

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Maameri De Tizi-ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

Filière : Mathématiques
Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

LE CONTRÔLE OPTIMAL, ÉTAT DE L'ART MODÈLES, ALGORITHMES RÉSOLUTIONS ET APPLICATIONS

Présenté par :

Aourane Lydia

Arbaoui Sabrina

Devant le jury :

Dr. AICHE FARID

UMMTO Président du jury

Dr. FAHEM KARIMA

UMMTO Examinatrice

Dr. CHEBBAH MOUHAMMED UMMTO Encadreur

Année Universitaire : 2022/2023

Remerciement

Avant tout, nous remercions le Dieu de nous avoir donner l'aide et le courage afin de réaliser ce travail.

On tient à présenter nos sincères remerciements à notre enseignant et encadreur **Mr CHEB-BAH MOHAMMED**, qui nous a vraiment aidé et nous a bien orienté afin de diriger notre travail.

Nos remerciements s'adressent aussi aux membres de jury pour avoir accepter d'examiner notre travail.

Nous remercions tout ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Merci.

Dédicaces

Je remercie dieu le tout puissant, de m'avoir donné la force et la patience afin de réaliser mon travail.

Je dédie ce travail :

À ma chère mère pour ses sacrifices, ses aides, son encouragement elle est toujours à côté de moi qu'Allah la protège.

À mon chère père pour son encouragement et ses sacrifices que je pourrais arriver où je suis au jour d'hui.

À mes soeurs SABRINA, SARA et MELISSA pour leurs soutiens et leurs encouragements.

je vous aime

À celle avec qui j'ai partagée ce travail ma binôme SABRINA.

À mes amis et tous ceux qui sont chers et proches de mon coeur et à tout ceux qui m'aiment.

À tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour réaliser ce modeste travail.

LYDIA

Dédicaces

J'ai le grand plaisir de dédié ce modeste travail :

À ma chère mère, qui me donne toujours l'espoir de vivre et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.

À mon chère père, pour ses encouragement, son soutien, surtout son amour et son sacrifice afin que rien n'entrave le déroulement de mes études.

À mon chère frère AHMED.

À mes chers cousins, LYNDA, IMANE, AMINE, MOHAMED .

En fin, je remercie ma binôme LYDIA qui a contribué à la réalisation de ce modeste travail.

SABRINA

Table des matières

Table des matières	4
Tables des figures	6
Introduction générale	7
1 Le contrôle optimal et état de l'art	9
1.1 Introduction	9
1.2 Présentation de la théorie du contrôle	9
1.2.1 But de la commande	9
1.2.2 Classes des commandes	9
1.2.3 Critères de qualité	9
1.3 Position du problème en contrôle optimal	10
1.3.1 Temps optimal	10
1.3.2 Coût optimal	11
1.3.3 Types de problèmes en contrôle optimal	11
1.4 La Théorie et Théorèmes du Contrôle optimal	12
1.5 Contrôlabilité	12
1.5.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires	13
1.5.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes	14
1.5.3 Contrôlabilité des systèmes non-linéaires	15
1.6 Principe du Maximum de Pontryaguin	15
1.7 Les Méthodes pertinentes de Résolution en Contrôle optimal	18
1.7.1 Méthodes indirectes	19
1.7.2 Méthodes directes	19
1.8 Conclusion	19
2 Quelques modèles du problème du contrôle optimal dans la réalité : Applications et résolutions	20
2.1 Introduction	20
2.2 Position du problème	20
2.3 Le cas discret	22
2.3.1 Position du problème	22
2.3.2 Notion de commandabilité	24
2.3.3 Calcul de l'accroissement de la fonctionnelle	25
2.3.4 Critère d'optimalité	26
2.3.5 Critère de suboptimalité	26
2.3.6 Méthode de résolution	26
2.4 Conclusion	30
3 Résolution d'un problème du contrôle optimal en min-max dans le cas continu	31
3.1 Introduction	31
3.2 Position Du Problème	31
3.3 Support et support contrôle	33
3.4 Accroissement de la fonctionnelle	34
3.5 Méthode de résolution	36
3.5.1 Changement de commande	36
3.5.2 Changement du support	38
3.5.3 Procédure finale	42

3.6	Exemple d'application	44
3.7	Conclusion	49
4	Implémentations et tests informatiques	50
4.1	Introduction	50
4.2	Les logiciels informatiques	50
4.3	Définition de MATLAB	50
4.3.1	Description de la fenêtre MATLAB	50
4.4	Le logiciel VISUAL XPRESS	51
4.5	LINGO	52
4.6	Exemples d'applications	52
4.6.1	Exemple 1	52
4.6.2	Exemple 2	55
4.7	Conclusion	57
	Conclusion générale	58
	Références	59

Table des figures

1	Problème de Contrôlabilité	12
2	Ensemble accessible	13
3	Trajectoire et commande optimales par la méthode indirecte.	21
4	Trajectoire et commande optimales par la méthode directe.	22
5	Trajectoires optimales.	22
6	La fenêtre principale du logiciel MATLAB	51
7	L'icone Visual Xpress	52
8	V.1-LINGO 17.0	52
9	Résultat de MATLAB	55
10	Résultat de MATLAB	57

Introduction générale

Dans les industries modernes où la notion de rendement est prépondérante, le rôle de l'automatisme (ou l'ingénieur) est de concevoir, de réaliser et d'optimiser, tout au moins d'améliorer les méthodes existantes. Les domaines d'application sont multiples : aérospatial, automobile, robotique, internet et les technologies de l'information et de la communication(TIC)...etc.[9]

Du point de vue mathématiques, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques,...etc.

Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres habituellement soumis à des contraintes.

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard...etc. Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie...etc. L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).[9]

Les points forts de la théorie du contrôle ont été la découverte de la méthode de programmation dynamique, l'introduction de l'analyse fonctionnelle dans la théorie des systèmes optimaux. Plus tard sont apparues les fondations de la théorie du contrôle stochastique et du filtrage de systèmes dynamiques, la théorie des jeux, le contrôle d'équations aux dérivées partielles.

Le problème du contrôle optimal se décompose en général en deux parties : Pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut savoir d'abord si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité. Il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, apparue dans les années soixante due à Kalman[19].

Une fois le problème de contrôlabilité est résolu, il faut chercher parmi toutes les trajectoires possibles celle qui donne le coût maximum ou minimum ce qui traduit la deuxième partie.

Notre mémoire comporte quatre chapitres. Voici un bref résumé sur chacun d'eux : Dans le premier chapitre, nous allons présenter la théorie du contrôle optimal de façon générale, puis on va citer les différentes notions du contrôle, par exemples : les types de commandes, le critère de qualité, la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires et le point clé de cette théorie qui est le principe du maximum de Pontryagin qui donne une condition nécessaire d'optimalité permettant de calculer les trajectoires optimales. Les méthodes de résolution directes et indirectes sont aussi évoquées.

Le deuxième chapitre, sera consacré aux quelques exemples de problèmes de contrôle optimal, tels que le problème en temps optimal et un problème en contrôle optimal discret.

Le troisième chapitre, s'intéressera à l'étude d'un problème en min-max dans le cas continu. Ce chapitre se termine par une étude de cas.

Le dernier chapitre, consacré à l'informatique et les simulations sur machines. Des exemples

avec la méthode adaptée traités avec le logiciel MATLAB.

Enfin, notre mémoire se termine par une conclusion générale qui résume notre travail.

1 Le contrôle optimal et état de l'art

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons faire une présentation sur la théorie du contrôle et nous étudions les notions de base du contrôle optimal comme : (but de la commande, classes des commandes, position de problème . . . etc.). Et on va distinguer les différents types de problème en contrôle optimal.

1.2 Présentation de la théorie du contrôle

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques dépendant d'une variable t qui représente le temps sur lequel on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but étant alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal). Historiquement, la théorie du contrôle optimal est très liée au calcul des variations, elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol.

1.2.1 But de la commande

Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener l'objet de la position initiale $x_0 = x(t_0)$, ($x_0 \in M_0$) à une autre position $x_1 = x(t^*)$, ($x_1 \in M_1$) où M_0 ensemble de départ, et M_1 ensemble d'arrivée.

1.2.2 Classes des commandes

On définit l'ensemble $U(u_j(t))$ comme l'ensemble des contrôles admissibles qui peut être non borné, borné ou du type Bang-Bang.

Commande bornée

Dans les problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les $u_j(t)$ par des constantes. Dans la suite, nous considérons ce type de problème avec $a_j \leq u_j \leq b_j$. Notons que l'on peut remplacer u_j par v_j en posant : $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a : $-1 \leq v_j \leq 1$. Donc lorsque U est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1 .

Commande Bang-Bang

Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle bang-bang, si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1..m$; on a :

$$|u_j(t)| = 1$$

1.2.3 Critères de qualité

L'objectif, lors de la formulation d'un problème de contrôle, est de fournir la motivation physique pour la sélection d'une mesure de qualité pour le système. Le problème revient à définir

une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système atteint un état désirable. Donc, choisir une mesure de qualité, est une traduction en termes mathématiques des exigences physiques du système. Le critère de qualité, appelé aussi coût ou fonction objectif, est généralement décrit par la formule :

$$J(x, u) = g(t^*, x^*) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x, u) dt.$$

Cette fonctionnelle comporte deux parties, $g(t^*, x^*)$ est le coût terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final t^* il a son importance lorsque t^* est libre, si non il est constant. Le second terme intervenant dans la fonction objectif $\int_{t_0}^{t^*} f_0(t; x; u)dt$, dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution définie par les variables d'état. Cette trajectoire dépend aussi du temps t mais sur tout des variables du contrôle u . C'est une fonction d'efficacité de chaque commande sur l'intervalle de temps $T = [t_0, t^*]$. Après modélisation, on obtient un système comportant beaucoup de variables et de paramètres. Les variables nommées variables d'état seront notées $x_i, i = 1, \dots, n$. Le système évolue dans le temps, donc les x_i sont des fonctions de $t : x_i(t), i = 1, \dots, n$, où t désigne le temps défini dans un intervalle T . Les n variables d'état vont être gouvernées par n équations différentielles du premier ordre ; elles sont sous la forme : $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x, u)$, tels que : $t \in [t_0, t^*]$. Les composantes du contrôle seront notées $u_j(t), j = 1 \dots m$, elles doivent être intégrables par rapport à t .

1.3 Position du problème en contrôle optimal

La formule générale d'un problème en contrôle optimal se représente comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} J(x, u) = g(t^*, x(t^*)) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min_u & (1), \\ \dot{x}_u(t) = f(t, x(t), u(t)) & (2), \\ x(t_0) = x_0 \in M_0 & (3), \\ x(t^*) = x_1 \in M_1 & (4), \\ u \in U, t \in I = [t_0, t^*] & (5), \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Où U : l'ensemble des contrôles admissibles sur $[t_0, t^*]$.

M_0 et M_1 sont des sous ensembles de \mathbb{R}^n tels que :

M_0 : est l'ensemble de départ,

M_1 : est l'ensemble d'arrivée,

I : est un intervalle dans \mathbb{R} ,

$x(t_0)$ est la position initiale du système et $x(t^*)$ sa position terminale.

En pratique, (la position du système peut représenter la vitesse, la position, la température, ...etc.). Le problème du contrôle optimal est de déterminer les trajectoires $x(t)$ solution de $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, qui minimise le coût $J(x, u)$ en satisfaisant les contraintes.

1.3.1 Temps optimal

On parle d'un problème en temps optimal lorsque $f_0(t, x, u) = 1$, $g(t^*, x^*) = 0$, et le temps final t^* est libre dans l'expression de

$$\min_u \int_{t_0}^{t^*} 1 dt.$$

1.3.2 Coût optimal

On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final t^* est fixé dans l'expression

$$\min_u g(t^*, x^*) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x, u) dt$$

Remarque 1.3.1. *Il existe des problèmes qui combinent les deux critères physiques de qualités, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût optimal.*

1.3.3 Types de problèmes en contrôle optimal

On distingue trois problèmes en contrôle optimal sont comme suit :

- Problème de Lagrange
- Problème de Mayer
- Problème de Bolza (Mayer-Lagrange)

La formulation des problèmes

- Formulation de Lagrange

Un problème de contrôle optimal est dit sous forme de Lagrange s'il s'écrit de la manière suivante :

$$\text{Max ou Min } J(x, u) = \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x(t), u(t)) dt.$$

- Formulation de Mayer

Un problème de contrôle optimal de type Mayer est un problème s'écrivant sous la forme :

$$\text{Max ou Min } J(x, u) = g(t^*, x(t^*)) \quad (M)$$

Dans cette formulation le critère J n'est pas de type intégrale, il ne porte que sur l'état final $x(t^*)$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, et $f_0 = 0$.

- Formulation de Bolza (Mayer-Lagrange)

Les problèmes de commande optimale de type :

$$\text{Max ou Min } J(x, u) = g(t^*, x(t^*)) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x(t), u(t)) dt.$$

Sont appelés problèmes de Bolza. Dans la formulation de Bolza, le critère à optimiser J comporte deux parties : la partie concernant l'état final et la partie f_0 donnée sous forme intégrale comme dans la formulation de Lagrange. La formulation de Bolza est la plus générale puisqu'en faisant $g = 0$ dans Bolza on retrouve le problème de Lagrange, et en faisant $f_0 = 0$ dans Bolza on retrouve (M).

1.4 La Théorie et Théorèmes du Contrôle optimal

La théorie mathématique du contrôle optimal a pris naissance dans les années quarante dans la qualité d'une partie spéciale des équations différentielles, c'est le prolongement du Calcul variationnel [16]. En mathématique, un système de contrôle optimal est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser on peut avoir recours à des équations différentielles. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'intersection de nombreux domaines de mathématiques. Le contrôle optimal linéaire-quadratique est une branche du contrôle optimal dans le cas où le système est linéaire et le coût est quadratique. L'initiateur de cette théorie est Kalman depuis 1960.

1.5 Contrôlabilité

Le système $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $x(0) = x_0$ est dit contrôlable si pour tout point $x_0 \in M_0$ et $x_1 \in M_1$, il existe un contrôle $u(\cdot)$ tel que la trajectoire associée à U relie x_0 à x_1 en un temps fini. La notion de contrôlabilité a été introduite en 1960 par Kalman[16] pour des systèmes linéaires de la forme $\dot{x} = Ax + Bu$. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus compliqué. Il constitue un domaine de recherche actif.

