

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

## Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : **Sciences et Technologies**

Filière : **Génie électrique**

Spécialité : **Automatique**

Option : **Commande des systèmes**

*Présenté par*

**Koceila Merar**

**Hocine Mezaguer**

Thème

# Conception d'une loi de commande à l'aide des systèmes flous TSK «Application à la commande du canal longitudinal d'un Drone»

*Mémoire soutenu publiquement le 09/09/ 2015 devant le jury composé de :*

**M S.DJENNOUNE**  
PROFESSEUR , UMMTO      President

**M M.A.TOUAT**  
MCB, UMMTO,              Encadreur

**M A.MAIDI**  
MCA, UMMTO,              Examineur

**M kh.SAIDI**  
MAA, UMMTO,              Examineur

# Conception d'une loi de commande a l'aide des systemes flous TSK

*Mémoire soutenu publiquement le ...../...../ 20..... devant le jury composé de :*

**M Djenoune S**

PROF, ummto, Président

**M Touat M.A NOM**

MCB, ummto, Encadreur

**M Prénom NOM**

Grade, Lieu d'exercice, Examineur

**M Prénom NOM**

Grade, Lieu d'exercice, Examineur

## AVANT PROPOS

---

---

Il est difficile de répondre à la question : « Qu'est-ce qu'un UAV? » étant donné les différents termes utilisés par les différentes organisations compétentes dans le domaine. La *Federal Aviation Administration* (FAA), par exemple, appelait les UAVs des *Remotely Piloted Vehicles* (RPVs) avant de changer le nom pour *Remotely Operated Aircrafts* (ROAs). Les vieux termes comme le *Remotely Piloted Aircraft* (RPA) de la *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) ou le *Unmanned Aircraft* (UA) de l'aviation du Royaume-Uni tendent à disparaître vu la popularité du terme UAV provenant des militaires Américains qui est présentement reconnu mondialement. Pour notre part et pour le reste de ce mémoire, nous nous contenterons de désigner un UAV par le terme « drone » par respect pour la langue française.

À part le nom, différentes définitions du terme drone ont été proposées. En 1994 un groupe de travail de la FAA définis un drone comme : « *an aircraft capable of flight beyond visual line of sight under remote or autonomous control for civil (non-[Department of Defense]) purposes. A UAV is not operated for sport or hobby and does not transport passengers or crew* » Federal Aviation Administration. Une autre définition introduite par le secrétaire à la défense américaine se lit ainsi :

« *A powered, aerial vehicle that does not carry a human operator, uses aerodynamic forces to provide vehicle lift, can fly autonomously or be piloted remotely, can be expendable or recoverable, and can carry a lethal or non-lethal payload. Ballistic or semi ballistic vehicles, cruise missiles, and artillery projectiles are not considered unmanned aerial vehicles* ». Office of the Secretary of Defense (U.S.)

### 1.1 Historique :

Quelle que soit la définition ou l'acronyme utilisé, l'histoire nous apprend que le premier drone fut un ballon gonflable développé autour des années 1850. L'auteur DeGarmo (2004, p. 1.2) nous offre un tour d'horizon assez complet de l'histoire des drones. En voici un résumé par décennie :

- Avant 1900 : Des ballons sont utilisés pour lâcher des bombes sur Venise (Italie) par l'Autriche et durant la guerre civile américaine.
- 1910 - 1920 : Les États-Unis produisent le drone « *Kettering Bug* » durant la première guerre mondiale.
- 1920 - 1930 : Quelques « *Sperry Messenger* » sont convertis en bombes volantes et deviennent ainsi les premiers vrais avions téléguidés.
- 1930 - 1940 : Les Britanniques produisent 400 avions téléguidés comme cible de pratique pour les défenses anti-aériennes. Connus sous le nom de « *Queen Bees* », leur nom inspira l'utilisation du terme « drone ».
- 1940 - 1950 : Pendant la deuxième guerre mondiale, Reginald Denny convainc l'armée américaine d'utiliser ses avions téléguidés les « *Radioplanes OQ-2* » pour entraîner leur défense anti-aérienne.

Les Allemands produisent le bombardier « V-1 » dans le but de bombarder Londres.

- 1950 - 1960 : Le « *FireBee* » est développé durant les guerres de Corée et du Vietnam pour les missions de surveillance confiées à des drones.
- 1960 - 1970 : L'armée américaine commence la production de son premier drone furtif, le « *AQM-34 Ryan FireBee* ».

La *Central Intelligence Agency* (CIA) demande la production d'un drone ultrasecret capable de voler à des vitesses de Mach 3.3 et des altitudes de plus de 27 000m.

## AVANT PROPOS

---

---

- 1970-1990 : Les forces aériennes israéliennes déploient de nouveaux drones militaires avancés, les plus connus étant les « *Firebee 1241* », « *Scout* » et le « *Pioneer* »
- 1990-2000: Une variété de nouveaux drones sont développés pour des applications militaires et non-militaires comme les drones à énergie solaire « *Helios* » et « *Pathfinder* ». C'est aussi la décennie de la mise en service du célèbre « *Predator* ».
- 2000-maintenant: Plus de 32 pays développent des drones et plus de 41 en ont en service. Les nouveaux drones apportent de nombreuses idées et utilisations innovatrices. Il suffit de penser au « *Fire Scout* », au « *Yamaha R-MAX* », au « *Raptor/Talon* », au « *Global Hawk* », au « *Black Widow* » etc...

### 1.2 Classification des drones

Les drones peuvent être classés selon différents critères incluant la taille, le poids, la portée de la télémétrie, le type, d'aile, l'endurance, l'altitude d'opération, etc... Une classification intéressante fut proposée par l'*European Association of Unmanned Vehicles Systems* (EUROUVS) plus tard devenue l'*Unmanned Vehicles Systems International* (UVS International). La classification est basée sur différents paramètres comme le poids maximum au décollage, l'altitude maximale et le temps de vol maximum. Le Tableau 1.1 présente un sommaire complet des quatre principales catégories de drone et de leurs acronymes. Les mini et micro drones (*Micro-Air Vehicle* (MAV)) sont les plus petits parmi les quatre, ils sont surtout utilisés pour des applications civiles, scientifiques ou commerciales. Les drones tactiques sont utilisés pour les applications militaires, ils incluent les drones à portées rapprochées (*Close Range* (CR)), à portées courtes (*Short Range* (SR)), à portées moyennes (*Medium Range* (MR)), à longues portées (*Long Range* (LR)), d'Endurance (EN) et à Moyenne Altitude et Longue Endurance (MALE). Ensuite, il y a les drones stratégiques qui sont beaucoup plus lourds et gros que ceux des catégories précédentes. Ils sont conçus pour les applications en Haute Altitude et Longue Endurance (HALE). La dernière catégorie est celle des drones spécialisés, ceci inclut les drones Létaux

## AVANT PROPOS

(LET), les leures (*Decoys* (DEC)), les Stratosphériques (STRATO) et les Exo stratosphériques (EXO). Seuls les LET et les DEC sont en service au moment d'écrire ces lignes, les autres sont encore en développement.

Catégorie	Acronyme	Poids maximum au décollage (kg)	Altitude de vol maximale (km)	Endurance (h)	Exemple
Micro/Mini drones	MAV	0.10	0.25	1	<i>Microbat</i>
	Mini	< 30	0.15 - 0.3	< 2	<i>Aladin</i>
Drones tactiques	CR	150	3	2 - 4	<i>R-Max</i>
	SR	200	3	3 - 6	<i>Phantom</i>
	MR	150 - 500	3 - 5	6 - 10	<i>Hunter B</i>
	LR	-	5	6 - 13	<i>Vigilante 502</i>
	EN	500 – 1 500	5 - 8	12 - 24	<i>Aerosonde</i>
	MALE	1 000 – 1 500	5 - 8	24 - 48	<i>Predator-IT</i>
Drones Stratégiques	HALE	2 500 – 12 500	15 - 20	24 - 48	<i>Global Hawk</i>
Drones spécialisés	LET	250	3 - 4	3 - 4	<i>Harpy</i>
	DEC	250	0.05 - 5	< 4	<i>Nulka</i>
	STRATO	À déterminer	20 - 30	> 48	<i>Pegasus</i>
	EXO	À déterminer	> 30	À déterminer	<i>MarsFlyer</i>

### 1.3 Utilisations des drones:

Comme il transparait dans l'historique précédent, la guerre a longtemps été la motivation principale pour la conception de drones. Le fait que l'utilisation d'un drone préviene des pertes humaines inutiles a mené les drones à adopter toutes sortes de missions militaires, on peut citer :

1. Reconnaissance visuelle, surveillance et identification de cibles;
2. Surveillance avec un radar à synthèse d'ouverture, en temps de paix ou pour le combat;
3. Opérations maritimes (support au feu, acquisition de cibles au-delà de l'horizon, classification de navire);
4. Guerre électronique et espionnage;
5. Opérations spéciales et psychologiques;
6. Mission de météorologie;
7. Soutien à l'itinéraire et à la reconnaissance pour l'atterrissage;
8. Ajustement du feu indirect et appui aérien rapproché;
9. Confirmation de dommages dus au combat;
10. Relais radio.

Dans les deux dernières décennies le marché des drones civils s'est étendu rapidement. En effet, la protection des frontières, les applications pour l'agriculture et l'industrie ont eu une incidence majeure sur les ventes de drones ces dernières années. Les auteurs mentionnent quelques applications civiles des drones :

1. Surveillance des frontières;
2. Recherche et sauvetage;
  - a. Accidents d'avions;
  - b. Naufrages;
3. Détection des feux de forêt;
4. Relais de communication;

## AVANT PROPOS

---

---

5. Application de la loi;
  - a. Contrôle de foule;
  - b. Détection de culture de drogue;
6. Gestions d'urgences et de désastres;
  - a. Tremblement de terre;
  - b. Inondations;
  - c. Désastres nucléaires;
  - d. Déversements de pétrole;
7. Recherche scientifique;
  - a. Environnementale;
  - b. Atmosphérique;
  - c. Archéologique;
  - d. Pollution;
  - e. Recensement de la faune;
  - f. Étude des glaces;
8. Application dans l'industrie;
  - a. Épandage des récoltes;
  - b. Cinéma;
  - c. Photo aérienne, cartographie
  - d. Reportage pour les canaux de nouvelles;
  - e. Publicité aérienne;
  - f. Transport de fret;
  - g. Sécurité;
  - h. Surveillance des centrales nucléaires, ou des pipelines.

### 1.4 La cellule d'un mini-drone

À l'heure actuelle, il y a au moins neuf mini-drones en service dans les forces armées américaines. Ceux-ci sont le *Pointer*, le *Raven* et le *Dragon-Eye* qui sont tous fabriqués par AeroVironment. On compte aussi, le *Force Protection Aerial Surveillance System* (FPASS) de Lockheed Martin, le *Buster* de Mission Technologies, le *Silver Fox* de *Advanced Ceramics*, le *ScanEagle* de Boeing, l'Aerosonde de Aerosonde et Lockheed Martin et finalement le *Nighthawk* (BATCAM). Les systèmes de propulsion sont divisés entre les moteurs à combustion interne et les moteurs électriques dans une proportion de quatre contre cinq respectivement. Il est à noter que cinq des six drones les plus légers (< 4.6kg) sont à propulsion électrique. On retrouve des hélices propulsives dans quatre des neuf cas, probablement parce qu'elles ont l'avantage d'éviter que l'écoulement de l'air turbulent à la sortie de la propulsion ne vienne interférer avec l'aile. Ceci a pour effet de diminuer la traînée et de simplifier la modélisation pour la conception du système de contrôle.

Dans le cas de tous les drones, les capteurs sont situés à l'intérieur de fuselages fermés de type conventionnel. Sur les neuf, sept adoptent la configuration classique soit une aile et un empennage complet. Les deux qui n'ont pas d'empennage complet se contentent seulement de l'empennage vertical dans le cas du *Dragon Eye* et de dérives de bout d'aile dans le cas du *ScanEagle*. Des sept avec un empennage complet, deux possèdent un empennage en V.

Seulement quatre dans ce lot comprennent aussi des ailerons soit : les FPASS, BUSTER, Silver Fox et Aerosonde. Les autres sont suffisamment stables de façon inhérente pour n'être dirigé qu'avec l'empennage. Finalement, on remarque qu'aucun n'a de train d'atterrissage pour réduire la traînée en vol et accroître l'autonomie. Ils sont tous soit lancés à la main ou à la catapulte et récupérés avec un parachute ou un atterrissage sur le fuselage.

### **1.5 État de l'art des différentes stratégies de commande des drones :**

La complexité de la mécanique des drones et la variabilité des phénomènes aérodynamiques mises en jeu, en particulier lors de l'alternance de différents vols, sont des sources importantes de difficultés. Bien que globalement les effets aérodynamiques soient en réalité continus, ils sont difficilement modélisables. Cela reste vrai même si l'on ne s'intéresse qu'à un mode de vol spécifique pour certaines configurations de drones.

Pour remédier à la complexité de la tâche de la modélisation et par la suite du contrôle, on procède à la simplification du modèle aérodynamique sans dénaturer les caractéristiques principales du drone. Quant aux problèmes de synthèse de la commande, les difficultés sont multiples. Il convient en premier lieu de remarquer que ces systèmes sont sous-actionnés étant donné que le nombre d'entrées de contrôle est inférieur au nombre de degrés de liberté du système. Les outils classiques de l'automatique, basés en premier lieu sur des hypothèses de commandabilité locale du système, ne sont parfois pas utilisables directement.

L'étude de ces problèmes peut mener à des méthodologies tout à fait novatrices qui sont primordiales d'un point de vue applicatif pour augmenter l'autonomie du système. L'objectif de cette thématique est de développer de nouvelles stratégies de commande (issues de l'automatique ou de l'apprentissage) assez génériques, simples, robustes et performantes répondant aux exigences des besoins.

Les commandes de vol font le lien entre le pilote et les actionneurs aérodynamiques permettant de modifier la trajectoire de l'avion. L'ensemble est composé d'organes de pilotage, d'actionneurs et d'un système de transmission plus ou moins sophistiqué entre les organes de pilotage et les actionneurs.

### 1.5.1 Techniques de contrôle

Plusieurs techniques de contrôle appliquées aux drones peuvent être trouvées dans la littérature. Ces contrôleurs de vol sont conçus de façon prédominante à l'aide de techniques de contrôle classiques comme ceux qui ont utilisé un contrôleur à retour d'états avec un échelonnement de gains (*gain scheduling*). Les contrôleurs à échelonnement de gains sont très populaires dans l'aviation civile puisque leur compréhension est excellente ce qui simplifie l'étape de la certification. On peut trouver aussi ceux qui ont utilisé une approche de modélisation linéaire multiple et un réseau de neurones à carte auto organisant (*self-organizing map neural network*) pour sélectionner le contrôleur approprié. Des techniques non-linéaires sont aussi appliquées, qui est le *backstepping* comme approche pour le contrôle en vol stationnaire d'un drone. Un contrôleur de vol stationnaire robuste pour un avion à décollage vertical (*Planar Vertical Takeoff and Landing (PVTOL)*) basé sur une approche de contrôle optimal, un contrôleur à rétroaction linéarisante (*feedback linearization*) et un observateur d'ordre supérieur à mode glissant (*sliding mode*) fonctionnant en parallèle. Beaucoup d'autres techniques peuvent aussi être trouvées incluant la logique floue, le contrôle adaptatif, les réseaux de neurones, La commande linéaire quadratique, La commande tolérante aux défauts, etc...

## *Remerciements*

---

Ce travail n'aurait pu se faire seul ! Ce sont les compétences, la disponibilité, le dynamisme, la bonne humeur et la patience de chacun, qui nous a permis de poursuivre nos études et d'achever ce mémoire dans les meilleures conditions. C'est pourquoi nous tenons chaleureusement à remercier ici toutes les personnes qui ont contribué de loin comme de près pour achever ce modeste travail, proposée par M TOUAT .M.A et à qui nous exprimons nos sincères remerciements, pour son aide et sa disponibilité et surtout ses conseils précieux lors de l'élaboration de ce mémoire.

Nous remercions les membres du jury, d'avoir accepté l'examen de notre travail.

Nous tenons également à remercier nos enseignants qui ont contribué à notre formation, qui nous ont transmis le savoir et à qui nous dois tous nos respects.

Nos remerciements vont également à nos amies ainsi à l'ensemble des étudiants du UMMTO.

## *Dédicaces*

---

*Je dédie ce modeste travail de fin d'études A mes très chers parents, qui grâce à eux j'ai pu atteindre ce niveau, qui ont été toujours à mes côtés pour me soutenir dans les moments les plus difficiles, et pour me conseiller.*

*Je dédie également ce travail a :*

*Mes frères et sœurs.*

*Ainsi qu'à tous ceux qui me sont chers*

*Sans oublier tous les membres de la famille.*

*Je ne serais oublier tous mes amis et pour leur ambiances chaleureuse et solidarité.*

*Ainsi qu'à tous ceux qui mon aidé d'une manière ou d'une autre dans la vie.*

***Koceila***

## *Dédicaces*

---

*Je dédie ce modeste travail a mes très chers parents qui m'ont toujours apporté leurs amour et leurs soutient pour affronter les difficultés de la vie.*

*Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance la plus dévouée.*

*Je dédie également ce modeste travail A mes cher frère, et à mes chères sœurs ;*

*A tous les membres de ma famille : oncles, tantes, cousins et cousines ;*

*A tous mes amis qui m'on aide de prêt ou de loin pour durant les moments inoubliables.*

*Hocine*

# Sommaire

Avant-propos .....	
Introduction générale .....	1
CHAPITRE 1 La logique floue .....	3
Introduction .....	3
1. Principe fondamental de la logique floue .....	5
2. Bases générales de la logique floue .....	6
I.2.1. Les Ensembles Floues .....	7
I.2.2. Variable linguistique .....	7
I.2.3. Fonction d'appartenance .....	8
I.2.4. Opérations sur les ensembles flous .....	10
3. La Commande floue .....	10
I.3.1. Structure d'un contrôleur flou .....	11
I.3.2. Structure et configuration interne d'un RLF .....	12
I.3.2.1. Fuzzification des entrées .....	12
I.3.2.2. Base de connaissances .....	13
I.3.2.3. Moteur d'inférence floue .....	14
I.3.2.4. La défuzzification .....	16
4. Les différents types de régulateurs .....	17
I.4.1. Système d'inférence floue de type Mamdani .....	17
I.4.2. Régulateur flou de type SUGENO (TSK) .....	18
Conclusion .....	19
CHAPITRE II. Conception des lois de commande .....	20
Introduction .....	20
1. Commande de drone par la logique floue .....	21
II.1.1. Les modèles Takagi-Sugeno .....	23
II.1.2. Modèle et régulateur flou TSK .....	23
2. Les commandes stabilisantes le système .....	24
II.2.1. Commande optimale .....	24
II.2.1.1. Critères d'optimalité de la commande optimale .....	26
II.2.1.2. Principe d'optimalité de Bellman .....	27
II.2.1.3. Principe de minimum de Pontriagine .....	28
II.2.1.4. Commande linéaire quadratique .....	29
II.2.1.5. Contrôleur linéaire quadratique à horizon fini .....	29
II.2.1.6. Contrôleur linéaire quadratique à horizon infini .....	31
II.2.1.7. Choix des pondérations .....	32
II.2.2. Optimisation par LMI .....	33
II.2.2.1. Présentation .....	33

II.2.2.2. Stabilité au sens de Lyapnauv .....	34
3. Résolution de problème des gains à l'aide de LQR .....	36
4. Résolution de problème des gains à l'aide des LMI .....	37
Conclusion .....	39
CHAPITRE III. Modèle mathématique du drone .....	40
Introduction .....	40
1. Principes des commandes de vol .....	41
2. Choix des coordonnées .....	42
III.2.1.Repère terre ( $O_{x_E y_E z_E}$ ) .....	42
III.2.2.Repère avion ( $O_{x_b y_b z_b}$ ) .....	43
3. Décomposition d'un vecteur selon un repère .....	43
4. Définition du vecteur de position, de force et de moment et les différents angles de rotation du drone .....	44
5. Représentation de l'orientation et matrice de rotation .....	45
III.5.1.Matrice de rotation .....	46
III.5.2.Vitesses angulaires d'un avion.....	49
6. Équations de mouvement .....	51
III.6.1.Mécanique Newtonienne.....	51
III.6.2.Définition des forces et moments externes .....	54
7. Simplification des équations de mouvement.....	59
III.7.1.Modèle non linéaire.....	59
III.7.1.1. Mouvement longitudinal .....	59
III.7.1.2. Mouvement latéral.....	61
III.7.2.Modèle linéaire.....	62
III.7.2.1. Mouvement longitudinal linéariser .....	64
III.7.2.2. Mouvement latéral linéariser.....	64
8. Le théorème des dérivés de stabilité et de contrôle.....	64
III.8.1.Modèle longitudinal .....	66
III.8.2.Modèle latéral.....	67
9. Perturbation atmosphérique.....	67
III.9.1.Modèle longitudinal .....	69
III.9.2.Modèle latéral.....	70
III.9.3.Représentations des rafales continues .....	70
III.9.4.Fonction de transfert de Dryden.....	72
III.9.4.1. Turbulences longitudinales .....	72
III.9.4.2. Turbulences latéraux .....	73
Conclusion .....	74
CHAPITRE IV. Résultat de simulation .....	75
1. Modèle longitudinal .....	75
Modèle sans perturbation .....	75
Modèle avec perturbation.....	76

IV.1.1.1. Résolution de problème avec LQR .....	77
IV.1.1.2. Résolution de problème avec LMI .....	78
Résultat de simulation et interprétation .....	79
Conclusion .....	91
Conclusion générale .....	92
Référence bibliographique.....	

## Introduction générale

Au courant de ces dernières années, les drones occupent une place significative dans le monde de l'aviation. Ces engins sont utilisés à des fins militaire ainsi que civile. Par conséquence, la communauté scientifique donne toujours un grand intérêt à ce domaine du point de vue conception et commande. L'un des plus grands défis à relever est la commande de la dynamique du vol. Il est connu que le drone pendant son vol est assujetti à des perturbations externes qui sont le produit des changements des conditions atmosphériques, ainsi qu'à des perturbations internes dues au changement des paramètres du drone durant le vol. Par conséquence, une loi de commande synthétisée pour un modèle nominale peut ne pas donner les mêmes performances lors de l'apparition de ces perturbations. Pour remédier à ces problèmes et assurer de meilleures qualités du vol la loi de commande doit être robuste.

Un drone doit être capable de réaliser des missions délicates comme la surveillance de zones ou de bâtiments ou il doit pouvoir suivre une trajectoire déterminée à l'avance mais aussi pouvoir détecter et éviter d'éventuels obstacles. Pour cela il est équipé de capteurs (GPS, centrale inertielle, capteur à ultrasons, etc.) lui permettant de déterminer sa position. Un algorithme de guidage calcule à tout instant la trajectoire en fonction d'éventuels obstacles ou perturbations (rafale de vent). Un algorithme de pilotage détermine les commandes à appliquer aux actionneurs du système pour que le drone suive la trajectoire désirée, remplaçant ainsi l'action d'un pilote humain.

Le drone est assigné à être autonome tout au long de son vol et à exécuter sa mission, mais le plus grand problème, réside dans la complexité de son modèle non linéaire et la présence de perturbations atmosphériques ce qui rendent difficile la conception d'une loi de commande simple afin de contrôler son mouvement et d'exécuter sa mission. A cet égard, une méthode de conception d'une loi de commande, en présence et en absence de rafales de vent et des perturbations internes, sera étudiée tout au long de ce mémoire. Dans le présent projet deux lois

## INTRODUCTION GENERALE

---

---

de commande ont été synthétisée, l'une est basée sur la commande optimale l'autre sur la méthode d'optimisation par LMI (Linear Matrix Inequality). Pour ce faire, la tâche est divisée en deux parties à savoir l'approximation du modèle non-linéaire par un descripteur flou de type Sugeno ou bien ce qui est appelé approche multi-modèle. La deuxième partie présente la synthèse des lois de commande citées au-dessus.

Ce mémoire est organisé comme suit:

Le premier chapitre présente les notions de base de la logique floue et leur utilisation pour l'approximation du raisonnement humain. Dans ce chapitre nous avons essayé de présenter ces notions afin de les utilisées dans les prochains chapitres.

Dans le deuxième chapitre nous allons aborder les méthodes de conception des lois de commande. Comme mentionné plus haut, nous allons commencer par la synthèse du descripteur flou en linéarisant le système autours de plusieurs points de fonctionnement. L'étape suivante donne la méthodologie de synthèse de deux lois de commande à savoir la commande optimale et la formulation du problème par les LMI.

Le troisième chapitre donne la modélisation de la dynamique du vol. Dans cette partie nous allons discuter la complexité du modèle non-linéaire ainsi que l'environnement où le drone évolue.

Le dernier chapitre est consacré aux résultats de simulations du modèle longitudinale, du drone « Aerosonde », en présence et en absence des perturbations atmosphérique. Nous allons présenter les résultats pour les deux lois de commande et les comparé en matière de performance.

Enfin notre mémoire sera clôturé par une conclusion générale et quelques perspectives.

# La logique floue

**Introduction :**

Le but principal de l'automaticien est de contrôler les systèmes, en essayant de comprendre et prédire le comportement des modules qui le composent en déterminant des modèles qui s'accordent avec les observations constatées.

Ces modèles, peuvent être construits sous forme d'équations différentielles linéaires ou non linéaires reliant les entrées, les états et les sorties. Ces équations différentielles formant un modèle mathématique, qui est important pour la synthèse de la loi de commande, sont parfois très difficiles à trouver, notamment pour les procédés non linéaires complexes qui sont composés de beaucoup de paramètres.

Il est possible de résoudre ce problème en représentant le comportement du procédé non linéaire par un modèle flou [9]. Cette technique basée sur la logique floue qui repose sur la théorie mathématique des ensembles flous a été initiée dans les années soixante par Lotfi Zedah à l'université de Berkeley (Californie). L'intérêt principal de la logique floue est de permettre la représentation et le traitement de connaissances imprécises. Elle est utilisée dans les domaines aussi variés que les systèmes experts, la classification des données, le traitement de signal, la gestion de base de données, la modélisation ainsi que la commande des systèmes automatiques. La première application industrielle de la commande floue a été réalisée par Mamdani en 1974 sur un moteur à vapeur.

Habituellement la logique floue est exprimée par un ensemble de règles linguistiques dites règles floues, qui sont utilisées pour décrire le comportement dynamique d'un système inconnu ou mal défini. De ce point de vu, on distingue deux types principaux de systèmes flous: les systèmes flous à conclusion symbolique [10], (systèmes flous linguistique ou de Mamdani) et ceux à conclusion fonctionnelle (systèmes flous de Takagi-Sugeno). Dans les deux types, les prémisses des règles sont exprimées à l'aide des variables linguistiques, seule l'expression des conclusions des règles permet alors de dissocier les deux types de systèmes.

Pour les systèmes flous de type Takagi-Sugeno (T-S) la partie conclusion est exprimée sous la forme d'une constante ou de manière générale d'une fonction ou d'une équation différentielle dépendant des variables d'entrée. Les modèles flous de type T-S, peuvent s'interpréter comme un ensemble de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires dépendantes des variables de prémisses.

### 1.1 Principe fondamental de la logique floue :

Le mode de pensée d'un être humain est généralement fondé sur un raisonnement empirique, où l'analogie et l'intuition jouent un rôle très important. En fait, nos jugements ne nous permettent que d'évaluer certaines grandeurs de manière imprécise. Le schéma de principe de ce raisonnement peut être représenté comme suit [10] :

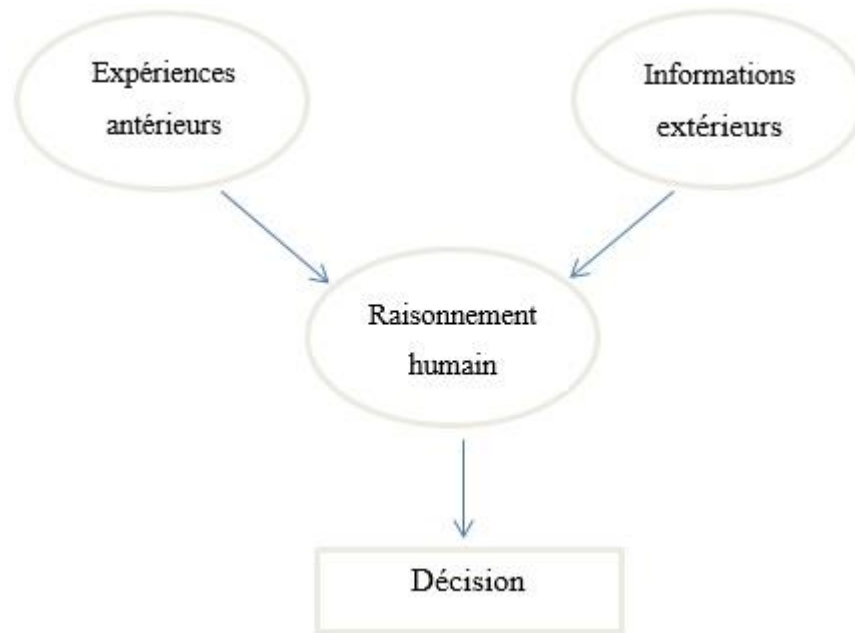


figure 1.1 : Principe de raisonnement flou

Afin de mettre en évidence le principe fondamental de la logique floue, on présente un exemple simple qui consiste à la classification des personnes en trois ensembles « jeunes », « entre deux âges », « âgé ».

