi_0\right) \quad (\text{III-11})$$

Avec $\lambda'_e(t)$ la longueur d'onde en sortie de la non-linéarité.

Pour finir, le signal $i'_e(t)$ après avoir été retardé d'un temps T et filtré par le même filtre passe bas présent sur l'émetteur est soustrait à $i_d(t)$.

Lorsque l'auto synchronisation est effectuée, le signal résultant de cette soustraction est égal au message $s(t)$ transmis. En supposant que les différents éléments du récepteur soient

Chapitre III : Utilisation du chaos dans les systèmes de télécommunication.

strictement identiques à ceux de l'émetteur et qu'aucun bruit parasite ne vienne perturber la transmission, le système sera parfaitement synchronisé au bout d'un temps T.

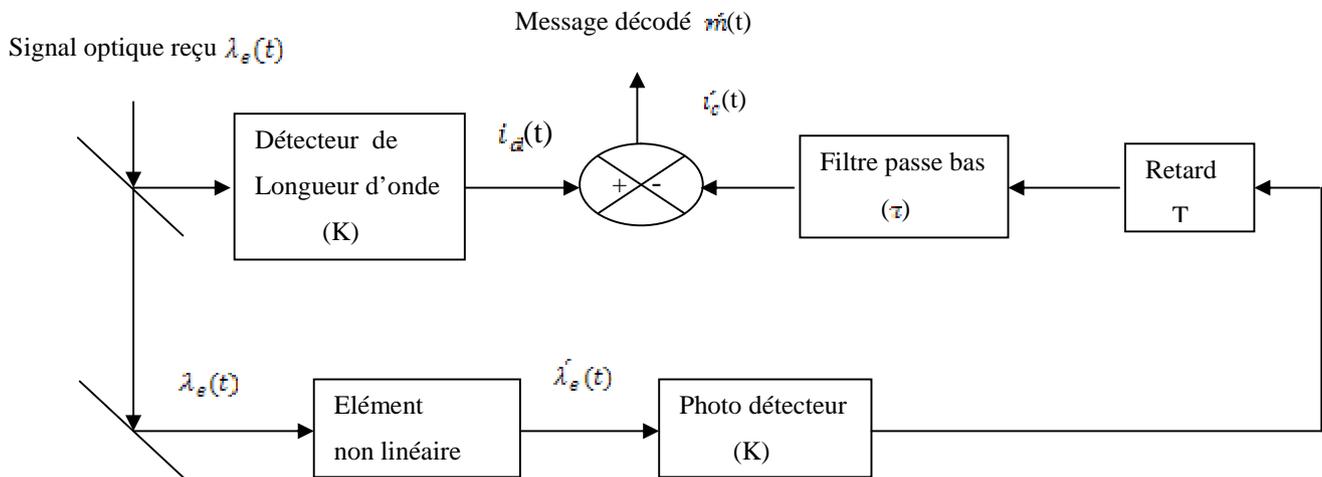


Figure (III-10) : Architecture du récepteur opto électronique.

Processus de codage décodage :

Considérons le schéma bloc simplifié du système d'émission réception de la figure (III-11) suivante:

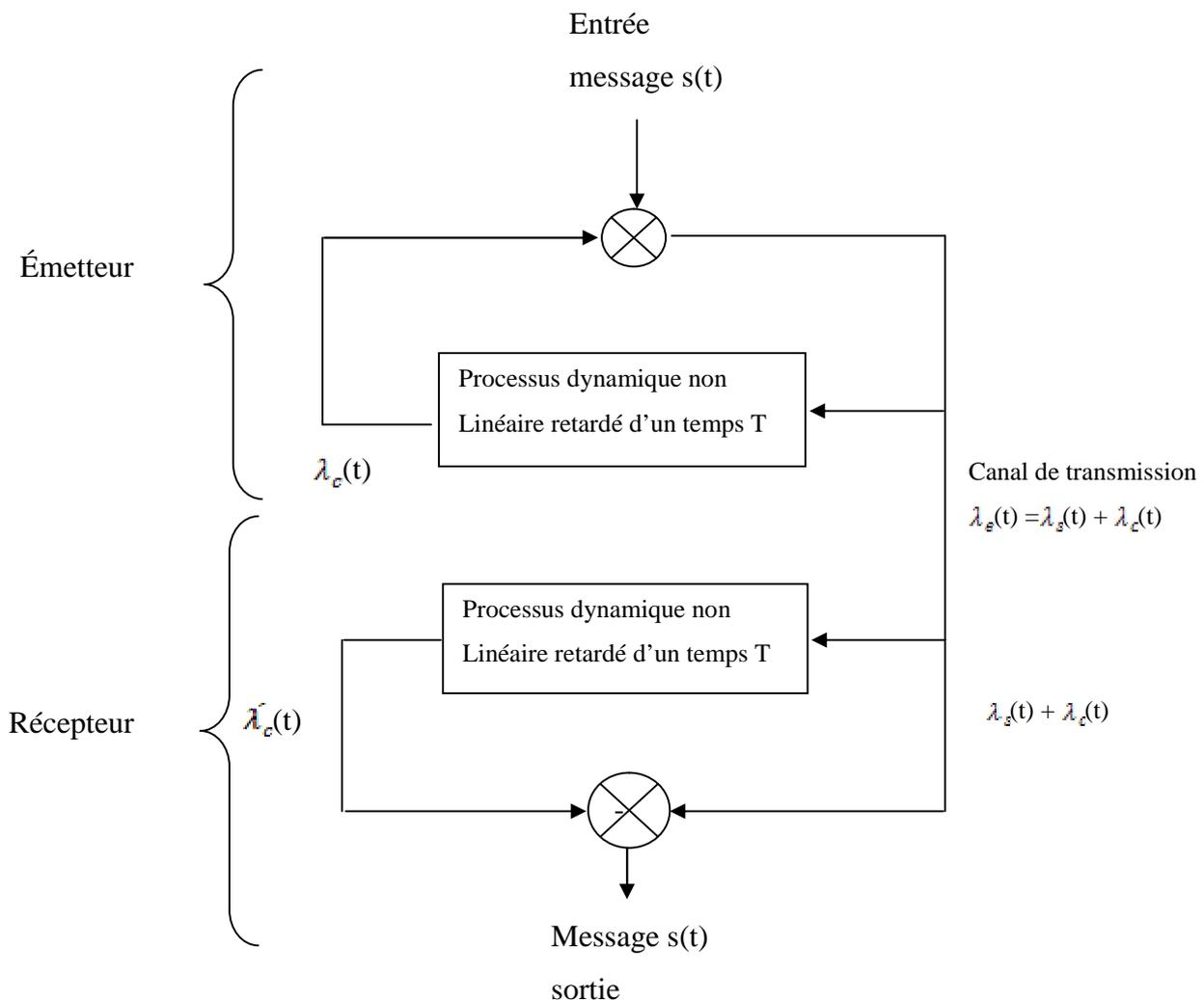


Figure (III-11) : Principe d'émission réception.

Appelons NL (λ) le processus dynamique non linéaire retardé d'un temps T et supposons que celui-ci est parfaitement identique à l'émission et à la réception.

L'expression $\lambda_e([t, t + T])$ désigne l'évolution de la longueur d'onde $\lambda_e(t)$ émise durant l'intervalle de temps $[t, t + T]$; de la même façon,

$\lambda_e([t - T, t])$ indique la longueur d'onde émise durant l'intervalle de temps $[t - T, t]$.

Considérons le processus de codage autour de l'instant $t = t_0$.

Durant l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$, l'expression de λ_e s'écrit :

$$\lambda_e([t_0, t_0 + T]) = \lambda_s([t_0, t_0 + T]) + \lambda_c([t_0, t_0 + T]) \quad (\text{III-12})$$

Avec $\lambda_s(t) = S, s(t)$ la longueur d'onde du message.

La longueur d'onde λ_c en sortie du processus non linéaire retardé s'écrit :

$$\lambda_c([t_0, t_0 + T]) = \text{NL}\{\lambda_e([t_0 - T, t_0])\} \quad (\text{III-13})$$

De ce fait, l'évolution de $\lambda_e(t)$ pendant l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$ devient :

$$\lambda_e([t_0, t_0 + T]) = \lambda_s([t_0, t_0 + T]) + \text{NL}\{\lambda_e([t_0 - T, t_0])\} \quad (\text{III-14})$$

Durant ce même laps de temps, l'évolution de la longueur d'onde $\lambda_c(t)$ en sortie du récepteur s'écrit :

$$\hat{\lambda}_s([t_0, t_0 + T]) = \lambda_s([t_0, t_0 + T]) +$$

$$NL\{\lambda_s([t_0 - T, t_0])\} - \hat{\lambda}_c([t_0, t_0 + T]) \quad (\text{III-15})$$

$$\text{Or : } \hat{\lambda}_c([t_0, t_0 + T]) = NL\{\lambda_s([t_0 - T, t_0])\}$$

$$\text{D'où : } \hat{\lambda}_s([t_0, t_0 + T]) = \lambda_s([t_0, t_0 + T]) \quad (\text{III-16})$$

$$\text{Et : } \hat{m}(t) = m(t) \quad (\text{III-17})$$

En supposant que l'émetteur et le récepteur soient parfaitement identiques et que le canal de propagation n'introduise aucun bruit, c'est-à-dire que le signal émis soit égal au signal reçu, le récepteur permet de récupérer le message par soustraction de la longueur d'onde reçue avec celle obtenue en sortie du non linéarité du récepteur.

III.9. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté différentes applications du chaos que se soit pour la synchronisation ou pour le cryptage/décryptage de signaux dans les systèmes de communication chaotiques. Ensuite, nous avons exposé les principales implémentations utilisant le chaos pour les communications, notamment le masquage, la modulation CSK et DCSK. Ainsi nous avons pu constater qu'un système DCSK à réception incohérente présente des performances en bruit comparables à celle d'un système FSK (Frequency Shift Keying). Par contre un système CSK à réception cohérente est peu fiable par rapport à la FSK incohérent. Dans la dernière partie, nous avons présenté un système de communication optique basé en réception sur le concept d'auto synchronisation. À l'émission, un signal optique en longueur d'onde et non en amplitude est généré à l'aide d'un oscillateur optoélectronique. Le codage de l'information est effectué par masquage, c'est-à-dire que le message est simplement additionné au signal chaotique électrique.