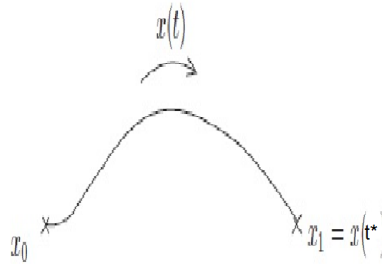


FIGURE 1 – Problème de Contrôlabilité
[9]

Définition 1.5.1. *Considérons le système contrôlé (1.2) :*

$$\forall t \in I \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t^ > 0$ est défini par :*

$$Acc(x_0, t^*) = \{x_u(t^*), u \in U\}.$$

Où $x_u(\cdot)$ est la solution du système(1.2) associée au contrôle u . Autrement dit $Acc(x_0, t^)$ est l'ensemble des extrémités des solutions (1.2) au temps t^* , lorsqu'on fait varier le contrôle u (voir figure2).*

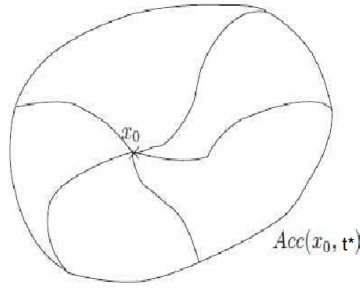


FIGURE 2 – Ensemble accessible
[9]

1.5.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Considérons le système de contrôle linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), x(0) = x_0, \quad \forall t \in I.$$

Où I est un intervalle de \mathbb{R}

B, A , et r sont trois applications localement intégrables sur I à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R}), M_{n,n}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^n .

$M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles de dimension n , et $M_{n,n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de n lignes et de n colonnes.

L'ensemble des contrôles u considéré est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeurs dans un sous ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$.

Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent que, pour tout contrôle u , le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), x(0) = x_0$, admet une unique solution $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, absolument continue.

Soit $F(\cdot) : I \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, définie par :

$$\begin{cases} \dot{F} = A(t)F(t), \\ F(0) = Id. \end{cases}$$

Alors, la solution $x(\cdot)$ du système associée au contrôle u est donnée par :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_{t_0}^{t^*} F(t)F(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds.$$

Pour tout $t \in I$.

Si $r = 0$ et $x_0 = 0$, la solution du système s'écrit :

$$x(t) = F(t) \int_{t_0}^{t^*} F(s)^{-1}B(s)u(s)ds$$

elle est linéaire en u .

Le théorème qui suit nous donne une condition générale de la contrôlabilité des systèmes linéaires.

Théorème 1.5.1. [16] *Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps t^* si et seulement si la matrice*

$$C(t^*) = \int_{t_0}^{t^*} F(t)^{-1} B(t) B'(t) F(t)^{-1} dt,$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

1.5.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Le système (1.2) est dit autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t . Dans ce cas la matrice $F(t) = e^{At}$, et la solution du système associée au contrôle u s'écrit :

$$\forall t \in I \quad x(t) = e^{At} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t^*} e^{-As} (B(s)u(s) + r(s)) dt \right)$$

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas sans contraintes sur le contrôle.

Théorème 1.5.2. [19] *On suppose que $U = \mathbb{R}^m$. Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ est contrôlable en temps final t^* si et seulement si la matrice*

$$C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

est de rang n .

Remarque 1.5.1. *La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition rang $C = n$, est appelée condition de Kalman.*

Exemple 1.5.1. *le système suivant :*

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t) + r$$

, avec $r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. est contrôlable car la matrice de Kalman $C = (B, AB, A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
est de rang $3 = n$.

Remarque 1.5.2. *La condition de Kalman ne dépend ni de t^* ni de x_0 . autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t^* depuis x_0 ; alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

La stabilité [9]

Les propriétés de contrôlabilité globales sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice A . Par exemple il est clair que si :

1. la condition de Kalman est remplie,

2. $r = 0$

3. toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle strictement négative (i.e. la matrice A est stable). Alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini (éventuellement grand).

1.5.3 Contrôlabilité des systèmes non-linéaires

La contrôlabilité est un concept clé pour la compréhension des propriétés structurelles et qualitatives, comme la stabilisation. L'extension de la contrôlabilité au cas non-linéaire de dimension finie et infinie a suscité depuis plusieurs années une littérature considérable, qui n'a en rien épuisé ce sujet riche et varié.

Les auteurs dans leurs quasi-totalité, ont considéré des généralisations naturelles de

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Le résultat suivant donne une condition sur la contrôlabilité locale de systèmes non linéaires.

Proposition 1.5.1. [9] *Considérons le système $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $x(0) = x_0$ avec $f(x_0, u^0) = 0$.*

On note $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u^0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u^0)$, si :

$$\text{rang}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

Alors le système est localement contrôlable en x_0 .

Remarque 1.5.3. *En général, le problème de contrôlabilité est difficile. Cependant, il existe des techniques qui permettent de déduire la contrôlabilité locale dans le cas des systèmes linéarisés.*

1.6 Principe du Maximum de Pontryaguin

Parmi les méthodes utilisées pour résoudre les problèmes de contrôle optimal, le principe du maximum de pontryaguin (PMP) [18], qui a été formulé par le mathématicien russe Lev Semenovich Pontryaguin en 1956, qui a généralisé les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations.

Considérons le problème de contrôle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(t^*, u) = g(t^*, x(t^*)) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min_u \quad (1), \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2), \\ x(t_0) = x_0 \in M_0 \quad (3), \\ x(t^*) = x_1 \in M_1 \quad (4), \\ u \in U, t \in I = [t_0, t^*] \quad (5), \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Avant d'énoncer le principe du maximum, nous introduisons certaines définitions et propriétés essentielles.

Définition 1.6.1. *Le contrôle u est dit extrémal sur $[t_0, t^*]$ si la trajectoire du système (2) du problème de contrôle (1.3) associée à u vérifie*

$$x(t) \in \partial \text{Acc}(x_0, t^*), \quad t \in I = [t_0, t^*].$$

Définition 1.6.2. *Un contrôle $u_0(t)$, $t \in [t_0, t^*]$ est dit optimal si $u^0()$ est extrémal et $J(u^0(t)) < J(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [t_0, t^*]$.*

Théorème 1.6.1. [9] *Considérons le système*

$$\forall t \in I, \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0$$

Supposons que le domaine des contraintes noté Ω est compact. Soit $t^ > 0$. Le contrôle u est extrémal sur $I = [t_0, t^*]$ si et seulement si il existe une solution non triviale $p(t)$, $t \in I$, de l'équation $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ telle que*

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{u \in U} p(t)B(t)u. \quad (1.4)$$

pour presque tout $t \in [t_0, t^]$.*

Définition 1.6.3. *Le vecteur $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.*

Définition 1.6.4. *Dans ce cas, la fonction $\alpha(t) = p(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation.*

Définition 1.6.5. *Le temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [0, T]$ change de signe est appelé temps de commutation.*

Théorème 1.6.2. [9] *Ce théorème est l'énoncé général du principe du maximum de Pontryagin. Considérons le système de contrôle dans \mathbb{R}^n*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (1.5)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , les contrôles sont des applications mesurables bornées à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous ensembles de \mathbb{R}^n . Notons par U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps t . On définit le coût

$$J(t^*, u) = \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x(t), u(t)) dt + g(t^*, x(t^*))$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $x(\cdot)$ est la solution de (1.5) associée au contrôle u .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 en minimisant le coût J . Le temps final peut être fixé ou non. Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[t_0, t^*]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [t_0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, appelé vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$ tel que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial et tels que pour presque tout $t \in [t_0, t^*]$,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (1.6)$$

$$\dot{p} = \frac{-\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \quad (1.7)$$

où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[t_0, t^*]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, u). \quad (1.8)$$

Si de plus le temps final pour joindre M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final t^*

$$\max_{u \in U} H(t^*, x(t^*), p(t^*), p^0, u) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t^*, x(t^*)). \quad (1.9)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(t_0) = x_0 \in M_0$ et $x(t^*) = x_1 \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalités aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp (t^*)_{x(0)} M_0, \quad (1.10)$$

$$p(t^*) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(t^*, x(t^*)) \perp (t^*)_{x(t^*)} M_1. \quad (1.11)$$

Remarque 1.6.1. Si f et f_0 ne dépendent pas du temps t c'est à dire si le système considéré est autonome, alors l'Hamiltonien H ne dépend pas de t et on a

$$\forall t \in [t_0, t^*], \max_{u \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, u) = Cste.$$

Remarque 1.6.2. La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. la condition $p^0 \geq 0$ conduira au principe du minimum.

Plusieurs travaux ont été réalisés dans ce sens, le lecteur est orienté vers les articles ([13, 14, 15]).

Remarque 1.6.3. Lorsqu'ils n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximisation (1.8) devient $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

Définition 1.6.6. Les conditions (1.10) et (1.11) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

Exemple 1.6.1. [8] soit le problème de contrôle optimale suivant

$$\begin{cases} \max J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^2 u^2 dt \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

déterminer le contrôle optimal $u^*(t)$ qui transforme le système de l'état initiale $x(0) = 0$ vers la droite d'équation

$$x_1(t) + 5x_2(t) - 15 = 0$$

$x(2) \in M_1$ avec

$$M_1 = \{x(t) \in \mathbb{R}^2 | F(x(t)) = 0\} = \{x(t) \in \mathbb{R}^2 | x_1(t) + 5x_2(t) - 15 = 0\}$$

le Hamiltonien de système est

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2}u^2 + p_1(t)x_2(t) + p_2(-x_2(t) + u(t))$$

on aura les conditions d'optimalité suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \\ \dot{p}_1(t) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) + p_2(t) \end{cases}$$

et comme on a pas des contraintes sur le contrôle $u(t)$ alors

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = u + p_2$$

et on obtient

$$u(t) = -p_2(t)$$

$\begin{cases} x_1(0)=0 \\ x_2(0)=0 \end{cases}$ sont les conditions aux limites

au temps $t = 2$

$$x_1(2) + 5x_2(2) - 15 = 0 \text{ et } p(2) = \lambda \nabla F(x(2))$$

on aura

$$\begin{cases} p_1(2) = \lambda \\ p_2(2) = 5\lambda \end{cases}$$

la résolution de système d'équation de Hamilton-Pontryagin et les équations obtenues à partir des conditions aux limites nous donnent

$$\begin{cases} x_1(t) = 0.8983t + 0.2432e^t + 1.1414e^{-t} - 1.3846 \\ x_2(t) = 0.8983 + 0.2432e^t - 1.1414e^{-t} \\ p_1(t) = -0.8983 \\ p_2(t) = -0.8983 - 0.4863e^t \end{cases}$$

et $u(t) = \text{signe}(-p_2(t))$, donc $u^*(t) = -(-0.8983 - 0.4863e^t)$

$$u^*(t) = 0.8983 + 0.4863e^t$$

1.7 Les Méthodes pertinentes de Résolution en Contrôle optimal

Les problèmes de contrôle optimal, en général, n'ont pas toujours de solutions analytique. En conséquence, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour pouvoir les résoudre.

Il existe différentes méthodes pour résoudre les problèmes de commande optimale, chacune avec ses avantages et ses inconvénients. Le choix de la méthode dépend du problème considéré, à savoir les méthodes directes et les méthodes indirectes. En effet, ces méthodes transforment le problème de contrôle original en la résolution d'un système d'équations non linéaire ; On présente deux types de méthodes numériques pour résoudre le problème de contrôle optimal ; les méthodes directes et les méthodes indirectes.

1.7.1 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin[18] qui donne une condition nécessaire d'optimalité, il faut vérifier à posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée. Ces méthodes ont l'extrême précision numérique, mais elles sont très sensibles au choix de la condition initiale. Contrairement aux méthodes directes, les méthodes indirectes nécessitent une étude théorique préalable et l'étude des variables adjointes. Pour ces méthodes, la structure des commutations doit être connue à l'avance, elles sont efficaces en toute dimension. Il existe également des approches probabilistes, ces méthodes consistent à exprimer le problème de commande optimale dans des espaces de mesure, puis à rechercher la commande optimale en tant que mesure d'occupation, qui est approchée par un nombre fini de ses moments. Cette méthode utilise des outils de géométrie algébrique et elle permet de réduire le problème de contrôle optimal à un problème d'optimisation de dimension finie. Pour plus d'informations, les lecteurs sont invités à lire l'article récent d'Emmanuel Trélat, ([9] Contrôle optimal : théorie et applications).

1.7.2 Méthodes directes

Parmi les méthodes directes, on trouve la méthode de résolution par l'approche de la programmation linéaire, qui est la méthode adaptée appelée aussi méthode du support([16, 6, 1]) Elle permet d'avoir une solution approchée ou une solution exacte. Une autre méthode directe est la méthode de discrétisation du problème initial. Pour un problème de départ linéaire, on fait une discrétisation de la commande. De là, on obtient un problème de programmation linéaire facile à résoudre. L'inconvénient de cette dernière approche est l'obtention d'une solution approchée. La mise en oeuvre des méthodes directes est simple, car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable, on n'a pas à étudier les variables adjointes ou bien à connaître à l'avance la structure des commutations. Ces méthodes sont moins précises.

1.8 Conclusion

Dans cette partie de document, nous avons présenté la théorie du contrôle optimal en définissant les bases théoriques du contrôle optimal.

2 Quelques modèles du problème du contrôle optimal dans la réalité : Applications et résolutions

2.1 Introduction

Dans cette partie du document, nous allons voir l'application des notions qu'on avait déjà étudié dans le chapitre précédent sur trois exemples qui sont : un problème du temps minimal, un exemple sur le cas discret et un problème en contrôle optimal.

2.2 Position du problème

Considérons le problème du temps minimal [9]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), & x(0) = 0, \\ \dot{y}(t) = u(t), & y(0) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Le contrôle $u(t), t \in I = [0, T]$ vérifie $|u(t)| \leq 1$. Résoudre le problème de temps minimal pour atteindre le point final $(0, -1)$, en allant de l'origine.