Selon la logique classique (Boole), qui n'admet pour variables que les valeurs 0 et 1, une telle classification pourrait se faire comme le montre la figure 1.2. Toutes les personnes âgées de moins de 30 ans sont alors considérées comme appartenant à l'ensemble « jeune » et toutes les personnes âgées de plus de 50 ans comme appartenant à l'ensemble « âgé ».

La logique floue, dont les variables peuvent prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 1, on parle alors de fonction d'appartenance, la figure 1.3 montre une classification possible pour l'exemple précédant :

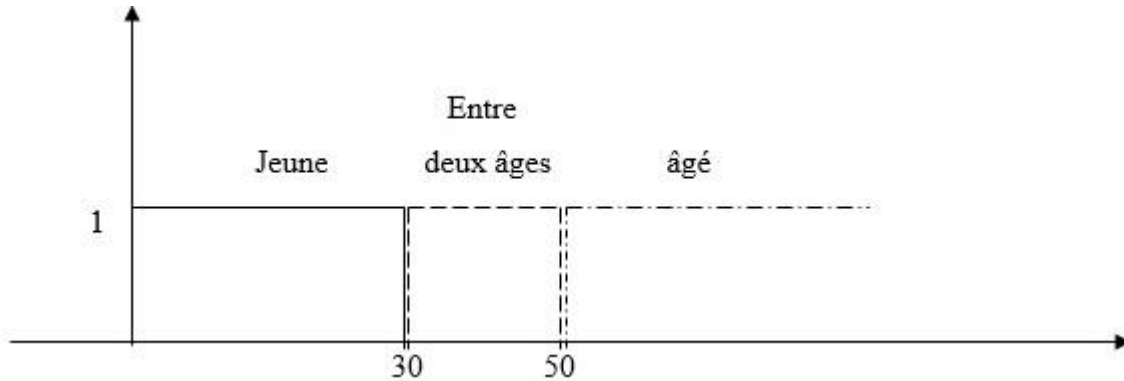


figure 1.2 : Classification selon la logique classique.

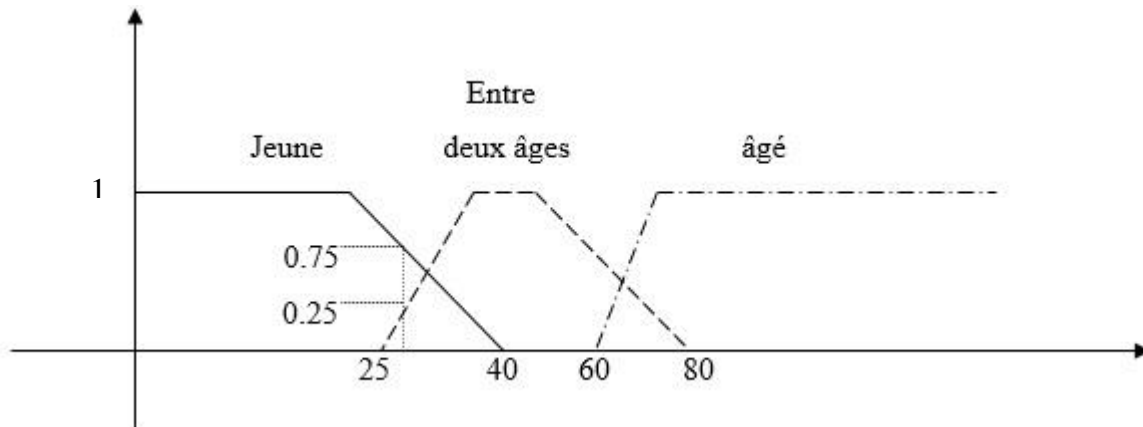


figure (1.3) : Classification selon la logique floue.

### 1.2 Bases générales de la logique floue :

Les systèmes d'inférence floue peuvent être considérés comme des systèmes logiques qui utilisent des règles linguistiques pour établir des relations entre leurs variables d'entrée et de sortie. Aujourd'hui, les applications de ces systèmes sont très nombreuses, on outre, ils sont largement utilisés pour la commande, la modélisation, le

diagnostic et la reconnaissance de formes. Pour une meilleure compréhension, nous présentons quelques notions de base de ces systèmes ainsi que leurs types et leurs caractéristiques.

### **1.2.1 Les Ensembles Floues:**

La notion d'ensemble flou introduit un caractère graduel de l'appartenance d'un élément à un ensemble donné. Cela permet une meilleure représentation des termes et des connaissances vagues que nous, les humains, manipulons au quotidien. Mathématiquement, un ensemble flou  $A$  d'un univers de discours  $U$ , est caractérisé par une fonction d'appartenance, notée  $\mu_A$ , à valeur dans l'intervalle  $[0,1]$  et qui associe à chaque élément  $x$  de  $U$  un degré d'appartenance  $\mu_A(x)$  indiquant le niveau d'appartenance de  $x$  à  $A$ .

$\mu_A(x) = 1$  et  $\mu_A(x) = 0$  correspondent respectivement à l'appartenance et la non-appartenance.

### **1.2.2 Variable linguistique:**

La notion de variable linguistique permet de modéliser les connaissances imprécises ou vagues sur une variable dont la valeur précise est inconnue. Une variable linguistique, ou variable floue, est donc une variable dont les valeurs floues appartiennent à des ensembles flous pouvant représenter des mots du langage naturel. Ainsi une variable floue peut prendre simultanément plusieurs valeurs linguistiques [11]. Le domaine sur lequel ces termes et ces variables sont définis, constitue l'univers de discours. Le découpage de cet univers de discours par les termes flous est appelé une partition floue. Lorsque l'univers de discours est totalement recouvert par les termes flous, et que pour toutes valeurs, la somme des degrés d'appartenance est égale à 1, parle alors de partition floue forte.

La variable linguistique peut être représentée par un triplé  $(x, T(x), U)$  dans lequel  $x$  est le nom de la variable linguistique,  $T(x)$  l'ensemble des valeurs linguistiques de  $x$  et  $U$  l'univers de discours. La figure (1.4) illustre un exemple de variable linguistique 'vitesse' avec trois termes linguistiques : petite, moyenne et grande.

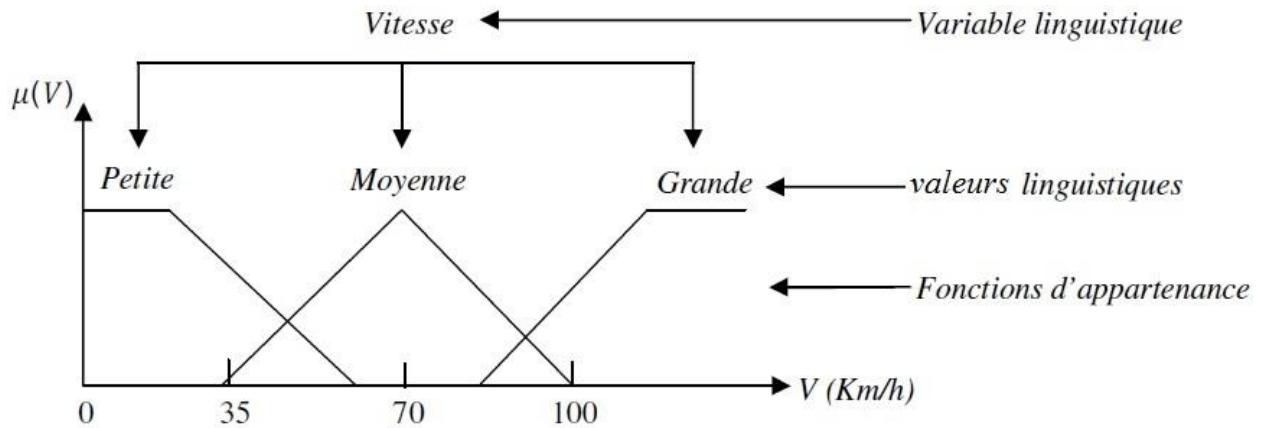


figure 1.4 : Variable linguistique

**1.2.3 Fonction d'appartenance :**

Soit un ensemble  $E$  et un sous-ensemble  $A$  de  $E$  ( $A \subset E$ ), et  $x$  un élément de  $E$  appartenant à  $A$  ( $x \in A$ ). Pour illustrer cette caractéristique, on utilise la fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$  compris entre 0 et 1, qui représente le degré d'appartenance de  $x$  à l'ensemble flou  $A$ . Le plus souvent, la fonction d'appartenance est déterminée par l'une des fonctions suivantes figure 1.5 :

- **Fonction triangulaire :**

Elle est définie par trois paramètres  $(a, b, c)$ , qui déterminent les coordonnées des trois sommets figure 1.5-a.

$$\mu(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right) \tag{1.1}$$

• **Fonction trapézoïdale :**

Elle est définie par quatre paramètres  $(a, b, c, d)$ , figure 1.5-b :

$$\mu(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right) \quad (1.2)$$

• **Fonction gaussienne :**

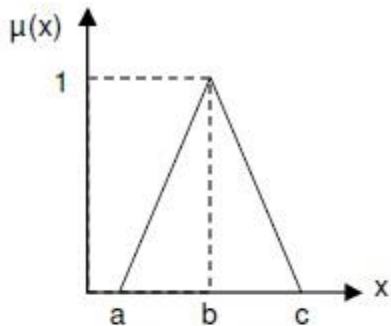
Elle est définie par deux paramètres  $(\sigma, m)$ , figure 1.5-c :

$$\mu(x) = \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.3)$$

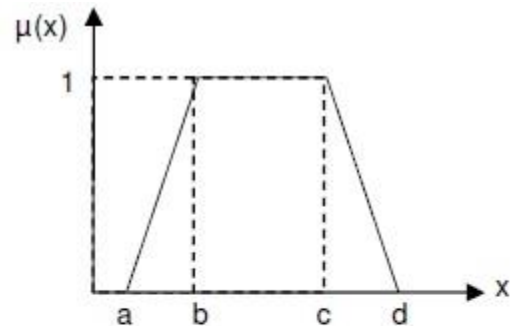
• **Fonction sigmoïde :**

Elle est définie par deux paramètres  $(a, c)$ , figure 1.5-d.

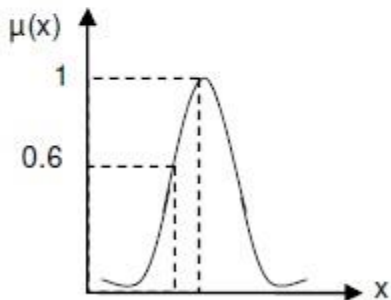
$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \exp(-a.(x-c))} \quad (1.4)$$



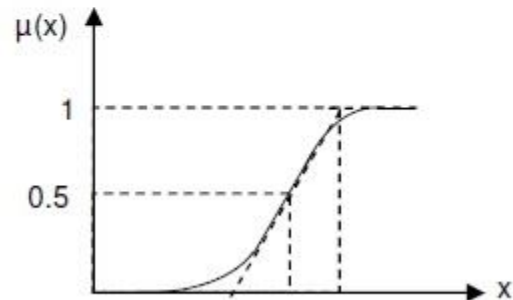
(a) triangulaire



(b) trapézoïdale



(c) gaussienne



(d) sigmoïde

figure 1.5 : Formes usuelles des fonctions d'appartenance

### 1.2.4 Opérations sur les ensembles flous :

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles flous dans  $U$  ayant respectivement  $\mu_A, \mu_B$  comme fonctions d'appartenance. L'union, l'intersection et la complémentation des ensembles flous sont définis à l'aide de leur fonction d'appartenance. [9]

- **Opérateur OU (Union) :** L'union de deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  de  $E$  est un sous-ensemble flou  $A \cup B$  qui est défini par le plus grand sous-ensemble flou qui contient  $A$  et qui contient  $B$ . Sa fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)); \forall x \in E \quad (1.5)$$

- **Opérateur ET (Intersection) :** L'intersection de deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  de  $E$  est un sous-ensemble flou  $A \cap B$  qui est défini par le plus petit sous-ensemble contenant à la fois dans  $A$  et dans  $B$ . Sa fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)); \forall x \in E \quad (1.6)$$

- **Opérateur NON (Complément) :** Le complément d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $E$  est un ensemble flou dénoté par  $\bar{A}$  dont la fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x); \forall x \in E \quad (1.7)$$

- **Inclusion :** Soit les deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  de  $E$ , on dira que  $A$  est inclus dans  $B$  si :

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x); \forall x \in E \quad (1.8)$$

### 1.3 La Commande Floue :

Le succès de la commande floue trouve aussi en grande partie son origine dans sa capacité à traduire une stratégie de contrôle d'un opérateur qualifié en un ensemble de règles linguistiques « si... alors » facilement interprétables. L'utilisation de la commande floue

est particulièrement intéressante lorsqu'on ne dispose pas de modèle mathématique précis du processus à commander ou lorsque ce dernier présente de trop fortes non linéarité ou imprécisions.

### 1.3.1 Structure d'un contrôleur flou :

Un réglage par logique floue comporte : le système à régler, l'organe de commande ainsi que le régulateur par logique floue. Il est représenté par la figure 1.6 suivante:

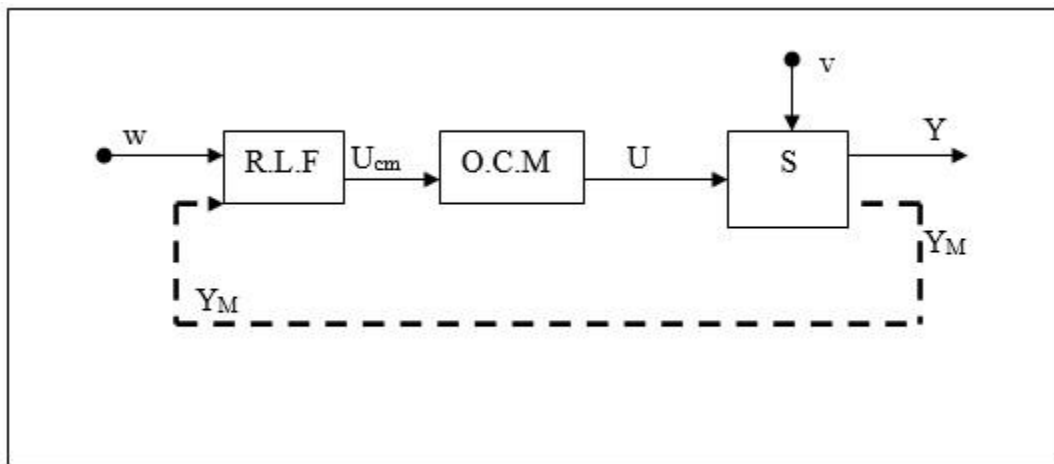


figure (1.6) : Structure d'un régulateur par logique floue

- S : Système à régler
- OCM : Organe de commande
- RLF : Régulateur par logique floue
- w : Grandeur de consigne
- Ucm : Signal de commande fourni par le RLF
- U : Grandeur de commande fournie par l'OCM
- v : Perturbation
- Y : Grandeur à régler (ou sortie)
- $Y_M$  : Vecteur contenant les grandeurs mesurées

### 1.3.2 Structure et configuration interne d'un régulateur par logique floue (RLF) :

Par opposition à un régulateur standard ou un régulateur avec un retour d'état, le régulateur par logique floue ne traite pas une relation mathématique bien définie, mais utilise des inférences avec plusieurs règles se basant sur des variables linguistiques.

Le régulateur par logique floue comprend les quatre modules suivants :

- l'interface de fuzzification,
- la base de connaissances,
- le moteur d'inférence floue,
- l'interface de défuzzification.

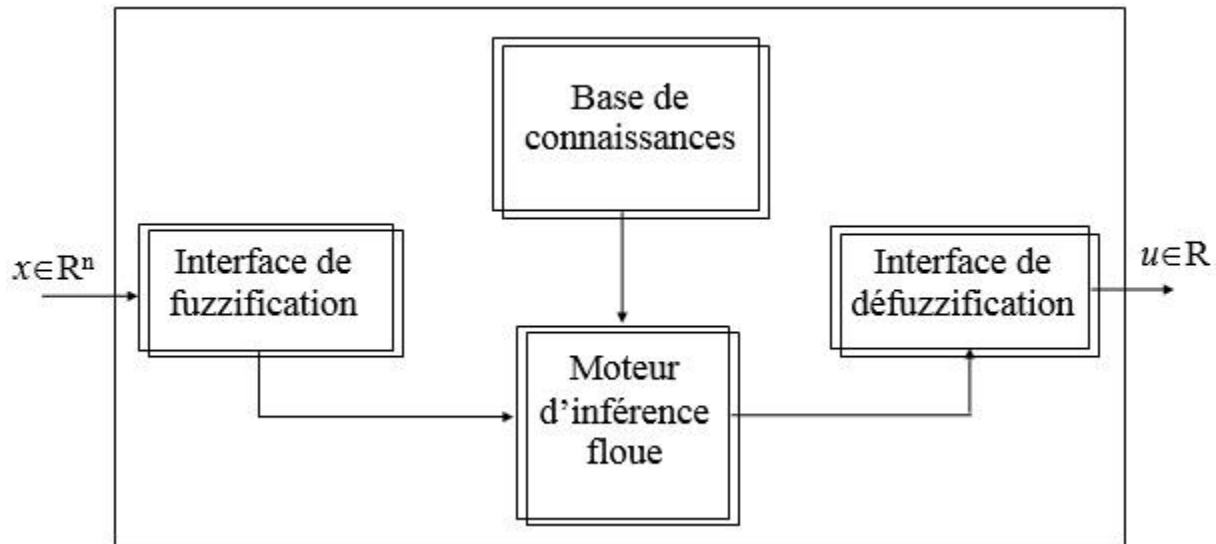


figure 1.7 : Structure de base d'un RLF

#### 1.3.2.1. Fuzzification des entrées :

L'objectif de la fuzzification est de définir les fonctions d'appartenance pour les différentes variables (variable d'entrée et de sortie), on réalise ainsi un passage des grandeurs physiques en variables linguistiques (variables floues) qui peuvent alors être traité par les inférences [10].

Le choix des formes des fonctions d'appartenance est arbitraire. Des études comparatives ont montré qu'avec les différentes formes des fonctions d'appartenance, les résultats sont pratiquement similaires en boucle fermée. La forme la plus fréquemment utilisée en commande floue est la forme triangulaire.

En général, on introduit pour une variable linguistique trois, cinq ou sept ensembles flous. Le choix du nombre dépend de la précision souhaitée. Les fonctions d'appartenance peuvent être symétriques ou non symétriques.

### **1.3.2.2. Base de connaissances :**

Elle comprend la base de données et la base des règles floues.

- **La base de données :**

Elle contient la définition des ensembles flous, les facteurs d'échelle pour la normalisation des ensembles de référence et la partition de l'espace flou d'entrée et de sortie.

- **La base des règles :**

Le comportement dynamique d'un système est caractérisé par un ensemble de règles linguistiques basé sur des connaissances bien précises. Ces connaissances sont habituellement de la forme :

Si (un ensemble de conditions est satisfait)

Alors

(Un ensemble de conséquences peut être induit)

La collection des règles floues de commande, qui sont exprimées sous la forme de règles floues « si - Alors », constituent la base des règles ou l'ensemble des règles du RLF.

Les variables linguistiques pour un RLF sont la variable d'état, l'erreur de la variable d'état ( $e$ ), la variation de l'erreur ( $de$ ), l'intégration de cette erreur etc...

Les règles sont regroupées sous forme de table donnant la valeur de la commande sous la forme linguistique en fonction des deux entrées ( $e$ ,  $de$ ).

- Si Les deux variables d'entrée et la sortie sont décrits par trois ensembles flous, la base de règles s'écrit sous forme d'une matrice d'inférence.

$e \backslash de$	N	Z	P
N	N	N	Z
Z	N	Z	P
P	Z	P	P

tableau (1.1)

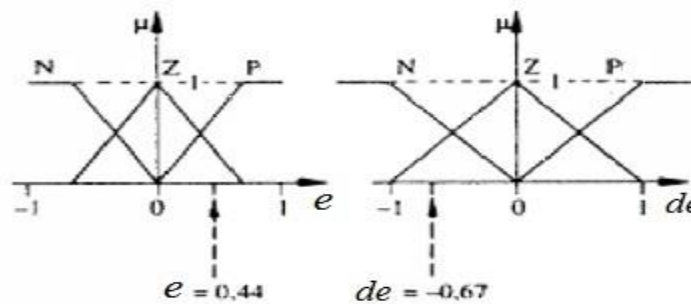


figure (1.8) : Fonctions d'appartenance triangulaires en trois ensembles

**1.3.2.3 Moteur d'inférence floue :**

C'est un mécanisme de décision. Il permet à partir d'un fait observé de la base des règles floues une décision en exploitant le raisonnement approximatif.

- **Structure générale de l'inférence :**

La stratégie de réglage dépend des inférences adoptées. Elles lient les variables d'entrée à une variable de sortie, un type de règle peut être par exemple :

Si  $x_1$  est positif ET  $x_2$  est zéro Alors  $u$  est négatif.

Où  $x_1, x_2$  est représentent deux variables d'entrée et  $u$  la sortie de commande.

Dans les inférences on utilise les opérateurs <ET> et <OU>, l'opérateur ET est utilisé pour les variables à l'intérieur d'une règle, alors que l'opérateur OU lie les différentes règles. Il existe plusieurs méthodes pour réaliser ces opérateurs. On introduit donc la notion de méthodes d'inférence.

Généralement on utilise une des méthodes suivantes :

- méthode d'inférence max-min.
- méthode d'inférence max-prod.
- méthode d'inférence somme-prod.

- **Méthodes d'inférence max-min :**

Cette méthode réalise, au niveau de la condition, l'opérateur **OU** par la formation maximum et l'opérateur **ET** par la formation du minimum. La conclusion dans chaque règle, introduite par **ALORS**, lié le facteur d'appartenance de la condition avec la fonction d'appartenance de la variable de sortie par l'opérateur **ET**, réalisé dans le cas présent par la formation du minimum. Enfin l'opérateur **OU** qui lie les différentes règles est réalisé par la formation du maximum. Cette méthode est explicitée dans la figure (1.9):

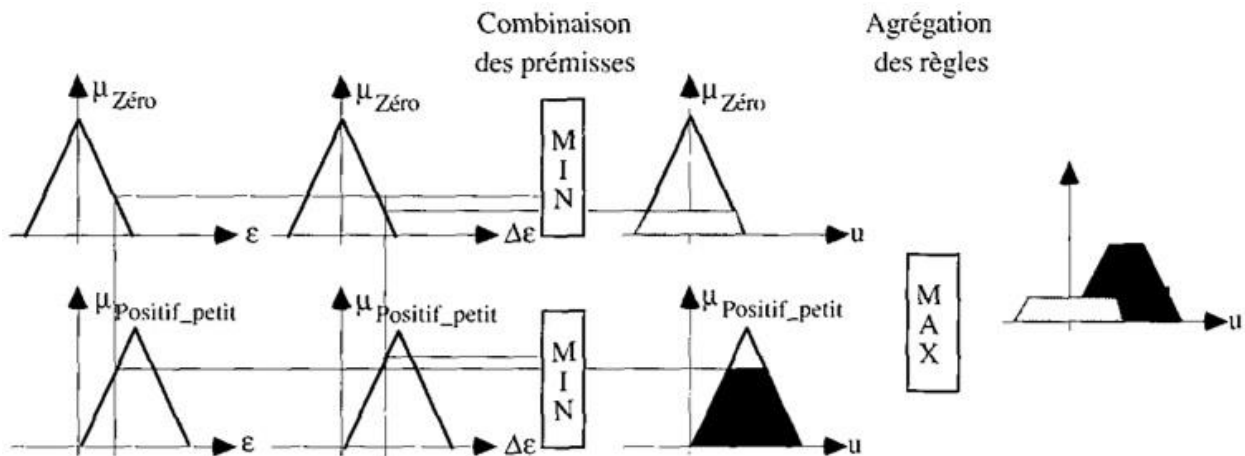


figure (1.9) : Méthode d'inférence max-min

- **Méthode d'inférence max-prod :**

Cette méthode réalise, en général, au niveau de la condition, l'opérateur **OU** par la formation maximum et l'opérateur **ET** par la formation du minimum. Par contre, la conclusion dans chaque règle, introduite par **ALORS**, lié le facteur d'appartenance de la

condition avec la fonction d'appartenance de la variable de sortie par l'opérateur **ET**, est réalisé cette fois-ci par la formation du produit.

Enfin l'opérateur **OU** qui lié les différentes règles est réalisé par la formation du maximum.

- **Méthode somme-prod :**

Cette méthode est la plus utilisée car son temps de calcul est court. Par opposition aux méthodes d'inférences précédentes, cette méthode réalise, au niveau de la condition, l'opérateur **OU** par la formation de la somme, plus précisément par la valeur moyenne, tandis que l'opérateur **ET** est réalisé par la formation du produit.

La conclusion de chaque règle, introduite par **ALORS**, liant le facteur d'appartenance de la condition avec la fonction d'appartenance de la variable de sortie par l'opérateur **ET**, est réalisé par la formation du produit. Enfin l'opérateur **OU** qui lie les différentes règles est réalisé par la formation de la somme, donc de la valeur moyenne.

#### **1.3.2.4 La défuzzification :**

Consiste à transformer la variable floue résultante d'inférence des règles en une information déterministe en temps réel.

La méthode de défuzzification la plus utilisé est celle par centre de gravité, qui détermine le centre de gravité de la fonction d'appartenance résultante.

- **Méthode de centre de gravité :**

Le centre de gravité de la surface de l'ensemble flou  $\mu_C(u)$  est défini par :

$$u = \frac{\int_U \mu_C(u).u du}{\int_U \mu_C(u).du} \quad (1.9)$$

Où  $\mu_C(u)$  est la fonction d'appartenance de l'ensemble flou  $C$  représentant la sortie globale du système flou. Souvent on utilise une version discrète de l'intégrale :

$$u = \frac{\sum_i u_i \cdot \mu_C(u_i)}{\sum_i \mu_C(u_i)} \quad (1.10)$$

- **Méthode du maximum**

Cette méthode, s'applique uniquement dans le cas où la fonction d'appartenance associée à l'ensemble de sortie n'admet qu'un seul maximum. On choisit comme sortie l'abscisse  $u_r$  correspondant à ce maximum :

$$\mu_A(u_r) = \max(\mu_A(u_r)) \quad (1.11)$$

- **Méthode de la moyenne des maxima**

Dans cette méthode, la valeur de sortie est estimée par l'abscisse du point correspondant au centre de l'intervalle  $M$  pour lequel la fonction d'appartenance est maximale. Cette valeur est fournie par l'expression :

$$u_r = (\inf(M) + \sup(M))/2 \quad (1.12)$$

## 1.4 Les différents types de régulateurs :

### 1.4.1 Système d'inférence floue de type Mamdani :

En 1974, Mamdani avait présenté, pour la première fois, la technique de commande par logique floue [10]. Celle-ci consiste à déterminer un ensemble de règles qui maîtrise le comportement dynamique du système à commande. L'obtention de ces règles est facile auprès des experts qui connaissent bien le système. Il avait utilisé des règles à prémisses et conclusions symboliques, l'inférence (max, min), et la défuzzification par centre de gravité. La forme de l'implication floue définie par ce type de contrôleur est de la forme :

$$R_i : \text{Si } x_1 \text{ est } X_1 \text{ ET } x_2 \text{ est } X_2 \text{ ET } \dots \text{ ET } x_n \text{ est } X_n \text{ ALORS } U \text{ est } U_i \quad (1.13)$$

Avec

$n$  : nombres de variables d'entrée.

$i$  : la  $i^{\text{ème}}$  règle.

La conséquence de ce type de système est une valeur floue.

#### 1.4.2 Régulateur flou de type SUGENO (TSK):

En supposant que les différentes variables d'état  $X(k)$  du système sont accessibles, on peut exprimer les règles suivant Sugeno avec la manière suivante :

$$R_i : \text{Si } x_1(k) \text{ est } X_1 \text{ ET } \dots \text{ ET } x_n(k) \text{ est } X_n \text{ ALORS } u_i(k) = p_{i0} + \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j(k) \quad (1.14)$$

Avec :

$R_i$  : la  $i^{\text{ème}}$  règle.

$p_{ij}$  : des coefficients.

A chaque règle  $R_i$  est associé un poids  $w_i$  correspondant à la façon de modéliser l'implication floue et l'opérateur ET.