IV.1. Introduction :

Parmi les systèmes dynamiques qui peuvent présenter un comportement chaotique, on peut trouver les circuits électriques [21]. Ces circuits ont suscité beaucoup d'intérêts ces dernières années en raison de leurs diverses applications dans le traitement et la transmission d'information. En effet, ils sont appliqués dans la synchronisation et le cryptage des signaux [22][23], dans la transmission et la sécurité d'information [24]. Ils sont aussi souvent utilisés comme exemples simples à réaliser en vue d'illustrer le phénomène chaotique et d'implémenter les techniques de contrôle du chaos [25]. Le chaos apparaît dans de nombreux circuits possédant [26] :

- Des composants électriques avec une caractéristique non linéaire ou linéaire par morceaux (comme la résistance non linéaire du circuit de Chua).
- Les composants de commutation, comme les transistors, les diodes, les interrupteurs actifs (transistors et MOSFET) bloqués ou dans un état de conduction en fonction du signal appliqué et interrupteurs passifs (diodes) qui ont une caractéristique tension-courant fortement non linéaire.

Parmi les circuits électriques chaotiques les plus courants, on peut citer le circuit Chua [27], le circuit de jerk [28], et le circuit de Qi [29].

Le circuit de Chua est l'un des circuits le plus utilisé dans la littérature et a fait l'objet de plusieurs études [30, 31, 32,33]. Ce circuit possède des éléments simples et faciles à réaliser. Il est caractérisé par quatre éléments passifs, dont un qui possède une caractéristique non linéaire (représenté par une équation linéaire par morceaux). La présence du chaos peut être soit indésirable soit désirable, selon l'application. Dans le domaine de communication d'information, ces circuits peuvent être utilisés comme des générateurs chaotiques dans le codage des informations lors de la transmission, comme le cas de ce chapitre, ou nous allons utiliser le circuit de Chua pour synchroniser des signaux chaotique par la méthode de Pecora et Carroll, et pour masquage de l'information.

IV.2 .Modélisation du circuit de Chua : [34]

Le circuit de Chua comme présenter déjà dans le deuxième chapitre, est un système électronique bien connu, montrant des phénomènes de chaos. Pour observer des comportements chaotiques à l'aide d'un circuit électrique, le circuit doit posséder au moins un

élément non linéaire, une résistance active, trois éléments capables de stocker de l'énergie (capacité, inductance).

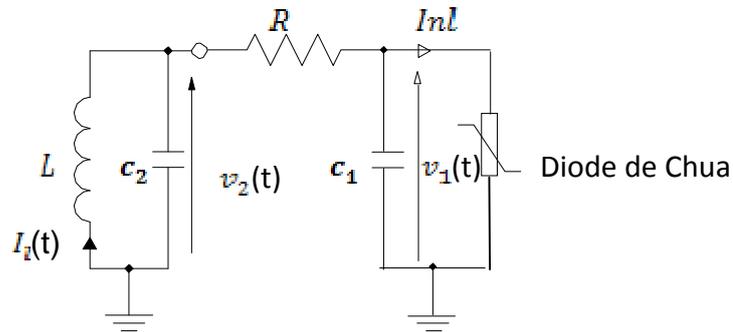


Figure (IV-1) : Circuit de Chua.

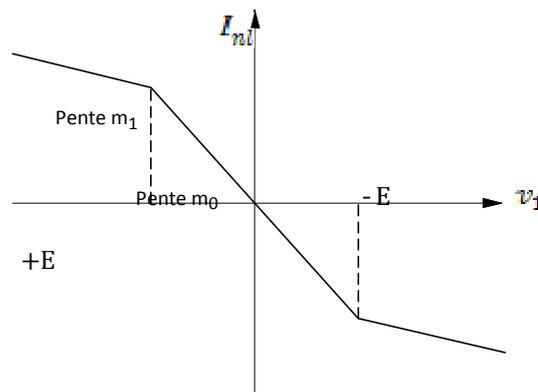


Figure (IV-2) : fonction non linéaire de la diode de Chua.

Le circuit de Chua est décrit par le système d'équations différentielles explicite suivant :

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{c_1} \left[\frac{1}{R} (v_2 - v_1) - I_{nl} \right] \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{c_2} \left[I_1 - \frac{1}{R} (v_2 - v_1) \right] \\ \frac{dI_l}{dt} = -\frac{1}{L} v_2 \end{cases} \quad (IV-1)$$

Avec $I_{nl} = f(v_1)$, la caractéristique non linéaire de l'élément actif décrit par l'équation :

$$f(v_1) = G_b v_1 + \frac{1}{2} [G_a - G_b] [v_1 + E] - [v_1 - E] \quad (IV-2)$$

Où : G_a , G_b et E sont des constantes.

Le circuit équivalent de la diode de Chua est donné par la figure (IV-3) suivante : [14]

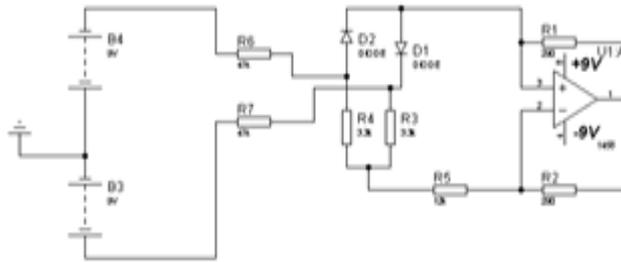


Figure (IV-3) : Circuit équivalent de la diode de Chua.

IV.3. Application du concept de Pecora et Carroll : [14]

Le circuit de Chua est décrit par trois variables d'état qui sont les suivantes : V_1 , V_2 et I_1 .

Supposons que :

- Le signal de sortie du circuit maître soit v_1 et qu'il serve à piloter le sous système G.
- Le sous-système G soit décrit par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{C_2} \left[I_1 - \frac{1}{R} (v_2 - v_1) \right] \\ \frac{dI_1}{dt} = -\frac{1}{L} v_2 \end{cases} \quad (IV-3)$$

Par analogie avec la figure (II-5) (du deuxième chapitre), $G(x, y_1)$ est défini par $x = (v_2, I_1)$ et $y_1 = v_1$.

- Le sous-système H soit décrit par les équations d'états suivantes :

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{C_1} \left[\frac{1}{R} (v_2 - v_1) - I_{nl} \right] \quad (IV-4)$$

Par analogie avec la figure (II-5) (du deuxième chapitre), $H(x_1, y)$ est défini par : $y = v_1$, et $x_1 = v_2$.

Comme le montre la figure (IV-4) suivante :

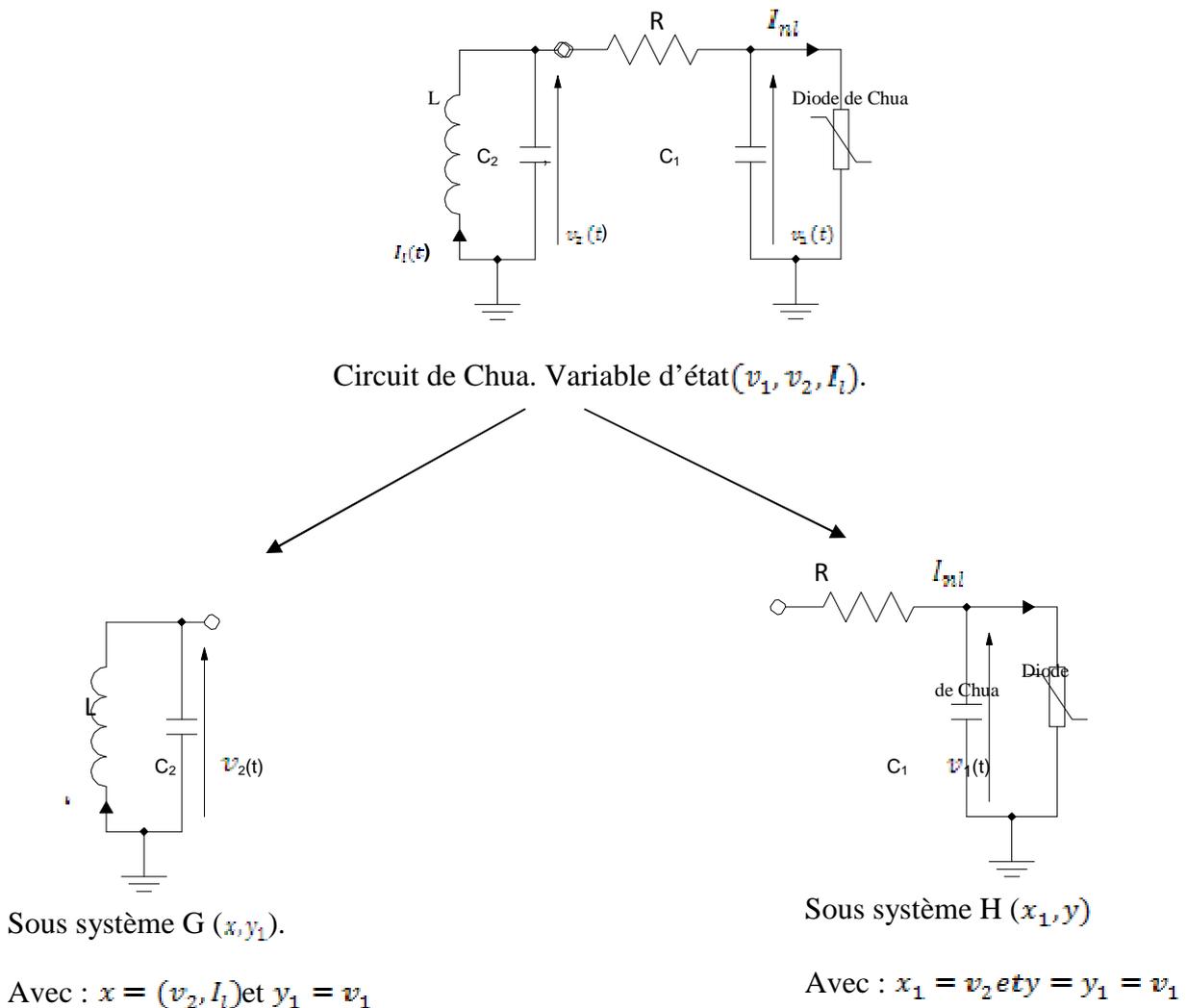


Figure (IV-4) : Décomposition du circuit de Chua en deux sous-systèmes .

Le système résultant est présenté sur la figure (IV-5). La tension v_1 en sortie du circuit de Chua pilote le sous-système dupliqué \tilde{G} qui lui-même contrôle le sous-système dupliqué \tilde{H} par l'intermédiaire de la tension \hat{v}_2 .