Cherchons la solution théoriquement et avec les deux méthodes directe et indirecte.

L'Hamiltonien du système (2.1) est

$$H(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t), u) = p_x(t)y(t) + p_y(t)u + p^0.$$

où p_x et p_y sont les composantes du vecteur adjoint. Elles sont solutions du système

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = \frac{-\partial H}{\partial x} = 0, \\ \dot{p}_y(t) = \frac{-\partial H}{\partial y} = -p_x(t). \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} p_x(t) = Cste = \beta, \\ p_y(t) = -\beta t + \mu. \end{cases}$$

Reprenons l'expression de l'Hamiltonien :

$$H = p_x(t)y(t) + p_y(t)u + p^0.$$

alors quelque soit la valeur de p^0 ,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(p_y(t)u + p_x(t)y(t)),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u = \text{signe}(p_y(t)).$$

De là, le contrôle extrémal sera le suivant :

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } p_y(t) < 0, \\ +1 & \text{si } p_y(t) > 0, \end{cases} \quad t \in I$$

Nous avons mis en oeuvre une méthode indirecte, les résultats sont tracés dans la figure (3)

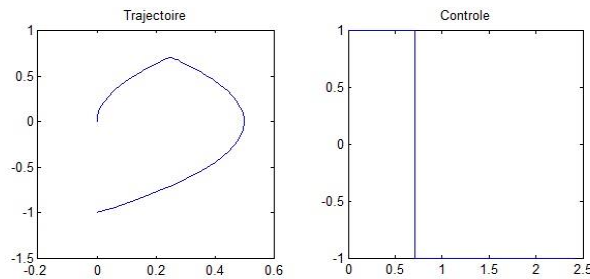


FIGURE 3 – Trajectoire et commande optimales par la méthode indirecte.

Dans le cas d'une méthode directe, on discrétise la commande $u(\cdot)$ et l'état $x(\cdot)$ en utilisant la subdivision :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$$

Le problème (2.1) devient le problème suivant :

$$T \rightarrow \min$$

Sous les contraintes :

$$x[i + 1] = x[i] + \frac{T}{N}y[i],$$

$$y[i + 1] = y[i] + \frac{T}{N}u[i]$$

Les résultats d'un tel problème sont tracés dans la figure (4).

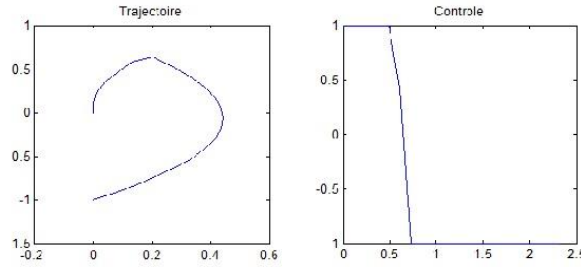


FIGURE 4 – Trajectoire et commande optimales par la méthode directe.

Les contrôles extrémaux ont en plus une commutation. Soit t_c , ce temps de commutation. La trajectoire obtenue pour $u(t) = 1$ sur $[0, t_c]$ et pour $u(t) = -1$ sur $[t_c, T]$ est :

— Si $t \in [0, t_c]$, on obtient $y(t) = t$ et $x(t) = \frac{1}{2}t^2$.

— Si $t \in [t_c, T]$, on obtient $y(t) = -t + 2t_c$ et $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t_c t - t_c^2$.

Les trajectoires obtenues en prenant $u = +1$ puis $u = -1$ sont illustrées dans la figure(5).

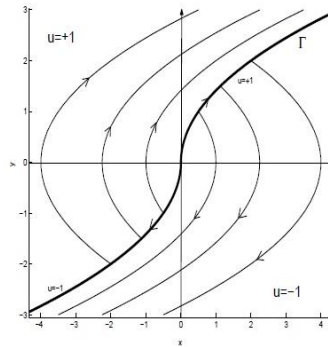


FIGURE 5 – Trajectoires optimales.

2.3 Le cas discret

Dans cette partie de ce deuxième chapitre, nous étudions une méthode de résolution d'un système dynamique linéaire pour le cas discret.

2.3.1 Position du problème

Considérons le système dynamique linéaire suivant :

$$J(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max_u, \quad (2.2)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.3)$$

$$Hx(t^*) = g, \quad (2.4)$$

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, \quad t \in T = [t_0, t^*]. \quad (2.5)$$

où :

$x(t)$ est un n -vecteur décrivant la trajectoire du système à l'instant t ,

$u(t)$ la commande d'entrée à l'instant t du système,

$$f_*(t) \leq u(t) \leq f^*(t), t \in [t_0, t^*],$$

$f_*(t)$ et $f^*(t)$ des fonctions définies sur $T = [t_0, t^*]$,

A une $n \times n$ matrice caractérisant l'état du système,

b un n -vecteur,

x_0 la position initiale du système à l'instant $t = t_0$,

le système est caractérisé par un signal de sortie pour $t = t^*$:

$$Hx(t^*) = g,$$

H est une $m \times n$ matrice avec $\text{rang}H = m \leq n$, g un m -vecteur,

$J(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max_u$, est un critère de qualité,

$I = 1 \dots m$: L'ensemble des indices des lignes,

$J = 1 \dots n$: L'ensemble des indices des colonnes.

Définition 2.3.1. Une commande u est dite impulsive sur l'intervalle $[t_0, t^*]$ si :

$$u(t) = u_i = \text{constante}, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], i = (0, \dots, N), \tau_0 = t_0, \tau_{N+1} = t^*, \tau_{i+1} - \tau_i = h > 0,$$

h est le pas de quantification.

En utilisant la formule de cauchy, la solution du système dynamique (2.3) s'écrit sous la forme :

$$x(t) = F(t)[x_0 + \int_{t_0}^t F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau], \quad (2.6)$$

où $F(t) = \exp(At)$, $t \in T$, est la solution du système

$$\begin{cases} \dot{F} = AF, \\ F(t_0) = Id, t \in T. \end{cases}$$

Comme la commande u est impulsive, l'équation (2.6) prend la forme suivante :

$$x_{(i+1)} = x_{(\tau_{i+1})} = F(h)[x(i) + \int_0^h F^{-1}(\tau)bu(i)d\tau],$$

où

$$u(i) = u(\tau_i), \quad \tau_i \in T, \quad i = (0, \dots, N), \quad T = \bigcup_{i=0}^N [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_{N+1} = t^*, \quad \tau_{i+1} - \tau_i = h > 0.$$

En posant $D = \exp(Ah) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ah)^n}{n!}$ et $D \int_0^h F^{-1}(\tau)b \, d\tau$, on aboutit au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = c'x(t^*) \longrightarrow \max_u, \\ x(t+h) = Dx(t) + du(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ Hx(t^*) = g, \\ f_*(t) \leq u(t) \leq f^*(t), \quad t \in T = [t_0, t^*]. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

avec $x(t^*)$ vérifiant la propriété suivant :

$$x(t^*) = D^{\frac{t^*}{h}} x_0 + \sum_{t \in T} D^{\frac{t^*-t}{h}-1} du(t).$$

Donc cela va nous permettre d'établir une autre formulation équivalente du problème (2.7) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = (c' \sum_{t \in T} D^{\frac{t^*-t}{h}-1} du(t) + c' D^{\frac{t^*}{h}} x_0) \longrightarrow \max_u, \\ H \sum_{t \in T} D^{\frac{t^*-t}{h}-1} du(t) = g - HD^{\frac{t^*}{h}} x_0, \\ f_*(t) \leq u(t) \leq f^*(t), \quad t \in T = [t_0, t^*]. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où

$$x(t+h) = Dx(t) + du(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

2.3.2 Notion de commandabilité

Un processus de contrôle décrit par l'équation (2.3) est dit commandable, si pour toute paire $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande mesurable bornée $u(t)$ sur un intervalle fini $[t_0, t^*]$ qui ramène l'objet sur la trajectoire $x(t)$ du point $x(t_0) = x_0$ au point $x(t^*) = x^*$, (c'est-à-dire

de la position initiale à la position finale).

Théorème 2.3.1. *Un système linéaire de \mathbb{R}^n décrit par l'équation (2.3) est commandable si et seulement si le rang de la matrice $[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b]$ est égal à n .*

Définition 2.3.2. *La commande $u(t)$ et sa trajectoire $x(t)$ sont admissibles, s'ils vérifient les contraintes du problème (2.8).*

La commande admissible u^0 est optimale si $\max J(u) = J(u^0)$.

La commande admissible u^ε est ε -optimale si $J(u^0) - J(u^\varepsilon) < \varepsilon$.

Définition 2.3.3. *Le support contrôle $\{u, \tau_B\}$ est dit non dégénéré si*

$$f_*(t) < u(t) < f^*(t).$$

2.3.3 Calcul de l'accroissement de la fonctionnelle

Considérons un support contrôle non dégénéré $\{u, \tau_B\}$ et une autre commande admissible $\bar{u} = u + \Delta u$ avec $\bar{x} = x + \Delta x$ sa trajectoire correspondante.

L'accroissement de la fonctionnelle est

$$\Delta J = J(\bar{u}) - J(u) = - \sum_{t \in T} \Delta(t) \cdot \Delta u(t).$$

Le maximum de cet accroissement sous les contraintes :

$$f_*(t) - u(t) \leq \Delta u(t) \leq f^*(t) - u(t), \quad \forall t \in T.$$

est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta u(t) = f^*(t) - u(t), & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ \Delta u(t) = f_*(t) - u(t), & \text{si } \Delta(t) > 0, \end{cases} \quad t \in T,$$

est égal à :

$$\beta = \beta(u, \tau_B) = \sum_{t \in T_H^+} \Delta(t)(u(t) - f_*(t)) + \sum_{t \in T_H^-} \Delta(t)(u(t) - f^*(t)), \quad (2.9)$$

appelée valeur de suboptimalité du support contrôle $\{u, \tau_B\}$,

où

$$T_H^+ = \{t \in T_H \mid \Delta(t) \geq 0\}, \quad T_H^- = \{t \in T_H \mid \Delta(t) \leq 0\}.$$

Il en résulte que pour $\bar{u} = u^0$, on obtient

$$0 \leq J(u^0) - J(u) \leq \beta(u, \tau_B). \quad (2.10)$$

2.3.4 Critère d'optimalité

Théorème 2.3.2. [6] Les relations

$$\begin{cases} u(t) = f^*(t), & \text{si } \Delta(t) \leq 0, \\ u(t) = f_*(t) & \text{si } \Delta(t) \geq 0, \\ f_*(t) \leq u(t) \leq f^*(t), & \text{si } \Delta(t) = 0, \quad t \in T_H, \end{cases} \quad (2.11)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence elles sont nécessaires pour l'optimalité du support contrôle $\{u, \tau_B\}$.

2.3.5 Critère de suboptimalité

Théorème 2.3.3. [6] Pour $\varepsilon > 0$ donné. Pour l' ε -optimalité de la commande u , il est suffisant de trouver un tel support τ_B pour lequel la valeur de suboptimalité vérifie l'inégalité suivante :

$$\beta(u, \tau_B) \leq \varepsilon.$$

2.3.6 Méthode de résolution

Dans ce cas, il suffit de résoudre le problème (2.8) par la méthode adaptée, une fois la commande optimale obtenue, on cherchera la trajectoire $x(t)$ correspondante à partir de l'expression suivante :

$$x(t+h) = Dx(t) + du(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ce qui nous permet d'écrire l'algorithme suivante :

Algorithme de résolution

1. Tester la commandabilité du système, dans le cas positif continuer.
2. Sinon arrêter le processus le système n'est pas commandable.
3. Tester la stabilité du système dans le cas positif, continuer.
4. Sinon arrêter le processus le système n'est pas stable.
5. Poser le problème (2.7) à résoudre.
6. Ecrire (2.7) sous forme (2.8).
7. Résoudre (2.8) par la méthode adaptée.
8. Calcul de la trajectoire $x(t)$ grâce à la solution obtenue et de la formule

$$x(t+h) = Dx(t) + du(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Exemple 2.3.1. Soit à résoudre :

$$\begin{cases} J(u) = c'x(t^*) \longrightarrow \max_u, \\ \dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), \\ Hx(t^*) = g, \\ |u(t)| \leq 1.4, \quad t \in T = [0, 6]. \end{cases}$$

avec

$$c' = (-3 \quad -1 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 1),$$

$$b' = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1),$$

$$g' = (0.16 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.6),$$

$$H = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a le rang $[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] = 6$, donc on continue le processus. De plus $A^n = [0]$. Il en résulte que :

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{24}t^4 & \frac{1}{120}t^5 \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{24}t^4 \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{24}t^4 & -\frac{1}{120}t^5 \\ 0 & 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{24}t^4 \\ 0 & 0 & 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{6}t^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec un pas de quantification $h = 1$, alors

$$D = \exp(Ah) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 0.166 & 0.0416 & 0.01041 \\ 0 & 1 & 1 & 0.5 & 0.166 & 0.0416 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0.5 & 0.166 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$d = D \int_0^h F^{-1}(s)b ds = \begin{pmatrix} 0.2180 \\ -0.7166 \\ 1.7083 \\ 1.666 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas le problème devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -290.7874u(0) - 114.9458u(1) - 31.8541u(2) - 0.0125u(3) + 7.5792u(4) + 6.4208u(5) \\ +169.5 \rightarrow \max, \\ -364.1458u(0) - 175.0541u(1) - 74.7124u(2) - 26.6208u(3) - 6.7791u(4) - 0.6875u(5) = 0.16, \\ -226.5319u(0) - 115.7791u(1) - 53.2764u(2) - 20.8569u(3) - 5.8542u(4) - 0.1014u(5) = 0.1, \\ 119.7819u(0) + 47.1958u(1) + 11.8597u(2) - 2.3930u(3) - 6.2292u(4) - 5.8153u(5) = 0.2, \\ 50.8445u(0) + 56.2667u(1) + 44.6887u(2) + 29.4444u(3) + 16.8667u(4) + 8.2889u(5) = 0.3, \\ -707.9929u(0) - 346.2291u(1) - 151.9652u(2) - 57.3680u(3) - 17.1041u(4) - 3.3403u(5) = 0.6, \\ \\ -1.4 \leq u(0) \leq 1.4, \\ -1.4 \leq u(1) \leq 1.4, \\ -1.4 \leq u(2) \leq 1.4, \\ -1.4 \leq u(3) \leq 1.4, \\ -1.4 \leq u(4) \leq 1.4, \\ -1.4 \leq u(5) \leq 1.4, \end{array} \right.$$

La solution de départ est :

$$u' = (-0.1596 \quad 0.4308 \quad -7.3334 \quad 0.6461 \quad 0 \quad 0.4253), \quad J_B = \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

La solution optimale est :

$$\bar{u} = (-0.104 \quad 0.1318 \quad 0.6488 \quad 1.4 \quad 0.4804 \quad 0.2767), \quad J_B = \{1, 2, 3, 5, 6\}.$$

La trajectoire $x(t)$ est donnée par la formule

$$x(t+h) = Dx(t) + du(t),$$

qui donnera

$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$
0	-0.104/100	0.1318/100	0.6488	1.4	0.4804
0	-2.269	-7.457	-0.1777	-0.1734	-0.1560/100
0	-0.1936	-0.2749	-0.2214	-0.1618	-6.242
0	-0.4671	-0.1215	0.6986	0.8710	0.9386
0	-0.3547	0.1939/100	-0.2398/100	-0.1852	-0.4847
0	-0.2329	9.492	3.279	-0.2308	-0.4873

Dans cette partie de document, nous allons résoudre un autre problème dans le contrôle optimal.