La commande finale est alors calculée comme suite :

$$u(k) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i u_i}{\sum_{i=1}^r w_i} \quad (1.15)$$

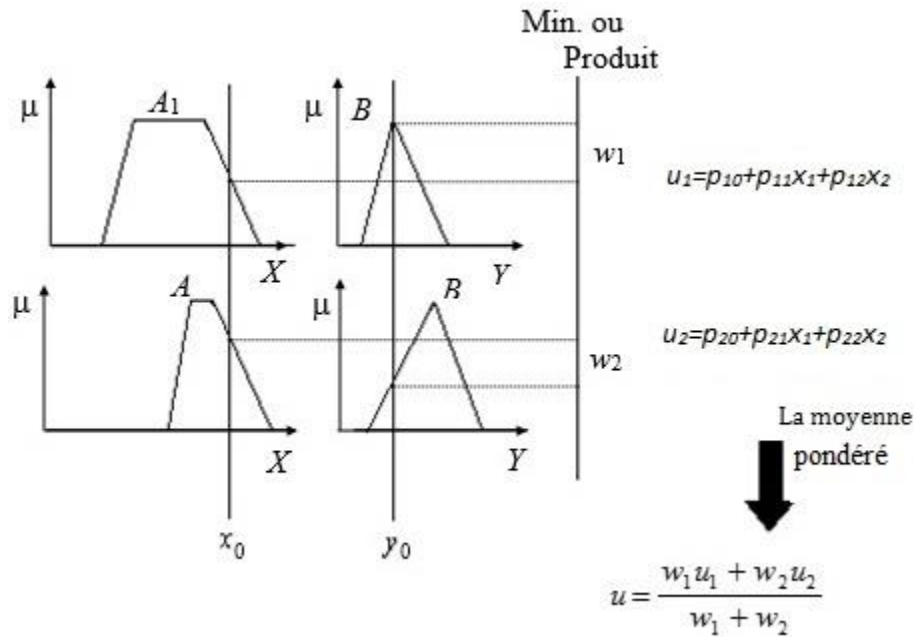


figure 1.10 : Exemple d'un modèle flou de Sugeno

**Conclusion :**

D'un point de vue mathématique, un système flou définit une relation non linéaire d'un espace d'entrée vers un espace de sortie, et d'un point de vue logique, un système flou est une machine de prise de décision composée de quatre parties essentielles : la fuzzification, base de connaissance et moteur d'inférence floue et la défuzzification. L'architecteur d'un système flou est déterminée par une meilleure compréhension des ensembles flous et des opérateurs flous. Nous avons constaté qu'il n'existe pas un seul type de système flou, mais il y en a plusieurs. Un utilisateur des systèmes flous doit décider sur la méthode de défuzzification, le type des fonctions d'appartenance, le type des règles floues, la méthode du raisonnement flou et la stratégie de défuzzification. Les Systèmes flous exigent de préférence, la disponibilité d'une expertise humaine ; par conséquent, les performances de ces derniers sont étroitement liées aux techniques d'acquisition de connaissances et la justesse des informations acquises.

# Conception des lois de commande

**Introduction :**

Dans la littérature de la commande non linéaire, plusieurs approches peuvent être utilisées: commande par apprentissage, commande à structure variable, etc. Dans ce contexte, la technique de la linéarisation entrée-sortie par approximation autour de point de fonctionnement est spécialement utilisée dans le cadre des systèmes non linéaires continus.

Une classe de systèmes non linéaires peut être transformée en une classe de systèmes linéaires à travers cette technique. Dans ce cas, le système non linéaire transformé peut être commandé par des méthodes classiques de l'automatique linéaire (approche Multi-moèle). Une telle transformation n'existe pas toujours, mais lorsqu'elle existe, elle permet de stabiliser le système exactement comme s'il s'agissait d'un système linéaire avec l'utilisation des méthodes courantes (placement de pôles, synthèse quadratique, synthèse robuste, ...etc.). Dans ce chapitre, on suppose que cette transformation existe et qu'elle est capable de conduire l'erreur entre la sortie du système et une trajectoire désirée vers zéro.

L'avancée des recherches dans le secteur des systèmes flous a prouvé la capacité et la puissance de ces nouvelles approches dans la commande des systèmes non linéaires à travers les techniques d'identification (apprentissage) floue. Plusieurs chercheurs utilisent cette puissance d'apprentissage pour représenter la dynamique des systèmes non linéaires. Le développement de modèles mathématiques pour les systèmes non linéaires est un sujet central dans plusieurs disciplines des sciences et de l'ingénierie. Traditionnellement, la modélisation est vue comme la double conjonction entre la compréhension de la nature et du comportement d'un système ainsi que le traitement mathématique approprié qui conduisent à l'obtention d'un modèle utilisable. Le besoin d'une forte compréhension des

éléments physiques de base constitue une grande restriction au niveau pratique quand on est confronté aux systèmes complexes ou mal connus.

En effet, la mise en équations des lois qui gouvernent de tels systèmes conduit généralement à un modèle de connaissance trop complexe et une mise en œuvre délicate. Dans ce cas, le recours à des techniques de modélisation élaborées à partir des mesures d'entrée/sortie recueillies sur le système s'impose.

L'identification et la modélisation floues à partir de données expérimentales sont des outils efficaces pour approximer les systèmes non linéaires. Parmi les modèles largement utilisés, nous trouvons celle de Takagi-Sugeno (TS) [12]. L'approximation autour de plusieurs points de fonctionnement est l'une des techniques utilisées pour construire ces modèles.

Ces dernières années, plusieurs travaux ont été développés à base des systèmes flous. Ils sont utilisés dans la prise de décision, filtres adaptatifs, la commande des robots mobiles, le prétraitement des images de la radiographie, et la commande des systèmes non linéaires.

Dans ce qui suit la conception de la loi de commande est répartie en deux tâches. La première consiste à approximer le modèle Non –linéaire par des règles floues de type Sugeno en linéarisant le modèle en plusieurs points de fonctionnement. Il est à remarquer que plus on augmente le nombre de points plus on approche du modèle Non-linéaire mais le nombre de règles augmente ce qui rend la synthèse et l'analyse de loi de commande compliquée. La deuxième tâche consiste à synthétiser la loi de commande pour le système décrit dans la première partie. Dans ce mémoire deux approches ont été étudiées ; la première est la réalisation de la loi de commande par LQR (commande Linéaire Quadratique), la seconde à l'aide des LMI (linéaire matrice inequality).

La synthèse de Lyapunov est la théorie générale la plus utilisée pour l'étude de stabilité des systèmes. D'une manière générale, elle consiste à sélectionner une fonction de Lyapunov, puis à choisir des lois de commande ou d'adaptation assurant sa décroissance,

pour des systèmes continus et des systèmes discrets. Si ces conditions sont vérifiées, la fonction de Lyapunov assure la stabilité. De plus, la méthode de Lyapunov peut servir de base à la synthèse des lois de commande stabilisantes.

On attire l'attention du lecteur sur le fait que la synthèse de Lyapunov est une condition suffisante pour la stabilité. La difficulté de cette approche repose sur la détermination d'une fonction de Lyapunov qui conduit à choisir une fonction particulière. Il est important de noter également que la stabilité au sens de Lyapunov n'est pas toujours suffisante pour assurer un bon comportement entrée-sortie pour un système.

La stabilité des systèmes flous est la propriété principale que nous traitons dans ce mémoire. La notion de stabilité d'un système flou dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre. L'analyse de stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsqu'il est ponctuellement écarté.

## **2.1 Synthèse d'une loi de commande par la logique floue :**

### **2.1.1 Les modèles Takagi-Sugeno:**

Un modèle TSK continu d'un système autonome est représenté par l'ensemble des règles floues (Si...Alors), écrite comme suite :

Règle (i) : Si  $x_1(t)$  est  $M_{i1}$  et  $x_2(t)$  est  $M_{i2}$  et ... et  $x_j(t)$  est  $M_{ij}$  alors  $\dot{x} = A_i x$  (2.1)

Où  $x \in R^{n \times 1}$  est le vecteur d'état,  $i = 1 \dots r$   $r$  est le nombre de règles floues (nombre de points de fonctionnement),  $M_{ij}$  les ensembles flous d'entrée, et les matrices  $A_i \in R^{n \times n}$  sont les matrices d'état

La sortie totale après agrégation du modèle flou TSK peut être écrite :

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x)(A_i x)}{\sum_{i=1}^r w_i(x)} \quad (2.2)$$

Telle que :

$$w_i = \prod_{j=1}^n \mu_{ij}(x_j) \quad (2.3)$$

Et  $\mu_{ij}$  est le facteur d'appartenance de la  $j^{\text{eme}}$  ensemble flou, dans la  $i^{\text{eme}}$  règle Soit :

$$\alpha_i(x) = \frac{w_i(x)}{\sum w_i(x)}$$

Donc l'équation (2.2) sera :

Avec  $i=1 \dots r$ .

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x) A_i x; \quad (2.4)$$

Où :

$$\alpha_i(x) > 0 \quad \text{ET} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(x) = 1$$

**2.1.2 Modèle et régulateur flou TSK :**

On introduit maintenant la notion de la commande floue à partir d'un système flou TSK, le contrôleur est constitué de règles floues, chaque règle représente un contrôleur par retour d'état local, et le régulateur complet est obtenu par agrégation de ces régulateurs locaux.

Une règle de modèle TSK peut être écrite comme suite :

Règle (i) : Si  $x_1(t)$  est  $M_{i1}$  et  $x_2(t)$  est  $M_{i2}$  et ... et  $x_j(t)$  est  $M_{ij}$  alors  $\dot{x} = A_i x + B_i u$  (2.5)

Le modèle dynamique total peut être écrit comme suit :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x)(A_i x + B_i u) \quad (2.6)$$

Pour ce modèle, on peut synthétiser une loi de commande donnée comme suit :

Règle (i) : Si  $x_1(t)$  est  $M_{i1}$  et  $x_2(t)$  est  $M_{i2}$  et ... et  $x_j(t)$  est  $M_{ij}$  alors  $u = -K_i x(t)$  (2.7)

Le régulateur total sera :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r \beta_i(x) K_i x(t) \quad (2.8)$$

Avec: 
$$\beta_i(x) = \frac{w_i(x)}{\sum w_i(x)}$$

On remplace (2.8) dans (2.6), on obtient le modèle en boucle fermé :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x) \beta_j(x) (A_i - B_i K_j) x(t) \quad (2.9)$$

On peut voir que l'équation (2.9) est sous forme d'une commande a retour d'état avec  $K_i$  comme gains de retour d'état qui stabilise le système ; donc on va faire appel aux deux méthodes pour calculer ces gains, cela est fait avec la commande LQR utilisons l'équation de Riccati et une autre méthode qui est l'optimisation par LMI (Linear Matrix Inequalities).

## **2.2 Synthèse des lois de commandes stabilisante :**

### **2.2.1 Commande optimale :**

La commande optimale contient deux principales orientations. La première orientation vise une énergie minimale tandis que la deuxième cherche à réduire le temps de convergence du système.

La commande optimale d'un système non linéaire invariant avec un régulateur linéaire quadratique a évolué de façon importante au cours des dernières années. Cette méthode offre la possibilité d'augmenter la stabilité dynamique du système tout en assurant la minimisation du temps de repense désirée.

Alternativement, en se basant sur les méthodes de retour d'état, le concepteur doit commencer à chercher des pôles afin de trouver les gains de retour d'état. Cette méthode permet de réaliser le comportement désiré du système.

En effet, cela peut être concrétisé à l'aide du régulateur linéaire quadratique. Cependant, un régulateur linéaire quadratique ne peut être appliqué que sur un système linéaire, complètement commandable et complètement observable [13]. Pour notre problème, il faut donc linéariser le modèle dynamique autour de plusieurs point de fonctionnement.

Pour commencer, on positionne le problème en considérant un système à temps continu de représentation d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.11)$$

Sous condition initiale  $x(t_0) = x_0$  où  $t \in \mathcal{R}, x \in \mathcal{R}^m$  et  $u \in \mathcal{R}^n$ . Les signaux  $x$  et  $u$  sont des fonctions de  $\mathcal{R}$  représentant respectivement le vecteur de commande et le vecteur d'état. Le régulateur en question est appliqué sur un système linéaire, qui peut être représenté par un modèle d'état sous la forme matricielle suite à une linéarisation :

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t) \\ \delta y(t) = C \delta x(t) + D \delta u(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

Où le vecteur  $\delta y(t)$  représente le vecteur de sortie.  $A$  est la matrice de transition d'état,  $B$  la matrice de commande. Les matrices  $C$  et  $D$  sont relatives au vecteur de sortie  $\delta y(t)$ .

### 2.2.1.1 Critères d'optimalité de la commande optimale :

Dans cette section, on présente le résultat en s'appuyant sur le principe du maximum de Pontriagine sans détailler le calcul des variations. Pour plus de détails, on se réfère à [14]. Rappelons l'équation du système à temps continu:

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

Sous condition initiale  $x(t_0) = x_0$  où  $t \in \mathcal{R}, x \in \mathcal{R}^m$  et  $u \in \mathcal{R}^n$ . Les signaux  $x$  et  $u$  sont des fonctions de  $\mathcal{R}$  représentant respectivement le vecteur de commande et le vecteur d'état. Étant donnée la condition initiale et la commande  $u$ , l'équation (2.11) définit une trajectoire unique pour l'état  $x$  sur l'intervalle temporel  $[t_0, t_f]$  [35].

Soit la famille de critères qui s'écrivent sous la forme :

$$J(x_0, t_0, u) = \mathcal{G}(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (2.13)$$

Avec  $x_f = x(t_f)$ . Les fonctions  $\mathcal{G}$  et  $\phi$  ainsi que les instants  $t_0$  et  $t_f$  sont donnés. Ce critère ne dépend que de  $x_0$  et de  $u$  sur  $[t_0, t_f]$ .

Plusieurs contraintes autres que l'équation de l'état peuvent intervenir sur la trajectoire de la variable d'état, sans pour autant mettre en cause le critère choisi. On cite à titre d'exemple :

- l'instant final soit imposé ou libre;
- les contraintes peuvent être imposées sur l'état final:  $x_f \in \mathcal{X}$ ;
- la commande d'entrée peut appartenir à un ensemble  $u \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^m$ .

Ainsi, le problème de la commande optimale consiste à trouver la commande  $\tilde{u}$  optimale minimisant  $J(x_0, t_0, u)$  :

$$\tilde{u} = \min_{u \in U} J(x_0, t_0, u) \quad (2.14)$$

Par la suite on notera la trajectoire optimale  $\tilde{x}$  correspondante à la valeur du critère :

$$\tilde{J}(x_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u}) \quad (2.15)$$

### 2.2.1.2 Principe d'optimalité de Bellman:

On reprend dans cette partie le critère donné par l'équation (2.15) où on considère la commande optimale  $\tilde{u}$  sur  $[t_0, t_f]$ . Le critère optimal est donné par :

$$\tilde{J}(x_0) = \min_{u[t_0, t_0]} J(x_0, t_0, \tilde{u}) \quad (2.16)$$

Soit  $t_1 \in [t_0, t_f]$ . Le principe d'optimalité de Bellman ne stipule que la trajectoire optimale sur  $[t_0, t_f]$  contient la trajectoire optimale sur  $[t_1, t_f]$  à la condition initiale  $x_1 = x(t_1)$ .

Autrement dit:

$$\tilde{J}(x_0) = \min_{u[t_0, t_f]} \left( \int_{t_0}^{t_1} \phi(x, u, t) dt + \tilde{J}(x_1) \right) \quad (2.17)$$

### 2.2.1.3 Principe de minimum de Pontriagine :

Dans cette partie, on énonce brièvement le principe de minimum de Pontriagine. Pour plus d'information sur sa démonstration, on peut se référer à Sage et White [14]. Rappelons le système l'équation d'état donné par l'équation (2.11) :

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

On peut écrire l'équation sous la forme suivante :

$$f(x, u, t) - \dot{x} = 0 \quad (2.18)$$

Et le critère de performance donné par l'équation (4.3) sera :

$$J(x_0, t_0, u) = \mathcal{G}(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt$$

Sujet a :

$$\begin{aligned} f(x, u, t) - \dot{x} &= 0 \\ x(t_0) &= x_0; \\ x(t_f) &= x_f \text{ ou libre ;} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Pour éliminer la contrainte (4.18), on propose d'introduire le vecteur des variable adjoints  $P^{iT} = [P_1', P_{21}', P_3']$ ; et de l'intégrer dans le critère et le problème devient :

$$J(x_0, t_0, u) = \mathcal{G}(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\phi(x, u, t) + P^{iT} (f(x, u, t) - \dot{x})] dt \quad (2.20)$$

On considère l'Hamiltonien relatif au système :

$$H(x, u, p, t) = \phi(x, u, t) + P^{iT} f(x, u, t) \quad (2.21)$$

Avec  $p$  l'état adjoint. Le principe du minimum de Pontriagine stipule que la trajectoire optimale minimise l'hamiltonien du système.

Tout au long de la trajectoire optimale, on dispose de diverses équations qui permettent de résoudre le problème de commande optimale. Ces équations sont générées à l'aide du calcul des variations [15].

En opérant sur les points extrémaux de la solution, on obtient un jeu d'équations appelées équations canoniques de Hamilton. Ces dernières commandent les dynamiques de l'état et de l'état adjoint. En effet,

- la dynamique de l'état :  $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (2.22)$

- la dynamique de l'état adjoint :  $\dot{P}^T = -\frac{\partial H}{\partial x}$  (2.23)

Diverses équations additionnelles peuvent être exprimées selon les hypothèses du problème. On peut citer à titre d'exemple :

- dans le cas où aucune contrainte n'est imposée sur  $u$  :  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  (2.24)

- dans le cas où  $H$  n'est pas une fonction explicite du temps :  $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0$  (2.25)

**2.2.1.4 Commande linéaire quadratique :**

La Commande linéaire quadratique est souvent appelée LQ ou LQR pour "*Linear quadratic regulator*". Cette appellation provient du fait que le système est linéaire et que la commande est quadratique.

**2.2.1.5 Contrôleur linéaire quadratique à horizon fini :**

Considérons dans cette partie le problème de commande optimale du système décrit par les équations ci-dessous [14] :

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u \tag{2.26}$$

On considère aussi l'ensemble des critères s'écrivant sous une forme quadratique comme suit:

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} x_f^T S x_f + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q(t)x + u^T R(t)u] dt \tag{2.27}$$

Où  $Q, R$  sont des matrices de pondération symétriques ( $Q \geq 0$  et  $R > 0$ ).

On utilise le principe de minimum et en écrivant  $p = P(t)x$ , l'hamiltonien est donné par :

$$H(x, u, p, t) = P^T A(t)x + P^T B(t)u + \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u) \quad (2.28)$$

Les équations précédentes vérifient ce qui suit :

Avec  $\frac{\partial}{\partial x}(x^T Qx) = 2Qx$  et  $\frac{\partial}{\partial x}(P^T x) = P^T$

- l'équation de l'état adjoint :  $\dot{P}' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T(t)P'^T - Q(t)x \quad (2.29)$

- la condition de transversalité:  $P'(tf) = Sxf \quad (2.30)$

- l'absence de contrainte sur la commande :  $\frac{\partial H}{\partial u} = A^T(t)P' + R(t)u = 0 \quad (2.31)$

Ainsi la commande :  $u = -R^{-1}(t)B^T(t)P' \quad (2.32)$

De ce fait, l'équation dynamique du système s'écrit comme suit :

$$\dot{x} = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P' \quad (2.33)$$

En dérivant l'équation  $p = P(t)x$  et nous obtenons :

$$\dot{p} = \dot{P}'(t)x + P'(t)\dot{x} \quad (2.34)$$

Ainsi l'équation (2.34) s'écrit alors :

$$\dot{p} = -(A^T(t)P'(t) + Q(t))x \quad (2.35)$$

En intégrant les équations précédentes ; l'équation d'état du système et l'équation (2.33) s'écrit en omettant la référence au temps afin d'alléger les notations :

$$(\dot{P}' + P' A + A^T P' - P' B R^{-1} B^T P' + Q)x = 0 \quad (2.36)$$

La solution est obtenue en résolvant l'équation différentielle de Riccati donnée comme suit :

$$(\dot{P} + P'A + A^T P' - P'BR^{-1}B^T P' + Q) = 0 \quad (2.37)$$

Après la résolution de l'équation (2.37) La commande optimale obtenue est identique à un retour d'état donné par :

$$u = -Kx \quad (2.38)$$

Ou:

$$K = -R^{-1}B^T P' \quad (2.39)$$

Cependant, K varie dans le temps. Même dans le cas d'un système à temps invariant, c'est-à-dire que les matrices A, B, Q et R ne dépendent pas du temps, la matrice P'(t) reste dépendante du temps dans le cas d'un critère à temps fini.

### 2.2.1.6 Contrôleur linéaire quadratique à horizon infini

On s'intéresse dans cette section aux systèmes multi variables linéaires à temps variant précédent où le critère est donné par [14] :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T Q(t)x + u^T R(t)u] dt \quad (2.40)$$

Si le système est stabilisable à tout instant t, on arrive à montrer que ce critère est fini. Ainsi on montre qu'à chaque instant il existe un K(t). D'autre part, sur un horizon infini, l'état

final tend vers zéro si le système bouclé est stable et les matrices  $A$ ,  $B$  et  $P'$  vont atteindre leur valeur stationnaire alors  $\dot{P}' = 0$ .

Dans le cas d'un système linéaire à temps invariant, la commande optimale est exprimée sous forme de retour d'état statique.

où  $P'$  vérifie l'équation algébrique de Riccati donnée par :

$$(P' A + A^T P' - P' B R^{-1} B^T P' + Q) = 0 \quad (2.41)$$

Avec  $u = -Kx$

$$K = -R^{-1} B^T P'$$

### 2.2.1.7 Choix des pondérations :

La commande LQR permet de calculer le gain optimal défini dans les sections précédentes. Cette optimalité est définie dans le sens à minimiser la fonction coût  $J$ .

$Q$  et  $R$  sont alors les matrices de pondération du vecteur d'état et du vecteur commande. Le choix de ces matrices est laissé au concepteur de la commande du système de contrôle. Cependant,  $Q$  doit être semi-définie positive et  $R$  définie positive, celles-ci traduisent les préférences du concepteur en termes de contrôle sur  $A$  et  $B$ . En effet, si l'on veut que l'état observable  $x_i$  soit minimisé en priorité on va y affecter un poids  $Q_{ii}$  fort. Ainsi, pour la fonction de coût, le fait de ne pas minimiser  $x_i$  induira un coût plus élevé. De la même façon, pour les termes non diagonaux, un poids fort en  $R_{ij}$ ,  $i$  différent de  $j$ , a pour effet de diminuer l'utilisation des deux actionneurs  $u_i$  et  $u_j$  simultanément. Néanmoins, généralement on commence par l'élaboration de matrices de pondération diagonales. Il n'existe pas de manière systématique pour calculer  $Q$  et  $R$  car elles ne représentent que des préférences, mais il existe certaines heuristiques pour se donner une valeur de départ. On

peut par la suite affiner les matrices initiales à l'aide de la méthode du essais et erreurs jusqu'à obtenir un résultat satisfaisant.

Une stratégie décrite par Joao P. Hespanha dans [16] appelée règle de Bryson consiste à choisir  $Q$  et  $R$  diagonales et à choisir les poids tels qu'ils soient égaux à l'inverse de la valeur maximale (que l'on se donne) du terme correspondant au carré.

### **2.2.2 Optimisation par LMI :**

#### **4.2.2.1 Présentation :**

Une grande quantité de problèmes d'automatique concernant les performances et la robustesse peuvent se traduire sous la forme d'une optimisation convexe avec des contraintes inégalités. Auparavant, on faisait appel à la résolution d'équations de Riccati basées sur des contraintes égalités. Toutefois, le retour vers les LMI, qui généralisent les problèmes d'automatique, a permis de résoudre des problèmes plus généraux.

L'approche LMI est utilisée dans l'objectif d'assurer la robustesse de la loi de commande synthétisée. L'atout majeur des LMI est l'existence de méthodes de résolution numérique efficace qui présentent l'avantage d'avoir un coût de calcul raisonnable [17], vu la possibilité de reformuler de nombreux problèmes d'analyse : (stabilité, certaines performances, etc.) en termes de LMI.

Une inégalité matricielle linéaire en  $x$  est sous la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n P_i x_i > 0 \quad (2.42)$$

Où  $P_0, P_1, \dots, P_n$  est une famille de matrices symétriques  $\in \mathbb{R}^{p \times p}$  et  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur.

La contrainte  $F(x) > 0$  est convexe [17] et est appelée contrainte LMI.

On distingue trois types de problèmes d'optimisation convexe rencontrés sous forme de LMI : Problème de faisabilité, Problème de valeur propre et Problème de valeurs propres généralisées. Dans notre cas, il s'agit d'étudier la stabilité des structures de commande qui pourra être traitée comme un problème de faisabilité.

En général, les conditions sur la stabilité ne sont pas données sous forme de LMI directement. Pour cela, elles nécessitent quelques transformations matricielles.

L'étude de la stabilité d'un système non linéaire basée sur l'outil numérique LMI permet de trouver des solutions aux équations de Lyapunov. L'approche proposée repose sur une fonction de Lyapunov quadratique. Pour élaborer la loi de commande à base de la condition suffisante de stabilité imposée à cette fonction, on est amené à trouver une matrice définie positive telle que la condition de stabilité soit garantie.

#### **2.2.2.2 Stabilité au sens de Lyapunov :**

D'une manière très qualitative et intuitive, la stabilité d'un système est la capacité de ce dernier à revenir à sa position d'équilibre lorsqu'il en est ponctuellement écarté. Le but de cette section est de préciser la notion de stabilité au sens de Lyapunov.

La méthode de Lyapunov a été proposée en 1892 dans le cadre de l'étude de la stabilité des systèmes mécaniques. Il s'agit de construire une fonction  $V(x)$  de l'état  $x$  du système telle que le signe de cette fonction et de sa dérivée temporelle dans un certain voisinage du point d'équilibre donne une information sur la stabilité de système.

La théorie de Lyapunov affirme que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système dynamique autonome à temps continu  $\dot{x} = f(x)$  s'il existe une fonction  $V(x)$  positive telle que sa dérivée négative pour tout  $x$  non nul et telle que  $V(0) = 0$  et  $V(\infty) = \infty$ .

Une fonction  $V(x)$  est appelée fonction de Lyapunov du système dynamique. La notion de fonction de Lyapunov est liée à celle de région trajectoire qui commence de converger vers l'origine. Si un système est globalement asymptotiquement stable, alors la région d'attraction de l'origine est tout l'espace d'état. On veut déterminer une région d'attraction où la convergence des trajectoires vers l'origine ou vers un point est garantie. La classe de fonctions de Lyapunov que l'on utilisera tout au long de ce mémoire et celle des fonctions quadratiques de la forme:

$$V(x) = x^T P x . \quad (2.43)$$

Cette fonction est définie positive si  $P$  est une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres (réelles) sont positives :  $P = P^T, P \succ 0$

Considérons un système représenté par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = Ax \quad (2.44)$$

Une condition nécessaire est suffisante pour que la dérivée  $\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA)x$  soit négative consiste à trouver une matrice  $P$  symétrique et définie positive qui rend le système asymptotiquement stable telle que LMI suivante est vérifiée :

$$A^T P + PA \prec 0 \quad (2.45)$$

Cette inégalité matricielle peut être résolue en utilisant des outils numériques LMI par rapport à la variable inconnue  $P$ .

Dans toute la suite on utilise la LMI Toolbox de Matlab pour résoudre les problèmes sous contraintes LMI.

Les conditions de stabilité d'un modèle flou au sens de Lyapunov sont définies dans [17] par :

**Théorème 1 :**

Un modèle flou continue TSK est asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive  $P_1 \succ 0$  telle que :

$$A_i^T P_i + P_i A_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.46)$$

Où r est le nombre de règles.

Et les conditions de stabilité de Lyapunov pour le régulateur flou TSK sont définies dans le théorème 2 suivant :

**Théorème 2 [18] :**

Le système en boucle fermée TSK (Modèle et régulateur d'état), est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice définit positif  $P > 0$ , qui satisfait les équations suivantes :

$$(A_i - B_i K_i)^T P + P(A_i - B_i K_i) < 0; \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.47)$$

Et 
$$G_{ij}^T P + P G_{ij} < 0; \quad j < i \leq r \quad (2.48)$$

Où : 
$$G_{ij} = A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i ; \quad j < i \leq r$$

**2.3 Résolution de problème des gains à l'aide de LQR :**

La synthèse d'une commande et une commande optimale pour chaque loi d'inférence  $R_i$ , implique la minimisation de critère suivant :

$$J_i(Q, R) = \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u_i^T(t) R u_i(t)] \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.49)$$

Avec :

$Q$  : matrice carrée semi définie positive.

$R$  : matrice carrée diagonale positif.