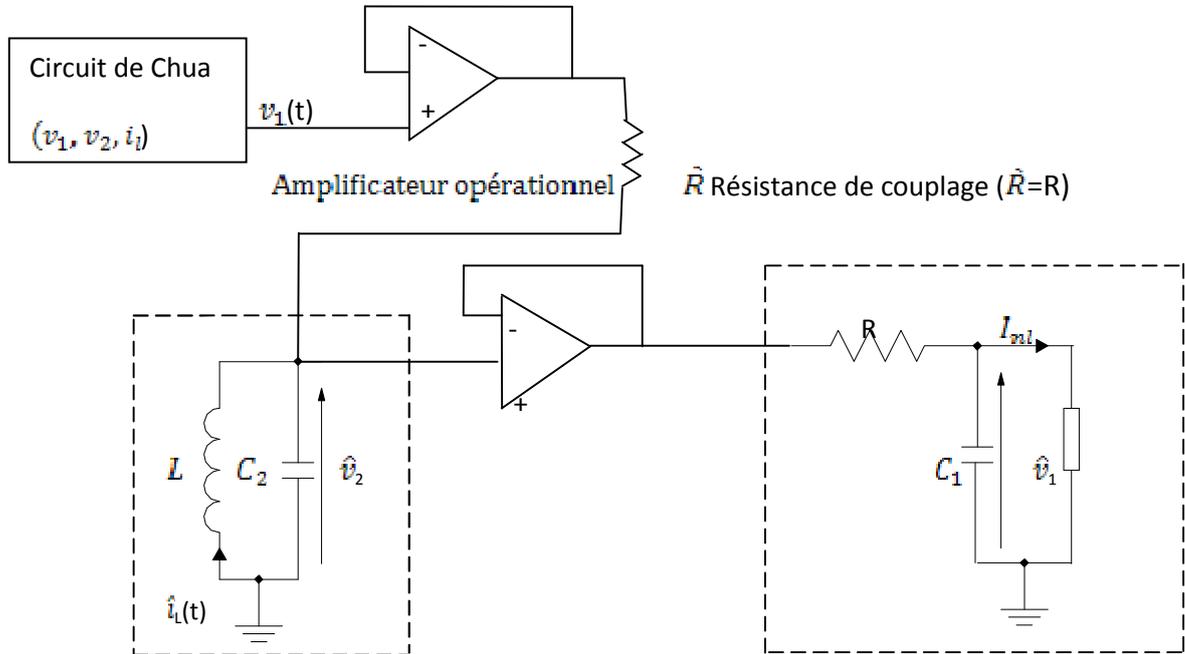


Figure (IV-5): Application du concept de synchronisation de Pecora et Carroll pour synchroniser le circuit de Chua.

Le sous-système \tilde{G} , piloté par $v_1(t)$ est un quadripôle linéaire qui de ce fait est globalement asymptotiquement stable lorsque t tend vers l'infini. Cela signifie que les variables \hat{v}_2 et \hat{I}_L convergent vers les valeurs v_2 et I_L du circuit maître lorsque t tend vers l'infini.

La convergence de \hat{v}_1 vers v_1 lorsque t tend vers l'infini dépend des paramètres du circuit de la figure (II-8) (du deuxième chapitre), (pente de la non-linéarité, valeurs des capacités, de l'inductance, de la résistance) et des conditions initiales.

La simulation étant effectuée dans le cas idéal, les deux circuits à synchroniser possédant exactement les mêmes valeurs de composants.

Les valeurs des paramètres du circuit sont présentées dans le tableau suivant :

L	C_2	C_1	R	R'
---	-------	-------	---	------

18mH	100nF	10nF	1.71KOhm	1.71KOhm
------	-------	------	----------	----------

de

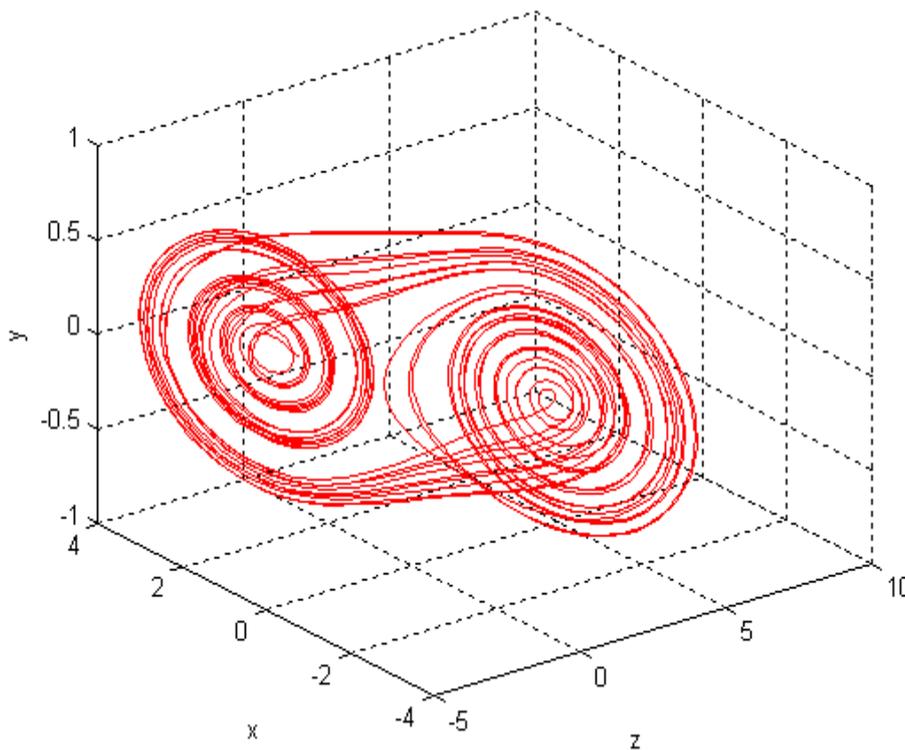
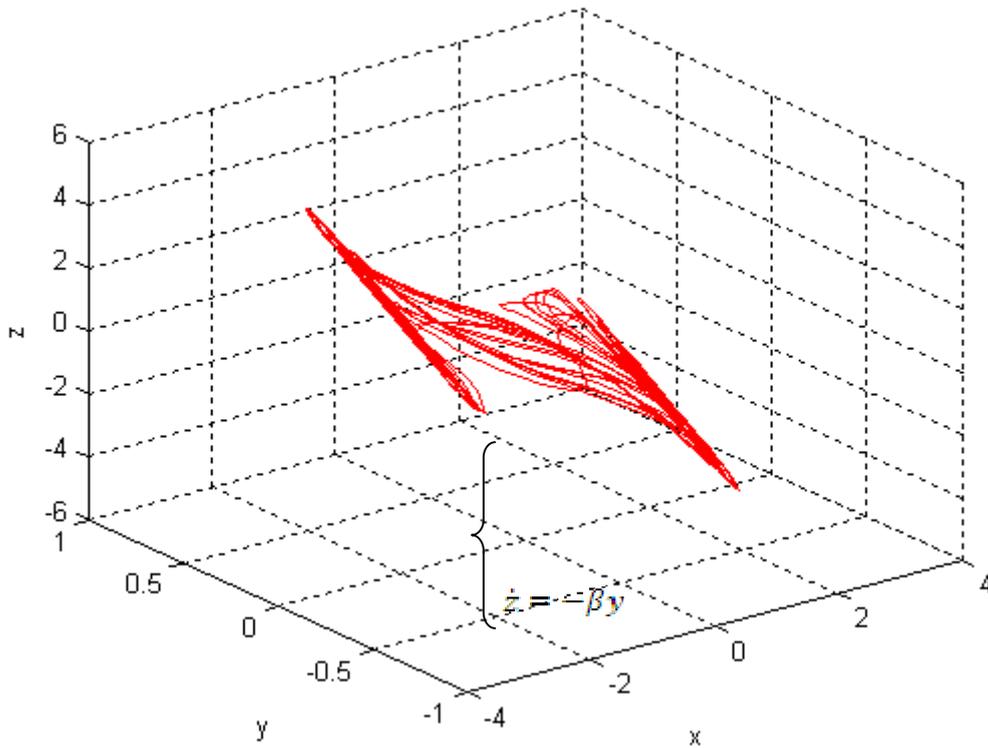


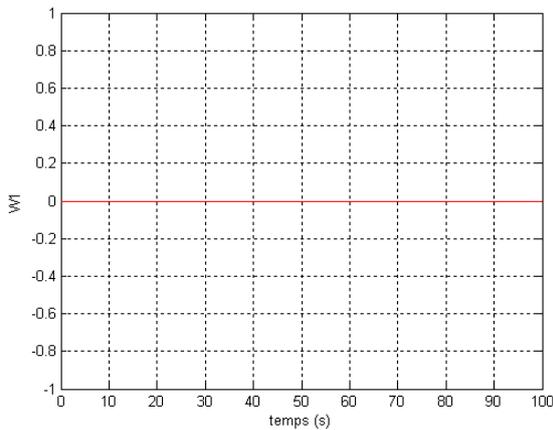
Figure (IV-6): Attracteur étrange du circuit de Chua à l'émission.

IV.4. Différents états de synchronisation :

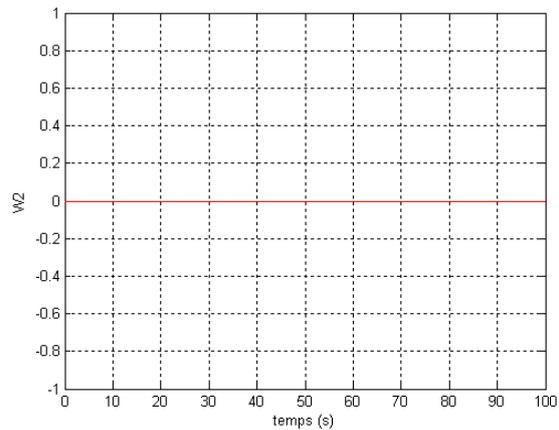
Les courbes suivantes permettent de déduire les paramètres et les conditions initiales pour les quelles la synchronisation entre le système maître et le système esclave soit réalisée.