Exemple 2.3.2. [9]

On considère le système contrôlé

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y + u_1, & x(0) &= 1, \\ \dot{y} &= x - y + u_2, & y(0) &= 1. \end{aligned}$$

On veut stabiliser la solution de ce système vers l'origine, en minimisant le coût

$$C(u) = \int_0^{+\infty} (x(t)^2 + y(t)^2 + u_1(t)^2 + u_2(t)^2) dt.$$

D'après le système contrôlé on aura :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = U = W = Id.$$

grâce à ces matrices, nous allons avoir une équation de Riccati stationnaire.

En posant

$$H = \begin{pmatrix} e & d \\ d & f \end{pmatrix}$$

On obtient un système d'équations :

$$\begin{aligned} 2e + 2d + e^2 + d^2 &= 1, \\ 2d - 2f + d^2 + f^2 &= 1, \\ e + f + ed + df &= 0. \end{aligned}$$

On déduit que la troisième équation nous a conduit à :

$$(e + f)(1 + d) = 0,$$

par conséquent, on aura :

$$e = -f \text{ ou } d = -1$$

Si $e = -f$, les valeurs propres de la matrice H sont alors $\pm\sqrt{e^2 + d^2}$, ce résultat est exclu car la matrice H doit être définie négative. Donc $d = -1$, et on trouve

$$e = -1 \pm \sqrt{3}, \quad f = 1 \pm \sqrt{3}$$

La seule façon pour que la matrice H est définie négative, on va prendre $e = -1 - \sqrt{3}$ et $f = 1 - \sqrt{3}$.

Finalement on aura :

$$H = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{3} & -1 \\ -1 & 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

et notre système bouclé devient

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sqrt{3}x, & x(0) &= 1, \\ \dot{y} &= -\sqrt{3}y, & y(0) &= 1. \end{aligned}$$

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la partie théorique du premier chapitre sur des exemples (ou problèmes de contrôle optimal). On arrive à trouver des solutions exactes pour les problèmes étudiés.

3 Résolution d'un problème du contrôle optimal en min-max dans le cas continu

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier un problème du contrôle optimal en min-max dans le cas continu, on passera par la partie théorique et on va la terminer avec un exemple d'application.

3.2 Postion Du Problème

Considérons le système dynamique de commande décrit par l'équation différentielle suivante [7] :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t); \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

sur l'intervalle $T = [0; t_1]$

où

$x(t)$ est n- vecteur décrivant l'état du système à l'instant $t \in T$,

$u(t)$ la commande d'entrée à l'instant t vérifiant, $d_* \leq u(t) \leq d^*$, $t \in T$,

b est un n-vecteur,

A est une $n \times n$ matrice caractérisant le système,

x_0 est la position initiale du système à l'instant $t = 0$,

Le système est caractérisé par un signal de sortie pour $t = t_1$,

$$Hx(t_1) = g, \quad (3.2)$$

tel que H est une $m \times n$ matrice; $\text{rang}H = m \leq n$ et g est un m-vecteur

$J(u) = \min_{k \in K} (c'_k x(t_1) + \alpha_k)$ est un critère de qualité.

c_k des n-vecteurs,

α_k des scalaires,

c'_k le transposé du vecteur c_k tel que $k \in K$,

où

$K = \{1, \dots, p\}$: L'ensemble des indices des composants de la fonctionnelle J ,

$I = \{1, \dots, m\}$: L'ensemble des indices des lignes,

$J = \{1, \dots, n\}$: L'ensemble des indices des colonnes.

Considérons le problème suivant :

$$(P1) \begin{cases} J(u) = \min_{k \in K} (c'_k x(t_1) + \alpha_k) \rightarrow \max_u, \\ \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t); \quad x(0) = x_0, \\ Hx(t_1) = g, \\ d_* \leq u(t) \leq d^*, \quad t \in [0; t_1]. \end{cases}$$

La solution du système (3.1) est donnée par la formule de cauchy :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^{t_1} F(t)F^{-1}(s)bu(s)ds, \quad t \in [0, t_1] \quad (3.3)$$

avec $F(t) = \exp(At)$, $F(0) = I_n$.

$F(t)$ est la matrice carée d'ordre n , solution de l'équation différentielle :

$$F^*(t) = AF(t), \quad F(0) = I_n.$$

En utilisant (3.3), le problème (P1) devient :

$$(P'1) \begin{cases} J(u) = \min_{k \in K} (c'_k F(t_1)x_0 + \int_0^{t_1} c'_k(t)u(t)dt + \alpha_k) \rightarrow \max_u, \\ \int_0^{t_1} p(t)u(t)dt = g - HF(t_1).x_0, \\ d_* \leq u(t) \leq d^*; \quad t \in [0; t_1], \end{cases}$$

où

$$c_k(t) = c'_k F(t_1)F^{-1}(t)b, \quad p(t) = HF(t_1)F^{-1}(t)b,$$

$$q(t) = F(t_1).F^{-1}(t).b, \quad t \in [0; t_1], \quad k \in K.$$

Dans toute la suite, on fera hypothèse de la stabilité du système linéaire (3.1) pour la valeur n .

Définition 3.2.1. • Toute commande $u(t)$ vérifiant les contraintes du problème (P1) est dite commande admissible du problème

- Toute commande admissible $u^0 = u^0(t)$ est dite optimale si :

$$J(u^0) = \max_{d_* \leq u(t) \leq d^*} J(u)$$

- Une commande admissible $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t)$ est dite ε -optimale si :

$$J(u^0) - J(u^\varepsilon) \leq \varepsilon \quad (\varepsilon > 0, \text{ donné}).$$

3.3 Support et support contrôle

[7, 6] On va choisir sur l'intervalle $[0; t_1]$ un ensemble de m points isolés $T_c = \{t_j, j = 1 \dots m\}$. T_c est appelé support des contraintes et $P_c = \{p(t), t \in T_c\}$ matrice des contraintes si P_c est inversible.

On construit les ensembles d'indices $T_f \subset T - T_c$ et $K_f \subset K$

où $|K_f| = |T_f| + 1$ ainsi que la matrice Δ_f ,

avec

$$\begin{aligned} \Delta_f &= (\Delta[K_f, T_f], e[K_f]) \\ \Delta[K_f, T_f] &= (\Delta_k(t), t \in T_f, k \in K_f) \\ e[K_f] &= (e_k = 1, k \in K_f), \\ \Delta_k(t) &= y'_k p(t) - c_k(t), y'_k = (c_k(t), t \in T_c).P_c^{-1}, \quad k \in K. \\ \Delta(t) &= \sum_{k \in K_f} \lambda_k \Delta_k(t), \quad t \in T, \quad (\lambda_k \text{ définis ci-dessous}) \end{aligned}$$

Définition 3.3.1. L'ensemble $Q_f = \{K_f, T_f\}$ est appelé support de la fonctionnelle J si $\det \Delta_f \neq 0$.

En utilisant la dernière ligne de la matrice inverse Δ_f^{-1} , on construit le vecteur

$$\lambda'(K) = (\lambda'(K_f), \lambda'(K_H)),$$

$$\lambda(K_f) = (0'(T_f); 1) \cdot \Delta_f^{-1},$$

$$\lambda(K_H) = 0'(K_H), \quad K_H = K - K_f$$

Définition 3.3.2. Le support de la fonctionnelle $Q_f = \{K_f, T_f\}$ est dit régulier si $\lambda_k \geq 0$; $k \in K_f$.

• L'ensemble $Q_p = \{T_c, Q_f\}$ formé du support des contraintes et du support de la fonctionnelle est appelé support du problème.

• La paire $\{u, Q_p\}$ formée d'une commande admissible u et du support du problème est appelée support-contrôle.

Définition 3.3.3. Le support-contrôle $\{u, Q_p\}$ est dit non dégénéré si

$$\blacktriangleright d_* < u(t) < d^*; \quad t \in T_c \cup T_f$$

$$\blacktriangleright J(u) < (c'_k x(t_1) + \alpha_k); \quad k \in K_H$$

Remarque 3.3.1. • Le support Q_f avec $T_f = \emptyset$ est régulier.

• $\Delta(t) = 0, \quad t \in T_c \cup T_f.$

• Q_p est régulier si Q_f est régulier.

• Dans tout ce qui suit, on ne considérera que des support Q_f réguliers.

3.4 Accroissement de la fonctionnelle

[6] Considérons un support -contrôle $\{u, Q_p\}$ non dégénéré de départ et soit $\bar{u} = u + \Delta u$ une autre commande admissible, avec sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$. Introduisons les vecteurs des écarts suivants :

$$\omega(K) = (\omega_k, k \in K) \quad \text{et} \quad \bar{\omega}(K) = (\bar{\omega}_k, k \in K),$$

$$\omega_k = (c'_k x(t_1) + \alpha_k) - J(u),$$

$$\bar{\omega}_k = (c'_k \bar{x}(t_1) + \alpha_k) - J(\bar{u}), \quad k \in K.$$

$$\text{et soit} \quad \Delta\omega(K) = (\Delta\omega_k, k \in K)$$

$$\Delta\omega_k = \bar{\omega}_k - \omega_k, \quad k \in K,$$

$$= c'_k \Delta x(t_1) - (J(\bar{u}) - J(u)) = c'_k \Delta x(t_1) - (\Delta J(u))$$

$$\text{tel que : } \Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u);$$

$$\text{avec } \Delta\omega_k \geq -\omega_k$$

En utilisant (3.3), on obtient :

$$\Delta\omega_k = \int_0^{t_1} (c'_k F(t_1) \cdot F^{-1}(t) \cdot b \Delta u(t) dt) - \Delta J(u), \quad k \in K.$$

$$\text{De là} \quad \Delta J(u) = \int_0^{t_1} \sum_{k \in K} \lambda_k (c'_k(t) \cdot \Delta u(t) dt) - \sum_{k \in K} \lambda_k \Delta\omega_k, \quad k \in K,$$

$$\text{En utilisant les fonctions } \Delta_k(t) = y'_k p(t) - c_k(t)$$

$$\text{et } \Delta(t) = \sum_{k \in K_f} \lambda_k \Delta_k(t), \quad t \in T.$$

$$\text{On aura : } \Delta J(u) = \int_0^{t_1} \sum_{k \in K} \lambda_k ((-\Delta_k(t) + y'_k p(t)) \Delta u(t) dt) - \sum_{k \in K} \lambda_k \Delta\omega_k, \quad k \in K.$$

de l'admissibilité de u et \bar{u} on a :

$$\int_0^{t_1} p(t) \Delta u(t) dt = 0 \quad \text{et par la suite :}$$

$$\Delta J(u) = \int_0^{t_1} -\Delta(t) \Delta u(t) dt - \sum_{k \in K_f} \lambda_k \Delta\omega_k, \quad k \in K_f,$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle sous les contraintes suivantes :

$$\star \quad d_* - u(t) \leq \Delta u(t) \leq d^* - u(t), \quad t \in T$$

$$\star \quad \Delta\omega_k \geq -\omega_k, \quad k \in K_f$$

est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta u(t) = d^* - u(t) & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ \Delta u(t) = d_* - u(t) & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ \Delta \omega_k = -\omega_k, & k \in K_f \end{cases} \quad t \in T,$$

et est égal à :

$$\beta = \beta(u, Q_p) = \int_{t \in T^+} \Delta(t)(u(t) - d_*) + \int_{t \in T^-} \Delta(t)(u(t) - d^*) + \sum_{k \in K_f} \lambda_k \omega_k, \quad (3.4)$$

appelée valeur de suboptimalité du support contrôle $\{u, Q_p\}$,

Où $T^+ = \{t \in T \mid \Delta(t) \geq 0\}$; $T^- = \{t \in T \mid \Delta(t) \leq 0\}$.

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) &\leq \beta(u, Q_p) \text{ et pour } \bar{u} = u^0 \\ 0 &\leq J(u^0) - J(u) \leq \beta(u, Q_p) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Théorème 3.4.1. [6] *Critère d'optimalité*

Les relations

$$\begin{cases} u(t) = d^* & \text{si } \Delta(t) \leq 0, \\ u(t) = d_* & \text{si } \Delta(t) \geq 0, \\ d_* \leq u(t) \leq d^* & \text{si } \Delta(t) = 0, \\ \omega_k = 0 & \text{si } \lambda_k \geq 0; \quad k \in K_f, \\ \omega_k \geq 0 & \text{si } \lambda_k = 0; \quad k \in K_f, \end{cases} \quad t \in T, \quad (3.6)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence elles sont nécessaires pour l'optimalité du support contrôle $\{u, Q_p\}$.