Les gains  $K_i$  optimaux sont obtenus par l'équation : avec  $i = 1, 2, \dots, r$

$$K_i = R^{-1} B_i^T P_i' \quad (2.50)$$

Avec  $P'$  est la solution de l'équation de Riccati :

$$P_i' A_i + A_i^T P_i' - P_i' B_i R^{-1} B_i^T P_i' + Q = 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (2.51)$$

#### 4.2.2.2 Résolution de problème des gains à l'aide des LMI :

On a le théorème de Lyapunov et avec l'équation (2.43), on aura:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (2.52)$$

Et puisque :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x) (A_i - B_i K_i) x(t); \quad \forall i = 1, \dots, r$$

Alors :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x) [x^T (A_i - B_i K_i)^T P x + x^T P (A_i - B_i K_i) x]$$

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x) [x^T ((A_i - B_i K_i)^T P + P (A_i - B_i K_i)) x] \quad (2.53)$$

Si :  $\dot{V}(x) < 0$  et avec :  $\sum_{i=1}^r \alpha_i(x)$  et  $x$  sont pas inférieure à zéros alors :

$$(A_i - B_i K_i)^T P + P (A_i - B_i K_i) < 0$$

$$A_i^T P - K_i^T B_i^T P + P A_i - P B_i K_i < 0 \quad (2.54)$$

Puisque l'équation (2.52) n'est pas linéaire alors on multiplie l'inégalité par  $P^{-1}$  à gauche et à droite et on définit une nouvelle variable  $X = P^{-1}$ , l'équation sera comme suit :

$$P^{-1} A_i^T - P^{-1} K_i^T B_i^T + A_i P^{-1} - B_i K_i P^{-1} < 0 \quad (2.54)$$

Et avec  $X = P^{-1}$  on aura :

$$XA_i^T + A_i X - XK_i^T B_i^T - B_i K_i X < 0 \quad (2.55)$$

On définit  $M_i = K_i X$  donc pour tout ( $X > 0$ ), on aura  $K_i = M_i X^{-1}$  donc la nouvelle équation sera :

$$XA_i^T - M_i^T B_i^T + A_i X - B_i M_i < 0 \quad (2.56)$$

On applique les mêmes étapes pour l'équation (2.48) et on aura :

$$XA_i^T + A_i X + XA_j^T + A_j X - M_j^T B_i^T - B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i < 0 \quad (2.57)$$

Alors utilisons les conditions de LMI avec  $X > 0$ , trouvons  $X$  et  $M_i$  ( $i=1, \dots, r$ ) satisfaites :

$$\begin{cases} -XA_i^T + M_i^T B_i^T - A_i X + B_i M_i > 0; (i=1, \dots, r) \\ x > 0 \\ -XA_i^T - A_i X - XA_j^T - A_j X + M_j^T B_i^T + B_i M_j + M_i^T B_j^T + B_j M_i > 0; (r \leq j < i) \end{cases} \quad (2.58)$$

Où :  $X = P^{-1}$  Et  $M_i = K_i X$

Respectons les conditions des LMI, on peut trouver les matrices  $X$  et  $M_i$  définies positives afin de satisfaire les LMI. Ce qui rend compte à trouver les retours d'état  $K_i$  stabilisants le système et la matrice  $P$ .

Tandis que  $P = X^{-1}$  Et  $K_i = M_i X^{-1}$

Afin de trouver une même matrice  $X$  définie positive.

**Conclusion :**

L'utilisation de l'approche multi-modèle pour un modèle Non-linéaire, c'est-à-dire linéarisé le système autour de plusieurs points de fonctionnement utilise un descripteur flou afin d'approcher le système réel.

Deux approches de commande ont été données afin de stabiliser le système à savoir la commande linéaire quadratique et l'optimisation par LMI. De même la formulation des LMI pour le système flou a été donnée pour l'exploitation dans le dernier chapitre de simulation.

# Modèle mathématique du drone

**Introduction :**

La commande des systèmes dynamiques se base essentiellement sur la modélisation, l'identification et l'analyse des phénomènes physiques agissant sur le système en question. La première étape dans la réalisation d'un système de commande ou la modélisation dynamique d'un drone autonome est le développement d'un modèle mathématique décrivant son mouvement dans l'espace. Ce dernier sera obtenu en appliquant les lois de Newton reliant la somme des forces et des moments aux accélérations linéaires et angulaires d'un corps rigide. Le terme rigide implique ici que tous les points du corps du drone demeurent fixes à leurs positions relatives dans l'espace en tout temps.

Avant de développer les équations de mouvement, il est impératif d'introduire les différents repères utilisés en dynamique de vol. Il existe plusieurs façons d'exprimer la position, la vitesse, l'orientation, les forces et les moments qui agissent sur le véhicule. Dans cette section, seuls les repères nécessaires à l'identification du système sont adoptés.

**3.1 Principes des commandes de vol :**

Le concept des commandes de vol est résumé selon trois ensembles : les servocommandes, l'avion et les capteurs. Le pilote possède 2 organes de pilotage : le palonnier et le manche. Des capteurs, situés sur les organes de pilotage, permettent de transformer les ordres du pilote en objectifs de commande. La différence entre ces objectifs et les mesures fournies par les capteurs (capteurs anémométriques et inertiels) permet de déduire l'ordre de commande à envoyer aux servocommandes des gouvernes. Ce type de structure permet d'intégrer les techniques modernes de l'automatique pour commander les braquages des gouvernes en fonction des ordres du pilote et de l'état mesuré de l'avion. Pour cela, on dispose typiquement d'un modèle linéaire du système à commander sous forme de représentation d'état, décrivant son comportement autour d'un point d'équilibre.

On peut distinguer deux pilotages pour un avion : le pilotage longitudinal et le pilotage latéral.

-Le pilotage longitudinal consiste à commander la chaîne de tangage à l'aide du manche et de la manette des gaz. Pour un avion de transport civil, le tangage(Pitch) est contrôlé par la gouverne de profondeur (Elevator) située à l'arrière de l'appareil sur une surface horizontale appelée empennage horizontal pour contrôler l'altitude et les autres grandeurs qui dépendent de l'angle d'attaque.

- Le pilotage latéral consiste à commander simultanément la chaîne de lacet (Yaw) et de roulis (Roll), à l'aide du palonnier (Rudder) pour le lacet et du manche pour le roulis. Le roulis est contrôlé par des gouvernes (ailerons), petites surfaces mobiles situées aux extrémités des ailes de l'avion bien que ceux-ci se déplacent en sens opposés l'un de l'autre de telle sorte que lorsque l'un est élevé, l'autre baisse et vice versa. Le lacet est contrôlé par la gouverne de direction situé à l'arrière de l'appareil sur une surface verticale appelée empennage vertical.

Pour certains avions ne disposant pas de stabilisateur horizontal arrière, genre aile volante ou aile delta (avion de chasse par exemple), les commandes des axes de tangage et de roulis sont assurées par les mêmes gouvernes, appelées alors élevons. Elles sont utilisées soit comme gouvernes de profondeur (débattement symétrique pour le tangage), soit comme gouvernes de roulis (débattement antisymétrique).

Une autre commande sur l'étrangleur de moteur (throttle) qui donne le taux d'oxygène lors de la combustion, afin de générer une poussée importante et la portance nécessaire lors de vol soit en décollage et en atterrissage.

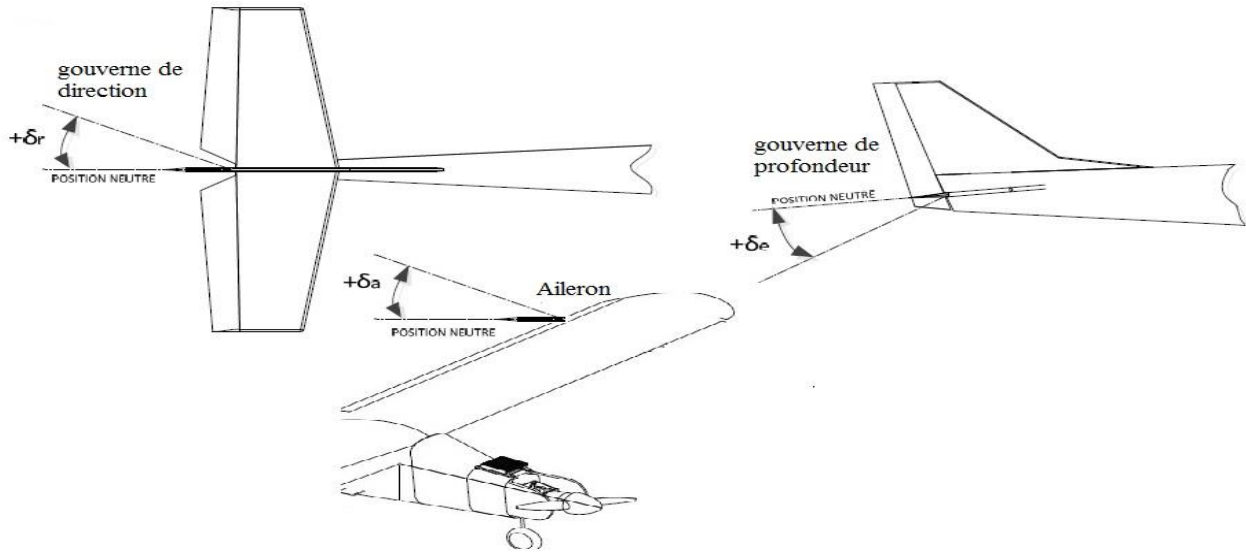


figure 3.1 : Convention de signe des surfaces de commande

### 3.2 Choix des coordonnées :

Pour décrire la position et l'orientation du drone, nous avons recours à deux repères. Le premier est nommé le repère inertiel et le second repère est absolument nécessaire pour décrire l'orientation du drone. En effet, ce référentiel est lié au châssis du drone.

#### 3.2.1 Repère terre ( $\mathbf{Ox_Ey_Ez_E}$ ) :

L'origine de ce repère de référence est un point arbitraire situé à la surface de la terre et qui correspond généralement à la projection du centre de gravité de l'avion.

Il s'agit d'un référentiel orthogonal fixe de type galiléen, au sens que celui-ci n'accélère pas et ne tourne pas par rapport à un observateur étant dans un repère inertiel. Ainsi, il s'agit d'un repère dans lequel les lois de Newton s'appliquent. Il est identifié par l'indice  $I$ , soit  $\mathcal{F}_I = \{\mathbf{O}_I, \mathbf{i}_I, \mathbf{j}_I, \mathbf{k}_I\}$  convention typiquement utilisée en aéronautique est le repère North, East, Down (NED), tel que le système d'axes est fixe par rapport à la Terre de façon à ce que l'axe  $\mathbf{Ox_E}$  pointe vers le nord géographique, l'axe  $\mathbf{Oy_E}$  pointe vers l'est pour ainsi former un repère orthogonal direct avec l'axe  $\mathbf{Oz_E}$  qui pointe vers le centre de la Terre. Nous considérerons ici que la surface de la Terre est plate, donc  $\mathbf{i}_I$  et  $\mathbf{j}_I$  sont parallèles au

sol et  $\mathbf{k}_I$  est perpendiculaire au sol. Le repère inertiel est de type main droite, tel que  $\mathbf{i}_I \times \mathbf{j}_I = \mathbf{k}_I$ . Ce système de référence est très pratique pour définir la trajectoire de l'appareil à partir d'un point initial. De plus, ce système de référence peut servir de repère absolu pour tout repère local fixé au corps de l'avion afin d'appliquer la deuxième loi de Newton.

### 3.2.3 Repère avion ( $\mathbf{Ox}_b\mathbf{y}_b\mathbf{z}_b$ ) :

La définition d'un deuxième repère est nécessaire pour décrire l'orientation du drone. . Celui-ci est identifié par l'indice  $b$ , soit  $\mathcal{F}_b = \{\mathbf{O}_b, \mathbf{i}_b, \mathbf{j}_b, \mathbf{k}_b\}$ .

Il s'agit d'un repère orthogonal direct fixé à l'avion et ayant comme origine  $O$  son centre de gravité. Le plan  $\mathbf{Ox}_b\mathbf{y}_b$  correspond au plan de symétrie de l'avion. L'axe  $\mathbf{Ox}_b$  pointe positif vers le nez de l'avion et suivant son axe longitudinal ou l'axe du véhicule à portance nulle. L'axe de repère avion  $\mathbf{Oy}_b$  est perpendiculaire au plan  $\mathbf{Ox}_b\mathbf{z}_b$  et pointe positif vers l'aile droite. Finalement, l'axe  $\mathbf{Oz}_b$  pointe vers le bas dans le plan de symétrie. Le repère avion décrit sur la figure 3.2 est très pratique pour définir les moments et produits d'inertie du corps ainsi que les forces et moments qui agissent sur le véhicule.

Le repère du drone est de type main droite, telle que  $\mathbf{i}_b \times \mathbf{j}_b = \mathbf{k}_b$ .

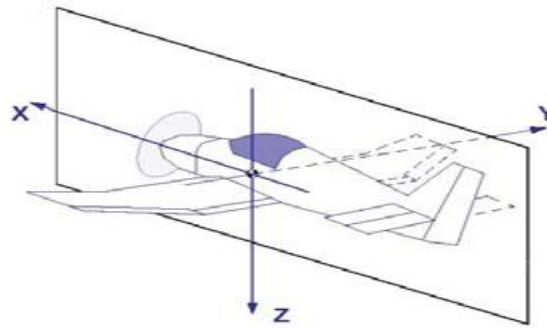


figure 3.2 : Repère avion

### 3.3 Décomposition d'un vecteur selon un repère :

Un repère sert de base pour décomposer ou exprimer un vecteur. Les composantes du vecteur sont définies à partir des vecteurs unitaires constituant le repère de référence. Un vecteur peut donc avoir des composantes complètement différentes dépendamment du repère dans lequel celui-ci est exprimé. Puisque la valeur d'un vecteur peut changer d'un

repère à l'autre, il est important d'utiliser une notation rigoureuse. Nous identifions un vecteur exprimé dans un repère à l'aide d'un exposant représentant le nom du repère. Par exemple, un vecteur  $\mathbf{u}$  est exprimé dans le repère inertiel comme  $\mathbf{u}^I = [\mathbf{u}_1^I, \mathbf{u}_2^I, \mathbf{u}_3^I]^T$  ou dans le repère du drone comme  $\mathbf{u}^b = [\mathbf{u}_1^b, \mathbf{u}_2^b, \mathbf{u}_3^b]^T$ . Il est important de constater que les composantes des deux vecteurs ne sont habituellement pas égales ( $\mathbf{u}^I \neq \mathbf{u}^b$ ). Malgré cela, les deux vecteurs,  $\mathbf{u}^I$  et  $\mathbf{u}^b$ , représentent la même grandeur physique. Pour ne pas alourdir la notation, certains vecteurs, étant toujours exprimés par rapport au même repère, ne seront pas notés avec un exposant.

### 3.4 Définition du vecteur de position, de force et de moment et les différents angles de rotation du drone :

La position du drone est définie par un vecteur allant de  $\mathbf{O}_I$  à  $\mathbf{O}_b$  et celui-ci est toujours exprimé dans le repère inertiel. Ce vecteur est noté  $\vec{X} = [x, y, z]^T$ .

Le modèle d'état non-linéaire de la dynamique de vol peut être exprimé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\chi} = F(\chi, U, t) \\ Y = C\chi \end{cases}$$

$$\text{Où : } \chi = [V, \theta, q, h, r, p, \phi, \psi, X]^T$$

En suivant les notations du domaine de l'aérospatial, la vitesse linéaire exprimée dans le repère du drone est notée :  $V = [u, v, w]^T$ .

Avec :  $u$  est la composante longitudinale,  $v$  est la composante latérale et  $w$  la composante verticale.

L'ensemble des forces et des moments appliqués au centre du drone, exprimée dans le repère du drone, sont respectivement  $F = [F_x, F_y, F_z]^T$  et  $M = [M_x, M_y, M_z]$ .

On normes américaine les moments sont exprimée comme suit :  $M = [L, M, N]$ .

- $P$  : est le taux de variation du roulis (Roll Rate).
- $q$  : est le taux de variation du tangage (Pitch Rate)
- $r$  : est le taux de variation du lacet (Yaw Rate)
- $\theta$  : est l'angle du tangage (pitch angle)

- $\varphi$  : est l'angle d'inclinaison (Bank angle)
- $\psi$  : est l'angle du cap (heading angle)

Les composants du vecteur  $X = [x_I, y_I, z_I]^T$  définissent la position du drone respectivement à la terre avec  $h = -z_I$  qui est l'altitude.

$U = [\delta_e, \delta_{th}, \delta_a, \delta_r]^T$  est le vecteur de commande où  $\delta_e$  est la déflexion des gouvernes de profondeur,  $\delta_{th}$  est l'accélération ou décélération du moteur,  $\delta_a$  est la déflexion des ailerons et  $\delta_r$  est la déflexion des gouvernes de direction.

$C$  : est la matrice d'observation qui détermine le nombre de sortie mesurée.

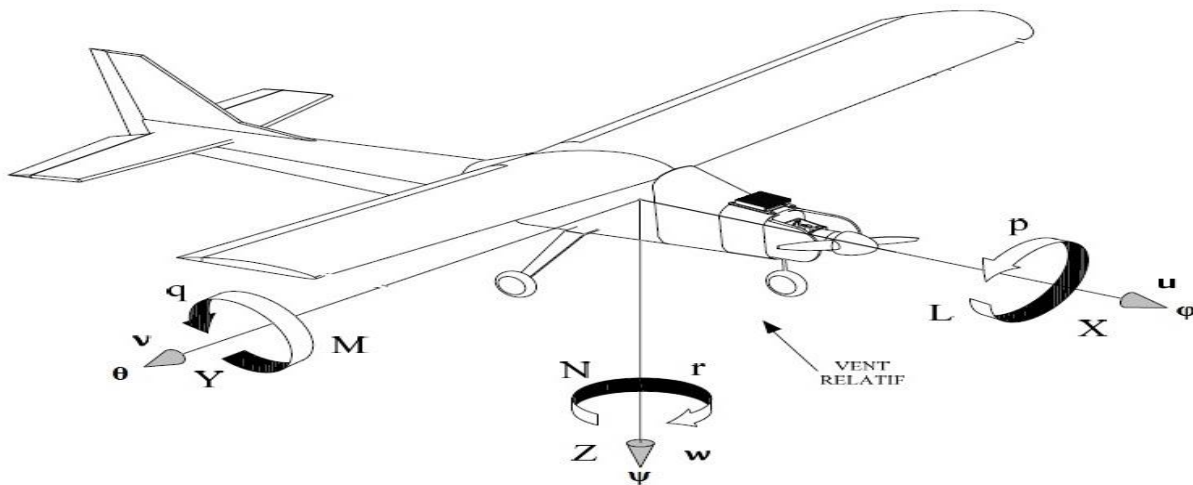


figure (3.3) : les axe liés au drone

### 3.5 Représentation de l'orientation et matrice de rotation :

Avant d'aller plus en détails dans la modélisation, on définit les angles de lacet, tangage et roulis. Alors que la transformation de coordonnées entre le repère inertiel et le repère avion et les vitesses de rotation ce fait en fonction des angles d'Euler  $\psi$ ,  $\varphi$  et  $\theta$ .

Les rotations définissant les angles d'Euler, en référence à la Figure (3.3), sont :

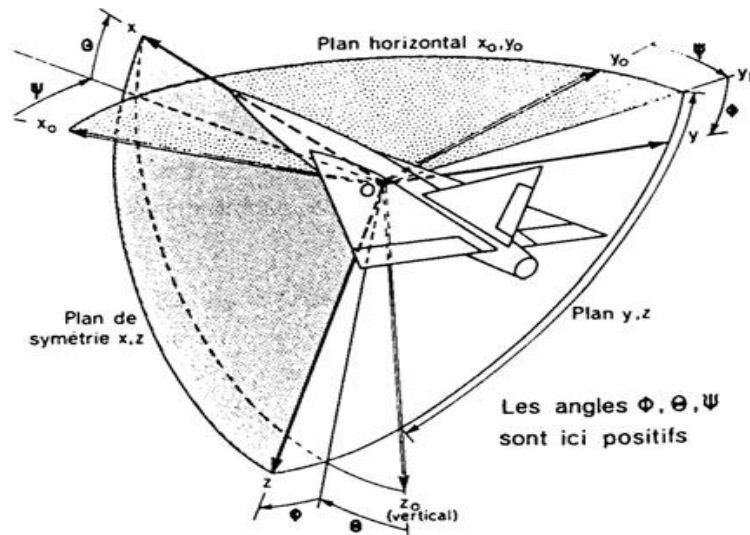
1. Une rotation d'angle  $\psi$ , appelé angle de lacet, autour de l'axe  $Oz$ ;
2. Une rotation d'angle  $\theta$ , appelé angle de tangage, autour de l'axe  $Oy$ ;
3. Une rotation d'angle  $\varphi$ , appelé angle de roulis, autour de l'axe  $Ox$ ;

3.5.1 Matrice de rotation :

La position du repère avion ( $Oxyz$ ) peut être repérée par rapport au repère normal terrestre porté par l'avion ( $Ox_0 y_0 z_0$ ) par un grand nombre de systèmes d'angles d'Euler. Considérons un repère auxiliaire ( $Ox' y' z'$ ) confondu avec le repère local terrestre porté par l'avion et amenons-le en coïncidence avec le repère avion à l'aide de trois rotations successives.

Une première rotation d'angle  $\psi$  autour de l'axe ( $Oz_0$ ) amène l'axe ( $Ox'$ ) dans le plan vertical passant par l'axe ( $Ox$ ). Une deuxième rotation d'angle  $\theta$  autour de la nouvelle position de l'axe ( $Oy'$ ), perpendiculaire au plan ( $Oxz_0$ ), amène l'axe ( $Ox'$ ) en coïncidence avec l'axe ( $Ox$ ). Enfin, une troisième rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe ( $Ox$ ) amène l'axe ( $Oy'$ ) en coïncidence avec l'axe ( $Oy$ ) de même que l'axe ( $Oz'$ ) vient en coïncidence avec l'axe ( $Oz$ ).

L'azimut  $\psi$  est l'angle de rotation (positive si effectuée dans le sens d'horloge puisque l'axe ( $Oz_0$ ) est dirigé vers le bas) autour de l'axe ( $Oz_0$ ) qui amène l'axe ( $Ox'$ ) en coïncidence avec la projection de l'axe longitudinal sur le plan horizontal passant par l'origine.



figure(3.4) : angle de rotation de drone

La matrice de passage du repère terrestre au repère terrestre déplacé est  $R_\psi$ :

$$R_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

L'assiette longitudinale  $\theta$  est l'angle de rotation dans un plan vertical, faisant suite à la rotation de l'angle  $\psi$  qui amène l'axe ( $Ox'$ ) déplacé en coïncidence avec l'axe longitudinal ( $Ox$ ). Il est positif quand la partie positive de l'axe longitudinal se trouve au-dessus du plan horizontal passant par l'origine.

Une rotation positive du point de vue de la convention correspondant à une rotation négative du point de vue de l'orientation des axes, la matrice de rotation  $R_\theta$  s'écrit :

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

L'angle de gîte  $\phi$  est l'angle de rotation, positive si effectuée dans le sens d'horloge, autour de l'axe longitudinal qui amène l'axe ( $Oy'$ ) déplacé dans sa position finale ( $Oy$ ) à partir de la position atteinte après la rotation  $\psi$ . La matrice de rotation  $R_\phi$  s'écrit :

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

L'expression de la transformation d'un vecteur de coordonnées du repère inertiel vers le repère avion en vertu de la définition des angles d'Euler s'exprime comme suit :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Tel que la matrice de transformation est donnée par :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\psi c\theta & -s\theta \\ c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi & s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & c\theta s\phi \\ c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi & s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Afin d'alléger l'expression matricielle des équations (3.5) la notation suivante est appliquée :  $c = \cos(\cdot)$  et  $s = \sin(\cdot)$ . La transformée inverse de  $\mathbf{R}$  qui exprime le passage d'un vecteur de coordonnées du repère avion vers le repère inertiel s'obtient de la façon suivante:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}'$$

Notée que l'inverse de la matrice de rotation est égal à leur transposé.

À partir de l'équation précédente, les équations exprimant les composantes de la vitesse du système d'axe de l'avion ( $u, v, w$ ) vers le système d'axe de la terre s'écrivent,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Tel que  $h = -\int \dot{z}$  est correspond à l'altitude. Avec :

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos \theta \cos \psi + v(\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) + w(\cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ \dot{y} = u \cos \theta \sin \psi + v(\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) + w(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \cos \psi) \\ \dot{z} = -u \sin \theta + v \sin \phi \cos \theta + w \cos \phi \cos \theta \end{cases} \quad (3.6)$$

3.5.2 Vitesses angulaires d'un avion :

À partir de la figure 3.5 orientation de l'avion, la relation entre les composantes de la vitesse angulaire  $p$ ,  $q$  et  $r$  du repère avion et les taux de variations des angles d'Euler  $\psi$ ,  $\varphi$  et  $\theta$  vaut :

$$\dot{\omega} = \dot{\varphi} i_3 + \dot{\theta} j_2 + \dot{\psi} k_1 \quad (3.7)$$

Où :  $\omega$  représente la vitesse de rotation de l'avion par rapport au repère inertiel et  $i_n$  est le vecteur unitaire selon l'axe  $x$  du repère 'n'.

En exprimant aussi les coordonnées de  $w$  en fonction des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ , on obtient :

$$\omega = p i + q j + r k \quad (3.8)$$

On a aussi:

$$\begin{cases} i = i_3 \\ j = \cos \varphi j_3 + \sin \varphi k_3 \\ k = -\sin \varphi j_3 + \cos \varphi k_3 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} i_2 = \cos \psi i_1 + \sin \psi j_1 \\ j_2 = -\sin \psi i_1 + \cos \psi j_1 \\ k_2 = k_1 \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} i_3 = \cos \theta i_2 + \sin \theta k_2 \\ j_3 = j_2 \\ k_3 = \sin \theta i_2 + \cos \theta k_2 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} i_3 = i \\ j_3 = \cos \varphi j - \sin \varphi k \\ k_3 = \sin \varphi j + \cos \varphi k \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} i_2 = \cos \theta i_3 + \sin \theta k_3 \\ j_2 = j_3 \\ k_2 = -\sin \theta i_3 + \cos \theta k_3 \end{cases} \quad (3.13)$$

On peut constater de (3.9), (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) que :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1=k_2=-\sin \theta i_3+\cos \theta k_3 \\ k_1=k_2=-\sin \theta i+\cos \theta (\sin \varphi) j+\cos \theta (\cos \varphi) k \\ j_2=j_3=0 i+\cos \varphi j-\sin \varphi k \\ i_3=i+0 j+0 k \end{array} \right. \quad (3.14)$$

En remplaçant (3.14) dans (3.7) et par identification de résultat avec (3.8) :

On aura :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix} + \dot{\psi} \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

À partir de laquelle on déduit l'expression inverse, avec  $\sec (x)=1/\cos(x)$

$$\begin{array}{l} \dot{\varphi} = p+q \sin \varphi \tan \theta +r \cos \varphi \tan \theta \\ \dot{\theta} = q \cos \varphi -r \sin \varphi \\ \dot{\psi} = r \sin \varphi \sec \theta +q \cos \varphi \sec \theta \end{array} \quad (3.16)$$

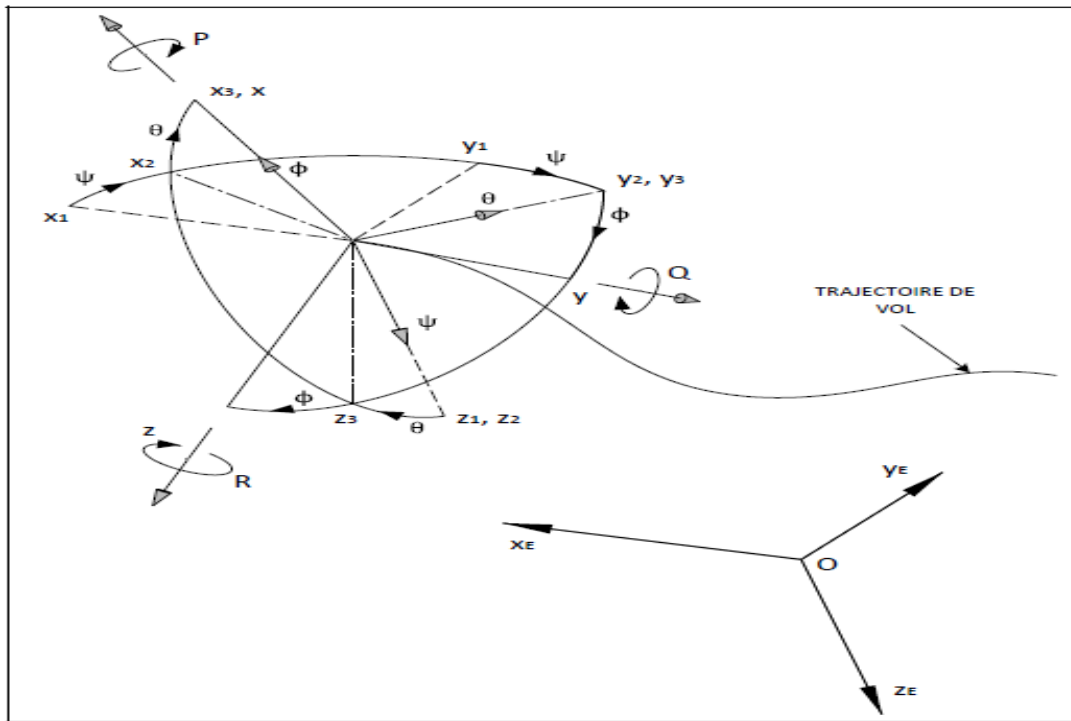


figure (3.5) Orientation de l'avion

### 3.6 Équations de mouvement :

#### 3.6.1 Mécanique Newtonienne :

Les équations générales de mouvement d'un avion à six degrés de liberté utilisées pour le contrôle et la simulation de vol sont considérées dans ce projet. Les hypothèses utilisées sont : l'utilisation d'un repère galiléen (la Terre est plate et ne tourne pas) ainsi que la représentation de l'avion comme un corps parfaitement rigide et donc se comportant sans battement ou déformation structurelle, c'est-à-dire que la mesure entre n'importe quel point de l'avion ne change pas durant le vol. Les équations sont développées à partir de la deuxième loi de Newton, qui stipule que la somme de toutes les forces et moments externes agissant sur le centre de gravité du corps sont égales au taux de variation dans le temps de l'impulsion linéaire et angulaire sur le corps sont :

$$\sum F = \frac{d}{dt}(mV) \quad (3.17)$$

$$\sum M = \frac{d}{dt}H \quad (3.18)$$

Où  $\frac{d}{dt}V$  représente l'accélération du centre de gravité de l'avion par rapport au repère inertiel,  $F$  la résultante des forces extérieures agissant sur l'avion (forces de pesanteur, forces aérodynamiques et forces de propulsion) et  $M$  le moment résultant des différentes forces agissant sur l'avion (moment des forces aérodynamiques et moment des forces de propulsion),  $H$  le moment cinétique de l'avion autour du centre de gravité tel que  $H = \omega \times I$  de sorte que  $\omega$  représente la vitesse angulaire et  $I$  la matrice d'inertie.  $m$  représente la masse de l'avion.