La synchronisation se traduit par :

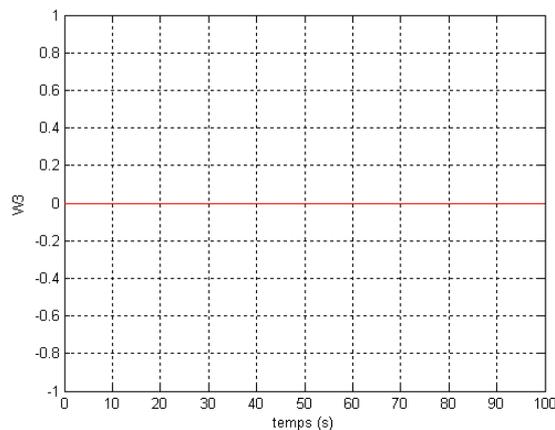
$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}(t) - x(t)| = 0 = w_1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{y}(t) - y(t)| = 0 = w_2 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{z}(t) - z(t)| = 0 = w_3 \end{cases}$$



$$w_1(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$



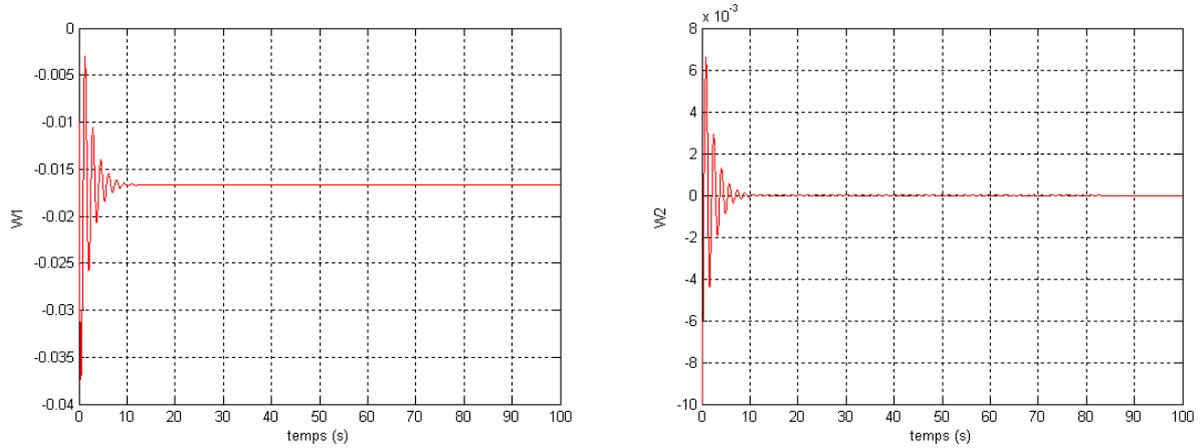
$$w_2(t) = \hat{y}(t) - y(t)$$



$$w_3(t) = \hat{z}(t) - z(t)$$

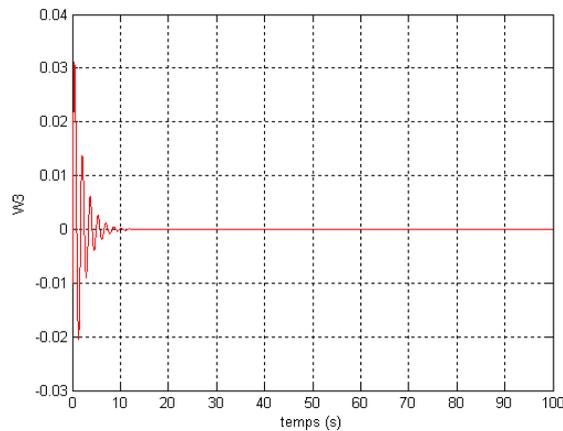
Figure (IV-7) : Synchronisation entre le système maître et le système esclave pour un système de mêmes paramètres avec des conditions initiales identiques.

$$x(t=0)=\hat{x}_1(t=0)=1 ; y(t=0)=\hat{y}(t=0)=0.2 ; z(t=0)=\hat{z}(t=0)=0 ;$$



$$w_1(t)=\hat{x}(t)-x(t)$$

$$w_2(t)=\hat{y}(t)-y(t)$$



$$w_3(t)=\hat{z}(t)-z(t)$$

Figure (IV-8) : Synchronisation entre les systèmes maîtres et esclave pour les mêmes paramètres avec des conditions initiales :

$$x(t=0)=1 ; \hat{x}(t=0)=1.01 ; y(t=0)=0.2 ; \hat{y}(t=0)=0.21 ; z(t=0)=0 ; \hat{z}(t=0)=0.01;$$

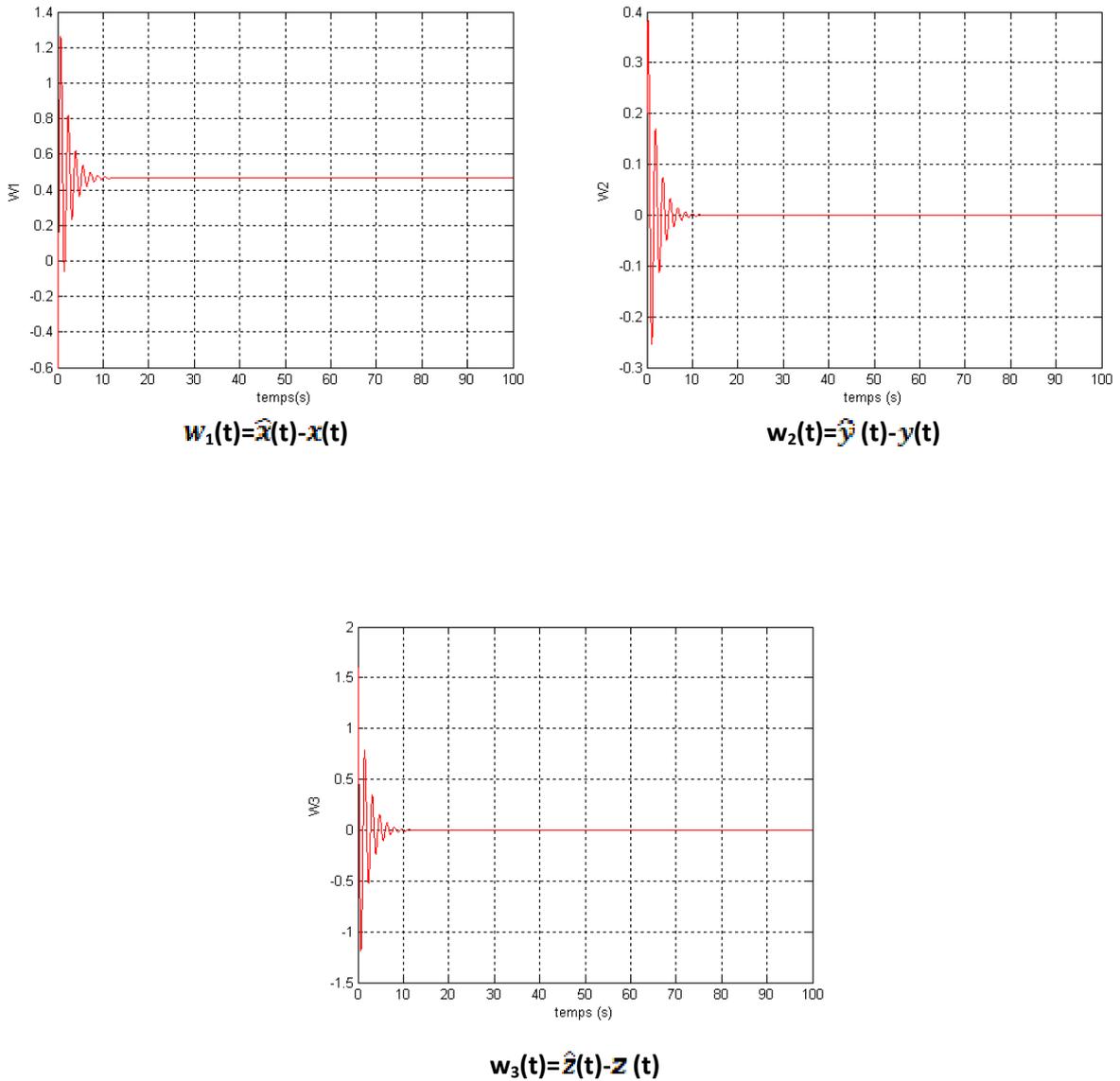
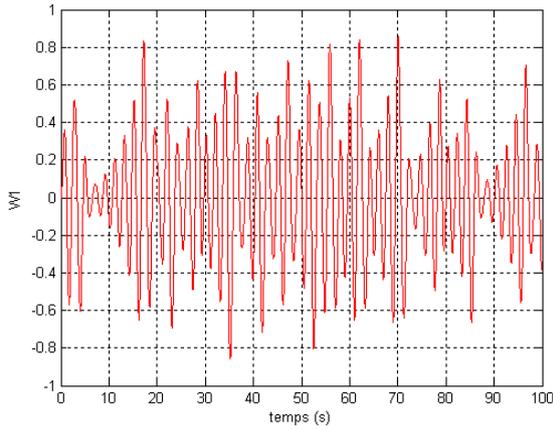


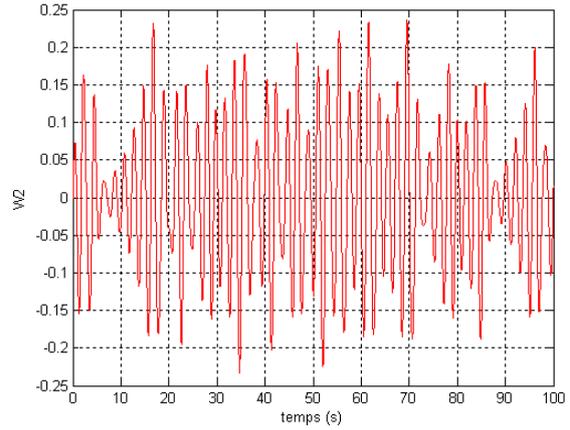
Figure (IV-9) : Synchronisation entre le système maître et le système esclave pour un système de mêmes paramètres avec des conditions initiales :

$$x(t=0)=1.6 ; y(t=0)=0 ; z(t=0)=-1.6$$

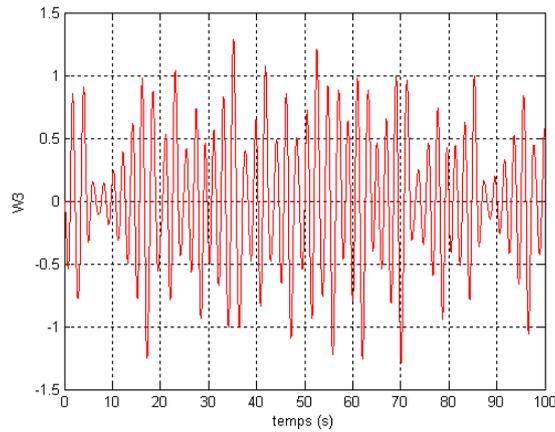
$$\hat{x}(t=0)=1.1 ; \hat{y}(t=0)=0.7 ; \hat{z}(t=0)=-2$$