Théorème 3.4.2. [6] (*Critère de suboptimalité*)

Soit $\varepsilon > 0$ donné, Pour l' ε -optimalité de la commande u , il est suffisant de trouver un tel support Q_p pour lequel la valeur de suboptimalité vérifie l'inégalité suivante :

$$\beta(u, Q_p) \leq \varepsilon.$$

3.5 Méthode de résolution

[7, 16] Supposons que le support contrôle $\{u, Q_p\}$ ne vérifie pas le critère d'optimalité et de suboptimalité. De là on passe à l'itération de l'algorithme qui consiste à changer $\{u, Q_p\}$ vers $\{\bar{u}, \bar{Q}_p\}$ de tel sorte que $J(\bar{u}) \geq J(u)$.

Cette itération est constituée de trois procédures :

1. Changement de commande de u vers \bar{u} .
2. Changement du support Q_p vers \bar{Q}_p .
3. La procédure finale.

3.5.1 Changement de commande

La nouvelle commande \bar{u} sera définie de la manière suivante :

$$\bar{u}(t) = u(t) + \theta \Delta u(t), \quad t \in T,$$

Où $\Delta u(t)$, $t \in T$ est la direction et θ le pas maximal le long de cette direction qui seront trouvés comme solution du problème (P'1).

Pour cela choisissons les paramètres de la méthode α et h strictement positif .

Nous définissons deux ensembles T_0 et T_1 de la manière suivante :

$$T_0 = \{t \in T \mid |\Delta(t)| \leq \alpha\},$$

$$T_1 = \{t \in T \mid |\Delta(t)| > \alpha\} = T \setminus T_0,$$

subdivisons l'ensemble T_0 en N intervalles,

$$T_0 = \bigcup_{j=1}^N [\underline{\tau}_j, \bar{\tau}_j], \quad \bar{\tau}_j - \underline{\tau}_j \leq h, \quad \text{pour } j = 1 \dots N,$$

et $[\underline{\tau}_j, \bar{\tau}_j] \cap [\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i] = \phi$, $i \neq j$, $(i, j = 1 \dots N)$, l'indice $N+1$ correspond à l'intervalle T_1 .

Considérons $T_p = T_c \cup T_f \subset \{\tau_j, j = 1 \dots N+1\}$, les τ_j sont choisis parmi les bornes des intervalles $(T_0 \cup T_1)$ et $u(t) = u_j$, $t \in T = T_0 \cup T_1$, $j = 1 \dots N+1$.

On pose :

$$\ell_j = \begin{cases} \theta \Delta u(t) & t \in [\underline{\tau}_j, \bar{\tau}_j], \quad j = 1 \dots N \\ \theta & t \in T_1 \text{ pour } j = N+1. \end{cases}$$

Où

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d^* - u(t) & \text{si } \Delta(t) < -\alpha \\ d_* - u(t) & \text{si } \Delta(t) > \alpha, \quad t \in T_1 \end{cases}$$

calculons les quantités suivantes :

$$q_j = \int_{\tau_j}^{\bar{\tau}_j} p(t) dt, \quad c_k(j) = \int_{\tau_j}^{\bar{\tau}_j} c'_k q(t) dt, \quad k \in K,$$

$$d_{-j} = d_* - u_j, \quad d_j^+ = d^* - u_j, \quad j = 1 \dots N$$

$$q_{N+1} = \int_{T_1} p(t) \Delta u(t) dt, \quad c_k(N+1) = \int_{T_1} c'_k q(t) \Delta u(t) dt, \quad k \in K,$$

$$d_{-N+1} = 0, \quad d_{N+1}^+ = 1,$$

en utilisant les quantités précédentes, le problème (P'1) devient un problème de programmation linéaire .

$$(P''1) \begin{cases} \min_{k \in K} \left(\sum_{j=1}^{N+1} c_k(j) \ell_j + \omega_k \right) \rightarrow \max_{\ell} \\ \sum_{j=1}^{N+1} q_j \ell_j = 0, \\ d_- \leq \ell_j \leq d^+; \quad j = 1 \dots N + 1 \end{cases}$$

Soit l'ensemble $\nabla = \{1, 2, 3, \dots, N + 1\}$ et les ensembles de support ∇_c, ∇_f et ∇_p . où $\nabla_c = \{j \in \nabla, \tau_j \in T_c\}$, $\nabla_f = \{j \in \nabla, \tau_j \in T_f\}$ et $\nabla_p = \{\nabla_c, \nabla_f, K_f\}$.

En prenant comme solution de départ $\{\ell = 0, \nabla_p\}$, on résout par la méthode adaptée le problème (P''1) .

Au bout d'un certain nombre d'itérations , nous aboutissons à une solution optimale $\{\bar{\ell}, \bar{\nabla}_p\}$ que nous utiliserons pour calculer la nouvelle solution pour le problème (P'1) :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \bar{\ell}_j, & t \in [\tau_j, \bar{\tau}_j], \quad j = 1 \dots N \\ u(t) + \bar{\ell}_{N+1} \cdot \Delta u(t), & t \in T_1, \quad j = N + 1 \end{cases}$$

Si l'indice $(N + 1)$ appartient à $\bar{\nabla}_p$ alors on l'exclut par la méthode duale. De là on obtient le nouveau support

$$\tilde{\nabla}_p = \{\tilde{\nabla}_c, \tilde{\nabla}_f, \tilde{K}_f\}.$$

Par suite le nouveau support du problème (P'1) est :

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_p &= \{ \tilde{T}_p, \tilde{K}_f \} \text{ avec } \tilde{T}_p = \tilde{T}_c \cup \tilde{T}_f, & \tilde{T}_c &= \{ \tilde{\tau}_j, j \in \tilde{\nabla}_c \}, \\ \tilde{T}_f &= \{ \tilde{\tau}_j, j \in \tilde{\nabla}_f \}, & \tilde{K}_f &= \tilde{K}_f.\end{aligned}$$

Puis procédons au test de la valeur de suboptimalité pour le support contrôle $\{ \bar{u}, \tilde{Q}_p \}$

- Si $\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_p) = 0$ alors le support contrôle $\{ \bar{u}, \tilde{Q}_p \}$ est optimal pour le problème $(P'1)$.
- Si $\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_p) \leq \varepsilon$ alors le support contrôle $\{ \bar{u}, \tilde{Q}_p \}$ est ε -optimal pour le problème $(P'1)$.
- Si $\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_p) > \varepsilon$ alors on passe au changement du support ou bien on passe à une nouvelle itération avec $\bar{\alpha} < \alpha$ et $\bar{h} < h$.

3.5.2 Changement du support

En utilisant le support \tilde{Q}_p , on calcule le vecteur $\tilde{\lambda}(K)$ et la fonction $\tilde{\Delta}(t)$, $t \in T$, avec lesquels, on calcule la quasi - commande $w(t)$, $t \in T$ définie comme suit :

$$w(t) = \begin{cases} d_*, & \text{si } \tilde{\Delta}(t) > 0, \\ d^*, & \text{si } \tilde{\Delta}(t) < 0, \\ \in [d^*, d_*] & \text{si } \tilde{\Delta}(t) = 0, \end{cases} \quad (QC)$$

et sa quasi - trajectoire correspondante $\chi(t)$, $t \in T$, solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d\chi(t)}{dt} = A\chi(t) + bu(t); \quad \chi(0) = x_0,$$

Si $H\chi(t_1) = g$ et $J(w) = (c'_k \chi(t_1) + \alpha_k)$, $k \in \tilde{K}_f$, (conditions d'admissibilité) alors $w(t)$, $t \in T$ est une commande optimale pour le problème $(P'1)$.

Dans le cas contraire, déterminons le vecteur $\zeta = (\zeta(\tilde{T}_p), \zeta(s+1))$: avec $|\tilde{T}_p| = |\tilde{T}_c| + |\tilde{T}_f| = s$

$$\begin{pmatrix} \zeta(\tilde{T}_p) \\ \zeta(s+1) \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} g - H\chi(t_1) \\ C'(\tilde{K}_f) \cdot \chi(t_1) + \alpha_k(\tilde{K}_f) - e(\tilde{K}_f) \cdot J(w) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

où

$$R = \begin{pmatrix} P(\tilde{T}_c) & P(\tilde{T}_f) & 0 \\ -C'(\tilde{K}_f).q(\tilde{T}_c) & -C'(\tilde{K}_f).q(\tilde{T}_f) & e(\tilde{K}_f) \end{pmatrix}$$

La relation (3.7) peut aussi prendre la forme suivante :

$$P(\tilde{T}_c).\zeta(\tilde{T}_c)+P(\tilde{T}_f).\zeta(\tilde{T}) = g-H\chi(t_1) \quad (3.8)$$

$$-C'(\tilde{K}_f).q(\tilde{T}_c).\zeta(\tilde{T}_c)-C'(\tilde{K}_f).q(\tilde{T}_f).\zeta(\tilde{T}_f)+e(\tilde{K}_f).\zeta(s+1) = e(\tilde{K}_f)\omega(\tilde{K}_f) \quad (3.9)$$

Calculons la quantité suivante :

$$\beta_k = \zeta(s+1)+J(w)-c'_k.\chi(t_1)-\alpha_k-\sum_{j=1}^{|\tilde{T}_p|} c'_k.q(\tilde{\tau}_j).\zeta(\tilde{\tau}_j), \quad k \in \tilde{k}_H \quad (3.10)$$

De là on a l'expression :

$$\beta_k = \zeta(s+1)-\omega_k-\sum_{j=1}^{|\tilde{T}_p|} c'_k.q(\tilde{\tau}_j).\zeta(\tilde{\tau}_j), \quad k \in \tilde{k}_H \quad (3.11)$$

De l'expression (3.9), on a

$$\zeta(s+1) = \omega_k + \sum_{j=1}^{|\tilde{T}_p|} c'_k.q(\tilde{\tau}_j).\zeta(\tilde{\tau}_j), \quad k \in \tilde{K}_f. \quad (3.12)$$

Afin de rendre $\zeta(s+1)$ très petit, on doit prendre $\beta_k \leq 0$; $k \in \tilde{k}_H$;

$$\text{C'est à dire } \zeta(s+1) - \omega_k - \sum_{j=1}^{|\tilde{T}_p|} c'_k.q(\tilde{\tau}_j).\zeta(\tilde{\tau}_j) \leq 0; \quad k \in \tilde{k}_H.$$

Donc on a deux cas se présentent :

$$1^\circ / \|\zeta(\tilde{T}_p)\| < \mu \quad (\mu \text{ étant paramètre de la Méthode});$$

$$2^\circ / \beta_k \leq 0; \quad k \in \tilde{K}_H.$$

Si 1°/ et 2°/ sont vérifiés alors on passe à la procédure finale.

Sinon considérons les deux cas suivants :

1° cas : 2°/ n'est pas vérifiée, c'est à dire il existe $k_0 \in \tilde{k}_H$, $\beta_{k_0} > 0$.

De là on utilise la méthode duale pour faire rentrer l'indice $k_0 \in \tilde{K}_H$ dans le support. Sachant que l'expression de la co-commande $\bar{\Delta}(t)$ est donnée pour la formule (QC), le changement de support fait intervenir le problème dual (DP'1) du problème (P'1) .

$$(DP'1) \begin{cases} \Theta(X) = \lambda' \alpha_1 + y_1' b_1 - \int_0^t v_1 d_* + \int_0^t w_1 d^* \rightarrow \min \\ -\lambda'(K) \cdot \int_0^t (c_k(t)) + y_1' \int_0^t p(t) - \int_0^t v_1 + \int_0^t w_1 = 0 \\ \lambda'(K) \cdot e(K) = 1 \\ \lambda \in \mathbb{R}_+^p; \quad v_1, w_1 \in \mathbb{R}_+, \quad y_1 \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

Où le vecteur $X = (\lambda, y_1, v_1, w_1)$, construit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \lambda'(K_f) = (0'(T_f), 1) \Delta_f^{-1}, & \lambda'(K_H) = 0 \\ y_1' = \lambda'(K_f) \cdot (c_k(t)) P_c^{-1}, & k \in \tilde{K}_f, t \in T_c \\ v_1 = \Delta(t); \quad w_1 = 0, & \text{si } \Delta(t) > 0 \\ v_1 = 0; \quad w_1 = -\Delta(t) & \text{si } \Delta(t) < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = (c_k' F(t_1) x_0 + \alpha_k), \quad k \in K, \quad b_1 = g - HF(t_1) \cdot x_0.$$

est un plan du problème dual $(DP'1)$.