Avec :

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Où :

$I_x$ ,  $I_y$  et  $I_z$  représentent les moments d'inertie selon les axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$  et  $I_{yz}$  sont appelés produits d'inertie.

Les équations vectorielles (3.17) à (3.18) peuvent être exprimées sous forme scalaire de la façon suivante [5], [6] :

$$F_x = \frac{d}{dt}(mu), F_y = \frac{d}{dt}(mv), F_z = \frac{d}{dt}(mw) \quad (3.20)$$

$$M_x = \frac{d}{dt}H_x, M_y = \frac{d}{dt}H_y, M_z = \frac{d}{dt}H_z \quad (3.21)$$

Tel que les composantes de la force ( $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ ) en fonction des composantes de la vitesse  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ainsi que les composantes du moment ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) en fonction des composantes de l'impulsion angulaire ( $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$ ) sont représentées le long des axes ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) du référentiel avion.

Puisque les équations (3.17) et (3.18) ne sont valides que dans un repère fixe d'inertie, lorsque l'avion effectue une rotation, les moments et produits d'inertie sont alors en

fonction du temps. Il convient d'appliquer l'équation de Coriolis pour exprimer les dérivées des vecteurs  $V$  et  $H$  dans le repère avion afin d'utiliser une matrice d'inertie constante et d'observer la plupart des quantités mesurées sur l'appareil.

A savoir que souvent on exprime les équations dans le repère avion comme suit :

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{iner} = \left. \frac{dA}{dt} \right|_{avi} + w.A \quad (3.22)$$

Alors :

$$F = \left. \frac{d(mV)}{dt} \right|_i = m \left. \frac{dV}{dt} \right|_b + m(w \times V) \quad (3.23)$$

$$M = \left. \frac{dH}{dt} \right|_i = \left. \frac{dH}{dt} \right|_b + w \times H \quad (3.24)$$

En assumant que le plan du repère avion  $Oxz$  est un plan de symétrie du corps rigide, la matrice d'inertie  $I$  devient symétrique et les produits d'inertie.  $I_{xy} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$ . La matrice des moments et des produits d'inertie de l'avion est donc réduite à :

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Par conséquent, selon l'hypothèse précédente, la représentation scalaire des équations (3.18) et (3.19) se formule comme suit :

Expriment les cordones de la vitesse  $V$  en fonction des axe  $x, y, z$  dans le repère avion comme suit :

$$V = u i + v j + w k \quad (3.26)$$

On a le produit scalaire :

$$\omega \times V = \text{Det} \begin{bmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix}$$

$$\omega \times V = i(qw - rv) + j(ru - pw) + k(pv - qu) \quad (3.27)$$

Après identification entre (3.24), (3.26), (3.27), on aura :

$$F = \dot{u}i + \dot{v}j + \dot{w}k + i(qw - rv) + j(ru - pw) + k(pv - qu) \quad (3.28)$$

• **Équations générales de force**

$$F_x = m(\dot{u} + qw - rv) \quad (3.29)$$

$$F_y = m(\dot{v} + ru - pw) \quad (3.30)$$

$$F_z = m(\dot{w} + pv - qu) \quad (3.31)$$

D'autre part on a de (3.24) :

$$M = \frac{dH}{dt} \Big|_i = \frac{dH}{dt} \Big|_b + \omega \times H \quad \text{Et} \quad H = \omega \times I$$

$$\text{Alors : } M = I \frac{d}{dt} \Big|_b \omega + \omega \times H \quad (3.32)$$

On a le produit scalaire :

$$\omega \times H = \text{Det} \begin{bmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix}$$

$$\omega \times H = i(qH_z - rH_y) + j(rH_x - pH_z) + k(pH_y - qH_x) \quad (3.27)$$

On prend le plan symétrie d'un avion donc :

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = I \times \omega = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\begin{cases} H_x = I_x \cdot p - I_{xz} \cdot r \\ H_y = I_y \cdot q \\ H_z = -I_{xz} \cdot p + I_z \cdot r \end{cases} \quad (3.28)$$

Et :

$$\begin{cases} M_x = \dot{H}_x + (q \cdot H_z - r \cdot H_y) \\ M_y = \dot{H}_y + (r \cdot H_x - p \cdot H_z) \\ M_z = \dot{H}_z + (p \cdot H_x - r \cdot H_y) \end{cases} \quad (3.29)$$

• **Équations générales de moment :**

$$M_x = I_x \cdot \dot{p} - I_{xz} \cdot (\dot{r} + p \cdot q) + q \cdot r (I_z - I_y) \quad (3.30)$$

$$M_y = I_y \cdot \dot{q} + I_{xz} \cdot (p^2 - r^2) + r \cdot p (I_x - I_z) \quad (3.31)$$

$$M_z = I_z \cdot \dot{r} + I_{xz} \cdot (q \cdot r - \dot{p}) + p \cdot q (I_y - I_x) \quad (3.32)$$

**3.6.2 Définition des forces et moments externes :**

Les forces et moments appliqués au corps de l'avion sont affichés dans la partie gauche des équations précédentes et proviennent notamment du comportement aérodynamique ( $F_A$ ,  $M_A$ ) ainsi que de l'effet de la gravité ( $F_G$ ) et du système de propulsion ( $F_T$ ,  $M_T$ ). Puisque la gravité est appliquée par le centre de gravité et que le champ de gravité reste uniforme, il n'y a donc aucun moment agissant sur le corps de l'avion. Par conséquent, les équations (2.23) et (2.24) peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$F_A + F_T + F_G = \left. \frac{d(mV)}{dt} \right|_i = m \left. \frac{dV}{dt} \right|_b + m(\omega \times V) \quad (3.33)$$

$$M_A + M_T = \left. \frac{dH}{dt} \right|_i = \left. \frac{dH}{dt} \right|_b + \omega \times H \quad (3.34)$$

La figure (3.6) montre les forces agissantes sur le drone en vol rectiligne.

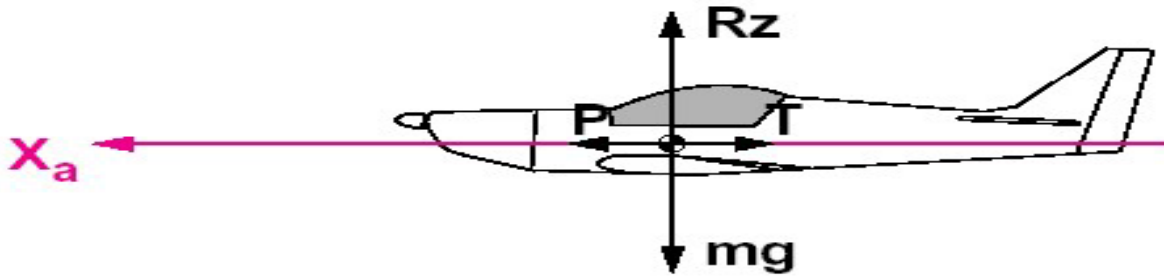


figure (3.6) : les forces agissantes sur le drone

Tout d’abord, l’élément externe le plus significatif des équations précédentes sont les forces et couples aérodynamiques qui sont exprimés à l’aide des coefficients non dimensionnels [8] :

$$F_A = \bar{q}S \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$M_A = \bar{q}S \begin{bmatrix} bC_l \\ \bar{c}C_m \\ bC_n \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

où  $\bar{q} = (1/2) \rho V^2$  est la pression dynamique,  $V$  est la vitesse du vent,  $\rho$  est la densité de l’air,  $S$  est la surface alaire,  $\bar{c}$  est la corde de référence,  $b$  est l’envergure de l’aile et  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ ,  $C_l$ ,  $C_m$  et  $C_n$  sont respectivement les coefficients des forces aérodynamique  $x$ ,  $y$  et  $z$  ainsi que les coefficient de roulis, de tangage et de lacet. Ces coefficients sont fonctions de l’état de l’aéronef.

Un autre élément influençant la dynamique de l’avion est le poids de l’appareil qui est la seule force de masse considérée. Elle s’exprime par une grandeur et une direction constante

relative au système d'axe de la terre, le long de l'axe Oz et son moment au CG est nul. Pour formuler la variation des composantes du poids dans le repère avion par rapport au repère fixe de la terre, il convient de transformer les composantes du vecteur gravité à l'aide de l'équation (3.4) de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}_b \quad (3.37)$$

Et ainsi obtenir l'expression suivante avec  $g=9.81ms^{-2}$  :

$$F_G = m \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}_b$$

$$F_G = m \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \varphi \\ mg \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Finalement, le dernier élément des forces et des moments externes provient du système de propulsion. En supposant que la poussée du système de propulsion agit le long de l'axe longitudinal du repère avion et par le centre de gravité, alors la poussée apparaît seulement comme une force appliquée sur l'axe Ox du corps,

$$F_T = [T_x \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.39)$$

L'effet associé à la masse en rotation, dans le système de propulsion appelé termes gyroscopiques, doit être considérée comme un moment appliqué, car les équations du mouvement sont formulées en supposant que l'aéronef est un corps rigide et sans pièces mobiles internes. Le moment angulaire de la masse en rotation est :

$$H_p = [I_p \omega_p \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.40)$$

Où  $I_R$  est l'inertie de la masse en rotation et  $\omega_p$  est la vitesse angulaire. En émettant l'hypothèse que la vitesse angulaire est constante, alors  $\dot{I}_p \omega_p = 0$  et les composantes du moment gyroscopique exprimées dans le repère avion par l'équation (3.24) sont :

$$M_T = \left. \frac{dH_p}{dt} \right|_b + \omega_p \times H_p$$

Alors :

$$M_T = \omega_p \times H_p \quad (3.41)$$

On a le produit scalaire :

$$\omega_p \times H_p = Det \begin{bmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ H_{px} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_p \times H_p = j(r.H_{px}) - k(q.H_{px}) \quad (3.42)$$

Alors :

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \omega_p . r \\ -I_p \omega_p . q \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Finalement en déduits les équations comme suit :

• **Équations générales de force :**

$$\dot{u} = rv - qw + \frac{\bar{q}S}{m} C_x - g \cdot \sin \theta + \frac{T}{m} \quad (3.44)$$

$$\dot{v} = pw - ru + \frac{\bar{q}S}{m} C_y + g \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \quad (3.45)$$

$$\dot{w} = qu - pv + \frac{\bar{q}S}{m} C_z + g \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \quad (3.46)$$

• **Équations générales de moment :**

$$\dot{p} - \frac{I_{xz}}{I_x} \dot{r} = \frac{\bar{q}Sb}{I_x} C_l - \frac{(I_x - I_y)}{I_x} q \cdot r + \frac{I_{xz}}{I_x} q \cdot p \quad (3.47)$$

$$\dot{q} = \frac{\bar{q}Sc}{I_y} C_m - \frac{(I_x - I_z)}{I_y} pr - \frac{I_{xz}}{I_y} (p^2 - r^2) + \frac{I_p}{I_y} w_p r \quad (3.48)$$

$$\dot{r} - \frac{I_{xz}}{I_y} \dot{p} = \frac{\bar{q}Sb}{I_z} C_n - \frac{(I_y - I_x)}{I_z} p \cdot q - \frac{I_{xz}}{I_z} q \cdot r - \frac{I_p}{I_z} w_p q \quad (3.49)$$

**3.7 Simplification des équations de mouvement :**

Afin de pouvoir étudier plus facilement les caractéristiques du modèle de l'avion, il est nécessaire de travailler sur un modèle mathématique simple. La plupart des avions sont considérés symétriques par rapport au plan Oxz et volent à de petits angles de dérapage. Cette symétrie combinée à l'approximation des petits angles permet de découpler les équations du mouvement en deux ensembles largement indépendants, afin de décrire le mouvement longitudinal et le mouvement latéral de l'avion. Les paramètres inconnus sont alors séparés dans des ensembles distincts.

**3.7.1 Modèle non linéaire :**

**3.7.1.1 Mouvement longitudinal :**

Les mouvements longitudinaux sont des rotations autour de l'axe Oy et des translations sur l'axe Ox et Oz du corps de l'avion. En d'autres termes, un mouvement longitudinal n'induit aucune force latérale ni couple de lacet ou de roulis.

Pour un modèle complet on a besoin de définir l'équation de l'altitude de drone.

• **Altitude géo potentielle :**

Pour tenir compte de l'amointrissement du module de l'accélération de la pesanteur en fonction de l'altitude géométrique, distance entre la masse et le sol terrestre, on introduit la notion d'altitude géo potentielle.

L'altitude géo potentielle est l'altitude géométrique à laquelle l'énergie potentielle d'une masse placée dans un champ de pesanteur constant en fonction de l'altitude et de module  $g_0$  est égale à l'énergie potentielle dans le champ de pesanteur terrestre.

Si l'attraction de la pesanteur était constante, une masse  $m$  pourrait acquérir une énergie potentielle égale à  $mg_0H_{gpot}$  en s'élevant du sol à l'altitude  $H_{gpot}$ . Mais comme l'attraction de la pesanteur n'est pas constante, une masse  $m$  n'acquiert réellement cette énergie qu'en s'élevant à une altitude géométrique  $H_{geom}$  supérieure à  $H_{gpot}$ .

$$mg_0H_{gpot} = \int_0^{H_{gpot}} mg(s)ds = \int_0^{H_{gpot}} mg_0 \frac{R_T^2}{(R_T + s)^2} ds \quad (2.50)$$

Où  $H_{geom}$  est l'altitude géométrique,  $H_{gpot}$  est l'altitude équipotentielle, et  $R_T=6356.766\text{km}$ , le rayon terrestre fictif pour une latitude de  $45^\circ$  nord avec  $s$  est la surface terrestre.

• **Altitude totale:**

Pour définir la notion d'altitude totale, il faut introduire celle d'énergie totale. L'énergie totale d'un avion de masse  $m$  volant à la vitesse  $V_k$  à l'altitude géométrique  $H_{geom}$  est la somme de son énergie potentielle et de son énergie cinétique.

$$E = mgH_{geom} + \frac{1}{2}mV_k^2 \quad (3.51)$$

L'altitude totale est le quotient de l'énergie totale par le poids du véhicule.

$$h = \frac{E}{mg} = H_{geom} + \frac{1}{2g}V_k^2 = H_{gpot} + \frac{1}{2g_0}V_k^2 \quad (3.52)$$

Ce qui nous donne:

$$\dot{h} = \dot{H}_{gpot} + \frac{1}{2g_0}(\dot{V}_k^2) \quad (3.53)$$

$$\dot{h} = \frac{1}{g_0}g \cos \theta \cos \varphi + \frac{1}{g_0}V_k$$

$$\dot{h} = G_0 \cos \theta \cos \varphi + \frac{1}{g_0}V_k \quad (3.54)$$

Avec :  $G_0 = \frac{g}{g_0}$  et  $g_0=9.80665ms^{-2}$ .

Comme nous avons dit l'avion vol en ligne droite, dans le plan de symétrie et que les ailes et la gouverne de direction sont en position neutre, ce qui veut dire  $v=p=r= \psi= \varphi=0$ .

La projection des équations du mouvement dans le repère avion fournit les équations suivantes :

$$\dot{u} = -qw + \frac{\bar{qS}}{m} C_x - g.\sin \theta + \frac{T}{m} \quad (3.55)$$

$$\dot{w} = qu + \frac{\bar{qS}}{m} C_z + g.\cos \theta \quad (3.56)$$

$$\dot{q} = \frac{\bar{qS}\bar{c}}{I_y} C_m \quad (3.57)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (3.58)$$

$$\dot{h} = \frac{1}{g_0}(u - w) - G_0 \cos \theta \quad (3.59)$$

### 3.7.1.2 Mouvement latéral :

Les mouvements latéraux sont des rotations sur les axes Ox et Oz du corps et des translations selon l'axe Oy du corps de l'avion. Les coefficients aérodynamiques latéraux sont donc  $C_y$ ,  $C_l$  et  $C_n$ .

Bien que souhaité, il n'est pas possible techniquement d'obtenir un mouvement purement latéral, même avec un avion symétrique. Dans tous les cas, il y aura toujours une certaine excitation de q causée par les termes  $p.r$  et  $p^2 - r^2$ . Il y aura donc une excitation de  $\theta$  indépendamment de l'inertie.

La projection des équations du mouvement dans le repère avion fournit les équations suivantes :

$$\dot{v} = pw - ru + \frac{\bar{q}S}{m} C_y + g \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \quad (3.60)$$

$$\dot{p} - \frac{I_{xz}}{I_x} \dot{r} = \frac{\bar{q}Sb}{I_x} C_l \quad (3.61)$$

$$\dot{r} - \frac{I_{xz}}{I_z} \dot{p} = \frac{\bar{q}Sb}{I_z} C_n \quad (3.62)$$

$$\dot{\varphi} = p + r \cos \varphi \tan \theta \quad (3.63)$$

$$\dot{\psi} = r \sin \varphi \sec \theta \quad (3.64)$$

### 3.7.2 Modèle linéaire :

Linéariser ces équations de mouvements, sous des hypothèses spécifiques, est une pratique courante qui simplifie grandement les calculs et dans le même temps fournit une description précise du comportement réel de l'avion.

La linéarisation des équations s'effectue autour d'un point d'équilibre correspondant à une condition de vol. Sous l'hypothèse que les variations des variables longitudinales et latérales mouvement (liés aux forces, Moments, vitesses, vitesses angulaires, etc.) restent faibles.

Lorsque tel est le cas, les forces et moments aérodynamiques perturbées peuvent être considérées comme des fonctions linéaires.

Prenons :  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u} + \mathbf{u}_e$  :

Les valeurs des paramètres avec une lettre « e » indice réfèrent au point d'équilibre de chaque fonctionnement, tandis que les lettres minuscule indiquent la valeur perturbée de cette variable.

Les quantités de perturbation et leurs dérivés auront de très petites valeurs; par conséquent, leurs produits sont négligeables. Sans perte de généralité, on suppose que les transformations trigonométriques des variables perturbés comme suit :

Prenons  $\theta$ , alors  $\cos(\theta) \approx 1$  et  $\sin(\theta) \approx \theta$ .

Tandis que :  $\sin(\theta_e + \theta) = \sin(\theta_e)\cos(\theta) + \cos(\theta_e)\sin(\theta) = \sin(\theta_e) + \theta\cos(\theta_e)$   
 $\cos(\theta_e + \theta) = \cos(\theta_e)\cos(\theta) - \sin(\theta_e)\sin(\theta) = \cos(\theta_e) - \theta\sin(\theta_e)$

Pour mettre en évidence ces équations on a :

$$\begin{aligned} \dot{u} + \dot{u}_e &= -((q + q_e)(w + w_e)) + \frac{\bar{q}S}{m} C_x - g.\sin(\theta + \theta_e) + \frac{T}{m} \\ \dot{u} &= -(q.w + q.w_e + q_e.w + q_e.w_e) + \frac{\bar{q}S}{m} C_x - g.\sin(\theta_e) + g.\theta.\cos(\theta_e) + \frac{T}{m} \end{aligned} \quad (3.65)$$

L'équation des petites variations de la propulsion sur l'axe Ox est :

$$\dot{u} = -q.w_e - q_e.w + \frac{\bar{q}S}{m} C_x + g.\theta.\cos(\theta_e) + \frac{T}{m} \quad (3.66)$$

Prenons toujours le vol en ligne droite, dans le plan de symétrie et que les ailes et la gouverne de direction sont en position neutre, ceci nous donne :  $\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\psi}_e = \boldsymbol{\phi}_e = \mathbf{0}$ , et avec les points d'équilibre on a :  $\mathbf{p}_e = \mathbf{q}_e = \mathbf{r}_e = \mathbf{0}$ .

Après la linéarisation de toutes les équations de mouvement on aura :

### 3.7.2.1 Mouvement longitudinal linéariser :

$$\dot{u} = -w_e q - (g.\cos\theta_e)\theta + \frac{\bar{q}S}{m} C_x + \frac{T}{m} \quad (3.67)$$

$$\dot{w} = u_e q + \frac{\bar{q}S}{m} C_z - (g.\sin\theta_e)\theta \quad (3.68)$$

$$\dot{q} = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{I_y} C_m \quad (3.69)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (3.70)$$

$$\dot{h} = \frac{1}{g_0}(u - w) + G_0(\sin\theta)\theta_e \quad (3.71)$$

3.7.2.1 Mouvement latéral linéariser :

$$\dot{v} = w_e p - u_e r + (g \cdot \cos \theta_e) \cdot \varphi + \frac{\bar{q} S}{m} C_y \quad (3.72)$$

$$\dot{p} = \frac{I_{xz}}{I_x} \left(1 - \frac{I_{xz}}{I_z} \frac{I_{xz}}{I_x}\right)^{-1} \left[ \frac{I_{xz}}{I_z} \frac{\bar{q} S b}{I_x} C_l + \frac{\bar{q} S b}{I_z} C_n \right] + \frac{\bar{q} S b}{I_x} C_l \quad (3.73)$$

$$\dot{r} = \left(1 - \frac{I_{xz}}{I_z} \frac{I_{xz}}{I_x}\right)^{-1} \left[ \frac{I_{xz}}{I_z} \frac{\bar{q} S b}{I_x} C_l + \frac{\bar{q} S b}{I_z} C_n \right] \quad (3.74)$$

$$\dot{\varphi} = p + r \tan \theta_e \quad (3.75)$$

$$\dot{\psi} = r \sec \theta_e \quad (3.76)$$

3.8 Le théorème des dérivés de stabilité et de contrôle :

La linéarisation des termes inertiels n'est pas suffisante pour décrire les modèles d'état linéaire pour un drone, une hypothèse supplémentaire est que les forces et les moments aérodynamiques peuvent être décrits de manière linéaire, l'analyse des forces et moments aérodynamiques perturbés suit l'hypothèse que ces derniers sont en fonctions de l'angle d'attaque, l'angle de dérapage, vitesse angulaire perturbée, les angles de commande, et leurs dérivés respectifs. Les théories de stabilité et de contrôle utilisent les petites perturbations hypothèses. Dans une zone très étroite autour de l'équilibre ou l'état assiette de drone à un certain moment dans le temps, les forces changent linéaire par rapport aux paramètres d'état, de sorte que les termes d'ordre supérieur de la série Taylor décrivant la non-linéarité de la motion de drone sont supposées être négligeables.

Tout d'abord, les paramètres d'état de système sont définis. Le vecteur d'état de celui-ci est donné par ses vitesses et les taux de rotation ou les angles d'Euler dans le système fixe de la Terre. Les paramètres u, v, w, p, q et r sont disposés sous un vecteur d'état  $x = [u, v, w, p, q, r]$ . Ainsi, les forces aérodynamiques X sont exprimées en fonction de paramètres d'état et dérivés sous forme de série linéaire Taylor.

Un exemple de la force aérodynamique suit l'axe Ox est la suivante:

$$\Delta X = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)u + \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)v + \left(\frac{\partial X}{\partial p}\right)p + \left(\frac{\partial X}{\partial q}\right)q + \left(\frac{\partial X}{\partial r}\right)r + \left(\frac{\partial X}{\partial \delta}\right)\delta + \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)\varphi + \left(\frac{\partial X}{\partial \psi}\right)\psi \quad (3.77)$$

Où  $\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)$  désigne la dérivée partielle de la force aérodynamique externe suit l'axe Ox, par

rapport à u et  $\Delta X$  sont les forces aérodynamiques et la pousse.

Les dérivés de stabilité sont obtenus en divisant les dérivées partielles au-dessus avec la masse de l'avion lorsque la dérivée partielle correspond à une force extérieure. Lorsque la dérivée partielle correspond à un moment, la dérivée de stabilité est obtenue en divisant par l'inertie de masse appropriée. Un exemple est le suivant:

$$X_u = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right) \quad \text{ET} \quad M_q = \frac{1}{I_y} \left(\frac{\partial X}{\partial q}\right)$$

Le calcul des dérivées de stabilité et de contrôle est au-delà de la portée de ce travail; Cependant, les détails peuvent être trouvés dans [1], [2] et [3].

Les forces et moments linéarisées sont :

$$\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)u + \left(\frac{\partial X}{\partial w}\right)w + \left(\frac{\partial X}{\partial q}\right)q + \left(\frac{\partial X}{\partial \delta_e}\right)\delta_e = m[\dot{u} - w_e q + (g \cdot \cos \theta_e)\theta] \quad (3.78)$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)v + \left(\frac{\partial Y}{\partial r}\right)r + \left(\frac{\partial Y}{\partial p}\right)p + \left(\frac{\partial Y}{\partial \delta_a}\right)\delta_a + \left(\frac{\partial Y}{\partial \delta_r}\right)\delta_r = m[\dot{v} - w_e p + u_e r - (g \cdot \cos \theta_e)\varphi] \quad (3.79)$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)u + \left(\frac{\partial Z}{\partial w}\right)w + \left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right)q + \left(\frac{\partial Z}{\partial \delta_e}\right)\delta_e = m[\dot{w} - u_e q - (g \cdot \sin \theta_e)\theta] \quad (3.80)$$

$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial v}\right)v + \left(\frac{\partial M_x}{\partial r}\right)r + \left(\frac{\partial M_x}{\partial p}\right)p + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \delta_a}\right)\delta_a + \left(\frac{\partial M_x}{\partial \delta_r}\right)\delta_r = I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} \quad (3.81)$$

$$\left(\frac{\partial M_y}{\partial u}\right)u + \left(\frac{\partial M_y}{\partial w}\right)w + \left(\frac{\partial M_y}{\partial q}\right)q + \left(\frac{\partial M_y}{\partial \delta_e}\right)\delta_e = I_y \dot{q} \quad (3.82)$$

$$\left(\frac{\partial M_z}{\partial v}\right)v + \left(\frac{\partial M_z}{\partial r}\right)r + \left(\frac{\partial M_z}{\partial p}\right)p + \left(\frac{\partial M_z}{\partial \delta_a}\right)\delta_a + \left(\frac{\partial M_z}{\partial \delta_r}\right)\delta_r = I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} \quad (3.83)$$

3.8.1 Modèle longitudinal :

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= X_u u + X_w w + (X_q + w_e)q - (g \cdot \cos \theta_e)\theta + X_{\delta_e} \delta_e \\
 \dot{w} &= Z_u u + Z_w w + (Z_q + u_e)q + (g \cdot \sin \theta_e)\theta + Z_{\delta_e} \delta_e \\
 \dot{q} &= M_u u + M_w w + M_q q + X_{\delta_e} \delta_e \\
 \dot{\theta} &= q \\
 \dot{h} &= \frac{1}{g_0} (u - w) + G_0 (\sin \theta_e)\theta \\
 \dot{\Omega} &= \Omega_u u + \Omega_w w + \Omega_h h + \Omega_\Omega \Omega + \Omega_{\delta_{th}} \delta_{th}
 \end{aligned}
 \tag{3.84}$$

Avec  $\Omega$  est la vitesse du moteur

Le vecteur  $\delta$  représente les gouvernes longitudinales, qui sont déterminées en reliant les efforts aérodynamiques au braquage de la gouverne et au niveau de poussée. En général l'état est mesuré. De plus, l'utilisation de ces états et la projection des équations dans le repère avion permet d'obtenir des transferts directs entre les commandes et les sorties. [4]

Les dérivées de stabilité et les dérivées aérodynamiques sont définies dans le tableau (3.1).