$$w_1(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$



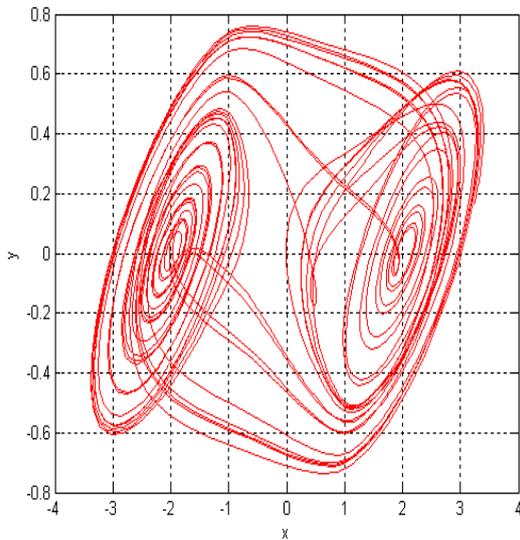
$$w_2(t) = \hat{y}(t) - y(t)$$



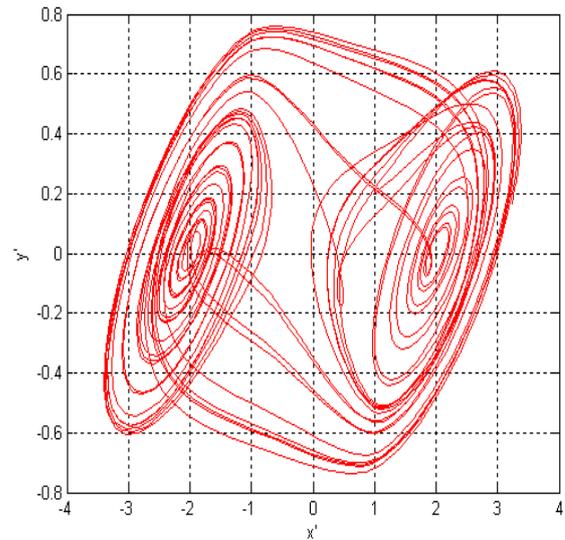
$$w_3(t) = \hat{z}(t) - z(t)$$

Figure (IV-10) : Synchronisation entre le système maître et le système esclave pour une petite variation des paramètres du système esclave par rapport au système maître pour des conditions initiales identiques :

$$x(t=0) = \hat{x}(t=0) = 1 ; y(t=0) = \hat{y}(t=0) = 0.2 ; z(t=0) = \hat{z}(t=0) = 0 ;$$



(a) Attracteur du système maître
Conditions initiales : $[x, y, z] = [1 \ 0.2 \ 0]$



(b) Attracteur du système esclave
Conditions initiales : $[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}] = [1.6 \ 0 \ -1.6]$

Figure (IV-11) : Comparaison des attracteurs étrange du circuit de Chua d'origine et du circuit dupliqué.

IV.5. Interprétation des résultats :

La figure (IV-7) montre que la synchronisation entre le système maître et le système esclave est parfaite pour les mêmes paramètres et des conditions initiales identiques.

Les figures (IV-8) et (IV-9) montrent également que la synchronisation entre le système maître et le système esclave s'effectue après 10 secondes et ceci pour des conditions initiales différentes.

La figure (IV-10) montre une désynchronisation totale entre le système maître et le système esclave pour un changement de paramètre du système esclave par rapport au système maître même si les conditions initiales sont les mêmes.

La figure (IV-11) présente l'évolution temporelle des variables d'états simulées du système maître et du système esclave dans un mode de fonctionnement chaotique, pour un vecteur de paramètres identique aux deux systèmes et pour un vecteur de condition initiales

qui a volontairement été choisi pour les deux systèmes. L'observation de l'évolution des trajectoires du système esclave permet de constater que la synchronisation s'effectue, malgré une forte décorrélation avec les variables d'état du système maître à l'origine.

L'attracteur de la figure (b) nous permet de constater que le circuit dupliqué reproduit un chaos identique à celui de Chua d'origine. Ce qui implique qu'il ya une parfaite synchronisation.

IV.6 .Le masquage de l'information par le circuit de Chua :

Cette technique développée en 1993 est illustrée par la figure (IV-12) consiste en deux systèmes chaotiques identiques, l'émetteur et le récepteur. Le signal chaotique $x(t)$ est l'une des variables d'état des système de l'émetteur .Le message d'information (le signal utile qui doit être crypté) $m(t)$,qui est typiquement très faible devant $x(t)$, est ajouté au signal $x(t)$ et donne le signal transmis $y(t)$.Comme $x(t)$ est très complexe et $m(t)$ beaucoup plus petit que $x(t)$, alors il est difficile de séparé $m(t)$ de signal $x(t)$ sans connaître $x(t)$.

Pour que ce principe fonctionne, il faut que l'amplitude du message soit très largement inférieur à l'amplitude de l'onde chaotique pour la rendre imperceptible à une éventuelle analyse spectrale du signal émis, et également pour ne pas perturber la synchronisation du système récepteur .Cette technique est ainsi employée dans le système de modulation chaotique dans les quels le message est directement introduit dans la boucle non linéaire.

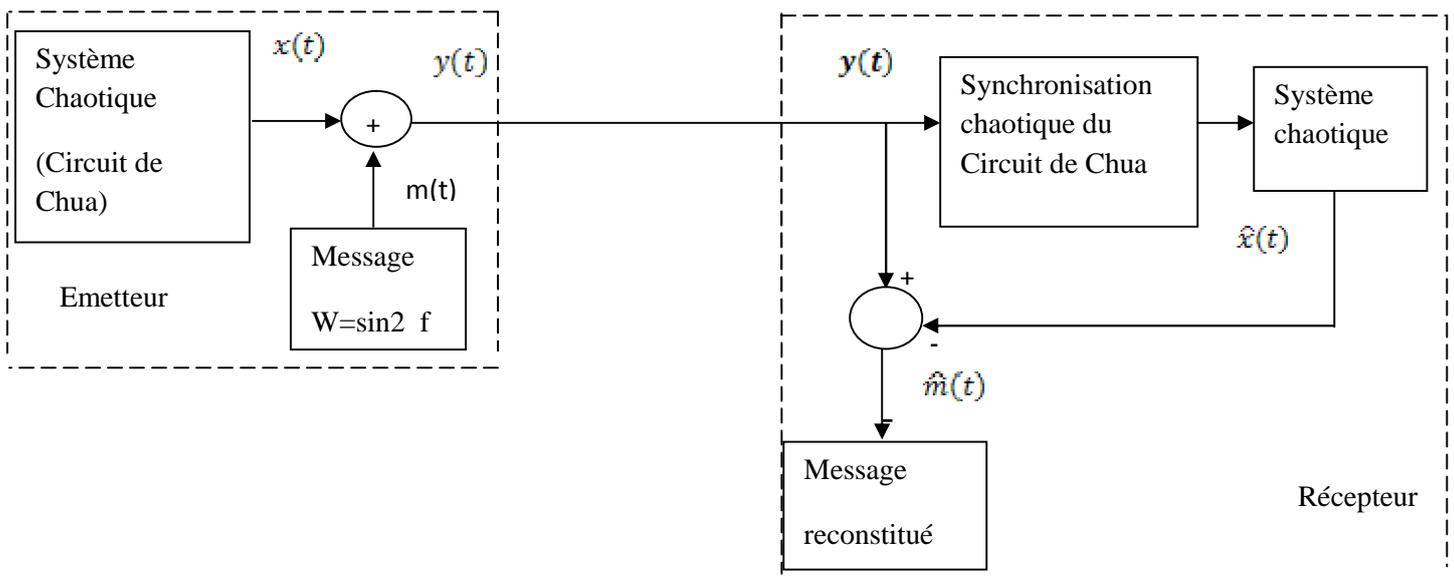


Figure (IV-12): Schéma de communication par addition.

VI.7.Illustration :

En variant la fréquence ainsi que l'amplitude du message à transmettre, nous avons obtenu les résultats donnés par les figures suivantes :

E=Ecart entre le message envoyé et celui récupéré.

Figure (IV-13) : Visualisation du message envoyé et du message récupéré.
Pour : $f=1\text{KHz}$, $m=0.1\text{V}$

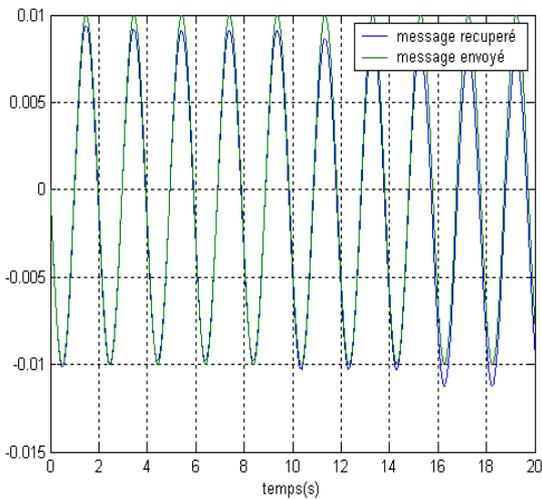


Figure (IV-14) : Ecart entre le message envoyé et le message récupéré.
Pour : $f=1\text{KHz}$, $m=0.1\text{V}$

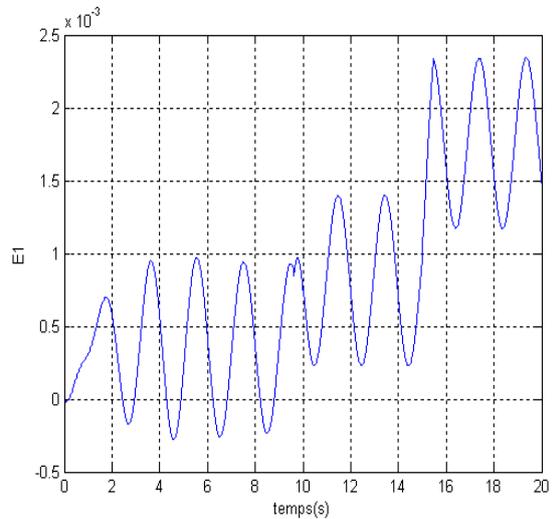


Figure (IV-15) : Visualisation du message envoyé et du message récupéré.
Pour : $f=1\text{KHz}$, $m=1\text{V}$