La nouvelle co - commande est :

$$\bar{\Delta}(t) = \tilde{\Delta}(t) + \sigma Z(t), \quad t \in T, \quad \bar{\lambda}(K) = \tilde{\lambda}(K) + \sigma Z(K),$$

Où $Z(t)$ est la direction et σ le pas maximal le long de cette direction.

$$Z(t) = Z'(\tilde{T}_c) \cdot P_c^{-1} \cdot p(t) + \Delta \tilde{\lambda}(\tilde{K}) \cdot \tilde{\Delta} \cdot (K, t) \quad t \in T,$$

$$Z(\tilde{K}_f) = \Delta \tilde{\lambda}(\tilde{K}_f) = -\Delta \tilde{\lambda}(\tilde{K}_H) (\tilde{\Delta}(\tilde{K}_H, \tilde{T}_f); e(\tilde{K}_H)) \cdot \tilde{\Delta}_f^{-1} + (Z(\tilde{T}_f) \cdot 0) \cdot \tilde{\Delta}_f^{-1} - Z'(\tilde{T}_c) \cdot (P_c^{-1} \cdot P(\tilde{T}_f); 0) \cdot \tilde{\Delta}_f^{-1}$$

$$\text{Posons } \Delta \tilde{\lambda}(\tilde{K}_H \setminus k_0) = 0, \quad \Delta \tilde{\lambda}(k_0) = 1, \quad Z(\tilde{T}_f) = 0, \quad Z(\tilde{T}_c) = 0.$$

De là le pas maximal $\sigma = \sigma_0 = \min(\sigma(t^*); \sigma_k^*)$, où $\sigma_k^* = \min(-\tilde{\lambda}_k / \Delta \tilde{\lambda}_k; \Delta \tilde{\lambda}_k < 0; k \in \tilde{K}_f)$

$\sigma(t^*)$ calculé à partir de $(R1)$.

$$(R1) \quad \sigma(t) = \begin{cases} -\tilde{\Delta}(t)/Z(t) & \text{si } \tilde{\Delta}(t)/Z(t) < 0 \\ 0 & \text{si } \tilde{\Delta}(t) = 0 \text{ et } Z(t) > 0 \text{ et } w(t) \neq d_* \\ & \text{ou } \tilde{\Delta}(t) = 0 \text{ et } Z(t) < 0 \text{ et } w(t) \neq d_*; t \in T_{HH} \text{ telque } T_{HH} = T - \tilde{T}_p \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Deux cas possibles peuvent se présenter :

$$\diamond A^\circ / \quad \sigma_0 = \sigma(t^*)$$

Alors le nouveau support \bar{Q}_p sera :

$$\bar{Q}_p = \{ \bar{T}_c = \tilde{T}_c; \bar{T}_f = \tilde{T}_f \cup t^*; \bar{K}_f = \tilde{K}_f \cup k_0 \}$$

$$\diamond B^\circ / \quad \sigma_0 = \sigma_k^*$$

$$\bar{Q}_p = \{ \bar{T}_c = \tilde{T}_c; \bar{T}_f = \tilde{T}_f; \bar{K}_f = (\tilde{K}_f - k^*) \cup k_0 \}$$

2° cas

Supposons la condition 2° vérifiée. Considérons le nouveau support - contrôle $\{\bar{u}; \bar{Q}_p\}$ et testons la condition 1°.

si $\zeta(\bar{T}_p) = 0$ alors la commande est optimale .

si $||\zeta(\bar{T}_p)|| < \mu$ alors on passe à la procédure finale.

si $||\zeta(\bar{T}_p)|| > \mu$ alors, on passe au changement de support pour cela posons $\bar{Q}_p = \tilde{Q}_p$ et calculons

$$|\zeta(t_0)| = \max(|\zeta(t)|); \quad t \in \tilde{T}_p, \text{ de là deux cas sont possibles.}$$

$$C^\circ / t_0 \in \tilde{T}_f; \quad D^\circ / t_0 \in \tilde{T}_c.$$

Cas $C^\circ /$ de la même manière que le changement fait précédemment (cas $\beta_{k_0} > 0$) on pose $Z(t_0) = -\text{signe } \zeta(t_0)$; $Z(\tilde{T}_f - t_0) = 0$; $\Delta\tilde{\lambda}(\tilde{K}_H) = 0$, $Z(\tilde{T}_c) = 0$ et on calcule le pas σ_0 de la même manière que ci-dessus :

$\diamond \sigma_0 = \sigma(t^*)$ alors le nouveau support sera :

$$\bar{Q}_p = \{ \bar{T}_c = \tilde{T}_c; \bar{T}_f = (\tilde{T}_f - t_0) \cup t^*; \bar{K}_f = \tilde{K}_f \}$$

$\diamond \sigma_0 = \sigma_k^*$ alors :

$$\bar{Q}_p = \{ \bar{T}_c = \tilde{T}_c; \bar{T}_f = \tilde{T}_f - t_0; \bar{K}_f = \tilde{K}_f - K^* \}$$

$$D^\circ / t_0 \in \tilde{T}_c$$

s'il existe $t_2 \in \tilde{T}_f$ tel que $Z'(\tilde{T}_c).P_c^{-1}.P(t_2) \neq 0$ alors on change les places des moments t_0

et t_2

$$\bar{Q}_p = \{ \bar{T}_c = (\tilde{T}_c \cup t_2) - t_0; \bar{T}_f = (\tilde{T}_f \cup t_0) - t_2; \bar{K}_f = \tilde{K}_f \}.$$

Comme pour le cas C° / on pose :

$$Z(t_0) = -\text{signe } \zeta(t_0); \quad Z(\bar{T}_f - t_0) = 0, \quad \Delta \lambda'(\bar{K}_H) = 0, \quad Z(\bar{T}_c) = 0$$

Calculons σ_0 de la même manière que précédemment, et le nouveau support sera calculé comme pour le cas C° /, c'est à dire :

◇ $\sigma_0 = \sigma(t^*)$; alors le nouveau support sera :

$$\bar{Q}_p = \{ \bar{T}_c = \bar{T}_c; \bar{T}_f = (\bar{T}_f - t_0) \cup t^*; \bar{K}_f = \tilde{K}_f \}$$

◇ $\sigma_0 = \sigma_k^*$ alors :

$$\bar{Q}_p = \{ \bar{T}_c = \bar{T}_c; \bar{T}_f = \bar{T}_f - t_0; \bar{K}_f = \bar{K}_f - k^* \}$$

sinon si $Z'(\tilde{T}_c).P_c^{-1}.P(t_2) = 0, \quad \forall t \in \tilde{T}_f$

On pose :

$$Z(t_0) = -\text{signe } \zeta(t_0); \quad Z(\tilde{T}_c - t_0) = 0; \quad \Delta \tilde{\lambda}(\tilde{K}_H) = 0; \quad Z(\tilde{T}_f) = 0$$

On pose $\sigma_0 = \sigma(t^*)$; alors le nouveau support sera :

$$\bar{Q}_p = \{ \bar{T}_c = (\tilde{T}_c \cup t^*) - t_0; \bar{T}_f = \tilde{T}_f; \bar{K}_f = \tilde{K}_f \}$$

- Si le support contrôle $\{ \bar{w}, \bar{Q}_p \}$ est admissible alors $\{ \bar{w}, \bar{Q}_p \}$ est optimal pour le problème (P1) sinon on passe à un changement de support (exclusion d'indice comprise).

3.5.3 Procédure finale

[7] Soit la quasi commande $\bar{w}(t)$ et sa quasi trajectoire $\bar{\chi}(t)$, $t \in T$ avec le support \bar{Q}_p , avec la relation (3.12) non vérifiée par hypothèse.

$$\begin{cases} g = H\bar{\chi}(t_1) \\ \bar{w}(\bar{K}_f) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Le but de la procédure finale est de trouver un nouveau support contrôle $\{ \bar{w}, \bar{Q}_p \}$ qui vérifiera la relation (3.13), pour cela :

Supposons que l'ensemble $T^0 = \{ t \in T, \bar{\Delta}(t) = 0 \}$ formé des points isolés t_j , $j = 1 \dots m$, $|\bar{T}_p| = |\bar{T}_c| + |\bar{T}_f| = m$ et $\bar{\Delta}^\bullet(t_j) \neq 0$, $t_j \in \bar{T}_p$.

$$\text{On a : } g - H\bar{\chi}(t_1) = \int_0^{t_1} p(t)\bar{w}(t)dt - g + HF(t_1).x_0$$

$$= \int_{T^0} p(t)\bar{w}(t)dt + \int_{T-T^0} p(t)\bar{w}(t)dt - g + HF(t_1).x_0,$$

vu que $\|\zeta(\bar{T}_p)\| \leq \mu$, on pose alors

$$\int_{T-T^0} p(t)\bar{w}(t)dt - g + HF(t_1).x_0 = 0 \quad \text{de là, on a :}$$

$$\int_{T^0} p(t)\bar{w}(t)dt = g - H.\bar{\chi}(t_1).$$

En faisant hypothèse que $p(t)$ est constant au voisinage des t_j , $j = 1 \dots m$ ($p(t)$ constant sur les intervalles $[t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon]$, $j = 1 \dots m$).

Ce qui nous permet d'écrire ;

$$g - H.\bar{\chi}(t_1) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m \left(\int_{t_j}^{\tau_j} p(t)\bar{w}_j(t)dt - \int_{t_j}^{\tau_j} p(t)\bar{w}_j(t)dt \right) & \text{si } \bar{\Delta}^\bullet(t_j) > 0 \\ \sum_{j=1}^m \left(\int_{t_j}^{\tau_j} p(t)\bar{w}_j(t)dt - \int_{t_j}^{\tau_j} p(t)\bar{w}_j(t)dt \right) & \text{si } \bar{\Delta}^\bullet(t_j) \leq 0 \end{cases}$$

$$g - H.\bar{\chi}(t_1) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m ((d^* - d_*) \int_{t_j}^{\tau_j} p(t)dt) & \text{si } \bar{\Delta}^\bullet(t_j) > 0 \\ \sum_{j=1}^m -((d^* - d_*) \int_{t_j}^{\tau_j} p(t)dt) & \text{si } \bar{\Delta}^\bullet(t_j) < 0 \end{cases}$$

il en résulte que :

$$g - H.\bar{\chi}(t_1) = (d^* - d_*) \sum_{j=1}^m \text{signe} \bar{\Delta}^\bullet(t_j) \left(\int_{t_j}^{\tau_j} p(t)dt \right), \quad (3.14)$$

à partir de (3.8) on aura :

$$\sum_{j=1}^m p(t_j).\zeta(t_j) = (d^* - d_*) \sum_{j=1}^m \text{signe} \bar{\Delta}^\bullet(t_j) \left(\int_{t_j}^{\tau_j} p(t)dt \right), \quad (3.15)$$

on procédera au même raisonnement pour avoir que :

$$\sum_{j=1}^m \left(\int_{t_j}^{\tau_j} c'_k q(t)\bar{w}_j(t)dt \right) + e(\tilde{K}_f)J(\bar{w}) = \alpha_k + c'_k \bar{\chi}(t_1), \quad k \in K_f, \quad (3.16)$$

La procédure finale consiste à trouver un support $\hat{\tau}_p = \{ \hat{\tau}_j, j = 1 \dots m \}$ de tel sorte à avoir la relation (3.12)

Les k^{eme} approximations (dédites à partir de (3.8), (3.15) et (3.16) avec $(p(t)$ constant) sont :

$$\tau_j^{k+1} = \tau_j^k + \text{signe} \bar{\Delta} \bullet (\tau_j^k) \cdot \zeta(\tau_j^k) / (d^* - d_*), \quad j = 1..m$$

$$(e(\tilde{K}_f) \cdot J(\bar{w}))^{k+1} = \tau_{m+1}^{k+1} - \bar{h}_{m+1}^{k+1}$$

Avec les approximations suivantes :

$$\tau_p^0 = \{t_j, j = 1..m\}, \quad t_j \in \bar{T}_p. \text{ et } \tau_{m+1}^1 = (\alpha_k + c'_k \bar{\chi}(t_1)), \quad k \in K_f,$$

$$\text{avec } \bar{h}_{m+1}^1 = \sum_{j=1}^m \left(\int_{t_j}^{\tau_p^1} c'_k q(t) \bar{w}_j(t) dt \right), \quad t_j \in \bar{T}_p.$$

pour un certain nombre k , on aboutit au support optimal $\hat{\tau}_p$.

3.6 Exemple d'application

Soit à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \min_{k \in K} (c'_k x(t_1) + \alpha_k) \rightarrow \max_u \\ \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t); \quad x'(0) = (1, 0, 1) \\ Hx(t_1) = g \\ |u(t)| \leq 1.2; \quad t \in [0; 3] \end{array} \right.$$

avec

$$c(K, J) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha'(K) = (1, 2),$$

$$g' = (0.16; 0.1), \quad b' = (0; 2; 1),$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang $[b, A^2b, \dots, A^{n-1}b] = 3$, donc on continue le processus, de plus le système est stable pour $n = 3$, $A^3 = [0]$.

Il en résulte que :

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0.5t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0.5t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit la commande suivante :

$$u(t) = \begin{cases} -0.1815, & 0 \leq t \leq 1 \\ -1.2, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0.7458, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

avec

$$p(t) = \begin{pmatrix} 27.5 - 8t + 0.5t^2 \\ 16.5 - 6t + 0.5t^2 \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} 6.5 - 4t + 0.5t^2 \\ 1.5 - 3t + 0.5t^2 \end{pmatrix},$$

$$q(t) = \begin{pmatrix} 10.5 & -5t + 0.5t^2 \\ 5 - t \\ 1 \end{pmatrix}$$

la commande ainsi définie est admissible car :

$$\int_0^1 p(t)u(t)dt + \int_1^2 p(t)u(t)dt + \int_2^3 p(t)u(t)dt = g - HF(3).x(0), \quad \text{et } |u(t)| \leq 1.2$$

À présent considérons le support contrôle $\{u, Q_p\}$ avec

$$u(t) = \begin{cases} -0.1815, & 0 \leq t \leq 1 \\ -1.2, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0.7458, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

$$Q_p = \{K_f, T_p\}, \quad \text{avec } T_p = T_f \cup T_c,$$

$$T_c = \{2, 3\}, \quad K_f = 1, \quad T_f = \phi,$$

$$\beta = \beta(u, Q_p) = \sum_{t \in T^+} \Delta(t)\Delta u(t) + \sum_{t \in T^-} \Delta(t)\Delta u(t) + \sum_{k \in K_f} \lambda_k \omega_k = 0.66$$

$$\Delta_1(t) = -0.5217 + 0.4347t - 0.0869t^2,$$

$$\Delta_2(t) = -0.7826 + 0.6521t - 0.1304t^2,$$

Dans ce cas $\Delta(t) = \Delta_1(t)$, avec les paramètres de la méthode suivants : $h \leq 1$ et $\alpha = 0.5$,

$$|\Delta(t)| \leq 0.5 \Rightarrow t \in [0.05051, 4.9494],$$

$$\Delta(t) < -0.5 \Rightarrow t < 0.05051 \text{ ou } t > 4.9494,$$

$$\Delta(t) > 0.5 \Rightarrow \text{aucun } t \text{ ne réalise cette inéquation.}$$