Symbole	Définition	Commentaire
$X_u$	$\frac{\bar{q}S}{U} \frac{\partial x}{\partial u}$	Variation de la portance et de la résistance à la trainée en fonction de u
$X_w$	$\frac{\bar{q}S}{U} \frac{\partial x}{\partial w}$	Variation de la portance et de la résistance à la trainée suivant l'axe longitudinal
$Z_u$	$\frac{\bar{q}S}{U} \frac{\partial z}{\partial u}$	Variation de la force normale avec u
$Z_w$	$\frac{\bar{q}S}{U} \frac{\partial z}{\partial w}$	Pente de la courbe de portance
$M_u$	$\frac{\bar{q}cS}{U} \frac{\partial M}{\partial u}$	Effet de la poussée
$M_w$	$\frac{\bar{q}cS}{U} \frac{\partial M}{\partial w}$	Raideur en tangage
$M_q$	$\frac{\bar{q}S}{U} \frac{\partial x}{\partial u}$	Amortissement du tangage
$X_\delta$	$\frac{\bar{q}S}{U} \frac{\partial x}{\partial \delta}$	Variation de la portance et de la résistance à la trainée par rapport aux normale avec $\delta$
$Z_\delta$	$\frac{\bar{q}S}{U} \frac{\partial z}{\partial \delta}$	Variation de la force normale avec $\delta$

Tableau (3.1) : Définitions des dérivées de stabilité longitudinales

**3.8.2 Modèle latéral :**

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= Y_v v + (Y_r + w_e) p + (Y_r - u_e) r + Y_{\delta_a} \delta_a + Y_{\delta_r} \delta_r + (g \cdot \cos \theta_e) \cdot \varphi \\
 \dot{p} &= L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_a} \delta_a + L_{\delta_r} \delta_r \\
 \dot{r} &= N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_a} \delta_a + N_{\delta_r} \delta_r \\
 \dot{\varphi} &= p + r \cdot \tan \theta_e \\
 \dot{\psi} &= r \cdot \sec \theta_e
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

**3.9 Perturbation atmosphérique :**

Les effets de la turbulence atmosphérique sur la plupart des systèmes technologiques modernes et sophistiquées sont devenus un paramètre important de la conception des deux aspects structurels et de performance [7].

Des techniques pour la simulation de la turbulence atmosphérique ont donc été mises au point dans le but de fournir des critères de conception fiables. Simulation de la turbulence est obtenue par la génération d'un signal analogique ou numérique qui a des caractéristiques statistiques équivalentes à la véritable turbulence atmosphérique. Le degré de complexité et l'implication mathématique des modèles qui sont, la vitesse du vent et la turbulence spectrale de Dryden.

Selon les auteurs l'effet principal de la rafale de vent est de causer une fluctuation aléatoire de la vitesse du drone.

Les incertitudes de vitesse  $(\Delta V, \Delta \omega)$  provoquées par la rafale de vent peuvent être modélisées par les sorties de quelques filtres comme celui de Dryden avec un bruit blanc comme source d'entrée, elles sont données de la façon suivante :

$$\Delta V = [\Delta u, \Delta v, \Delta w]$$

et :

$$\Delta \omega = [\Delta p, \Delta q, \Delta r]$$

Où  $u, v, w$  et  $p, q, r$  sont respectivement les vitesses de translation et de rotation.

Alors les équations de mouvements seront écrites comme suit :

$$\begin{cases} \Delta u_a = \Delta u + u_g \\ \Delta v_a = \Delta v + v_g \\ \Delta w_a = \Delta w + w_g \end{cases} \quad (2.86)$$

$$\begin{cases} \Delta p_a = \Delta p + p_g \\ \Delta q_a = \Delta q + q_g \\ \Delta r_a = \Delta r + r_g \end{cases} \quad (3.87)$$

Où :

$\Delta u_a, \Delta v_a, \Delta w_a$  et  $\Delta p_a, \Delta q_a, \Delta r_a$  sont respectivement les composants linéaire de l'avion et les vitesse angulaire.

Et :

$[u_g, v_g, w_g]$  et  $[p_g, q_g, r_g]$  sont respectivement le vecteur des composants linéaires de rafale de vitesse et le vecteur des composants de rafale de vitesse angulaire.

### 3.9.1 Modèle longitudinal : (3.88)

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{h} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q + w_q & -g \cos \theta_e & 0 & 0 \\ Z_u & Z_w & Z_q + u_e & g \sin \theta_e & 0 & 0 \\ M_u & M_w & M_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{g_0} & -\frac{1}{g_0} & 0 & G_0 \sin \theta_e & 0 & 0 \\ \Omega_u & \Omega_w & 0 & 0 & \Omega_h & \Omega_\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & 0 \\ Z_{\delta_e} & 0 \\ M_{\delta_e} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \Omega_{\delta_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_{th} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q + w_q \\ Z_u & Z_w & Z_q + u_e \\ M_u & M_w & M_q \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_g \\ w_g \\ q_g \end{bmatrix}$$

Qui mis sous la forme d'état:

$$\dot{X}_{\log} = AX_{\log} + BU_{\log} + EY_{\log}$$

Où :

$$X_{\log} = [u, w, q, \theta, h, \Omega]^T$$

Et :

A : la matrice d'état.

B : la matrice de commande.

E : la matrice d'interaction des perturbations atmosphériques.

**3.9.2 Modèle latéral :** (3.89)

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p + w_e & Y_r - u_r & g \cos \theta_e & 0 & 0 \\ L_v & L_p & L_r & 0 & 0 & 0 \\ N_v & N_p & N_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sec \theta_e & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta_a} & Y_{\delta_r} \\ L_{\delta_a} & Y_{\delta_r} \\ N_{\delta_a} & N_{\delta_r} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_v & Y_p + w_e & Y_r - u_r \\ L_v & L_p & L_r \\ N_v & N_p & N_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_g \\ p_g \\ r_g \end{bmatrix}$$

Qui est mise sous la forme d'état :

$$\dot{X}_{lat} = AX_{lat} + BU_{lat} + Y_{lat}$$

Où :  $x_{lat} = [v, p, r, \varphi, \psi]^T$

• **Fonction de la densité spectrale de puissance PSD :**

La PSD (Power Spectral Density Functions) d'une fonction x(t) est une fonction réelle qui représente la moyenne des carrés des valeurs de la partie d'une grandeur donnée qui passe par un filtre à bande étroite de fréquence centrale donnée  $w$ , par unité de largeur de bande lorsque cette largeur de bande tend vers zéro et le temps vers l'infini :

$$\phi(w) = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1}{T \Delta w} \int_0^T x^2(t, w, \Delta w) dt \quad (3.90)$$

$\phi(w)$  est la PSD de x. T est la durée en seconde.  $x(t, w, \Delta w)$  est la composante de x(t) qui se trouve dans la bande de fréquence  $w \pm \Delta w/2$ .

**3.9.3 Représentations des rafales continues :**

Il y a deux représentations analytiques concernant la PSD de la perturbation atmosphérique qui sont beaucoup utilisées dans la commande des systèmes de vol [7].

Le premier est le spectre de Von Karman. Il est le meilleur spectre obtenu lors de tests sous perturbation atmosphérique, mais son utilisation est moins facile parce qu'il représente une fonction de PSD compliqué. Il est défini par l'équation (2.91).

$$\phi_{VK}(\Omega) = \frac{\sigma^2 L [1 + 8/3(1.339L\Omega)^2]}{\pi [1 + (1.339L\Omega)^2]^{1.5}} \quad (3.91)$$

Où L est la longueur de la rafale en (m),  $\sigma$  est la densité de la rafale en m/s.

Le deuxième est le spectre de Dryden, il est le plus utilisé parce qu'il est simple et facile à implanter (équation (2.92)) :

$$\phi_{Dry}(\Omega) = \frac{\sigma^2 L [1 + 3(L\Omega)^2]}{\pi [1 + (L\Omega)^2]^2} \quad (3.92)$$

Pour négliger l'influence de la vitesse de vol, quand on compare une analyse avec l'autre, la fonction de PSD des phénomènes atmosphériques est utile en utilisant la fréquence spatiale :

$\Omega = w/U_e$ ,  $\Omega$  est la fréquence spatiale de la rafale en (rad/m),  $w$  est la pulsation temporelle où le drone veut fonctionner (rad/s) et  $U_e = V$  est la vitesse d'équilibre de drone.

Les expressions des fonctions de PSD de Dryden pour chaque composant sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_u(\Omega) = 2\sigma_u^2 \frac{L_u}{\pi} \frac{1}{1 + (L_u\Omega)^2} \\ \phi_v(\Omega) = \sigma_v^2 \frac{L_v}{\pi} \frac{[1 + 3(L_v\Omega)^2]}{[1 + (L_v\Omega)^2]^2} \\ \phi_w(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{L_w}{\pi} \frac{[1 + 3(L_w\Omega)^2]}{[1 + (L_w\Omega)^2]^2} \end{array} \right. \quad (3.93)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_p(\Omega) = \frac{\sigma_w^2}{L_w} \frac{0.8(\frac{\pi L_w}{4b})^{1/3}}{1 + (\frac{4b\Omega}{\pi})^2} \\ \phi_q(\Omega) = \frac{\Omega^2}{1 + (\frac{4b\Omega}{\pi})^2} \phi_w(\Omega) \\ \phi_r(\Omega) = \frac{\Omega^2}{1 + (\frac{3b\Omega}{\pi})^2} \phi_v(\Omega) \end{array} \right. \quad (3.94)$$

Avec :

b est l'envergure de drone,  $L_u$ ,  $L_v$  et  $L_w$  représentent les longueurs d'ondes des turbulences sur chaque axe et  $\sigma_u$ ,  $\sigma_v$  et  $\sigma_w$  leurs intensités.

**3.9.4 Fonction de transfert de Dryden :**

**3.9.4.1 Turbulences longitudinales :**

Les entrées du modèle de Dryden sont des bruits blancs correspondant aux rafales du vent longitudinal  $n_1$  et verticale  $n_2$ , les sorties sont la vitesse turbulence longitudinale ( $u_g$ ), la vitesse de turbulence verticale ( $w_g$ ) et puisque ce dernier en fonction de ( $q_g$ ) alors y'aura une autre sortie qui est le taux de turbulence de tangage ( $q_g$ ).

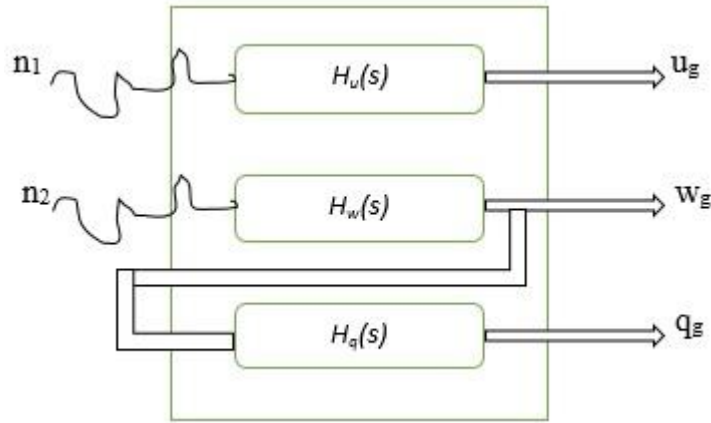


figure (3.7) : représentation des interactions atmosphériques

$$\text{Avec : } \begin{cases} H_u(s) = \sigma_u \sqrt{\frac{2L_u}{V\pi}} \frac{1}{1 + \frac{L_u}{V}s} = \frac{K_u}{T_u} \frac{1}{s + 1/T_u} \\ H_w(s) = \frac{K_w}{T_w} \frac{(1 + b_w s)}{s^2 + (2/T_w)s + 1/T_w^2} \\ H_q(s) = \frac{b_q}{T_q} \frac{s}{s + 1/T_q} \end{cases} \quad (3.95)$$

$$\text{Où : } K_u = \sigma_u \sqrt{\frac{2L_u}{\pi V}} \quad , \quad T_u = \frac{L_u}{V}$$

$$K_w = \sigma_w \sqrt{\frac{L_w}{\pi V}} \quad , \quad T_w = \frac{L_w}{V} \quad , \quad b_w = \frac{\sqrt{3}L_w}{V}$$

$$T_q = \frac{4b}{\pi V} \quad , \quad b_w = \frac{1}{V}$$

D'après les equations (3.93) et (3.95) on peut déduire le modèle d'état suivants la notation :

$$\begin{cases} X_{\logdry} = A_{\logdry} X_{\log} + B_{\logdry} N \\ Y_{\log} = C_{\logdry} X_{\log} \end{cases}$$

Avec :

$$X_{\logdry} = [x_u, x_w, x_q]^T$$

$$Y_{\log} = [u_g, w_g, q_g]^T$$

Alors le modèle sera comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_u \\ \dot{x}_w \\ \dot{x}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_u} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_w} & 0 \\ 0 & -\frac{b_q}{T_q^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ x_w \\ x_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

$$\begin{bmatrix} u_g \\ w_g \\ q_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_u}{T_u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_w b_w}{T_w^2} & 0 \\ 0 & \frac{b_q K_w b_w}{T_q T_w^2} & -\frac{b_q}{T_q^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ x_w \\ x_q \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

### 2.9.4.2 Turbulences latéraux :

Les entrées sont les rafales du vent latéral  $n_1$  et verticale  $n_2$ , les sorties sont la vitesse turbulence latéral ( $v_g$ ), le taux de variation du roulis des turbulences ( $r_g$ ) et le taux des variations du lacet des turbulences ( $p_g$ ).

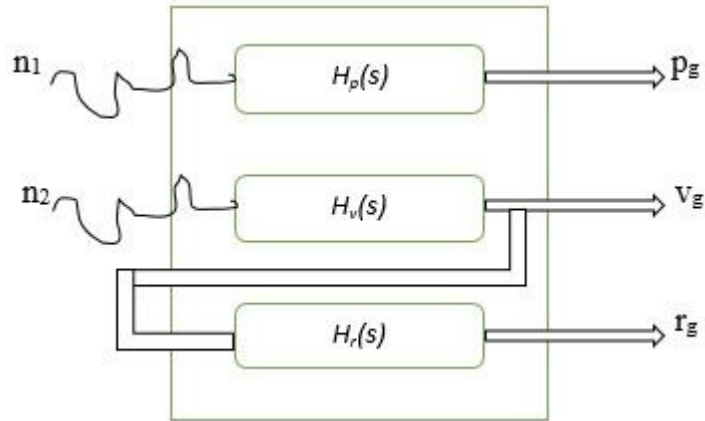


figure (3.7) : représentation des interactions atmosphériques

$$\text{Avec : } \begin{cases} H_v(s) = \frac{K_v}{T_v} \frac{(1+b_v s)}{s^2 + (2/T_v)s + 1/T_v^2} \\ H_p(s) = \frac{K_p}{T_p} \frac{1}{s + 1/T_p} \\ H_r(s) = \frac{b_r}{T_r} \frac{s}{s + 1/T_r} \end{cases} \quad (3.98)$$

$$\text{Où : } K_p = \sigma_w \left( \frac{\pi}{4bL_w^2} \right) \sqrt{\frac{0.8}{V}}, \quad T_p = \frac{4b}{\pi V}$$

$$K_v = \sigma_v \sqrt{\frac{L_v}{\pi V}}, \quad T_v = \frac{L_v}{V}, \quad b_v = \frac{\sqrt{3}L_v}{V}$$

$$T_r = \frac{3b}{\pi V}, \quad b_r = \frac{1}{V}$$

D'après les équations (3.85) et (3.22) on peut déduire le modèle d'état suivants la notation :

$$\begin{cases} X_{latdry} = A_{latdry}X_{lat} + B_{latdry}N \\ Y_{lat} = C_{latdry}X_{lat} \end{cases}$$

Avec :

$$X_{lat} = [x_v, x_p, x_r]^T$$

$$Y_{lat} = [v_g, p_g, r_g]^T$$

Alors le modèle sera comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_v \\ \dot{x}_p \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_v} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_p} & 0 \\ 0 & -\frac{b_r}{T_r^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ x_p \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

$$\begin{bmatrix} v_g \\ p_g \\ r_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_v b_w}{T_v^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_p}{T_p} & 0 \\ 0 & \frac{b_r}{T_r} \frac{K_v b_v}{T_v^2} & -\frac{b_q}{T_r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ x_p \\ x_r \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

**Conclusion:**

D’après les équations décrivant le mouvement du drone, la synthèse de la loi de commande sans linéarisation du modèle s’avère très difficile.

Pour cela la séparation des deux dynamiques à savoir Latéral et Longitudinal est plus judicieuse.

Les modèles décrivant l’enivrement ou l’avion évolue ont été données pour qui il soient utilisé lors de la synthèse de la loi de commande.

# Résultat du simulation et interprétation

**4.1 Modèle longitudinal :**

Le régulateur flou utilisé est de type Takagi Sugeno à trois règles comme suit :

**4.1.1 Modèle longitudinal sans perturbation :**

$$R1 : \text{SI } v \text{ est autour de } 30 \text{ m/s et } h \text{ est autour } 200\text{m ALORS} \begin{cases} X = A_1X + B_1U \\ u_1 = -K_1X \end{cases}$$

$$R2 : \text{SI } v \text{ est autour de } 28 \text{ m/s et } h \text{ est autour } 180\text{m ALORS} \begin{cases} X = A_2X + B_2U \\ u_2 = -K_2X \end{cases}$$

$$R3 : \text{SI } v \text{ est autour de } 32 \text{ m/s et } h \text{ est autour } 220\text{m ALORS} \begin{cases} X = A_3X + B_3U \\ u_3 = -K_3X \end{cases}$$

Tel que :

$$A1= \begin{bmatrix} -0.2933 & 0.3877 & -0.5578 & -9.7843 & -0.0000 & 0.0138 \\ -0.5509 & -5.3691 & 29.2779 & -0.1849 & 0.0009 & 0 \\ 0.3382 & -5.6317 & -6.1948 & 0 & 0.0000 & -0.0107 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0189 & -0.9998 & 0 & 29.9997 & 0 & 0 \\ 41.5394 & 0.7850 & 0 & 0 & -0.6355 & -3.8541 \end{bmatrix}$$

$$A2= \begin{bmatrix} -0.2397 & 0.5302 & -1.1876 & -9.8091 & -0.0000 & 0.0116 \\ -0.5690 & -4.4804 & 24.3740 & -0.4744 & 0.0009 & 0 \\ 0.4300 & -4.8436 & -5.1688 & 0 & 0.0000 & -0.0090 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0483 & -0.9988 & 0 & 24.9997 & 0 & 0 \\ 34.7305 & 1.6796 & 0 & 0 & -0.0300 & -3.2351 \end{bmatrix}$$

$$A3= \begin{bmatrix} -0.2721 & 0.4313 & -0.9797 & -9.8171 & 0.0000 & 0.0125 \\ -0.5203 & -4.5277 & 28.8590 & -0.2645 & 0.0010 & 0 \\ 0.4459 & -5.6266 & -6.0311 & 0 & -0.0000 & -0.0117 \\ 0 & 0 & 0.9999 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0269 & -0.9995 & 0 & 29.4788 & 0 & 0 \\ 63.0949 & 2.1280 & 0 & 0 & -0.0508 & -4.7106 \end{bmatrix}$$

$$B1 = \begin{bmatrix} -3 & 1000 \\ -3.7 & 0 \\ -50.2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2663.9 \end{bmatrix}$$

$$B2 = \begin{bmatrix} 0.3525 & 0 \\ -2.5532 & 0 \\ -35.2790 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 391.8778 \end{bmatrix}$$

$$B3 = \begin{bmatrix} -0.2470 & 0 \\ -3.0730 & 0 \\ -47.9605 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 425.8946 \end{bmatrix}$$

**4.1.2 Modèle longitudinal avec perturbation :**

R1 : SI v est autour de 30 m/s et h est autour 200m ALORS  $\begin{cases} X = A_1 X + B_1 U + E_1 W \\ u_1 = -K_1 X \end{cases}$

R2 : SI v est autour de 28 m/s et h est autour 180m ALORS  $\begin{cases} X = A_2 X + B_2 U + E_2 W \\ u_2 = -K_2 X \end{cases}$

R3 : SI v est autour de 32 m/s et h est autour 220m ALORS  $\begin{cases} X = A_3 X + B_3 U + E_3 W \\ u_3 = -K_3 X \end{cases}$

Tel que les matrices d'états et les matrices de commande restent les mêmes avec le modèle sans perturbation hors que  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  sont définies comme suit :

$$E_1 = \begin{bmatrix} -0.2933 & 0.3877 & -0.5578 \\ -0.5509 & -5.3691 & 29.2779 \\ 0.3382 & -5.6317 & -6.1948 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} -0.2397 & 0.5302 & -1.1876 \\ -0.5690 & -4.4804 & 24.3740 \\ 0.4300 & -4.8436 & -5.1688 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et } E_3 = \begin{bmatrix} -0.2721 & 0.4313 & -0.9797 \\ -0.5203 & -4.5277 & 28.8590 \\ 0.4459 & -5.6266 & -6.0311 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**4.1.1.1 Résolution de problème avec LQR :**

La synthèse de la commande optimale pour chaque loi d’inférence Ri, implique la minimisation de critère suivant :

$$J_i(Q, R) = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T_i(t)Ru_i(t)] \quad i = 1,2,3.$$

Avec :

*Q* : matrice carrée semi définie positive.

*R* : matrice définie positif.

Après plusieurs essais et à l’aide des règles bryson, on a choisit les matrice Q et R comme suit :

$$Q = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix} \quad \text{Et} \quad R = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 250 \end{bmatrix}$$

Alors les gains de retour d’état sont obtenus comme suit :

$K_1 = [0.5942 \quad 0.3255 \quad -0.2823 \quad -11.6006 \quad -0.6360 \quad 0.0018$   
 $\quad 0.5470 \quad 1.4801 \quad 0.1029 \quad -0.0706 \quad -2.8853 \quad 0.1226]$   
 $K_2 = [1.7048 \quad 0.4619 \quad -0.3605 \quad -11.7870 \quad -0.4587 \quad 0.0043$   
 $\quad 0.2204 \quad 1.0517 \quad 0.0532 \quad -0.0140 \quad -0.1812 \quad 0.3214]$   
 $K_3 = [1.5126 \quad 0.4287 \quad -0.3006 \quad -13.2956 \quad -0.5077 \quad 0.0036$   
 $\quad 0.2245 \quad 1.1595 \quad 0.0651 \quad -0.0278 \quad -0.9714 \quad 0.2858]$

**4.1.1.2 Résolution de problème avec des LMIs :**

Rappelons que les conditions des LMIs pour un modèle avec un régulateur flou sont données comme suit : pour tout  $X > 0$  ;

$$\begin{cases} -XA_i^T + M_i^T B_i^T - A_i X + B_i M_i > 0; (i = 1, \dots, r) \\ -XA_i^T - A_i X - XA_j^T - A_j X + M_j^T B_i^T + B_i M_j + M_i^T B_j^T + B_j M_i > 0; (r \leq j < i) \end{cases}$$

Avec :

$$P = X^{-1} \quad \text{Et} \quad K_i = M_i X^{-1}$$

Alors les gains de retour d'état sont obtenus comme suit :

$K_1 = [-0.1343 \quad -0.6319 \quad 0.0655 \quad -16.3327 \quad -0.5686 \quad 0.0237$   
 $\quad 0.0156 \quad 0.0001 \quad -0.0001 \quad -0.0053 \quad -0.0004 \quad -0.0013]$   
 $K_2 = [-0.1396 \quad -0.6613 \quad 0.0657 \quad -17.0658 \quad -0.5938 \quad 0.0250$   
 $\quad 0.1483 \quad 0.0039 \quad -0.0011 \quad -0.0340 \quad -0.0010 \quad -0.0100]$   
 $K_3 = [-0.1727 \quad -0.8006 \quad 0.0528 \quad -21.6216 \quad -0.7366 \quad 0.0323$   
 $\quad 0.0888 \quad 0.0033 \quad -0.0011 \quad -0.0346 \quad -0.0010 \quad -0.0071]$

Tandis que la matrice de Lyapunov qui vérifie la stabilité du système est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 0.6441 & 0.1424 & 0.0226 & 5.2290 & 0.2030 & 0.1329 \\ 0.1424 & 1.5908 & -0.1172 & 22.8985 & 0.9544 & -0.0009 \\ 0.0226 & -0.1172 & 1.7157 & 7.5222 & 0.1489 & -0.0022 \\ 5.2290 & 22.8985 & 7.5222 & 902.0084 & 25.1321 & -0.0177 \\ 0.2030 & 0.9544 & 0.1489 & 25.1321 & 1.2467 & 0.0074 \\ 0.1329 & -0.0009 & -0.0022 & -0.0177 & 0.0074 & 1.0073 \end{bmatrix}$$

**4.1.4. Résultat de simulation et interprétation :**

**1<sup>ère</sup> Cas :**

Pour le mouvement longitudinal les signaux de référence sont l'altitude  $h=50$  [m] et la vitesse  $V=5$  m/s, après vérification de la performance de régulateurs, les résultats sont données en présence et en absence des perturbations atmosphérique.

- **Résultats avec LQR :**

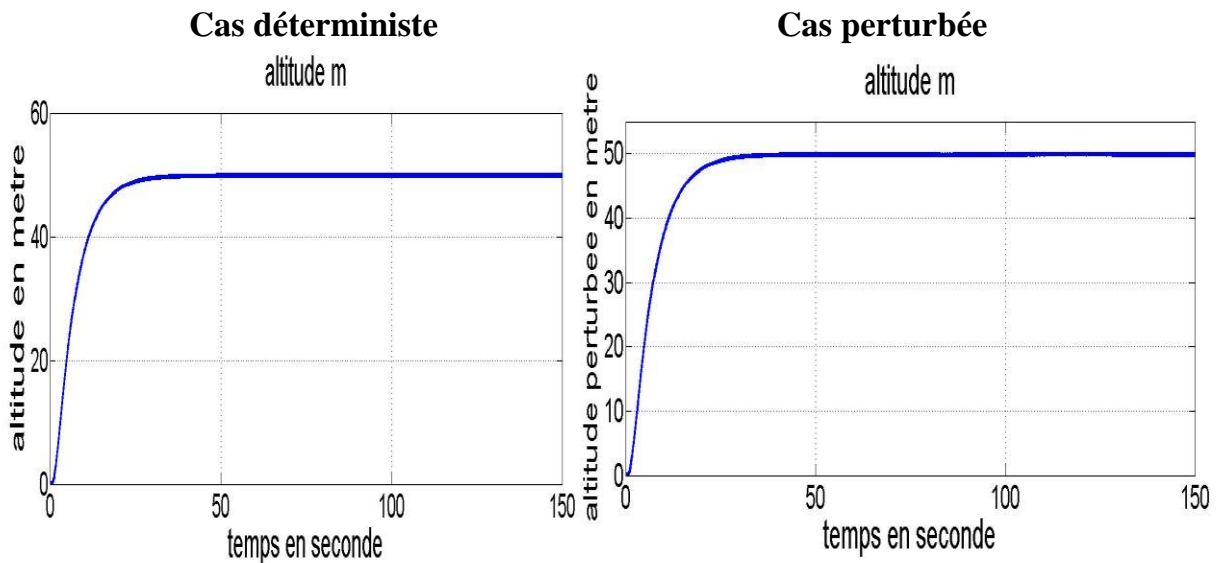


Figure (4.1) : Altitude en fonction du temps

La réponse du drone avec un modèle nominal à une altitude désirer est bien converger et avec un temps de repense vraiment important, et même si pour un modèle perturbée on peut voir que la trajectoire à atteindre la consigne mais cela avec des petites variations paramétriques.

L'existence des perturbations atmosphériques peut s'influence sur la repense du système, cela fait perdre certains performance comme la précision, rapidité,...etc. mais avec les régulateurs on peut ce approcher pour maintenir des sortie près des consigne désiré.