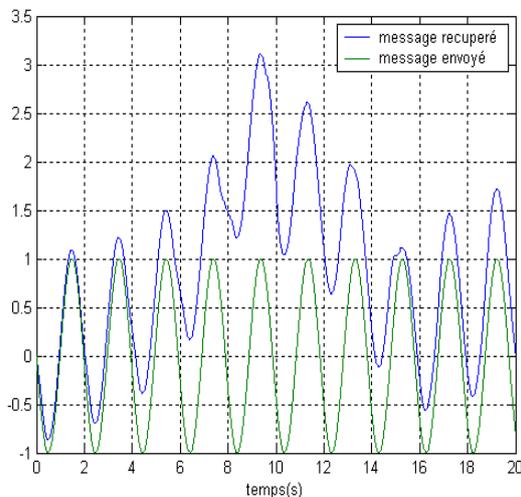


Figure (IV-16) : Ecart entre le message envoyé et le message récupéré.
Pour : $f=1\text{KHz}$, $m=1\text{V}$

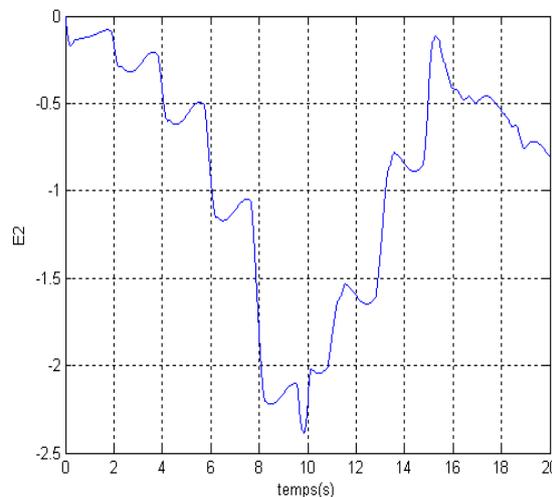


Figure (IV-17) : Visualisation du message envoyé et du message récupéré.

Pour : $f=10\text{KHz}$, $m=0.01\text{V}$

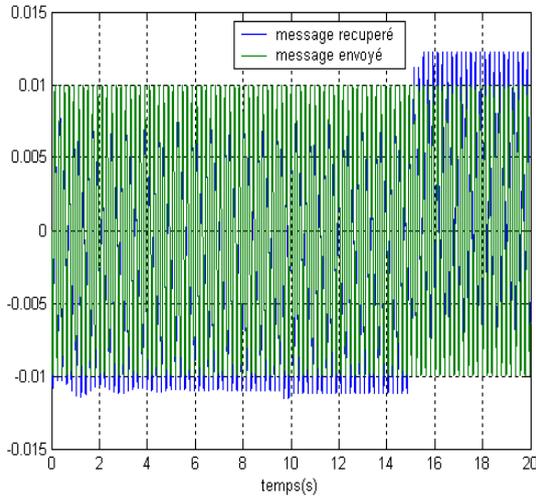


Figure (IV-18) : Ecart entre le message envoyé et le message récupéré.

Pour : $f=10\text{KHz}$, $m=0.01\text{V}$

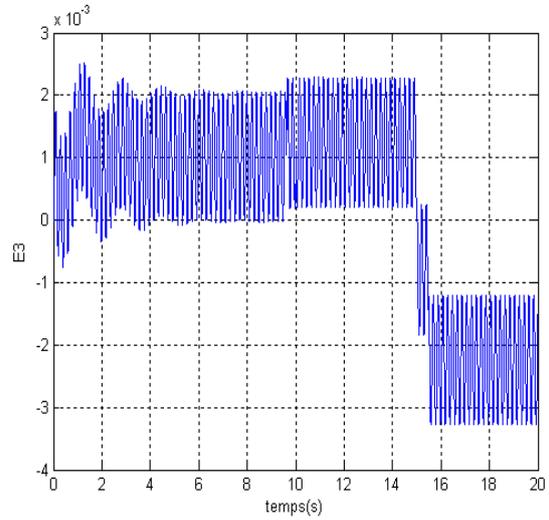


Figure (IV-19) : Visualisation du message envoyé et du message récupéré.

Pour : $f=1\text{KHz}$, $m=0.0001\text{V}$

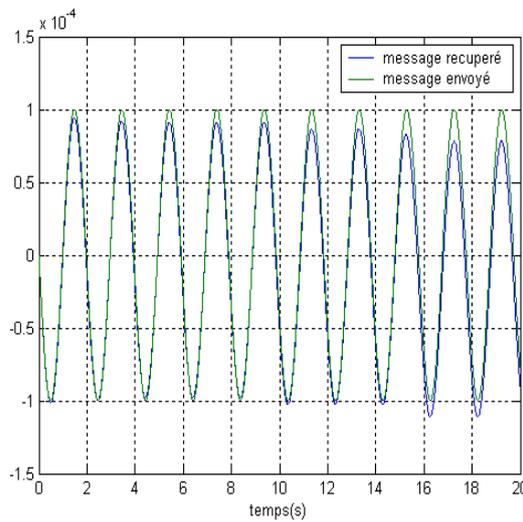
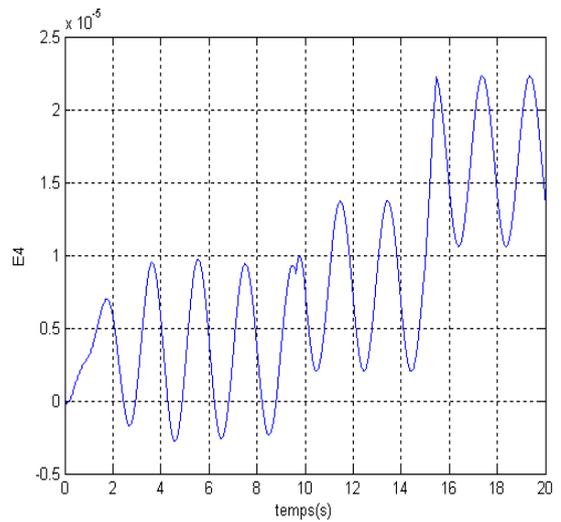


Figure (IV-20) : Ecart entre le message envoyé et le message récupéré.

Pour : $f=1\text{KHz}$, $m=0.00001\text{V}$



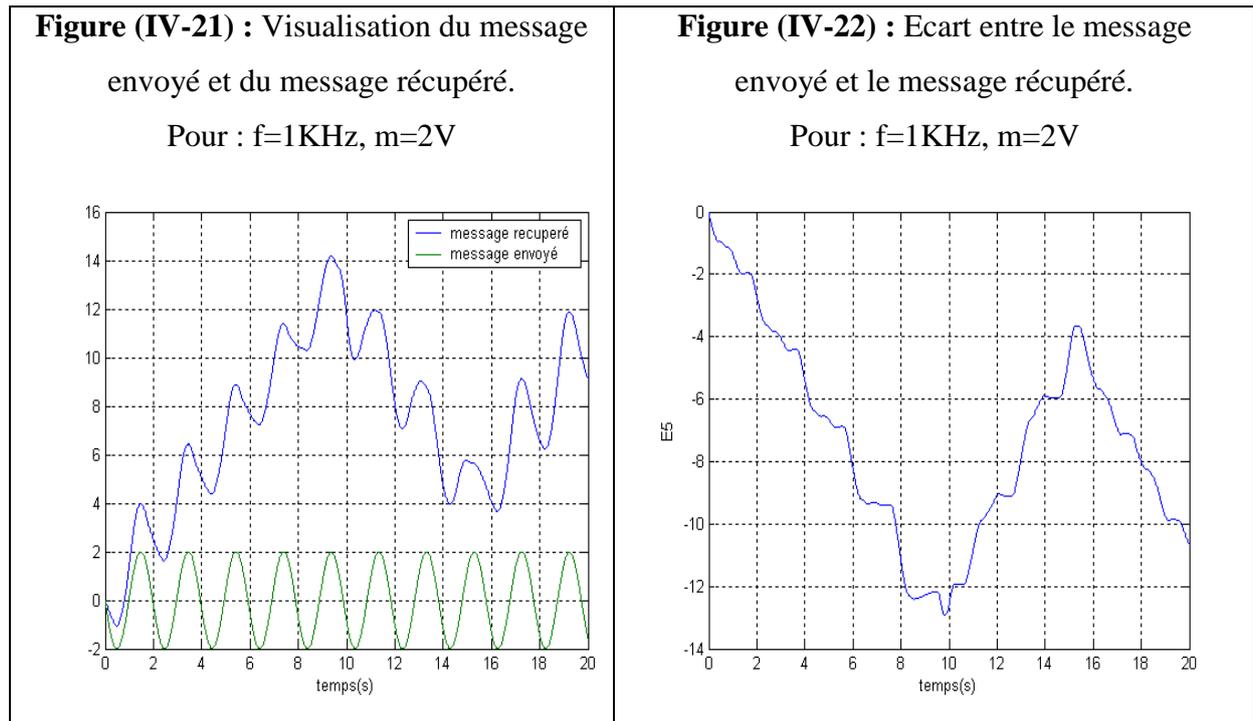


Tableau (IV-2) : Illustration des messages envoyés et des messages récupéré et les écarts entre les deux pour différentes fréquences et amplitudes.

D'après les résultats obtenus nous avons constaté que :

- Chaque fois qu'on descend en fréquences, l'écart entre le message envoyé et celui récupéré diminue. Par exemple pour une fréquence de 100Hz l'écart est de l'ordre de 10^{-5} .
- Si on augmente l'amplitude du message, le message récupéré sera complètement différent de celui envoyé.

IV.8.Conclusion :

Dans ce chapitre, on a rappelé la notion de synchronisation par décomposition en deux sous-systèmes ainsi que la notion de masquage chaotique. Un exemple de circuit de Chua concernant ce principe est ainsi apporté et les problèmes relatifs au réglage des paramètres sont abordés.

Des défauts de synchronisation se produisent lors de la construction du système de communication chaotique basé sur des sous- systèmes de nature analogique. De ce fait, une paire d'encodeur /décodeur numérique qui fournit un contrôle précis de la valeur des paramètres sont proposés.

D'après les résultats obtenus, nous sommes parvenus à conclure que le masquage de l'information par addition n'est applicable que pour les signaux de faibles amplitudes (d'ordre de 10^{-1}) et de basses fréquences (inférieur a 1khz), d'où la limite de cette méthode.

Conclusion générale :

Dans notre travail, nous avons présenté la théorie du chaos et son formalisme ainsi que les propriétés qui caractérisent les systèmes chaotiques (sensibilité aux conditions initiales, attracteurs étrange, exposants de Lyapunov...etc.) où nous avons illustré ces propriétés par des exemples. Et d'après notre étude sur les systèmes chaotiques, on peut dire que malgré sa complexité et son désordre, son étude ainsi que sa maîtrise n'est pas impossible.