En vertu de quoi , nous scindons l'intervalle $T = [0, 3]$, comme suit : $T = T_0 \cup T_1$,

$$T_0 = [0.05051; 0.5252555] \cup [0.525255; 1] \cup [1; 1, 25] \cup [1, 25; 1, 5] \cup [1, 5; 1, 75] \cup [1, 75; 2] \cup [2; 2, 25] \cup [2, 25; 2, 5] \cup [2, 5; 2, 75] \cup [2, 75; 3],$$

$$T_1 = [0; 0.05051];$$

Cela permet d'aboutir au système suivant, compte tenu du problème ($P''1$),

$$\min_k \begin{pmatrix} 2, 5632\ell_1 + 1, 7801\ell_2 + 0, 6588\ell_3 + 0, 4869\ell_4 + 0, 3307\ell_5 + 0, 1901\ell_6 \\ + 0, 0651\ell_7 - 0, 04427\ell_8 - 0, 1380\ell_9 - 0, 2161\ell_{10} + 0, 4465\ell_{11} \\ 0.3267\ell_1 + 0.2325\ell_2 + 0.3098\ell_3 + 0.4192\ell_4 + 0.5130\ell_5 + 0.5911\ell_6 \\ + 0.6536\ell_7 - 0.7005\ell_8 - 0.7317\ell_9 - 0.7473\ell_{10} + 0.0994\ell_{11} + 1.1521 \end{pmatrix} \rightarrow \max_\ell$$

$$11,9862\ell_1 + 10,3015\ell_2 + 4,7838\ell_3 + 4,3619\ell_4 + 3,9557\ell_5 + 3,5651\ell_6 + 3,1907\ell_7 + 2,8307\ell_8 + 2,4869\ell_9 + 2,1588\ell_{10} + 1,9048\ell_{11} = 0,$$

$$7,0373\ell_1 + 5,8034\ell_2 + 2,5963\ell_3 + 2,2994\ell_4 + 2,0182\ell_5 + 1,7526\ell_6 + 1,5026\ell_7 + 1,2682\ell_8 + 1,0474\ell_9 + 0,8463\ell_{10} + 1,14\ell_{11} = 0,$$

sous contraintes que :

$$-1,01849 \leq \ell_1 \leq 1,3815$$

$$-1,01849 \leq \ell_2 \leq 1,3815$$

$$0 \leq \ell_3 \leq 2.4$$

$$0 \leq \ell_4 \leq 2.4$$

$$0 \leq \ell_5 \leq 2.4$$

$$0 \leq \ell_6 \leq 2.4$$

$$-1,9458 \leq \ell_7 \leq 0,4541$$

$$-1,9458 \leq \ell_8 \leq 0,4541$$

$$-1,9458 \leq \ell_9 \leq 0,4541$$

$$-1,9458 \leq \ell_{10} \leq 0,4541$$

$$0 \leq \ell_{11} \leq 1$$

La solution optimale est :

$$\ell' = (0,6378; -1,0184; 0; 0; 0; 0; -0,769; 0,4541; 0,4541; 0,4541; 1)$$

pour $\bar{K}_f = \{1\}$; $\bar{J}_B = \{1,7\}$; $\bar{J}_f = \phi$;

dans ce cas, il n'y a aucune exclusion d'indice.

donc la nouvelle commande \bar{u} est :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1.2, & 0 \leq t \leq 0.0551 \\ 0.4563, & 0.0551 \leq t \leq 0.52525 \\ -1.2, & 0,525255 \leq t \leq 1 \\ -1.2, & 1 \leq t \leq 1.25 \\ -1.2, & 1.25 \leq t \leq 1.5 \\ -1.2, & 1.5 \leq t \leq 1.75 \\ -1.2, & 1.75 \leq t \leq 2 \\ -2.3234e^{-2}, & 2 \leq t \leq 2.25 \\ 1.2, & 2.25 \leq t \leq 2.5 \\ 1.2, & 2.5 \leq t \leq 2.75 \\ 1.2, & 2.75 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

le nouvel support contrôle est $\{\bar{u}, \tilde{Q}_p\}$ avec

$$\tilde{Q}_p = \{\tilde{K}_f, \tilde{T}_p\}, \text{ avec } \tilde{T}_p = \tilde{T}_f = \tilde{T}_f \cup \tilde{T}_c$$

$$\tilde{T}_c = \{0 ; 1.75\}, \quad \tilde{K}_f = \{1\}, \quad \tilde{T}_f = \phi$$

$$\tilde{\Delta}(t) = -7,105427357601e^{-15} + 7,48663101604281e^{-2}t - 4,27807486631015e^{-2}t^2$$

$$\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_p) = \sum_{t \in T^+} \tilde{\Delta}(t)\Delta u(t) + \sum_{t \in T^-} \tilde{\Delta}(t)\Delta u(t) + \sum_{k \in \tilde{K}_f} \lambda_k \omega_k = 3.03956e^{-2}$$

Passons au changement du support

Posons $\mu = 0.1$ (paramètre de la méthode)

Soit la quasi-commande :

$$w(t) = \tilde{w}(t) = \begin{cases} -1.2, & \tilde{\Delta}(t) > 0 \\ 1.2, & \tilde{\Delta}(t) < 0 \\ \tilde{w}(t) \in [-1.2 ; 1.2], & \tilde{\Delta}(t) = 0 \end{cases}$$

avec sa trajectoire correspondante $\chi(t)$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$, ce qui donne

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases} -1.2, & 0 \leq t \leq 1.75 \\ 1.2, & 1.75 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

mais $H\chi(t_1) \neq g$

première itération : Calculons $\beta_2 = -1.186 < 0$

Calculons de $\|\zeta\| = 1.1367 > 0.1$

$$|\zeta(t_0)| = \max(|\zeta(t)|); \quad t \in \tilde{T}_p,$$

$$\Rightarrow t_0 = 0$$

$$\text{Calculons } \bar{\Delta}(t) = \tilde{\Delta}(t) + \sigma_0 Z(t)$$

avec

$$\tilde{\Delta}(t) = -7.105427357601 \times 10^{-15} + 7.48663101604281 \times 10^{-2}t - 4.27807486631015 \times 10^{-2}t^2$$

$$Z(t) = -0.9999999999 + 0.731856378915203t - 9.16730328495035 \times 10^{-2}t^2$$

$$\sigma_0 = -0.017879$$

σ_0 (calculé à partir de la relation R1)

$$\bar{\Delta}(t) = -1.7879 \times 10^{-2} + 8.7951 \times 10^{-2}t - 0.04442t^2$$

$$\bar{\Delta}(t) = 0 \Rightarrow t = 0.23 \text{ ou } t = 1.75$$

on choisit $t = 0.23$ car pour cette valeur, on a $\tilde{\Delta}(t).Z(t) < 0$.

Alors la nouvelle commande aura l'allure suivante :

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases} 1.2, & 0 \leq t \leq 0.23 \\ -1.2, & 0.23 \leq t \leq 1.75 \\ 1.2, & 1.75 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

les nouveaux ensembles $\bar{T}_p = \{ 0.23 ; 1.75 \}$, $\bar{T}_f = \phi$ mais toujours $H\chi(t_1) \neq g$

deuxième itération : Recalculons $\beta_2 = -1.1811 < 0$, $\|\zeta\| = 0.97876 > 0.1$

$$|\zeta(t_0)| = \max(|\zeta(t)|); \quad t \in \bar{T}_p,$$

$$\Rightarrow t_0 = 1.75$$

$$\text{Calculons } \bar{\Delta}(t) = \tilde{\Delta}(t) + \sigma_0 Z(t)$$

avec

$$\tilde{\Delta}(t) = -1.7879 \times 10^{-2} + 8.7951 \times 10^{-2}t - 0.04442t^2$$

$$Z(t) = -0.213304012390775 + 0.9628305911920227t - 0.154008007247436t^2$$

$$\sigma_0 = 0.025741$$

$$\bar{\Delta}(t) = -0.02337 + 0.11274t - 4.8384 \times 10^{-2}t^2$$

$$\bar{\Delta}(t) = 0 \Rightarrow t = 2.10 \text{ ou } t = 0.23$$

on choisit $t = 2.10$ car pour cette valeur, on a $\tilde{\Delta}(t).Z(t) < 0$.

Alors la nouvelle commande aura l'allure suivante :

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases} 1.2, & 0 \leq t \leq 0.23 \\ -1.2, & 0.23 \leq t \leq 2.10 \\ 1.2, & 2.10 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

les nouveaux ensembles $\bar{T}_p = \{ 0.23 ; 2.10 \}$, $\bar{T}_f = \phi$ et $H\chi(t_1) \neq g$, $\|\zeta\| = 0.305 > 0.1$.

troisième itération : Recalculons $\beta_2 = -1.17 < 0$

$$|\zeta(t_0)| = \max(|\zeta(t)|); \quad t \in \bar{T}_p,$$

$$\Rightarrow t_0 = 0.23$$

$$\text{Calculons } \bar{\Delta}(t) = \tilde{\Delta}(t) + \sigma_0 Z(t)$$

avec

$$\tilde{\Delta}(t) = -0.02337 + 0.11274t - 4.8384 \times 10^{-2}t^2$$

$$Z(t) = -1.16548457974248 + 0.739731471524866t - 8.79708640498266 \times 10^{-2}t^2$$

$$\sigma_0 = 0.012021$$

$$\bar{\Delta}(t) = -0.03738 + 0.12163t - 4.9441 \times 10^{-2}t^2$$

$$\bar{\Delta}(t) = 0 \Rightarrow t = 2.10 \text{ ou } t = 0.36$$

on choisit $t = 0.36$ car pour cette valeur, on a $\tilde{\Delta}(t).Z(t) < 0$.

Alors la nouvelle commande aura l'allure suivante :

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases} 1.2, & 0 \leq t \leq 0.36 \\ -1.2, & 0.36 \leq t \leq 2.10 \\ 1.2, & 2.10 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

les nouveaux ensembles $\bar{T}_p = \{ 0.36 ; 2.10 \}$, $\bar{T}_f = \phi$ et $H\chi(t_1) \neq g$, $\| \zeta \| = 0.042 < 0.1$.
pour cela on passe à la procédure finale.

La procédure finale

Posons $\tau_p^0 = \{ 0.36 ; 2.10 \}$, grâce aux k^{eme} approximations

$$\tau_j^{k+1} = \tau_j^k + \text{signe } \bar{\Delta}^\bullet(\tau_j^k) \cdot \zeta(\tau_j^k) / (d^* - d_*), \quad j = 1, \dots, m.$$

Alors pour $k = 2$, on aura

$\tau_p^2 = \{ 0.36320166 ; 2.10956779 \}$, ce qui donne comme nouvelle commande

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases} 1.2, & 0 \leq t \leq 0.36320166 \\ -1.2, & 0.36320166 \leq t \leq 2.10956779 \\ 1.2, & 2.10956779 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

cette commande est admissible, $\bar{T}_p = \{ 0.36320166 ; 2.10956779 \}$, $\bar{T}_f = \phi$, $\bar{K}_f = \{1\}$.

$$J(\tilde{w}(t)) = \min(c'_1\chi(t_1), c'_2\chi(t_1)) = c'_1\chi(t_1) = 1.4487.$$

La commande ci-dessus est optimale .

3.7 Conclusion

Dans cette partie du document, nous avons traité un problème en min-max dans le cas continu, tout en appliquant les bases théoriques.

4 Implémentations et tests informatiques

4.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous allons parler sur le côté informatique ; sur les logiciels qu'on utilise pour exécuter des algorithmes afin de nous permettre de trouver des solutions pour plusieurs problèmes mathématiques ou de la réalité.

4.2 Les logiciels informatiques

La programmation informatique est un ensemble d'outils et de logiciels qui nous permet de résoudre des problèmes mathématiques entre autres. Ces derniers peuvent être compliqué ou pas, nécessitant un grand nombre de calculs ou pas. Parmi ces logiciels on cite : MATLAB, Visual Xpress et Lingo car ces derniers peuvent résoudre les problèmes de notre problématique. Finalement on a opté pour le logiciel MATLAB.

4.3 Définition de MATLAB

Le logiciel MATLAB (MATrix LABoratory) est une plateforme de programmation et de calcul numérique utilisée par des millions d'ingénieurs et de scientifiques pour analyser des données, développer des algorithmes et créer des modèles...etc. Il combine un environnement de bureau adapté aux processus d'analyse et de conception itératifs avec un langage de programmation qui exprime directement les mathématiques matricielles. Il inclut l'éditeur en direct pour créer des scripts qui combinent du code, de la sortie et du texte formaté dans un bloc-notes exécutable.

L'environnement MATLAB se présente sous la forme d'un espace de travail (Workspace) où un interpréteur de commandes exécute des opérations et des fonctions de MATLAB [2].

4.3.1 Description de la fenêtre MATLAB

- La fenêtre MATLAB est surmontée par une barre de titre, contenant à sa gauche une icône et à sa droite les trois boutons « mise en icône », « minimisation/maximisation » et « fermeture ».
- La barre du menu contient 5 fenêtres :
 - File (fichier) permet d'obtenir l'éditeur de programme ;
 - Edit (Edition) permet de couper / coller dans la ligne de commande et autre ;
 - Debug permet l'exécution d'un programme et autres ;
 - Window (fenêtre) permet le passage aux différentes rubriques du logiciel ;
 - Help (aide) accède au menu d'aide.
- La barre d'outils qui est souvent des raccourcis de fonctions contenues dans les menus. De gauche à droite :

- Ouvrir un nouveau fichier dans l'éditeur ;
 - Rappeler un ancien fichier dans l'éditeur ;
 - Couper ;
 - Copier ;
 - Coller ;
 - Annuler ;
 - Appeler l'aide
- La fenêtre de commande ; elles se divisent en deux zones :
 - La zone historique : qui ne peut être modifiée, mais dont on peut copier des parties ;
 - La zone de commande éditable : La zone de commande permet de taper une commande qui sera acceptée à l'aide de la touche <return> ou <entrée>.

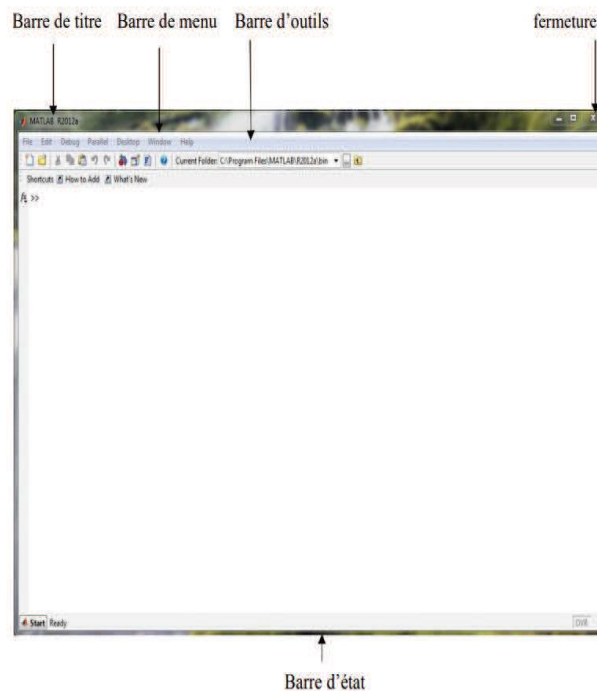


FIGURE 6 – La fenêtre principale du logiciel MATLAB

4.4 Le logiciel VISUAL XPRESS

VISUAL XPRESS comporte un langage de modélisation qui permet d'écrire les programmes linéaires sous une forme symbolique proche de l'écriture mathématique, nous permet aussi de modifier les données, enlever ou rajouter des contraintes, comparer deux modèles similaires, analyser la sensibilité des solutions par rapport aux données...etc [20].