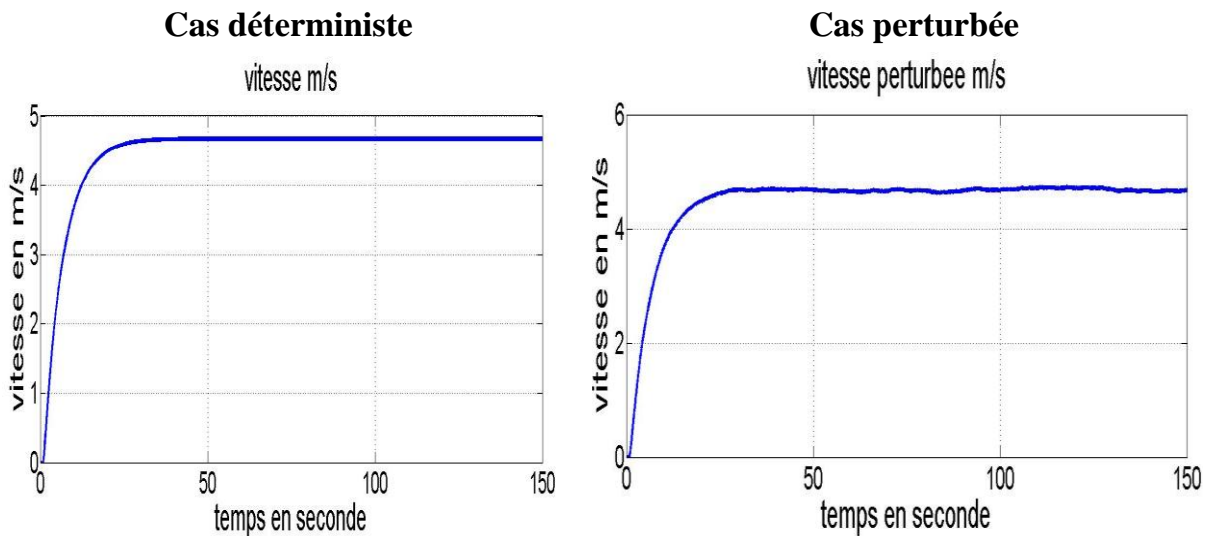


figure (4.2) : la variation de la vitesse de translation en avant

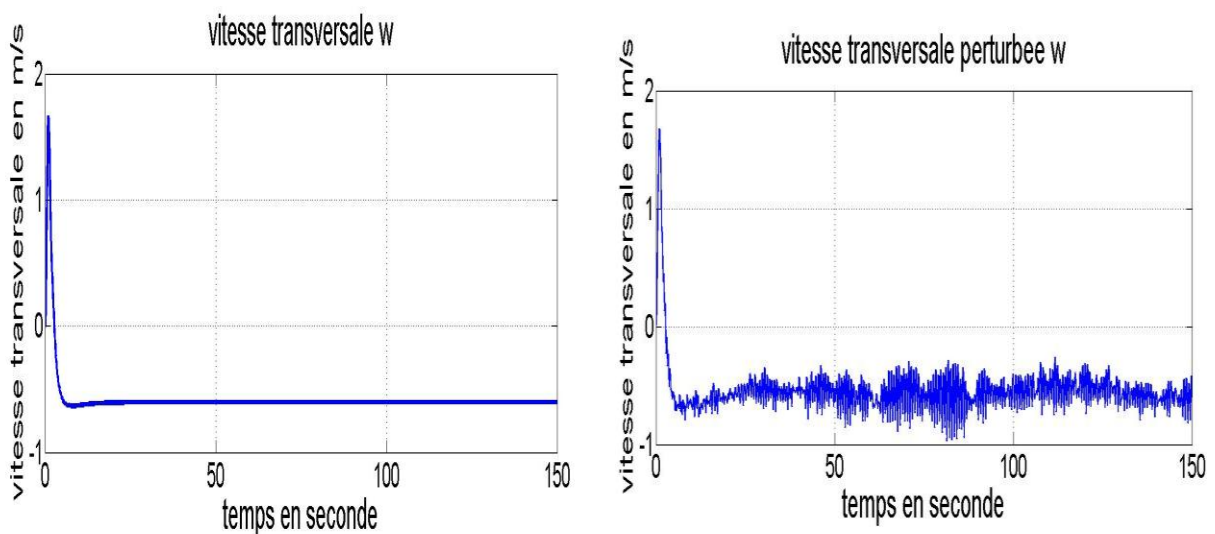


figure (4.3) : la variation de la vitesse de translation suivant l'axe Oz

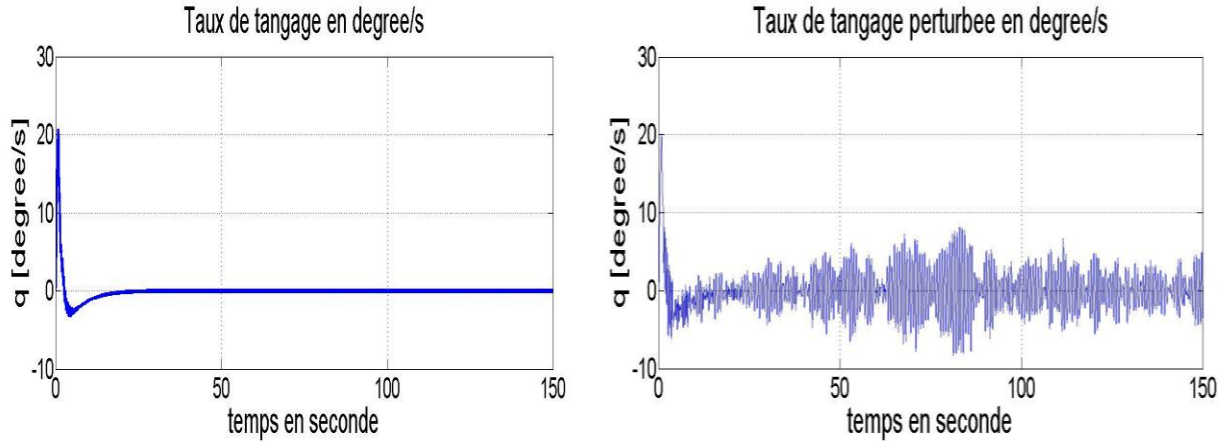


figure (4.4) : Taux de variation de tangage

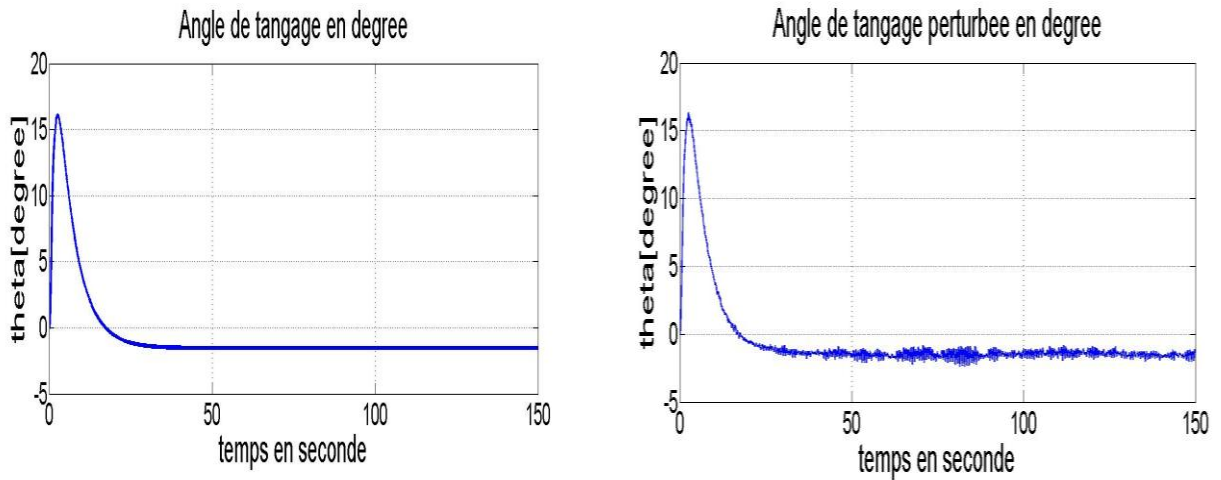


figure (4.5) : Angle de tangage en fonction du temps

Nous pouvons voir que les trajectoires de référence (vitesse et altitude) sont atteintes, soit en présence ou en absence du vent. Ces consignes ont été atteintes avec deux angles ( $q$  et  $\theta$ ) qui restent toujours dans l'intervalle de fonctionnement. ( $-20 < \theta < 20$ ) et ( $-20 < q < 20$ ).

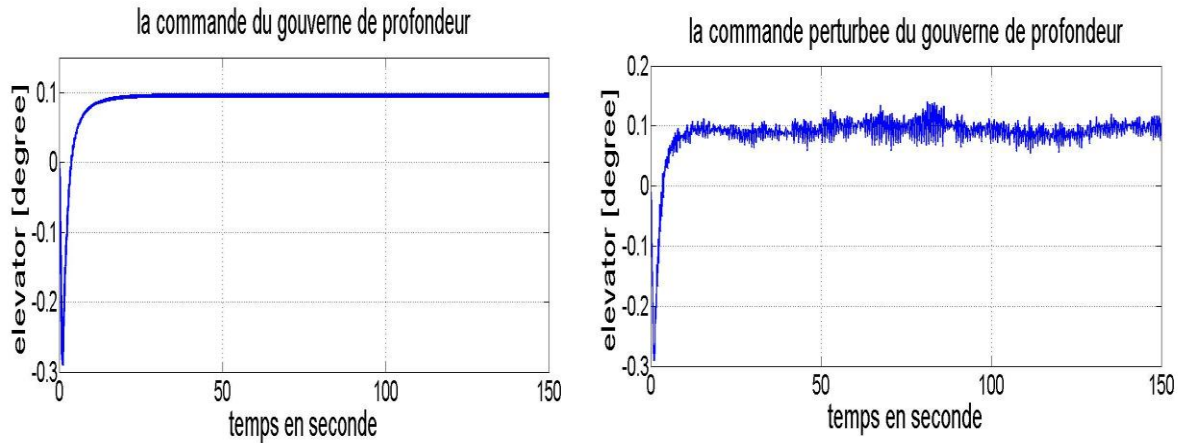


figure (4.6) : commande de l’empennage horizontal

La commande par la gouverne de profondeur fait un degré négative, cela est logique car le faite de pencher les gouverne vers le haut un vent qui pousse sur ces gouverne ce qui dus changement de direction du nez vers le haut, alors que l’angle de l’empennage est revient à sa position d’équilibre jusqu’à ce que le drone mène vers la hauteur souhaité.

- **Résultats avec LMI :**

**Cas déterministe**

**Cas perturbée**

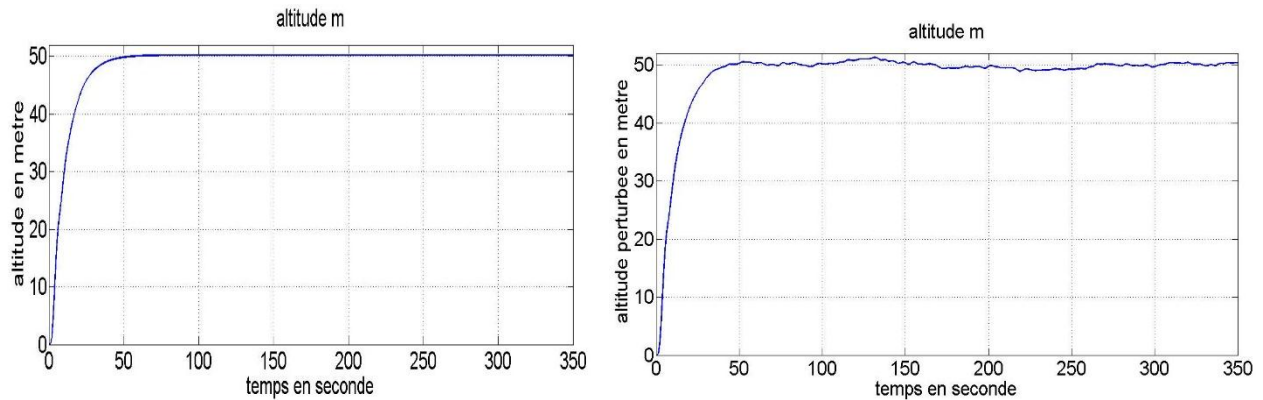


figure (4.7) : Altitude en fonction du temps

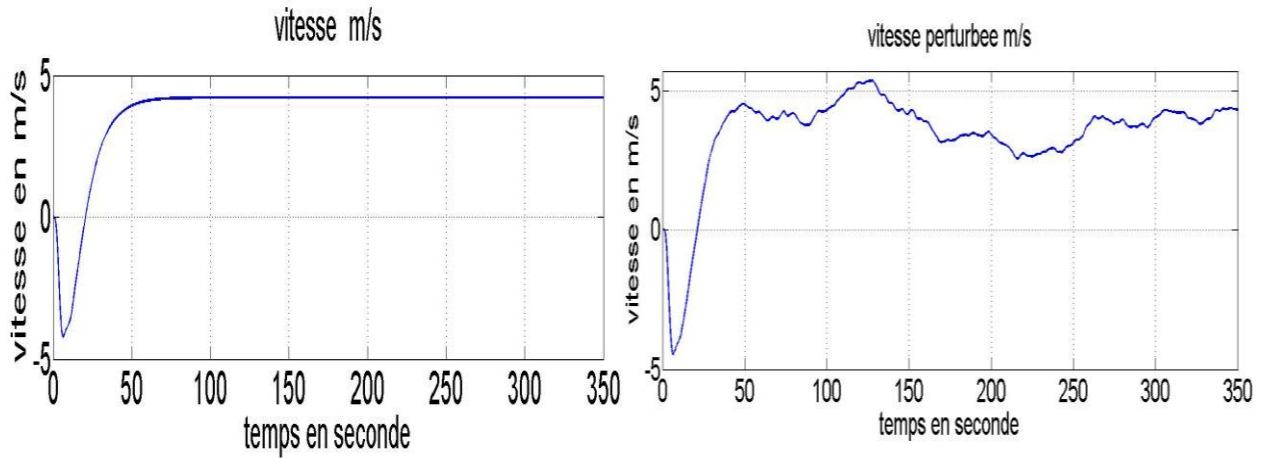


figure (4.8) : la variation de la vitesse de translation en avant

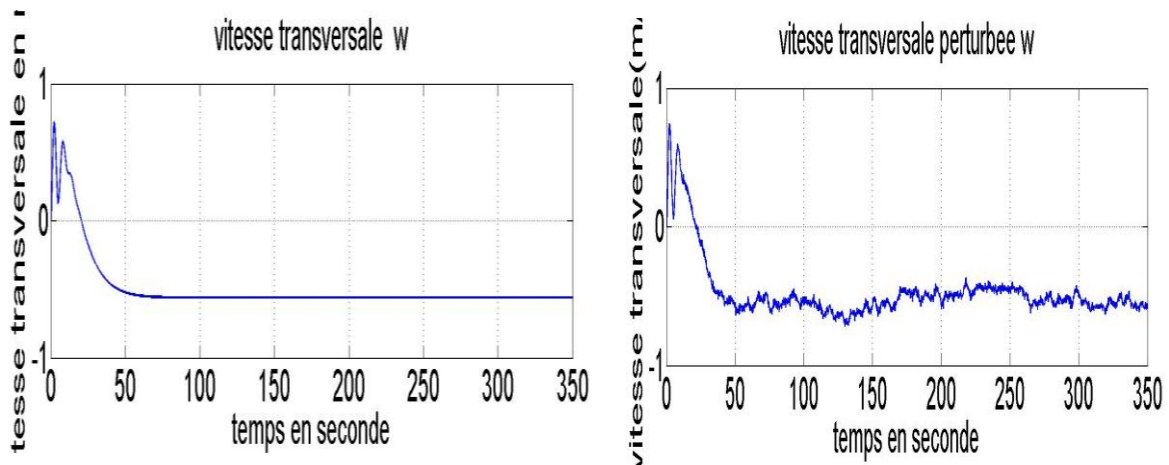


figure (4.9) : la variation de la vitesse de translation suivant l'axe Oz

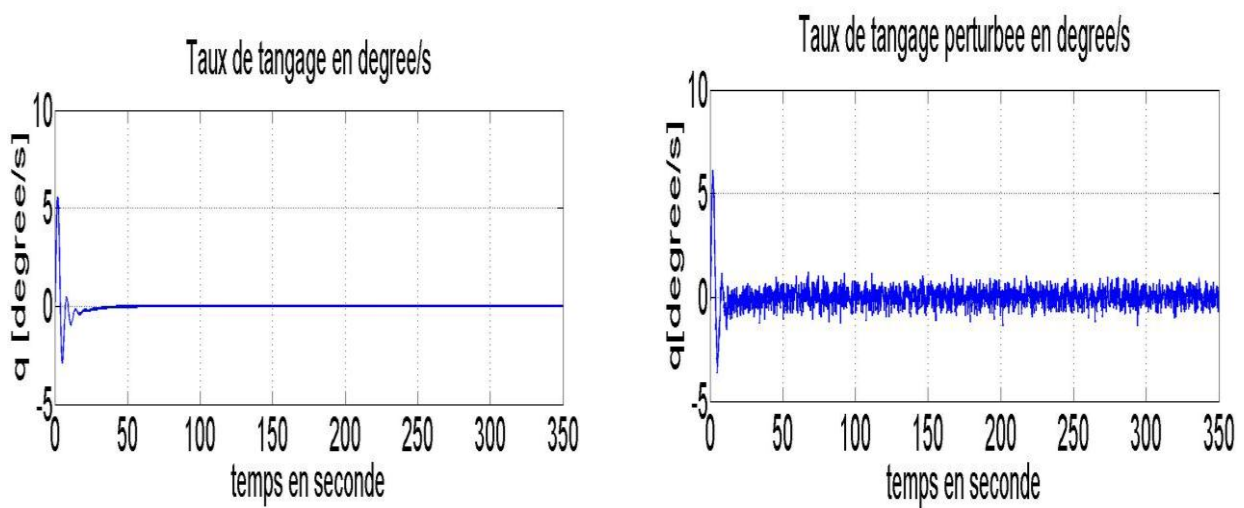


figure (4.10) : Taux de variation de tangage

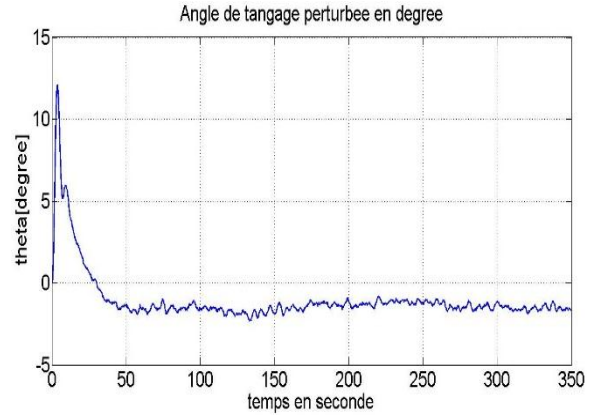
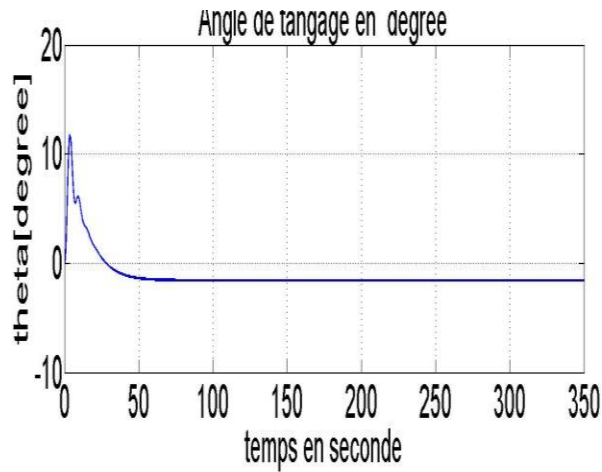


figure (4.11) : Angle de tangage en fonction du temps

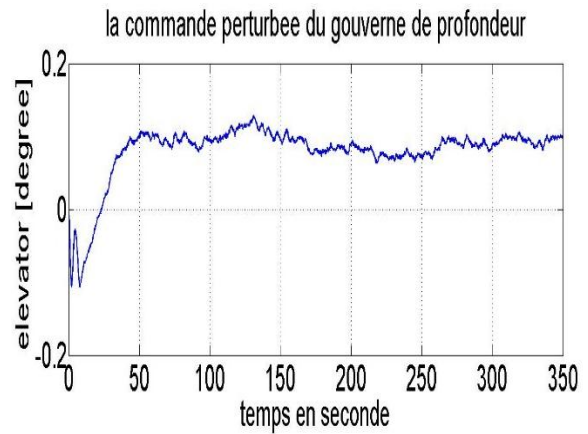
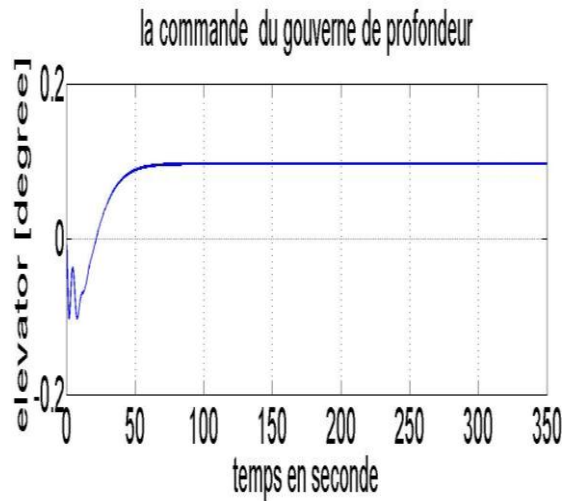


figure (4.12) : commande de l'empennage horizontal

**Comparaison :**

Nous pouvons voir que les resultat de simulation en utilisant les LMI donnent de meilleures résultats.

( $\theta < 12$  degré) et ( $q < 7$  degré).

2<sup>ème</sup> Cas :

Pour le mouvement longitudinal les signaux de référence sont l'altitude  $h=25$  [m] pendant 175 secondes, après on augmente l'altitude a  $h=50$  [m], pour vérifier les performances de poursuite de régulateurs, les résultats de simulations sont faites avec et sans perturbation atmosphériques.

- Résultats avec LQR :

Cas déterministe

Cas stochastique

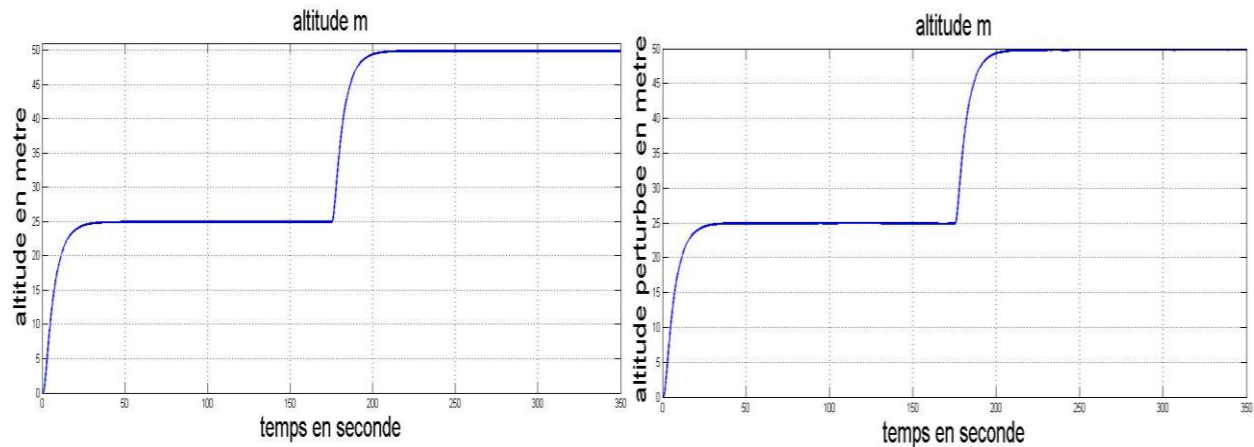


figure (4.13) : Altitude en fonction du temps

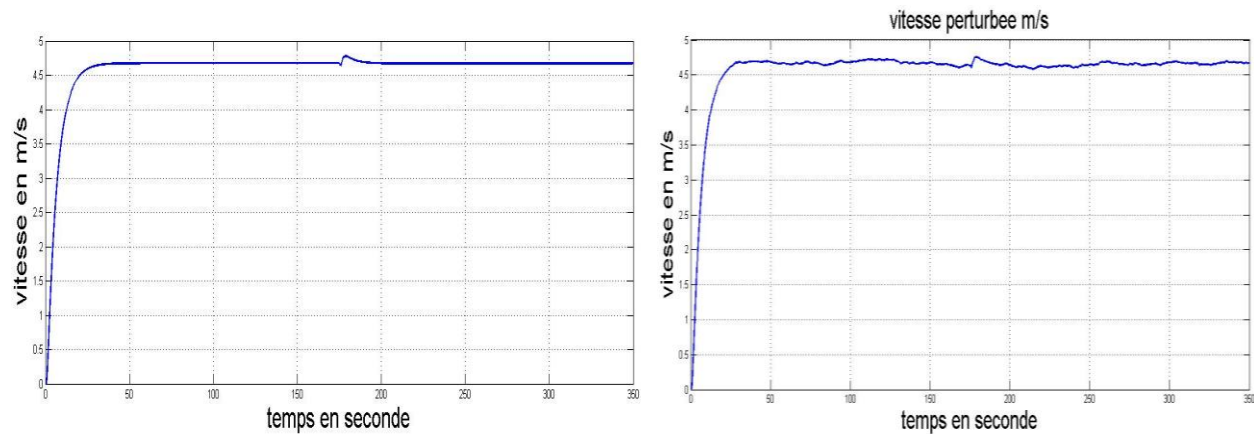


figure (4.14) : la variation de la vitesse de translation en avant

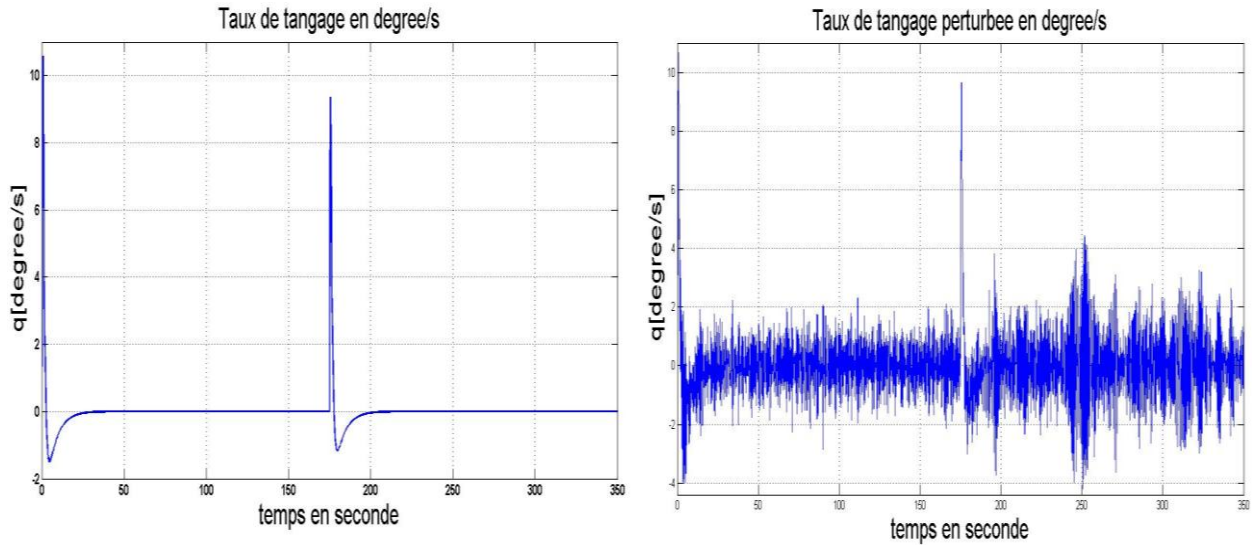


figure (4.15) : Taux de variation de tangage

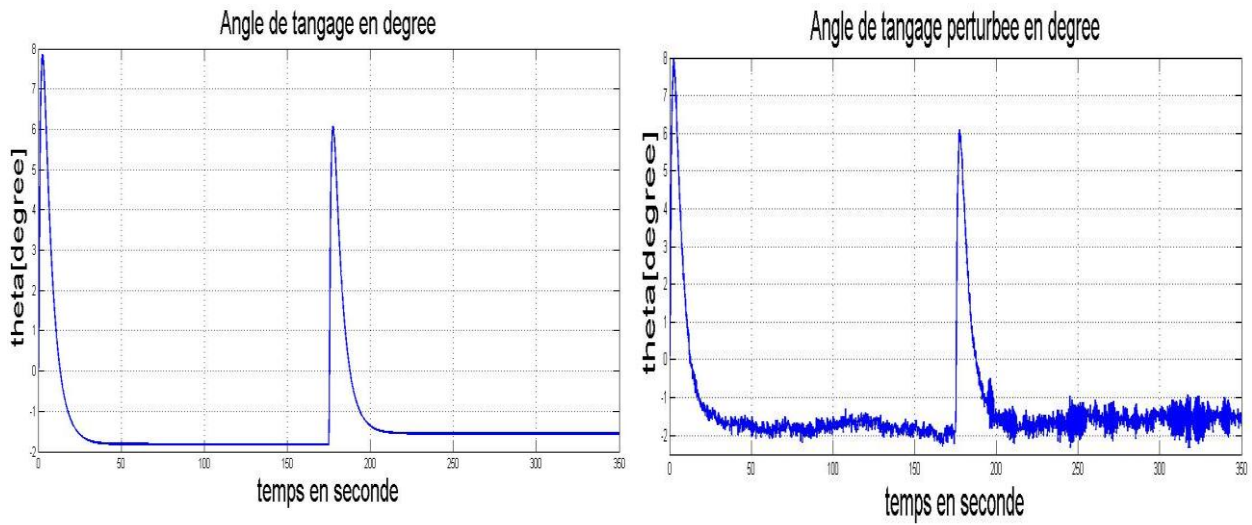


figure (4.16) : Angle de tangage en fonction du temps

• Résultats avec LMI :