En suite, nous avons présenté la méthode de synchronisation originale proposée par Pecora et Carroll et deux méthodes de synchronisation qui sont : synchronisation par couplage unidirectionnel et synchronisation par couplage bidirectionnel.

Et au troisième chapitre, nous avons présenté les différentes techniques du masquage et du cryptage de l'information qui ont eu un grand succès dans le domaine de la télécommunication. Ainsi, nous avons pu constater l'extrême importance de l'utilisation du chaos pour la sécurité et la confidentialité de l'information.

Puis au dernier chapitre, nous avons étudié un circuit chaotique, qui est le circuit de Chua et nous avons essayé de mettre en pratique la méthode de synchronisation de Pecora et Carroll, ainsi que le masquage de l'information. De cette étude, nous avons arrivé à confirmer que : le comportement imprévisible des systèmes chaotiques est due à la sensibilité aux conditions initiales tel qu'une différence infinitésimale dans le choix de ces conditions initiales (lié par exemples à l'imprécision intrinsèque aux instruments de réglage) amène le système à évoluer selon deux trajectoires qui s'éloignent très rapidement l'une de l'autre (désynchronisation), et que le chaos ne peut être utilisé que pour le masquage des signaux de très faibles amplitudes, sinon on risque de perdre l'information.

En perspectives, notre travail peut être complété par :

- L'application d'autres méthodes de synchronisation et du masquage chaotique, comme la méthode du Chaos Shift Keying, qui est utilisée pour masquer une information numérique.
- La réalisation pratique (électronique) des deux systèmes chaotiques, aussi l'implémentation des lois de contrôle pour assurer la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur.
- La conception d'un récepteur en utilisant des observateurs non linéaires tels que les observateurs à modes glissants, adaptatifs..., etc.

Conclusion générale.

L'abondance des résultats obtenus dans ce domaine est un signe d'un avenir prometteur de la synchronisation du chaos, cela ouvre la voie à divers applications technologiques dans différents domaines tels que l'automatique, la biologie et même la médecine.

Enfin, nous souhaitons vivement que notre travail soit apprécié et fera objet d'une contribution dans le domaine de l'analyse et la synchronisation du chaos.



I. Rappel sur les amplificateurs opérationnels (AOP) :

Dans la figure (I), le symbole utilisé pour représenter un (AOP) est montré. V_+ , V_- représentent respectivement les entrées non inverseuse et inverseuse, V_{s+} , V_{s-} sont les alimentations (positive et négative) et V_{out} et la sortie de l'AOP.

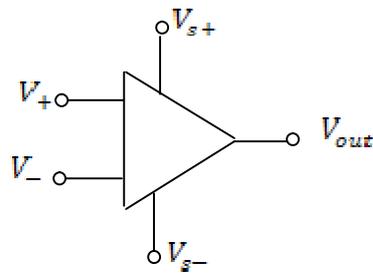


Figure (I): symbole utilisé pour l'AOP

En l'absence de contre-réaction négative (fonctionnement en boucle ouverte), la sortie de l'AOP est :

$$V_{out} = (V_+ - V_-)G$$

Où G est le gain en boucle ouverte et en général est très grand, ce qui résulte en un comportement non linéaire de l'AOP, appelé 'saturation'. La saturation peut aussi apparaître si l'entrée différentielle de l'AOP est très grande. Dans le cas de saturation, la sortie reste limitée à des pics légèrement en dessous des tensions d'alimentation.

Dans un AOP idéal, le gain en boucle ouverte ainsi que l'impédance d'entrée sont considérés infinis, ce qui permet de négliger le courant d'entrée de l'AOP.

L'impédance de sortie est au contraire considérée zéro, c'est-à-dire qu'il est supposé que l'AOP peut fournir autant de courant qu'il le faut à une charge connectée à sa sortie.

II. Etude théorique de l'oscillateur de Colpitts chaotique :

Un des oscillateurs très connue qui a été utilisé pour la génération de signaux chaotiques est l'oscillateur de COLPITTS.

Cet oscillateur a fait l'objet de nombreuses études. En particulier, les différents régimes de fonctionnement de cet oscillateur et les phénomènes de bifurcation ont été présentés plus en détail.

Nous allons d'abord expliquer le fonctionnement de l'oscillateur de Colpitts.

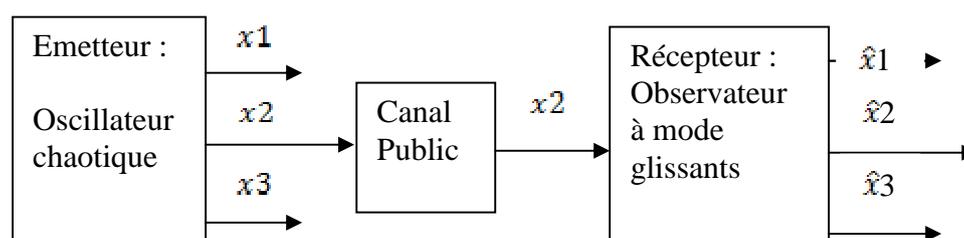


Figure (II-1): bloc diagramme du système

Choix de la topologie de l'émetteur chaotique :

Dans le deuxième chapitre de notre travail, nous avons opté pour l'utilisation de l'oscillateur de Colpitts en technologie bipolaire pour la génération de signaux chaotiques. Ce choix peut être expliqué par les points suivants :

- la simplicité de la structure de l'oscillateur de Colpitts qui utilise un seul transistor et permet, comme nous allons le montrer dans le paragraphe suivants, de générer des comportements chaotiques en modifiant uniquement les conditions de fonctionnement du transistor. Les autres paramètres électriques de l'oscillateur sont fixés à des valeurs appropriées.

- la possibilité de faire évoluer la fréquence fondamentale de l'oscillateur vers les fréquences élevées. Il suffit pour cela de choisir la technologie adéquate pour le transistor et d'inclure dans l'étude et la conception de l'oscillateur les effets liés à la montée en fréquence.

- la structure de l'oscillateur de Colpitts possède une non linéarité intrinsèque due à la caractéristique exponentielle du transistor.

- l'utilisation de l'oscillateur de Colpitts dans des systèmes de communications chaotiques a été démontrée pour la transmission de signaux binaires et continus.

La figure (II-2) montre le montage basses fréquences de l'oscillateur de Colpitts.

C'est une structure en base commune qui permet d'obtenir un gain plus élevé tout en autorisant une bande passante plus large. Le transistor utilisé est un transistor bipolaire classique (BJT). Le circuit résonnant LC est connecté entre le collecteur et la base du transistor et une fraction de la tension du circuit LC est retournée à l'émetteur. Les tensions d'alimentation V_1 et V_2 permettent de fixer le point de fonctionnement du transistor. Le choix des valeurs du circuit résonnant détermine la fréquence fondamentale de l'oscillateur.

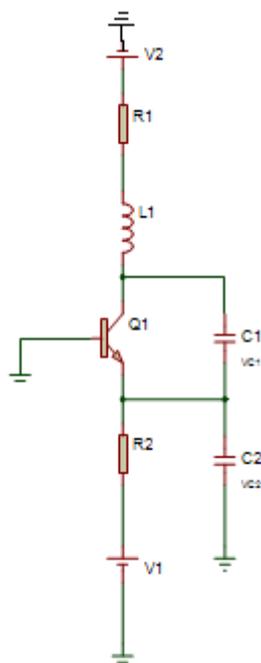


Figure (II-2) : oscillateur de Colpitts

$$R_1 = 47 \, \Omega, R_2 = 1K \, \Omega, C_1 = C_2 = 470, L_1 = 1mH, Q_1: 2N2222$$

II. Etude théorique de l'oscillateur de Colpitts chaotique :

Un des oscillateurs très connue qui a été utilisé pour la génération de signaux chaotiques est l'oscillateur de COLPITTS.

Cet oscillateur a fait l'objet de nombreuses études. En particulier, les différents régimes de fonctionnement de cet oscillateur et les phénomènes de bifurcation ont été présentés plus en détail.

Nous allons d'abord expliquer le fonctionnement de l'oscillateur de Colpitts.

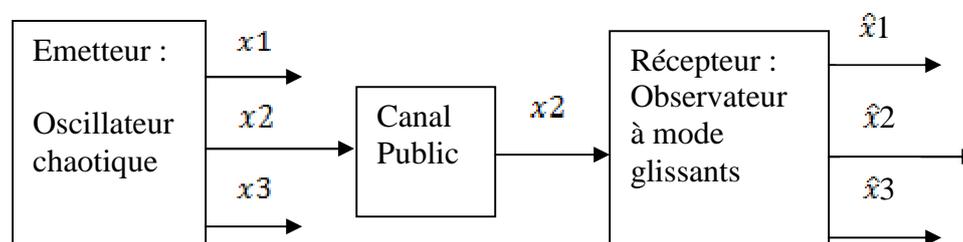


FIGURE (II-1): bloc diagramme du système

Choix de la topologie de l'émetteur chaotique :

Dans le deuxième chapitre de notre travail, nous avons opté pour l'utilisation de l'oscillateur de Colpitts en technologie bipolaire pour la génération de signaux chaotiques. Ce choix peut être expliqué par les points suivants :

- la simplicité de la structure de l'oscillateur de Colpitts qui utilise un seul transistor et permet, comme nous allons le montrer dans le paragraphe suivants, de générer des comportements chaotiques en modifiant uniquement les conditions de fonctionnement du transistor. Les autres paramètres électriques de l'oscillateur sont fixés à des valeurs appropriées.

- la possibilité de faire évoluer la fréquence fondamentale de l'oscillateur vers les fréquences élevées. Il suffit pour cela de choisir la technologie adéquate pour le transistor et d'inclure dans l'étude et la conception de l'oscillateur les effets liés à la montée en fréquence.

- la structure de l'oscillateur de Colpitts possède une non linéarité intrinsèque due à la caractéristique exponentielle du transistor.

- l'utilisation de l'oscillateur de Colpitts dans des systèmes de communications chaotiques a été démontrée pour la transmission de signaux binaires et continus.

La figure (II-2) montre le montage basses fréquences de l'oscillateur de Colpitts.

C'est une structure en base commune qui permet d'obtenir un gain plus élevé tout en autorisant une bande passante plus large. Le transistor utilisé est un transistor bipolaire classique (BJT). Le circuit résonnant LC est connecté entre le collecteur et la base du transistor et une fraction de la tension du circuit LC est retournée à l'émetteur. Les tensions d'alimentation V_1 et V_2 permettent de fixer le point de fonctionnement du transistor. Le choix des valeurs du circuit résonnant détermine la fréquence fondamentale de l'oscillateur.