FIGURE 7 – L’icone Visual Xpress

4.5 LINGO

L’optimisation nous aide à trouver des solutions qui donne des meilleurs résultats. Les problèmes d’optimisation sont souvent classés comme linéaires ou non linéaires, selon que les relations dans le problème.

LINGO est un outil logiciel pour utiliser la puissance de l’optimisation linéaire et non linéaire afin de formuler des problèmes mathématiques ou autres, résoudre et analyser les solutions trouvées...etc [17].



FIGURE 8 – V.1-LINGO 17.0

On passe à la partie pratique, où on va résoudre deux exemples avec d’une part l’algorithme de la méthode adaptée et d’autre part par l’utilisation du logiciel MATLAB pour des fins de comparaisons.

4.6 Exemples d’applications

4.6.1 Exemple 1

Considérons le problème suivant :

$$(P1) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 + 6x_6 \rightarrow \max \\ -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 + x_6 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 + 5x_6 = 3 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 4 \\ -2 \leq x_1 \leq 2 \\ -2 \leq x_2 \leq 2 \\ -4 \leq x_3 \leq 4 \\ -4 \leq x_4 \leq 4 \\ -6 \leq x_5 \leq 6 \\ -7 \leq x_6 \leq 7 \end{array} \right.$$

tels que

$$x' = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6), \quad d_1 = (-2; -2; -4; -4; -6; -7), \quad d_2 = (2; 2; 4; 4; 6; 7),$$

$$c' = (-1; 2; -3; 4; -5; 6), \quad b' = (2; 2; 3; 4),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On prend comme solution de départ le vecteur x défini comme suit (avec $x_5 = x_6 = 0$).

$$x = \begin{pmatrix} -291/1250 \\ 63/200 \\ 976/625 \\ -1163/1439 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J_B = \{1, 2, 3, 4\}$$

1^{ère} itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	-291/1250	0	564/3029	875/73	1351/1250	0
2	63/200	0	1079/10000	-5363/250	-2	1
3	976/625	0	2331/10000	-1741/73	-1171/1157	0
4	-1163/1439	0	129/10000	8008/215	1307/407	0
5	0	-1088/73	1	6	259/400	675/1057
6	0	625/1037	1	-7	-1294/1713	-2552/1035

$$\beta(x, J_B) = 6836/73, \quad \beta(\bar{x}, J_B) = 11027/132$$

2^{ème} itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	1351/1250	0	253/1706	5751/908	1595/1047	0
2	-2	611/2500	∞	0	-2	-565/482
3	-1171/1157	0	225/1499	-3919/197	-2394/971	0
4	1307/407	0	73/1000	17929/1661	4	-1
5	259/400	-2955/2006	1	2901/542	-1052/1013	3523/1747
6	-1294/1713	0	2112/413	1057/697	3223/5000	0

$$\beta(x, J_B) = 3943/50, \quad \beta(\bar{x}, J_B) = 4459/61$$

3^{ème} itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	1595/1047	0	209/1723	3326/847	1249/671	0
2	-2	0	2343/5000	2885/338	-377/298	0
3	-2394/971	0	2488/289	-35647/2000	-4	1
4	4	417/2000	∞	0	4	3136/509
5	-1052/1013	-4394/307	1	1414/285	916/625	2017/571
6	3223/5000	0	724/461	1027/211	-451/2000	0

$$\beta(x, J_B) = 6320/89, \quad \beta(\bar{x}, J_B) = 4478/69$$

4^{ème} itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	1249/671	0	2594/321	-5543/116	266/223	0
2	-377/298	0	799/571	8867/38	2	-1
3	-4	4000/969	∞	0	-4	19703/1423
4	4	0	2932/969	-3437/13	67/223	0
5	916/625	-3599/1671	1	1256/277	341/223	669/13
6	-451/2000	0	2162/287	7002/73	249/223	0

$$\beta(x, J_B) = 2881/295, \quad \beta(\bar{x}, J_B) = 2677/278$$

5^{ème} itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	266/223	0	/	/	/	/
2	2	-1310/313	/	/	/	/
3	-4	773/195	/	/	/	/
4	67/223	0	/	/	/	/
5	341/223	0	/	/	/	/
6	249/223	0	/	/	/	/

$$\beta(x, J_B) = 0, \quad x_{\text{optimal}} = \begin{pmatrix} 226/223 \\ 2 \\ -4 \\ 67/223 \\ 341/223 \\ 249/223 \end{pmatrix}, \quad f_{\text{optimale}} = 15.06$$

Après la compilation de problème sur MATLAB, on retrouve le même résultat

```

Optimization terminated: magnitude of search direction less than 2*options.TolX
and maximum constraint violation is less than options.TolCon.
Active inequalities (to within options.TolCon = 1e-006):
   lower    upper    ineqlin    ineqnonlin
       3         2         1         1

x =

    266/223
         2
        -4
    67/223
   341/223
   249/223

fval =

   -3359/223

```

FIGURE 9 – Résultat de MATLAB

Donc la valeur de la fonction est $f_{\text{optimale}} = 15.06$

4.6.2 Exemple 2

Soit le deuxième problème suivant :

$$(P2) \begin{cases} f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 \rightarrow \max \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 - x_6 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 + 5x_6 = 3 \\ -6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ -4 \leq x_1 \leq 2 \\ -4 \leq x_2 \leq 3 \\ -4 \leq x_3 \leq 4 \\ -5 \leq x_4 \leq 5 \\ -6 \leq x_5 \leq 6 \\ -7 \leq x_6 \leq 7 \end{cases}$$

tels que

$$x' = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6), \quad d_1 = (-4; -4; -4; -5; -6; -7), \quad d_2 = (2; 3; 4; 5; 6; 7),$$

$$c' = (1; -2; +3; -4; +5; -6), \quad b' = (2; 2; 3; 4),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ -6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On prend comme solution de départ le vecteur x défini comme suit (avec $x_4 = x_6 = 0$).

$$x = \begin{pmatrix} 31/331 \\ 24/331 \\ 225/331 \\ 0 \\ 59/331 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J_B = \{1, 2, 3, 5\}$$

1^{ème} itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	31/331	0	9/13	2879/952	448/1381	0
2	24/331	0	337/781	-2133/226	-1125/913	0
3	225/331	0	325/2351	5308/221	4	-1
4	0	1860/331	1	-5	-1099/1590	-239/331
5	59/331	0	2045/1446	-1446/331	-564/1325	0
6	0	3029/200	1	-7	-449/464	-965/331

$$\beta(x, J_B) = 22799/170, \quad \beta(\bar{x}, J_B) = 19185/166$$

2^{ème} itération :

N	x	Δ	θ	ℓ	\bar{x}	t
1	448/1381	0	852/529	3815/3667	1317/965	/
2	-1125/913	0	689/551	3063/905	2077/965	/
3	4	-5413/1042	∞	0	4	/
4	-1099/1590	1803/965	1	-2693/625	-5	/
5	-564/1325	0	3456/317	1111/1885	158/965	/
6	-449/464	0	2546/341	588/551	96/965	/

$$\beta(x, J_B) = 2230/277, \quad \beta(\bar{x}, J_B) = 0$$

$$\text{Donc } x_{\text{optimal}} = \begin{pmatrix} 1317/965 \\ 2077/965 \\ 4 \\ -5 \\ 158/965 \\ 96/965 \end{pmatrix}, \quad f_{\text{optimale}} = 29.28$$

Après la compilation de problème sur MATLAB, on retrouve le même résultat

```
Optimization terminated: magnitude of search direction less than 2*options.TolX
and maximum constraint violation is less than options.TolCon.
Active inequalities (to within options.TolCon = 1e-006):
   lower    upper   ineqlin  ineqnonlin
     4         3         1         1

x =

    1317/965
    2077/965
         4
        -5
    158/965
     96/965

fval =

   -4363/149
```

FIGURE 10 – Résultat de MATLAB

Donc la valeur de la fonction est $f_{\text{optimale}} = 29.28$

4.7 Conclusion

Dans cette partie de document, nous avons résolu des problèmes avec la méthode adaptée, en vérifiant les résultats obtenus avec le logiciel informatique MATLAB.

Conclusion générale

L'objectif de notre étude était de faire connaître les bases théoriques du contrôle optimal, ainsi que les différentes applications concrètes de cette théorie dans la réalité et la résolution des problèmes en contrôle optimal par les méthodes de résolution comme le principe du maximum de Pontryagin.

Ci-dessous on a cité les parties essentielles qui ont été réalisées dans notre travail :

Premièrement, nous avons présenté la théorie du contrôle optimal, en définissant ses notions de bases et par la suite nous avons cité les différentes méthodes de résolution des problèmes en contrôle optimal.

Au deuxième chapitre, nous avons effectué la résolution des exemples d'applications tout en appliquant les notions de base de la théorie du contrôle.

Le troisième chapitre, nous avons étudié un problème du contrôle optimal en min-max dans le cas continu.

Dans la dernière partie du travail, nous nous sommes intéressés à la présentation des logiciels informatiques MATLAB, VISUAL XPRESS et LINGO, des exemples ont été résolus par la méthode adaptée puis par le logiciel MATLAB, les résultats obtenus sont identiques.

En perspective, nous posons et proposons les problèmes suivants pour le futur :

- Le problème de contrôle optimal quadratique linéaire.
- Optimisation d'un problème de contrôle optimal avec une entrée libre.
- Résolution par la méthode de relaxation d'un problème de contrôle optimal avec une entrée libre.

Souhaitons que l'un des problèmes mentionnés ci-dessus sera traité dans un futur proche.

Références

- [1] R.Gabasov and F.M.Kirillova. *Adaptive methods of solving linear programming problems*. Preprint Series of University of Karasruhe., Institute for Statistics and Mathematics, (1994).
- [2] Stormy Attaway. *Matlab : A Practical Introduction to Programming and Problem Solving*. (2009).
- [3] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Birkhäuser Inc., Boston, (1997).
- [4] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17 of *Math. Appl.* Springer-Verlag, (1994).
- [5] C. Bennani. *Stabilisation et estimation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires et application*. PhD thesis, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou UMMTO, (2011).
- [6] M. Chebbah. *Résolution et implémentation d'un problème min-max en contrôle optimal*. PhD thesis. Mémoire de magister en mathématique appliquées UMMTO, pp. 63-68, (2006).
- [7] M. Chebbah. *Résolutions et Implémentations de Problèmes en Optimisation Globale*. PhD thesis, UMMTO, (2020).
- [8] CH.Sabrina and Z.Sarah. Résolution de problème de contrôle optimal par la méthode de perturbation d'homotopie. , Université AMO de Bouira, pp. 21-22, (2019).
- [9] Emmanuel.Trélat. *Contrôle optimal : théorie et application*. UMR 7598 4 place Jussieu, BC 187 75252 Paris cedex 05, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Institut Universitaire de France Laboratoire Jacques-Louis Lions CNRS, (2013).
- [10] G. Faraud and Y. Zylberberg. Equation de hamilton-jacobi. (2004).
- [11] R.V. Gamekrelidze, L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanski, and E.F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes*. Interscience Publishers, New York, (1962).
- [12] R. Ignat. Equation de hamilton-jacobi et contrôle optimal. *Seminar on Fixed Point Theory Cluj-Napoca*, 3 :239–248, (2002).
- [13] F. Jean, Y. Chitour, and E. Trélat. Propriétés génériques des trajectoires singulières. *C R Math Acad Sci Paris*, (2003).
- [14] F. Jean, Y. Chitour, and E. Trélat. Genericity results for singular curves. *J Differential Geom*, (2006).
- [15] F. Jean, Y. Chitour, and E. Trélat. Singular trajectories of control affine systems. *SIAM J Control Optim*, (2008).
- [16] K.Louadj. Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimal. Thèse de doctorat UMMTO, (2012).
- [17] John R. Nyquist and Robert Martin. *Lingo - Le guide du programmeur*. OEM, (2001).
- [18] L. Pontryagin and al. *Mathematical theory of optimal processes*. Mir, Moscow, (1974).
- [19] R.E.Kalman. *Mathematical description of linear dynamical systems*. J. SIAM. control., (1963).
- [20] Marc Sevaux, Christelle Gueret, and Christian Prins. *Programmation linéaire 65 problèmes d'optimisation résolus avec visual xpress*. (2000).

RÉSUMÉ

Pendant notre étude, nous avons introduit la théorie du contrôle optimal tout en effectuant un état de l'art sur cette théorie (but de commande, contrôlabilité, les méthodes pertinentes de résolution).

Ensuite nous avons traité différents problèmes ; le problème en temps minimal, un exemple d'application pour le cas discret et un problème en contrôle optimal. Par la suite, nous avons résolu un problème du contrôle optimal en min-max dans le cas continu.

Finalement, nous avons présenté les logiciels MATLAB, VISUAL XPRESS, LINGO et applications informatiques ainsi que la résolution de deux exemples avec des contraintes généralisées avec la méthode adaptée.

ABSTRACT

During our study, we introduced the theory of optimal control while carrying out a state of the art on this theory (goal of control, controllability, the relevant methods of resolution).

Then we dealt with different problems ; the problem in minimal time, an example of application for the discrete case and a problem in optimal control. Subsequently, we solved a min-max optimal control problem in the continuous case.

Finally, we presented the MATLAB, VISUAL XPRESS, LINGO software and computer applications as well as the resolution of two examples with generalized constraints with the adapted method.