Cas déterministe

Cas perturbée

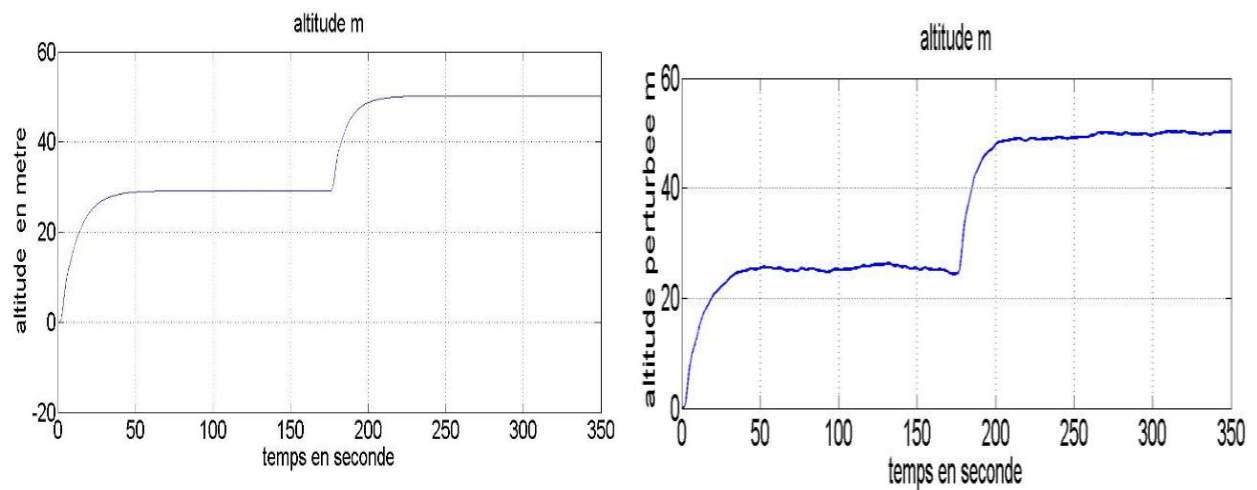


figure (4.17) : Altitude en fonction du temps

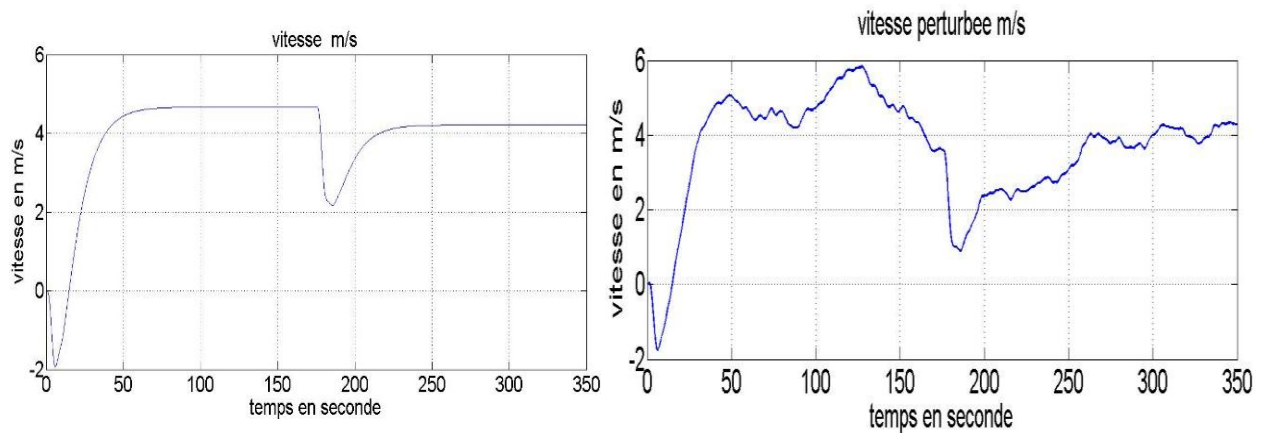


figure (4.18) : la variation de la vitesse de translation en avant

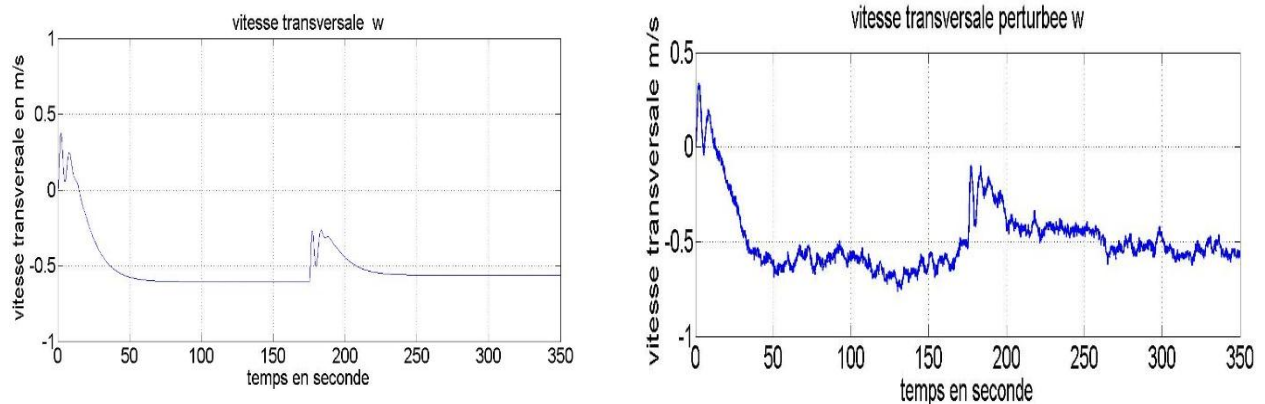


figure (4.19) : la variation de la vitesse de translation suivant l'axe Oz

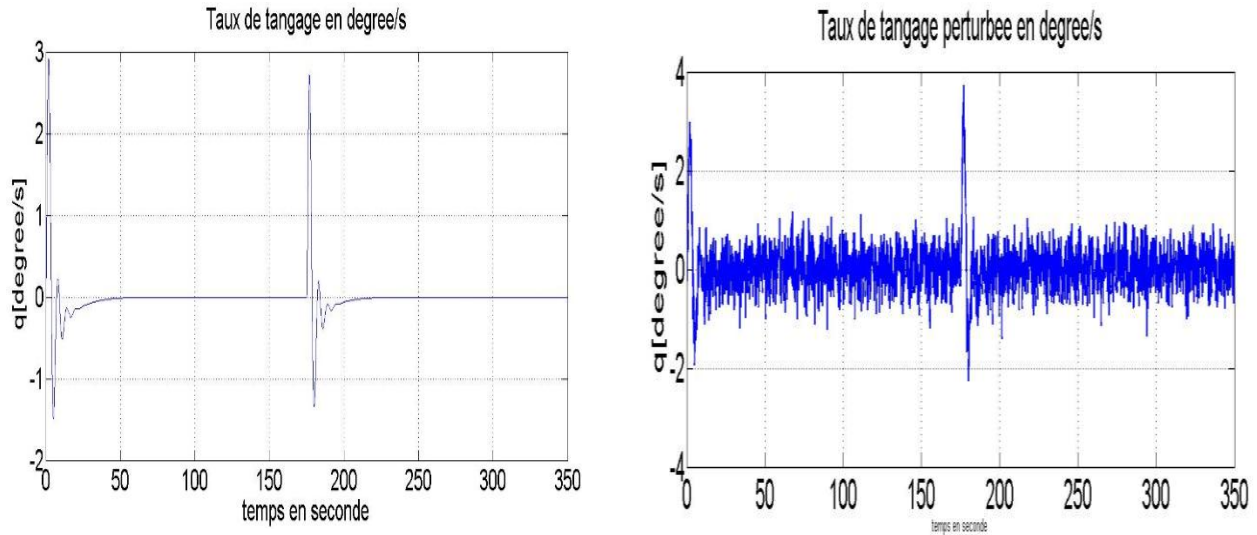


figure (4.20) : Taux de variation de tangage

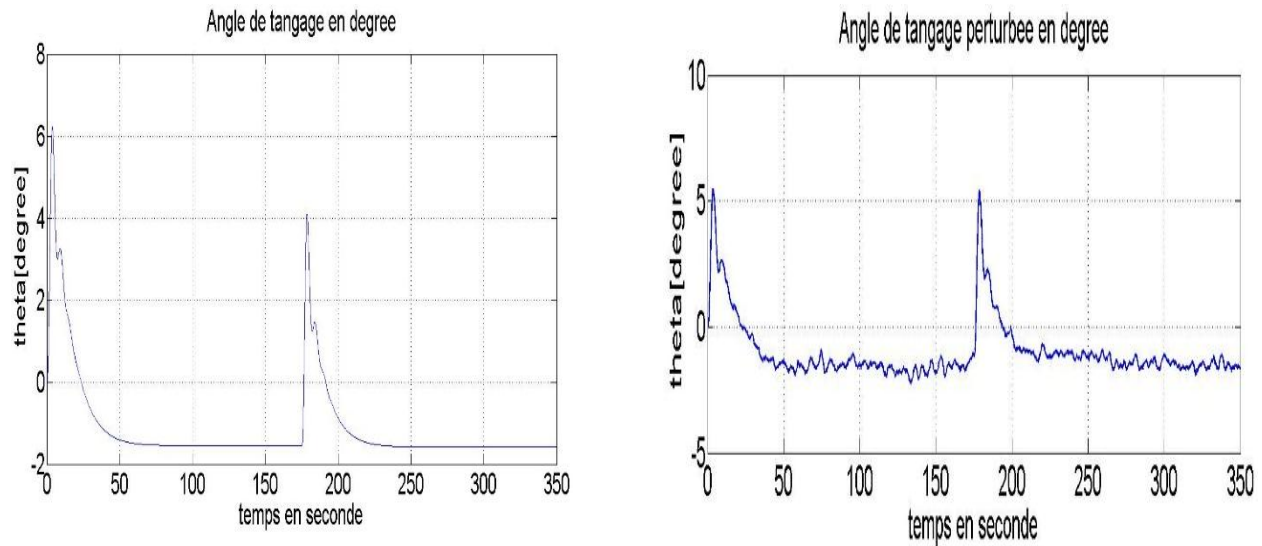


figure (4.21) : Angle de tangage en fonction du temps

**Interprétations :**

On a observé que pendant la poursuite de l'altitude de 25[m] vers 50[m] ; la vitesse du drone diminue. Ce fait est dû à la contribution de la commande en altitude, car l'augmentation de  $\theta$  (angle de tangage) génère une force contraignante à la vitesse de translation et cela dû aux frottements générés par l'air sur l'extrados du drone.

L'erreur de poursuite de la vitesse de translation selon l'axe Ox est due au phénomène de

la vitesse total du drone à ce que : 
$$V = \sqrt{u^2 + w^2 + v^2}$$

3<sup>ème</sup> Cas :

Pour le mouvement longitudinal les signaux de référence sont la vitesse du drone  $V=2.5$  [m/s] pendant 175 secondes, après on augmente la vitesse à  $V=5$  [m/s], pour vérifier les performances de poursuite de régulateurs, les résultats de simulations sont faites avec et sans perturbation atmosphériques.

- Résultats avec LQR :

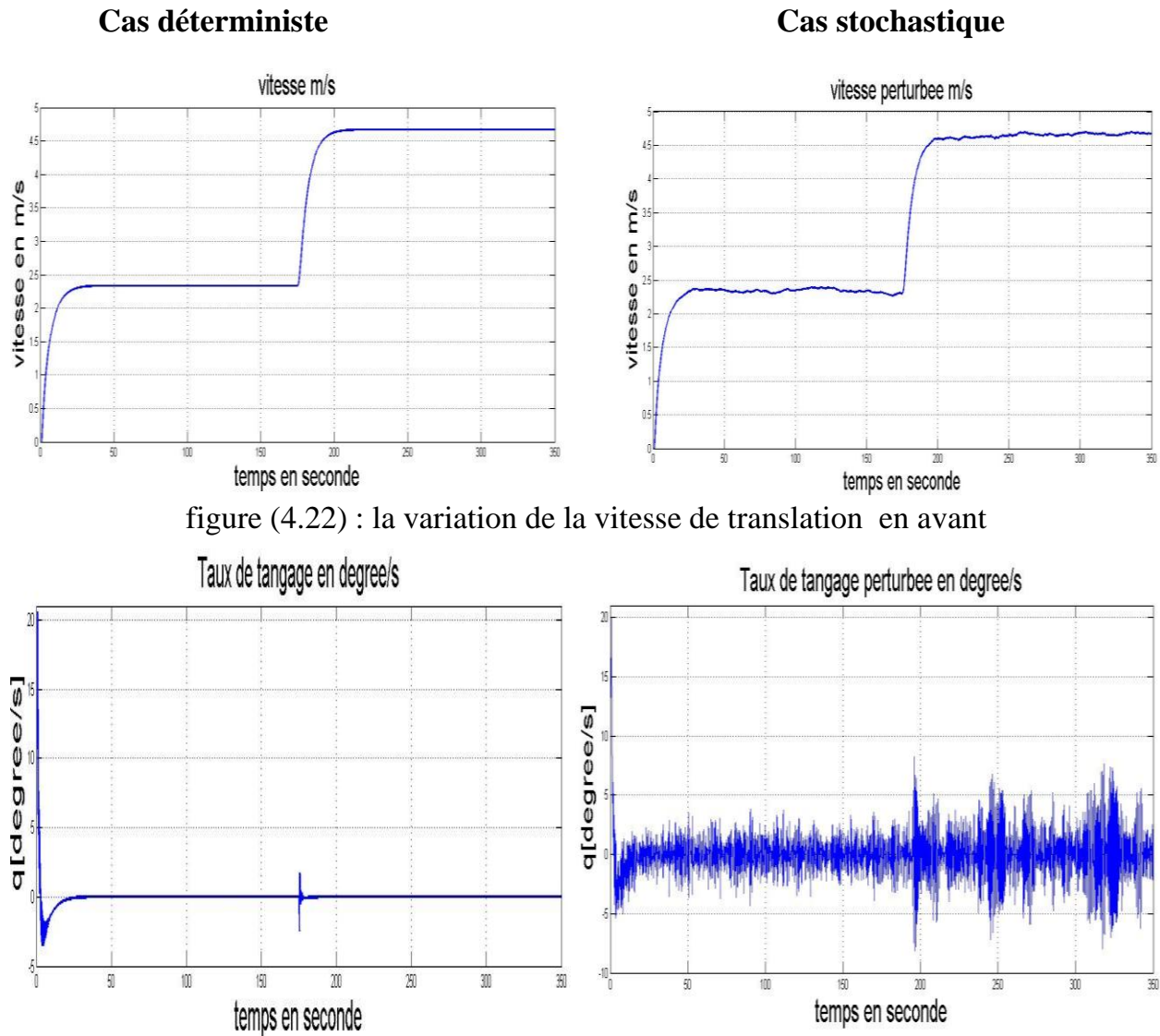


figure (4.22) : la variation de la vitesse de translation en avant

figure (4.23) : Taux de variation de tangage

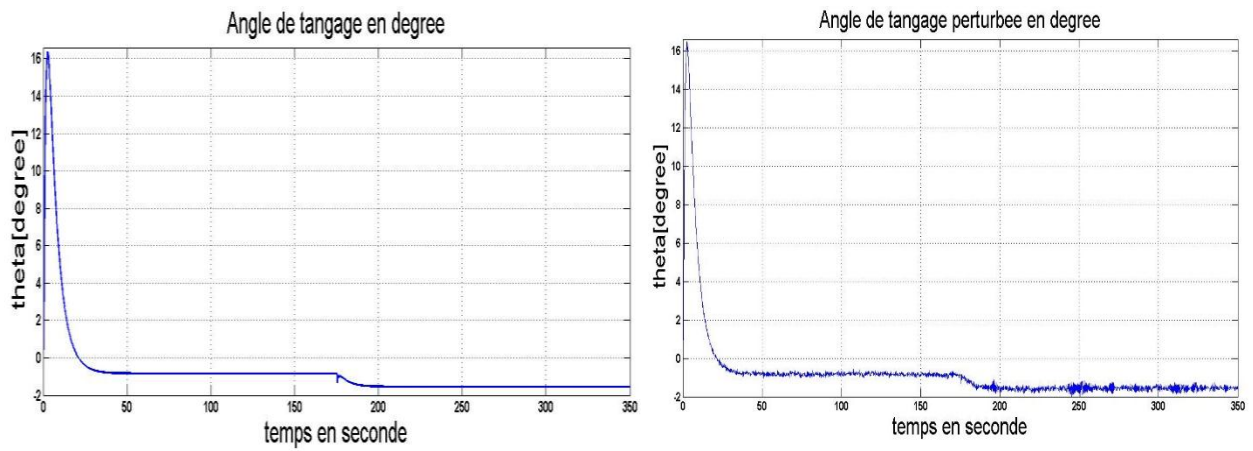
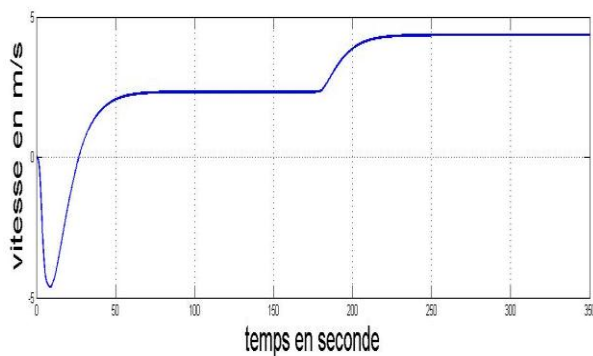


figure (4.24) : Angle de tangage en fonction du temps

• Résultats avec LMI :

Cas déterministe



Cas stochastique

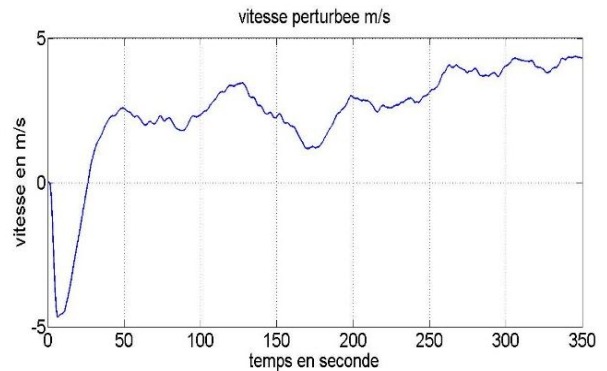
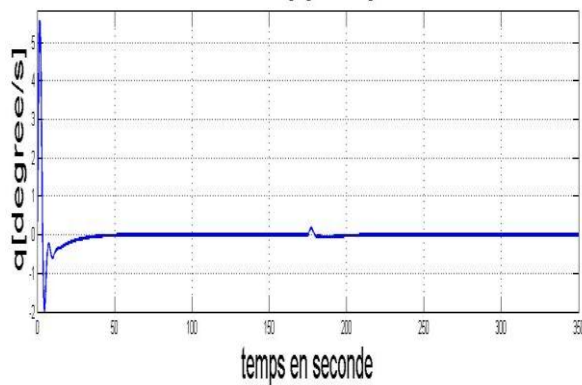


figure (4.25) : la variation de la vitesse de translation en avant

Taux de tangage en degre/s



Taux de tangage perturbée en degre/s

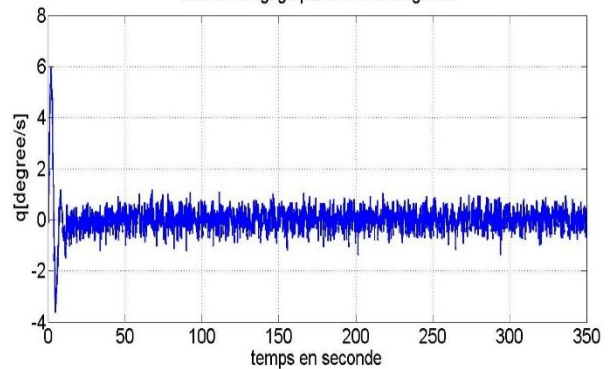


figure (4.26) : Taux de variation de tangage

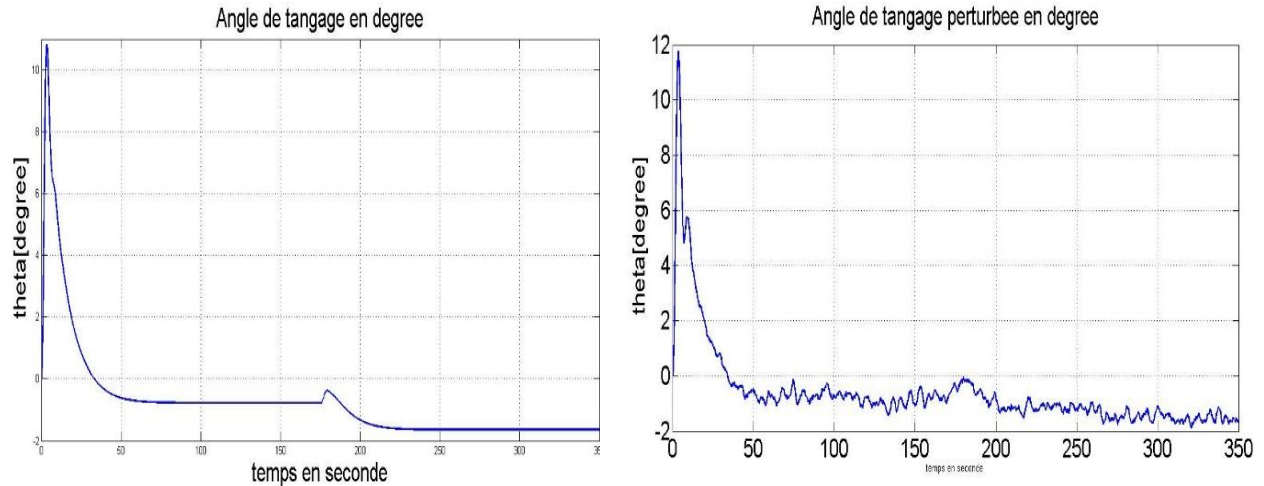


figure (4.27) : Angle de tangage en fonction du temps

### Conclusion :

L'efficacité des correcteurs sur les modèles nominaux et perturbée ont été prouvée lors des résultats quand a obtenus ci-dessus, on a constaté que les modèle en boucle fermé sont toujours stables, ceci dus à la robustesse des contrôleurs synthétisé.

L'utilisation de contrôleur linéaire quadratique est semblé être moins facile par apport aux autre contrôleurs, hors que le problème est sur le choix des matrices de pondérations Q et R. Alors que l'utilisation des LMIs nous a permet de trouver les gains de retour d'états mieux performant à celle de LQR et cela encore nous permet d'éviter le problème de calcule des matrices de pondérations, ceci après avoir respecté certains conditions des LMIs.

### Conclusion général

La commande des systèmes non-linéaire par la méthode traditionnelle ou bien par la commande linéaire nécessite beaucoup d'effort. L'objectif de ce mémoire est l'application de certaines méthodes basée sur la commande optimale et la synthèse d'un retour d'état en utilisant les LMI.

Avant de synthèse du régulateur par ces deux méthodes, la méthode non-linéaire a été linéarisé autour de plusieurs points de fonctionnement .cela été fait afin de construire le descripteur flou dont les paramètres prémisses sont ces même points de fonctionnement.

Ce descripteur a été construit dans le but d'approximer la dynamique longitudinale du drone. Après la construction des règles flou nous avons construit un retour d'état pour chaque modèle (pour chaque règle), à la fin nous avons utilisé la compensation parallèle distribuée (parallèle distributed compensation) dans le but d'avoir une seule commande.

Les résultats présentés dans ce mémoire montrent que l'application du régulateur linéaire quadratique peut fournir un contrôle satisfaisant en termes de poursuite de trajectoire. Si tous les paramètres sont correctement définis et le choix des matrices de pondérations établit correctement, le contrôleur peut être implémenté sur un système embarqué tout en obtenant des résultats satisfaisants dans la plupart des situations de poursuite des trajectoires désirées.

Comme perspective, il sera très intéressant d'appliquer la même procédure à la dynamique latérale, dans le but de contrôler les deux dynamiques en mêmes temps

### Conclusion général

La commande des systèmes non-linéaire par la méthode traditionnelle ou bien par la commande linéaire nécessite beaucoup d'effort. L'objectif de ce mémoire est l'application de certaines méthodes basée sur la commande optimale et la synthèse d'un retour d'état en utilisant les LMI.

Avant de synthèse du régulateur par ces deux méthodes, la méthode non-linéaire a été linéarisé autour de plusieurs points de fonctionnement .cela été fait afin de construire le descripteur flou dont les paramètres prémisses sont ces même points de fonctionnement.

Ce descripteur a été construit dans le but d'approximer la dynamique longitudinale du drone. Après la construction des règles flou nous avons construit un retour d'état pour chaque modèle (pour chaque règle), à la fin nous avons utilisé la compensation parallèle distribuée (parallèle distributed compensation) dans le but d'avoir une seule commande.

Les résultats présentés dans ce mémoire montrent que l'application du régulateur linéaire quadratique peut fournir un contrôle satisfaisant en termes de poursuite de trajectoire. Si tous les paramètres sont correctement définis et le choix des matrices de pondérations établit correctement, le contrôleur peut être implémenté sur un système embarqué tout en obtenant des résultats satisfaisants dans la plupart des situations de poursuite des trajectoires désirées.

Comme perspective, il sera très intéressant à la dynamique latérale, dans le but de contrôler les deux dynamiques en mêmes temps

## REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

---

---

- [1] Etkin, B., & Reid, L. D. (1996). *Dynamics of flight: stability and control* (3<sup>rd</sup> ed.). New York, N.Y.: J. Wiley and Sons.
- [2] Nelson, R. C. (1998). *Flight stability and automatic control* (2nd ed.), Boston, Mass.: McGraw Hill.
- [3] Prouty, R. W. (2002). *Helicopter performance, stability, and control*. Malabar, Flor: R. E. Krieger.
- [4] McLean, D. (1990). *Automatic Flight Control Systems*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- [5] Roskam Jan Lan C.E Airplane Aerodynamics and Performance, DAR Corporation, 1997.
- [6] Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls Part II Roskam Jan (DARcorporation) 1998.
- [7] Atmospheric Turbulence Simulation Techniques with Application to Flight Analysis, Show-Tien Wang and Walter Frost, CONTRACT NASS-32692, SEPTEMBER 1980.
- [8] Rauw M. The Flight Dynamics and Control Toolbox / M. Rauw. Math Works Company, 2000.
- [9] : **Hansruedi Buhler** : Réglage par logique floue (première édition), presses polytechniques et universitaires romandes, 1994.
- [10] : **Pierre Borne** : Introduction à la commande floue, éditions TECHNIP (Paris),1998.
- [11] C. C. Lee, "Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller. Part1", *IEEE Transactions on systems Man and Cybernetics*, Vol. 20, 1990, pp. 404-418.
- [12]TAKAGI, T. et SUGENO, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on System Man and Cybernetics*,
- [13] Draguna Vrabie, Vassilis L. Syrmos,Optimal control, John Wiley & Sons.
- [14] A. P. Sage and C. C. White. Optimum Systems Control. Prentice Hall, 1977.

## REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

---

---

- [15] L. Pontriaguine, V. Boltianski, G. Gamkrelidze, and E. Michtchenko, *Théorie Mathématique des Processus Optimaux*, Moscou : Mir, 1974.
- [16] Joao P. Hespanha, *Linear system Theory*.2009
- [17] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory”, Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [18]: H.O.Wang, K.Tanaka et M.F.Griffin « An Approche to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues » IEEE Trans. Fuzzy systems, Vol. 4, No. 1, pp. 14-23, 1996.
- [19]: A. Jadbabaie, A. Titli et M.Jamshidi, « A Separation Property of Observer/Controller for Continuous-Time Fuzzy Systems, » Prac. Le 95eme Allerton Natl. Conf. Allerton House, Septembre 1997.
- [20] Chow E. Y., Willsky A. S. Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems. IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 29, n°7, pp. 603-614, July 1984.
- [21] Chow E. Y. Failure detection system design methodology. Thesis, Lab. Information and Decision system, M.I.T, Cambridge, 1980.
- [22] Clark R.N., Instrument fault detection. IEEE Trans., Aerospace and Electronic System, 1975.
- [23] D. McLean, S. Aslam-Mir, H. Benkhedda. Fault Detection and Control Reconfiguration in Flight Control. Departement of Aeronautics and Astronautics, University of Southampton.
- [24] Frank P.M. The Application of Fuzzy logic to fault diagnosis and supervision. LFA, 1998.
- [25] Gertler J. Survey of model based-based failure detection and isolation in complex plants. IEEE.Control System Magazine, 1988.

## REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

---

---

[26] Isermann R. Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods – Advanced methods and applications. Proc. Of the IMEKO word congress, New Measurements Challenges and Visions, Tampere, Finland, 1997.

[27] A.Jadbabaie, A Titli, and M. Jamshidi, “Fuzzy Observer Based Control of Nonlinear systems” To be Presented at IEEE CDC’97, San Diego, CA. December 1997.

## **RESUME**

Dans ce projet, on a essayé à stabiliser l'altitude et la vitesse de drone avec deux étapes :

La première consiste à approximer le modèle non linéaire de drone par un descripteur flou de type TSK (approche multi-modèle), et la deuxième consiste à appliquer à ce système linéaire deux lois de commande, une par LQR, et l'autre par approche LMI.

### **Mot clés**

LQR (commande linéaire quadratique), LMI (linear matrix inequality), dynamique de drone, logique floue