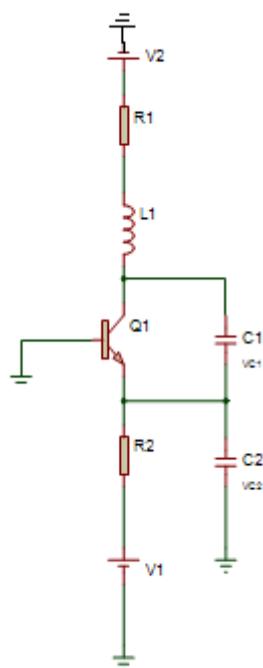


Figure (II-2) : oscillateur de Colpitts

$$R_1 = 47 \, \Omega, R_2 = 1K \, \Omega, C_1 = C_2 = 470, L_1 = 1mH, Q_1: 2N2222$$

Exposant de Lyapunov :

$$\left\{ \begin{array}{l} d: \quad R^n \times R^n \rightarrow R \\ \\ (x, y) \rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)^2} \end{array} \right.$$

S'il existe à un instant t_i , une constante réelle I et une constante réelle a tels que, si

$$I = [0, t_i],$$

$$\forall t \in I: d(X_i(t), Y_i(t)) \rightarrow e^{\lambda t + a}.$$

Alors, λ est appelé exposant de Lyapunov.

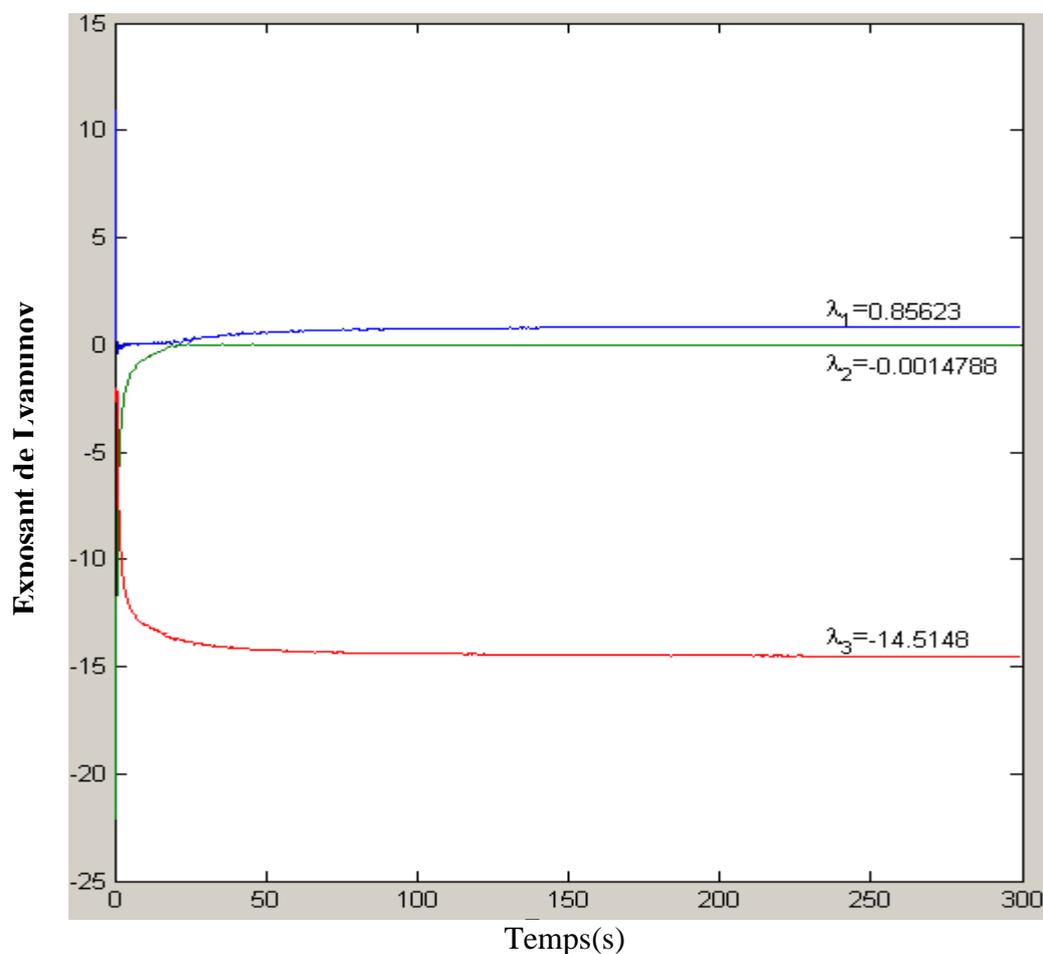
Illustration :

Figure (C-1) : Représentation des exposants de Lyapunov.

Tableau récapitulatif des différents types d'attracteurs obtenus selon le signe des exposants de Lyapunov est le suivant :

Type d'attracteur	Signe des exposants
Point fixe	(-, -, -)
Cycle limite	(0, -, -)
Tore	(0, 0, -)
Attracteur étrange	(+, 0, -)

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] :D.W.Jordan et P. Smith. «Nonlinear Ordinary Differential Equations».Third Edition. Oxford University Press (1999).
- [2]:F.ALIN. «Contribution a la prédiction et au contrôle des comportements apériodiques dans les convertisseurs électromécaniques.Application de la théorie du chaos».Thèse Doctorale.Physics reports329(2000).
- [3]:W. Aggoune, M. Boutayeb, et M. Darouach, « Observers design for a class of non linear systems with time –varying delay », Edition Hermés, année 1999.
- [4]:F.Alin, contribution a la prédiction et au contrôle des comportements apériodiques dans les convertisseurs électromécaniques. Application de la théorie du chaos, Thèse de doctorat, l’université de Reims Champagne Ardenne, France, 2005.
- [5]:H.K.Khalil, Nonlinear systems, Mac Milan Publishing Company, N.Y, 1992.
- [6]:F.Lamnabhi, Lagarrigue, « Physique théorique ‘mécanique’ », Edition Ellipses Paris, année 1964.
- [7] :M. P. Spiégle, « Théorie et application de la mécanique générale », Edition Herman, année 1983.
- [8] :Y.Granjon, « Automatique, Système linéaire, Non linéaire, à temps continu, à temps discret, représentation d’état », Edition Dunad, année 2001.
- [9] :J. Thurin, « Systèmes Asservis », Edition Eyrolles paris, année 1971.
- [10]:A.L.Fradkov and R.J.Evans, Control of Chaos: Methods and applications in engineering, Annual Reviews in Control, Vol.29, No.1, pp.33-56, 2005.

[11]:D.Guegan, Notions de chaos: approche dynamique et problèmes d'identification, rapport de recherché de l'université Inria, France, 1992.

[12] :P. Berger, Y.Pomeau et C.Vidal., De l'ordre au chaos, Hermann éditeur des sciences et des arts, 1998.

[13]:L. M. Pecora, T. L. Carroll, « Synchronization in chaotic systems », Edition Elsevier, Phys. Rev. Lett, 64, 821, année 1990.

[14]:MB. Luca, « Apports du chaos et des estimateurs d'états pour la transmission sécurisée de l'information », thèse de doctorat, université de Bretagne Occidentale, année 2006.

[15] :F. Anstett, « Les systèmes dynamiques chaotiques pour le chiffrement : Synthèses et cryptanalyse », thèse de doctorat, université de Henri Poincaré – Nancy 1, année 2006.

[16]:M.Hernault-Zanganeh, « Faisabilité d'un système d'émission-réception analogique pour les communication sécurisée par le chaos », université Paris 6,année 2007.

[17]:E.Cherrier, «Estimation de l'état et les entrées communes pour une classe de systemes non linéaire », institut polytechnique de Lorraine, année 2006.

[18] :L.O.Chua, Chua's circuit :ten years later, IEICE Transactions on fundamentals of Electronics, Communications and computer Sciences, Vol.E77-A, No. 11,pp.1811-1822,1994.

[19]:M.T. Yassen, Adaptive control and Synchronization of a modified Chua's circuit system, Applied Mathematics and Computation, vol.135, pp.113-128, 2003.

[20]:k. Li,Y.C. Soh and Z. G.Li.,chaotic cryptosystem with high sensitivity to parameter mismatch,IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol.50,pp.579-583-2003.

- [21]: Z.Li,K.Li.Wen and Y.C.Soh, A new chaotic secure communication system,IEEE Transaction on Communication, vol.51, pp.1306-1312,2003.
- [22]: C. C.Hwang, H.Y.Chow, and Y.C.Soh,A new feedback control of modified chua's circuit system, physica D:Nonlinear Phenomena,Vol.92,pp.95-100,1996.
- [23]:C.Morel,Analyse et controle de dynamiques chaotiques, application a des circuits electroniques non lineaires, Thèse de Doctorat, Univrsité d' Angers, France,2005.
- [24] :G.Q.Zhong and F.Ayrom, Periodicity and Chaos in Chua's circuit, IEEE Transactions on circuits and systems, Vol.32,pp.501-503,Mai 1985.
- [25]:J.Clinton.Sprott,Chaos and time series analysis Oxford University Press, 2003.
- [26]:G.Qi,S.Du, G.Chen,Z.Chen and Z.Yuan, On a four-dimensional chaotic system, Chaos solutions and fractals, Vol.23,pp.1671-1682,2005.
- [27]:L.P Shilnikov, Chua's Circuit:Rigorous Results and Future Problems, IEEE Transactions on circuits and systems-I:Fundamental Theory and Applications, Vol.40, pp.784-786,octobre1993.
- [28]:L.O.Chua, C.H.Wu, A.Huang and G.Q.Zhong, A Universal Circuit for Studying and Generating Chaos-PartI:Route to Chaos,IEEE Transactions on circuits and systems-I:Fundamental Theory and Applications, Vol.40,pp.732-744 octobre 1993.
- [29]:M.P.Kennedy, Three Steps to Chaos-Parts I :Fundamental Theory and Applications,Vol.40,pp.640-656,octobre1993.
- [30]:M.P.Kennedy, Three Steps to Chaos-Parts II : A Chua's Circuits Primer,IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: :Fundamental Theory and Applications, Vol.40, pp.657-674, octobre1993.

[31]:A. Lavec, « développement de modèles de CAO pour la simulation système des
Systèmes de communication. Application aux communications chaotiques », thèse de doctorat
,14 Février 2006.

